

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինովյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Ջաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Բամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гинювян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсисян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

**ИНТЕГРАЛЬНАЯ И
СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Тематическая серия, № 6

Редактор серии Р. В. Амбарцумян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Это шестой номер тематической серии, посвященной Интегральной Геометрии (в смысле Бляшке-Сантало-Хадвигера) и Стохастической Геометрии. Статьи в этой области, имеющие прикладной или статистический характер, регулярно публикуются в различных изданиях. Однако работы в той же области, но более ориентированные на математический анализ, не имеют определенного признанного места публикации. Настоящая тематическая серия надеемся исправит эту ситуацию.

В области интегральной и стохастической геометрии журналом "Известия НАН Армении. Математика" опубликованы, не считая тематической серии, три специальных сборника (4-ые номера за 1994, 1996 и 1998гг.) под общим названием "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии". Эти три сборника заслужили самых высоких оценок (так профессор Дитер Баум из Трирского университета писал: "Букет блестящих и впечатляющих аналитических результатов... очень важные, успешные и глубокие математические исследования").

Редакционная коллегия надеется на положительный отклик международного математического сообщества, включая представление статей для публикации, участие в процессе рецензирования и т.д. Журнал готов на любое сотрудничество, направленное на улучшение качества тематической серии.

Рубен Амбарцумян
Главный Редактор

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ δ -МЕР

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении

E-mail : rhambart@aua.am

ВВЕДЕНИЕ

Меры в пространствах интегральной геометрии таких, как

$$G = \text{прямые в } \mathbb{R}^2, \quad E = \text{плоскости в } \mathbb{R}^3, \quad \Gamma = \text{прямые в } \mathbb{R}^3,$$

допускают "диофантовы" (по терминологии Дж.Дж.Сильвестра [1]) либо комбинаторные (по терминологии [2]) разложения, действительные для множеств A , принадлежащих к так называемым "объединенным кольцам" подмножеств, определенным в тех же самых пространствах (см. обзор [3]). Метод интегрирования "диофантовых" разложений был представлен в ранних публикациях по Комбинаторной интегральной геометрии, [4], [5] и [2]. Для множеств $A \subset G, \Gamma$ или E , определенных как совокупности хорд, ограниченных выпуклых областей в \mathbb{R}^2 или тел в \mathbb{R}^3 , интегрирование приводит к интересным результатам. Так, в работах [4], [5] и [2] представлен ряд тождеств или неравенств для выпуклых областей или тел.

Однако, на ранней стадии исследований, комбинаторные разложения всегда записывались для мер, инвариантных относительно евклидовых движений в пространствах G, E или Γ . Интегрирования "диофантовых" разложений в пространстве G , записанное для δ -мер было впервые описано в работе [3]. Полученное этим методом в [3] дезинтегрированное изопериметрическое неравенство послужило мотивировкой для продолжения автором исследований в том же направлении. Настоящая работа сообщает о результатах этих исследований.

Дезинтегрированное изопериметрическое неравенство [3] относится к X — гау плоской выпуклой области, исходящего из точки на границе области : в этом

смысле этот результат принадлежит к плоской *томографии*. Ради полноты изложения мы поместили в §1 краткое изложение этого результата. Тот же §1 содержит новые выводы относительно X -гау плоских выпуклых областей, включая новый альтернативный метод получения дезинтегрированных изопериметрических неравенств. Подобные вопросы, относящиеся к выпуклым телам в \mathbb{R}^1 составляют тему §3-§5.

В трех измерениях существует два способа применения "диофантовых" разложений для δ -мер: либо путем дальнейшего интегрирование результатов, полученных для плоскости, либо начиная процесс с некоторого "диофантова" разложения, непосредственно ассоциированного с выпуклым телом. В §2 мы применяем первый и в §3-§5 - второй методы. В обоих случаях X -гау исходят из точки на границе выпуклого тела и результаты относятся к интегральным *томографическим параметрам*, т.е. определенным интегралам от X -гау. Очевидно, что X -гау, исходящий из границы, сводится к уравнению границы рассматриваемого тела в пространственных полярных координатах с центром в начале X -гау.

§1. ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Введем основные обозначения, используемые в этом параграфе:

D = строго выпуклая ограниченная открытая область в \mathbb{R}^2 ,

∂D = кусочно-гладкая граница D ,

χ = хорда области D (т.е. $\chi = g \cap D$ с $g \in G$), или ее длина, соответственно,

$[D]$ = пространство хорд D (подмножество пространства G),

dg = мера инвариантная относительно евклидовых движений в G ,

ν = ориентирования хорда области D ,

$[D]_.$ = пространство ориентированных хорд D ,

$d\nu$ = сужение dg на $[D]_.$ (локально, $d\nu = dg$),

$[\nu]$ = множество прямых в G , разделяющих концы от ν .

Для данной последовательности ν_1, \dots, ν_n направленных хорд D , $n \geq 2$, определим

$$A = \bigcap_1^n [\nu_i] \subset [D].$$

Выберем прямую $g_0 \in [D]$ и запишем

δ_0 = δ -мера в пространстве G , сосредоточенная на g_0 .

Предположим никакие три конца хорд ν_i не лежат на одной прямой, тогда применение стандартных алгоритмов работ [2], [3] приведет к "диофантову"

разложению на плоскости

$$2 \delta_0(A) = 2 \sum_{i=1}^n I_{[\nu_i]}(g_0) I_{n-1}(\nu_i) + \sum_{k < l} I_{\{P_k, P_l\}}(g_0) I_{n-2}(g_{kl}) [I_d - I_s]. \quad (1.1)$$

где

$I_{[\nu]}(g)$ = индикаторная функция множества $[\nu]$,

$I_m(g) = 1$, если прямая g пересекается m углами из совокупности ν_1, \dots, ν_n .

g_{kl} = прямая, проходящая через P_k, P_l .

$I_d = 1$, если ν_k и ν_l лежат в различных полуплоскостях относительно g_{kl} , 0 в противном случае,

$I_s = 1$, если ν_k и ν_l лежат в одной и той же полуплоскости относительно $g_{kl}(g_0)$, 0 в противном случае,

сумма $\sum_{k < l}$ берется по всем 2-подмножествам $\{P_k, P_l\}$ совокупности концов игл ν_1, \dots, ν_n , которые не являются парами концов некоторой иглы ν_i . Так число слагаемых в $\sum_{k < l}$ равняется $n(2n-1) - n = 2n(n-1)$.

Проинтегрируем (1.1) относительно меры $d\nu_1 \dots d\nu_n$. Во-первых,

$$2 \int \dots \int \delta_0(A) d\nu_1 \dots d\nu_n = 2 \prod_{i=1}^n \int I_{[\chi_0]}(\nu_i) d\nu_i = 2 (4\chi_0)^n. \quad (1.2)$$

где

$\chi_0 = g_0 \cap D$, $[\chi_0]_*$ = ориентированная хорда, пересекающая $[\chi_0]$.

Из соображений симметрии, получим

$$\begin{aligned} 2 \int \dots \int \sum_{i=1}^n I_{n-1}(\nu_i) \delta_0([\nu_i]) d\nu_1 \dots d\nu_n &= 2n \int_{[\chi_0]_*} d\nu_1 \int \dots \int I_{n-1}(\nu_1) d\nu_2 \dots d\nu_n = \\ &= 4n \int_{[\chi_0]} (4\chi)^{n-1} dg. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Заметим, что коэффициент 2 заменен на 4, поскольку $[\chi_0]$ есть множество в пространстве $[D]$. Далее воспользуемся хорошо известными формулами

$$d\nu = \sin \psi dl d\psi \quad \text{и} \quad dg = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\chi_{12}} dl_1 dl_2, \quad (1.4)$$

где

l = одномерная координата хвоста ν на ∂D

dl = мера длины на ∂D

ψ = угол между ν и прямой, касательной к ∂D в точке l .

χ_{12} = хорда, соединяющая точки l_1 и l_2 ,

α_1, α_2 = углы между χ_{12} и прямыми, касательными к ∂D в l_1, l_2 .

Имеем

$$\begin{aligned} & \int \left[\sum_{k < l} I_{\{P_k, P_l\}}(g_0) I_{n-2}(g_{kl}) [I_d - I_s] \right] d\nu_1 \dots d\nu_n = \\ & = -8n(n-1) \left[\int_{D_1} \int_{D_2} + \int_{D_2} \int_{D_1} \right] (4\chi_{12})^{n-2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 = \\ & = -4n(n-1) \int_{[\chi_0]} (4\chi)^{n-1} \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg. \end{aligned} \quad (1.5)$$

(в §4 ниже аналогичные вычисления представлены во всех деталях)

Во второй строке соотношения (1.5) D_1, D_2 = части ∂D разделенные концами χ_0 . Предположим, что углы α_1, α_2 являются внутренними для D и лежат в одной и той же полуплоскости относительно χ_{12} .

После сокращения на 4^n , из (1.2), (1.3) и (1.5) получаем

$$\chi_0^n = \frac{n}{2} \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1} dg - \frac{1}{2} n(n-1) \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1} \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg. \quad (1.6)$$

Согласно линейным свойствам (1.6), это уравнение приводится к

$$F(\chi_0) = \frac{1}{2} \int_{[\chi_0]} f(\chi) dg - \frac{1}{2} \int_{[\chi_0]} f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg, \quad (1.7)$$

сначала для полиномиальных функций f вида $f(x) = a_1 x + \dots + a_n x^n$. По теореме Вейерштрасса об аппроксимации, соотношение (1.7) имеет место для каждой функции $f(x)$ с непрерывной первой производной $f'(x)$; в (1.7),

$$F(x) = \int_0^x f(u) du. \quad (1.8)$$

Укажем на применения (1.6), относящиеся к томографии. Для $n = 2$, (1.6) представляем в виде

$$\int_{[\chi_0]} \chi dg = \int_{D_1} \int_{D_2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 + \chi_0^2. \quad (1.9)$$

С другой стороны, согласно (1.4), имеем

$$\int_{[\chi_0]} \chi dg = \int_{D_1} \int_{D_2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 dl_1 dl_2. \quad (1.10)$$

Выберем точку $P \in \partial D$, в которой ∂D имеет ненулевую кривизну и пусть χ_0 меняется так, что дуга D_1 стягивается к точке P . Тогда D_2 стремится к ∂D . Разделив уравнения (1.9) и (1.10) на χ_0 и вычислив пределы, используя (1.4) получим тождества

$$\int_{[P]} \chi \sin \psi d\psi = \int_{[P]} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_2. \quad (1.11)$$

$$\int_{[P]} \chi \sin \psi d\psi = \int_{[P]} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 dl_2. \quad (1.12)$$

Здесь $[P]$ обозначает пучок прямых, проходящих через точку P , интерпретируемый либо как $(0, \pi)$ либо как ∂D . Так что $d\psi$ и dl_2 являются в действительности мерами на $[P]$. Очевидно, α_2 измеряется в точке l_2 , а χ есть длина хорды, выходящей из P в направлении α_1 . Суммируя (1.11) и (1.12), получим, что

$$2 \int_{[P]} \chi \sin \psi d\psi = \int_{[P]} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) dl_2 = H - 2 \int_{[P]} \sin^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} dl_2, \quad (1.13)$$

где H есть периметр области D . Интеграл

$$T(P) = \frac{1}{2} \int_{[P]} \chi \sin \psi d\psi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \chi \sin \psi d\psi, \quad (1.14)$$

определен для любого $P \in \partial D$ при условии, что существует касательная в точке P . В (1.14), χ = хорда области D , выходящая из точки $P \in \partial D$ и образующая угол ψ с касательной в P . В стандартных томографических терминах, $T[P]$ - весовой интеграл от $\chi = \chi(\psi)$, X -ray из точки $P \in \partial D$.

Отметим некоторые свойства $T(P)$. В более слабой форме, (1.13) можно записать в виде неравенства

$$T(P) \leq \frac{H}{4}, \quad (1.15)$$

сводящееся к равенству, если D является круговым диском (в этом случае $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ и дефицитный член в соотношении (1.13) исчезает). На самом деле, записав простое дифференциальное уравнение, можно показать, что если условие $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ удовлетворено хотя бы для одной точки $P \in \partial D$, то D является круговым диском. Это означает, что, по крайней мере в классе областей D с гладкими границами, неравенство (1.15) станет равенством тогда и только тогда, когда D является круговым диском. Согласно стандартным формулам интегральной геометрии (см.[6]), имеем

$$\int_{\partial D} T(l) dl = \int \chi dg = \pi \|D\|, \quad \text{крат площадь области } D.$$

Интегрируя (1.15) по границе ∂D , получим классическое изопериметрическое неравенство:

$$\pi \|D\| \leq \frac{H^2}{4}.$$

Следовательно, неравенство (1.15) можно назвать *дезинтеграцией изопериметрического неравенства*.

В силу неравенства Шварца имеем

$$\left[\int_{|P|} \chi \sin \psi \, d\psi \right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_{|P|} \chi^2 \, d\psi.$$

Очевидно, что $\frac{1}{2} \chi^2 \, d\psi$ есть элемент площади в D , так что

$$T_1(P) = \int_{|P|} \chi^2 \, d\psi = 2 \|D\|, \quad (1.16)$$

откуда следует, что

$$4T^2(P) \leq \pi \|D\|, \quad \text{или, эквивалентно,} \quad 4T^2(P) \leq \frac{\pi}{2} T_1(P). \quad (1.17)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\chi = C \sin \psi$ т.е. когда D есть диск диаметра C .

Фактически, $T_1(P)$ является другим томографическим параметром, зависящим от X -гау из точки $P \in \partial D$. Примечательно, что из (1.17) следует заключение относительно возможности томографического подтверждения гипотезы о том, что D является круговым диском на основе параметров $T(P)$ и $T_1(P)$.

Пусть D — ограниченная выпуклая область на плоскости и $P \in \partial D$ — точка гладкости ∂D . Если

$$4T^2(P) = \frac{\pi}{2} T_1(P)$$

то D является круговым диском.

В заключение параграфа, применим к (1.7) ту же процедуру. Результат

$$\int_{|P|} f(\chi) \sin \alpha_1 \, d\alpha_1 = \int_{|P|} f'(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 \, d\alpha_1, \quad (1.18)$$

будет справедлив для любой функции $f(x)$ с непрерывной производной $f'(x)$ и такой, что $f(0) = 0$. В этом тождестве α_1, α_2 суть углы между хордой $\chi \in |P|$, $P \in \partial D$ и границей ∂D в концах хорды χ . В частности, α_1 — угол между χ и касательной к ∂D в точке P . Напомним, что углы α_1, α_2 суть внутренние к области D и лежат в одной полуплоскости относительно хорды χ .

Укажем случай, когда возможно интегрирование. Пусть две хорды $\chi_1, \chi_2 \in [P]$ удовлетворяют условиям

1) длины $\chi_1 = \chi_2 = \tau > 0$ и

2) для каждой хорды $\chi \in [P]$, что лежит между χ_1 и χ_2 , имеем $\chi > \tau$, в противном случае $\chi < \tau$.

Тогда для функции

$$f_\tau(u) = 0 \text{ при } u < \tau, \quad f_\tau(u) = 1 \text{ при } u > \tau.$$

(1.18) принимает вид

$$\int_{\{\chi > \tau\}} \sin \alpha_1 d\alpha_1 = \int_{[P]} \delta_\tau(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 d\alpha_1. \quad (1.19)$$

где $\delta_\tau(\chi)$ – символ δ -функции со скачком в τ . Дополнение к интервалу $\{\chi > \tau\} \subset (0, \pi)$ есть объединение двух интервалов, длины которых пусть будут β_1 и β_2 .

Очевидно, что

$$\int_{\{\chi > \tau\}} \sin \alpha_1 d\alpha_1 = \cos \beta_1 + \cos \beta_2. \quad (1.20)$$

Для интегрирования второго интеграла в (1.19) представим его в виде суммы

$$\begin{aligned} & \int_{[P]} \delta_\tau(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 d\alpha_1 = \\ & = \int_{\epsilon_1} \delta_\tau(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 d\alpha_1 + \int_{\epsilon_2} \delta_\tau(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 d\alpha_1. \end{aligned}$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2 \subset (0, \pi)$ – некоторые интервалы, центры которых суть направления χ_1 и χ_2 , и обладающие следующим свойством: в каждом $\epsilon_i, i = 1, 2$ отображение: направление \rightarrow длина хорды является взаимно-однозначным.

Пусть $\frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} \neq 0$ и существует касательная к концам χ_1, χ_2 , тогда имеем Якобиан

$$d\chi = |\cot \alpha_2| \chi d\alpha_1. \quad (1.21)$$

Следовательно, для $i = 1, 2$, в соответствии с равенством (1.20), получим

$$\int_{\epsilon_i} \delta_\tau(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cot \alpha_2 d\alpha_1 = \int_0^\tau \delta_\tau(\chi) \cos \alpha_1 d\chi = \cos \beta_i.$$

Используем (1.21) для преобразования (1.18) к виду

$$\int_{[P]} f(\chi) \sin \alpha_1 d\alpha_1 = \int_{[P]} f'(\chi) \cos \alpha_1 d\chi. \quad (1.22)$$

В силу того, что $f(0) = 0$, это эквивалентно интегральному соотношению Стильтеса

$$\int_{\{P\}} f(x) d \cos \alpha_1 = \int_{\{P\}} \cos \alpha_1 df(x). \quad (1.23)$$

Итак, (1.23) может служить исходным пунктом для получения соотношения (1.18), что, в свою очередь влечет неравенство (1.15), и т.д. Интересно было бы найти другие применения соотношения (1.23) или его вариантов в задаче томографического восстановления области D .

§2. ХОРДЫ, ПЕРЕСЕКАЮЩИЕ ПЛАСТИНКУ

Начнем с одной конкретной параметризации плоскостей $e \in \mathbb{E}$. Для данной базовой плоскости $b \in \mathbb{E}$, любая плоскость e , состоящая из множества плоскостей, пересекающих b , может быть параметризована в виде $e = (g, \psi)$, где

g = прямая $b \cap e$, $g \in G_b$, где

G_b = пространство прямых, принадлежащих плоскости b ,

ψ = плоский угол между e и b .

При каждом выборе b мера, инвариантная относительно евклидовых движений de в пространстве \mathbb{E} записывается в виде

$$de = \sin^2 \psi dg d_g \psi, \quad (2.1)$$

где

dg = мера в пространстве G_b , инвариантная относительно евклидовых движений

$d_g \psi$ = мера, инвариантная относительно вращений на окружности, ортогональной к g .

В пространстве пар (γ, e) , где $\gamma \in \Pi'$ (прямая в \mathbb{R}^3) и $e \in p_\gamma$, где

p_γ = пучок плоскостей, содержащих γ ,

рассмотрим меру $d\gamma d_\gamma \phi$

$d\gamma$ = инвариантная мера евклидовых движений в пространстве Π' , тогда как

$d_\gamma \phi$ = мера на p_γ , инвариантная относительно вращений вокруг γ .

В пространстве пар (e, g) , где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in G_e$, рассмотрим меру $de d_e g$.

Благодаря "дуальному" отображению

$$(\gamma, \phi) = (e, g),$$

где $e \in p_\gamma$ есть плоскость, соответствующая ϕ , а $g \in G_e$ совпадает с γ как с множеством в \mathbb{R}^3 , $d\gamma d_\gamma \phi$ и $de d_e g$ являются, фактически, мерами в одном и том же пространстве. Хорошо известно, что

$$de d_e g = d\gamma d_\gamma \phi. \quad (2.2)$$

Пусть B — строго выпуклое ограниченное тело в \mathbb{R}^3 с кусочно-гладкой границей ∂B и τ — пластинка, стягивающая тело B и соответствующая базовой плоскости, т.е.

$$\tau = B \cap b.$$

Обозначим

\mathbb{E}_τ = множество плоскостей, пересекающих τ ,

χ_e = длина хорды $e \cap \tau$.

Запишем (1.7) для каждого $e \in \mathbb{E}_\tau$. Интегрирование этого тождества по de вдоль \mathbb{E}_τ дает

$$\int_{\mathbb{E}_\tau} F(\chi_e) de = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{E}_\tau} de \int_{[\chi_e]} f(x) d_r g - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{E}_\tau} de \int_{[\chi_e]} f'(x) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d_r g. \quad (2.3)$$

Заметим, что χ_e не зависит от ψ в соотношении (2.1) и χ не зависит от ϕ в (2.2).

Отсюда, применяя соотношения (2.1) и (2.2), получим

$$\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{G}_\tau} F(\chi_e) d_r g = \frac{\pi}{2} \int_{\Gamma_\tau} f(x) d\gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\tau} f'(x) \chi d\gamma \int_0^\pi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d_\gamma \phi, \quad (2.4)$$

где

\mathbb{G}_τ = прямые в b , пересекающие τ ,

$d_r g$ = инвариантная мера евклидовых движений в пространстве хорд пластинки τ ,

Γ_τ = прямые, исходящие из Γ и пересекающие τ .

Окончательно, применяя результат работы [4]

$$\int_0^\pi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d_\gamma \phi = \cot \psi_1^* \cot \psi_2^* \cos \alpha,$$

получим

$$\int_{\mathbb{E}_\tau} F(\chi_g) d_r g = \int_{\Gamma_\tau} f(x) d\gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\tau} f'(x) \chi \cot \psi_1^* \cot \psi_2^* \cos \alpha d\gamma, \quad (2.5)$$

где

χ_g = длина хорды $g \cap \tau$ при $g \in \mathbb{G}_\tau$,

χ = длина хорды $\gamma \cap B$,

ψ_1^*, ψ_2^* = углы между χ и плоскостями T_1, T_2 , касательными к ∂B в концах хорды χ ,

α = плоский угол между двумя плоскостями, содержащими хорду χ и перпендикулярными либо к T_1 , либо к T_2 .

Теперь, оставляя тело B неподвижным, будем стягивать пластинку τ (скажем, при помощи параллельного переноса) до точки $P \in \partial B$, где предполагаем существование касательной плоскости к ∂B . Нашей целью является найти предельную форму для (2.5).

Используя (см. [6]) стандартное представление

$$d\gamma = \sin \psi^* dP d\Omega,$$

где

Ω = пространственное направление прямой γ

ψ_1^* = угол между Ω и плоскостью, касательной к ∂B в точке P ,

dP = мера площади на границе ∂B ,

$d\Omega$ = мера, инвариантная относительно вращений на сфере направлений в \mathbb{R}^3 .

найдем

$$\int_{\Gamma} f(\chi) d\gamma = \|\tau\| \int_{|P|} f(\chi) \sin \psi_1^* d\Omega + o(\|\tau\|).$$

В последнем интеграле

$|P|$ = множество хорд тела B , исходящих из точки $P \in \partial B$,

χ = длина хорды, исходящей из точки P в пространственном направлении Ω ,

$\|\tau\|$ = площадь пластинки τ .

Применяя выражение для $d\gamma$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f'(\chi) \chi \cot \psi_1^* \cot \psi_2^* \cos \alpha d\gamma &= \\ &= \|\tau\| \int_{\partial D} f'(\chi) \chi^{-1} \cos \psi_1^* \cos \psi_2^* \cos \alpha dP + o(\|\tau\|). \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет при $x = 0$ равенству $f(x) = o(x)$, то

$$\int_{\mathbb{E}} F(\chi_e) dg = o(\|\tau\|). \quad (2.6)$$

Так, что при условии (2.6) предельная форма выражения (2.5) примет вид

$$\int_{|P|} f(\chi) \sin \psi_1^* d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial D} f'(\chi) \chi^{-1} \cos \psi_1^* \cos \psi_2^* \cos \alpha dP. \quad (2.7)$$

Применяя Якобиан

$$d\Omega = \frac{\sin \psi_2^*}{\chi^2} dP,$$

получим соотношение, "дуальное" к (2.7)

$$\int_{|P|} f(x) \sin \psi_1^* d\Omega = \int_{\partial D} f(x) \frac{1}{x^2} \sin \psi_1^* \sin \psi_2^* dP. \quad (2.8)$$

Теперь в (2.7) и (2.8) положим $f(x) = x^n$ и сложим оба уравнения. Получим

$$\int_{|P|} x^n \sin \psi_1^* d\Omega \leq \frac{n}{2(n+2)} \int_{\partial B} x^{n-2} dP. \quad (2.9)$$

в частности,

$$\int_{|P|} x^2 \sin \psi_1^* d\Omega \leq \frac{1}{2} \|\partial B\|, \quad (2.10)$$

где $\|\partial B\|$ есть площадь ∂B .

Значение величин

$$T_f(P) = \int_{|P|} f(x) \sin \psi_1^* d\Omega$$

имеет томографию, подобную $T(P)$ в §1 : она является $\sin \psi_1^*$ весовыми интегралами вдоль X -гау хорд, исходящего из точки $P \in \partial B$.

Неравенство (1.17), связывающее параметры $T(P)$ и $T_1(P)$ служит исходным пунктом для другого вычисления. Проинтегрируем (1.17) для $D = \epsilon \cap B$, относительно меры

$d\omega$ = инвариантная мера, заданная на множестве

$\langle P \rangle$ = плоскости, проходящие через точку $P \in \partial D$,

согласно параметризации $\epsilon \mapsto \omega$:

ω = нормаль направления к плоскости $\epsilon \in |P|$.

Имеем

$$\int_{\langle P \rangle} T^2(P) d\omega = \int_{\langle P \rangle} d\omega \iint_{\psi_1, \psi_2 \in \epsilon} \chi_1 \sin \psi_1 \chi_2 \sin \psi_2 d\psi_1 d\psi_2.$$

Пользуясь соотношением

$$\sin \psi_1 \sin \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 d\omega = \sin \psi_{12} d\Omega_1 d\Omega_2$$

где

Ω_i = пространственное направление хорды χ_i , $i = 1, 2$,

$d\Omega$ = инвариантная мера на единичной сфере, а

ψ_{12} = угол между направлениями Ω_1, Ω_2 .

Получим

$$\int_{\langle P \rangle} T^2(P) d\omega = \iint_{|P| \times |P|} \chi_1 \chi_2 \sin \psi_{12} d\Omega_1 d\Omega_2.$$

где

$[P]$ = множество хорд тела V , исходящих из точки $P \in \partial V$.

С другой стороны, согласно соотношению

$$d\omega d\psi = d\Omega d\Omega\phi$$

где $d\Omega\phi$ = инвариантная мера на единичной окружности, ортогональной к Ω , получим

$$\int_{\langle P \rangle} T_1(P) d\omega = \pi \int_{[P]} \chi^2 d\Omega.$$

Так, мы приходим к неравенству

$$4 \iint_{[P] \times [P]} \chi_1 \chi_2 \sin \psi_{12} d\Omega_1 d\Omega_2 \leq \frac{\pi^2}{2} \int_{[P]} \chi^2 d\Omega. \quad (2.11)$$

С обеих сторон участвуют параметры, допускающие интерпретацию в пространственной томографии; из критерия плоской томографии в параграфе §1 следует следующий критерий:

неравенство (2.11) сводится к равенству тогда и только тогда, когда почти каждая (относительно меры de) плоская секция тела V является круговым диском. (Предположительно, тогда V является шаром.)

§3. КОМБИНАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ δ -МЕР В \mathbb{E}

Комбинаторные разложения для δ -мер в пространстве \mathbb{E} могут задаваться теми же комбинаторными коэффициентами, что и в случае плоскости. Элемент \mathbb{E} , на котором будет сосредоточена δ -мера назовем базовым и запишем

b = базовая плоскость.

Обозначим также

φ = некоторое направление на плоскости b (параметр будущего разложения).

e_φ = плоскость, нормальная к направлению φ .

\mathbb{E}_φ = пространство плоскостей, ортогональных к плоскости e_φ .

\mathbb{G}_φ = пространство прямых на плоскости e_φ .

Каждой прямой $g \in \mathbb{G}_\varphi$ соответствует плоскость $e \in \mathbb{E}_\varphi$, определенная соотношением

$$g = e_\varphi \cap e, \quad (3.1)$$

и наоборот. Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим $\{Q_i\}$ - перпендикулярную проекцию множества $\{P_i\}$ на e_φ , где

Q_i = перпендикулярная проекция P_i на e_φ .

Обращение отображения (3.1) определяет кольцо $\tau_2\{P_i\}$ в \mathbb{E}_2 :

$A \subset \mathbb{E}_2$ принадлежит кольцу $\tau_2\{P_i\}$ тогда и только тогда, когда множество $B = \{g = e_\varphi \cap A : e \in A\}$ принадлежит $\tau\{Q_i\}$, определенному, как обычно, (см. [2], [3]) в G_n .

Пусть

$\delta_g = \delta$ -мера в пространстве G_n , сконцентрированная на элементе $g \in G_n$.

Очевидно, что для любого $B \subset G_n$ и $g \in G_n$ выполняется

$$\delta_g(B) = I_B(g)$$

где $I_B(g)$ — обычная индикаторная функция. При условии, что прямая $g \in G_n$ не содержит точек Q_i , для любого $B \in \tau_2\{Q_i\}$ можем записать комбинаторное разложение для меры δ_g в "индикаторной" форме

$$2I_B(g) = \sum_{i < j} u_{ij}(B) I_{[Q_i, Q_j]}(g), \quad (3.2)$$

где

$[Q_i, Q_j]$ = множество прямых в G_n , разделяющих Q_i от Q_j . При соотношении (3.1) этому множеству соответствует

$[P_i, P_j]$ = множество плоскостей в \mathbb{E}_2 , разделяющих P_i от P_j .

При этих соответствиях имеем

$$I_B(g) = I_A(e) \text{ и } I_{[Q_i, Q_j]}(g) = I_{[P_i, P_j]}(e),$$

откуда, для базовой плоскости b соотношение (3.2) представляется в виде

$$2I_A(b) = \sum_{i < j} u_{ij}(B) I_{[P_i, P_j]}(b). \quad (3.3)$$

Алгоритм вычисления коэффициентов $u_{ij}(B)$ можно с легкостью переформулировать в терминах плоскостей

$e_{ij}(\varphi)$ = плоскость, содержащая точки P_i, P_j и направления φ , $e_{ij}(\varphi) \in \mathbb{E}_2$.

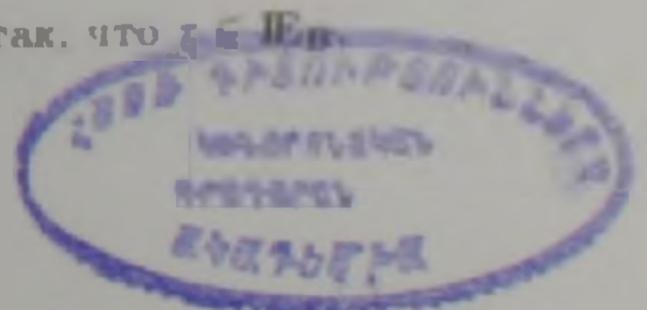
Как это сделано ниже.

§4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ БЮФФОНА-СИЛЬВЕСТРА В \mathbb{R}^3

Пусть B = ограниченное выпуклое тело в \mathbb{R}^3 . Пространство пластинок $\tau = B \cap e$, $e \in E$, по существу, совпадает с множеством

\mathbb{E}_B = множество плоскостей, пересекающих тело B , так, что $\tau \in \mathbb{E}_B$.

Мы также используем обозначения



$||\tau||$ = площадь пластинки τ .

Γ_τ = множество хорд тела B , пересекающие пластинку τ (ср. §2).

$[\nu]$ = пластинки, пересекающие хорду ν тела B ,

ν_1, \dots, ν_n = n направленных хорд тела B .

$\{P_i\}$ = множество концов хорд ν_i , $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим разложение (3.3) для

$A = \bigcap_{i=1}^n [\nu_i]$ = пластинки, пересекающие все хорды ν_i , $i = 1, \dots, n$, $A \in \tau_\nu \{P_i\}$. и

δ_b = δ -мера на \mathbb{E}_B , сосредоточенная на некоторой базовой пластинке b .

Рассмотрим в пространстве n направленных хорд ν_1, \dots, ν_n меру

$$d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n,$$

где каждая $d\nu_i$ является элементом инвариантной меры в Π . Плоскость b не содержит точки P_i для почти всех (ν_1, \dots, ν_n) . Согласно (3.3), коэффициенты в комбинаторном разложении для $\delta_b(A)$ по существу те же, что и в (1.1):

$$2\delta_b(A) = 2 \sum_{\nu_i} I_{[\nu_i]}(b) I_{n-1}(\tau_i(\varphi)) + \sum_{k < l} I_{\{P_k, P_l\}}(b) I_{n-2}(\tau_{kl}(\varphi)) [I_d - I_s] \quad (4.1)$$

где

$I_{[\nu]}(\tau)$ = индикаторная функция множества $[\nu]$,

$I_m(\tau) = 1$, если пластинка τ пересекается m иглами из совокупности ν_1, \dots, ν_n ,

$\tau_i(\varphi)$ = пластинка, содержащая ν_i и направление φ ,

$\tau_{kl}(\varphi)$ = пластинка, содержащая хорду P_k, P_l и направление φ ,

$I_d = 1$, если ν_k и ν_l лежат в различных полупространствах относительно $\tau_{kl}(\varphi)$, 0 - в противном случае,

$I_s = 1$, если ν_k и ν_l лежат в тех же самых полупространствах относительно $\tau_{kl}(\varphi)$, 0 - в противном случае.

Пусть концы P_k, P_l фиксированы, тогда индикаторные функции I_d, I_s зависят только от направлений игл ν_k, ν_l , которые исходят из P_k и P_l .

Проинтегрируем (4.1) относительно $d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n$. Во-первых, получим

$$2 \int \delta(A) d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n = 2 \int I_A(b) d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n = 2 (2\pi ||b||)^n. \quad (4.2)$$

Из соображений симметрии

$$2 \int d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n \sum_{\nu_i} I_{[\nu_i]}(b) I_{n-1}(\tau_i(\varphi)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2n \int I_{[\nu_1]}(b) I_{n-1}(\tau_1(\varphi)) d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n = \\
 &= 2n \int_{(b)} (2\pi \|\tau_1(\varphi)\|)^{n-1} d\nu_1.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Интегрируя последний член в (4.1), для $i = 1, 2$ используем параметризацию

$$\nu_i = (P_i, \Omega_i),$$

где

P_i = *звост* направленной хорды ν_i ,

Ω_i = пространственное направление хорды ν_i (изменяется в полусфере).

Обозначим

ψ_i = угол между Ω_i и направлением внутренней нормали в точке $P_i \in \partial D$.

В силу симметрии выполняется

$$\begin{aligned}
 &\int d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n \sum_{k < l} I_{[P_k, P_l]}(b) I_{n-2}(\tau_{kl}(\varphi)) [I_d - I_s] = \\
 &4n(n-1) \int_{P_1 \in D_1, P_2 \in D_2} (2\pi \|\tau_{12}(\varphi)\|)^{n-2} [I_d - I_s] \cos \psi_1 \cos \psi_2 dP_1 d\Omega_1 dP_2 d\Omega_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

где

D_1, D_2 = две части границы ∂B , разделенные границей базовой пластинки b .

Оставляя P_1, P_2 фиксированными, вычислим, по отдельности, интегралы

$$Z_d = \iint I_d \cos \psi_1 \cos \psi_2 d\Omega_1 d\Omega_2 \text{ и } Z_s = \iint I_s \cos \psi_1 \cos \psi_2 d\Omega_1 d\Omega_2.$$

Очевидно, что

$$Z_s = \int_{\Delta_1} \cos \psi_1 d\Omega_1 \int_{\Delta_2} \cos \psi_2 d\Omega_2 + \int_{\Delta_1^c} \cos \psi_1 d\Omega_1 \int_{\Delta_2^c} \cos \psi_2 d\Omega_2,$$

где Δ_1, Δ_2 есть множества пространственных направлений :

Δ_i = плоский угол между $\tau_{12}(\varphi)$ и плоскостью, касательной к ∂D в P_i .

$i = 1, 2$,

Δ_i^c = плоский угол, дополнительный к Δ_i , $i = 1, 2$,

для $i = 1, 2$, углы Δ_i, Δ_i^c находятся внутри B , в одном и том же полупространстве относительно $\tau_{12}(\varphi)$. Аналогично, получаем

$$Z_d = \int_{\Delta_1} \cos \psi_1 d\Omega_1 \int_{\Delta_2^c} \cos \psi_2 d\Omega_2 + \int_{\Delta_1^c} \cos \psi_1 d\Omega_1 \int_{\Delta_2} \cos \psi_2 d\Omega_2.$$

Легко видеть, что $\int_{\Delta_1} \cos \psi_1 d\Omega_1$ является площадью проекции сферического "двуугольника" Δ_1 на экватор параллельно плоскости, касательной в точке P_1 . Следовательно,

$$\int_{\Delta_1} \cos \psi_1 d\Omega_1 = \frac{\pi}{2} (1 - \cos |\Delta_1|),$$

где $|\Delta|$ обозначает развернутый угол между плоскостями, ограничивающими Δ . Из подобных равенств получаем

$$Z_d - Z_s = -\pi^2 \cos |\Delta_1| \cos |\Delta_2|. \quad (4.5)$$

После сокращения на $(2\pi)^n$ из (4.1) - (4.6) получим

$$2 \|b\|^n = \frac{n}{\pi} \int_{[b]} \|\tau_1(\varphi)\|^{n-1} d\nu_1 - \\ -n(n-1) \iint_{D_1 \times D_2} \|\tau_{12}(\varphi)\|^{n-2} \cos |\Delta_1| \cos |\Delta_2| dP_1 dP_2. \quad (4.6)$$

§5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СТИЛТЬЕСА

Для ограниченного выпуклого тела B in \mathbb{R}^3 рассмотрим предельную форму тождества (4.6). Применяя к b последовательность параллельных переносов, сожмем эту пластинку до точки $P_0 \in \partial B$, в которой существует касательная к ∂B плоскость. Для всех $n \geq 2$ имеем $\|b\|^n = o(\|b\|)$. Следовательно, умножая (4.6) на $\|b\|^{-1}$ и устремляя $\|b\| \rightarrow 0$, получим для $m = 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{\pi} \int_{[P_0]} \|\tau_\Omega(\varphi)\|^m \cos(\Omega, \mathbf{n}_0) d\Omega = m \int_{\partial D} \|\tau_{P_0, P}(\varphi)\|^{m-1} \cos |\Delta_1| \cos |\Delta_2| dP, \quad (5.1)$$

где

$[P_0]$ = пучок хорд тела B , исходящих из точки $P_0 \in \partial B$ (полусфера пространственных направлений)

$\tau_\Omega(\varphi)$ = пластинка, стягивающая B и содержащая направления Ω и φ ,

(Ω, \mathbf{n}_0) = угол между направлениями Ω и \mathbf{n}_0 = направление внутренней нормали к ∂B в точке P_0 ,

$\tau_{P_0, P}(\varphi)$ = пластинка, стягивающая B и содержащая точки $P_0, P \in \partial B$ и направление φ .

Рассмотрим интеграл

$$T(P_0) = \frac{1}{\pi} \int_{[P_0]} \|\tau_\Omega(\varphi)\|^m \cos(\Omega, \mathbf{n}_0) d\Omega.$$

В стандартных координатах на единичной сфере с полюсом в точке φ имеет место

$$d\Omega = \sin \lambda d\phi d\lambda,$$

где

λ = угол между Ω и φ .

ϕ = азимут направлений Ω , измеряемый от n_0 , т.е. $\phi = \frac{\pi}{2} - |\Delta_1|$.

Фактически, $\|\tau_\Omega(\varphi)\|^m$ зависит от Ω только через азимута ϕ , т.е.

$$\|\tau_\Omega(\varphi)\| = \|\tau_\phi(\varphi)\|.$$

В силу соотношения

$$\|\tau_\phi(\varphi)\| = \frac{1}{2} \int_0^\pi \chi^2 d\lambda \quad (5.2)$$

справедливого для каждого азимута ϕ , приходим к выводу, что $T(P_0)$ есть томографический параметр (функция $\chi = \chi(\Omega)$ представляет X -гау, исходящий из точки P_0).

Применяя сферическую \cos -теорему

$$\cos(\Omega, n_0) = \cos \phi \sin \lambda,$$

получим $T(P_0)$ в виде одномерного интеграла

$$T(P_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \|\tau_\phi(\varphi)\|^m \cos \phi d\phi \int_0^\pi \sin^2 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\pi \|\tau_\phi(\varphi)\|^m \sin |\Delta_1| d\phi. \quad (5.3)$$

Теперь рассмотрим другой интеграл в (5.1). На самом деле, ϕ, λ могут служить координатами на границе ∂B . Соответствующий Якобиан запишется в виде

$$dP = \frac{\chi^2}{\cos \psi} d\Omega = \frac{\chi^2}{\cos \psi} \sin \lambda d\phi d\lambda$$

где

ψ = угол между направлениями Ω и направлением, нормальным к ∂B в точке P . Откуда получаем

$$\int_{\partial B} \|\tau_{P_0, P}(\varphi)\|^{m-1} \cos |\Delta_1| \cos |\Delta_2| dP = \int_0^\pi \|\tau_\phi(\varphi)\|^{m-1} \cos |\Delta_1| Q(\phi) d\phi$$

где

$$Q(\phi) = \int_0^\pi \cos |\Delta_2| \frac{\chi^2}{\cos \psi} \sin \lambda d\lambda$$

Таким образом соотношение (5.1) представляется в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \|\tau_\phi(\varphi)\|^m \sin |\Delta_1| d\phi = m \int_0^\pi \|\tau_\phi(\varphi)\|^{m-1} \cos |\Delta_1| Q(\phi) d\phi \quad (5.4)$$

Можно убедиться, что

$$\left| \frac{\partial \|\tau_\phi(\varphi)\|}{\partial \phi} \right| = |Q(\phi)|$$

Повторяя соображения параграфа §1, получим интегральное соотношение Стильерса

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi F(\|\tau_\phi(\varphi)\|) d \sin |\Delta_1| = \int_0^\pi \cos |\Delta_1| dF(\|\tau_\phi(\varphi)\|) \quad (5.5)$$

действительное для любой функции $F(u)$, определенной при $u > 0$ с непрерывной производной и удовлетворяющей условию $F(0) = 0$. Последнее уравнение является аналогом уравнения (1.23).

Abstract. Measures in the Integral Geometry spaces such as $G =$ lines in \mathbb{R}^2 , $\mathbb{E} =$ planes in \mathbb{R}^3 , $\Pi =$ lines in \mathbb{R}^3 admit "Diophantine" or *combinatorial* decompositions valid for the sets A that belong to the so-called "Union rings" of subsets defined in the same spaces. Cases of integration of the "Diophantine" decompositions can be found in the earliest publications on Combinatorial Integral Geometry. For sets $A \subset G, \Pi$ or \mathbb{E} determined by collections of chords of bounded convex domains in \mathbb{R}^2 or bodies in \mathbb{R}^3 , the integration procedures have led to a variety of identities or inequalities that are of interest in the convexity theory. However, at the early stage the combinatorial decompositions were always written for Euclidean motion invariant measures in the mentioned spaces. The first case of integration of a "Diophantine" decomposition in the space G written for delta-measures led to *the disintegrated isoperimetric inequality* that became the author's main motivation for further attempts in the same direction. The purpose of the present paper is to report on those attempts.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.J. Sylvester, "On a funicular solution of Buffon's "problem of the needle" in its most general form, Acta. Math., vol. 14, pp. 185-205, 1890.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические применения комбинаторной интегральной геометрии : обзор", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 6, стр. 2 - 46, 1999.
4. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in \mathbb{R}^2 ", Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb., vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.
5. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem and stereology", Transactions ICM, vol. 2, Vancouver (Canada), 1974.
6. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении

E-mail : rhambart@anr.am

Резюме. В настоящей статье рассматриваются семейства Γ of *прегеодезических* содержащихся в гладком трехмерном многообразии D_3 . Прегеодезические кривые в двух измерениях рассматривались автором в [1] (Изв. НАН, Математика, том 39, по. 4, 2004). Прегеодезические $\gamma \in \Gamma$ соответствуют прямым в Гильбертовой аксиоматике для трех измерений. В D_3 имеется также семейство \mathbb{E} *дискоидов*, являющихся аналогами плоскостей. Каждый дискоид $e \in \mathbb{E}$ представляет собой реализацию двумерного многообразия D , рассмотренного в [1], в частности, предполагается, что каждый дискоид содержит семейство гладких прегеодезических в смысле [1]. В случае классической среды на D_3 (аналогичное понятие рассматривалось в [1]) базовая мера длины dl порождает меры de в \mathbb{E} и $d\gamma$ в Γ , и приводит, через элегантное тождество, к определению кольца подмножеств в пространстве Γ , где возможны комбинаторные разложения в смысле книги автора 1982 года. Эти разложения можно применять к изучению поверхностей на D_3 , скажем, для вычисления вероятностей чисел пересечений случайной $\gamma \in \Gamma$. В работе получено геометрическое неравенство для площади минимальной поверхности, натянутой на петлю в D_3 (*изопериметрическое неравенство для петель*, новое неравенство даже в случае евклидова пространства). В частности, настоящий подход устанавливает в один прием справедливость этого неравенства для евклидова, гиперболического и Риманова пространства. Ради полноты изложения, в §1 приведены некоторые выдержки из работы [1].

§1. ВВЕДЕНИЕ : ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В данном параграфе приводятся некоторые сведения о прегеодезических кривых в двух измерениях из работы [1], которые необходимы для работы в трех

измерениях.

Пусть D — гладкое двумерное многообразие с границей ∂D , топологически эквивалентное замкнутому плоскому диску, и пусть G — семейство кривых на D , удовлетворяющих следующим аксиомам $A1 - A4$:

$A1$. Каждая кривая $g \in G$ есть гладкая кривая без самопересечений, топологически эквивалентная замкнутому прямолинейному отрезку. Относительная внутренность g принадлежит внутренности D , и оба конца g лежат на ∂D .

$A2$. Для двух различных точек в D существует единственная кривая $g \in G$, содержащая эти две точки; это свойство остается в силе, если одна или обе точки взяты на ∂D .

$A3$. Топология на G , индуцированная из пространства замкнутых множеств в D совпадает с конечной топологией на G .

$A4$. Для данного направления, касательного к D в точке $P \in \text{int}D$, существует только одна кривая $g \in G$, содержащая P и имеющая в P данное направление касательной.

Если условия $A1 - A4$ удовлетворяются, то G называется [1] семейством *прегеодезических* кривых, а каждая $g \in G$ — *прегеодезической*.

Примеры. В следующих трех случаях свойства $A1 - A4$ удовлетворяются:

1. $D =$ ограниченная выпуклая область в пространстве \mathbb{R}^2 .

прегеодезические кривые = евклидовы хорды области D ;

2. $D =$ ограниченная гиперболически выпуклая область (скажем, евклидов диск) в модели Пуанкаре полуплоскости гиперболической плоскости.

Здесь прегеодезические кривые суть гиперболические прямые (вертикальные евклидовы прямые и некоторые евклидовы дуги окружностей);

3. $D =$ выпуклая область в открытой полусфере.

прегеодезические кривые = дуги больших окружностей.

Базовая мера длины. В работе [1] многие факты зависят от существования меры длины dl на каждой прегеодезической $g \in G$, означающее, в частности, что длину $|g|$ каждого прегеодезического отрезка g можно вычислить как интеграл вдоль g :

$$|g| = \int_g dl. \quad (1.1)$$

В работе [1] был предложен конкретный алгоритм определения длины достаточно гладких кривых.

Классическая двумерная среда. В [1] тройка D, G, dl называлась *средой*. Теперь будем называть ее *2-средой*.

Обозначим через $T(P)$ окружность направлений на плоскости, касательной к D в точке $P \in D$. Направление ϕ в точке $P \in D$ есть элемент $\phi \in T(P)$.

Точка $Q \in D$ принадлежит прегеодезической окружности $c(P, r)$ с центром в точке $P \in D$ и радиуса r , коль скоро $|P, Q| = r$. Предполагаем, что прегеодезические окружности на D достаточно гладкие. Скажем, что 2-среда удовлетворяет РОО (= Радиус Ортогонален Окружности) если угол между направлениями $t \in T(Q)$ и $\rho \in T(Q)$, где

t = направление, касательное к $c(P, r)$ в некоторой точке $Q \in c(P, r)$,

ρ = направление прегеодезической, содежащей P и Q .

всегда равен $\frac{\pi}{2}$. При выполнении РОО, важная функция $h_P(Q)$, $P, Q \in D$ определяется [1] как Якобиан

$$dl = h_P(l) d\alpha, \quad l \in c(P, r) \quad (1.2)$$

в соотношении между мерой длины dl на $c(P, r)$ и обычной угловой мерой $d\alpha$ на $T(P)$.

2-среда D, G, dl называется классической если

C1. имеет место РОО,

C2. $h_{P_1}(P_2)$ симметрична, т.е. $h_{P_1}(P_2) = h_{P_2}(P_1) = h(P_1, P_2) = h(P_2, P_1)$, и

C3. внутри малых окружностей $c(P, r)$ (т.е. при $r \rightarrow 0$) геометрия, определенная мерой dl – асимптотически евклидова, в частности, для бесконечно малых треугольников применимы формулы евклидовой тригонометрии.

В предыдущих примерах, выбор стандартной меры dl (т.е. евклидовой длины для 1., гиперболической для 2. и меры инвариантной относительно вращения для 3.) обращает соответствующие 2-среды в классические.

Для данной прегеодезической $g_0 \in G$, пусть $[g_0]$ обозначает множество прегеодезических, пересекающих g_0 .

Параметризация по l, ψ . Прегеодезические g из $[g_0]$ можно описать параметрами l, ψ , где

l = одномерная координата длины на g_0 точки $g \cap g_0$.

ψ = угол между g и g_0 в точке $g \cap g_0$.

Параметризация l_1, l_2 . Для заданных двух прегеодезических g_1, g_2 , каждая прегеодезическая $g \in [g_1] \cap [g_2]$ может быть описана двумя параметрами l_1, l_2 :

l_i = одномерная координата длины на g_i точки $g \cap g_i$, $i = 1, 2$.

Теорема [1]. В любой классической 2-среде D, G, dl существует (единственная) мера dg на G , представляемая на каждом множестве $[g_1] \cap [g_2]$ в параметризации l_1, l_2 в виде

$$dg = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{h(l_1, l_2)} dl_1 dl_2, \quad (1.3)$$

где $\psi_i =$ угла между g и g_i в точке $l_i \in g_i, i = 1, 2$. На каждом множестве $[g_0]$ в l, ψ параметризация той же меры представляется в виде

$$dg = \sin \psi dl d\psi.$$

Упомянем еще один результат из [1]: в классических 2-средах

$$|P_1, P_2| = \text{длина прегеодезического сегмента с концами } P_1, P_2$$

всегда является Гильбертовой псевдометрикой, т.е. мера длины dl превращает прегеодезические в геодезические (кратчайшие). Эти результаты в [1] достигаются изучением комбинаторных валюаций Φ на так называемых объединенных кольцах подмножеств G . (Для евклидовой плоскости соответствующая комбинаторика хорошо известна по книгам автора [2], [3].) Мы увидим далее, что комбинаторные валюации Φ существенны для построения комбинаторных разложений на объединенном кольце, определенном в $\Pi =$ пространстве прегеодезических в трех измерениях. Ниже §6 содержит пример применения комбинаторных разложений в Π , т.е. изопериметрическое неравенство для петель, где используется формула площади $\|D\|$ области $D \in D$, справедливая в классической 2-среде:

$$\|D\| = \pi^{-1} \int |D \cap g| dg. \quad (1.4)$$

(1.4) легко следует из (1.3) и хорошо известна в интегральной геометрии конкретных пространств 1., 2., и 3., dl – стандартная, см. выше.

§2. ПРОСТРАНСТВА \mathbb{E} И Π

Сценой действия последующих параграфов является

$D_3 =$ дифференцируемое многообразие, топологически эквивалентное обычному замкнутому шару в \mathbb{R}^3 .

Для данной точки $P \in D_3$ обозначим через $T_2(P)$ пространство направлений касательных к D_3 в точке P :

$T_2(P) =$ 2-сфера, точки в диаметрально-противоположных парах тождественны.

Обозначим через \mathbb{E} семейство *дискоидов* $e \in \mathbb{E}$ и через Π семейство *прегеодезических* $\gamma \in \Pi$. Постулируем следующие свойства:

P1. Каждый дискоид e есть гладкое двумерное многообразие, топологически эквивалентное обычному замкнутому диску в \mathbb{R}^2 . Относительная внутренность каждого e принадлежит внутренности D_3 , тогда как граница ∂e принадлежит ∂D_3 .

P2. Для любых трех различных точек в D_3 , не лежащих на прегеодезической, существует единственный дискоид $e \in \mathbb{E}$, содержащий все три точки.

P3. Каждый дискоид e содержит семейство G_e кривых γ , удовлетворяющих аксиомам A1–A4, §1. Те же самые кривые называются прегеодезическими в D_3 , т.е.

$$\Gamma = \bigcup_{e \in \mathbb{E}} G_e.$$

P4. Пересечение двух дискоидов $e_1 \in D_3$ и $e_2 \in D_3$ есть либо пустое множество, либо прегеодезическая кривая $\gamma = G_{e_1} \cap G_{e_2}$.

P5. Семейство p_γ дискоидов $e \in \mathbb{E}$, содержащее прегеодезическую $\gamma \in \Gamma$ называется δ -пучком. Для заданной $\gamma \in \Gamma$, точки $P \in \gamma$ и двух дискоидов $e_1, e_2 \in p_\gamma$ рассмотрим угол

$\phi(P)$ = угол между направлениями ω_1 и ω_2 , где

ω_i = направление, нормальное к e_i в точке P , $\omega_i \in T_2(P)$, $i = 1, 2$.

Принимаем как постулат, что для каждого $e_1, e_2 \in p_\gamma$ угол ϕ_P не зависит от $P \in \gamma$. Величину $\phi = \phi_P$, не зависящую от $P \in \gamma$, назовем плоским углом между дискоидами e_1, e_2 . Если $e_1 \in p_\gamma$ остается фиксированным, то каждому ϕ соответствует только один $e_2 \in p_\gamma$, т.е. ϕ может служить для параметризации дискоидов из p_γ . Топологически p_γ есть окружность, и часто пишется $\phi \in p_\gamma$.

P6. Для заданного дискоида $e \in \mathbb{E}$ и прегеодезической $\gamma \in \Gamma$, существуют только три возможности :

либо $\gamma \in G_e$, либо $e \in [\gamma]$, либо $\gamma \cap e = \emptyset$, где

$[\gamma] = \{e \in \mathbb{E} : e \text{ и } \gamma \text{ имеют только одну общую точку (кратко, } e \text{ пересекает } \gamma)\}$.

Множества вида $[P] =$ дискоиды $e \in \mathbb{E}$, содержащие точку $P \in \text{int } e$ называются пучками.

P7. Каждому $\omega \in T_2(P)$ соответствует только один дискоид из $[P]$, имеющий в точке P направление нормали ω .

Примеры. В следующих примерах все свойства P1 – P7 удовлетворены :

1. $D_3 =$ ограниченное выпуклое тело в \mathbb{R}^3 ,

дискоиды = пересечения D_3 евклидовыми плоскостями.

прегеодезические = евклидовы прямые;

2. В модели Пуанкаре полупространства гиперболического пространства, возьмем

D_3 = ограниченное гиперболически выпуклое тело (скажем, евклидовы шар).

дисконды = пересечения D_3 гиперболическими плоскостями (сферические диски),

прегеодезические = гиперболические линии (дуги окружности):

3. D_3 = выпуклое тело в открытой 3-мерной полусфере,

дисконды = пересечения D_3 2-мерными большими сферами,

прегеодезические = дуги больших окружностей.

Базовая мера длины. Предполагаем, что на каждой прегеодезической $\gamma \in \Pi$ определена мера длины dl . В частности, каждая изла (прегеодезический отрезок) ν получает длину

$$|\nu| = \int_{\nu} dl. \quad (2.1)$$

В случаях 1..2. и 3. примерами dl являются евклидова длина, гиперболическая длина и длина, инвариантная относительно вращений.

Четверку D_3, \mathbb{E}, Π, dl назовем *3-средой*.

Классическая 3-среда. Точка $Q \in D_3$ принадлежит $s(P, r)$ = прегеодезической сфере с центром в точке $P \in D_3$ и прегеодезическим радиусом r тогда и только тогда, когда $|P, Q| = r$. Предполагаем, что сферы дифференцируемы. Назовем 3-среду D_3, \mathbb{E}, Π, dl классической если

C1.1 Для каждого $\epsilon \in \mathbb{E}$ тройка ϵ, G_ϵ, dl есть классическая 2-среда в смысле §1. Заметим, что функция $h(P_1, P_2)$, см. C2., а $rgiogi$ может зависеть от $\phi \in p_\gamma$, где γ = прегеодезическая, проходящая через точки P_1, P_2 и $\phi \in p_\gamma$, так что вообще говоря, функция $h(P_1, P_2)$ должна быть заменена функцией $h_\phi(P_1, P_2)$.

C1.2 В малых сферах $s(P, r)$ (т.е. при $r \rightarrow 0$), dl асимптотически евклидова.

C1.3 Дисконд, касательный к $s(P, r)$ в любой точке $Q \in s(P, r)$, ортогонален к прегеодезическому радиусу PQ в $Q \in \gamma$. Функция $h_\phi(P, Q)$ не зависит от ϕ и является симметричной, т.е.

$$h_\phi(P, Q) = h(P, Q) = h(Q, P). \quad (2.2)$$

§3. МЕРА В Π

Мера площади da . Чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем некоторый дисконд $\epsilon \in \mathbb{E}$ как отдельное пространство, точки в ϵ обозначим через a .

Для каждой точки $a \in e$ полагаем

$$da = dl_1 dl_2, \quad (3.1)$$

где dl_i — меры Лебесга на двух взаимно-перпендикулярных прямых на касательной плоскости, исходящих из точки касания $a \in e$. Нормирующее условие: в точке a каждая dl_i эквивалентна dl .

Якобиан $J_P(a)$ в классической 3-среде. Пусть $P \in D_3$ и $e \in \mathbb{E}$. Для точек $a \in e$ рассмотрим отображение

$$a \longmapsto \Omega, \text{ где } \Omega \in T_2(P) \text{ есть направление прегеодезической } P.a.$$

(определим Якобиан $J_P(a)$ соотношением

$$\cos \psi da = J_P(a) d\Omega, \quad (3.2)$$

где

$d\Omega$ = телесная угловая мера, инвариантная относительно вращений на единичной сфере $T_2(P)$.

ψ = угол между γ и направлением, нормальным к e в точке a .

Согласно (3.1)

$$J_P(a) = h^2(P, a). \quad (3.3)$$

Замечание. В действительности, $a \in e$ — это некоторая точка $Q \in D_3$. Как видно из соотношения (3.3) $J_P(a) = J_P(Q) = h^2(P, Q)$ не зависит от направления, нормального к e в точке Q . Это следствие наличия сомножителя $\cos \psi$ в (3.2) и утверждений С1.2 и С1.3.

Мера $d_{12}\gamma$. Для дискоида $e \in \mathbb{E}$ обозначим

$[e]$ = множество прегеодезических, пересекающих e только в одной точке.

Пусть e_1, e_2 — два дискоида из \mathbb{E} . $[e_1] \cap [e_2] \neq \emptyset$. Каждую прегеодезическую γ из этого множества можно описать с помощью двух параметров a_1, a_2 :

a_i = точка $\gamma \cap e_i$, $i = 1, 2$,

и использовать эту параметризацию для определения меры $d_{12}\gamma$ на $[e_1] \cap [e_2]$:

$$d_{12}\gamma = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{h^2(a_1, a_2)} da_1 da_2, \text{ где}$$

ψ_i = угол между γ и направлением, нормальным к e_i в a_i , $i = 1, 2$,

da_i = мера площади на e_i , $i = 1, 2$.

В каждом из Примеров 1, 2, 3 предыдущего параграфа $d_{12}\gamma$ не зависит от выбора дискоидов e_1, e_2 и фактически определяет некоторую единственную меру $d\gamma$.

Следующая теорема доказывает, что любая классическая 3-среда обладает этим свойством. При ее доказательстве мы используем обозначения, данные выше, для индексов 1, 2, 3, 4.

Теорема 1. В любой классической \mathcal{D} -среде, существует единственная мера $d\gamma$ на Π такая, что на каждом $[e_1] \cap [e_2]$

$$d\gamma = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{h^2(a_1, a_2)} da_1 da_2. \quad (3.4)$$

Доказательство: Рассмотрим две пары дисков: e_1, e_2 и e_3, e_4 . Предположим, что внутренность $[e_1] \cap [e_2] \cap [e_3] \cap [e_4]$ не пуста. Прегеодезическая $\gamma \in [e_1] \cap [e_2] \cap [e_3] \cap [e_4]$ может быть представлена как a_1, a_2 или как a_3, a_4 . Найдем Якобиан J в соотношении

$$da_1 da_2 = J da_3 da_4.$$

Для $d\Omega_1 =$ меры на $T(P_1)$, из (3.2) имеем

$$d\Omega_1 = \frac{\cos \psi_2 da_2}{J_{a_1}(a_2)}, \quad (3.5)$$

$$d\Omega_1 = \frac{\cos \psi_3 da_3}{J_{a_1}(a_3)}. \quad (3.6)$$

Исключив $d\Omega_1$ и используя (3.3), получим

$$\frac{\cos \psi_2 da_2}{h^2(a_1, a_2)} = \frac{\cos \psi_3 da_3}{h^2(a_1, a_3)}. \quad (3.7)$$

Заменяя индексов $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$ и $3 \rightarrow 4$, получаем

$$\frac{\cos \psi_1 da_1}{h^2(a_3, a_1)} = \frac{\cos \psi_4 da_4}{h^2(a_3, a_4)}. \quad (3.8)$$

Отсюда, умножая (3.7) на (3.8),

$$\frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{h^2(a_1, a_2)} da_1 da_2 = \frac{h^2(a_3, a_1) \cos \psi_3 \cos \psi_4}{h^2(a_1, a_3) h^2(a_3, a_4)} da_3 da_4.$$

В силу свойства симметрии $h(P_1, P_2)$ это сводится к

$$\frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{h^2(a_1, a_2)} da_1 da_2 = \frac{\cos \psi_3 \cos \psi_4}{h^2(a_3, a_4)} da_3 da_4. \quad (3.9)$$

Пусть имеем конечную последовательность дисков e_1, e_2, \dots, e_n , каждый из которых содержит точку $P \in D_3$. Каждому множеству индексов $S \subset \{1, \dots, n\}$ соответствует

$$b_S = [\bigcap_{i \in S} [e_i] \cap [\bigcap_{i \in S^c} [e_i]^c],$$
 S^c обозначает дополнение.

Если $S_1 \neq S_2$, то b_{S_1} и b_{S_2} не пересекаются. Следовательно, для определения меры на

$$\Gamma_n = \bigcup_{\text{card } S > 2} b_S$$

достаточно определить ее на каждом b_S . Для любого S , $\text{card } S > 1$ выберем 2-множество $\{i, j\} \subset S$ и определим меру на b_S как сужение $\frac{\cos \psi_i \cos \psi_j}{h^2(a_i, a_j)} da_i da_j$ на b_S . Согласно (3.9) результат не зависит от выбора $\{i, j\} \subset S$, так что повторяя эту процедуру, мы последовательно определим меру m_n на Π_n .

Устремим n к бесконечности, добавляя новые дискиды. Потребуем, чтобы

$$\lim \Pi_n = \Gamma, \quad (3.10)$$

где \lim берется в смысле монотонной сходимости множеств. Условие (3.10) может быть удовлетворено, если, скажем, замыкание объединения множеств $\partial D_3 \cap e_n$ есть ∂D_3 . Тогда (3.9) гарантирует, что сужение каждой меры m_{n+1} до Π_n совпадает с m_n . Следовательно, m_n стремится к предельной мере m , определенной на всем Γ .

Покажем, что m есть искомая мера $d\gamma$. По построению, m удовлетворяет (3.4) для счетного числа пар дискидов. Для любой пары e_1, e_2 , не принадлежащей этому классу, можно установить справедливость (3.4) для $[e_1] \cap [e_2]$, используя подобласти $\tau_1^{(n)} \subset e_1$ и $\tau_2^{(n)} \subset e_2$, последние зависят от n и стремятся, соответственно, к e_1 и e_2 при $n \rightarrow \infty$ в смысле монотонной сходимости. Предположим, что $[\tau_1^{(n)}] \cap [\tau_2^{(n)}] \subset \Pi_n$, где $[\tau] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ пересекает } \tau\}$; откуда, используя (3.9), установим (3.4) на множестве $[\tau_1^{(n)}] \cap [\tau_2^{(n)}]$. В пределе при $n \rightarrow \infty$, множество $[\tau_1^{(n)}] \cap [\tau_2^{(n)}]$ заменяется на $[e_1] \cap [e_2]$. Доказательство завершено.

Следствие 1. Для любого дискиды e , каждая $\gamma \in [e]$ может быть представлена $\gamma = (a, \Omega)$, где $a = \gamma \cap e$ и $\Omega =$ направление γ в точке a . Тогда

$$d\gamma = \cos \psi da d\Omega \quad (3.11)$$

где ψ - угол между γ и направлением, нормальным к e в точке a .

§4. МЕРА В \mathbb{E}

Для важные функции в классической 3-среде D_3 , \mathbb{E} , Γ , $d\ell$. Пусть P - точка в D_3 . Дискиды e из пучка $[P]$ определяется параметром (см. P7)

$\omega =$ направление, нормальное к $e \in [P]$ в P , $\omega \in T_2(P)$.

При наличии двух прегеодезических γ_1 и γ_2 , $e \in [P]$ можно описать параметрами l_i ,

$$l_i = e \cap \gamma_i, \quad i = 1, 2.$$

Это определяет отображение $\omega \rightarrow (l_1, l_2)$ между $T_2(P)$ и парой γ_1, γ_2 . Функцию $H_P(P_1, P_2)$, где $P, P_1, P_2 \in D_3$, определим как Якобиан в соотношении

$$\cos \psi_1 \cos \psi_2 dl_1 dl_2 = H_P(l_1, l_2) d\omega, \quad (4.1)$$

где

$d\omega$ = мера инвариантная относительно вращений на $T_2(P)$.

ψ_i = угол между γ_i и направлением, нормальным к e в точке l_i .

dl_i = базовая мера длины на γ_i .

Замечание. Функция $H_P(P_1, P_2)$ не зависит от направлений прегеодезических γ_1, γ_2 в точках P_1, P_2 в силу утверждения Cl.2 и наличия сомножителя $\cos \psi_1 \cos \psi_2$ в (4.1).

Пусть P_1, P_2 — две точки в D_3 . Любой дисконд e из δ пучка p_γ , где γ проходит через точки P_1, P_2 , может быть описан параметром по $\phi \in p_\gamma$, см. P5. Для всякой прегеодезической γ_1 дисконд $e \in p_\gamma$ может быть описан параметром $l_1 \in \gamma_1$ в силу отображения $\phi \rightarrow e$, где $e \in p_\gamma, l_1 \in e$.

Функция $H_{P_1, P_2}(l_1)$ определяется как Якобиан в соотношении

$$\cos \psi_1 dl_1 = H_{P_1, P_2}(l_1) d\phi, \quad (4.2)$$

где $d\phi$ есть угловая мера, инвариантная относительно вращений на p_γ . Из свойств

I. $H_P(P_1, P_2) = H_{P, P_1}(P_2) h(P, P_1)$ (см. Cl.3) и

II. $H_{P_1, P_2}(P_3) = H_\gamma(P_3)$ (зависимость от P_1, P_2 через γ , последняя содержит P_1, P_2)

вытекает следующее следствие :

В классической 3-среде из симметрии функции $h(P_1, P_2)$ следует симметрия функции $H_{P_1}(P_2, P_3) = H(P_1, P_2, P_3)$ по всем трем аргументам.

Параметризации дискондов. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — три прегеодезические. На $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap [\gamma_3] \neq \emptyset$ рассмотрим параметризации.

Параметризация l_1, l_2, l_3 : соответствует отображению

$$(l_1, l_2, l_3) \rightarrow e = \text{дисконд, содержащий все } l_i, i = 1, 2, 3.$$

Параметризация l_1, ω_1 : соответствует отображению

$$(l_1, \omega_1) \rightarrow e = \text{дисконд из } [l_1], \text{ направление нормали которого в точке } l_1 \text{ есть } \omega_1.$$

Параметризация l_1, l_2, ϕ_{12} : соответствует отображению

$$(l_1, l_2, \phi_{12}) \rightarrow e = \text{дисконд из } p_\gamma, \text{ где}$$

$\gamma = \text{прегеодезическая, содержащая } l_1, l_2 \text{ и}$

$\phi_{12} = \phi, \text{ определяющее } e \text{ в } p_\gamma.$

Теорема 2. В любой классической 3-среде существует мера de в \mathbb{E} , такая что на каждом (непустом) множестве $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap [\gamma_3]$, в параметризации l_1, l_2, l_3 записывается в виде

$$de = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3. \quad (4.3)$$

Доказательство : Рассмотрим две тройки прегеодезических : $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$. Пусть внутренность $\bigcap_{i=1, \dots, 6} [\gamma_i]$ непуста. Пусть для любого $e \in \bigcap_{i=1, \dots, 6} [\gamma_i]$

l_i = одномерная координата длины на γ_i , точки $e \in \bigcap \gamma_i$.

ψ_i = угол между γ_i и направлением, нормальным к e в l_i , $i = 1, \dots, 6$.

Дисконд $e \in \bigcap_{i=1, \dots, 6} [\gamma_i]$ можно представить как l_1, l_2, l_3 , либо как l_4, l_5, l_6 .

Запишем варианты соотношения (4.1) :

$$H_{l_1}(l_2, l_3) d\omega_1 = \cos \psi_2 \cos \psi_3 dl_2 dl_3$$

и

$$H_{l_1}(l_4, l_5) d\omega_1 = \cos \psi_4 \cos \psi_5 dl_4 dl_5.$$

Используя симметрию, получаем

$$\frac{\cos \psi_2 \cos \psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_2 dl_3 = \frac{\cos \psi_4 \cos \psi_5}{H(l_1, l_4, l_5)} dl_4 dl_5. \quad (4.4)$$

Варианты соотношения (4.2)

$$H_{l_1, l_6}(l_1) d\phi_{45} = \cos \psi_1 dl_1,$$

$$H_{l_1, l_6}(l_6) d\phi_{45} = \cos \psi_6 dl_6.$$

дают

$$\cos \psi_1 dl_1 = \frac{H_{l_1, l_6}(l_1)}{H_{l_1, l_6}(l_6)} \cos \psi_6 dl_6. \quad (4.5)$$

Из соотношений (4.4) и (4.5) получаем

$$\frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 = \frac{H_{l_1, l_6}(l_1) \cos \psi_4 \cos \psi_5 \cos \psi_6}{H_{l_1, l_6}(l_6) H(l_1, l_4, l_5)} dl_4 dl_5 dl_6.$$

Умножая и деля последнее выражение на $H(l_4, l_5, l_6)$, найдем

$$\frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 = J \frac{\cos \psi_4 \cos \psi_5 \cos \psi_6}{H(l_4, l_5, l_6)} dl_4 dl_5 dl_6. \quad (4.6)$$

Согласно свойству 1. функции H находим

$$J = \frac{H_{l_1, l_6}(l_1)}{H_{l_1, l_6}(l_6)} \frac{H(l_4, l_5, l_6)}{H(l_1, l_4, l_5)} = \frac{h(l_4, l_5)}{h(l_4, l_5)} = 1$$

Пусть имеем конечную последовательность прегеодезических $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ из пучка $[P]$, $P \in D_3$. Каждому множеству индексов $S \subset \{1, \dots, n\}$ соответствует множество $b_S = [\cap_{i \in S} \gamma_i] \cap [\cap_{i \in S^c} \gamma_i]^c$: если $S_1 \neq S_2$, то b_{S_1} и b_{S_2} не пересекаются. Следовательно, для определения меры на $\mathbb{E}_n = \cup_{\text{card } S > 2} b_S$ достаточно определить ее на каждом b_S . Для любого S с $\text{card } S > 2$, выберем 3-множество $\{i, j, k\} \subset S$ и определи меру на b_S , которая есть сужение $\frac{\cos \psi_i \cos \psi_j \cos \psi_k}{H(l_i, l_j, l_k)} dl_i dl_j dl_k$ до b_S . Согласно (4.6) и $J = 1$ результат не зависит от выбора $\{i, j, k\} \subset S$, так что эта процедура последовательно определяет меры m_n на \mathbb{E}_n .

Устремим теперь n к бесконечности добавляя новые прегеодезические, но требуя, чтобы

$$\lim \mathbb{E}_n = \mathbb{E}, \quad (4.7)$$

где \lim берется в смысле монотонной сходимости множеств. Условие (4.7) будет удовлетворено, если концы бесконечной последовательности $\{\gamma_i\}$ образуют всюду плотное подмножество на ∂D_3 . Очевидно (4.7) гарантирует, что сужение каждой меры m_{n+1} до \mathbb{E}_n совпадает с m_n . Поэтому m_n стремится к предельной мере m , определенной на всем \mathbb{E} .

Для произвольных трех игл ν_1, ν_2, ν_3 из $\text{int } D_3$, можем взять n достаточно большим и иметь $[\nu_1] \cap [\nu_2] \cap [\nu_3] \subset \mathbb{E}_n$. Соотношение (4.7) гарантирует, что сужение $m_n = m$ на любое множество $b_S \cap [\nu_1] \cap [\nu_2] \cap [\nu_3]$ в параметризации $l_i \in \nu_i$ представляется в виде

$$I_{a_S}(e) \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3}{h(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3, \quad (4.8)$$

где e есть дисконд, проходящий через l_1, l_2, l_3 , а $I_{a_S}(e) = 1$, если $e \in a_S$, 0 в противном случае. Суммирование (4.8) по всем возможным $S \subset \{1, \dots, n\}$ удаляет индикатор $I_{a_S}(e)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Следующие следствия легко следуют из (4.3).

Следствие 2. На каждом множестве $[\gamma]$ в параметризации l, ω

$$de = \cos \psi dl d\omega. \quad (4.9)$$

Следствие 3. На каждом множестве $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap [\gamma_3]$ в параметризации l_1, l_2, ϕ

$$de = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{H(l_1, l_2, l_3)} H_{l_1, l_2}(l_3) dl_1 dl_2 d\phi = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{h(l_1, l_2)} dl_1 dl_2 d\phi. \quad (4.10)$$

Следствие 4. Для данного дискоида $e_0 \in \mathbb{E}$ любой дискоид e из множества

$(e_0) =$ дискоиды, пересекающие e_0 можно представить в виде

$e = (g, \psi)$, где

$g =$ прегеодезическая $e_0 \cap e$ и

$\psi =$ плоский угол между e и e_0 (определяет e внутри p_g , т.е. $\psi \in p_g$).

На всяком множестве (e_0) , в параметризации g, ψ

$$de = \sin^2 \psi dg d\psi, \text{ где} \quad (4.11)$$

$dg =$ мера на $[e_0]$

$d\psi =$ мера на p_g , инвариантная относительно вращений.

Доказательство следует из (4.10). Возьмем γ_1, γ_2 внутри e_0 . Согласно (1.3)

$$dg = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{h(l_1, l_2)} dl_1 dl_2$$

где α_i есть угол между γ_i и g . В силу Cl.2 справедливы формулы сферической тригонометрии

$$\cos \psi_i = \sin \alpha_i \sin \psi, \quad i = 1, 2 \quad (4.12)$$

откуда следует (4.11).

§5. СОВПАДЕНИЕ ДВУХ МЕР

В классической 3-среде dl определяет меры $d\gamma$ в Γ и de в \mathbb{E} , см. теоремы 1.2.

Также, согласно [1], на каждом $[e]$ существует мера dg , которую теперь обозначим через $d_e g$, а на каждом пучке p_g в силу P5 существует мера $d_g \phi$, инвариантная относительно вращений.

В пространстве пар (γ, ϕ) , где $\gamma \in \Gamma$ и $\phi \in p_\gamma$ рассмотрим меру $d\gamma d_\gamma \phi$.

Аналогично, в пространстве пар (e, g) , где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in [e]$ рассмотрим меру $ded_e g$. В силу "дуальности" $(\gamma, \phi) = (e, g)$, где

$e \in p_\gamma$ - дискоид, который соответствует ϕ , а

$g \in [e]$ как множество совпадает с γ .

две меры. $d\gamma d_\gamma \phi$ и $ded_e g$, можно рассматривать как меры в том же пространстве.

Теорема 3. В классической 3-среде всегда

$$ded_e g = d\gamma d_\gamma \phi. \quad (5.1)$$

Доказательство : Пусть γ_1, γ_2 и γ_3 - три прегеодезические в D_3 . Выберем $l_i \in \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$ и пусть

$g_i =$ прегеодезическая, проходящая через l_i и l_3 , $i = 1, 2$,

g_{12} = прегеодезическая, проходящая через l_1 и l_2 .

e_i = дисконд. содержащий γ_i и g_i , $i = 1, 2$.

e = дисконд. проходящий через l_1, l_2, l_3 .

ψ_i = угол в точках l_i , $i = 1, 2, 3$ между γ_i и направлением, нормальным к e .

τ_i = угол между γ_{12} и направлением, нормальным к e_i в l_i , $i = 1, 2$.

α_i = угол между γ_i и g_i в точках l_i , $i = 1, 2$.

β_i = угол в точках l_i , $i = 1, 2$ между прегеодезической, проходящей через l_1, l_2 и g_i .

da_i = мера площади на e_i (так, $a_i \in e_i$), $i = 1, 2$.

dl_i = базовая мера длины на γ_i .

du_i = базовая мера длины на g_i , $i = 1, 2$.

Имеем для $i = 1, 2$ в точке $a_i = l_i$

$$da_i = \sin \alpha_i dl_i du_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Согласно (1.3)

$$\frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{h(a_1, a_2)} du_1 du_2 = d_e g. \quad (5.3)$$

Используя параметризацию

$(\gamma, \phi) \rightarrow (a_1, a_2, l_3)$, где $a_1 = \gamma \cap e_1$, $a_2 = \gamma \cap e_2$, $l_3 = e \cap \gamma_3$,

в силу (3.4) и (4.2) получаем

$$d\gamma d\phi = \frac{\cos \tau_1 \cos \tau_2 \cos \psi_3}{h^2(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} da_1 da_2 dl_3. \quad (5.4)$$

Согласно (5.2) и (5.3) последнее выражение запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \tau_1 \cos \tau_2 \cos \psi_3}{h^2(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 dl_1 dl_2 dl_3 du_1 du_2 = \\ & = \frac{\cos \tau_1 \cos \tau_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \psi_3}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 h(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 d_e g. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В любом сферическом треугольнике произведение $\sin a \sin h_a$, где a является стороной, h_a — перпендикуляр к a , опущенный из вершины, противоположной к a , не зависит от выбора a . Согласно свойству

$$\frac{\cos \tau_i \sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = \cos \psi_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.6)$$

получаем

$$d\gamma d\phi = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3}{h(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 d_e g. \quad (5.7)$$

Доказательство (5.1) завершено, так как по теореме 2

$$\frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3}{h(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 = de.$$

§6. КОМБИНАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОЛЬЦЕ U_Γ

Приведем некоторые определения из теории прегеодезических в *двух измерениях*, (см. [1]).

Пусть D, G, dl - 2-среда. $\{s_i\}$ - конечное множество прегеодезических сегментов в D . Кольцо $r\{s_i\}$ определяется как минимальное кольцо, содержащее все открытые множества $[s_i] \subset G$, где

$[s] =$ множество прегеодезических, разделяющих концы s .

Множество $A \subset G$ принадлежит кольцу U_G коль скоро существует конечное множество прегеодезических сегментов $\{s_i\}$, $s_i \subset D$ таких, что $A^* \in r\{s_i\}$. Здесь A^* есть открытое множество, эквивалентное A : это означает, что симметричная разность A и A^* может быть покрыта конечным числом пучков

$[P] =$ прегеодезические, содержащие точку $P \in D$.

(Таким образом элементы U_G являются классами эквивалентности, а не отдельными множествами).

Пусть D_3, E, Γ, dl - 3-среда. Для любого $e \in E$ обозначим

$U_e =$ объединенное кольцо в G_e , см. P3.

Для любого множества точек $\{a_i\} \subset e$, пусть

$r_e\{a_i\} = r\{s_k\}$, где $\{s_k\}$ множество всех прегеодезических отрезков с концами в $\{a_i\}$.

Для любого подмножества $A \subset \Gamma$ запишем

$A_e = \{\gamma \in G_e : \gamma \text{ принадлежит } A\}$

Определение U_Γ . Множество $A \subset \Gamma$ принадлежит U_Γ тогда и только тогда, когда A_e принадлежит U_e для почти всех $e \in E$.

Два примера. I. Множества, определенные пластинками. Следующее построение дает нам представление, насколько богатым является класс U_Γ . Пусть

$\tau =$ пластинка, т.е. g -выпуклая часть некоторого диска

$[\tau] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma, \text{ пересекающие пластинку } \tau\}$,

$r\{\tau_i\} =$ минимальное кольцо подмножеств Γ , содержащее все $[\tau_i]$ для некоторой конечной совокупности $\{\tau_i\}$.

Ясно, что при любом выборе совокупности $\{\tau_i\}$, любое $A \in r\{\tau_i\}$ является членом U_Γ .

II. *Прегеодезические, проходящие через петлю.* Любую кривую $L \subset D_3$ без самопересечений назовем *петлей*, если она может быть преобразована в окружность гомеоморфизмом D_3 . Множество $\{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ содержит по крайней мере одну точку из } L\}$ отделяет только одну неограниченную компоненту в Γ . Положим

$|L|$ = дополнение в Γ к этой неограниченной компоненте. Иначе говоря,

$|L|$ = множество $\gamma \in \Gamma$, которые проходят через петлю L .

Если мы дополнительно предположим, что L — ломаная линия, состоящая из конечного числа прегеодезических сегментов, то для почти всех $e \in \mathbb{E}$ множество $e \cap L$ есть конечная совокупность точек $\{a_i\}$. Существует правило: индикаторная функция $I_{|L|}(\gamma)$ остается постоянной на любом непрерывном пути в Γ , пока этот путь не выйдет на $\{\gamma \in \Gamma : \gamma \cap L \neq \emptyset\}$. Этим свойством обладает

$I_{|L|}(g)$ = сужение $I_{|L|}(\gamma)$ до G_e ,

из которого следует, что $I_{|L|}(g)$ остается постоянным на любом атоме $\tau_e \{a_i\}$. Откуда необходимо следует $|L| \cap e \in \tau_e \{a_i\}$ и $|L| \in U_\Gamma$. В общем случае $|L| \in U_\Gamma$, если дополнительно потребовать, чтобы для почти всех $e \in \mathbb{E}$ множество $e \cap L$ являлось бы конечной совокупностью точек.

Последнее условие будет удовлетворено, если кривая L достаточно гладкая.

Комбинаторные разложения.

В работа [1] описан функционал $\Phi(A)$, определенный для $A \in U_G$: если $A \in \tau\{z_i\}$, то $\Phi(A)$ получается линейной комбинацией dl -длин прегеодезических сегментов, соединяющих все пары концов сегментов z_i , взятых с некоторыми целыми коэффициентами имеющими комбинаторное значение. В классических 2-средах всегда

(1)

$$\int_A d\gamma = \Phi(A).$$

Обозначим через Φ_e функционал Φ , построенный как в [1] посредством сужения меры dl на e . Для любого $B \in U_\Gamma$ определим

$$\Psi(B) = \frac{1}{\pi} \int \Phi_e(B_e) de.$$

В классической 3-среде (5.1) приводит, через теорему Фубини к тождеству, справедливому для каждого $B \in U_\Gamma$

$$\int_B d\gamma = \Psi(B).$$

Ниже применим это уравнение к множеству B из примера II. Предположим, что петля L состоит из конечного числа прегеодезических игл v_j . Полагая

$a_j = e \cap \nu_j$ (возможность $e \cap \nu_j = \emptyset$ не исключается),

получим конечное точечное множество $\{a_j\} \subset e$. Для любого $A \in \tau\{\tau_i\}$ имеем $A_i \in \tau_i\{a_j\}$, так, согласно [1]

$$\Phi_e(B_e) = \sum_{k < s} c_{k,s}(B_e) |a_k, a_s|.$$

Для вычисления интеграла $\int_{[k,s]} c_{k,s}(B_e) |a_k, a_s| de$ где

$[k,s]$ = множество дискоидов, пересекающих ν_k и ν_s ,

используем параметризацию $e = (l_1, l_2, \phi)$ где

$$l_1 = \nu_k \cap e \text{ и } l_2 = \nu_s \cap e.$$

Комбинируя (4.10) с простой сферической тригонометрией в $T_2(l_1)$ и $T_2(l_2)$ находим

$$de = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{h(l_1, l_2)} \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 d\phi dl_1 dl_2,$$

где

α_i = угол между прегеодезической γ_{12} и ν_i , $i = 1, 2$.

γ_{12} = прегеодезическая, содержащая l_1 и l_2 .

λ_i = плоский угол между дискоидом e и дискоидом, содержащим γ_{12} и точку l_i , $i = 1, 2$.

Коэффициенты $c_{kl}(B_e) = c_{kl}(l_1, l_2, \phi)$ как функции от ϕ суть постоянные величины на

Λ_+ , Λ_- = взаимно-дополняющие дуги на которые p_7 разделяется дискоидами e_1 и e_2 ,

e_1 (или e_2) = дискоид, содержащий l_1, l_2 и ν_s (или ν_k).

Для простоты предположим, что для почти каждого $e \in \mathbb{E}$ число точек из $\{a_j\}$ на γ_{12} равно двум. Тогда две искомые постоянные – это 2 и –2. Условимся, что Λ_+ соответствует постоянной 2, а Λ_- соответствует постоянной –2. Таким образом,

$$c_{k,s}(l_1, l_2, \phi) = 2 I_{\Lambda_+}(\phi) - 2 I_{\Lambda_-}(\phi)$$

где $I_{\Lambda_-}(\phi)$ – обычная индикаторная функция, откуда получаем

$$\begin{aligned} & \int_{[k,s]} c_{k,s}(l_1, l_2, \phi) |a_k, a_s| de = \\ & = 2 \int_{a_k} \int_{a_s} |l_1, l_2| \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{h(l_1, l_2)} dl_1 dl_2 \int [I_{\Lambda_+}(\phi) - I_{\Lambda_-}(\phi)] \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 d\phi. \end{aligned}$$

Простым вычислением получаем

$$\int_{\Lambda} \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 d\phi = \int_0^{\Lambda} \sin \phi \sin(\Lambda - \phi) d\phi = \sin |\Lambda| - |\Lambda| \cos |\Lambda|.$$

где $|\Lambda|$ — обычная угловая мера дуги Λ . Следовательно,

$$\int [I_{\Lambda_+}(\phi) - I_{\Lambda_-}(\phi)] \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 d\phi = \pi \cos \Lambda_-.$$

Итак, приходим к следующему представлению :

$$\Psi([L]) = 2 \sum_{k < l} \int_{\alpha_k} \int_{\alpha_l} |l_1, l_2| \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{h(l_1, l_2)} \cos \Lambda_- dl_1 dl_2.$$

Теперь условие, что L состоит из конечного числа прегеодезических отрезков можно опустить, и для любой кусочно-гладкой петли L получим, что в любой классической 3-среде имеет место

$$\Psi([L]) = \int \int_{L \times L} |l_1, l_2| \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{h(l_1, l_2)} \cos \Lambda_- dl_1 dl_2. \quad (6.1)$$

Завершим несколькими замечаниями относительно формулы (6.1). Предположим, что в классической 3-среде имеем петлю L и поверхность S , для которой L является границей. Пусть любая прегеодезическая γ , проходящая через L , т.е. $\gamma \in [L]$ по крайней мере один раз пересекает S , иначе говоря, S натянута на петлю L . Следствием (3.11) является формула для площади $\|S\|$ поверхности S :

$$\|S\| = \frac{1}{2\pi} \int N(\gamma) d\gamma, \quad N(\gamma) = \text{card}(S \cap \gamma).$$

Теперь легко находим

$$\|S\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{[L]} N(\gamma) d\gamma \geq \frac{1}{2\pi} \int_{[L]} d\gamma = \frac{1}{2\pi} \Psi([L]), \quad (6.2)$$

или, используя (6.1)

$$\|S\| \geq \frac{1}{2\pi} \int \int_{L \times L} |l_1, l_2| \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{h(l_1, l_2)} \cos \Lambda_- dl_1 dl_2. \quad (6.3)$$

Равенство в (6.3) имеет место, если L принадлежит некоторому диску e и мы берем

$S =$ часть e , ограниченная L .

Тогда $N(\gamma) = 1$, если $\gamma \in [L]$, $N(\gamma) = 0$ в противном случае, и (6.2) сводится к равенству. Проверка этого состоит в следующем :

из $L \subset e$ следует, что $\cos \Lambda_- = 1$,

согласно (1.3) интеграл в (6.3) сводится к $\frac{1}{2\pi} \int \int_{L \times L} |l_1, l_2| dg$,

согласно (1.4) последний интеграл равен $2\pi \|S\|$,

т.е. (6.3) сводится к $\|S\| = \|S\|$.

Заметим, что неравенство (6.3) имеет место также для минимальных поверхностей, натянутых на L . В частности, дисконд в случае $L \subset e$ есть минимальная поверхность. В евклидовом случае имеем $|l_1, l_2| = h(l_1, l_2)$, сводящем (6.3) к виду, который вероятно оправдывает название "изопериметрическое неравенство для петель":

$$\|S\| \geq \frac{1}{2\pi} \int \int_{L \times L} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \Lambda_{-} dl_1 dl_2. \quad (6.4)$$

Abstract. The present paper extends the topic of author's recent paper [1] (Izv. AN Armenii. Matematika, vol. 39, no. 4, 2004) on pregeodesics in two dimensions, to families \mathbb{I} of pregeodesics contained in a smooth three dimensional manifold D_3 . Pregeodesics $\gamma \in \mathbb{I}$ correspond to lines in Hilbert axioms scheme for dimension 3, and so they exist in D_3 along with a family \mathbb{E} of discoids that are counterparts of planes. Each discoid $c \in \mathbb{E}$ is a replica of two-dimensional D considered in [1], in particular each discoid is assumed to contain a family of smooth pregeodesics in the sense of [1]. The relationships between the points in D_3 , pregeodesics and discoids are introduced axiomatically, following Hilbert's axioms scheme for dimension 3. Within a classical environment in D_3 (a concept analogous to the classical environment of [1]) the basic length measure dl gives simultaneous birth to measures de in \mathbb{E} and $d\gamma$ in \mathbb{I} , and leads via an elegant measure identity to the definition of a subset ring in the space \mathbb{I} , where combinatorial decompositions in the sense of the author's 1982 book are possible. That decompositions can be applied to the study of surfaces in D_3 say, for calculation of probabilities of numbers of hits by random $\gamma \in \mathbb{I}$. In the paper a geometrical inequality is derived for the area of the minimal surface spanned over a loop in D_3 that can be called an isoperimetric inequality for the loops (a loop is not necessarily restricted to a discoid). It seems that the corresponding inequality was unknown even in the Euclidean case. The present approach establishes that inequality in one stroke, as valid at least for Euclidean, hyperbolic and Riemann spaces. For the sake of completeness, §1 reproduces some passages from [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "Комбинаторные валюации в пространстве прегеодезических", Изв. НАН Армении. Математика, том 39, no. 4, стр. 2 – 35, 2004.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

Поступила 9 мая 2005

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян

Ереванский государственный университет

E-mails : *parine78@ysu.am*; *victo@aua.am*

Резюме. В статье получены элементарные выражения для функции распределения длины хорды правильного треугольника, правильного пятиугольника и прямоугольника. Формулы выводятся двумя различными методами : а) прямым вычислением соответствующей плотности и б) используя δ -формализм в тождестве Плейеля. Для правильного треугольника и прямоугольника результаты совпадают с результатами Зуланке (1961) и Гилле (1988).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть \mathbf{G} – пространство всех прямых g на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . $(p, \varphi) =$ полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую g , суть стандартные координаты прямой $g \in \mathbf{G}$.

Пусть $\mu(\cdot)$ – локально конечная мера на \mathbf{G} , инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости. Хорошо известно, что (см. [1])

$$\mu(dg) = dg = dp d\varphi.$$

Для любой ограниченной выпуклой области D множество всех прямых, пересекающих D , обозначим через

$$|D| = \{g \in \mathbf{G} : g \cap D \neq \emptyset\}.$$

Имеем (см. [1], [2]) :

$$\mu(|D|) = |\partial D|,$$

где ∂D – периметр области D , а $|\partial D|$ – длина периметра ∂D .

Случайная прямая в $[D]$ есть прямая с распределением, пропорциональным сужению меры μ на $[D]$. Следовательно, имеем

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{|\partial D|} \quad \text{для любого борелевского } A \subset [D]. \quad (1)$$

Далее, пусть A_D^y — множество прямых, пересекающих D и образующих хорду $\chi(g) = g \cap D$ длины меньше, чем y :

$$A_D^y = \{g \in [D]: \chi(g) < y\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Функция распределения длины случайной хорды χ области D обычно определяется как

$$F(y) = \frac{1}{|\partial D|} \mu(A_D^y) = \frac{1}{|\partial D|} \iint_{A_D^y} d\varphi dp. \quad (2)$$

Следовательно, для получения функции распределения длины хорды для ограниченной выпуклой области D , надо вычислить интеграл в правой части (2). Явные выражения для функций распределения длины хорды известны только в случаях круга, правильного треугольника (см. [4]) и прямоугольника (см. [3]).

Основными результатами данной статьи являются элементарные выражения для функции распределения длины хорды для правильного треугольника, правильного пятиугольника и прямоугольника. Формулы выводятся двумя разными методами: а) прямым вычислением плотности распределения; б) используя δ -формализм в тождестве Плейеля. В случаях треугольника и прямоугольника полученные результаты совпадают с результатами Зуланке (1961) и Гилле (1988) (см. также [5] - [8]).

§2. СЛУЧАЙ МНОГОУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ

Пусть D — выпуклый ограниченный многоугольник на плоскости и a_1, a_2, \dots, a_n — стороны D . Тогда

$$[D] = \bigcup_{i < j} ([a_i] \cap [a_j])$$

где $[a_i] \cap [a_j]$ — множество всех прямых, пересекающих обе стороны a_i и a_j многоугольника D .

Имеем

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{|\partial D|} \sum_{i < j} \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j]: \chi(g) < y\}} d\varphi dp = \\ &= \frac{1}{|\partial D|} \left[\sum_{i < j}^I \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j]: \chi(g) < y\}} d\varphi dp + \sum_{i < j}^{II} \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j]: \chi(g) < y\}} d\varphi dp \right], \end{aligned}$$

где \sum^I распространяется на все пары непараллельных отрезков $a_i, a_j \subset \partial D$, а \sum^{II} — по всем парам параллельных отрезков a_i и $a_j \subset \partial D$.

Переходя к координатам $(|\chi|, \varphi)$, в каждом из интегралов под знаком суммы $\sum_{i < j}^I$ можно провести одно интегрирование. Имеем (см. [2]) :

$$dg = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{|\sin(\alpha_1 + \alpha_2)|} d|\chi| d\varphi, \quad (3)$$

где α_1 — угол между a_i и хордой $\chi(g) = g \cap D$, а α_2 — угол между a_j и $\chi(g)$ ($g \in [a_i] \cap [a_j]$).

Таким образом, получаем

$$F(y) = \frac{1}{|\partial D|} \left[\sum_{i < j}^I \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j] : \chi(g) < y\}} \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{|\sin(\alpha_1 + \alpha_2)|} d|\chi| d\varphi + \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j] : \chi(g) < y\}} d\varphi dp \right],$$

где b_{ij} — расстояние между параллельными отрезками a_i и a_j , а $I(A)$ — индикаторная функция события A , т.е. $I(A) = 1$, если имеет место A и 0, в противном случае.

Можно также получить плотность распределения длины случайной хорды для D :

$$f(y) dy \approx F(y + dy) - F(y) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |a_i|} \left[\sum_{i < j}^I \frac{dy}{\sin \gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 d\varphi + \sum_{i < j}^{II} \left[I(b_{ij} < y + dy) \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j] : \chi(g) < y + dy\}} d\varphi dp - I(b_{ij} < y) \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j] : \chi(g) < y\}} d\varphi dp \right] \right],$$

где γ_{ij} — угол между непараллельными сторонами a_i и a_j (или их продолжениями).

$\Phi_{ij}(y) = \{\varphi : \text{существует хорда направления } \varphi \text{ длины } y, \text{ соединяющая } a_i \text{ и } a_j\}$.

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j}^{II} \left[I(b_{ij} < y + dy) \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j] : \chi(g) < y + dy\}} d\varphi dp - \right. \\ & \left. - I(b_{ij} < y) \iint_{\{g \in [a_i] \cap [a_j] : \chi(g) < y\}} d\varphi dp \right] = \\ & = \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) \int_{y < \chi(g) < y + dy} h(\varphi) d\varphi = \\ & = \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) h(\varphi_y) \left[\arccos \frac{b_{ij}}{y + dy} - \arccos \frac{b_{ij}}{y} \right] = \\ & = dy \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) h(\varphi_y) \frac{b_{ij}}{y \sqrt{y^2 - b_{ij}^2}}. \end{aligned}$$

где $h(\varphi) \neq b_{ij}$ - высота параллелограмма, две стороны которого равны $\chi(\varphi) = g(\varphi) \cap D$, $g(\varphi) \in [a_i] \cap [a_j]$, а две другие стороны лежат на параллельных сторонах a_i и a_j , $h(\varphi_y) = h(\varphi)$, для которого $\chi(\varphi) = y$ и

$$\frac{d\varphi_y}{dy} = \arccos \frac{b_{ij}}{y + dy} - \arccos \frac{b_{ij}}{y} = \frac{b_{ij}}{y \sqrt{y^2 - b_{ij}^2}} \quad (4)$$

Поскольку $\alpha_1 = \pi/2 - \varphi$ и $\alpha_2 = \pi/2 + (\varphi - \gamma_{ij})$, получаем

$$\begin{aligned} f(y) = & \frac{1}{\sum_{i=1}^n |a_i|} \left[\sum_{i < j}^I \frac{1}{\sin \gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \gamma_{ij}) d\varphi + \right. \\ & \left. + \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) h(\varphi_y) \frac{b_{ij}}{y \sqrt{y^2 - b_{ij}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что плотность распределения $f(y)$ определяется для любого $y \in \mathbb{R}$ за исключением тех значений y , которые являются сторонами, высотами и диагоналями многоугольника. Для таких значений y , функция распределения $F(y)$ не дифференцируема, но непрерывна.

§3. ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

Пусть D - выпуклый ограниченный многоугольник на плоскости и a_1, \dots, a_n - стороны многоугольника D . Тождество Плейеля для многоугольника D имеет следующий вид (см. [1] и [2]) :

$$\int_{|D|} f(|\chi(g)|) dg = \int_G f'(|\chi|) \cdot |\chi| \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg + \sum_{i=1}^n \int_0^{|a_i|} f(u) du. \quad (6)$$

где $f(x)$ — функция с непрерывной первой производной $f'(x)$, α_1 и α_2 — углы между ∂D и прямой g на концах хорды $\chi(g) = g \cap D$, лежащие в одной полуплоскости относительно внутренности многоугольника D , $|a_i|$ суть длины сторон a_i , $i = 1, \dots, n$.

Р. В. Амбарцумян в [1] и [2] показал, что тождество (6) полезно при вычислении функции распределения длины хорды в случае ограниченных выпуклых многоугольников. Если в (6) формально подставить

$$f_y(u) = \begin{cases} 0 & \text{если } u \leq y \\ 1 & \text{если } u > y \end{cases}$$

то интеграл в левой части (6) будет равен

$$\mu\{g \in [D]: |\chi(g)| > y\},$$

т.е. инвариантной мере множества хорд многоугольника D , длины которых больше y . Производную функции $f_y(u)$ нужно заменить на δ -функцию Дирака, концентрированную в точке y . Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} [1 - F(y)] |\partial D| &= \sum_{i < j}^I \iint_{[a_i] \cap [a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg + \\ &+ \sum_{i < j}^{II} \iint_{[a_i] \cap [a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg + \sum_{i=1}^n (|a_i| - y)^+, \end{aligned} \quad (7)$$

где $[a_i] \cap [a_j]$ — множество прямых, пересекающих обе стороны a_i и a_j многоугольника D , $x^+ = x$, если $x > 0$ и 0 , в противном случае.

Для любой непрерывной функции f имеем (см. [9]):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - y) f(x) dx = f(y). \quad (8)$$

Для $\{a_i, a_j\} \in \sum_{i < j}^I$ делаем замену переменной $(p, \varphi) \rightarrow (|\chi|, \varphi)$ и используя (3) и (8), получаем

$$\iint_{[a_i] \cap [a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg = \frac{y}{\sin \gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \sin \varphi \sin(\gamma_{ij} - \varphi) d\varphi.$$

Кроме того, для параллельных сторон a_i и a_j (т.е. $a_i, a_j \in \sum_{i < j}^{II}$) используя (4), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^{II} \iint_{[a_i] \cap [a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg &= \\ &= -2 \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) \int \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| h(\varphi_\chi) \tan^2 \varphi_\chi \frac{d\varphi_\chi}{d\chi} d\chi = \\ &= -2 \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) h(\varphi_y) \tan^2 \varphi_y \frac{b_{ij}}{\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}}, \end{aligned}$$

где $\varphi_y = \arccos \frac{b_{ij}}{y}$.

Следовательно, получаем

$$F(y) = 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^n |a_i|} \left[\sum_{i < j}^I \frac{y}{\sin \gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \sin \varphi \sin(\gamma_{ij} - \varphi) d\varphi - \right. \\ \left. - 2 \sum_{i < j}^{II} I(b_{ij} < y) h(\varphi_y) \frac{\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}}{b_{ij}} + \sum_{i=1}^n (|a_i| - y)^+ \right]. \quad (9)$$

В случае, когда ∂D не содержит параллельных сторон, формула (9) совпадает с выражением, приведенным Р. В. Амбарцумяном в [2].

Из (5) и (9) следует, что чтобы найти функцию распределения $F(y)$ или плотность распределения $f(y)$ должны вычислить интегралы вида

$$\frac{1}{\sin \gamma} \int_{\Phi(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \gamma) d\varphi \quad (10)$$

и

$$\frac{1}{\sin \gamma} \int_{\Phi(y)} \sin \varphi \sin(\gamma - \varphi) d\varphi \quad (11)$$

для любых двух непараллельных отрезков a и b ($a \leq b$) с углом γ между a и b (или их продолжениями) и также вычислить вторую сумму в (5) и (9) (для пар параллельных сторон). В (10) и (11)

$\Phi(y) = \{\varphi: \text{существует хорда, направления } \varphi \text{ и длины } y \text{ соединяющая } a \text{ и } b\}$.

§4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим интегралы (10) и (11) для непараллельных отрезков a и b , имеющие общий конец. Имеем значения следующих неопределённых интегралов

$$\frac{1}{\sin \gamma} \int \cos \varphi \cos(\varphi - \gamma) d\varphi = \cot \gamma \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] - \frac{1}{4} \cos 2\varphi. \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sin \gamma} \int \sin \varphi \sin(\gamma - \varphi) d\varphi = \cot \gamma \left[-\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] - \frac{1}{4} \cos 2\varphi. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что для любого $\gamma \in (0, \pi)$ область интегрирования $\Phi(y)$ является подмножеством следующего интервала:

$$\Phi(y) \subset \left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, \frac{\pi}{2} \right].$$

Лемма 1. а) Для острого угла γ и для $0 < y \leq a \sin \gamma$ ($a = \min(a, b)$) и

б) для тупого угла γ и для $0 < y \leq a$ ($a \leq b$)

получаем следующие результаты :

$$\frac{1}{\sin \gamma} \int_{\Phi(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \gamma) d\varphi = \frac{\pi - \gamma}{2} \cot \gamma + \frac{1}{2}. \quad (14)$$

и

$$\frac{1}{\sin \gamma} \int_{\Phi(y)} \sin \varphi \sin(\gamma - \varphi) d\varphi = -\frac{\pi - \gamma}{2} \cot \gamma + \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Доказательство. следует из (12), (13) и из факта, что для таких значений y имеем $\Phi(y) = \left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, \frac{\pi}{2}\right]$.

Лемма 2. Для острого угла $\gamma \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ и для $a \sin \gamma < y \leq a$, ($a = b$) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \gamma} \int_{\Phi(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \gamma) d\varphi = \\ & = \cot \gamma \left[-\frac{\pi + \gamma}{2} + 2 \arcsin \frac{a \sin \gamma}{y} - \frac{a \sin \gamma}{y} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{y^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sin 2\gamma - \cos 2\gamma \frac{a \sin \gamma}{y} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{y^2}} \right] + \\ & + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\gamma - \frac{a \sin \gamma \sin 2\gamma}{y} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{y^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \gamma} \int_{\Phi(y)} \sin \varphi \sin(\gamma - \varphi) d\varphi = \\ & = \cot \gamma \left[-2 \arcsin \frac{a \sin \gamma}{y} + \frac{\pi + \gamma}{2} - \frac{a \sin \gamma}{y} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{y^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sin 2\gamma - \frac{a \sin \gamma}{y} \cos 2\gamma \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{y^2}} \right] + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\gamma) - \\ & - \frac{a \sin \gamma}{y} \sin 2\gamma \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \gamma}{y^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Если $y \in (a \sin \gamma, a)$ в интервале $\left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, \frac{\pi}{2}\right]$ существуют

направления $\varphi \notin \Phi(y)$. $\Phi(y)$ является объединением следующих трех интервалов:

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & \left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, -\operatorname{arccos} \frac{a \sin \gamma}{y} \right) \cup \\ & \cup \left(\operatorname{arccos} \frac{a \sin \gamma}{y}, \gamma - \operatorname{arccos} \frac{a \sin \gamma}{y} \right) \cup \\ & \cup \left(\gamma + \operatorname{arccos} \frac{a \sin \gamma}{y}, \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Используя (12) и (13) получим требуемый результат.

Теперь используя Леммы 1 и 2, можно получить результаты Зуланке (см. [4]) для правильного треугольника и Гилле (см. [3]) для прямоугольника.

§5. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Так как в треугольнике нет параллельных сторон и $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\sin \gamma = \sqrt{3}/2$, то формулы (5) и (9) можно записать в виде

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{3}a} \int_{\Phi_{1,2}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \pi/3) d\varphi. \quad (18)$$

и

$$F(y) = 1 - \frac{2y}{\sqrt{3}a} \int_{\Phi_{1,2}(y)} \sin \varphi \sin(\pi/3 - \varphi) d\varphi - \frac{1}{a} (a - y). \quad (19)$$

где a — длина стороны правильного треугольника.

Используя (14) — (17), из (18) и (19) получим вид плотности распределения

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [0, a] \\ \frac{1}{2a} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}a}, & \text{если } 0 < y \leq \frac{\sqrt{3}a}{2} \\ -\frac{\sqrt{4y^2 - 3a^2}}{2y^2} + \frac{1}{2a} + \frac{2}{\sqrt{3}a} \operatorname{arcsin} \frac{a\sqrt{3}}{2y} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a}, & \text{если } \frac{\sqrt{3}a}{2} < y \leq a \end{cases} \quad (20)$$

и функции распределения

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) \frac{y}{a}, & \text{если } 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}a}{2} \\ \frac{y}{2a} - \frac{2\pi y}{3\sqrt{3}a} + \frac{2y}{\sqrt{3}a} \operatorname{arcsin} \frac{a\sqrt{3}}{2y} + \frac{\sqrt{4y^2 - 3a^2}}{2y}, & \text{если } \frac{a\sqrt{3}}{2} \leq y \leq a \\ 1, & \text{если } y \geq a. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$.

Проверим теперь, что

$$\int_0^a f(y) dy = 1. \quad (22)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a f(y) dy &= \int_0^{\sqrt{3a/2}} f(y) dy + \int_{\sqrt{3a/2}}^a f(y) dy = \\ &= \left(\frac{1}{2a} + \frac{\pi}{3\sqrt{3a}} \right) \frac{\sqrt{3a}}{2} + \left(\frac{1}{2a} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3a}} \right) \left(a - \frac{\sqrt{3a}}{2} \right) + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3a}} \int_{\sqrt{3a/2}}^a \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2y} dy - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3a/2}}^a \frac{\sqrt{4y^2 - 3a^2}}{y^2} dy. \end{aligned}$$

Используя значения следующих интегралов

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arcsin x - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right|, \quad (23)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|,$$

получим

$$\int_0^a f(y) dy = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} - \ln(3a) + \ln(a\sqrt{3}) = 1,$$

т.е. (22).

§6. СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Так как имеются две пары параллельных сторон ($a \leq b$) и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\sin \gamma = 1$, формулы (5) и (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2(a+b)} \left[4 \int_{\varphi_{12}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \pi/2) d\varphi + I(a < y) h(\varphi_y, a) \frac{a}{y \sqrt{y^2 - a^2}} + \right. \\ &\left. + I(b < y) h(\varphi_y, b) \frac{b}{y \sqrt{y^2 - b^2}} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned} F(y) &= 1 - \frac{1}{a+b} \left[2y \int_{\varphi_{12}(y)} \sin \varphi \sin(\pi/2 - \varphi) d\varphi + I(a < y) h(\varphi_y, a) \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} + \right. \\ &\left. + I(b < y) h(\varphi_y, b) \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{b} + (a-y)^+ + (b-y)^+ \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где $h(\varphi_y, a)$ ($h(\varphi_y, b)$) - высота параллелограмма, параллельные стороны которого равны y а другие две стороны лежат на параллельных сторонах длины b (a). Нетрудно убедиться, что

$$h(\varphi_y, a) = \frac{a \cdot (b - \sqrt{y^2 - a^2})}{y} \quad \text{и} \quad h(\varphi_y, b) = \frac{b \cdot (a - \sqrt{y^2 - b^2})}{y}.$$

Используя (14) — (17), из (24) и (25) получим результат Гилле для прямоугольника (см. [3]). Плотность распределения длины случайной хорды для прямоугольника имеет вид :

$$f(y) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [0, \sqrt{a^2 + b^2}) \\ \frac{1}{a+b}, & \text{если } 0 < y \leq a \\ \frac{a^2 b}{(a+b)y^2 \sqrt{y^2 - a^2}}, & \text{если } a < y \leq b \\ \frac{ab}{(a+b)y^2} \left(\frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}} + \frac{b}{\sqrt{y^2 - b^2}} \right) - \frac{1}{a+b}, & \text{если } b < y \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases} \quad (26)$$

а функция распределения $F(y)$ для прямоугольника $a \leq b$ имеет вид

$$F(y) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ \frac{y}{a+b}, & \text{если } 0 < y \leq a \\ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y}, & \text{если } a < y \leq b \\ 1 - \frac{y}{a+b} + \frac{1}{(a+b)y} (a\sqrt{y^2 - b^2} + b\sqrt{y^2 - a^2}), & \text{если } b < y < \sqrt{a^2 + b^2} \\ 1, & \text{если } y \geq \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (27)$$

Очевидно, что $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$.

Теперь проверим, что

$$\int_0^{\sqrt{a^2 + b^2}} f(y) dy = 1. \quad (28)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{a^2 + b^2}} f(y) dy &= \frac{a}{a+b} + \frac{a^2 b}{(a+b)} \int_a^{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^2 - a^2}} + \\ &+ \frac{ab^2}{(a+b)} \int_b^{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - b}{a+b}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - c^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - c^2}}{c^2 x}$$

получим

$$\int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} f(y) dy = \frac{a}{a+b} + \frac{b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a+b} = 1.$$

т.е. (28).

§7. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Поскольку в правильном пятиугольнике нет параллельных сторон и

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{3\pi}{5} & \text{если } j = i + 1 \\ \frac{\pi}{5} & \text{если } j \neq i + 1 \end{cases}$$

($\gamma_{i,i+1}$ — угол между соседними сторонами правильного пятиугольника, а $\gamma_{i,j}$, $j \neq i + 1$ — угол между продолжениями двух несоседних сторон), формулы (5) и (9) можно переписать в виде

$$5a[1 - F(y)] = \frac{5y}{\sin \frac{3\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \sin \varphi \sin(3\pi/5 - \varphi) d\varphi + \\ + \frac{5y}{\sin \frac{\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \sin \varphi \sin(\pi/5 - \varphi) d\varphi + 5(a - y)^2$$

и

$$f(y) = \frac{1}{5a} \left[\frac{5}{\sin \frac{3\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - 3\pi/5) d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{5}{\sin \frac{\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \pi/5) d\varphi \right],$$

где a — длина стороны правильного пятиугольника.

Используя формулы

$$\sin \frac{3\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{и}$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} - 1)}{8}$$

предыдущие выражения можно переписать в виде :

$$F(y) = 1 - \frac{4y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \int_{\Phi_{12}(y)} \sin \varphi \sin(3\pi/5 - \varphi) d\varphi - \frac{2(\sqrt{5}+1)y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \int_{\Phi_{13}(y)} \sin \varphi \sin(\pi/5 - \varphi) d\varphi - \frac{1}{a}(a-y)^+.$$

и

$$f(y) = \frac{1}{a \sin \frac{3\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - 3\pi/5) d\varphi + \frac{1}{a \sin \frac{\pi}{5}} \int_{\Phi_{13}(y)} \cos \varphi \cos(\varphi - \pi/5) d\varphi.$$

В случае правильного прямоугольника $\Phi_{12}(y)$ и $\Phi_{13}(y)$ суть подмножества $(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2})$. Нетрудно проверить, что

1) при $0 < y \leq a$,

$$\Phi_{12}(y) = (\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}) \quad \text{и} \quad \Phi_{13}(y) = \emptyset;$$

2) при $a < y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$, $\Phi_{12}(y)$ есть интервал

$$\Phi_{12}(y) = \left(\arcsin \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}} \cos \frac{\pi}{5}}{y}, \frac{\pi}{10} + \arcsin \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}} \cos \frac{\pi}{5}}{y} \right);$$

3) при $y > \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ (длина диагонали пятиугольника),

$$\Phi_{12}(y) = \Phi_{13}(y) = \emptyset;$$

4) при $a < y < \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ (длина перпендикуляра, опущенного из вершины пятиугольника на сторону),

$$\Phi_{13}(y) = \left(-\frac{3\pi}{10} + \arcsin \frac{a \cos \frac{\pi}{10}}{y}, \arccos \frac{a \cos \frac{\pi}{10}}{y} \right);$$

5) при $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} < y < \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$, $\Phi_{13}(y)$ - объединение следующих трех интервалов :

$$\begin{aligned} \Phi_{13}(y) = & \left(-\frac{3\pi}{10} + \arcsin \frac{a \cos \frac{\pi}{10}}{y}, -\arccos \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y} \right) \cup \\ & \cup \left(-\arccos \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y}, \arcsin \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y} - \frac{3\pi}{10} \right) \cup \\ & \cup \left(\frac{7\pi}{10} - \arccos \frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y}, \arccos \frac{a \cos \frac{\pi}{10}}{y} \right) \end{aligned}$$

Используя теперь (14) — (17), получим функцию распределения длины хорды для правильного пятиугольника:

$$F(y) =$$

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0 \\ \frac{y}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right), & \text{если } 0 \leq y \leq a \\ 1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})y}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} - \\ - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \left(\arcsin \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} \right), & \text{если } a \leq y \leq \frac{a}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ 1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})y}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} - \\ - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \left(\arcsin \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} \right) - \\ - \frac{(\sqrt{5}+1)^2 y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \operatorname{arccos} \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} + \\ + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^2} \sin \left(\operatorname{arccos} \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} \right), & \text{если } \frac{a}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} a \\ 1, & \text{если } y \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} a. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта функция является непрерывной. Для значения $y = a$, общее значение второго и третьего случаев совпадают и равно

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Действительно, так как

$$\arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{2\pi}{5}$$

и

$$\begin{aligned} \cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right) &= \cos \frac{2\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = \\ &= 1 - 2 \frac{(10+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{64} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{aligned}$$

получим результат:

$$1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \frac{2\pi}{5} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{\sqrt{5}-1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Случай $y = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ очевиден.

Рассмотрим случай $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. Из последнего случая имеем $F\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right) =$

1. Нетрудно проверить, что получаем тоже самое значение из предыдущего выражения. Действительно, поскольку

$$\arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{\pi}{5} \quad \text{и}$$

$$\cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} \right) = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

и

$$\arccos \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{10} \quad \text{и} \quad \sin \left(\arccos \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

получаем

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{10\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} - \\ & - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} \right) - \frac{(\sqrt{5}+1)^3}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arccos \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \\ & + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^2} \sin \left(\arccos \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right) = \\ & = 1 + \frac{\pi(10+4\sqrt{5})}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{8} - \\ & - \frac{\pi(\sqrt{5}+1)^3}{20\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2(\sqrt{5}-1)} = 1. \end{aligned}$$

Плотность распределения имеет вид :

$f(y) =$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если } y \notin \left[0, \frac{\sqrt{5}+1}{2} a \right] \\ \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right), & \text{если } 0 < y \leq a \\ \frac{\pi(5+3\sqrt{5})}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} + \\ + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} - \\ - \frac{a^2(5+3\sqrt{5})}{2y^2\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}, & \text{если } a < y \leq \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ \frac{\pi(5+3\sqrt{5})}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} + \\ + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} - \frac{a^2(5+3\sqrt{5})}{2y^2\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} - \\ - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arccos \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} - \\ - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{4y^2(\sqrt{5}-1)^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} + \\ + \frac{4y^{-2}a^2(5+3\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^{-3}}{\sqrt{4y^2(\sqrt{5}-1)^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}, & \text{если } \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} < y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} a \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$.

Равенство

$$\int_n^{(\sqrt{5}+1)a/2} f(y) dy = 1$$

следует из

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|,$$

$$\int \frac{\arccos x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arccos x + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right|,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x a^2}$$

и (23)

Abstract. In the paper elementary expressions for the chord length distribution function of a regular triangle, pentagon and general rectangle are obtained. The formulae are derived by two different methods : a) by a direct calculation of the corresponding density function and b) using δ -formalism in Pleijel identity. In the cases of the triangle and rectangle the results are shown to coincide with those of Sulanke (1961) and Gille (1988).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
3. W. Gille, "The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases", *Exp. Techn. Phys.*, vol. 36, pp. 197 - 208, 1988.
4. R. Sulanke, "Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren", *Math. Nachr.*, vol. 23, pp. 51 - 74, 1961.
5. W. Nagel, "Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons", *J. Appl. Prob.*, vol. 30, pp. 730 - 736, 1993.
6. J. Gates, "Recognition of triangles and quadrilaterals by chord length distribution", *J. Appl. Prob.*, vol. 19, pp. 873 - 879, 1982.
7. J. Gates, "Some properties of chord length distributions", *J. Appl. Prob.*, vol. 24, pp. 863 - 874, 1987.
8. D. Stoyan and H. Stoyan, *Fractals, Random Shapes and Point Fields*, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.
9. Г. Е. Шилов, *Математический Анализ*, (второй спец. курс), 2-ое издание, Москва, МГУ, 1984.

Поступила 3 апреля 2005

СИЛЬНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ГАЗА ЖИНИБРА. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА

С. К. Погосян

*Институт математики НАН Армении
E-mail : suren.poghosyan@unicam.it*

Резюме. В работе изучается убывание корреляций для газа Жинибра с парным репульсивным потенциалом, убывающим на бесконечности. Получены сильные кластерные оценки для функций Урселла, а также сходимость кластерного представления большой статсуммы. Доказано, что двухточечная усеченная корреляционная функция имеет степенное убывание. Статистики Бозе-Ейнштейна и Ферми-Дирака изучаются одновременно с помощью метода кластерного разложения.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] убывание корреляций было изучено для газа Жинибра со статистикой Максвелла-Больцмана, т.е. для модели взаимодействующих Броуновских петель в \mathbb{R}^d с фиксированным промежутком времени β . В настоящей работе рассматривается газ Жинибра с квантовой статистикой, т.е. модель взаимодействующих Броуновских сложных петель в \mathbb{R}^d с промежутками времени кратными β . Получены оценки интегрального типа для функций Урселла и для двухточечных усеченных корреляционных функций (Теоремы 1–3). Основные результаты относятся к малой интенсивности и парному репульсивному взаимодействию со степенным убыванием на бесконечности.

Наш анализ свойств убывания основан на сильных кластерных свойствах функции Урселла (см. [2] и литературу там же), приводящих к теореме 3, которая вместе с теоремой 1 описывает свойства убывания функций с сильными кластерными свойствами.

§2. УСЛОВИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим систему тождественных частиц в ν -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^ν , взаимодействующих при помощи парного потенциала Φ со следующими свойствами:

(а) $\Phi : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ — четная функция,

(б) степенное убывание на бесконечности, т.е. для некоторого $l \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \Phi(u)(1 + |u|)^l du < \infty.$$

(с) Φ — репульсивно : $\Phi \geq 0$.

Класс потенциалов Φ , удовлетворяющих (а)-(с) обозначим через \mathcal{P}_l^+ .

§3. ГАЗ ЖИНИБРА С КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКОЙ

Пусть $\beta > 0$ фиксирована. Для $j = 1, 2, \dots$ обозначим через $\mathcal{X}_{j\beta}$ пространство сложных петель фиксированной длины $j\beta$ в \mathbb{R}^ν :

$$\mathcal{X}_{j\beta} = \{X \in C([0, j\beta], \mathbb{R}^\nu) \mid X(0) = X(j\beta)\}.$$

и положим $|X| = j$ для $X \in \mathcal{X}_{j\beta}$. В топологии однородной сходимости $\mathcal{X}_{j\beta}$ является польским пространством с борелевой σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{X}_{j\beta})$.

Пространство одной частицы \mathcal{X} является пространством сложных петель в \mathbb{R}^ν , определенных как топологическая сумма пространств $\mathcal{X}_{j\beta}$: $\mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{j\beta}$. Определим борелеву σ -алгебру в \mathcal{X} посредством $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}(\mathcal{X}_{j\beta})$. Это означает, что $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда $B \cap \mathcal{X}_{j\beta} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_{j\beta})$ для всех $j = 1, 2, \dots$.

Для любого $u \in \mathbb{R}^\nu$ пусть

$$\mathcal{X}_{j\beta}^u = \{X \in \mathcal{X}_{j\beta} \mid X(0) = X(j\beta) = u\}$$

и пусть

$$\mathcal{X}^u = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{j\beta}^u.$$

Чтобы определить исходную меру на \mathcal{X} , используем естественное взаимно-однозначное отображение τ между \mathcal{X} и $\mathcal{X}^0 \times \mathbb{R}^\nu$, которое определяется формулой

$$\tau(X^0, u) = X^0 + u, \quad X^0 \in \mathcal{X}^0, \quad u \in \mathbb{R}^\nu.$$

Очевидно, τ есть взаимно-однозначное отображение с

$$\tau^{-1}(X) = (X - X(0), X(0)).$$

Пусть $P_{j\beta}^u$ — не-вероятностная (не нормированная) мера броуновского моста на $\mathcal{X}_{j\beta}^u$ с

$$P_{j\beta}^u(\mathcal{X}_{j\beta}^u) = (\pi j\beta)^{-\frac{v}{2}}, u \in \mathbb{R}^v.$$

Определим меру $P_{\pm, z}^u$ на \mathcal{X}^u , $u \in \mathbb{R}^v$, формулой

$$P_{\pm, z}^u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j-1} z^j}{j} P_{j\beta}^u$$

где $\varepsilon = +1$ или -1 , что соответствует случаю бозонов и фермионов соответственно. Здесь предполагается, что $0 < z \leq 1$. Заметим, что $P_{\pm, z}^u$ — знакопеременная мера. Множества

$$\mathcal{X}^{u,+} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{(2j-1)\beta}^u, \quad \mathcal{X}^{u,-} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{2j\beta}^u$$

дают разложение Хаана пространства \mathcal{X}^u относительно меры $P_{\pm, z}^u$: $\mathcal{X}^u = \mathcal{X}^{u,+} + \mathcal{X}^{u,-}$. Здесь $\mathcal{X}^{u,+}$ и $\mathcal{X}^{u,-}$ не пересекаются. $\mathcal{X}^{u,+}$ положительна и $\mathcal{X}^{u,-}$ отрицательна относительно знакопеременной меры $P_{\pm, z}^u$ (см., например, [3]).

Разложение Жордана меры $P_{\pm, z}^u$ дается формулой

$$P_{\pm, z}^u = (P_{\pm, z}^u)^+ - (P_{\pm, z}^u)^-$$

где $(P_{\pm, z}^u)^+$ и $(P_{\pm, z}^u)^-$ — положительные меры, определенные посредством

$$(P_{\pm, z}^u)^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2j-1}}{2j-1} P_{(2j-1)\beta}^u,$$

$$(P_{\pm, z}^u)^- = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2j} P_{2j\beta}^u.$$

Заметим, что полная вариация $|P_{\pm, z}^u| = (P_{\pm, z}^u)^+ + (P_{\pm, z}^u)^-$ знакопеременной меры $P_{\pm, z}^u$ совпадает с мерой $P_{+, z}^u$, которая является конечной мерой с

$$P_{+, z}^u(\mathcal{X}) \leq P_{+, 1}^u(\mathcal{X}) = (\pi\beta)^{-\frac{v}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\frac{v}{2}}} < \infty.$$

Следующая лемма показывает, что "типичные" сложные петли локализованы.

Лемма 1. Пусть

$$M(R) = \{X \in \mathcal{X} : |X(t) - X(s)| > R \text{ для некоторых } s, t \in [0, |X|\beta]\}, \quad R \geq 0.$$

Для всех $z, 0 < z < 1$,

$$P_{+,z}^u(M(R)) \leq C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}} \exp[-C(\beta, z)R], \quad u \in \mathbb{R}^\nu.$$

где

$$C(\beta, z) = \left(\frac{|\ln z|}{32\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Доказательство: Пусть $M(R, j\beta) = \mathcal{X}_{j\beta} \cap M(R)$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда

$$P_{+,z}^u(M(R)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \cdot P_{j\beta}^u M(R, j\beta).$$

Как показано в [4],

$$P_{j\beta}^u(M(R, j\beta)) \leq C(\nu) \cdot (\beta j)^{-\frac{\nu}{2}} \cdot I_\nu\left(\frac{R}{4\sqrt{j\beta}}\right).$$

Здесь $C(\nu) = |S_1(\nu)|\pi^{-\nu}2^{\frac{\nu}{2}+2}$, где $|S_1(\nu)|$ - площадь единичной сферы в \mathbb{R}^ν и

$$I_\nu(a) = \int_{u>a} e^{-u^2} \cdot u^{\nu-1} du, \quad a \geq 0.$$

Здесь и ниже обозначим все постоянные некоторой буквой C и укажем зависимость только от параметров.

Легко проверить, что $I_\nu(a)$ удовлетворяет следующим рекурсивным соотношениям:

$$I_0(a) \leq Ce^{-\frac{a^2}{2}}, \quad I_1(a) = \frac{1}{2}e^{-a^2}, \quad I_\nu(a) = \frac{1}{2}e^{-a^2}a^{\nu-1} + \frac{\nu-1}{2}I_{\nu-2}(a), \quad \nu \geq 2.$$

где C - абсолютная константа. Откуда

$$I_\nu(a) \leq C(\nu)a^{\nu-2}e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Отсюда следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $z, 0 < z \leq \exp(-16\beta\tau^2)$,

$$e^{\tau R} P_{+,z}^u(M(R)) \leq e^{\tau R} C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^{\frac{\nu}{2}+1}} I_\nu\left(\frac{R}{4\sqrt{j\beta}}\right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}}e^{\tau R}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j^{\frac{\nu}{2}+1}}\left(\frac{R}{4\sqrt{j\beta}}\right)^{\nu-2}\exp\left(-\frac{R^2}{32j\beta}\right)\leq \\
&\leq C\cdot C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j^{\frac{\nu}{2}+1}}e^{\tau R}\exp\left(-\frac{R^2}{64j\beta}\right)= \\
&= C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[z\exp(16\tau^2\beta)]^j}{j^{\frac{\nu}{2}+1}}\exp\left[-\left(\frac{R}{8\sqrt{j\beta}}-4\tau\sqrt{j\beta}\right)^2\right]\leq \\
&\leq C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{\nu}{2}+1}}=C(\nu)\beta^{-\frac{\nu}{2}}.
\end{aligned}$$

Если $0 < z < 1$, то выберем $\tau = \left(\frac{(\ln z)}{16\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ и закончим доказательство леммы.

Определим меры интенсивности $\rho_{\epsilon, z}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ посредством

$$\rho_{\epsilon, z} = (P_{\epsilon, z}^0 \times \lambda) \circ \tau^{-1},$$

где λ — мера Лебега на \mathbb{R}^{ν} . В случае фермионов вариация $|\rho_{-, z}|$ знакопеременной меры $\rho_{-, z}$ равна $\rho_{+, z}$. Сужение σ -конечной меры $\rho_{\epsilon, z}$ на $\mathcal{X}_{j, \beta}$ совпадает с $\left(\frac{z^{j-1}z^j}{j}P_{j, \beta}^0 \times \lambda\right) \circ \tau_j^{-1}$, где τ_j есть сужение τ на $\mathcal{X}_{j, \beta}^0 \times \mathbb{R}^{\nu}$. Для любого $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ обозначим через $\rho_{\epsilon, z, A}$ сужение $\rho_{\epsilon, z}$ на $(A, \mathcal{B} \cap A)$.

Пусть $\mathcal{B}_0(\mathcal{X})$ — семейство ограниченных элементов из $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Назовем $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ограниченным, если B содержится в некоторой сфере пространства \mathcal{X} . Заметим, что $\rho_{\epsilon, z}(B) < \infty$, если $B \in \mathcal{B}_0(\mathcal{X})$ и $\rho_{\epsilon, z}$ диффузная, т.е. $\rho_{\epsilon, z}(X) = 0$ для любого $X \in \mathcal{X}$.

Пространством конфигураций нашей системы является $\mathcal{M}_j(\mathcal{X})$ — пространство мер простых точек на \mathcal{X} с конечным носителем (см. подробности в [1]). Таким образом, $\mathcal{M}_j(\mathcal{X})$ может быть отождествлена с множеством всех конечных подмножеств (конечные конфигурации) пространства \mathcal{X} . Обозначим через $\mathcal{M}[\mathcal{X}]$ множество всех мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, конечных на $\mathcal{B}_0(\mathcal{X})$, через $\mathcal{M}^-(\mathcal{X})$ подмножество всех мер, имеющих целые значения на $\mathcal{B}_0(\mathcal{X})$ и через $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ множество мер простых точек на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. Обозначим канонические σ -алгебры в $\mathcal{M}[\mathcal{X}]$ и $\mathcal{M}^-(\mathcal{X})$ через \mathcal{F} и \mathcal{F}^- соответственно. Ниже часто будем записывать $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0, \mathcal{M}, \mathcal{M}^-$, когда будет ясно, что \mathcal{X} является пространством, на котором они определены. Мы будем использовать также обозначения $\mathcal{M}^{\cdot\cdot}_n$ и \mathcal{M}^{\cdot}_n , где $\mathcal{M}_n = \{\omega \in \mathcal{M}_j | \omega(\mathcal{X}) = n\}$ и \mathcal{M}^{\cdot}_n определены аналогичным образом.

Для любого $\rho \in \mathcal{M}$ определим меру W_ρ на $(\mathcal{M}^{\cdot\cdot}, \mathcal{F}^{\cdot\cdot})$ через

$$W_\rho(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{X}^n} \varphi(\epsilon_{x_1} + \dots + \epsilon_{x_n}) \rho(dX_1) \dots \rho(dX_n),$$

где $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Здесь первый член суммы есть $\varphi(0)$, 0 обозначает вакуум, т.е. нулевая мера на X и ϵ_X есть мера Дирака в X .

Вообще говоря, носителем W_ρ является M_ρ , и если ρ диффузна, то носителем W_ρ является M_ρ . В качестве исходной меры для нашей системы берем $W_{\rho_{i,z}}$. В случае фермионов легко можно проверить, что полная вариация $|W_{\rho_{i,z}}|$ знакопеременной меры $W_{\rho_{i,z}}$ равна $W_{\rho_{i,z}}$.

Заметим, что для каждого $B \in \mathcal{B}_0$, $W_{\rho_{i,z},B}$ — конечная мера на M с общей массой $\exp(\rho_{i,z}(B))$. Вероятностную меру $\exp(-\rho_{i,z}(B))W_{\rho_{i,z},B}$ назовем идеальным газом Жинибра в B с активностью z подчиняющейся квантовой статистике или процессом Пуассона в B с интенсивностью $\rho_{i,z}$.

Следующий пример является важным примером ограниченного множества $B \in \mathcal{B}_0$: пусть Λ — ограниченная область в \mathbb{R}^n . Определим

$$X(\Lambda) = \{X \in \mathcal{X} \mid X(t) \in \Lambda, \quad t \in [0, \beta|X|]\}.$$

Аналогично определим множество $M_\rho(\Lambda)$ конечных конфигураций петель определенных в Λ :

$$M_\rho(\Lambda) = \{\omega \in M \mid \omega \subset X(\Lambda)\}.$$

Рассмотрим пространство $C([0, \beta], \mathbb{R}^n)$, элементы которого назовем элементарными траекториями в \mathbb{R}^n . Скажем, что элементарная траектория $x \in C([0, \beta], \mathbb{R}^n)$ является элементарной компонентой сложной петли $X \in \mathcal{X}$ и запишем $x \in X$, если существует i , $0 < i < |X|$ такое, что $x(t) = X(t + i\beta)$, $t \in [0, \beta]$. Пусть

$$\bar{\Phi}(x) = \int_0^\beta \Phi(x(t)) dt, \quad x \in C([0, \beta], \mathbb{R}^n).$$

Энергия $U(\omega)$ конечной конфигурации $\omega \in M_\rho$ сложных петель дана посредством

$$U(\omega) = \sum_{X \in \omega} U_1(X) + \frac{1}{2} \sum_{X, Y \in \omega} U_2(X, Y),$$

где

$$U_1(X) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in X} \bar{\Phi}(x - y), \quad U_2(X, Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} \bar{\Phi}(x - y).$$

Определим множитель Больцмана $f : M_\rho \rightarrow \mathbb{R}_+$ как обычно с помощью

$$f(\omega) = \exp(-U(\omega)), \quad \omega \in M_\rho.$$

Мера Гиббса на $M_\rho(\Lambda)$ для ограниченной области Λ дана посредством

$$Q_\rho(\Lambda, z) = \frac{\exp(-U)}{\Xi_\rho(\Lambda, z)} W_{\rho, \epsilon_\Lambda},$$

где $\Xi_z(\Lambda, z) = W_{\epsilon, z, \Lambda}(f)$ — большая статсумма. Для краткости, здесь и ниже, напишем $W_{\epsilon, z, \Lambda}$ вместо $W_{\rho_{\epsilon, z}, X(\Lambda)}$. Более явно

$$\Xi_z(\Lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{X_{\Lambda}^n} \exp(-\mathcal{U}(\epsilon x_1 + \dots + \epsilon x_n)) \rho_{\epsilon, z}(dX_1) \dots \rho_{\epsilon, z}(dX_n),$$

$$Q_z(\Lambda, z)(\varphi) = \Xi_z(\Lambda, z)^{-1} \int_{\mathcal{M}} \varphi(\omega) \exp(-\mathcal{U}(\omega)) W_{\epsilon, z, \Lambda}(d\omega)$$

для любой измеримой $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Заметим, что условие (с) на взаимодействие Φ влечет конечность $\Xi_z(\Lambda, z)$ для всех $0 < z < 1$. Действительно,

$$|\Xi_z(\Lambda, z)| \leq \exp \left[\int_{X(\Lambda)} \rho_{\epsilon, z}(dX) \right] \leq \exp [|\Lambda| P_{\epsilon, z}^0(X^0)] < \infty.$$

Назовем $Q_z(\Lambda, z)$ газом Жинибра в Λ с активностью z и взаимодействием Φ , подчиняющимся квантовой статистике.

§4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы сформулируем основные результаты этой работы, которые описывают свойства убывания функции Урселла (см. определение в следующем параграфе) и усеченных корреляционных функций. Обозначим через A^c дополнение множества A , а через $B_u(R)$ шар в \mathbb{R}^{ν} радиуса R с центром в $u \in \mathbb{R}^{\nu}$.

Теорема 1. Пусть взаимодействие Φ принадлежит классу \mathcal{P}_l^+ , $l > 0$ и пусть \tilde{z} , $\tilde{z} < 1$, удовлетворяют соотношению

$$(\ln \tilde{z})^{-2} \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \tilde{z}|} \right)^{1/2} \right] < C(\Phi, \nu, l) \beta^{\xi-1}, \quad (1)$$

где

$$C(\Phi, \nu, l) = C(\nu, l) \left[\int_{\mathbb{R}^{\nu}} \Phi(u) (1 + |u|)^l du \right]^{-1}.$$

Тогда для всех z , $0 < z < \tilde{z}^4$, функция Урселла g удовлетворяет следующему неравенству :

$$\begin{aligned} & \int_{X^0} P_{\epsilon, z}^0(dX) \int_{X_{B_u(R)}^{\epsilon} \rho_{\epsilon, z}(dY) \int_{\mathcal{M}_1} |g(\epsilon x_{+n} + \epsilon y + \omega)| W_{\rho_{\epsilon, z}}(d\omega) \leq \\ & \leq \frac{C(\Phi, \nu, l) \beta^{1-\nu} \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \tilde{z}|} \right)^{1/2} \right]^2}{\ln^2 \tilde{z} - C(\Phi, \nu, l) \beta^{1-\xi} \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \tilde{z}|} \right)^{1/2} \right]} (1 + R)^{-l} \end{aligned}$$

для любых $R > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}^{\nu}$.

Следующее следствие теоремы 1 является главным техническим инструментом, применяемым для изучения геометрического разложения логарифма статсуммы для газа Жинибра с квантовой статистикой.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 имеют место следующие оценки для любых $R > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}^{\nu}$:

$$\int_{X^{\circ}} P_{+,l}^{\circ}(dX) \int_{(M_j(B_{\nu}(R)))^{\circ}} |g(\varepsilon x_{+\nu} + \omega)| W_{\rho_{+,l}}(d\omega) \leq \\ \leq \frac{C(\Phi, \nu, l) \beta^{1-\nu} \left[1 + \left(\frac{\beta}{\ln \hat{z}} \right)^{1/2} \right]^2}{\ln^2 \hat{z} - C(\Phi, \nu, l) \beta^{1-\nu} \left[1 + \left(\frac{\beta}{\ln \hat{z}} \right)^{1/2} \right]} (1 + R)^{-l}.$$

Другое важное следствие теоремы 1 описывает свойства убывания дву-точечных усеченных корреляционных функций $\sigma_{\varepsilon, \Lambda, z}$ нашей модели. Вспомним, что усеченные корреляционные функции определяются формулой:

$$\sigma_{\varepsilon, \Lambda, z}(\mu) = 1_{M_j(\Lambda)}(\mu) \cdot z^{N(\mu)} \cdot \int_{M_j(\Lambda)} g(\mu + \nu) W_{\rho_{+,l}}(d\nu), \quad \mu \in M_j. \quad (2)$$

где 1 – индикаторная функция и $N(\omega) = \sum_{X \in \omega} |X|$, т.е. общее число элементарных компонент всех сложных петель из конфигурации ω .

Теорема 2. Пусть $\Phi \in \mathcal{P}_l^+$, $l > 0$ и z взята из интервала $0 < z < \hat{z}^4$, где \hat{z} удовлетворяет (1). Тогда дву-точечная усеченная корреляционная функция $\sigma_{\varepsilon, \Lambda, z}(X, Y)$ является элементом Банахова пространства $B_{l,l}$ и удовлетворяет

$$\int_{X^{\circ}} P_{+,l}^{\circ}(dX) \int_{X_{B_{\nu}(R)}^{\circ}} |\sigma_{\varepsilon, \Lambda, z}(X, Y)| \rho_{+,l}(dY) \leq \\ \leq \frac{C(\Phi, \nu, l) \beta^{1-\nu} \left[1 + \left(\frac{\beta}{\ln \hat{z}} \right)^{1/2} \right]^2}{\ln^2 \hat{z} - C(\Phi, \nu, l) \beta^{1-\nu} \left[1 + \left(\frac{\beta}{\ln \hat{z}} \right)^{1/2} \right]} (1 + R)^{-l}.$$

§5. НЕИНТЕГРИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КИРКВУДА-ЗАЛЬЦБУРГА

Для всякого $\mu \in M_j$ определим меру \dot{W}_{μ} на M_j через

$$\dot{W}_{\mu}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{X^{\circ}} \varphi(\varepsilon x_1 + \dots$$

$$\dots + \varepsilon_{X_n}) \mu(dX_1) (\mu - \varepsilon_{X_1})(dX_2) \dots (\mu - \varepsilon_{X_1} - \dots - \varepsilon_{X_{n-1}})(dX_n).$$

где $\varphi : \mathcal{M}_r \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ (см. также [1]). Для развития алгебраического формализма в случае квантовой статистики воспользуемся функциональным пространством, отличным от пространства в работе [4]. Пусть

$$\mathcal{E} = \{h : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{C} \mid h \text{ измерима и } h_n \text{ ограничена для каждого } n\},$$

где h_n - сужение h на \mathcal{M}_n^* . Положим также $\mathcal{E}_0 = \{h \in \mathcal{E} \mid h(0) = 0\}$. Определим в \mathcal{E} * умножение через

$$h_1 * h_2(\omega) = \int_{\mathcal{M}_r} h_1(\nu) h_2(\omega - \nu) W_\omega(d\nu), \quad h_1, h_2 \in \mathcal{E}.$$

С этим произведением \mathcal{E} становится коммутативной алгеброй с единицей $1 = 1_0$ и \mathcal{E}_0 есть идеал \mathcal{E} . Заметим, что в случае, когда h_1, h_2 - функции на пространстве \mathcal{M}_r конечных конфигураций, то

$$h_1 * h_2(\omega) = \sum_{\nu \subset \omega} h_1(\nu) h_2(\omega \setminus \nu).$$

Определим * экспоненциальное отображение Exp посредством

$$\text{Exp } h = 1 + h + \frac{1}{2!} h * h + \dots, \quad h \in \mathcal{E}_0.$$

Таким образом, $\text{Exp} : \mathcal{E}_0 \rightarrow 1 + \mathcal{E}_0$ с единственной обратной функцией $\text{Ln} = \text{Exp}^{-1}$, данной с помощью

$$\text{Ln}(1 + h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} h^{*n}}{n}, \quad h \in \mathcal{E}_0.$$

Определим также производную на \mathcal{E} через $D_\nu h(\mu) = h(\mu + \nu)$, $h \in \mathcal{E}$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_r$. Легко проверить, что $D_{\varepsilon_X}, X \in \mathcal{X}$ является линейным отображением из \mathcal{E} на \mathcal{E} со свойствами :

$$\begin{cases} D_{\varepsilon_X}(h_1 * h_2) = D_{\varepsilon_X} h_1 * h_2 + h_1 * D_{\varepsilon_X} h_2, \\ D_{\varepsilon_X}(\text{Exp } h) = D_{\varepsilon_X} h * \text{Exp } h. \end{cases}$$

Хорошо известно следующее равенство :

$$W_{\rho_\varepsilon}(h_1 * h_2) = W_{\rho_\varepsilon}(h_1) W_{\rho_\varepsilon}(h_2), \quad h_1, h_2 \in \mathcal{E}. \quad (3)$$

Это частный случай более общей формулы, которую используем позднее (см., например, [5], [6])

$$\int_{\mathcal{M}_r} F(\omega) h_1 * h_2(\omega) W_{\rho_\varepsilon}(\omega)(d\omega) =$$

$$= \int_{M_1} \int_{M_1} F(\omega_1 + \omega_2) h_1(\omega_1) h_2(\omega_2) W_{\rho_{\epsilon, \lambda}}(d\omega_1) W_{\rho_{\epsilon, \lambda}}(d\omega_2). \quad (4)$$

Формула справедлива либо если все функции положительны, либо если по крайней мере одна сторона абсолютно сходится. Здесь под абсолютной сходимостью левой стороны (4) понимаем :

$$\int_{M_1} |F(\omega)| |h_1| * |h_2|(\omega) W_{\rho_{\epsilon, \lambda}}(d\omega) < \infty.$$

Теперь из формулы (3) следует, что $W_{\rho_{\epsilon, \lambda}}(\text{Exp} h) = \text{exp} W_{\rho_{\epsilon, \lambda}}(h)$. Откуда $\Xi_{\epsilon}(\Lambda, z) = W_{\epsilon, z, \Lambda}(f) = \text{exp} W_{\epsilon, z, \Lambda}(g)$ где $g = \text{Ln} f$ называется функцией Урселла. Заметим, что $g \in \mathcal{E}_0$. Равенство $\text{Ln} \Xi_{\epsilon}(\Lambda, z) = W_{\epsilon, z, \Lambda}(g)$ называется кластерным представлением большой статсуммы.

В дальнейшем будем работать только в пространстве M_1 простых точечных мер с конечным носителем. Рассмотрим функцию $\bar{\varphi}$ на $M_1 \times M_1$, определенную с помощью

$$\bar{\varphi}_{\xi}(\mu) = f^{\mu-1} * D_{\xi} f(\mu), \quad \xi, \mu \in M_1, \quad \xi + \mu \in M_1.$$

Здесь f - множитель Больцмана. Можно показать, что $\bar{\varphi}$ есть решение так называемого неинтегрированного уравнения Кирквуда-Зальцбурга :

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{\xi}(\mu) = \text{exp}(-E(X, \xi)) \sum_{\nu \subset \mu} K(X, \nu) \bar{\varphi}_{\xi - \epsilon_X + \nu}(\mu - \nu), & \xi \neq 0, \\ \bar{\varphi}_0(\mu) = 1(\mu). \end{cases}$$

Здесь $X \in \xi$,

$$E(X, \xi) = U_1(X) + \sum_{Y \in \xi \setminus \{X\}} U_2(X, Y).$$

$$K(X, \nu) = \prod_{Y \in \nu} q(X, Y), \quad q(X, Y) = \text{exp}(-U_2(X, Y)) - 1. \quad (5)$$

§6. ОЦЕНОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СИЛЬНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ ОЦЕНКИ

Рассмотрим векторное пространство V функций $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, инвариантных относительно группы сдвигов $t_u : (X, Y) \rightarrow (X + u, Y + u)$, $u \in \mathbb{R}^r$. Для любого $0 < z \leq 1$ положим

$$\|f\|_{z, l} = \max\{\|f\|_{\infty}, p_z(f), p_{z, l}(f)\}, \quad l \geq 0, \quad (6)$$

где

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{X, Y \in X} \frac{|f(X, Y)|}{|X||Y|}, \quad (7)$$

$$p_z(f) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} \frac{|f(X, Y)|}{|X||Y|} \rho_{+,z}(dY), \quad (8)$$

$$p_{z,l}(f) = \inf \left\{ C > 0 : \text{для всех } d > 0 \right. \\ \left. \sup_{R > 0} \sup_{X \in \mathcal{X}(B_0(R))} \int_{\mathcal{X}^c(B_0(R+d))} \frac{|f(X, Y)|}{|X||Y|} \rho_{+,z}(dY) \leq \frac{C}{(1+d)^l} \right\}. \quad (9)$$

Пространства $B_{z,l} = \{f \in \mathcal{B} : \|f\|_{z,l} < \infty\}$ есть Банаховы подпространства с нормой $\|\cdot\|_{z,l}$. Если $z_1 \leq z_2$, то $B_{z_1,l} \supseteq B_{z_2,l}$. Элементы пространства $B_{z,l}^+ = \{f \in B_{z,l} : f \geq 0, f \text{ симметрична}\}$ назовем оценочными функциями.

Пусть a – положительная константа и h – оценочная функция. Рассмотрим следующее уравнение

$$\begin{cases} \psi_{a,h}(\xi, \mu) = a \sum_{\omega \in \mathcal{C}} \prod_{Y \in \omega} h(X_0, Y) \psi_{a,h}(\xi - \epsilon X_0 + \omega, \mu - \omega), & \xi \neq 0, \\ \psi_{a,h}(0, \mu) = 1(\mu). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\xi, \mu \in \mathcal{M}$, так что $\xi + \mu \in \mathcal{M}$, и $X_0 \in \xi$.

Явная форма единственного решения этого уравнения дана в терминах теории графов. Будем рассматривать только неориентированные графы. Если γ – такой граф, то обозначим через $V(\gamma)$ множество вершин γ , а через $E(\gamma)$ множество ребер γ . Связный граф без замкнутого пути называется деревом. Скажем, что дерево имеет корень, если оно содержит особую вершину, которая отождествляется с корнем. Граф называется лесом, если его связные компоненты являются деревьями (некоторые из них могут быть изолированными вершинами). Лес, имеющий корни – это лес, в котором все деревья имеют корни.

Для конечного множества S обозначим через $\mathcal{T}(S)$ множество всех деревьев на S ($\gamma \in \mathcal{T}(S)$, если $V(\gamma) = S$). Через $\mathcal{T}_j(S)$, $j \in S$, обозначим множество всех деревьев $\gamma \in \mathcal{T}(S)$ с корнями в вершине j . Теперь, если S и T – два непересекающихся конечных множества, то $\mathcal{F}_T(\mathcal{T} \cup S)$ обозначает множество всех лесов Γ на $S \cup T$ с корнями в T . Это означает, что для любого $\Gamma \in \mathcal{F}_T(\mathcal{T} \cup S)$, $V(\Gamma) = S \cup T$ и каждое дерево из Γ имеет один и только один корень в T .

Следующая лемма дает явное решение (10) и показывает, в частности, что это решение не зависит от выбора $X_0 \in \xi$.

Лемма 2. Единственное решение уравнения (10) дается с помощью

$$\psi_{a,h}(\xi, \mu) = a^{|\xi+\mu|} \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_\xi(\xi+\mu)} \prod_{c \in B(\Gamma)} h(c), \quad (11)$$

где $h(e) = h(X, Y)$, если ребро $e = [X, Y]$.

Доказательство: Как рекурсивное уравнение (10) имеет единственное решение. Остается показать, что $\psi_{h, \lambda}$, которое определяется через (11), является решением (10). Для любого $\omega \subset \mu$ определим отображение $\pi_{X_0, \omega} : \mathcal{F}_{\xi - \epsilon_{X_0} + \omega}(\xi + \mu - \epsilon_{X_0}) \rightarrow \mathcal{F}_{\xi}(\xi + \mu)$ через

$$V(\pi_{X_0, \omega}(\Gamma)) = V(\Gamma) \cup \{X_0\}.$$

$$E(\pi_{X_0, \omega}(\Gamma)) = E(\Gamma) \cup \bigcup_{Y \in \omega} [X_0, Y], \quad \Gamma \in \mathcal{F}_{\xi - \epsilon_{X_0} + \omega}(\xi + \mu - \epsilon_{X_0}).$$

Заметим, что для $\omega, \tilde{\omega} \subset \mu$, так что $\omega \neq \tilde{\omega}$ имеем $\text{Ran}(\pi_{X_0, \omega}) \cap \text{Ran}(\pi_{X_0, \tilde{\omega}}) = \emptyset$. С другой стороны $\bigcup_{\omega \subset \mu} \text{Ran}(\pi_{X_0, \omega}) = \mathcal{F}_{\xi}(\xi + \mu)$. Доказательство завершено.

Лемма 3. Если $\Phi \in \mathcal{P}_1$, то $|q| \in \mathbf{B}_{1,1}^+$, при $0 < z < 1$ и

$$|\varphi_{\xi}(\mu)| \leq \psi_{1, |q|}(\xi, \mu), \quad \xi, \mu \in M_f, \quad \xi + \mu \in M_f.$$

Доказательство: Используя неинтегрированные уравнения Кирквуда-Зальцбургга, доказательство получается индукцией по числу $|\xi| + |\mu|$. Тот факт, что $|q| \in \mathbf{B}_{1,1}^+$ показан ниже в лемме 7.

Для функции Урселла g и функции $\bar{\varphi}$ имеем, что $D_{\epsilon_X} g = \bar{\varphi}_{\epsilon_X}$, $X \in \mathcal{X}$. Откуда $g(\omega) = D_{\epsilon_X} g(\omega - X) = \bar{\varphi}_{\epsilon_X}(\omega - X)$ для любых $\omega \in M_f \setminus \{0\}$. Из лемм 2 и 3 теперь следует, что

$$|g(\omega)| \leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_{\epsilon_X}(\omega)} \prod_{e \in E(\Gamma)} |q(e)|.$$

Так как $\mathcal{F}_{\epsilon_X}(\omega) = \mathcal{T}(\omega)$, то получаем сильную кластерную оценку для функции Урселла g :

$$|g(\omega)| \leq \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}(\omega)} \prod_{e \in E(\Gamma)} |q(e)|, \quad \omega \in M_f \setminus \{0\}.$$

Для $h \in \mathbf{B}_{1,1}^+$ и $a > 0$ положим

$$C_{a,h} = \{F \in \mathcal{E} \mid |F(\omega)| \leq a^{|\omega|} \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}(\omega)} \prod_{e \in E(\Gamma)} |h(e)|, \quad \omega \in M_f\}.$$

Если $F \in C_{a,h}$ для некоторого $h \in \mathbf{B}_{1,1}^+$ и $a > 0$, то скажем, что F имеет сильные кластерные свойства.

Лемма 4. Пусть F - функция на M_f с сильными кластерными свойствами: $F \in C_{a,h}$, $a > 0$, $h \in \mathbf{B}_{1,1}^+$. Тогда при всех z таких, что

$$\frac{32ap_{\sqrt{z}}(h)}{\ln^2 z} < 1, \tag{12}$$

$$\int_{M_f} |F(\epsilon_{X'} + \omega)| W_{\rho_{z,h}}(d\omega) < az^{-\frac{|X'|}{z}} \frac{\ln^2 z}{\ln^2 z - 32ap_{\sqrt{z}}(h)}, \quad X' \in \mathcal{X}.$$

Следствие 2. В частном случае, когда F — функция Урселла g , при всех z из интервала

$$0 < z < \exp \left[-C(\nu)\beta^{\frac{2-\nu}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\nu}} \Phi(u) du \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$\int_{\mathcal{M}_z} |g(\varepsilon x' + \omega)| W_{\rho_{+,\varepsilon}}(d\omega) < z^{-|X'|/2} \frac{\ln^2 z}{\ln^2 z - C(\nu)\beta^{\frac{2-\nu}{4}} \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \Phi(u) du}, \quad X' \in \mathcal{X}.$$

Следствие 2 показывает, что кластерное представление большой статсуммы сходится.

Следствие 3. Если $F \in C_{\nu, \Lambda}$ — трансляционная инвариантная функция на \mathcal{M}_z , то $F \in L^1(\mathcal{M}(\Lambda), W_{\rho_{+,\varepsilon}, \Lambda})$ для любой ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\nu}$ и всех z , удовлетворяющих (12).

Это следствие следует из леммы 4 с помощью формулы (4):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}(\Lambda)} |F(\omega)| W_{\rho_{+,\varepsilon}}(d\omega) &= \int_{\mathcal{X}(\Lambda)} \rho_{+,\varepsilon}(dX) \int_{\mathcal{M}(\Lambda)} \frac{|F(\varepsilon X + \omega)|}{|\omega| + 1} W_{\rho_{+,\varepsilon}}(d\omega) \leq \\ &\leq \frac{a|\Lambda| \ln^2 z}{\ln^2 z - 32up_{\sqrt{z}}(h)} \int_{\mathcal{X}^{\nu}} P_{+,\sqrt{z}}^0 d(X) < \infty. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4. Пусть $I'_n = \{1', 1, \dots, n\}$ и пусть $\alpha : I'_n \mapsto \{X'_1, X_1, \dots, X_n\}$ — отображение, определенное через $\alpha(j) = X_j$, $j = 1, \dots, n$, $\alpha(1') = X'_1$. Очевидно, α порождает канонический изоморфизм между множеством деревьев $\mathcal{T}(I'_n)$, построенных на I'_n и множеством деревьев $\mathcal{T}(\{X'_1, X_1, \dots, X_n\})$, построенных на конфигурации $\{X'_1, X_1, \dots, X_n\}$, которую снова обозначим через α . Для $\gamma \in \mathcal{T}(I'_n)$, $\alpha\gamma \in \mathcal{T}(\{X'_1, X_1, \dots, X_n\})$ определяется с помощью $V(\alpha\gamma) = \alpha(I'_n)$ и, если $e = [r, s] \in E(\gamma)$, то $\alpha e = [\alpha r, \alpha s] \in E(\alpha\gamma)$, так что $E(\alpha\gamma) = \{\alpha e : e \in E(\gamma)\}$.

Используя сильные кластерные свойства F , имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{M}_z} |F(\varepsilon x' + \omega)| W_{\rho_{+,\varepsilon}}(d\omega) \leq \\ &\leq a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_{\mathcal{X}^{\nu}} \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(\{X'_1, X_1, \dots, X_n\})} \prod_{e \in E(\gamma)} h(e) \rho_{+,\varepsilon}(dX_1) \cdots \rho_{+,\varepsilon}(dX_n) = \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{\gamma \in \mathcal{T}_{1'}(I'_n)} G(\gamma | 1', z), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$G(\gamma | I', z) = \int \prod_{x_0, x \in E(\sigma\gamma)} h(x) \rho_{+,z}(dX_1) \cdots \rho_{+,z}(dX_n), \quad n \geq 1 \quad (14)$$

и $G(\gamma | I', z) = 1$ if $n = 0$.

Рассмотрим $\sum_{\gamma \in T_1(I'_n)} G(\gamma | I', z)$. Пусть $\gamma \in T_1(I'_n)$, $n \geq 0$. Через $d_\gamma(j)$, $j \in I'_n$ обозначим степень вершины j в графе γ , т.е. число ребер в γ , которые имеют j как общую концевую вершину. Очевидно, что для $n \geq 1$

$$d_\gamma(j) \geq 1, \quad j \in I'_n \quad \text{и} \quad \sum_{j \in I'_n} d_\gamma(j) = 2n.$$

Легко проверить, что имеет место формула

$$T(I'_n) = \bigcup \{ \gamma \in T(I'_n) \mid d_\gamma(j) = l_j, \quad j \in I'_n \},$$

где объединение \bigcup берется по всем семействам целых чисел

$$\{ l_j, j \in I'_n \} : l_j \geq 1, \quad \sum_j l_j = 2n. \quad (15)$$

Заметим, что множества в правой части неперекрываются при различных $\{ l_j, j \in I'_n \}$. Согласно формуле Келли (см. [7])

$$|\{ \gamma \in T(I'_n) : d_\gamma(j) = l_j, \quad j \in I'_n \}| \leq \frac{2^{n-1} (n-1)!}{\prod_{j \in I'_n} l_j!}.$$

Используя неравенства

$$z^r \cdot z^k \leq (e |\ln z|)^{-k} \cdot k^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

справедливые для любых $0 < z < 1$ и $z > 0$, с помощью формулы Стирлинга имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in T_1(I'_n)} G(\gamma | I', z) &= z^{-|X'|/2} \sum_{\{l_j, j \in I'_n\}} \sum_{\gamma \in T(I'_n) : d_\gamma(j) = l_j} \\ &\int \prod_{x_0, x \in E(\gamma)} \frac{h(X_j, X_k)}{|X_j| |X_k|} \prod_{j \in I'_n} |X_j|^{l_j} (\sqrt{z})^{|X_j|} \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_1) \cdots \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_n) \leq \\ &\leq z^{-|X'|/2} \sum_{\{l_j, j \in I'_n\}} \sum_{\gamma \in T(I'_n) : d_\gamma(j) = l_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}^n} \prod_{(j,k) \in \mathcal{B}(\gamma)} \frac{h(X_j, X_k)}{|X_j||X_k|} \prod_{j \in I'_n} (e|\ln \sqrt{z}|)^{-l_j} l_j! \cdot e^{l_j} \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_1) \cdots \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_n) = \\ = z^{-|X'|/2} (\ln \sqrt{z})^{-2n} \sum_{\{l_j, j \in I'_n\}} \prod_{j \in I'_n} l_j! \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(I'_n) : d_\gamma(j) = l_j} \\ \int_{\mathcal{X}^n} \prod_{(j,k) \in \mathcal{B}(\gamma)} \frac{h(X_j, X_k)}{|X_j| \cdot |X_k|} \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_1) \cdots \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_n). \end{aligned}$$

Здесь сумма $\sum_{\{l_j, j \in I'_n\}}$ берется по тем же совокупностям $\{l_j, j \in I'_n\}$, что и в (15).

Последовательно интегрируя относительно меры $\rho_{+, \sqrt{z}}$, начиная от вершин дерева γ , имеющих степень 1 и учитывая, что результат интегрирования не зависит от выбора $\gamma \in \{\mathcal{T}(I'_n) | d_\gamma(j) = l_j\}$ для фиксированного $d_\gamma(j) = l_j$, получаем, что

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{T}_1(I'_n)} G(\gamma | I', z) \leq z^{-|X'|/2} \left[\frac{4p_{\sqrt{z}}(h)}{\ln^2 z} \right]^n \sum_{\{l_j, j \in I'_n\}} \prod_{j \in I'_n} l_j! \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(I'_n) : d_\gamma(j) = l_j} 1.$$

Теперь, учитывая, что $\sum_{\{l_j, j \in I'_n\}} 1 \leq 2^{2^n - 1}$ и применяя формулу Келли, находим, что

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{T}_1(I'_n)} G(\gamma | I', z) \leq z^{-|X'|/2} n! \left[\frac{32p_{\sqrt{z}}(h)}{\ln^2 z} \right]^n. \quad (17)$$

Комбинируя это с (13), получаем, что

$$\int_{\mathcal{M}_1} |F(\varepsilon X' + \omega)| W_{\rho_{+, \sqrt{z}}} (d\omega) \leq a z^{-|X'|/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{32ap_{\sqrt{z}}(h)}{\ln^2 z} \right]^n. \quad (18)$$

Лемма 4 доказана.

§7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ТЕОРЕМА 3

Здесь, как это упоминалось во Введении, сформулируем и докажем теорему 3, являющуюся обобщением теоремы 1, где функция Урселла заменяется функцией F , имеющей сильные кластерные свойства. Таким образом, теорема 1 становится частным случаем Теоремы 3, когда F есть функция Урселла g .

Теорема 3. Если F имеет строгие кластерные свойства с некоторым $a > 0$ и $h \in \mathcal{V}_{1,1}^+$, где

$$\frac{2^{l+2} a \|h\|_{\varepsilon, l}}{\ln^2 \bar{z}} < 1, \quad (19)$$

то для всех $z, 0 < z < \bar{z}^4, R > 0$ и $u \in \mathbb{R}^d$ имеет место :

$$\int_{X^0} P_{+,z}^0(dX) \int_{X^c(B_u(R))} \rho_{+,z}(dY) \int_{\mathcal{M}_1} |F(\epsilon X + u + \epsilon Y + \omega)| W_{\rho_{+,z}}(d\omega) \leq \\ \leq C(\nu, l) \beta^{-\xi} \frac{a^2 \|h\|_{z,l}}{[\ln^2 \bar{z} - 2^{l+2} a \|h\|_{z,l}]^2} \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \bar{z}|} \right)^{l/2} \right] (1+R)^{-l}, \quad (20)$$

где $C(\nu, l)$ – положительная константа, зависящая только от ν, l и $\|h\|_{z,l}$ определяется через (6).

Доказательство этой теоремы проводится посредством двух лемм, представляющих самостоятельный интерес. Следующая лемма является основным этапом в доказательстве. Пусть

$$\bar{F}_z(X'_1, X'_2) = \int_{\mathcal{M}_1} |F(\epsilon X'_1 + \epsilon X'_2 + \omega)| W_{\rho_{+,z}}(d\omega), \quad X'_1, X'_2 \in \mathcal{X}.$$

Лемма 5. При условиях теоремы 3 имеет место следующее неравенство

$$\bar{F}_z(X'_1, X'_2) \leq z^{-\frac{|X'_1|+|X'_2|}{2}} a^2 \frac{\ln^2 \bar{z}}{\ln^2 \bar{z} - 4a \|h\|_{z,l}} \mathcal{H}_{+,z}(X'_1, X'_2).$$

где $\mathcal{H}_{+,z} \in V_{z,l}^+$ и дается формулой

$$\mathcal{H}_{+,z}(X'_1, X'_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{a}{\ln^2 \bar{z}} \right]^i (h^{o(i+1)})_{+,z}(X'_1, X'_2). \quad (21)$$

Кроме того,

$$\|\mathcal{H}_{+,z}\|_{z,l} \leq \frac{\|h\|_{z,l}}{\ln^2 \bar{z} - 2^{l+2} a \|h\|_{z,l}}. \quad (22)$$

Здесь $(h^{o(i)})_{+,z}$ обозначает свертку h i -раз относительно меры $\rho_{+,z}$. свертка определяется формулой (A1) в Приложении.

Доказательство : начнем с построения, аналогичного примененному для доказательства леммы 4. Пусть $I''_n = \{1', 2', 1, \dots, n\}$ и пусть $\alpha : I''_n \rightarrow \{X'_1, X'_2, X_1, \dots, X_n\}$ – канонический изоморфизм между $\mathcal{T}(I''_n)$ и $\mathcal{T}(\{X'_1, X'_2, X_1, \dots, X_n\})$, определенный с помощью $\alpha(j) = X_j, j = 1, \dots, n, \alpha(1') = X_1, \alpha(2') = X'_2$.

Пусть теперь $\tau(i) = (1', k_1, \dots, k_i, 2')$ – путь от $1'$ до $2'$, где

$$1 \leq k_j \leq n, j = 1, \dots, i, k_j \neq k_l \text{ if } j \neq l \text{ и } \tau(0) = (1', 2'). \quad (23)$$

При любых таких $\tau(i)$ пусть $\mathcal{T}(I_n''|\tau(i))$ есть множество всех деревьев $\gamma \in \mathcal{T}(I_n'')$ для которых $\tau(i)$ является подграфом. Это означает, что $V(\tau(i)) \subset V(\gamma)$ и $E(\tau(i)) \subset E(\gamma)$. Легко проверить, что

$$\mathcal{T}(I_n'') = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\tau(i)} \mathcal{T}(I_n''|\tau(i)), \quad (24)$$

где $\bigcup_{\tau(i)}$ берется по всем последовательностям (k_1, \dots, k_i) , удовлетворяющих (23). Используя (24) и строгую кластерную оценку для F , имеем

$$\begin{aligned} \bar{F}_z(X'_1, X'_2) &\leq a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(I_n'')} \int_{X^n} \prod_{e \in E(\alpha\gamma)} h(e) \rho_{+,z}(dX_1) \cdots \rho_{+,z}(dX_n) \leq \\ &\leq a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n \sum_{\tau(i)} \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(I_n''|\tau(i))} \int_{X^n} \prod_{e \in E(\alpha\gamma)} h(e) \rho_{+,z}(dX_1) \cdots \rho_{+,z}(dX_n) = \\ &= a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n \sum_{\tau(i)} \sum_{\gamma \in \mathcal{T}(I_n''|\tau(i))} \\ &\int_{X^n} \prod_{e \in E(\alpha\tau(i))} h(e) \prod_{e \in E(\alpha\gamma) \setminus E(\alpha\tau(i))} h(e) \rho_{+,z}(dX_1) \cdots \rho_{+,z}(dX_n), \quad (25) \end{aligned}$$

где сумма $\sum_{\tau(i)}$ берется по тому же множеству (k_1, \dots, k_i) , что и в (23).

Заметим, что, если мы удалим из $\gamma \in \mathcal{T}(I_n''|\tau(i))$ все ребра $E(\tau(i))$, мы получим имеющий корни лес $\tilde{\gamma} \in \mathcal{F}_{V(\tau(i))}(I_n'')$, где $\tilde{\gamma} = \{\gamma_r \in \mathcal{T}_r : r \in V(\tau(i))\}$ — семейство непересекающихся деревьев с корнями, так что r есть корень дерева γ_r . В тоже время это порождает разбиение множества $I_n'' \setminus V(\tau(i))$ на подмножества $\{V_r, r \in V(\tau(i))\}$, некоторые из которых могут быть пусты. Очевидно, $V(\gamma_r) = V_r \cup \{r\}$, $r \in V(\tau(i))$ и $\sum_{r \in V(\tau(i))} |V_r| = n - i$. Так как $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$ является взаимно-однозначным отображением между $\mathcal{T}(I_n''|\tau(i))$ и $\mathcal{F}_{V(\tau(i))}(I_n'')$, из (25) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{F}_z(X'_1, X'_2) &\leq a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n \sum_{\tau(i)} \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_{V(\tau(i))}(I_n'')} \\ &\int_{X^n} \prod_{e \in E(\alpha\tau(i))} h(e) \prod_{e \in E(\alpha\gamma)} h(e) \rho_{+,z}(dX_1) \cdots \rho_{+,z}(dX_n) = \\ &= a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n \sum_{\tau(i)} \sum_{\{n_r\}} \sum_{\{V_r\}} \sum_{\{\gamma_r \in \mathcal{T}_r(V_r \cup \{r\}), r \in V(\tau(i))\}} \end{aligned}$$

$$\int_{X^i} \prod_{e \in E(\alpha\tau(i))} h(e) \prod_{r \in V(\tau(i))} G(\gamma_r | X_r, z) \rho_{+,s}(dX_{k_1}) \cdots \rho_{+,s}(dX_{k_i}) =$$

$$= a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n \sum_{r(i)}' \sum_{(n_r)}'' \sum_{(V_r)}'''$$

$$\int_{X^i} \prod_{e \in E(\alpha\tau(i))} h(e) \prod_{r \in V(\tau(i))} \sum_{\gamma_r \in T_r(V_r \cup (r))} G(\gamma_r | X_r, z) \rho_{+,s}(dX_{k_1}) \cdots \rho_{+,s}(dX_{k_i}), \quad (26)$$

где сумма $\sum_{(n_r)}''$ берется по всем совокупностям целых чисел $\{n_r, r \in V(\tau(i))\}$, таким что $n_r \geq 0$, $\sum_r n_r = n - i$, сумма $\sum_{(V_r)}'''$ берется по всем разбиениям множества $I_n'' \setminus V(\tau(i))$ на подмножества $\{V_r, r \in V(\tau(i))\}$, таким что $|V_r| = n_r$ и, окончательно,

$$G(\gamma_r | X_r, z) = \sum_{\gamma_r \in T_r(V_r \cup (r))} \int_{X^{n_r}} \prod_{e \in E(\alpha\gamma_r)} h(e) \rho_{+,s}(dX_1^{(r)}) \cdots \rho_{+,s}(dX_{n_r}^{(r)}).$$

если $\alpha V_r = \{X_1^{(r)} \cdots X_{n_r}^{(r)}\} \subset \{X_1 \cdots X_n\}$. Согласно формуле (17)

$$\sum_{\gamma_r \in T_r(V_r \cup (r))} G(\gamma_r | X_r, z) = \sum_{\gamma \in T_r(I_{n_r})} G(\gamma | I', z) \leq z^{-|X_r|/2} n_r! \left[\frac{32p\sqrt{z}(h)}{\ln^2 z} \right]^{n_r}$$

Подставляя это выражение в (26), находим

$$\tilde{F}_2(X'_1, X'_2) \leq z^{-\frac{|X'_1|+|X'_2|}{2}} a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n \left[\frac{32p\sqrt{z}(h)}{\ln^2 z} \right]^{n-i} \sum_{r(i)}' \sum_{(n_r)}'' \prod_{r \in V(\tau(i))} n_r!$$

$$\sum_{(V_r)}''' \int_{X^i} \prod_{e \in E(\alpha\tau(i))} h(e) \prod_{s=1}^i z^{-\frac{1}{2}|X_{k_s}|} \rho_{+,s}(dX_{k_1}) \cdots \rho_{+,s}(dX_{k_i}).$$

Пользуясь равенством

$$\sum_{(V_r)}''' 1 = \frac{(n-i)!}{\prod_{r \in V(\tau(i))} n_r!}$$

и оценкой $\sum_{(n_r)}'' 1 < 2^{n-i}$, получаем

$$\tilde{F}_2(X'_1, X'_2) < z^{-\frac{|X'_1|+|X'_2|}{2}} a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{i=0}^n (n-i)! \left[\frac{64p\sqrt{z}(h)}{\ln^2 z} \right]^{n-i} \sum_{r(i)}'$$

$$\int_{X^i} \prod_{e \in E(\alpha\tau(i))} h(e) \rho_{+,\sqrt{z}}(dX_1) \cdots \rho_{+,\sqrt{z}}(dX_i). \quad (27)$$

Теперь

$$\begin{aligned} & \int_{X' \in E(\text{от } 0)} \prod h(e) \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_1) \cdots \rho_{+, \sqrt{z}}(dX_n) = \\ & = \int_{X'} \frac{h(X'_1, X_1) \cdots h(X'_n, X_n)}{|X_1|^2 \cdots |X_n|^2} \prod_{j=1}^n z^{|X_j|/4} |X_j|^2 \rho_{+, z^{1/4}}(d(X_j)) \leq \\ & \leq \left[\frac{4}{(e \ln z^{1/4})^2} \right]^n (h^{o(n+1)})_{+, z^{1/4}}(X'_1, X'_n). \end{aligned} \quad (28)$$

Используя равенство $\sum_{r(i)}^i 1 = \frac{n!}{(n-i)!}$, легко получаем из (27) и (28)

$$\begin{aligned} \tilde{F}_z(X'_1, X'_2) & < z^{-\frac{|X'_1|+|X'_2|}{2}} a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} \\ & a^n \left[\frac{4}{(e \ln z^{1/4})^2} \right]^n (h^{o(n+1)})_{+, z^{1/4}}(X'_1, X'_2) \left[\frac{64 p_{\sqrt{z}}(h)}{\ln^2 z} \right]^{n-i} \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что для $0 < z < \hat{z}^4$,

$$\frac{4a}{(e \ln z^{1/4})^2} < \frac{a}{\ln^2 \hat{z}}, \quad \frac{64 a p_{\sqrt{z}}(h)}{\ln^2 z} \leq \frac{4a \|h\|_{i,l}}{\ln^2 \hat{z}}.$$

Следовательно, из (29)

$$\tilde{F}_z(X'_1, X'_2) \leq z^{-\frac{|X'_1|+|X'_2|}{2}} a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{a}{\ln^2 \hat{z}} \right]^i (h^{o(i+1)})_{+, z}(X'_1, X'_2) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4a \|h\|_{i,l}}{\ln^2 \hat{z}} \right]^k$$

Согласно лемме 8, при всех \hat{z} , удовлетворяющих

$$\frac{2^{l+1} a \|h\|_{i,l}}{\ln^2 \hat{z}} < 1,$$

$\mathcal{H}_{+,z} \in \mathbf{B}_{i,l}^+$ и

$$\|\mathcal{H}_{+,z}\|_{z,l} \leq \frac{\|h\|_{i,l}}{\ln^2 \hat{z} - 2^{l+1} a \|h\|_{i,l}}. \quad (30)$$

Это завершает доказательство леммы 5.

Лемма 6. Пусть $h \in \mathbf{B}_{z,l}$, $0 < \hat{z} < 1$, $l > 0$. Тогда для всех z из интервала $0 < z < \hat{z}^2$, имеет место следующее неравенство

$$\int_{X^0} P_{+,z}^0(dX) \int_{X^0(B_0(R))} |h(X, Y)| \rho_{+,z}(dY) \leq$$

$$\leq C(\nu, l) \beta^{-\nu/2} \frac{\|h\|_{\varepsilon, l}}{\ln^2 \bar{z}} \left[1 + |\ln \bar{z}|^{-1/2} \beta^{1/2} \right] (1 + R)^{-l}.$$

Доказательство: Пусть

$$A_1(R, z) = \int_{X^0(B_0(\frac{R}{3}))} P_{+, \varepsilon}^0(dX) \int_{X^c(B_0(R))} |h(X, Y)| \rho_{+, \varepsilon}(dY),$$

$$A_2(R, z) = \int_{(X^0(B_0(\frac{R}{3})))^c} P_{+, \varepsilon}^0(dX) \int_{X^c(B_0(R))} |h(X, Y)| \rho_{+, \varepsilon}(dY)$$

Рассмотрим сначала A_1 . Используя (16) можем написать

$$A_1(R, z) = \int_{X^0(B_0(\frac{R}{3}))} \sqrt{z}^{|X|} |X| P_{+, \sqrt{\varepsilon}}^0(dX) \int_{X^c(B_0(R))} \sqrt{z}^{|Y|} |Y| \frac{|h(X, Y)|}{|X| \cdot |Y|} \rho_{+, \sqrt{\varepsilon}}(dY) \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^l (e \ln z)^{-2} P_{+, \sqrt{\varepsilon}}^0(X^0) \|h\|_{\sqrt{\varepsilon}, l} (1 + R)^{-l} \leq \quad (31)$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^l (e \ln \bar{z})^{-2} P_{+, \varepsilon}^0(X^0) \|h\|_{\varepsilon, l} \cdot (1 + R)^{-l} \leq C(\nu, l) \beta^{-\nu/2} \frac{\|h\|_{\varepsilon, l}}{\ln^2 \bar{z}} (1 + R)^{-l}.$$

Теперь рассмотрим A_2 . Используя лемму 1, аналогично предыдущему случаю, имеем

$$A_2(R, z) \leq (e \ln z)^{-2} P_{+, \sqrt{\varepsilon}}^0(M(R/3)) \|h\|_{\sqrt{\varepsilon}, l} \leq$$

$$\leq C(\nu) \beta^{-\nu/2} \frac{\|h\|_{\varepsilon, l}}{e^2 \ln^2 \bar{z}} \exp \left[- \left(\frac{|\ln \bar{z}|}{32\beta} \right)^{1/2} \frac{R}{3} \right] \leq C(\nu, l) \beta^{-\frac{\nu+2}{2}} \frac{\|h\|_{\varepsilon, l}}{|\ln \bar{z}|^{2+\frac{1}{2}}} (1 + R)^{-l}.$$

Комбинируя это выражение с (31) найдем

$$A_1(R, z) + A_2(R, z) \leq C(\nu, l) \beta^{-\nu/2} \frac{\|h\|_{\varepsilon, l}}{\ln^2 \bar{z}} \left[1 + |\ln \bar{z}|^{-1/2} \beta^{1/2} \right] (1 + R)^{-l}.$$

Доказательство леммы 6 завершено.

Доказательство теоремы 3. Из лемм 5 и 6, с помощью (30), найдем

$$\int_{X^0} P_{+, \varepsilon}^0(dX) \int_{X^c(B_0(R))} \rho_{+, \varepsilon}(dY) \int_{\mathcal{M}_l} |F(\varepsilon X + \omega + \varepsilon Y + \omega)| W_{\rho_{+, \varepsilon}}(d\omega) \leq$$

$$\leq \frac{a^2 \ln^2 \bar{z}}{\ln^2 \bar{z} - 4a \|h\|_{\varepsilon, l}} \int_{X^0} P_{+, \sqrt{\varepsilon}}^0(dX) \int_{X^c(B_0(R))} \mathcal{H}_{+, \varepsilon}(X, Y) \rho_{+, \sqrt{\varepsilon}}(dY).$$

$$\frac{C(\nu, l) \beta^{-\frac{\nu}{2}} a^2}{\ln^2 \bar{z} - 4a \|h\|_{\varepsilon, l}} \| \mathcal{H}_{+, \varepsilon} \|_{\varepsilon, l} \left[1 + |\ln \bar{z}|^{-1/2} \beta^{1/2} \right] (1 + R)^{-l} \leq$$

$$\leq C(\nu, l) \beta^{-\nu/2} \frac{a^2 \|h\|_{\varepsilon, l}}{[\ln^2 \bar{z} - 2^{l+2} a \|h\|_{\varepsilon, l}]^2} \left[1 + |\ln \bar{z}|^{-1/2} \beta^{1/2} \right] (1 + R)^{-l}.$$

Это завершает доказательство теоремы 3.

Поскольку функция Урселла $g \in C_{1, |q|}$, где $|q| \in \mathbf{B}_{\varepsilon, l}^+$ при всех $0 < \bar{z} < 1$ (см. лемму 7 ниже), теорема 1 следует непосредственно из теоремы 3.

Следствие 4. При условиях теоремы 3 имеет место следующая оценка при всех $R > 0$ и $u \in \mathbb{R}^{\nu}$:

$$\int_{\mathcal{X}^0} P_{+, \varepsilon}^0(dX) \int_{(\mathcal{M}, (B_0(R)))^0} |F(\varepsilon X + u + \omega)| W_{\rho_{+, \varepsilon}}(d\omega) \leq \\ \leq C(\nu, l) \beta^{-\nu/2} \frac{a^2 \|h\|_{l, l}}{|\ln^2 \tilde{z} - 2^{l+2} a \|h\|_{l, l}|^2} \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \tilde{z}|} \right)^{l/2} \right] (1+R)^{-l}.$$

Действительно, формула (4) вместе с неравенством

$$1_{(\mathcal{M}, (\Lambda))^0}(\omega) \leq \sum_{X \in \omega} 1_{X^c(\Lambda)}(X)$$

влечет

$$\int_{(\mathcal{M}, (\Lambda))^0} |F(\omega)| W_{\rho_{+, \varepsilon}}(d\omega) \leq \int_{\mathcal{X}^c(\Lambda)} \rho_{+, \varepsilon} d(X) \int_{\mathcal{M}} |F(\varepsilon X + \omega)| W_{\rho_{+, \varepsilon}}(d\omega).$$

Следствие 4 непосредственно следует из теоремы 3.

§8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Для доказательства теоремы 2 нам необходима следующая лемма, показывающая, что $|q|$ является оценочной функцией и дает оценку для ее нормы.

Лемма 7. Пусть $\Phi \in \mathcal{P}_l^+$. Тогда $|q| \in \mathbf{B}_{z, l}^+$ при всех $0 < z < 1$ и

$$\|q\|_{z, l} \leq C(\nu, l) \beta^{1-\frac{\nu}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \Phi(u) (1 + |u|)^l du \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \tilde{z}|} \right)^{l/2} \right],$$

равномерно для всех $0 < z \leq \tilde{z} < 1$

Доказательство. Очевидно $\|q\|_{\infty} \leq 1$ и для $0 < z \leq 1$

$$\begin{aligned} p_z(q) &\leq \sup_{X \in \mathcal{X}} \int_X \frac{U_2(X, Y)}{|X||Y|} \rho_{+, z}(dY) \leq \\ &\leq \sup_{X \in \mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}^0} P_{+, z}^0(dY) \int_0^{\beta} dt \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \frac{\Phi(x(t) - y(t) - u)}{|X||Y|} du \leq \\ &\leq \beta P_{+, z}^0(\mathcal{X}^0) \int_{\mathbb{R}^{\nu}} \Phi(u) du. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь рассмотрим $p_{z, l}(q)$. Let $X \in \mathcal{X}(B_0(R))$, тогда

$$\int_{\mathcal{X}^c(B_0(r+d))} \frac{|q(X, Y)|}{|X||Y|} \rho_{+, z}(dY) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathcal{X}(B_0^c(r+\frac{d}{2}))} \frac{U_2(X, Y)}{|X||Y|} \rho_{+,2}(dY) + \int' \frac{U_2(X, Y)}{|X||Y|} \rho_{+,2}(dY) \leq \\ &\leq \beta P_{+,2}^0(\mathcal{X}^0) \int_{|u|>d/2} \Phi(u) du + \beta P_{+,2}^0(M(d/2)) \int_{R^v} \Phi(u) du. \end{aligned}$$

где интеграл \int' берется по множеству

$$\mathcal{X}^c(B_0(r+d)) \cap \left(\mathcal{X}(B_0^c(R + \frac{d}{2})) \right)^c$$

Поскольку

$$\int_{|u|>d/2} \Phi(u) du \leq \left(1 + \frac{d}{2}\right)^{-l} \int_{R^v} \Phi(u)(1 + |u|)^l du,$$

и $P_{+,1}^0(\mathcal{X}^0) \leq \beta^{-\nu/2} C(\nu)$, где $C(\nu) = \pi^{-\nu/2} \sum_1^\infty j^{-1-\frac{\nu}{2}}$, то из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{X}^c(B_0(r+d))} \frac{|q_1(X, Y)|}{|X||Y|} \rho_{+,2}(dY) \leq \\ &\leq C(\nu) \beta^{1-\frac{\nu}{2}} \int_{R^v} \Phi(u)(1 + |u|)^l du \left(1 + \frac{d}{2}\right)^{-l} + \\ &+ C(\nu) \beta^{1-\frac{\nu}{2}} \int_{R^v} \Phi(u) du \exp \left[- \left(\frac{|\ln z|}{32\beta} \right)^{1/2} \frac{d}{2} \right] \leq \\ &\leq C(\nu, l) \beta^{1-\frac{\nu}{2}} \int_{R^v} \Phi(u)(1 + |u|)^l du \left[1 + \left(\frac{\beta}{|\ln \hat{z}|} \right)^{1/2} \right] (1 + d)^{-l}. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что $\sigma_{\epsilon, \Lambda, \epsilon} \in \mathbf{V}_{\epsilon, l}^+$. Для любого $0 < \bar{\epsilon} < 1$ имеем $|q| \in \mathbf{V}_{\bar{\epsilon}, l}^+$ и функция Урселла $g \in \mathcal{C}_{1, |q|}$, откуда по лемме 5

$$|\sigma_{\epsilon, \Lambda, \epsilon}(X, Y)| \leq (\sqrt{\hat{z}})^{|X|+|Y|} \frac{\ln^2 \hat{z}}{\ln^2 \hat{z} - 4 \|q\|_{\epsilon, l}} Q_{+, \epsilon}(X, Y),$$

где

$$Q_{+, \epsilon}(X, Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (\ln \hat{z})^{-2i} (|q|^{o(i+1)})_{\epsilon, \epsilon}(X, Y).$$

Поскольку $Q_{+, \epsilon} \in \mathbf{V}_{\bar{\epsilon}, l}^+$, то применение леммы 6 завершает доказательство теоремы 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свертка на $V_{z,l}$. Для любых двух элементов f и g Банахова пространства $V_{z,l}$, $0 < z \leq 1$, $l \geq 0$, которое было введено в параграфе 6, определим свертку по формуле:

$$(f \circ g)_{z,l}(X_1, X_2) = \int_{\mathcal{X}} \frac{f(X_1, X)g(X, X_2)}{|X|^2} \rho_{z,l}(dX), \quad X_1, X_2 \in \mathcal{X}. \quad (A1)$$

Покажем, что для любого \bar{z} , $0 < \bar{z} \leq 1$ и любых $f, g \in V_{z,l}$

$$\| (f \circ g)_{z,l} \|_{z,l} \leq 2^{l+1} \| f \|_{z,l} \cdot \| g \|_{z,l}, \quad (A2)$$

для всех $0 < z \leq \bar{z}$, где $\| \cdot \|_{z,l}$ определяется посредством (6). В частности, из этого следует, что $(\cdot \circ \cdot)_{z,l}$ является отображением из $V_{z,l} \times V_{z,l}$ на $V_{z,l}$ для всех $0 < z \leq \bar{z}$.

Заметим, что если $0 < z_1 \leq z_2 \leq 1$, то $\| f \|_{z_1,l} \leq \| f \|_{z_2,l}$. Откуда $V_{z_2,l} \subset V_{z_1,l}$. Используя это легко находим, что

$$\| (f \circ g)_{z,l} \|_{\infty} \leq p_z(f) \cdot \| g \|_{\infty} \leq \| f \|_{z,l} \cdot \| g \|_{z,l}.$$

а также, что

$$p_z((f \circ g)_{z,l}) \leq p_z(f) \cdot p_z(g) \leq \| f \|_{z,l} \cdot \| g \|_{z,l}.$$

Для доказательства (A2) остается показать, что

$$p_{z,l}((f \circ g)_{z,l}) \leq 2^{l+1} \| f \|_{z,l} \cdot \| g \|_{z,l}. \quad (A3)$$

Действительно при всех $R, d > 0$ и $X_1 \in \mathcal{X}(B_0(R))$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{X}_{B_0(R+d)}^c} \frac{|(f \circ g)_{z,l}(X_1, X_2)|}{|X_1||X_2|} \rho_{+,z}(dX_2) \leq \\ & \leq \int_{\mathcal{X}_{B_0(R+\frac{d}{2})}} \frac{|f(X_1, X)|}{|X_1||X|} \rho_{+,z}(dX) \int_{\mathcal{X}_{B_0(R+d)}^c} \frac{|g(X, X_2)|}{|X||X_2|} \rho_{+,z}(dX_2) + \\ & + \int_{\mathcal{X}_{B_0(R+\frac{d}{2})}^c} \frac{|f(X_1, X)|}{|X_1||X|} \rho_{+,z}(dX) \int_{\mathcal{X}_{B_0(R+d)}} \frac{|g(X, X_2)|}{|X||X_2|} \rho_{+,z}(dX_2) \leq \\ & \leq p_{z,l}(g) \cdot p_z(f) \left(1 + \frac{d}{2}\right)^{-l} + p_{z,l}(f) \cdot p_z(g) \left(1 + \frac{d}{2}\right)^{-l}, \end{aligned}$$

откуда следует (A3).

Лемма 8. Пусть $h \in \mathbf{V}_{l,l}$, $0 < z < 1$, $l \geq 0$, с $\|h\|_{l,l} < 2^{-(l+1)}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (h^{o^i})_{\epsilon,z} \in \mathbf{V}_{z,l}, \quad \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (h^{o^i})_{\epsilon,z} \right\|_{z,l} \leq \frac{\|h\|_{l,l}}{1 - 2^{l+1} \|h\|_{l,l}}$$

для всех $0 < z < \bar{z}$.

Доказательство: Для данного $h \in \mathbf{V}_{l,l}$ и любых $0 < z < \bar{z}$ определим линейный оператор $R_h = R_{h,\epsilon,z}$ на пространстве $\mathbf{V}_{z,l}$ по формуле: $R_{h,\epsilon,z} f = (f \circ h)_{\epsilon,z}$, $f \in \mathbf{V}_{z,l}$. Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (h^{o^i})_{\epsilon,z} = \sum_{i=1}^{\infty} R_h^{i-1}(h) = (I - R_h)^{-1}(h),$$

где I является оператором тождества. Для завершения доказательства, заметим, что поскольку $\|h\|_{l,l} < 2^{-(l+1)}$, то из (A2) следует, что $\|R_h\|_{z,l} < 1$, которое влечет существование обратного оператора $(I - R_h)^{-1}$.

Я выражаю свою благодарность факультету математики Билефельдского Университета за теплое гостеприимство и Гансу Цессину за полезные обсуждения.

Abstract. The paper studies the decay of correlations for the Ginibre gas with pair repulsive potential possessing power decay at infinity, and obtains the tree-graph estimates for the Ursell functions as well as the convergence of the cluster representation of the grand partition function. The two-point truncated correlation functions have power decay. The cases of Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics are treated simultaneously by the cluster expansion method.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Poghosyan, H. Zessin, "Decay of correlations for the Ginibre gas obeying Maxwell-Boltzmann statistics", Markov processes and related fields, vol. 7, no. 4, pp. 561 - 580, 2001.
2. M. Dunca, B. Soullard, "Cluster properties of lattice and continuous systems", Commun. Math. Phys. vol. 47, pp. 155 - 166, 1976.
3. P. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1950.
4. J. Ginibre, "Reduced density matrices of quantum gases", J. Math. Phys., vol. 6, pp. 238 - 263, 1965.
5. J. Ginibre, "Some applications of functional integration in statistical mechanics", In: C. De Witt, R. Stora (ed.), "Statistical mechanics and quantum field theory", pp. 327 - 427, 1971.
6. D. Ruelle, Statistical Mechanics. Benjamin, New York, Amsterdam, 1969.
7. J. H. Van Lint, R. M. Wilson, A Course in Combinatorics, Cambridge Univ. Press, 1992.

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 40. Номер 4. 2005

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тематическая серия, VI

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора серии	4
Р. В. Амбарцумян, Интегрирование комбинаторных разложений для δ -мер	5
Р. В. Амбарцумян, Прегеодезические кривые в трех измерениях	23
Н. Г. Агаронян и В. К. Оганян, Функции распределения длины хорды для многоугольников	42
С. К. Погосян, Сильные кластерные свойства газа Жинибра. Квантовая статистика	58

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 40, No. 4, 2005

INTEGRAL AND STOCHASTIC GEOMETRY, VI

CONTENTS

Editor's Message	4
R. V. AMBARTZUMIAN, Integration of combinatorial decompositions for delta-measures	5
R. V. AMBARTZUMIAN, Pregeodesics in dimension three	23
N. G. AGHARONYAN AND V. K. OHANYAN, Chord length distributions for polygons	42
S. K. POGHOSYAN, Strong cluster properties of Ginibre gas. Quantum statistics	58