ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 3–15

ОБОБЩЁННАЯ ЗАДАЧА ЛИТТЛВУДА

К. Л. Аветисян

Ереванский государственный университет
E-mail : avetkaren@ysu.am

Резюме. Для n-гармонических и голоморфных функций в единичном поликруге пространства $\mathbb{C}^n$ определено новое семейство g-функций типа Литтлвуда-Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства. В недавней работе автора был получен положительный ответ на вопрос Литтлвуда о распространении L^p-неравенств на случай нескольких комплексных переменных. Настоящая статья, представляя собой дальнейшее обобщение в этом направлении, усиливает и упрощает результаты недавней работы автора.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \le j \le n\}$ - единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$, и $T^n = \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1, 1 \le j \le n\}$ - остов поликруга U^n (т.е. n-мерный тор). В поликруге U^n рассмотрим n-гармонические функции, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j в отдельности. g-функция Литтлвуда и Пэли [1] определяется формулой

$$g(f)(\vartheta) = \left(\int_0^1 (1-r)|f'(re^{i\vartheta})|^2 dr\right)^{1/2}, \quad \vartheta \in (-\pi, \pi), \tag{1}$$

где $f(z)$ - голоморфная функция в единичном круге U^1. Один из основных результатов для этой функции является эквивалентность норм $\|g(f)\|_{L^p}$ и $\|f\|_{L^p}$ на единичной окружности при $p > 1$ (см. [1] и [2], Глава XIV). Аналогичный результат в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ установлен Стейном [3] (Глава IV). Ряд исследователей, в частности Флетт [4], значительно расширили понятие g-функции в единичном круге с помощью дробной производной и применили это в теоремах о мультипликаторах. Литтлвуд [5] (стр. 43, Проблема 28) предположил справедливость L^p-неравенств для g-функции в случае двух комплексных переменных и выразил желание обойтись без "плоских" комплексных методов. В работе автора [6], с помощью дробных производных Римана-Лиувилля D^α, были определены некоторые g-функции типа Литтлвуда-Пэли и установлены связанные с ними L^p-неравенства для n-гармонических функций в поликруге. Этим был дан положительный ответ на вопрос Литтлвуда [5]. Вместе с тем, в работе [6] для некоторых L^p-неравенств с производными D^α приходилось довольствоваться малыми или целыми α. Это снижало применимость полученных L^p-неравенств работы [6].

Чтобы эффективно применить L_p-неравенства в теории весовых функциональных пространств, в настоящей работе построено новое семейство g-функций типа Литтлвуда-Пэли с помощью дробных производных Адамара $\mathcal{F}^\alpha$, а также Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^\alpha$. Соответствующие L^p-неравенства с произвольными значениями мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ доказаны для n-гармонических функций в поликруге с $p > 1$, а также для голоморфных функций с $p > 0$. Даны также некоторые приложения установленных L^p-неравенств.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Пусть

$$I^n = [0,1)^n, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad r \in I^n, \quad dr = dr_1 \cdots dr_n, \quad r\zeta = (r_1\zeta_1, \ldots, r_n\zeta_n).$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $m = (m_1, \ldots, m_n)$ с неотрицательными целыми координатами $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, считая, что $q \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, положим

$$(1-r)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}, \quad r^\alpha = \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j}, \quad \Gamma(\alpha) = \prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}, \quad \alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \ldots, \alpha_n q + 1).$$

Для функции $f(z) = f(rw)$ ($r \in I^n$, $w \in T^n$), заданной в U^n, через $\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathcal{F}_r^\alpha$ обозначим оператор Адамара дробного интегродифференцирования относительно переменной $r \in I^n$:

$$\mathcal{F}^{-\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} \prod_{j=1}^n \left(\log \frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j - 1} f(\eta z)\, d\eta,$$

$$\mathcal{F}^m f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot r\right)^m f(z), \quad \mathcal{F}^\alpha f(z) = \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} \mathcal{F}^m f(z),$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$ и $1 \le j \le n$. Заметим, что свойства и некоторые эквивалентные определения одномерного оператора $\mathcal{F}^\alpha$ можно найти, например, в [7] и [4].

Если функция $u(z)$ n-гармонична (голоморфна), то таковой является также и функция $\mathcal{F}^\alpha u(z)$ ($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$). Ясно, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$\mathcal{F}^\alpha f = \mathcal{F}_{r_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_{r_2}^{\alpha_2} \ldots \mathcal{F}_{r_n}^{\alpha_n} f, \tag{2}$$

где $\mathcal{F}_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной r_j.

В дальнейшем всюду, через $C(\alpha, \beta, \ldots), c_\alpha$ и т.п. будем обозначать положительные постоянные, зависящие от параметров α, β и т.д.. Для любого p ($1 \le p \le \infty$) через p' обозначим сопряженный индекс, т.е. $p' = p/(p-1)$, и все неравенства $A \le B$ в формулировках теорем означают, что если B конечно, то и A конечно, и $A \le B$.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и для значений параметров $\alpha_j > 0$ ($1 \le j \le n$) и $0 < q \le \infty$, определим g-функцию типа Литтлвуда-Пэли следующим образом (сравни с [4], [6]) :

$$\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)(w) = \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |\mathcal{F}^\alpha f(rw)|^q dr \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

$$\mathcal{G}_{\infty,\alpha}(f)(w) = \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} \ (1-r)^\alpha |\mathcal{F}^\alpha f(rw)|, \qquad q = \infty.$$

При $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ функция $\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g-функции (1). Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \le j \le n$), $1 < p < \infty$ и $2 \le q < \infty$ - произвольные числа и $u(z)$ - интеграл Пуассона некоторой функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда*

$$||\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)||_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)||f||_{L^p}. \tag{3}$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ голоморфна в U^n, то для любого $p > 0$ имеет место неравенство

$$||\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)||_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)||u||_{H^p}, \tag{4}$$

где H^p - голоморфный класс Харди в поликруге.

Теорема 2. *Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \le j \le n$), $1 < p < \infty$ и $0 < q \le 2$ - произвольные числа и $u(z)$ - n-гармоническая функция в U^n такая, что $\mathcal{G}_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причём имеет место неравенство*

$$||f||_{L^p} \le C(p, q, \alpha, n)||\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)||_{L^p}.$$

Приведем также некоторые аналоги Теорем 1 и 2, используя дробное интегро-дифференцирование Римана–Лиувилля :

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} f(\eta z) d\eta, \quad D^\alpha f(z) = D^{-(m-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m f(z),$$

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f(z) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(z), \quad \mathcal{D}^\alpha f(z) = D^\alpha \left\{ r^\alpha f(z) \right\}, \quad z = rw \in U^n,$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$, $1 \le j \le n$. Соответствующая g-функция типа Литтлвуда-Пэли будет иметь вид

$$g_{q,\alpha}(f)(w) = \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} |\mathcal{D}^\alpha f(rw)|^q dr \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

$$g_{\infty,\alpha}(f)(w) = \operatorname*{ess\,sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |\mathcal{D}^\alpha f(rw)|, \qquad q = \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$ и $2 \le q < \infty$ – произвольные числа и $u(z)$ – интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда*

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n) \|f\|_{L^p}.$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ – голоморфна в U^n, то для любого $p > 0$ справедливо неравенство

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n) \|u\|_{H^p}.$$

Теорема 4. *Пусть $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$ и $0 < q \le 2$ – произвольные числа и $u(z)$ – n-гармоническая функция в U^n такая, что $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причём имеет место неравенство*

$$\|f\|_{L^p} \le C(p,q,\alpha,n) \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Отметим, что для функций, голоморфных в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, аналоги приведённых выше Теорем 1 – 4 содержатся в [8]. Несмотря на очевидное сходство Теорем 1-2 и 3-4, имеются существенные различия в их доказательствах (для оператора Адамара имеет место полугрупповая формула $\mathcal{F}^{\alpha+\beta} = \mathcal{F}^\alpha \mathcal{F}^\beta$, которая не имеет места для оператора Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^\alpha$).

В качестве приложения к Теоремам 1 – 4, приведём следующие теоремы вложения. Обозначим интегральные средние через

$$M_p(f;r) = \left\| f(r\,\cdot) \right\|_{L^p(T^n; dm_n)}, \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in I^n,$$

где dm_n – мера Лебега на T^n, а $\mathcal{J}^\alpha$ обозначает любой из операторов $\mathcal{F}^\alpha$ и $\mathcal{D}^\alpha$.

Теорема 5. *Пусть $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $1 < p \le q \le \infty$, $2 \le q \le \infty$ и $p \le p_0 \le \infty$ – произвольные числа. Тогда*

$$\left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(\mathcal{J}^\alpha u; r)\, dr\right)^{1/q} \le C\|u\|_{h^p}, \tag{5}$$

$$\left(\int_{I^n} (1-r)^{(\alpha+1/p-1/p_0)q-1} M_{p_0}^q(\mathcal{J}^\alpha u; r) dr\right)^{1/q} \le C\|u\|_{h^p}. \tag{6}$$

Если $u \in H^p$ – голоморфная функция, то неравенства (5) и (6) справедливы для всех $p > 0$.

Теорема 6. *Пусть $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$, $0 < q \le 2$ и $q \le p$ – произвольные числа. Тогда*

$$\|\mathcal{J}^{-\alpha} u\|_{h^p} \le C \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r)\, dr\right)^{1/q}.$$

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Напомним, что ядро Пуассона в поликруге U^n задаётся формулой

$$P(z,\zeta) = \prod_{j=1}^n P(z_j,\zeta_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1-|z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.$$

Лемма 1. *Если $\alpha_j \ge 0$ $(1 \le j \le n)$, то*

$$|\mathcal{F}^\alpha P(z,\zeta)| \le C(\alpha, n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{\alpha_j+1}}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.$$

Доказательство получается прямой оценкой.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ – n-гармоническая функция в U^n и $0 < p, q \le \infty$, $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$ – произвольные числа. Тогда*

$$|\mathcal{F}^\alpha f(z)| \le C(p,q,\alpha,n)\|\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1-|z_j|)^{\alpha_j+1/p}}, \quad z \in U^n.$$

Доказательство опускаем, поскольку оно довольно стандартно и сводится к неравенству Гёльдера и n-субгармоническому поведению функции $|\mathcal{F}^\alpha f|^p$ $(p > 0)$.

Лемма 3. *Пусть $f(z)$ – n-гармоническая функция в U^n и $1 \leq q < \infty$, $\alpha_j, \beta_j > 0$ $(1 \leq j \leq n)$ – произвольные числа. Тогда*

$$\mathcal{G}_{q,\beta}(f)(w) \leq C(\alpha,\beta,q,n)\,\mathcal{G}_{q,\beta+\alpha}(f)(w), \quad w \in T^n.$$

Доказательство получается n-кратным повторением одномерного варианта этого же неравенства (см. [4]). Отметим, что в таком виде Лемма 3 перестаёт быть верной в случае замены функции $\mathcal{G}_{q,\beta}$ на $g_{q,\beta}$.

Для любого фиксированного δ $(0 < \delta < 1)$ и $\zeta = e^{i\vartheta} \in T^1$ рассмотрим стандартную область $\Gamma_\delta(\zeta) \equiv \Gamma_\delta(\vartheta)$ в единичном круге U^1, ограниченную двумя касательными к окружности $|z| = \delta$, проведёнными из точки $\zeta = e^{i\vartheta}$, и наибольшей дугой окружности $|z| = \delta$. При фиксированных δ_j, $0 < \delta_j < 1$ $(1 \leq j \leq n)$ и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$ определим $\Gamma_\delta(\zeta) = \Gamma_{\delta_1}(\zeta_1) \times \cdots \times \Gamma_{\delta_n}(\zeta_n)$.

Лемма 4. *Пусть $\alpha_j > 0$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq n$ и $f(z)$ – n-гармоническая функция в U^n. Тогда для её некасательной максимальной функции*

$$f_\delta^*(\zeta) = \sup\{|f(z)|;\ z \in \Gamma_\delta(\zeta)\}, \quad \zeta \in T^n$$

справедлива оценка

$$|\mathcal{F}^\alpha f(rw)| \leq C(\alpha,\delta,n)\frac{f_\delta^*(w)}{(1-r)^\alpha}, \quad z = rw \in U^n.$$

Доказательство. Обозначим через $B = B_z$ поликруг с центром в точке $z = rw \in U^n$, с радиусом $\big(\delta_1(1-r_1)/2, \dots, \delta_n(1-r_n)/2\big)$. Тогда имеем $B \subset \Gamma_\delta(w)$. Дифференцируя представление Пуассона функции f в B посредством оператора $\mathcal{F}^\alpha$ и используя известные оценки ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Для n-гармонической функции $u(z)$ в U^n введём следующий вариант интеграла площадей Лузина :

$$S_\delta(u)(\zeta) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |\mathcal{F}^1 u(z)|^2 dm_{2n}(z)\right)^{1/2}, \quad \zeta \in T^n,$$

где m_{2n} – мера Лебега на поликруге U^n. Следующая лемма, доказанная Марцинкевичем и Зигмундом ([2], стр. 315) в единичном круге для $k = 1$ и классической g-функции (1).

Лемма 5. *Пусть $u(z)$ – n-гармоническая функция в U^n, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ $(k_j \geq 1)$ и $0 < \delta_j < 1$ $(1 \leq j \leq n)$. Тогда*

$$\mathcal{G}_{2,k}(u)(\zeta) \leq C(n, k, \delta)\, S_\delta(u)(\zeta), \quad \zeta \in T^n.$$

Доказательство. Вначале, докажем лемму для случая $n = 1$, т.е. для единичного круга U^1. Для этого, заметим, что если $z = re^{i\vartheta} \in U^1$ фиксировано, то из интегральной формулы Пуассона в круге

$$B = \left\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \delta(1-r)/2\right\} \subset \Gamma_\delta(e^{i\vartheta}) \equiv \Gamma_\delta(\vartheta)$$

следует, что

$$|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 \leq \frac{C(k)}{|B|(1-r)^{2(k-1)}} \iint_B |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho\, d\rho\, dt,$$

где $|B|$ – площадь круга B. Ясно, что

$$C'_\delta(1-r) < 1-\rho < C''_\delta(1-r), \quad \rho e^{it} \in B.$$

Следовательно

$$(1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 \leq C(k,\delta) \iint_B |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho\, d\rho\, dt}{1-\rho}. \tag{7}$$

Теперь если $0 \leq r \leq \delta/(2+\delta)$, то расширим область интегрирования в (7) до круга

$$E \equiv E(r,\delta) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_2 \equiv r + \delta(1-r)/2\}.$$

Легко видеть, что $E(r,\delta) \subset \Gamma_\delta(\vartheta)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 \leq C(k,\delta) \iint_{\Gamma_\delta(\vartheta)} \mathcal{X}_{(0,r_2)}(\rho) |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho\, d\rho\, dt}{1-\rho},$$

где через $\mathcal{X}_{(0,r_2)}$ обозначена характеристическая функция интервала $(0, r_2)$. Интегрирование по r и оценка внутреннего интеграла приводят к

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 dr \leq C(k,\delta) \iint_{\Gamma_\delta(\vartheta)} \left(\int_0^1 \mathcal{X}_{(0,r_2)}(\rho)\, dr\right) \times$$

$$\times |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho} \leq C(k,\delta) \iint_{\Gamma_\delta(\vartheta)} |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho\, d\rho\, dt.$$

Если $\delta/(2+\delta) < r < 1$, то расширим область интегрирования в (7) до кольцевого сектора, стороны которого касаются круга B, т.е.

$$(1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 \le C(k,\delta)\int_{r_1}^{r_2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}|\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2\,\frac{\rho\,d\rho\,dt}{1-\rho}, \tag{8}$$

где

$$r_{1,2} = r \mp \frac{\delta(1-r)}{2}, \quad \vartheta_{1,2} = \vartheta \mp \arcsin\frac{\delta(1-r)}{2r}.$$

Тогда, интегрируя (8) по r, получим

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2\,dr \le$$

$$\le C(k,\delta)\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \mathcal{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\mathcal{X}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}(t)\,dr\right)|\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2\,\frac{\rho\,d\rho\,dt}{1-\rho}. \tag{9}$$

Остаётся должным образом оценить внутренний интеграл. Имеем

$$\mathcal{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathcal{X}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad r_1 < \rho < r_2,\ \vartheta_1 < t < \vartheta_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Условие $r_1 < \rho < r_2$ равносильно условию $\rho_1 < r < \rho_2$, где $\rho_{1,2} = (\rho \mp \delta/2)/(1 \mp \delta/2)$. Кроме того, $\vartheta_1 < t < \vartheta_2$ равносильно условию

$$r < r_0 \equiv \frac{1}{1 + (2/\delta)\sin|t-\vartheta|}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \mathcal{X}_{(r_1,r_2)}(\rho)\,\mathcal{X}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}(t)\,dr = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\mathcal{X}_{(0,r_0)}(r)\,dr \le \begin{cases} \rho_2-\rho_1 & \text{если} \quad \rho_1 < r_0 < 1, \\ 0 & \text{если} \quad 0 < r_0 \le \rho_1. \end{cases}$$

Определим множество $G_\delta = \{\xi = \rho e^{it} \in U^1 : \rho_1 < r_0\}$ и посчитаем $\rho_2 - \rho_1 = C_\delta(1-\rho)$. После подстановки в (9), получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 dr \le C(k,\delta)\iint_{G_\delta}|\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2\rho\,d\rho\,dt. \tag{10}$$

Осталось доказать вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\vartheta)$. Пусть $\xi = \rho e^{it} \in G_\delta$ и $\delta \le \rho < 1$. Тогда множество $\Gamma_\delta(\vartheta)\setminus\{|\xi| < \delta\}$ характеризуется следующими тремя условиями :

$$\delta \le \rho < 1, \quad |t| = |\arg\xi| < \arccos\delta, \quad |\arg(1-\xi)| < \arcsin\delta. \tag{11}$$

В то же время, множество G_δ определяется условием $\rho_1 < r_0$ или

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2}\,\frac{1-\rho}{\rho-\delta/2}.$$

Последние два условия в (11) следуют из оценок

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2}\,\frac{1-\rho}{\rho-\delta/2} \le 1-\delta < \sqrt{1-\delta^2},$$

$$\sin|t| < \frac{\delta}{2}\,\frac{1-\rho}{\rho-\delta/2} \le \frac{\delta}{\rho}\sqrt{1-2\rho\cos t+\rho^2}.$$

Вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\vartheta)$ доказано. Таким образом, из (10) получаем требуемое неравенство для $n = 1$:

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1}|\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 dr \le C(k,\delta) \iint_{\Gamma_\delta(\vartheta)} |\mathcal{F}^1 u(\xi)|^2 dm_2(\xi). \tag{12}$$

Общий случай $n > 1$ получается n-кратным применением (12) с использованием разложения (2). Лемма 5 доказана.

Доказательство Теоремы 1. Сначала докажем теорему для $\alpha_j \ge 1$. По Лемме 1,

$$|\mathcal{F}^\alpha u(z)| \le \int_{T^n} |\mathcal{F}^\alpha P(z,\zeta)|\,|f(\zeta)|dm_n(\zeta) \le \frac{C(\alpha,n)}{(1-|z|)^\alpha}\int_{T^n} P(z,\zeta)\,|f(\zeta)|\,dm_n(\zeta).$$

Отсюда получаем поточечную оценку через некасательную максимальную функцию u_δ^* :

$$\mathcal{G}_{\infty,\alpha}(u)(w) \le C(\alpha,n)\sup_{r\in I^n}\int_{T^n} P(rw,\zeta)\,|f(\zeta)|\,dm_n(\zeta) \le C(\alpha,n)\,u_\delta^*(w), \quad w\in T^n,$$

где $0 < \delta_j < 1$ $(1 \le j \le n)$ - некоторые числа. Теперь будем считать, что функция $u(z)$ принадлежит голоморфному классу Харди H^p $(0 < p < \infty)$, либо n-гармоническому классу h^p $(1 < p < \infty)$ и используя максимальную теорему Зигмунда [9]

$$\|u_\delta^*\|_{L^p} \le C\|u\|_{H^p} \tag{13}$$

получим

$$\|\mathcal{G}_{\infty,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C\|u\|_{H^p}. \tag{14}$$

С другой стороны, последовательно применяя Лемму 5, теорему Ганди-Стейна [10] об эквивалентности L^p-норм функций $S_\delta(u)$ и u_δ^*, а затем вновь неравенство (13), получаем оценку

$$\|\mathcal{G}_{2,\alpha}(u)\|_{L^p} \le C\|S_\delta(u)\|_{L^p} \le C\|u_\delta^*\|_{L^p} \le C\|u\|_{H^p}. \tag{15}$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса-Торина для квазинормированных пространств со смешанной нормой (см. [11], стр. 316 и [12]), неравенства (14) и (15) влекут (3) и (4) для всех q $(2 \le q \le \infty)$ и $\alpha_j \ge 1$.

В общем случае $m_j - 1 < \alpha_j \le m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$ $(1 \le j \le n)$ представим производную $\mathcal{F}^{\alpha}$ в виде $\mathcal{F}^{\alpha} u = \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} \mathcal{F}^{m} u$. Ввиду Леммы 3, это позволяет свести оценку к выше рассмотренному случаю целых $\alpha_j \ge 1$. Интегрирование неравенства $|\mathcal{F}^{\alpha} u| \le \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} |\mathcal{F}^{m} u|$ с q-ой степенью и мерой $(1-r)^{\alpha q-1} dr$ на $(0,1)$, а затем на окружности T^1 с p-ой степенью, приводит к (3) – (4).

Доказательство Теоремы 2. Ввиду Леммы 3, достаточно доказать теорему лишь для $0 < \alpha_j < 1$. Вначале положим $1 < q \le 2$. Для произвольного фиксированного $r \in I^n$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(T^n)$, порождённый функцией $u(z)$:

$$F_u(v) = \int_{T^n} u(rw)\, v(w) dm_n(w), \quad v(w) \in L^{p'}(T^n).$$

Пусть $v(rw)$ – интеграл Пуассона функции $v(w)$, и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – малый положительный мультииндекс такой, что $0 < \alpha_j + \gamma_j < 1$. Тогда используя тождества $\mathcal{F}_r^{\alpha} u(\eta r w) = \mathcal{F}_{\eta}^{\alpha} u(\eta r w)$ и $\mathcal{F}_r^{-\alpha-\gamma} \mathcal{F}_r^{\alpha+\gamma} u = u$, будем иметь

$$F_u(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_{I^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\log \frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j+\gamma_j-1} \left[\int_{T^n} v(w)\, \mathcal{F}_{\eta}^{\alpha}\, \mathcal{F}_r^{\gamma} u(\eta r w) dm_n(w)\right] d\eta =$$

$$= C \int_{I^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\log \frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j+\gamma_j-1} \left[\int_{T^n} \mathcal{F}_{\eta}^{\alpha} u(\sqrt{\eta}\zeta)\, \mathcal{F}_r^{\gamma} v(\sqrt{\eta} r \zeta)\, dm_n(\zeta)\right] d\eta =$$

$$= C \int_{T^n} \left[\int_{I^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\log \frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j+\gamma_j-1} \mathcal{F}_{\eta}^{\alpha} u(\sqrt{\eta}\zeta)\, \mathcal{F}_r^{\gamma} v(\sqrt{\eta} r \zeta)\, d\eta\right] dm_n(\zeta).$$

Далее, обозначая

$$h_{q',\gamma}(r\zeta) = \left(\int_{I^n} (1-\eta)^{\gamma q'-1} \left|\mathcal{F}_r^{\gamma} v(\sqrt{\eta} r \zeta)\right|^{q'} d\eta\right)^{1/q'},$$

и дважды применяя неравенство Гёльдера, а затем Теорему 1, получаем

$$|F_u(v)| \le C \int_{T^n} \mathcal{G}_{q,\alpha}(u)(\zeta)\, h_{q',\gamma}(r\zeta)\, dm_n(\zeta) \le$$

$$\le C \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \|h_{q',\gamma}(r\zeta)\|_{L^{p'}(T^n)} \le C(p,q,\alpha,\gamma,n) \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}(T^n)}.$$

В силу двойственности $(L^{p'})^* = L^p$ будем иметь

$$\|u(rw)\|_{L^p(T^n)} = \sup\{\, |F_u(v)|;\ \|v\|_{L^{p'}} = 1\} \le C\,\|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Теперь положим $0 < q < 1$ (при $q = 1$ утверждение очевидно). По Лемме 4

$$|u(rw)| \le \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} |\mathcal{F}^\alpha u(\eta r w)|\, d\eta \le$$

$$\le C(\alpha,\delta,n)\big(u_\delta^*(w)\big)^{1-q} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha q-1} \big|\mathcal{F}^\alpha u(\eta r w)\big|^q d\eta,$$

где $u_\delta^*(w)$ – некасательная максимальная функция. Далее, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\|u(rw)\|^p_{L^p(T^n)} \le C\|u_\delta^*\|^{p(1-q)}_{L^p}\, \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|^{pq}_{L^p}.$$

Следовательно, в силу неравенства (13)

$$\|f\|_{L^p} = \|u(rw)\|_{L^p(T^n)} \le C\|u_\delta^*\|^{1-q}_{L^p}\, \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|^q_{L^p} \le C\|f\|^{1-q}_{L^p}\, \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|^q_{L^p}.$$

Доказательство Теоремы 2 завершено.

Следствие. Пусть $\alpha_j > 0$ $(1 \le j \le n)$, $1 < p < \infty$ и $0 < q \le 2$ – произвольные числа и $u(z)$ – n-гармоническая функция в U^n. Тогда

$$\big\|\mathcal{F}^{-\alpha}|u|\big\|_{h^p} \le C(p,q,\alpha,n) \Big\| \big\|(1-r)^\alpha u\big\|_{L^q(dr/(1-r))} \Big\|_{L^p(T^n)}. \tag{16}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Теоремы 2 с той лишь разницей, что вместо функционала F_u следует рассмотреть функционал

$$\Phi_u(v) = \int_{T^n} \mathcal{F}^{-\alpha}|u(rw)|\, v(w)\, dm_n(w), \quad v(w) \in L^{p'}(T^n).$$

Теперь вкратце приведём доказательства Теорем 3 – 6.

Доказательство Теоремы 3. Пусть n-гармоничная (или голоморфная) функция $u(z)$ принадлежит классу h^p (или H^p). Для заданных чисел $\alpha_j > 0$, $m \in Z_+^n$ $(m_j - 1 < \alpha_j \le m_j,\ 1 \le j \le n)$, и для каждого $j \in [1,n]$ имеем

$$\mathcal{D}^{\alpha_j}_{r_j} u = D^{\alpha_j}_{r_j}\{r_j^{\alpha_j} u\} = D^{-(m_j-\alpha_j)}_{r_j} \left(\frac{\partial}{\partial r_j}\right)^{m_j} \{r_j^{\alpha_j} u\} =$$

$$= r_j^{m_j-\alpha_j} \mathcal{D}^{-(m_j-\alpha_j)}_{r_j} \left\{ r_j^{\alpha_j} \frac{\partial^{m_j} u}{\partial r_j^{m_j}} + \text{ L.O.T. (слагаемые низшего порядка)} \right\}.$$

Старший член этой суммы можно записать в виде

$$r_j^{m_j} \mathcal{D}_{r_j}^{-(m_j-\alpha_j)} D_{r_j}^{m_j} u = r_j^{\alpha_j} D_{r_j}^{\alpha_j} u.$$

Поэтому приходим к оценке, доказанной в [6] :

$$\left\| \left\| (1-r)^\alpha r^\alpha D^\alpha u \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \le C\|u\|_{h^p}.$$

Доказательство Теоремы 4. Достаточно вспомнить определение дробных интегралов и применить неравенство (16) :

$$\|\mathcal{D}^{-\alpha} u\|_{h^p} \le C \|\mathcal{F}^{-\alpha}|u|\|_{h^p} \le C \left\| \left\| (1-r)^\alpha u \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)}.$$

Доказательство Теоремы 5. Согласно интегральному неравенству Минковского и Теоремам 1 и 3 имеем

$$\left\| (1-r)^\alpha M_p(\mathcal{J}^\alpha u; r) \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \le \left\| \|(1-r)^\alpha \mathcal{J}^\alpha u\|_{L^q(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \le C\|u\|_{h^p}.$$

Теперь неравенство (6) следует из (5) с применением вложения (см. [13])

$$\left\| (1-r)^{\alpha+1/p-1/p_0} M_{p_0}(f;r) \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \le C \left\| (1-r)^\alpha M_p(f;r) \right\|_{L^q(dr/(1-r))}.$$

Доказательство Теоремы 6. В силу неравенства Минковского и Теорем 2 и 4, получаем

$$\|\mathcal{J}^{-\alpha} u\|_{h^p} \le C \left\| \left\| (1-r)^\alpha u \right\|_{L^q(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \le C \left\| (1-r)^\alpha M_p(u;r) \right\|_{L^q(dr/(1-r))}.$$

Abstract. A new family of Littlewood–Paley type g-functions is defined and the related L^p-inequalities are proved for n-harmonic and holomorphic functions on the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$. The paper generalizes and improves the results of author's recent work, that gave a positive answer to Littlewood's question on extension of L^p-inequalities to the case of several complex variables.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley, "Theorems on Fourier series and power series (I)", J. London Math. Soc., vol. 6, pp. 230 – 233, 1931 ; (II), Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 42, pp. 52 - 89, 1936.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 2, Мир, Москва, 1965.

3. И. М. Стейн, Сингулярные Интегралы и Дифференциальные свойства Функций, Мир, Москва, 1973.
4. T. M. Flett, "Mean values of power series", Pacific J. Math., vol. 25, pp. 463 – 494, 1968.
5. J. E. Littlewood, Some Problems in Real and Complex Analysis, Raytheon Education, Massachusetts, 1968.
6. К. Л. Аветисян, "Неравенства типа Литтлвуда–Пэли для n-гармонических функций в поликруге", Мат. Заметки, том 75, № 4, стр. 483 – 492, 2004.
7. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые Их Приложения, Наука и Техника, Минск, 1987.
8. J. M. Ortega, J. Fàbrega, "Holomorphic Triebel-Lizorkin spaces", J. Funct. Anal., vol. 151, pp. 177 – 212, 1997.
9. A. Zygmund, "On the boundary values of functions of several complex variables (I)", Fund. Math., vol. 36, pp. 207 – 235, 1949.
10. R. Gundy, E. M. Stein, "H^p theory for the poly-disc", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 76, No. 3, pp. 1026 – 1029, 1979.
11. A. Benedek, R. Panzone, "The spaces L^P with mixed norm", Duke Math. J., vol. 28, pp. 301 – 324, 1961.
12. T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", Math. Scand., vol. 26, pp. 177 – 199, 1970.
13. K. L. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc", J. Math. Anal. Appl., vol. 291, no. 2, pp. 727 – 740, 2004.

Поступила 29 мая 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 16-23

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ И НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА

А. Г. Багдасарян

Ереванский государственный университет
E-mail : angen@arminco.com

Резюме. В работе вводятся и рассматриваются обобщённые пространства типа Лизоркина–Трибеля, порождённые положительными, бесконечно дифференцируемыми функциями полиномиального роста. Доказывается двусторонняя оценка $\overset{*}{K}$-функционала Петре для пар пространств типа Никольского–Бесова с разными анизотропиями. Доказаны некоторые интерполяционные формулы "вещественного метода" пространств типа Лизоркина–Трибеля и Никольского–Бесова.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Ещё в шестидесятых годах были введены пространства Соболева, порождённые некоторым полным многогранником. Для принадлежности функции к таким пространствам требуется, чтобы не только чистые производные соответствующего порядка принадлежали L_p, но и некоторые смешанные производные.

Если вершины многоугольника не являются мультииндексами, то гладкость функций из соответствующих пространств типа Соболева, задаётся как образы Фурье с помощью некоторой функции $\mu(\xi)$ полиномиального роста, которая определяется первоначальным многогранником. В работах [1], [2] были введены и рассмотрены пространства типа Соболева–Лиувилля $H_p^s(\mu, \mathbb{R}^n)$ для некоторых весовых функций $\mu(\xi)$.

В классическом случае, если $p \neq 2$, то для описания пространств следов и интерполяционных пространств "вещественного" для пространств Соболева, приходится рассматривать пространства Бесова. Если функция $\mu(\xi)$ отвечает некоторому полному многограннику, то, как и в классическом случае, пространства

Бесова допускают представление методом декомпозиции (см. [3], [4]).

В более общем случае, например когда нарушается условие $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\mu(\xi)=\infty$ и следовательно метод декомпозиции не применим, обобщённые пространства типа Никольского-Бесова были введены в работах [5], [6] посредством интерполяции соответствующих пар пространств типа Соболева–Лиувилля. Основным обстоятельством является свойство "квазилинеаризуемости" (см. [7]) пары пространств типа Соболева-Лиувилля, которое даёт возможность двусторонней оценки K-функционала Петре [7], [8], [9].

Таким образом, используя интерполяционные свойства "вещественного" метода, имея соответствующие результаты для пространств типа Соболева–Лиувилля, удаётся перенести их и на пространства типа Никольского-Бесова.

Как и в случае классических пространств, случай пространств Лизоркина-Трибеля обстоит несколько иначе. Для рассматриваемых пространств типа Лизоркина–Трибеля имеет место аналог теоремы Пэли-Литтлвуда, которая устанавливает связь между исследуемыми пространствами типа Лизоркина-Трибеля и Соболева–Лиувилля. Доказательство основано на теореме П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье [10] для векторнозначных функций (автор намеревается привести доказательство в ближайших заметках).

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Будем говорить, что положительная функция $\mu\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ полиномиального роста принадлежит множеству G^+, если существует постоянная $c>0$ такая, что неравенство

$$|\xi^\alpha D^\alpha\mu(\xi)|\le c\mu(\xi) \tag{1}$$

выполняется для любого мультииндекса α с компонентами из множества $\{0;1\}$ и любого $\xi\in\mathbb{R}^n$ такого, что $\prod_{i=1}^n\xi_i\ne 0$. Из теоремы П. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [10]) и оценки (1) следует, что любая ограниченная в $\mathbb{R}^n$ функция из G^+ является мультипликатором.

Определение 1. Пусть $1<p<\infty$, $-\infty<s<\infty$ и $\mu\in G^+$. Положим

$$H_p^s(\mu,\mathbb{R}^n)\equiv H_p^s(\mu)=\left\{f\in S':\|f\|_H=\left\|F^{-1}\{\mu^sFf\}\right\|_{L_p(R^n)}<\infty\right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu,\mathbb{R}^n)$ были рассмотрены в [1], [2]. При $\mu(\xi)=(1+|\xi|^2)^{1/2}$ они совпадают с классическими пространствами типа Соболева-Лиувилля, поэтому в дальнейшем будем их называть пространствами типа Соболева–Лиувилля. Если положить

$$I_{\mu^s}=F^{-1}\{\mu^{-s}F\},\quad \mu\in G^+,\quad -\infty<s<\infty,$$

то определение указанных пространств типа Соболева–Лиувилля принимает вид

$$H_p^s(\mu) = I_{\mu^s} L_p.$$

Как и в случае классических пространств, определим пространства типа Никольского-Бесова посредством интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева-Лиувилля.

Определение 2. Для любых $1 < s < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ и любого $\mu \in G^+$, положим

$$B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = \left(H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu)\right)_{1/2,q},$$

$$B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^s} B_{p,q}^0(\mu).$$

Для этих пространств имеет место аналог известной формулы "вещественной" интерполяции [6] :

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left(H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu)\right)_{\vartheta,q},$$

где $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \neq s_1 < \infty$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$, $\mu \in G^+$.

Следующая теорема о представлении рассматриваемых пространств типа Никольского–Бесова доказана в [6].

Теорема 1.*Для любых* $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ *и* $\mu \in G^+$, *имеют место следующие представления (с обычными видоизменениями при* $q = \infty$) *:*

a)

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_B^{(1)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p(R^n)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

b)

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_B^{(2)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{2^{k/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} Ff \right\|_{L_p(R^n)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Определение 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$. Положим

$$F_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_F = \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| F^{-1} \left\{ \frac{2^{k/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} Ff \right\} \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(R^n)} < \infty \right\}.$$

§3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАР ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА С РАЗНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

В [9] доказано, что пара $\{H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)\}$ "квазилинеаризуема" с помощью операторов

$$V_0(t) = F^{-1}\left\{\frac{t\nu}{\mu+t\nu}F\right\}, \quad V_1(t) = F^{-1}\left\{\frac{\mu}{\mu+t\nu}F\right\}. \tag{3}$$

Следовательно имеет место следующая двусторонняя оценка для K-функционала Петре :

$$K\left(t, f; H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)\right) \sim \left\|F^{-1}\left\{\frac{t\mu\nu}{\mu+t\nu}Ff\right\}\right\|_{L_p} \tag{4}$$

(см. Лемму 1.8.4 в [7]). Используя (3), можно оценить K-функционал Петре также для пары $\{B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)\}$ пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 2. *Если $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$ и $1 \le q \le \infty$, то интерполяционная пара $\{B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)\}$ пространств типа Никольского-Бесова квазилинеаризуема с помощью операторов*

$$W_0(t)f = F^{-1}\left\{\frac{t^2\nu^2}{\mu^2+t^2\nu^2}Ff\right\}, \quad W_1(t)f = F^{-1}\left\{\frac{\mu^2}{\mu^2+t^2\nu^2}Ff\right\},$$

где $f \in B_{p,q}^1(\mu) + B_{p,q}^1(\nu)$, $t > 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $W_0(t) + W_1(t) = E$ $(t > 0)$ и

$$\frac{t^2\nu^2}{\mu^2+t^2\nu^2} \in M_p, \quad \frac{\mu^2}{\mu^2+t^2\nu^2} \in M_p \quad (t > 0),$$

где нормы этих функций не зависят от t (см. [10]). Следовательно,

$$\|W_0(t)f\|_{H_p^2(\mu)} = \left\|F^{-1}\frac{t^2(\mu\nu)^2}{\mu^2+t^2\nu^2}Ff\right\|_{L_p} \le ct^2\|f\|_{H_p^2(\nu)},$$

$$\|W_1(t)f\|_{H_p^2(\nu)} = \left\|F^{-1}\frac{(\mu\nu)^2}{\mu^2+t^2\nu^2}Ff\right\|_{L_p} \le \frac{c}{t^2}\|f\|_{H_p^2(\mu)},$$

$$\|W_i(t)f\|_{L_p} \le c\|f\|_{L_p} \quad (i = 0, 1),$$

т.е.

$$W_0(t) : \begin{cases} H_p^2(\nu) \xrightarrow{ct^2} H_p^2(\mu), \\ L_p \xrightarrow{c} L_p \end{cases}, \quad W_1(t) : \begin{cases} H_p^2(\mu) \xrightarrow{c/t^2} H_p^2(\nu), \\ L_p \longrightarrow L_p. \end{cases}$$

Тогда, используя интерполяционное свойство "вещественного" метода, получаем

$$W_0(t) : \left(H_p^2(\nu), L_p\right)_{1/2,q} \xrightarrow{ct} \left(H_p^2(\mu), L_p\right)_{1/2,q},$$

$$W_1(t) : \left(H_p^2(\mu), L_p\right)_{1/2,q} \xrightarrow{c/t} \left(H_p^2(\nu), L_p\right)_{1/2,q}, \tag{5}$$

где интерполяционные пространства определяются с помощью (2). Тогда

$$W_0(t) : B^1_{p,q}(\nu) \xrightarrow{ct} B^1_{p,q}(\mu), \quad W_1(t) : B^1_{p,q}(\mu) \xrightarrow{c/t} B^1_{p,q}(\nu).$$

Аналогично получаем

$$W_j(t) : B^1_{p,q}(\nu) \xrightarrow{c} B^1_{p,q}(\nu), \quad W_j(t) : B^1_{p,q}(\mu) \xrightarrow{c} B^1_{p,q}(\mu) \qquad (j = 0, 1).$$

Теорема 2 доказана.

Непосредственным следствием свойства "квазилинеаризуемости" является двусторонняя оценка K-функционала Петре (см. [7], [8]).

Следствие. Если $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$ и $1 \le q \le \infty$, то для $f \in B^1_{p,q}(\mu) + B^1_{p,q}(\nu)$ и $t > 0$ имеем

$$K\left(t, f; B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right) \sim \left\| F^{-1} \frac{t^2\nu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\|_{B^1_{p,q}(\mu)} + t \left\| F^{-1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\|_{B^1_{p,q}(\nu)}. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ и $0 < \vartheta < 1$. Тогда*

$$\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|^*_{(B^1_{p,q}(\mu), B^*_{p,q}(\nu))_{\vartheta,q}} < \infty \right\},$$

где

$$\|f\|^*_{(B^1_{p,q}(\mu), B^*_{p,q}(\nu))_{\vartheta,q}} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu\nu}{\mu^2 + t\nu^2} \mu^{1-\vartheta} \nu^\vartheta F f \right\|^q_{B^0_{p,q}(\mu) \cap B^0_{p,q}(\nu)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Из (6) и определения метода "вещественной" интерполяции [7], [8], имеем

$$\|f\|^q_{\left(B^1_{p,q}(\mu), B^1_{p,q}(\nu)\right)_{\vartheta,q}} \sim A_0 + A_1, \tag{7}$$

где

$$A_0 = \int_0^\infty t^{-\vartheta q} \left\| F^{-1} \frac{t^2\nu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\|^q_{B^1_{p,q}(\mu)} \frac{dt}{t},$$

$$A_1 = \int_0^\infty t^{(1-\vartheta)q} \left\| F^{-1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + t^2\nu^2} F f \right\|^q_{B^1_{p,q}(\nu)} \frac{dt}{t}.$$

Заменой переменной $u = t^2$ и применением Теоремы 1, получаем

$$A_0 \sim \int_0^\infty u^{-\vartheta q/2} \left\| F^{-1} \frac{u\nu^2}{\mu^2 + u\nu^2} F f \right\|^q_{B^1_{p,q}(\mu)} \frac{du}{u} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-\vartheta q/2} \left\| F^{-1} \frac{u\nu^2\mu^2}{\mu^2+u\nu^2} \frac{t^{1/2}}{\mu^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u}\frac{dt}{t}. \tag{8}$$

Далее, с помощью (4) убеждаемся, что

$$\left\| F^{-1} \frac{u\nu^2\mu^2}{\mu^2+u\nu^2} \frac{t^{1/2}}{\mu^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \quad \text{и} \quad K\left(u, F^{-1}\frac{t^{1/2}}{\mu^2+t}Ff; H_p^2(\mu), H_p^2(\nu)\right)$$

эквивалентные величины. Поэтому, из Теорем 1 и 2 работы [5] вытекает, что формула (8) принимает вид

$$A_0 \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\frac{t^{1/2}}{\mu^2+t}Ff \right\|_{\left(H_p^2(\mu),H_p^2(\nu)\right)_{\vartheta/2,q}}^q \frac{dt}{t} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu/\nu)}^q \frac{dt}{t}. \tag{9}$$

Аналогично, для A_1 получим

$$A_1 \sim \int_0^\infty u^{-\vartheta q/2} \left\| F^{-1}\frac{u^{1/2}\mu^2\nu}{\mu^2+u\nu^2}Ff \right\|_{B_{p,q}^s(\nu)}^q \frac{du}{u} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-(1+\vartheta)q/2} \left\| F^{-1} \frac{u\nu^2\mu^2}{\mu^2+u\nu^2} \frac{t^{1/2}}{\nu^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{du}{u}\frac{dt}{t} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\frac{t^{1/2}}{\nu^2+t}Ff \right\|_{\left(H_p^2(\mu),H_p^2(\nu)\right)_{(1+\vartheta)/2,q}}^q \frac{dt}{t} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\frac{t^{1/2}\nu}{\mu^2+t}\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu/\nu)}^q \frac{dt}{t}. \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) получаем

$$\|f\|_{\left(B_{p,q}^1(\mu),B_{p,q}^s(\nu)\right)_{\vartheta,q}}^q \sim$$

$$\sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left(\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}+\frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2+t}\right)\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu/\nu)}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \sim$$

$$\sim \|f\|_{\left(B_{p,q}^1(\mu),B_{p,q}^s(\nu)\right)_{\vartheta,q}}^*.$$

Теорема 3 доказана.

§4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАР ПРОСТРАНСТВ ТИПА ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ

Начнем рассмотрения со следующей теоремы вложения, аналог которой в случае классических пространств хорошо известен (см. [11]).

Теорема 4. *Если* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ *и* $\mu \in G^+$, *то*

$$B^s_{p,\min(p,q)}(\mu) \subset F^s_{p,q}(\mu) \subset B^s_{p,\max(p,q)}(\mu). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $f \in B^s_{p,q}(\mu)$. Обозначим $G_k = F^{-1}\left\{\frac{2^{k/2}\mu^{1+s}}{\mu^2+2^k} Ff\right\}$. Тогда из утверждения (b) Теоремы 1 при $1 < q \le p < \infty$ имеем

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mu)} \sim \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G_k|^q\right\|^{1/q}_{L_{p/q}} \le \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G_k\|^q_{L_{p/q}}\right)^{1/q} \sim \|f\|_{B^s_{p,q}(\mu)}.$$

Таким образом, левое вложение в (11) доказано. Аналогично, меняя очередность операций интегрирования и суммирования, доказываем правое вложение в (11). Теорема 4 доказана.

Теорема 4 позволяет доказать интерполяционные формулы для пространств типа Лизоркина-Трибеля (интерполяционные утверждения для пространств типа Никольского-Бесова приведены в [6]).

Теорема 5. **(a)** *Если* $1 < p < \infty$, $1 \le q, q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < +\infty$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ and $\mu \in G^+$, *тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\vartheta,q}.$$

(b) *Если* $1 < p < \infty$, $1 < q_0, q_1 < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < +\infty$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ *и* $\mu \in G^+$, *тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(F^{s_0}_{p,q_0}(\mu), F^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\vartheta,q}.$$

(c) *Если* $1 < p < \infty$, $1 \le q, q_1 \le \infty$, $1 < q_0 < \infty$, $0 < \vartheta < 1$, $-\infty < s_0 \ne s_1 < +\infty$, $s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1$ *и* $\mu \in G^+$, *тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(F^{s_0}_{p,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\vartheta,q}.$$

Доказательство. Утверждение (a) доказано в [6]. Остальные утверждения теоремы докажем с помощью вложений Теоремы 4.

Пусть $r_i = \max\{p, q_i\}$ и $m_i = \min\{p, q_i\}$ $(i = 0, 1)$. Тогда из утверждения (a) теоремы 5 и правого вложения в (11) имеем

$$\left(F^{s_0}_{p,q_0}(\mu), F^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q} \subset \left(B^{s_0}_{p,r_0}(\mu), B^{s_1}_{p,r_1}(\mu)\right)_{\theta,q} = B^{s}_{p,q}(\mu).$$

С другой стороны, используя левое вложение из (11) получаем

$$\left(F^{s_0}_{p,q_0}(\mu), F^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q} \supset \left(B^{s_0}_{p,m_0}(\mu), B^{s_1}_{p,m_1}(\mu)\right)_{\theta,q} = B^{s}_{p,q}(\mu).$$

Таким образом, утверждение (b) доказано. Утверждение (c) доказывается аналогично.

Abstract. Some general Lizorkin–Triebel type spaces generated by positive, infinitely differentiable functions of polynomial growth are defined. A two-sided estimate of the Peetre K-functional for pairs of Nikolskii–Besov type spaces with different anisotropies is derived. Some "real method" interpolation formulas are proved both in Lizorkin–Triebel and Nikolskii–Besov type spaces in question.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщённых функций и теоремы вложения", УМН, том 20, № 1, стр 3 – 74, 1965.
2. H. Triebel, "General function spaces", Analysis Math., vol. 3, pp. 221 – 249, 1965.
3. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
4. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", ДАН Арм.ССР, том 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
5. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 36, № 5, стр. 14 – 22, 2001.
6. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и вложения обобщённых пространствах типа Никольского-Бесова", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 38, № 6, стр. 49 – 62, 2003.
7. Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
8. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва, 1980.
9. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяционных свойствах некоторых квазилинеаризуемых пар", Мат. сборник, том 182, № 2, стр. 73 – 80, 1998.
10. П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье", Докл. АН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.
11. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.

Поступила 29 марта 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 24-34

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН Армении
E-mail : AniBarseghyan@mail.ru

Резюме. Работа посвящена исследованию интегрального уравнения, которое представляет собой интерес в математической физике :

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r K_0(x+t)f(t)dt,$$

где ядерные функции K и K_0 представимы в виде суперпозиций экспонент. Факторизационный метод совместно с уравнением В. Амбарцумяна, ассоциированный ядром K, сводит задачу к простым алгебраическим соотношениям.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральные уравнения свертки на конечных промежутках представляют значительный теоретический и прикладной интерес. Простейшим из них является уравнение вида

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,r], \tag{1.1}$$

где $K \in L_1(-r,r)$.

Методам решения различных классов уравнений (1.1) посвящено множество исследований, см. [1] – [7]. Недавно Н. Б. Енгибаряном ([10] – [13]) найден новый факторизационный метод, который в ряде случаев, приводит к эффективному численно-аналитическому решению уравнения (1.1). В настоящей работе этот

Работа выполнена при поддержке гранта А-823 МНТЦ.

метод обобщается на уравнения с суммарно-разностными ядрами, т.е. на уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r K_0(x+t)f(t)dt, \tag{1.2}$$

где $K \in L_1(-r,r)$ и $K_0 \in L_1(0,2r)$.

Основное внимание будет уделено случаю, когда ядерные функции K и K_0 представлены через экспоненты, в виде интегралов Стилтьеса :

$$K(\pm x) = \int_a^b e^{-xs}\,d\sigma_\pm(s), \quad x > 0, \quad 0 \le a < b \le \infty, \tag{1.3}$$

$$K_0(x) = \int_a^b e^{-xs}\,d\sigma_0(s). \tag{1.4}$$

Скалярными и векторными уравнениями (1.2) – (1.4) описывается ряд физических процессов, происходящих в однородном плоском слое толщины $r \le \infty$ с отражающей границей. В теории переноса излучения такие задачи возникают при расчёте ядерных реакторов, поля излучения в планетных атмосферах, в водных бассейнах и др. (см. [7]). Задачи Крамерса и Куэтта (см. [8]) в кинетической теории газов также сводятся к уравнению (1.2). В указанных задачах, ядро K_0 учитывает отражательную способность границы $x = 0$ среды.

Предлагаемый подход имеет некоторое сходство с работой [9], в которой применены результаты [5] к уравнению (1.2), (1.3) с симметрическим ядром.

§2. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (1.2)

2.1. Продолжение решений (1.2) на $(0,\infty)$. Пусть E_r, $r < \infty$, – одно из банаховых пространств $L_p(0,r)$, $1 \le p \le \infty$, или $C[0,r]$, и пусть E^+ – одно из пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$, или $C_0[0,\infty)$. Будем предполагать, что в (1.2) ядерные функции удовлетворяют условиям $K \in L_1(-\infty,\infty)$ и $K_0 \in L_1(0,\infty)$. Кроме того, допустим, что $g(x) = 0$, $x > r$.

Обозначив характеристические функции интервалов $[0,r]$ и (r,∞) соответственно через λ и $\bar\lambda$, представим уравнение (1.2) в виде

$$S(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)S(t)\,dt + \int_0^\infty K_0(x+t)\lambda(t)S(t)dt, \tag{2.1}$$

Отметим, что уравнение (2.1) эквивалентно уравнению (1.2) в следующем смысле : если уравнение (1.2) имеет решение $f \in E_r$ при некотором $g \in E_r$, то её правая часть имеет смысл не только при $x \in [0,r]$, но и при $x > r$. Продолжение S этого решения на $(0,\infty)$ является решением уравнения (2.1), причём $S \in E_+$. С другой стороны, если уравнение (2.1) имеет решение $S \in E_+$ при некотором $g \in E_+$, то его сужение $f = S\,|_{[0,r]} \in E_r$ удовлетворяет уравнению (1.2).

2.2. Операторная форма уравнений (2.1) и (1.2). Через Ω обозначим класс интегральных операторов Винера-Хопфа

$$(\hat{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad K \in L_1(-\infty,\infty).$$

Далее, через Ω_0 обозначается класс операторов ганкелева типа с суммарными ядрами :

$$(\hat{K}_0 f)(x) = \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)dt, \quad K_0 \in L_1(0,\infty).$$

В любом из пространств E_+ имеют место следующие оценки :

$$\|\hat{K}\|_{E_+} \le \mu = \int_{-\infty}^\infty |K(x)|dx, \quad \|\hat{K}_0\|_{E_+} \le \int_0^\infty |K_0(x)|dx.$$

Пространство Ω является прямой суммой алгебр Ω^- и Ω^+ верхних и нижних операторов свертки типа Вольтерра, т.е. если $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$, то

$$(\hat{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt, \quad V_+ \in L_1(0,\infty), \tag{2.2}$$

$$(\hat{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt, \quad V_- \in L_1(0,\infty), \tag{2.3}$$

Если операторы $I - \hat{V}_\pm$ (где I - единичный оператор) обратимы в E_+, то

$$(I-\hat{V}_\pm)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm, \tag{2.4}$$

где $\hat{\Phi}_\pm \in \Omega^\pm$, т.е.

$$(\hat{\Phi}_+ f)(x) = \int_0^x \Phi_+(x-t)f(t)\,dt, \quad \Phi_+ \in L_1(0,\infty), \tag{2.5}$$

$$(\hat{\Phi}_- f)(x) = \int_x^\infty \Phi_-(t-x)f(t)\,dt, \quad \Phi_- \in L_1(0,\infty). \tag{2.6}$$

Резольвентные функции $\Phi_\pm$ удовлетворяют уравнению восстановления

$$\Phi_\pm(x) = V_\pm(x) + \int_0^x V_\pm(x-t)\Phi_\pm(t)\,dt, \tag{2.7}$$

Пусть Λ и $\bar{\Lambda}$ суть операторы умножения на характеристические функции λ и $\bar{\lambda}$, соответственно. Тогда $\Lambda + \bar{\Lambda} = I$. Кроме того, уравнение (2.1) можно записать в операторной форме

$$(I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda)S = g, \tag{2.8}$$

где $\hat{K} \in \Omega$ и $\hat{K}_0 \in \Omega_0$, а уравнение (1.2) имеет операторный вид

$$(I - \hat{K}_r - \hat{K}_r^0)f = g, \tag{2.9}$$

где

$$(\hat{K}_r f)(x) = \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt, \quad K \in L_1(-r,r),$$

$$(\hat{K}_r^0 f)(x) = \int_0^r K_0(x+t)f(t)\,dt, \quad K_0 \in L_1(0,2r).$$

Из эквивалентности уравнений (2.1) и (1.2) в отмеченном выше смысле следует :

Лемма 2.1. *Оператор $I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda$ обратим в E_+ тогда и только тогда, когда оператор $I - \hat{K}_r - \hat{K}_r^0$ обратим в E_r.*

2.3. Факторизация оператора $I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda$. Перейдем к построению одной факторизации для оператора $I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda$. Воспользуемся следующими правилами умножения операторов : если $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ и $\hat{V}_0 \in \Omega_0$, то $\hat{U}_0 = \hat{V}_-\hat{V}_0 \in \Omega_0$ и $\hat{W}_0 = \hat{V}_0\hat{V}_+ \in \Omega_0$ (см. [10]). Отметим, что ядра операторов $\hat{U}_0$ и $\hat{W}_0$ определяются по формулам

$$U_0(x) = \int_0^\infty V_-(s)V_0(s+x)\,ds, \tag{2.10}$$

$$W_0(x) = \int_0^\infty V_0(s+x)V_+(s)\,ds. \tag{2.11}$$

Теперь предположим, что существует факторизация Винера–Хопфа :

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+), \tag{2.12}$$

где $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ суть операторы вида (2.2), (2.3), причем $I - \hat{V}_-$ обратим. Тогда, используя факторизацию (2.12), после некоторых преобразований будем иметь

$$I-\hat{K}\Lambda-\hat{K}_0\Lambda = I-\hat{K}+\hat{K}\bar{\Lambda}-\hat{K}_0\Lambda = (I-\hat{V}_-)[I-\hat{V}_+ +(I-\hat{V}_-)^{-1}\hat{K}\bar{\Lambda}-(I-\hat{V}_-)^{-1}\hat{K}_0\Lambda]. \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.4) получаем

$$(I - \hat{V}_-)^{-1}\hat{K} = \hat{V}_+ + \hat{\Phi}_-,$$

поэтому, используя (2.13), приходим к разложению

$$I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda = (I - \hat{V}_-)[I - \hat{V}_+\Lambda + \hat{\Phi}_-\bar{\Lambda} - \hat{T}_0\Lambda], \tag{2.14}$$

где

$$\hat{T}_0 = (I - \hat{V}_-)^{-1}\hat{K}_0 = (I + \hat{\Phi}_-)\hat{K}_0 \in \Omega_0,$$

$$T_0(x) = K_0(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t)K_0(x+t)\,dt. \tag{2.15}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть оператор $I - \hat{K}$ допускает факторизацию (2.12), причем оператор $I - \hat{V}_-$ обратим. Тогда имеет место факторизация (2.14), где $\hat{T}_0 \in \Omega_0$, $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ и имеет место формула (2.15).*

§3. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ (2.14)

3.1. Сведение (2.8) к системе интегральных уравнений. В силу обратимости оператора $I - \hat{V}_-$, факторизация (2.14) сводит уравнение (2.1) к виду

$$(I - \hat{V}_+\Lambda + \hat{\Phi}_-\bar{\Lambda} - \hat{T}_0\Lambda)S = g_1, \tag{3.1}$$

где

$$g_1 = (I - \hat{V}_-)^{-1}g = (I + \hat{\Phi}_-)g \in E^+$$

и $g_1(x) = 0$ при $x > r$, а

$$g_1(x) = g(x) + \int_x^r \Phi_-(t-x)g(t)\,dt \qquad 0 \leq x \leq r.$$

Перепишем уравнение (3.1) в раскрытом виде

$$S(x) = g_1(x) + \int_0^x V_+(x-t)\lambda(t)S(t)\,dt -$$

$$-\int_x^\infty \Phi_-(t-x)\bar{\lambda}(t)S(t)\,dt + \int_0^\infty T_0(x+t)\lambda(t)S(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Введём обозначение $F(x) = S(x)$, $x > r$, и заметим, что при $x \leq r$ из (3.1) следует

$$f(x) = g_1(x) + \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt - \int_r^\infty \Phi_-(t-x)F(t)\,dt + \int_0^r T_0(x+t)f(t)\,dt, \tag{3.3}$$

а при $x > r$

$$F(x) = \int_0^r V_+(x-t)f(t)\,dt - \int_x^\infty \Phi_-(t-x)F(t)\,dt + \int_0^r T_0(x+t)f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

В системе интегральных уравнений (3.3), (3.4) неизвестными функциями являются f и F.

Лемма 3.1. *Система (3.3), (3.4) эквивалентна уравнению (3.1), следовательно, и уравнению (1.2).*

Между функциями f и F имеется другое соотношение, более простое чем (3.4) :

$$F(x) = \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r K_0(x+t)f(t)\,dt, \quad x > r \tag{3.5}$$

которое прямо вытекает из исходного уравнения (1.2).

Лемма 3.2. *Системы (3.3), (3.4) и (3.3), (3.5) эквивалентны.*

Доказательство. Решая уравнение (3.4) относительно F, получаем

$$F(x) = \int_0^r V_+(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r T_0(x+t)f(t)\,dt - \int_x^\infty V_-(t-x)dt \times$$
$$\times \int_0^r V_+(t-\tau)f(\tau)\,d\tau - \int_x^\infty V_-(t-x)\,dt \int_0^r T_0(t+\tau)f(\tau)\,d\tau. \qquad (3.6)$$

Используя нелинейные уравнения факторизации Н. Енгибаряна (НУФ) (см. [10], [11]), заключаем, что факторизация (2.12) эквивалентна следующей системе нелинейных интегральных уравнений

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t)\,dt, \qquad (3.7)$$

называемое НУФ для задачи (2.12).

После замены порядка интегрирования в (3.6), и учитывая первое из уравнений (3.7) и второе из уравнений (2.7), приходим к уравнению (3.5). Доказательство завершено.

Таким образом, решение исходного уравнения (1.2) сведено к решению системы (3.3), (3.5).

§4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (3.3), (3.5) В СЛУЧАЕ ВПОЛНЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ $K(\pm x)$ И $K_0(x)$

4.1. Некоторые вспомогательные функции. В этом параграфе будем рассматривать систему (3.3), (3.5) в частном случае, когда функции $K(\pm x)$ и $K_0(x)$ представлены в виде суперпозиций экспонент (1.3) и (1.4), где $\sigma_\pm$ и σ_0 - некоторые неубывающие функции, удовлетворяющие условиям

$$\mu = \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma_+(s) + \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma_-(s) \le 1, \qquad (4.1)$$

$$\mu_0 = \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma_0(s) < +\infty. \qquad (4.2)$$

Рассматриваемый случай представляет основной интерес в физической кинетике. Каждое из следующих двух условий обеспечивает обратимость оператора $I-\hat{V}_-$: $\mu < 1$ или $\mu = 1$ и $\nu_1 > 0$. Через ν_1 обозначим первый момент ядра K :

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx = \nu_1^+ - \nu_1^-, \qquad (4.3)$$

где $\nu_1^\pm = \int_a^b s^{-2}\,d\sigma_\pm(s)$, а интеграл для ν_1^- считается сходящимся.

В случае ядра (1.3), из (4.1) следует, что решение нелинейного уравнения факторизации (3.7) имеет вид

$$V_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi_{\pm}(s) d\sigma_{\pm}(s), \tag{4.4}$$

где $\varphi_{\pm}$ является каноническим решением уравнения В. Амбарцумяна (см. [11], [12]) :

$$\varphi_{\pm}(s) = 1 + \varphi_{\pm}(s) \int_a^b \frac{1}{s+p} \varphi_{\mp}(p)\, d\sigma_{\mp}(p). \tag{4.5}$$

Каноническим решением называется предел простых итераций с нулевым начальным приближением.

Из формул (4.4) и результатов работы [13] следует, что резольвентные функции $\Phi_{\pm}$, полученные из уравнений (2.7), допускают представление

$$\Phi_{\pm}(x) = \int_0^b e^{-xp} d\omega_{\pm}(p), \tag{4.6}$$

где $\omega_{\pm}$ – неубывающие функции и $\int_0^b p^{-1} d\omega_{\pm}(p) < +\infty$.

4.2. Преобразование системы (3.3), (3.5). Пусть

$$\alpha(s) = \int_0^r e^{-(r-t)s} f(t)\, dt, \quad \beta(s) = \int_r^{\infty} e^{-(t-r)s} F(t)\, dt, \quad \gamma(s) = \int_0^r e^{-ts} f(t)\, dt. \tag{4.7}$$

Нашей ближайшей целью является преобразование системы (3.3), (3.5) в систему относительно α, β, γ.

Подставляя выражения (4.6), (2.15), (1.3) и (1.4) функций Φ_-, T_0, K и K_0 в (3.3) и (3.5), получим

$$f(x) = g_1(x) + \int_0^x V_+(x-t) f(t)\, dt - \int_0^b e^{-(r-x)p} \beta(p)\, d\omega_-(p) +$$
$$+ \int_a^b e^{-xs} \left[1 + \int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{s+p} \right] \gamma(s)\, d\sigma_0(s), \tag{4.8}$$

$$F(x) = \int_a^b e^{-(x-r)s} \alpha(s)\, d\sigma_+(s) + \int_a^b e^{-xs} \gamma(s)\, d\sigma_0(s). \tag{4.9}$$

Тогда, решая уравнение (4.8) относительно f, получаем

$$f(x) = g_2(x) - \int_0^b U_1(x,p) \beta(p)\, d\omega_-(p) + \int_a^b U_2(x,s) \left[1 + \int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{s+p} \right] \gamma(s)\, d\sigma_0(s), \tag{4.10}$$

где $g_2(x) = g_1(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t)g_1(t)dt$ и

$$U_1(x,p) = e^{-(r-x)p}\left[1 + \int_0^x \Phi_+(t)e^{-tp}\,dt\right], \tag{4.11}$$

$$U_2(x,p) = e^{-xp}\left[1 + \int_0^x \Phi_+(t)e^{tp}\,dt\right]. \tag{4.12}$$

Умножая обе части уравнения (4.9) на $e^{-(x-r)s}$ и интегрируя по x от r до ∞, получаем следующее соотношение между функциями α, β и γ :

$$\beta(p) = \int_a^b \frac{\alpha(s)}{s+p}d\sigma_+(s) + \int_a^b \frac{e^{-rs}\gamma(s)}{s+p}d\sigma_0(s). \tag{4.13}$$

Умножая обе части уравнения (4.10) на $e^{-(r-x)s}$ и интегрируя по x от 0 до r, получаем второе соотношение между функциями α, β и γ :

$$\alpha(s) = \alpha^0(s) - \int_0^b W_1(s,p)\beta(p)\,d\omega_-(p) + \int_a^b W_2(s,q)\left[1 + \int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{p+q}\right]\gamma(q)\,d\sigma_0(q), \tag{4.14}$$

где $\alpha^0(s) = \int_0^r e^{-(r-t)s}g_2(t)\,dt$ и

$$W_i(s,\xi) = \int_0^r e^{-(r-t)s}U_i(t,\xi)dt, \quad i = 1,2. \tag{4.15}$$

Теперь, умножая обе части уравнения (4.10) на e^{-xs} и интегрируя по x от 0 до r, получаем еще одно соотношение между функциями β и γ :

$$\gamma(s) = \gamma^0(s) - \int_0^b W_3(s,p)\beta(p)\,d\omega_-(p) + \int_a^b W_4(s,q)\left[1 + \int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{p+q}\right]\gamma(q)\,d\sigma_0(q), \tag{4.16}$$

где $\gamma^0(s) = \int_0^r e^{-ts}g_2(t)dt$ и

$$W_i(s,\xi) = \int_0^r e^{-ts}U_{i-2}(t,\xi)dt, \quad i = 3,4. \tag{4.17}$$

Из (4.11) и (4.12) получаем

$$W_1(s,p) = \frac{1}{s+p}\left[A(p) - e^{-rp}B(s)\right], \quad W_2(s,q) = \frac{1}{s-q}\left[B(q) - B(s)\right], \tag{4.18}$$

$$W_3(s,p) = \frac{1}{s-p}\left[e^{-rp}A(s) - e^{-rs}A(p)\right], \quad W_4(s,q) = \frac{1}{s+q}\left[A(s) - e^{-rs}B(q)\right], \tag{4.19}$$

где

$$A(p) = 1 + \int_0^r \Phi_+(t)e^{-tp}\,dt, \quad B(p) = e^{-rp}\left(1 + \int_0^r \Phi_+(t)e^{tp}\,dt\right).$$

Итак, получили замкнутую систему интегральных уравнений относительно α, β и γ. Все эти функции зависят от одной переменной. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Функции α, β, $\gamma \in C_0[0, \infty)$ определяются единственным образом системой (4.13), (4.14), (4.16). Решение уравнения (1.2), (1.3), (1.4) определяется по формуле (4.10).*

§5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

В этом параграфе вкратце опишем схему приближенного решения уравнения (1.2), (1.3), основанную на построениях предыдущих параграфов.

При численно-аналитическом решении уравнения (1.1) с ядром (1.3) применяется метод дискретных ординат (МДО) Чандрасекара : функции $\sigma_{\pm}(s)$ в представлениях (1.3) приближенно заменяются кусочно-постоянными функциями

$$\sigma_{\pm}(s) \approx \widetilde{\sigma}_{\pm}(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\pm} \theta(s - s_k), \tag{5.1}$$

где $a_k > 0$, $0 < s_1 < \cdots < s_n$, а θ – функция Хевисайда единичного скачка.

Прямое применение редукции (5.1) сводит исходное уравнение (1.2) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$. Задача Коши для этой системы плохо поставлена (ее решение сводится к плохо обусловленным алгебраическим системам и др.). Кроме того, эта система дифференциальных уравнений обладает экспоненциально возрастающими и убывающими решениями, что сильно затрудняет или делает практически невозможным решение задачи классическими методами при больших значениях r.

Одним из основных достоинств построения факторизации (2.12) и резольвентных функций $\Phi_{\pm}$ методом уравнения Амбарцумяна является "устойчивая алгебраизация" задачи. Согласно (5.1), уравнение Амбарцумяна обращается в конечную, нелинейную алгебраическую систему с простой и устойчивой итерацией. Для полученного уравнения, представление (4.6) принимает вид

$$\Phi_{\pm}(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{\pm} \exp\left(-p_k^{\pm} x\right), \quad 0 < p_1^{\pm} < s_1 < \cdots < p_n^{\pm} < s_n,$$

и вычисление $p_k^{\pm}$ и $b_k^{\pm}$ сводится к некоторым алгебраическим процедурам.

Ниже покажем, что линейные уравнения, полученные в предыдущем параграфе, допускают аналогичную алгебраизацию.

Решение системы (4.13), (4.14), (4.16) основано на (5.1) и на замене ядра K_0 дискретной суммой

$$K_0(x) \approx \sum_{m=1}^{n} a_k^0 \exp\left(-s_k^0 x\right)$$

сводящая систему (4.13), (4.14), (4.16) к линейной алгебраической системе, которая легко решается итерациями. Например, уравнение (4.16) обращается в следующее :

$$\gamma_k = \gamma_k^0 - \sum_{m=1}^{n} h_{km}\beta_m + \sum_{m=1}^{n} h_{km}^0\gamma_m,$$

где

$$\gamma_k^0 = \gamma^0(s_k^0), \quad \gamma_k = \gamma(s_k^0), \quad \beta_m = \beta(p_m^-),$$

$$h_{km} = W_3(s_k^0, p_m^-)b_m^-, \quad h_{km}^0 = W_4(s_k^0, s_m^0)a_m^0 \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{s_m^0 + p_j^-} b_j^-\right].$$

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за руководство работой и профессору А. Х. Хачатряну за полезные обсуждения.

Abstract. The paper is devoted to investigation of the integral equation that is of interest in mathematical physics :

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r K_0(x+t)f(t)dt,$$

where the kernel functions K and K_0 are represented as superpositions of exponentials. A factorization method in conjunction with V. Ambartsumian's equation associated with the kernel K reduce the problem to simple algebraic relations.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные Труды, том 1, Ереван, 1960 [Английский перевод : A Life in Astrophysics, Selected works by V. A. Ambartsumian, Allerton Press, New York, 1998].
2. С. Чандрасекар, Перенос Лучистой Энергии, ИЛ, Москва, 1953.
3. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в Свертках и Проекционные Методы их Решения, Наука, Москва, 1971.
4. Л. А. Сахнович, "Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке", УМН, том 35, № 4, стр. 69 – 129, 1980.
5. J. Casti, R. Kalaba, Embedding Methods in Applied Mathematics, Addison Wesley, 1973.
6. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "Об одном интегральном уравнении с разностным ядром", Мат. Заметки, том 19, № 6, стр. 927 – 932, 1976.
7. В. В. Соболев, Рассеяние Света в Атмосферах Планет, Наука, Москва, 1972.
8. C. Cherchignani, Theory and Application of the Boltzmann Equation, Scottish Acad. Press, Edinburgh, 1975.
9. А. Х. Хачатрян, А. Н. Афян, "Об аналитическом и численном решении задач переноса излучения при наличии отражающей поверхности", жур. Выч. Мат. и Мат. Физики, том 418, стр. 1217 – 1228, 2001.

10. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифф. Уравнения, том 26, № 8, стр. 1442 - 1452, 1990.
11. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами", Мат. сборник, том 97(139), № 1(5), стр. 35 - 58, 1975.
12. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, том 22, "Математический Анализ", стр. 175 - 242, 1984.
13. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, "Об одном классе интегральных уравнений восстановления", Мат. Заметки, том 47, № 6, стр. 23 - 30, 1990.

Поступила 19 марта 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 35-45

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СЕЧЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МАТРИЦЫ

С. Г. Далалян

Ереванский государственный университет

Резюме. Вводится понятие лк-вырождаемости семейства матриц, которое используется в критерии линейной зависимости сечений трёхмерных матриц. Используя этот критерий, доказывается, что система линейных операторов линейно зависима тогда и только тогда, когда значения этих операторов в любой точке линейно зависимы.

Теория многомерных матриц является естественным продолжением теории обычных матриц, [1]–[7]. Например, сохранение свойства полилинейности для обобщённых детерминантов многомерных матриц приводит к детерминантам кубической матрицы размерности p и порядка n с различными сигнатурами ([6], стр. 13). Другое обобщение получается при использовании результанта системы полилинейных форм ([8, 9]).

В теории обычных матриц важную роль играет понятие ранга, основанное на том фундаментальном факте, что максимальное число линейно независимых строк и максимальное число линейно независимых столбцов одинаково. Этот факт не имеет многомерного аналога, как показывает пример кубической матрицы второго порядка, у которой горизонтальные грани линейно зависимы, если, например, $(a', b', c', d') = \gamma(a, b, c, d)$, а лицевые и вертикальные грани линейно независимы, если $ad - bc \neq 0$ (см. Рис. 1).

Для любой кубической трёхмерной матрицы, из линейной зависимости сечений этой матрицы какого-либо одного измерения следует, что произвольная линейная комбинация её сечений каждого из двух других измерений является вырожденной матрицей. Для матриц порядка $2 \times 2 \times 2$ легко проверяется, что обратное утверждение в общем случае также верно : если любая линейная комбинация сечений какого–либо измерения является вырожденной матрицей, а среди сечений другого измерения d есть невырожденное, то сечения измерения d линейно зависимы. Действительно, детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \\ \alpha a' + \beta b' & \alpha c' + \beta d' \end{vmatrix} = (ac' - a'c)\alpha^2 + (ad' + bc' - a'd - b'c)\alpha\beta + (bd' - b'd)\beta^2$$

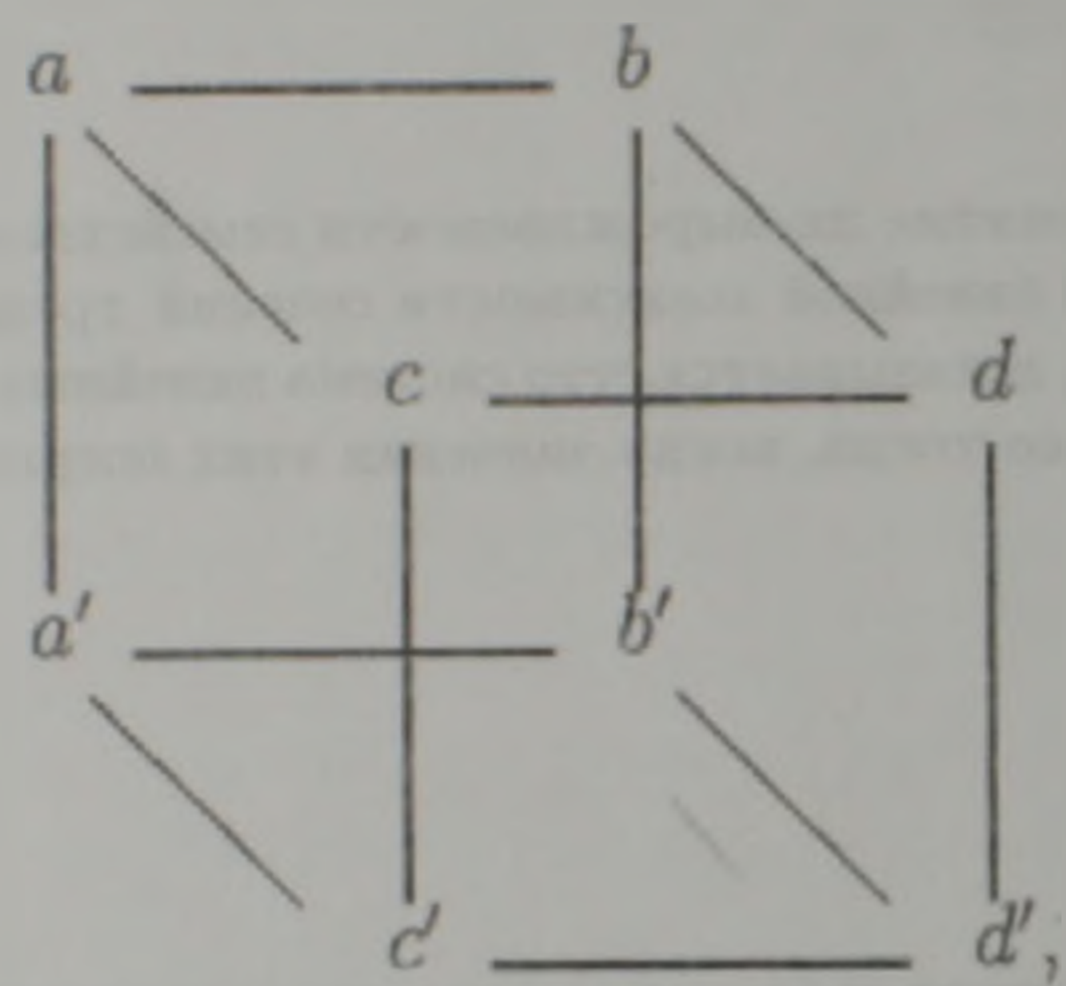

Рис. 1.

равен нулю при всех α и β тогда и только тогда, когда все коэффициенты мономов от α и β равны нулю. Для равенства нулю первого и третьего коэффициентов необходимо и достаточно, чтобы

$$(a', c') = \kappa(a, c) \quad \text{and} \quad (b', d') = \lambda(b, d).$$

Если $ad - bc \neq 0$, то из условия обнуления второго коэффициента

$$(\lambda - \kappa)(ad - bc) = 0,$$

следует, что $\kappa = \lambda$. Таким образом, горизонтальные сечения линейно зависимы. Заметим, что условие $ad - bc \neq 0$ является достаточным, но не необходимым условием справедливости вышеуказанного критерия линейной зависимости сечений одного измерения кубической трехмерной матрицы второго порядка. Например, если

$$(a', b') = \kappa(a, b), \quad (c, d) = \lambda(a, b) \quad \text{and} \quad (c', d') = \kappa\lambda(a, b),$$

то каждая из трех пар сечений одного измерения линейно зависима и любая линейная комбинация сечений одного измерения вырождена.

Главной целью настоящей статьи является обобщение этих фактов на трёхмерные матрицы произвольного порядка (Теорема 2 в §6). В качестве приложения доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – линейные операторы в n-мерном линейном пространстве L и пусть $m \leq n$. Тогда следующие условия эквивалентны :*

(a) *$A_1, \ldots, A_m$ линейно зависимы.*

(b) *$A_1(x), \ldots, A_m(x)$ линейно зависимы при любом $x \in L$.*

т.е. $A_1, \ldots, A_m$ (глобально) линейно зависимы тогда и только тогда, когда они поточечно (локально) линейно зависимы.

1. Пусть дана кубическая трехмерная матрица порядка n над полем $\mathbf{k}$:

$$a = (a_{ijk}), \quad i, j, k \in \overline{1n} = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad a_{ijk} \in \mathbf{k}.$$

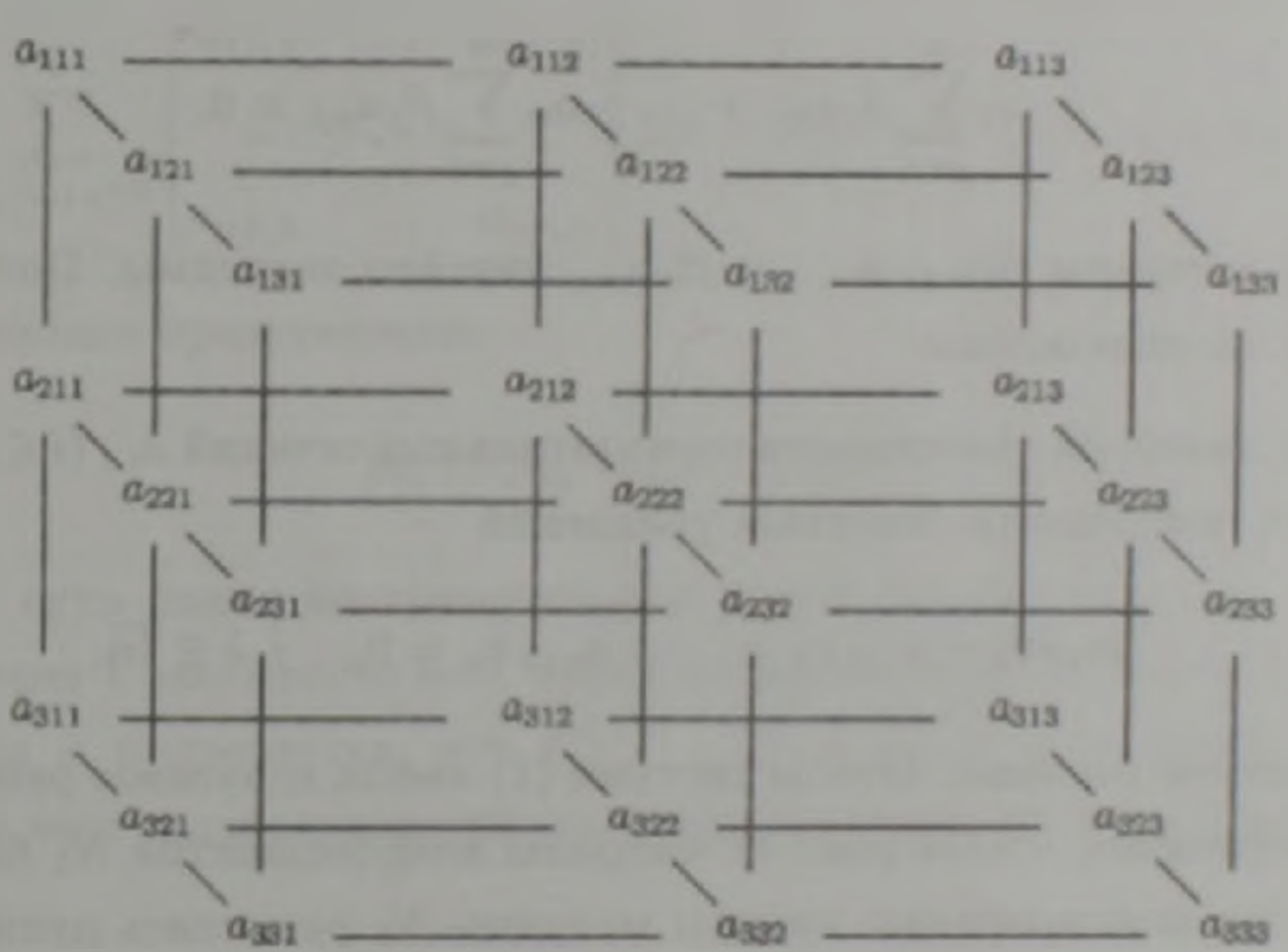

Рис. 2.

Пусть $M_{n^3}(\mathbf{k})$ – множество всех таких матриц. Обозначим через $a_{i..}$ матрицу, образованную элементами a_{ijk}, когда i фиксировано, а j и k изменяются от 1 до n. Будем называть $a_{i..}$ i-тым горизонтальным сечением матрицы a. Через $a_{ij.}$ и $a_{i.k}$ будем обозначать j-тую строку и k-тый столбец матрицы $a_{i..}$. Аналогично определяются j-ое лицевое сечение $a_{.j.}$ и k-ое вертикальное сечение $a_{..k}$ и их соответствующие строки и столбцы.

Определение 1. Семейство квадратных матриц одинакового порядка назовём **лк-вырожденным**, если любая линейная комбинация этих матриц является вырожденной.

Предложение 1. *При линейной зависимости сечений некоторого измерения произвольной матрицы $a \in M_{n^3}(\mathbf{k})$ сечения каждого из двух других измерений образуют лк-вырожденные семейства.*

Доказательство. Пусть, например, сечения $a_{i\ldots}$, $i \in \overline{1n}$ линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 a_{1..} + \ldots + \alpha_n a_{n..} = 0, \quad \exists \quad \alpha_i \neq 0.$$

Тогда

$$\alpha_1 a_{1jk} + \ldots + \alpha_n a_{njk} = 0, \quad \forall j, k \in \overline{1n},$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 a_{1j.} + \ldots + \alpha_n a_{nj.} = 0, \quad \forall j \in \overline{1n}.$$

Поэтому при любых $\beta_1, \ldots, \beta_n$

$$\alpha_1 \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1j.} + \ldots + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{nj.} = 0,$$

т.е. строки матрицы $\beta_1 a_{.1.} + \ldots + \beta_n a_{.n.}$ линейно зависимы. Поэтому сечения $a_{.1.}, \ldots, a_{.n.}$ лк-вырождены.

2. Условие линейной зависимости горизонтальных сечений $a_{i..}$ $(i \in \overline{1n})$ означает, что система однородных линейных уравнений

$$a_{1jk}x_1 + a_{2jk}x_2 + \ldots + a_{njk}x_n = 0, \quad j, k \in \overline{1n}, \tag{1}$$

имеет ненулевое решение. Чтобы система (1) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы коэффициентов N_1 был меньше n, т.е. чтобы все максимальные миноры матрицы N_1 равнялись нулю :

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1k_1} & \ldots & a_{nj_1k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1j_nk_n} & \ldots & a_{nj_nk_n} \end{vmatrix} = 0, \quad \forall j_r, k_r \in \overline{1n}. \tag{2}$$

Полученная система полиномиальных уравнений определяет детерминантное алгебраическое подмногообразие X_1 в $M_{n^3}(\mathbf{k})$. Аналогично, множества всех матриц с линейно зависимыми лицевыми и/или вертикальными сечениями параметризуются точками детерминантных многообразий X_2 и X_3 соответственно.

Обозначим через Y_1, Y_2, Y_3 множества всех матриц $a \in M_{n^3}(\mathbf{k})$ у которых, соответственно, семейства всех горизонтальных, лицевых, вертикальных сечений лк-вырождены. Согласно Предложению 1

$$X_r \subset Y_s, \quad \forall r, s \in \{1,2,3\}, \quad r \neq s.$$

Мы докажем, что справедливы и обратные включения.

3. Лк-вырожденность лицевых сечений $a_{.1.}, \ldots, a_{.n.}$ означает, что

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1j1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{nj1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{njn} \end{vmatrix} = 0, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n.$$

Применяя линейность детерминанта по столбцам, получаем

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1j_11} & \ldots & a_{1j_nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nj_11} & \ldots & a_{nj_nn} \end{vmatrix} \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_n} = 0, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n. \tag{3}$$

Имеем однозначное представление

$$\beta_{j_1} \ldots \beta_{j_n} = \beta_1^{\gamma_1} \ldots \beta_n^{\gamma_n},$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ суть целые неотрицательные числа такие, что $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = n$. Обозначим через Γ множество всех таких последовательностей $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Индукцией по k проверяется, что $C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}$ есть число последовательностей k неотрицательных чисел, сумма которых даёт n. Следовательно, $\# \Gamma = C_{2n-1}^{n}$.
Положим

$$j = (j_1, \ldots, j_n), \quad \nu_s(j) = \#\{r \mid j_r = s\}, \quad \nu(j) = (\nu_1(j), \ldots, \nu_n(j)).$$

После приведения подобных членов в (3) получим

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\nu(j)=\gamma} \begin{vmatrix} a_{1j_11} & \ldots & a_{1j_nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nj_11} & \ldots & a_{nj_nn} \end{vmatrix} \beta_1^{\gamma_1} \ldots \beta_n^{\gamma_n} = 0, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n.$$

Следовательно, множество Y_2 является алгебраическим многообразием, задаваемым системой из $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ уравнений (4), соответствующих всем $\gamma \in \Gamma$:

$$\sum_{\nu(j)=\gamma} \begin{vmatrix} a_{1j_1 1} & \dots & a_{1j_n n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nj_1 1} & \dots & a_{nj_n n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что столбцы определителей из (4) получаются транспонированием строк $a_{.jk}$. Это ещё раз доказывает, что $X_1 \subset Y_2$.

4. Для любого $a \in \tilde{M}_{n^3}(\mathbf{k})$, обозначим

$$a^{(n)..} = (a_{ijk}) \mid \quad a_{njk} = 0 \quad (i, j, k \in \overline{1n}),$$

и рассмотрим проекцию

$$pr^{(n)..} : M_{n^3}(\mathbf{k}) \to M_{n^3}(\mathbf{k}) \mid \; a \mapsto a^{(n)..}.$$

Её ограничения на X_1 и Y_2 обозначим через p_1 и q_2 соответственно. Из определения детерминантных многообразий X_1 и Y_2 следует, что

$$p_1(X_1) = q_2(Y_2) = pr^{(n)..}(M_{n^3}(\mathbf{k})).$$

Эти образы можно отождествить с пространством $M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ трёхмерных матриц порядка $(n-1) \times n \times n$.

Пусть S_1 – подмножество $M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$, состоящее из матриц a с линейно зависимыми горизонтальными сечениями $a_{1..}, \dots, a_{(n-1)..}$. Можно показать, что S_1 также является детерминантным алгебраическим многообразием, потому что определяется условием существования ненулевого решения системы однородных линейных уравнений вида (1) с $n-1$ неизвестными, т.е. системой уравнений типа (2) из детерминантов порядка $n-1$. Обозначим через U_1 дополнительное к S_1 открытое множество.

Предложение 2. *Слои расслоения*

$$p_1 : X_1 \to M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$$

над точками открытого множества U_1 суть линейные пространства размерности $n-1$, а над точками замкнутого множества S_1 – линейные пространства размерности n^2.

Доказательство. Точки X_1 суть матрицы порядка $n \times n \times n$ с линейно зависимыми горизонтальными сечениями. Слой над точкой множества U_1 образован матрицами, получаемыми из базовой матрицы добавлением n-го горизонтального сечения, являющегося произвольной линейной комбинацией горизонтальных сечений базовой матрицы. Следовательно, любой слой над точкой из U_1 является линейным пространством размерности $n-1$. Слой же над точкой из S_1, есть множество матриц, получаемых из базовой матрицы добавлением произвольного n-го горизонтального сечения. Поэтому слой над точкой из S_1 является линейным пространством размерности n^2.

5. Аналогично опишем расслоение

$$q_2 : Y_2 \to M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k}).$$

Заметим, что слой этого расслоения над любой базовой точкой $a \in M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ является линейным пространством, потому что (4) при фиксированных a_{ijk}, $i, j, k \in \overline{1n}$, $i \neq n$, превращается в систему однородных линейных уравнений относительно a_{njk}, $j, k \in \overline{1n}$. Размерность пространства её решений равна $n^2 - \rho$, где ρ – ранг матрицы коэффициентов M_2 этой системы. В силу соотношения $X_1 \subset Y_2$, для любой базовой точки слой расслоения p_1 содержится в слое расслоения q_2. Согласно Предложению 2 размерность слоя расслоения p_1 не меньше $n-1$. Следовательно, $\rho \leq n^2 - n + 1$.

Лемма 1. *Существует базовая точка $a \in M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ такая, что слой расслоения q_2 над точкой a имеет размерность $n-1$.*

Доказательство. Рассмотрим слой над базовой точкой a с элементами $a_{ijk} = 1$ $(k = j + i - 1)$, $a_{ijk} = 0$ $(k \neq j + i - 1)$. Для того, чтобы получить любую точку $\hat{a}$ этого слоя надо к a добавить произвольное горизонтальное сечение $a_{n..} = (a_{njk})$. Линейная комбинация лицевых сечений кубической матрицы $\hat{a}$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равна

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \sum\limits_j \alpha_j a_{nj1} & \sum\limits_j \alpha_j a_{nj2} & \sum\limits_j \alpha_j a_{nj3} & \dots & \sum\limits_j \alpha_j a_{nj(n-1)} & \sum\limits_j \alpha_j a_{njn} \end{Vmatrix}$$

Эта матрица должна быть вырожденной при любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Эквивалентно, линейная комбинация строк этой матрицы с некоторыми коэффициентами $\kappa_1,\ldots,\kappa_n$ (не все из которых равны нулю) должна быть равна нулю. В частности, $\kappa_n \neq 0$ ибо в противном случае все $\kappa_i = 0$. Следовательно, можно считать, что $\kappa_n = -1$. Рассматривая произвольную s-тую координату вышеупомянутой линейной комбинации, получим соотношения

$$\kappa_1\alpha_s + \kappa_2\alpha_{s-1} + \ldots + \kappa_s\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_{njs}\ (s \leq n-1), \tag{5}$$

$$\kappa_1\alpha_n + \kappa_2\alpha_{n-1} + \ldots + \kappa_{n-1}\alpha_2 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_{njn}. \tag{6}$$

Взяв в (5)

$$\alpha_r = 1,\ \alpha_l = 0\ (l \neq r),\quad r = s+1,\ldots,n,$$

получим

$$a_{nrs} = 0,\ r = s+1,\ldots,n.$$

Поэтому (5) сводится к виду

$$\kappa_1\alpha_s + \kappa_2\alpha_{s-1} + \ldots + \kappa_s\alpha_1 = \sum_{j=1}^{s}\alpha_j a_{njs}\ (s \leq n-1). \tag{7}$$

Подставляя $s = 1$, получаем $\kappa_1 = a_{n11}$, следовательно, κ_1 не зависит от $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Подставляя в (7) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$ для каждого $s = 2,\ldots,n-1$, а в (6) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, получим

$$\kappa_1 = a_{n11} = \ldots = a_{nnn}.$$

Аналогично, используя уже полученные результаты, получаем, что все κ_s, $s \in \overline{1;(n-1)}$ не зависят от α и $\kappa_s = a_{n1s} = \ldots = a_{n(n-s+1)n}$. Наконец, подставляя $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ в (6), получаем $a_{n1n} = 0$. Таким образом, над взятой базовой точкой слой расслоения q_2 имеет размерность $n-1$. Лемма доказана.

Итак, ранг матрицы M_2 удовлетворяет неравенству $\rho \leq n^2 - n + 1$, причем $\rho = n^2 - n + 1$ в некоторой точке базы расслоения q_2. Следовательно, в общей точке базы, $rk\ M_2 = n^2 - n + 1$. Ранг матрицы M_2 падает на детерминантном алгебраическом многообразии $R_2 \subset M_{(n-1)\times n\times n}(\mathrm{k})$, задаваемым условием обнуления всех миноров матрицы M_2 порядка $n^2 - n + 1$. Пусть V_2 есть дополнение к R_2 до всей базы.

Предложение 3. *Слои расслоения*

$$q_2 : Y_2 \to M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$$

над точками открытого множества V_2, являются линейными пространствами размерности $n-1$, а над точками замкнутого множества R_2 – линейными пространствами большей чем $n-1$ размерности.

6. Перейдём от $M_{n*}(\mathbf{k})$ и $M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ к их проективизациям. Так как X_1 и Y_2 задаются системой однородных уравнений, им будут соответствовать проективные многообразия $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2 \subset \mathbb{P}(M_{n*}(\mathbf{k}))$, а проекциям $\mathbf{p}_1 : \mathbf{X}_1 \to \mathbb{P}(M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k}))$, $\mathbf{q}_2 : \mathbf{Y}_2 \to \mathbb{P}(M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k}))$ проекции p_1 и q_2. Отметим, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{Y}_2$ будут неприводимыми многообразиями согласно Теореме 8 из параграфа 6, Главы I работы [10] (условие совпадения размерностей слоев в этой теореме лишнее). Из $X_1 \subset Y_2$ следует, что $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{Y}_2$, и по Теореме 7 из параграфа 6, Главы I работы [10] вытекает, что $\dim \mathbf{X}_1 = \dim \mathbf{Y}_2$ поскольку $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{q}_2$ имеют одинаковую базу и их слои в общей точке имеют одинаковую размерность. Следовательно, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_2$ и поэтому $X_1 = Y_2$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Одноимённые сечения кубической трёхмерной матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда сечения каждого из двух других измерений лк-вырождены.*

7. Для того, чтобы доказать Теорему 1, сформулированную во введении, используем Теорему 2. Прежде всего заметим, что импликация $(a) \Rightarrow (b)$ очевидна. Для доказательства обратной импликации, зафиксируем некоторый базис в L и предположим, что a_{ijk} – матрица оператора A_i в этом базисе ($i \in \overline{1,m}$). Условие линейной зависимости данного семейства операторов эквивалентно условию линейной зависимости горизонтальных сечений трехмерной матрицы $a = (a_{ijk})$ порядка $m \times n \times n$.

Значение оператора A_i в $x \in L$ при фиксированном базисе задаётся линейной комбинацией столбцов матрицы $a_{i\,\cdot\,\cdot}$, с коэффициентами, являющимися координатами x в этом базисе. Поэтому линейная зависимость векторов $A_1(x), \ldots, A_m(x)$ означает линейную зависимость строк соответствующей линейной комбинации вертикальных сечений $a_{\cdot\,\cdot\,k}$ матрицы a. Следовательно, при $m = n$ доказываемая теорема сразу следует из Теоремы 2.

Для доказательства импликации $(b) \Rightarrow (a)$ при $m < n$, к данным операторам добавим линейные операторы $A_{m+1}, \ldots, A_n$, удовлетворяющие условию

$$\dim \langle A_1, \ldots, A_{k+1} \rangle = \dim \langle A_1, \ldots, A_k \rangle + 1, \quad k = m, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Это возможно, так как размерность пространства операторов равна n^2. Поскольку для любого $x \in L$ система векторов $A_1(x), \ldots, A_m(x)$ линейно зависима, то система векторов $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ также линейно зависима. Ввиду справедливости утверждения при $m = n$, операторы $A_1, \ldots, A_n$ линейно зависимы, т.е. $\dim\langle A_1, \ldots, A_n\rangle < n$. Допустим, что $A_1, \ldots, A_m$ линейно независимы, т.е. $\dim\langle A_1, \ldots, A_m\rangle = m$. Тогда из (8) получим, что $\dim\langle A_1, \ldots, A_n\rangle = n$. Это противоречие показывает, что $A_1, \ldots, A_m$ линейно зависимы.

8. Согласно предыдущему пункту, утверждение Теоремы 2 будет выполняться в более общей ситуации, для трёхмерных матриц порядка $m \times n \times n$ при любом натуральном числе $m \leq n$, если обобщить понятие лк-вырожденности на семейства прямоугольных матриц.

Определение 2. Семейство матриц $a_1, \ldots, a_m$ одинакового порядка назовём лк-вырожденным, если у любой линейной комбинации этого семейства ранг меньше максимально возможного, т.е. как числа строк, так и числа столбцов данных матриц.

Теорема 3. *Для произвольной трёхмерной матрицы a порядка $m \times l \times n$ следующие условия эквивалентны :*

(a) *сечения $a_{1..}, \ldots, a_{m..}$ линейно зависимы,*

(b) *сечения $a_{.1.}, \ldots, a_{.l.}$ лк-вырождены.*

Доказательство. Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ доказывается тем же путем, как и Предложение 1. Чтобы доказать обратную импликацию при $l \neq n$, сначала предположим, что $l > n$. Тогда для любых $1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq l$ сечения $a_{.j_1.}, \ldots, a_{.j_n.}$ лк-вырождены, и следовательно подматрицы $a_{1..}^{j_1\ldots j_n}, \ldots, a_{m..}^{j_1\ldots j_n}$ сечений $a_{1..}, \ldots, a_{m..}$ (составленные из строк, указанных в верхнем индексе) линейно зависимы. Поэтому, сечения $a_{1..}, \ldots, a_{m..}$ линейно зависимы.

Если $l < n$, то для произвольных $1 \leq k_1 < \ldots < k_l \leq n$ рассмотрим подматрицы $a_{.1.}^{k_1\ldots k_l}, \ldots, a_{.l.}^{k_1\ldots k_l}$ сечений $a_{.1.}, \ldots, a_{.l.}$, составленные из столбцов, указанных в верхнем индексе. Из (b) следует, что указанное семейство подматриц лк-вырождено. Следовательно, подматрицы $a_{1..}^{k_1\ldots k_l}, \ldots, a_{m..}^{k_1\ldots k_l}$ сечений $a_{1..}, \ldots, a_{m..}$, составленные из столбцов, указанных в верхнем индексе, линейно зависимы. Поэтому, сечения $a_{1..}, \ldots, a_{m..}$ линейно зависимы.

Abstract. A notion of lc-degeneracy is introduced and used to obtain a linear dependence criterion for sections of three-dimensional matrices. Applying this criterion, it is proved that the system of linear operators is linearly dependent if and only if their values are linearly dependent at any point.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Наука, Москва, 1967
2. Р. Беллман, Введение в Теорию Матриц, Наука, Москва, 1969
3. П. Ланкастер, Теория Матриц, Наука, Москва, 1982
4. М. Маркус, Х. Минк, Обзор По Теории Матриц и Матричных Неравенств, Наука, Москва, 1972.
5. Н. П. Соколов, Пространственные Матрицы и их Приложения, ФМ, Москва, 1960.
6. Н. П. Соколов, Введение в Теорию Многомерных Матриц, Наукова Думка, Киев, 1972.
7. А. С. Гаспарян, "О некоторых приложениях многомерных матриц", Выч. Центр АН СССР, Москва, 1983.
8. J. P. Jouanolou, Le formalisin du resultant, Adv. in Math., vol. 90, no. 2, December 1991.
9. С. Г. Далалян, "Дискриминантная форма конечного семейства однородных полиномов", Доклады АН Арм.ССР, том 81, № 1, стр. 12 – 16, 1985.
10. И. Р. Шафаревич, Основы Алгебраической Геометрии, том I, Наука, Москва, 1988.

Поступила 23 февраля 2005

Известия НАН Армении. Математика, **40**, *№ 3, 2005, 46-54*

КВАЗИГРИДИ СИСТЕМНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМЫ ФАБЕРА–ШАУДЕРА В $C(0,1)$

А. А. Саргсян

Ереванский государственный университет

Резюме. Получено необходимое условие для квазигриди системности подсистем Фабера-Шаудера в $C(0,1)$ и построена подсистема с плотностью 0, которая не является квазигриди системой в $C(0,1)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – нормированный базис в банаховом пространстве X. Тогда для каждого элемента $f \in X$ существует единственный ряд по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, сходящийся к f по норме пространства X :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f)\psi_n.$$

Для заданного $f \in X$, назовём перестановку натуральных чисел $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^\infty$ **убывающей**, если

$$|A_{\sigma(n)}(f)| \geq |A_{\sigma(n+1)}(f)|, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Множество всех таких убывающих перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств, множество $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. m-ый гриди аппроксимант элемента f по базису Ψ, отвечающий перестановке $\sigma \in D(f, \Psi)$, определим следующим образом :

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) = \sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f)\psi_{\sigma(n)}.$$

Этот нелинейный метод аппроксимации известен как **гриди алгоритм** (см., например, [1]). Гриди алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучены Конягиным и Темляковым [1], Войтащиком [2], ДеВором [3], Григоряном [4, 5] и другими (см. [6, 7]).

Определение 1. Говорят, что гриди алгоритм элемента $f \in X$ по системе Ψ сходится, если существует $\sigma \in D(f, \Psi)$, для которой

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0. \tag{1.1}$$

Если базис Ψ является безусловным, то ясно, что последовательность операторов $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $f \in X$, независимо от выбора $\sigma \in D(f, \Psi)$.

Определение 2. Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квазигриди системой в X или, квазигриди базисом в $\overline{\text{span}}\,(\Psi)$, если для каждого элемента $f \in \overline{\text{span}}\,(\Psi)$ и для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ выполняется (1.1).

Теорема (Войтащик [2]). *Для того, чтобы базис Ψ был бы квазигриди базисом в X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $f \in X$, для всякой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ и для любого натурального числа m выполнялось бы неравенство*

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \le B_0\|f\|_X,$$

где постоянная B_0 не зависит от f и m.

Теперь напомним определение системы Фабера–Шаудера. Это система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$ имеем

$$\varphi_n(x) = \varphi_{2^k+i}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если} \quad x = \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \multicolumn{2}{l}{\text{линейна и непрерывна на}} \\ \multicolumn{2}{l}{\left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \dfrac{i}{2^k}\right].} \end{cases} \tag{1.2}$$

Число k называется **рангом** функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$ ($n = 2, 3, \ldots$) системы Фабера-Шаудера обозначим через Δ_n, а точку где $\varphi_n(x) = 1$ через x_n.

В работе [7] доказано, что в пространстве $C(0, 1)$ не существует квазигриди базиса. Следовательно, в случае системы Фабера-Шаудера (которая является базисом в $C(0, 1)$, см. [8]), для любого положительного числа B существуют функция $f_0 \in C(0, 1)$, перестановка $\sigma_0 \in D(f, \Phi)$ и натуральное число m_0 такие, что

$$\|G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)\|_C > B\|f_0\|_C.$$

Отметим, что доказательство этого утверждения (для системы Фабера-Шаудера) не имеет конструктивного характера.

В настоящей статье приводится новое, конструктивное доказательство этого результата со следующими тремя усилениями.

Теорема 1. *Для любого*

$$x_0 \in E_0 = \left\{ \frac{3i-2}{3\cdot 2^k},\ \frac{3i-1}{3\cdot 2^k} \quad (k = 0, 1, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, 2^k) \right\}$$

существует функция $f_0 \in C(0,1)$ *такая, что для любой* $\sigma \in D(f_0, \Phi)$ *имеем*

$$\lim_{m\to\infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} A_{\sigma(n)}(f_0)\varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty.$$

Пусть $S = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\Lambda(n)$ - число элементов S меньше n. Следующую величину назовем **плотностью множества** S :

$$\rho(S) = \limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m}.$$

Пусть $\Phi_{S'} = \{\varphi_{n'_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - подсистема системы (1.2) такая, что носители функций $\varphi_{n'_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ попарно не пересекаются (например, $\Phi_{S'} = \{\varphi_{2^n+2}(x)\}_{k=1}^{\infty}$). Тогда, очевидно $\Phi_{S'}$ является безусловным базисом в $\overline{\text{span}}\,(\Phi_{S'})$, и следовательно, является квазигриди базисом в замыкании своей линейной оболочки и $\rho(S') = 0$.

Теорема 2. *Существует подсистема* Φ_S *системы Фабера-Шаудера такая, что* $\rho(S) = 0$ *и* Φ_S *не является квазигриди системой в* $C(0,1)$.

Пусть $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая подсистема системы (1.2), $S_0 = \{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \in S$ некоторое подмножество множества S и пусть $\Delta_{n_{k_j}}$ – носитель функции $\varphi_{n_{k_j}}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Тогда для любого $S_0 = \{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \in S$ пересечение $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_{k_j}}$ либо пусто, либо является точкой отрезка $[0,1]$. Если $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_{k_j}} = x_0 \in [0,1]$, то точку x_0 назовём точкой сгущения носителей функций подсистемы Φ_S.

Теорема 3. *Для того, чтобы подсистема* $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *системы Фабера-Шаудера являлась квазигриди базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо, чтобы носители функций подсистемы* $\varphi_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *не имели точек сгущения в множестве* E_0.

§2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЛЕММЫ

Рассмотрим подсистему

$$\{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}, \tag{2.1}$$

в которой

$\varphi_{n_1}(x) = \varphi_2(x) = \varphi_{2^0+1}(x)$ (носителем Δ_{n_1} является интервал $(0,1)$, и $x_{n_1} = \frac{1}{2}$),
$\varphi_{n_2}(x) = \varphi_3(x) = \varphi_{2^1+1}(x)$ (носителем Δ_{n_2} является левая половина интервала Δ_{n_1}, и $x_{n_2} = \frac{1}{4}$),
$\varphi_{n_3}(x) = \varphi_6(x) = \varphi_{2^2+2}(x)$ (носителем Δ_{n_3} является правая половина интервала Δ_{n_2}, и $x_{n_3} = \frac{1/2+1/4}{2}$) и т.д.. Носителем функции $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ является правая половина интервала $\Delta_{n_{2m}}$ $\left(x_{n_{2m+1}} = \frac{x_{n_{2m-1}}+x_{n_{2m}}}{2}\right)$, а носителем функции $\varphi_{n_{2m+2}}(x)$ является левая половина интервала $\Delta_{n_{2m+1}}$ $\left(x_{n_{2m+2}} = \frac{x_{n_{2m}}+x_{n_{2m+1}}}{2}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$.
Очевидно, что $\Delta_{n_{m+1}} \subset \Delta_{n_m}$, $m = 1, 2, \ldots$ и

$$\lim_{m\to\infty} mes\, \Delta_{n_m} = 0. \tag{2.2}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{m\to\infty} x_{n_m} \equiv x_0, \\ &\lim_{m\to\infty} x_{n_{2m}} = x_0 - 0, \quad \lim_{m\to\infty} x_{n_{2m+1}} = x_0 + 0, \\ &x_0 \in \Delta_{n_m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

поскольку $x_{n_{2m}}$ и $x_{n_{2m+1}}$ являются соответственно левым и правым концом интервала $\Delta_{n_{2m+2}}$.

Предложение 1. Все функции подсистемы (2.1) имеют одно и то же значение 2/3 в точке x_0 (см. (2.3)), т.е.

$$\varphi_{n_m}(x_0) = \frac{2}{3}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Из построения подсистемы (2.1) следует, что дробление носителя функции $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ точками $\{x_{n_m}\}_{m=2k}^{\infty}$ одно и тоже для любого натурального k, а также дробление носителя функции $\{\varphi_{n_{2k-1}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ точками $\{x_{n_m}\}_{m=2k-1}^{\infty}$ одно и тоже для любого натурального k.
Следовательно, точка $x_0 = \lim_{m\to\infty} x_{n_m}$ делит носитель функции $\varphi_{n_{2k-1}}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на части, отношение которых одинаково для всех значений k. Ситуация та же и для функций $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Не трудно показать, что это отношение

$$1/3 : 2/3 \quad \text{для} \quad \{\varphi_{n_{2k-1}}(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad 2/3 : 1/3 \quad \text{для} \quad \{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}. \tag{2.4}$$

Следовательно, по определению системы Фабера–Шаудера следует, что

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad \varphi_{n_m}(x_0) = \frac{2}{3}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Следствие 1. Из вышеприведённого доказательства следует, что Предложение 1 верно также для подсистемы системы (1.2), в которой первой функцией является функция $\varphi_{n_1}(x)$ подсистемы (2.1), а для любого $m = 1, 2, \ldots$ носители функций $\varphi_{n_{2m}}(x)$ и $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ являются, соответственно, правыми и левыми половинами интервалов $\Delta_{n_{2m-1}}$ и $\Delta_{n_{2m}}$. Из определения системы (1.2) вытекает, что для этой подсистемы будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_{2m}} = x_0 + 0, \quad \lim_{m\to\infty} x_{n_{2m+1}} = x_0 - 0, \quad x_0 = \frac{2}{3}, \quad y_0 = \frac{2}{3}.$$

Следствие 2. Из свойства локальности системы Шаудера, Предложения 1 и Следствия 1 следует, что для каждой функции $\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ существуют точки $x_L(n)$ и $x_R(n)$ и подсистемы $\{\varphi^L_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\varphi^R_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ системы Фабера–Шаудера ($\varphi^L_{n_1}(x) = \varphi^R_{n_1}(x) = \varphi_n(x)$, $\Delta^L_{n_2}$ является левой половиной носителя Δ_n, а $\Delta^R_{n_2}$ является правой половиной носителя Δ_n, $mes\,\Delta^L_m = mes\,\Delta^R_{n_m} = \frac{1}{2^{k+m-1}}$, $m = 1, 2, \ldots$) такие, что

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^L_{n_m} = x_L(n), \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^R_{n_m} = x_R(n),$$
$$\varphi^L_{n_m}(x_L(n)) = \varphi^L_{n_{m+1}}(x_L(n)) \equiv y_L(n), \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$\varphi^R_{n_m}(x_R(n)) = \varphi^R_{n_{m+1}}(x_R(n)) \equiv y_R(n), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и

$$x^L_{n_{m+2}} = \frac{x^L_{n_m} + x^L_{n_{m+1}}}{2}, \quad x^R_{n_{m+2}} = \frac{x^R_{n_m} + x^R_{n_{m+1}}}{2}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$\lim_{m\to\infty} x^L_{n_{2m}} = x_L(n) - 0, \quad \lim_{m\to\infty} x^L_{n_{2m+1}} = x_L(n) + 0,$$
$$\lim_{m\to\infty} x^R_{n_{2m}} = x_R(n) + 0, \quad \lim_{m\to\infty} x^R_{n_{2m+1}} = x_R(n) - 0,$$
$$x_L(n), \quad x_R(n) \in E_0, \quad y_L(n) = y_R(n) = \frac{2}{3}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Ясно, что плотности этих подсистем равны нулю. Обозначим совокупность таких подсистем через $\overline{\Phi}$ и отметим, что с помощью простых расчетов нетрудно доказать, что E_0 является множеством всех возможных точек $x_L(n)$ и $x_R(n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Предложение 2. Прямой расчёт показывает, что функции $\varphi_{n_1}(x)$, $\varphi_{n_2}(x)$ и $\varphi_{n_3}(x)$ принимают одно и то же значение $2/3$ в точке $1/3$. Тогда, согласно свойству локальности системы (1.2), все функции подсистемы (2.1) принимают значение $2/3$ в точке $1/3$.

Далее, пусть $x_0 \in [0,1]$ – точка, где функции подсистемы $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \overline{\Phi}$ принимают значение 2/3. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|$ сходится в каждой точке $x \in [0,1]$, так как в точке x_0 её сумма равна нулю, а в остальных точках $x \in [0,1]$ он представляет собой конечную сумму. Положим

$$L_j(x) = \sum_{k=j+1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Лемма 1. *Для каждой подсистемы* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \Phi_S \in \overline{\Phi}$:

$$L_1(x) < 3 \ , \ \forall x \in [0,1].$$

Доказательство. Используя свойство локальности системы Фабера–Шаудера и Следствие 1, докажем наше утверждение только для подсистемы (2.1), поскольку для прочих подсистем $\Phi_S \in \overline{\Phi}$ доказательство аналогично. Согласно определению системы Фабера–Шаудера и построению подсистемы (2.1), для любого натурального числа $j \geq 1$

$$L_j(x) - L_{j+1}(x) = |\varphi_{n_{j+1}}(x) - \varphi_{n_j}(x)| = \begin{cases} 0, & \textbf{при} \quad x \in ([0,1] \setminus \Delta_{n_j}) \cup \{x_0\}, \\ 1, & \textbf{при} \quad x = x_{n_j}, \\ \dfrac{1}{2}, & \textbf{при} \quad x = x_{n_{j+1}}, \\ & \textbf{линейна и непрерывна между} \\ & \textbf{всеми соседними точками из} \\ & \{x_{n_k}\}_{k=j-2}^{j+1} \cup \{x_0\}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Итак, $L_j(x) - L_{j+1}(x)$ равна нулю на $[0,1] \setminus \Delta_{n_j}$, и представляет собой ломаную на Δ_{n_j}, с абсциссами вершин x_{n_j}, $x_{n_{j+1}}$, x_0 (где $x_{n_{(-1)}}$ и x_{n_0} суть концы интервала Δ_{n_1}, т.е. $x_{n_{(-1)}} = 0$, $x_{n_0} = 1$).

Используя (2.4), (2.5) и определение подсистемы (2.1), не трудно доказать, что

$$L_1(x) - L_3(x) = \sum_{j=1}^{2} L_j(x) - L_{j+1}(x)$$

равна нулю при $x = x_0$, равна 1 при $x = x_{n_1}$, равна $1/2 + 1$ при $x = x_{n_2}$ и равна $1/2 + 1/4$ при $x = x_{n_3}$, кроме того, нетрудно доказать, что $L_1(x) - L_3(x)$ линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{3} \cup \{x_0\}$ (т.е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_0), а

$$L_1(x) - L_{1+i}(x) = \sum_{j=1}^{i} L_j(x) - L_{j+1}(x), \qquad i \geq 1$$

равна нулю при $x = x_0$, равна 1 при $x = x_{n_1}$, равна $\frac{1}{2} + 1$ при $x = x_{n_2}, \ldots$, равна $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{2^{k-1}}$ при $x = x_{n_i}$ и, наконец, равна $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{2^k}$ при $x = x_{n_{1+i}}$. Кроме того, $L_1(x) - L_{1+i}(x) = \sum_{j=1}^{i} L_j(x) - L_{j+1}(x)$ $(i \geq 1)$ линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{1+i} \cup \{x_0\}$, т.е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{1+i}}, x_0$ (число вершин этой ломаной на единицу больше числа вершин ломаной, которую представляет собой $L_1(x) - L_i(x)$).

Из вышесказанного следует, что $L_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j(x) - L_{j+1}(x)$ равна нулю при $x = x_0$, равна 1 при $x = x_{n_1}$, равна $\frac{1}{2} + 1$ при $x = x_{n_2}, \ldots$, равна $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{2^{k-1}}$ при $x = x_{n_i}, \ldots$, линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$, т.е. представляет собой "ломаную линию" с абсциссами вершин $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$. Следовательно,

$$L_1(x) < 3, \quad \forall x \in [0, 1],$$

так как $L_1(x_0) = 0$ и $L_1(x_{n_i}) < 3$, $\forall i = 1, 2, \ldots$

Замечание 1. Не трудно показать, что Лемма 1 верна и для всякой подсистемы системы (2.1).

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ldots = +\infty\,, \tag{2.6}$$

и пусть A – некоторое конечное число. Тогда, по схеме Римана переставим члены ряда (2.6) так, чтобы он сходился к A. Обозначим члены переставленного ряда через A_k, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A. \tag{2.7}$$

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x), \tag{2.8}$$

где $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \overline{\Phi}$ или является подсистемой некоторой системы $\Phi_S \in \overline{\Phi}$. Пусть $x_0 \in [0, 1]$ – точка, в которой функции этой подсистемы принимают значение $2/3$. Тогда ряд (2.8) сходится в точках $x \in [0, 1]$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x_0) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{2}{3} A$$

(см. (2.7)) и представляет собой конечные суммы (см. определение $\overline{\Phi}$), когда $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$.

Положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x).$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Ряд (2.8) равномерно сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Положим

$$r_j = \sum_{k=j}^{\infty} A_k \quad \text{и} \quad R_j(x) = \sum_{k=j}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x).$$

Тогда, в силу (2.7), для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторое $j_0 \in N$ такое, что

$$|r_j| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.9}$$

при $j \geq j_0$. Кроме того,

$$R_j(x) = \sum_{k=j}^{\infty} (r_k - r_{k+1}) \varphi_{n_k}(x),$$

поскольку $A_k = r_k - r_{k+1}$, и поэтому

$$R_j(x) = r_j \varphi_{n_j}(x) + \sum_{k=j+1}^{\infty} r_k \{\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)\}.$$

Следовательно, так как $||\varphi_n(x)||_{C(0,1)} = 1$, $n = 0, 1, \ldots$ получаем

$$|R_j(x)| \leq |r_j| + \sum_{k=j+1}^{\infty} |r_k| |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|,$$

и с учетом (2.9)

$$|R_j(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \{1 + L_j(x)\}.$$

Следовательно, $|R_j(x)| < \varepsilon$ согласно Лемме 1 и Замечанию 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Для заданной точки $x_0 \in E_0$, пусть $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – подсистема системы Фабера-Шаудера такая, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_k} = x_0, \quad \varphi_{n_k}(x_0) = \frac{2}{3} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

(ясно, что либо Φ_S входит в $\overline{\Phi}$ либо является подсистемой некоторой системы $\Phi_{S'} \in \overline{\Phi}$, т.е. $\rho(S) = 0$.) Из Леммы 2 следует, что

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x) \in \overline{\operatorname{span}}\,(\Phi_S),$$

где $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – члены ряда (2.7). Из построения ряда (2.7) следует

$$G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = G_m(f_0, \Phi_S, \sigma, x_0) = \sum_{k=1}^{m} A_{\sigma(k)} \varphi_{n_{\sigma(k)}}(x_0) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{m} a_k$$

при некоторой $\sigma \in D(f_0, \Phi_S) = D(f_0, \Phi)$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{m \to \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = +\infty$$

для любой $\sigma \in D(f_0, \Phi_S) = D(f_0, \Phi)$. Следовательно, ввиду $\rho(S) = 0$, получим доказательства всех теорем.

Автор выражает благодарность профессору М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена эта работа.

Abstract. A necessary condition implying that a Faber–Schauder subsystem is quasi-greedy in $C(0,1)$ is obtained and not quasi-greedy subsystem of 0-density is constructed in $C(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
2. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory, vol.107, pp. 293 – 314, 2000.
3. R. A. De Vore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Adv. in Comput. Math., no. 5, pp. 173 – 187, 1996.
4. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 39, № 5, стр. 1 – 14, 2004.
5. M. G. Grigoryan, "On the algorithm of greedy", Harmonic Analysis and Approximations, II, International conference, Abstract, 2003.
6. С. Л. Гогян, "Подсистема Хаара как квазигриди базис", Доклады НАН Армении, том 105, № 1, стр. 5 – 9, 2005.
7. S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", Studia Math., vol. 159(1), pp. 67 – 101, 2003.
8. J. Schauder, "Zur Theorie stetiger abbildungen in functionalraumen", Math. Zeit., vol. 26, pp. 47 – 65, 1927.

Поступила 13 марта 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 55-66

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ И ДЖРБАШЯНА С ВЕСАМИ МАКЕНХАУПТА

Р. Ф. Шамоян

Брянский государственный университет, Россия
E-mail : rsham@mail.ru

Резюме. Получены неравенства для классов Джрбашяна и Харди с весами Макенхаупта. Эти неравенства использованы для обобщения некоторых хорошо известных результатов о проекциях и мултипликаторах в классических пространствах Джрбашяна.

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель этой работы получение оценок в пространствах A^p аналитических функций с весами Макенхаупта на прямой $\mathbb{R}^1$ или на плоскости $\mathbb{R}^2$. Эти оценки далее используются для обобщения некоторых теорем из [6], [9], [12] на пространства Харди и Джрбашяна с весами Макенхаупта. Автор надеется распространить эти результаты на полидиск в отдельной работе, готовящейся к печати.

Хотя матричнозначные и другие многомерные варианты пространств A^p в настоящее время интенсивно изучаются, много одномерных вопросов, связанных с пространствами A^p остаются открытыми (см., например, [3], [7] и указанную там литературу).

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Весовой функцией $\omega(z)$ в $\mathbb{R}^n$ назовём любую локально интегрируемую функцию $\omega(z)$ со значениями в $(0,+\infty)$ для почти всех $z \in \mathbb{R}^n$ (в частности $d_n(\omega = \infty) = d_n(\omega = 0) = 0$, где d_n – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$), см. [10]. Неотрицательная мера ω принадлежит классу A_p, $(1 < p < +\infty)$, если

$$\sup_{Q\subset R^n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(z)\,dz\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\omega(z)\right)^{-\frac{1}{p-1}}\,dz\right)^{p-1} < +\infty, \tag{1}$$

где супремум берётся по кубам (или шарам) в $\mathbb{R}^n$, см. [10]), а $|Q|$ – его мера. Вес $\omega \geq 0$ принадлежит $A_1(\mathbb{R}^n)$, если для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$M(\omega)(x) = \sup_{x \in B} \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(t)\, dt \right) \leq C_1 \omega(x). \tag{1'}$$

где супремум берётся по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$ или кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$, содержащим точку x, а $C_1 > 0$ – постоянная.

Всюду ниже, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ – круг единичного радиуса на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ – его граница, $H(\mathbb{D})$ – класс всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. $dm(\xi)$ и $dm_2(z)$ суть нормированные меры Лебега в $\mathbb{T}$ и $\mathbb{D}$ соответственно. H^p $(0 < p < +\infty)$ – пространства Харди в круге. Обозначим через $\Diamond I = \{r\xi : \xi \in I,\ 1 - |I| \leq r < 1\}$ известную коробку Карлесона, где I – дуга на $\mathbb{T}$, а через $P(g)$ интеграл Пуассона функции $g \in L_p(\mathbb{T})$. Пусть

$$\Gamma(\xi) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left|1 - \bar{\xi} z\right| < 1 - |z|, \quad \xi \in T \right\}$$

конус Лузина и

$$\Delta_{ik} = \left\{ z = r\xi : \xi \in I_{ik}, \quad r \in I_k = \left(1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-k-1}\right) \right\}, \quad |\Delta_{ik}| = m_2\left(\Delta_{ik}\right),$$

$$I_{ik} = \left\{ \xi \in \mathbb{T} : \arg \xi \in \left(\frac{\pi i}{2^k}, \frac{\pi(i+1)}{2^k} \right) \right\}, \quad i = -2^k, \ldots, 2^k - 1,$$

где интервалы $\left(\frac{\pi i}{2^k}, \frac{\pi(i+1)}{2^k}\right)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ являются диадическим разбиением круга (см. [9]). Обозначим через Δ^*_{ik}, строящиеся по Δ_{ik}, расширенные диадические четырехугольники (см. [9]).

Через Mg в (1') и всюду ниже обозначается максимальная функция Харди-Литтлвуда (см. [10]), C, C_1, $C(\alpha)$ всюду ниже положительные константы. Результаты параграфа 2 навеяны следующими обобщениями известной теоремы Карлесона, установленными сравнительно недавно и изложенными в [1] – [3].

Теорема А. *1) Пусть функция $\omega \geq 0$ и $\omega, \omega^{-1} \in L^1(\mathbb{T})$. Предположим, что $\mu \geq 0$ – мера в $\mathbb{D}$ такая, что*

$$\int_{\mathbb{D}} P_z(\zeta)\big(\omega(\zeta)\big)^2 d\mu(\zeta) \leq C_2 \tilde{\omega}(z) \equiv C_2 \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\omega(\xi)\, dm(\xi), \tag{1''}$$

где $z \in \mathbb{D}$, C_2 – константа, а $P_z(\xi) = (1 - |z|^2)/|1 - \xi\bar{z}|^2$ – ядро Пуассона. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{T}, \omega^{-1})$ имеет место неравенство :

$$\int_{\mathbb{D}} |Pf(\zeta)|^2 d\mu(\zeta) \leq C' \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \big(\omega(\xi)\big)^{-1} dm(\xi).$$

2) Пусть $\omega \in A_2$ и μ – мера Карлесона в $\mathbb{D}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \widetilde{\omega}(z) d\mu(z) \le C \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \omega(\xi) dm(\xi)$$

для любой функции $f(z)$ из класса

$$H^2(\omega) = \left\{ f \in H^1(\mathbb{T}) : f(e^{i\theta}) \in L^2(\omega, d\theta) \right\}.$$

3) Пусть $\omega \in L^1(\mathbb{T})$ и пусть

$$H^p(\omega) = \left\{ f \in H^1(\mathbb{T}) : f(e^{i\theta}) \in L^p(\omega, d\theta) \right\}, \quad 1 \le p < +\infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{D}} |D^{\alpha} f(z)|^p \, d\mu(z) \le C \int_{\mathbb{T}} \left| f(e^{i\theta}) \right|^p \omega(\vartheta) d\theta, \tag{2}$$

где $\omega \in A_p$ и $\alpha = 0$. Если $\mu(\Diamond I) \le C \int_I \omega d\xi$, и $\mu(\Diamond I) \le C|I|^{1+\epsilon} \int_I \omega(\xi) d\xi$ для некоторого $\epsilon > 0$, то (2) имеет место при $\omega \in A_1$, $\alpha = 1$.

Нам в дальнейшем понадобится следующая лемма из [3].

Лемма А. *Пусть $\omega \in A^2(\mathbb{T})$ – вес Макенхаупта. Тогда для любой меры Карлесона μ в $\mathbb{D}$ имеем*

$$\int_{\mathbb{D}} P_z(\zeta) \widetilde{\omega}(\zeta) d\mu(\zeta) \le C \widetilde{\omega}(z).$$

Будем говорить, что весовая функция ω удовлетворяет условию $(\widetilde{L})$, если

$$\inf_K \frac{1}{|K|} \int_K \left(\omega(\xi) \right)^{-q} d\xi \ge C(q) > 0, \quad 0 < q < +\infty,$$

где $K = \Delta_{ik}(I_{ik})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, i = -2^k, \ldots, 2^k - 1)$ – "куб" в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$.

§2. НЕРАВЕНСТВА

Одна из основных целей этого параграфа – получить некоторые обобщения известных теорем вложения (в частности, теоремы вложения Карлесона) на пространства голоморфных функций в $\mathbb{B}$:

$$H^p_\omega(\mathbb{D}) = \left\{ f \in L^p_\omega(\mathbb{T}) \cap H(\mathbb{D}) : \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\sup_{z \in \Gamma(\xi)} |f(z)|^p \right) \omega(\xi) \, d\xi \right)^{1/p} < +\infty \right\}, 0 < p < +\infty,$$

где $\omega \in A_{\widetilde{p}}$ для некоторого $1 \le \widetilde{p} \le +\infty$ (в обзоре [7] приводится ряд утверждений о распространении известных теорем о пространствах Харди $H^p(\mathbb{D})$ на $H^p_\omega(\mathbb{D})$) и

$$A^p(\omega^s) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{D}) \cap H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \omega^s(z) \, dm_2(z) < +\infty \right\} \quad (0 < p, s < +\infty)$$

в духе Теоремы А. В качестве приложения, в §3 приведены обобщения известных утверждений о коэффициентных мултипликаторах, функционалах и проекторах в пространствах H^p_ω и $A^p(\omega)$.

Теорема 1. *1) Пусть $1 < q \le p < +\infty$ и $\omega^{-q} \in A_{q/p+1}(\mathbb{R}^2)$ мера, удовлетворяющая условию $\omega^{-q} \in (\bar{L})$ и пусть $f \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (\omega(z))^p dm_2(z)\right)^{q/p} \le \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} (1-|z|)^{2q/p-2}\, dm_2(z), \quad (2')$$

если

$$\frac{1}{|\Delta^*_{jk}|}\int_{\Delta^*_{jk}} |f(z)|^q dm_2(z) \le C \frac{\int_{\Delta^*_{jk}} |f(z)|^q (\omega(z))^{-q} dm_2(z)}{\int_{\Delta^*_{jk}} (\omega(z))^{-q} dm_2(z)}.$$

2) Пусть $0 < q \le 1$ и функция ω такова, что $\omega^{-q} \in A_1$ и $\omega^{-q} \in (\bar{L})$. Тогда для любой функции $f \in H(\mathbb{D})$ имеем

$$\left(\int_0^1 M_p(f,r)\omega(r)\, dr\right)^q \le C_{p,q} \int_0^1 M_p^q(f,r) (\omega(r))^{-q} (1-r)^{q-1} dr, \quad (2'')$$

где

$$M_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^p dm(\xi).$$

Определение 2. Будем говорить, что неотрицательная борелевская мера μ удовлетворяет ω_α-условию Карлесона ($\alpha \in \mathbb{R}$), если для некоторой весовой функции $\omega \in L^1_{loc}(\mathbb{T})$

$$\left\| \sup_{\xi \in I} \left(\frac{1}{|I|}\int_{\Pi I} \varphi(z) dm_2(z)\right) (\omega(\xi))^\alpha \right\|_{L^\infty(dm(\xi))} < +\infty,$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{j,k} 2^{2k} \mu(\Delta_{jk}) \lambda_{\Delta^*_{jk}}(z).$$

Ниже будем предполагать, что $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$ и p' такое, что $1/p + 1/p' = 1$. Нам понадобиться следующая легко выводимая формула [6] :

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^t d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^t}{1-|z|} d\mu(z)\right) dm(\xi), \quad (2''')$$

где $t \in (0, +\infty)$, а μ – положительная борелевская мера.

Замечание 1. Легко видеть из доказательства утверждения 1) Теоремы 1, что подобные (2') формулы верны и в несколько более общем случае, когда $dm_2(z)$ заменена весом $(1-|z|)^\alpha dm_2(z)$ $(\alpha > -1)$.

Теорема 2. *Пусть $\omega \in A_p(\mathbb{T})$, $(p \geq q = 1, 2, \dots)$ и пусть μ – ω_α-мера Карлесона, где $\alpha = -q/p$. Тогда для любой функции $f \in H^p_\omega$ удовлетворяющей условию*

$$(V) \quad \frac{1}{|\Delta_{ik}|}\left[\max_{\Delta_{ik}} |P(g)(z)|\right] \int_{\Delta^*_{ik}} |f(z)|^q dm_2(z) \leq \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \int_{\Delta^*_{ik}} |P(g)(z)||f(z)|^q dm_2(z)$$

для любого $k = 0, 1, \dots$, $i = -2^k, \dots, 2^k - 1$, любой $f \in H^p_\omega$ и $g \in L^{(p/q)'}$ имеет место оценка :

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z|} d\mu(z)\right)^{p/q} dm(\xi) \leq C\|f\|^p_{H^p_\omega}. \qquad (3)$$

Замечание 1'. Для $\omega \equiv C$, первые два неравенстваthe в (2') и (2")хорошо известны и имеют много приложений в теории пространств голоморфных функций (описание ограниченных линейных функционалов, теоремы вложения, теоремы о мултипликаторах и т.д., см. [3], [9]). Некоторые следствия (3), известные при $\omega \equiv C$, приведены в параграфе 3. Без условия (V), Теорема 2, в силу (2"') является обобщением классической теоремы Карлесона (случай $\omega \equiv C$, $p = q$ Теоремы 2) и теоремы У. Кона из [6] (случай $\omega \equiv 1$, $q = 1$ теоремы 2). Ограничение (V) на наш взгляд, заслуживает отдельного изучения.

Доказательство Теоремы 1. Нам понадобится следующее простое утверждение : если вес удовлетворяет условию Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^2)$ $(p \geq 1)$ на комплексной плоскости, то для любых $k = 0, 1, 2, \dots$ и $i = -2^k, \dots, 2^k - 1$ имеют место соотношения :

$$(a) \quad \sup_{z \in \Delta_{ik}} \frac{1}{|\Delta_{ik}|} \int_{\Delta_{ik}} \omega(\zeta)\, dm_2(\zeta) \leq C\omega(z), \quad z \in \Delta_{ik}, p = 1, \qquad (3')$$

$$(b) \sup_{\Delta_{i,k}} \left(\frac{1}{|\Delta_{ik}|}\int_{\Delta_{ik}} \omega(z)\, dm_2(z)\right)\left(\frac{1}{|\Delta_{ik}|}\int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^{-\frac{1}{p-1}} dm_2(z)\right)^{p-1} < +\infty, \; p > 1. \qquad (3'')$$

Для доказательства (3''), достаточно заметить, что для любого $\Delta_{ik} \subset D$ ($k = 0, 1, 2, \dots$, $i = -2^k, \dots, 2^k - 1$) найдутся кубы $K_2, K_1 \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $K_1 \subset \Delta_{jk} \subset K_2$ и $C_1|K_i| \leq |\Delta_{jk}| \leq |K_i|C_2$ $(i = 1, 2)$ для некоторых постоянных C_1 и C_2. Для доказательства (3'), см. [9], стр. 40.

Нетрудно проверить, что

$$S = \left(\int_D |f(z)|^p (\omega(z))^p dm_2(z)\right)^{q/p} \leq \sum_{i,k} \max_{\Delta_{ik}} |f(z)|^q \left(\int_{\Delta_{ik}} (\omega(z))^p dm_2(z)\right)^{q/p}. \qquad (3''')$$

Учитывая субгармоничность $|f|^q$, получаем

$$\max_{z\in\Delta_{ik}}|f(z)|^q\le\frac{C_q}{|\Delta^*_{ik}|}\int_{\Delta^*_{ik}}|f(z)|^q dm_2(z),\quad 0<q<\infty,$$

где Δ^*_{ik} ($k=0,1,2,\dots$, $i=-2^k,\dots,2^k-1$) суть увеличенные диадические кубы (см. [9]).

Далее, при $s=q/p+1$ используя (3''') и известное "обратное неравенство Гёльдера" для весов Макенхаупта (см. [10]), получаем

$$\left(\int_{\Delta_{ik}}(\omega(z))^p dm_2(z)\right)^{q/p}=|\Delta_{ik}|^{q/p}\left\{\left(\int_{\Delta_{ik}}(\omega(z))^q dm_2(z)\right)^{-p/q}\frac{1}{|\Delta_{ik}|}\right\}^{q/p}\le(\widetilde{L}).$$

$$(\omega^{-q}\in A_s)\le|\Delta_{ik}|^{q/p}\left(\int_{\Delta_{ik}}(\omega(z))^{-q}dm_2(z)\right)\frac{1}{|\Delta_{ik}|}\le$$

$$\le|\Delta_{ik}|^{\frac{q-p}{p}}\int_{\Delta_{ik}}(\omega(z))^{-q}dm_2(z). \tag{4}$$

Далее

$$S\le\sum_{i,k}\frac{|\Delta_{ik}|^{q/p-1}}{|\Delta^*_{ik}|}\int_{\Delta^*_{ik}}|f(z)|^q dm_2(z)\int_{\Delta^*_{ik}}(\omega(z))^{-q}dm_2(z)\le$$

$$\le\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^q(\omega(z))^{-q}(1-|z|)^{2q/p-2}dm_2(z),$$

где последняя оценка следует из соотношений

$$(1-|z|)^2\sim2^{-2k}\sim|\Delta_{ik}|\sim|\Delta^*_{ik}|,\quad z\in\Delta_{ik},$$

и оценки (см. [10])

$$\frac{1}{|\Delta^*_{ik}|}\int_{\Delta^*_{ik}}|f(z)|^q dm_2(z)\le[\omega^{-q}]_{A_s}\frac{\int_{\Delta^*_{ik}}|f(z)|^q(\omega(z))^{-q}dm_2(z)}{\int_{\Delta^*_{ik}}(\omega(z))^{-q}dm_2(z)}, \tag{4'}$$

вытекающей из (3') и неравенства (см. [9])

$$\sum_{i,k}\int_{\Delta^*_{ik}}|G(z)|^q dm_2(z)\le C_q\int_{\mathbb{D}}|G(z)|^q dm_2(z),\quad q\in(0,+\infty),\quad G\in L^q(\mathbb{D}), \tag{4''}$$

которое вытекает в силу конечнократности покрытия $\{\Delta^*_{ik}\}$.

Докажем оценку пункта 2). Рассуждения во многом сходны с рассуждениями приведёнными выше. Очевидно, что

$$I=\left(\int_0^1 M_p(f,r)\omega(r)\,dr\right)^q\le\sum_{k\ge0}(M_p(f,r_k))^q\left(\int_{1-2^{-k}}^{1-2^{-k-1}}\omega(r)\,dr\right)^q.$$

Далее, так как $\omega^{-q} \in A_s(\mathbb{R})$, то рассуждая как и выше (доказательство оценки (4), пункт 1)), получаем

$$\left(\int_{1-2^{-k}}^{1-2^{-k-1}} \big(\omega_1(r)\big)^{-1/q} dr\right)^q \leq 2^{-k(q-1)} \int_{I_k} \big(\omega(|z|)\big)^q d(|z|) \quad (\omega_1 = \omega^{-q}).$$

Далее, очевидно,

$$M_p^q(f, r_k) \leq \left(\int_{1-2^{-k-1}}^{1-2^{-k-2}} M_p^q(f, r)\, dr\right) (2^k)^q,$$

где $r_k = 2^{-k-1}$. Следовательно, учитывая аналог (4′) для $I_k = (1 - 2^{-k-1}, 1 - 2^{-k-2})$, окончательно получаем

$$I \leq \int_0^1 M_p^q(f, r)\big(\omega(r)\big)^{-q}(1-r)^{q-1} dr.$$

Доказательство теоремы 2. Наши рассуждения в корне отличаются от рассуждений У. Кона из [6], и основываются на свойствах новых функциональных пространств, введённых в работе [5]. В отличие от [6], наши рассуждения обладают преимуществом, так как отделяют условие на μ, "расщепляя" g и μ, что позволяет получать новые условия на μ и новые теоремы вложения.

Пользуясь соображениями двойственности, при $g \in L^{(p/q)'}(d\xi)$, получаем

$$S = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z|}\, d\mu(z)\right)^{p/q} dm(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\Gamma(\xi)} \frac{|f(z)|^q}{1-|z|}\, d\mu(z) g(\xi)\, dm(\xi).$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$S = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q |G^* g(z)|\, d\mu(z), \quad (G^* g)(z) = \frac{1}{1-|z|^2} \int_{\mathbb{T}} \lambda_{\Gamma(\xi)}(z) g(\xi)\, dm(\xi).$$

Известно (см. [6]), что

$$|G^*(g)(z)| \leq P(g)(z), \tag{4'''}$$

где $P(g)$ – интеграл Пуассона функции g. Далее (см. [9]), имеем

$$S \leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q |P(g)(z)|\, d\mu(z), \tag{5}$$

$$S \leq \sum_{j,k} \int_{\Delta_{jk}} |G(z)|\, d\mu(z) \leq C \sum_{j,k} \left(\max_{\Delta_{jk}} |G|\right) \mu(\Delta_{jk}) \tag{6}$$

$$\max_{z\in\Delta_{ik}}|G(z)|\le\max_{z\in\Delta_{ik}}|P(g)(z)|\max_{z\in\Delta_{ik}}|f(z)|^q,\quad |G(z)|=|P(g)(z)||f(z)|^q,$$

где, как и выше,

$$\Delta_{ik}=\left\{r\xi : r\in\left(1-2^{-k},1-2^{-k-1}\right),\ \xi=e^{i\vartheta},\ \pi i2^{-k}<\vartheta\le\pi(i+1)2^{-k}\right\},\tag{7}$$

$k=0,1,\ldots,$ $i=-2^k,\ldots,2^k-1$. Известно [9], что

$$\max_{z\in\Delta_{ik}}|G_1(z)|\le\left(\int_{\Delta_{ik}}|G_1(z)|\,dm_2(z)\right)2^{2k},\quad |G_1(z)|=|f(z)|^q.\tag{7'}$$

Следовательно, учитывая (4'''), (5), (V), (6) и (7'), получаем

$$S\le\int_{\mathrm{D}}|f(z)|^q|P(g)(z)|\sum_{i,k}2^{2k}\mu(\Delta_{ik})\lambda_{\Delta^*_{ik}}\,dm_2(z),\quad \lambda_{\Delta^*_{ik}}=0,\quad z\notin\Delta^*_{ik}.$$

Используя неравенство, доказанное в [5]

$$\int_{\mathrm{D}}\frac{|f(z)g(z)|}{1-|z|}\,dm_2(z)\le\int_{\mathrm{T}}\sup_{z\in\Gamma(\xi)}|f(z)|\sup_{\xi\in I}\int_{\Pi I}\frac{|g(z)|}{1-|z|}\,dm_2(z)\,dm(\xi)\tag{8}$$

и тот факт, что ядро Пуассона оценивается сверху через максимальную функцию Харди–Литтлвуда, получаем

$$S\le\int_{\mathrm{D}}|f(z)|^q|P(g)(z)|\sum_{i,k}2^{2k}\mu(\Delta_{ik})\lambda_{\Delta^*_{ik}}\,dm_2(z)\le\int_{\mathrm{D}}|f(z)|^q|P(g)(z)|\varphi(z)dm_2(z),\tag{9}$$

$$\left\|\sup_{\xi\in I}\int_{\Pi I}\varphi(z)dm_2(z)\big(\omega(\xi)\big)^{-q/p}\right\|\int_{\mathrm{T}}\sup_{z\in\Gamma(\xi)}|P(g)(z)|\sup_{z\in\Gamma(\xi)}|f(z)|^q\big(\omega(\xi)\big)^{q/p}dm(\xi)=$$
$$=S_1^{\omega}\times S_2,\tag{9'}$$

где

$$\varphi(z)=\sum_{i,k}2^{2k}\mu_{\Delta_{ik}}\left(\lambda_{\Delta^*_{ik}}(z)\right).$$

Неравенство для S_2 вытекает из неравенства Гёльдера с показателем p/q ($p>q$) и из теоремы Харди–Литтлвуда (см. [7, 10]) об ограниченности оператора M_g : $L^s\to L^s$ при $s>1$. Наконец, легко показать (см. [10]), что $S_1^{\omega}(\omega)\le\|\mu\|_{Car\,\alpha(\omega)}$ при $\alpha=-q/p$ (см. [4]).

Замечание 2. При $\omega\equiv 1$ и $q=1$ неравенство (3) теоремы 2 было установлено У. Коном в [6]. Из (2''') легко видеть, что результат У. Кона обобщает теорему

Карлесона при $p = q = 1$. Действительно, достаточно учесть, что при $|\Delta^*_{jk}| = 2^{-2k}$ и (см. [4])

$$\frac{1}{|I|}\int_{\Pi I} F(z)dm_2(z) \le C\int_{\mathbb{D}} \frac{|F(z)|}{|1-\overline{w}z|^2}(1-|w|)dm_2(z)$$

при $\omega \equiv 1$ и $q = 1$ имеем

$$S_1 \le \sup_{\xi\in I}\frac{1}{|I|}\left[\int_{DI}\sum_{j,k} 2^{2k}\mu(\Delta_{jk})\lambda_{\Delta^*_{jk}}(z)\,dm_2\right] \le$$

$$\le \sup_{w\in\mathbb{D}}\sum_{j,k} 2^{2k}\mu(\Delta_{jk})\int_{\Delta^*_{jk}}\frac{1-|w|}{|1-\overline{w}z|^2}dm_2(z) \le$$

$$\le \sup_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|)\int_{\mathbb{D}}\frac{d\mu(z)}{|1-\overline{w}z|^2}\sup_{\xi\in I}\frac{1}{|I|}\int_{\Pi I}d\mu. \qquad (10)$$

§3. ТЕОРЕМЫ О МУЛТИПЛИКАТОРАХ И ПРОЕКТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕСАМИ ТИПА МАКЕНХАУПТА

Начнём с доказательств двух утверждений (известных при $\omega \equiv C$) для пространств Джрбашяна с весами Макенхаупта. Доказательства опираются на Лемму А и Теоремы 1 и 2. Затем мы рассмотрим операторы свёртки и проектирования, действующие в H^p_ω и $A^p_\alpha(\omega^s)$. Сделаем сначала несколько замечаний, вытекающих из утверждений, доказанных в §1.

Из (2') легко вывести, что если $g(z)$ функция класса

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|D^{\beta+1}g(z)\right||\omega(z)|^{-1}(1-|z|)^{\beta+2-\frac{\alpha+2}{q}} < +\infty,\quad \beta > \frac{\alpha+2}{q}, \qquad (11)$$

то формула

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{\mathbb{T}} f(r\xi)\overline{g(r\xi)}\,dm(\xi)$$

порождает ограниченный, линейный функционал на пространстве

$$A^q_\alpha(\omega^{-q}) = \left\{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^q_{A^q_\alpha(\omega^{-q})} = \int_{\mathbb{D}}|f(z)|^q(\omega(z))^{-q}(1-|z|)^\alpha dm_2(z) < +\infty\right\}, \qquad (12)$$

где $q \le 1$ и $\omega^{-q} \in A_1(\mathbb{R}^2)\bigcap(\widetilde{L})$ (это утверждение известно из [9] для $\omega \equiv 1$ (или $\omega \equiv C$), так как $A^p_\alpha = A^p_\alpha(1)$).

Используя (3) и (2'), (2"), можно легко вывести различные оценки, связывающие пространства Джрбашяна (или со смешанной нормой) с весами Макенхаупта с пространствами Харди с весами A_p. Кроме того, для функций из пространств A^p_α имеет место известная оценка (см. [9]) :

$$|f(z)| \le \frac{C\|f\|_{A^p_\alpha}}{(1-|z|)^{(2+\alpha)/p}}, \quad 0<p<+\infty, \quad \alpha>-1. \tag{14}$$

Для пространств $A^q_\alpha(\omega^{-q})$, $\omega^{-q}\in A_1$ имеет место обобщение оценки (14) :

$$|f(z)| \le \frac{C\|f\|_{A^q_\alpha(\omega^{-q})}}{\left[(1-|z|)^\alpha \int_B \omega^{-q}(\xi)\,dm_2(\xi)\right]^{1/q}}. \tag{15}$$

Действительно, если $z\in\mathbb{D}$, то $B\left(z,\frac{1-|z|}{2}\right)\subset\mathbb{D}$, и из (4') и субгармоничности функции $|f(z)|^q$, для любых $0<q<\infty$ и $\alpha>-1$, получаем

$$(1-|z|)^\alpha|f(z)|^q \le \frac{C}{|B|}\int_B |f(\zeta)|^q(1-|\zeta|)^\alpha dm_2(\zeta) \le$$

$$\le \left[\omega^{-q}\right]_{A_1}\left(\int_B (\omega(z))^{-q}dm_2(z)\right)^{-1}\int_B |f(z)|^q(1-|z|)^\alpha(\omega(z))^{-q}dm_2(z).$$

Аналогично случаю "обычных" пространств $A^p_\alpha(\omega)$ и $A^q_\beta(\omega)$, $p\ne q$, из оценки (15) можно получать различные вложения.

Хорошо известны также следующие утверждения (см. [9], [11]) : (i) при любом $\alpha>-1$, $0<p\le1$ и $\beta>0$ таких, что $\alpha>\beta+1/p-2$, оператор

$$(T_\alpha f)(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{(1-\zeta\bar z)^{\alpha+2}}(1-|z|)^\alpha dm_2(z),$$

где $\mu(z)=(1-|z|)^{\beta p-1}dm_2(z)$, отображает $hA^p_{\beta p-1}$ в пространство $A^p_{\beta p-1}(\mathbb{D})$. Далее, (ii) если $\omega(z)\ge0$, $1<p<+\infty$ и $d\mu_\alpha(z)=(1-|z|)^\alpha dm_2(z)$, то T_α отображает $L^p\left(D,\omega(z)d\mu_\alpha(z)\right)$ в себя, если

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|)^{-(2+\alpha)}\left(\int_{\Pi I}\omega(z)(1-|z|)^\alpha dm_2(z)\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int_{\Pi I}(\omega(z))^{-q/p}(1-|z|)^\alpha dm_2(z)\right)^{1/q}<+\infty, \quad \frac1p+\frac1q=1.$$

Утверждение (i) является вариантом обычной теоремы о проекторах из L^p_α в A^p_α $(p\ge1)$ (см. [9]), а Теорема 3 (которую мы докажем опираясь на Теорему 1) является его обобщением для $0<p\le1$. Теорема 3 одновременно касается ограниченности проекторов в классе $hA^p_\alpha(\omega)$ функций гармонических в круге и имеющих конечные квазинормы $\|f\|_{A^p_\alpha(\omega)}$ $(0<p\le1)$. Кроме того, Теорема 3 даёт аналог (ii) для гармонических пространств Джрбашяна с весами Макенхаупта A_p $(0<p\le1)$ и является основным результатом, опирающимся на Теорему 1.

Теорема 3. *Пусть $\beta > 0$, $0 < q \le 1$ и $\alpha > 1/q - 2 + \beta$ суть числа и пусть $g^{-q}(z) \in A_1(\mathbb{R}^2)\bigcap(L)$. Тогда оператор*

$$(T_\alpha^g)(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)g(z)}{(1 - w\bar{z})^{\alpha+2}}(1 - |z|)^\alpha dm_2(z)$$

ограничен и отображает $hA^q_{\beta q-1}(g^{-1})$ в $A^q_{\beta q-1}(1)$.

Доказательство следует из последовательного применения оценки (2') и следующей оценки

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\zeta|)^t}{|1 - \zeta z|^{t_1}} dm_2(\zeta) \le \frac{C}{(1 - |z|)^{t_1 - t - 2}}, \quad t_1 > t + 2, \quad t > -1.$$

Очевидно, при $g(z) \equiv 1$ Теорема 3 даёт утверждение 1) Теоремы 1.

Наконец, дадим ещё одно применение Теоремы 1, теорему о коэффициентных мултипликаторах классов $A^p_\alpha(\omega)$ и H^p_ω. Эта теорема обобщает известные утверждения (случай $\omega \equiv 1$) из [12], [14].

Напомним, что (см. [12]) последовательность $\{c_k\}_{k\ge0}$ называется коэффициентным мультипликатором из X в Y (где пространства X и Y суть некоторые подмножества из $H(\mathbb{D})$) если для любой функции $f(z) = \sum_{k\ge0} a_k z^k \in X$ функция $g(z) = \sum_{k\ge0} a_k c_k z^k$ принадлежит множеству Y. Через $M_T(X, Y)$ обозначим пространство мультипликаторов действующих из X в Y.

Теорема 4. *Пусть $0 < p \le 1$, $0 < q \le p$, $t \ge 0$ и $\alpha > -1$ суть числа. Тогда*

$$M_T\left(A^q_\alpha(\widetilde{\omega}), H^{p,\infty}_t\right) = \left\{g \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} M_p\left(D^\gamma g, |z|\right)(\widetilde{\omega}(z))^{-1/q}(1 - |z|)^{t+1/q} < +\infty\right\},$$

где $\gamma = (\alpha + 2)/q - 1$,

$$H^{p,\infty}_t = \left\{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{0<r<1} M_p(f, r)(1 - r)^t < \infty, \quad t \ge 0, \quad 0 < p < \infty\right\}$$

где $\widetilde{\omega}$ определена в $|z| < 1$ по (1''), $\omega \in A_2(\mathbb{T})$ - вес Макенхаупта, $(\widetilde{\omega}(z))^{-1} \in A_1(\mathbb{R}^2)\bigcap(L)$, $\widetilde{\omega}(z) \ge 1$, и

$$M_T\left(A^q_\alpha(\widetilde{\omega}), A^p_\beta\right) = \left\{g \in H(\mathbb{D}) : \sup_{|z|<1} M_p\left(D^\gamma g, |z|\right)(1 - |z|)^s \left(\widetilde{\omega}(z)\right)^{-1/q} < +\infty\right\},$$

где на функцию $\widetilde{\omega}(z)$ и параметры наложены те же ограничения

$$\beta > 0, \quad \alpha > -1, \quad s = 1/q + (\beta + 1)/p, \quad \alpha \in (2q/p - 2, 2q/p - 1).$$

Мы только вкратце очертим доказательство этой теоремы. Доказательство вложений $\subset$ стандартно и опирается на Лемму A, теорему о замкнутом графике и подбором пробной функции $f_l(z) = (1 - \overline{z}z)^{-(m+1)}$, $(m \in N)$ (см. [12]). Для доказательства обратного утверждения, необходимо использовать Теорему 1 и факт, что мера

$$d\mu(z) = \frac{(1-|z|)^\alpha}{(1-|\omega(z)|)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, \quad |\omega(z)| \in (0,1), \quad z \in \mathbb{D},$$

является мерой Карлесона.

Abstract. Inequalities obtained in Hardy and Djrbashian spaces with Muckenhaupt weights are used to generalize some well known results on projections and coefficient multipliers in the classical Djrbashian spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. McPhail, "A weighted interpolation problem for analytic functions," Studia Math, vol. 96, no. 2, pp. 105 – 116, 1990.
2. D. Girela, M. Lorente, M. Sarrion, "Embedding derivatives of weighted Hardy spaces into Lebesque spaces", Proc. Camb. Phil. Soc, vol. 116, no. 1, pp. 151 – 166, 1994.
3. N. Nikolski, Hardy, Hankel and Toeplitz, vol. 1, Math Surv. and Monog., vol. 92, AMS, 2001.
4. Дж. Гарнетт, Ограниченные Аналитические Функции, Мир, Москва, 1984.
5. R. Coifman, Y. Meyer, E. Stein, "Some new functional spaces and their application to Fourier analysis", Journal of Func. Anal., vol. 62, pp. 304 – 335, 1985.
6. W. Cohn, "Generalized area operators on Hardy spaces", Math Anal. and Appl., vol. 216, pp. 112 – 121, 1997.
7. Е. Дынькин, "Методы теории сингулярных интегралов. Преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда", том 15, стр. 197 – 292, ВИНИТИ, Москва, 1987.
8. E. Stein, Harmonic Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
9. A. Djrbashian, F. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner-Texte zur Math., Leipzig, 1988.
10. L. Grafakos, Classical and Modern Fourier Analysis, Prentice-Hall, Missouri, 2003.
11. A. Bonami, D. Bekolle, "Inegalitis a poids pour le noyau de Bergman", C. AC. Sci. Paris, vol. 286, ser. 775, 1978.
12. M. Jevtič, M. Pavlovič, "Coefficient multipliers on spaces of analytic functions", Acta Math Sci., vol. 64, pp. 531 – 545, 1998.
13. У. Рудин, Теория Функций в Поликруге, Мир, Москва, 1974.
14. С. В. Шведенко, "Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре", Итоги науки и техники, сер. Мат., стр. 3 – 124, ВИНИТИ, 1985.

Поступила 24 февраля 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 67-79

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ДВУСТОРОННЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

С. Б. Якубович

Университет г. Порто, Португалия
E-mail : syakubov@fc.up.pt

Резюме. Для двустороннего преобразования Лапласа $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, определённого для любой функции $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\Phi(t) = O(e^{-\cosh \alpha t})$ при $|t| \to \infty$ для некоторого $\alpha > 1$, доказана следующая формула обращения

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k e^{x(n+k+1)}}{k!} F(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R},$$

где сходимость понимается или в смысле L_p-нормы $(1 \le p < \infty)$, или почти всюду. Если функция Φ представима в виде преобразования Фурье L_1-функции, то сходимость равномерна для всех $x \in \mathbb{R}$. В гильбертовом случае $p = 2$ получена скорость сходимости аппроксимирующего оператора. Также получена соответствующая формула обращения для преобразования Меллина вещественной переменной.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Настоящая работа посвящена двустороннему преобразованию Лапласа [3], [9] вещественной переменной

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке фонда "Centro de Matemática" университета г. Порто, Португалия.

где $\Phi(t)$ – почти всюду ограниченная, комплекснозначная функция на $\mathbb{R}$, т.е. $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$, поведение которой на бесконечности заведомо обеспечивает абсолютную сходимость интеграла (1.1). Устанавливаются некоторые интегральные разложения и разложения в виде рядов для класса функций Φ, приводящие к вещественной формуле обращения для преобразования (1.1), что заполняет пробел в вещественной теории обращения для двустороннего преобразования Лапласа и преобразования Меллина.

Преобразование Меллина вещественной переменной (см. [6]) легко получается из (1.1) простой подстановкой $e^t = y$, приводящей к интегральному представлению Меллина

$$F(x) = \int_0^\infty y^{x-1}\Phi(\log y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Если $\Phi(t)$ является чётной (или нечётной) функцией на $\mathbb{R}$, то $F(x)$ также чётная (или нечётная) и может быть, соответственно, представлена в виде

$$F(x) = 2\int_0^\infty \cosh xt\ \Phi(t)\, dt, \tag{1.3}$$

$$F(x) = 2\int_0^\infty \sinh xt\ \Phi(t)dt. \tag{1.4}$$

Далее, полагая в (1.1) $x = z$ из вертикальной полосы $\sigma_1 < \Re z < \sigma_2$ комплексной плоскости (двустороннее преобразование Лапласа), при некоторых условиях $F(z)$ будет аналитической функцией внутри вышеопределённой полосы. Используя преобразование Фурье, получаем формулу обращения с интегрированием по вертикальной прямой комплексной плоскости. Свойства ограниченности двустороннего преобразования Лапласа комплексной переменной могут быть получены из соответствующего одностороннего преобразования, где интегрирование по $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Например, если $0 < x < \infty$, то для одностороннего преобразования Лапласа

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\Phi(t)dt$$

имеет место хорошо известная вещественная формула обращения Видера–Поста (см. [3], [7] – [9]) :

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{x}\right)^{n+1} F^{(n)}\left(\frac{n}{x}\right),$$

где $F^{(n)}$ – n-ая производная функции F.

Существуют различные подходы к вещественным формулам обращения для одностороннего преобразования Лапласа и его итераций. Последние принадлежат классу более общих преобразований типа свёртки Фурье и Меллина с гипергеометрическими ядрами. В этой связи следует отметить хорошо известные преобразования Стилтьеса, Мейера, Вейерштрасса, и т.д. (см. [3]).

В работах [2], [3], [9] применяется метод интегрального представления Меллина-Барнса (см. [4]) на основе разложений в бесконечные произведения отношений эйлеровских гамма-функций [1]. Вероятностный подход к вещественным формулам обращения был применён в работе [5]. Скорость сходимости аппроксимирующего обращения одностороннего преобразования Лапласа рассматривалась в работах [7], [8].

Прежде всего укажем некоторые достаточные условия, при которых существует двустороннее преобразование Лапласа (1.1), и его оценку для всех $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Для любой функции $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\Phi(t) = O\left(e^{-\cosh \alpha t}\right)$ при $|t| \to \infty$, $\alpha > 1$, существует двустороннее преобразование Лапласа (1.1), причём его интеграл абсолютно и равномерно сходится на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Кроме того,*

$$|F(x)| < \frac{2C}{\alpha} K_{x/\alpha}(1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

где $C > 0$ – постоянная не зависящая от x, а $K_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Доказательство. Прямое вычисление даёт

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} |\Phi(t)| \, dt < C \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} e^{-\cosh \alpha t} dt =$$

$$= \frac{2C}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\cosh t} \cosh\left(\frac{xt}{\alpha}\right) dt = \frac{2C}{\alpha} K_{x/\alpha}(1), \tag{1.6}$$

где $K_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя (см. [1]), имеющая интегральные представления

$$K_\nu(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh u} \cosh \nu u \, du, \tag{1.7}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\infty} e^{-t - \frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt. \tag{1.8}$$

Доказательство Леммы 1 завершено.

Обозначим через $L_p(\mathbb{R}; \omega(t)dt)$ весовые лебеговы пространства функций, для которых

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R};\omega(t)dt)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \omega(t) \, dt\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.9}$$

Тогда гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}; e^{t^2}dt)$, очевидно, содержит все функции $\Phi(t)$, удовлетворяющие условиям Леммы 1, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} dt \leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2 - 2\cosh at} dt < \infty.$$

Лемма 2. *Если $\Phi \in L_2(\mathbb{R}; e^{t^2}dt)$, то существует двустороннее преобразование Лапласа (1.1) в виде интеграла Лебега, являющееся бесконечно гладкой функцией, т.е. $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, все производные $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$, принадлежат $L_2(\mathbb{R}; dx)$ и удовлетворяют следующему условию :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)\right|^2 dx \leq 2\pi n! ||\Phi||^2_{L_2(\mathbb{R}; e^{t^2}dt)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

Доказательство. Очевидно

$$e^{-x^2/2}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{t^2/2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt.$$

Нетрудно проверить, что в последнем равенстве можно дифференцировать по x под знаком интеграла на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Поэтому имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{t^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\right) dt =$$

$$= (-1)^n 2^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{t^2/2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} H_n\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right) dt,$$

где $H_n(y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, является системой полиномов Эрмита (см. [6]). Используя неравенство Шварца и учитывая значение нормировочного множителя для полиномов Эрмита, получаем

$$\left| \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)\right|^2 \leq 2^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} H_n^2\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right) dt =$$

$$= 2^{-n+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2(y)\, dy =$$

$$= n!\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt. \tag{1.11}$$

Следовательно, интегрируя по x и меняя порядок интегрирования, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)\right|^2 dx \leq n!\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx dt =$$

$$= 2\pi n! \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} dt,$$

откуда следует(1.10). Лемма 2 доказана.

§2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 1. *Если Φ удовлетворяет условиям Леммы 1, то Φ имеет представление*

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k e^{x(n+k+1)}}{k!} F(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $F(-n-k-1)$ суть значения двустороннего преобразования Лапласа (1.1) в целых точках. В (2.1) сходимость как по норме пространства $L_p(\mathbb{R}; dt)$, $1 \le p < \infty$, так и почти всюду. Кроме того, если $\Phi \in L^*(\mathbb{R})$, т.е. является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции, то (2.1) сходится равномерно.

Доказательство. Полагая

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) \tag{2.2}$$

и используя асимптотическую формулу Стирлинга (см. [1])

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\; n^n\; e^{-n}, \quad n \to \infty, \tag{2.3}$$

находим, что функция $\Phi_n(x)$ эквивалентна, при $n \to \infty$, выражению под знаком предела в формуле (2.1). Для того, чтобы оценить ряд в (2.2) для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, воспользуемся (1.5) и неравенством $K_\nu(1) \le 2^{|\nu|-1}\Gamma(|\nu|)$, $\nu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, которое легко следует из (1.8). Воспользовавшись формулой Стирлинга (см. [1])

$$\Gamma(z) = O\left(z^{z-1/2}e^{-z}\right), \quad |z| \to \infty, \tag{2.4}$$

получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ne^x)^k}{k!} F(-n-k-1)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^x)^k}{k!} |F(-n-k-1)| \le$$

$$\le C2^{(n+1)/\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ne^x)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{n+k+1}{\alpha}\right) < C_{n,\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2ne^{x+1-1/\alpha})^k}{k^{k(1-1/\alpha)-n-1}} < \infty,$$

где $\alpha > 1$ и $C_{n,\alpha} > 0$ – некоторая константа. Следовательно мы можем подставить в (2.2) представление (1.1) для коэффициентов $F(-n-k-1)$ и поменять порядок интегрирования и суммирования, в силу абсолютной и равномерной сходимости. Тогда вычисление внутреннего ряда даёт :

$$\Phi_n(x) = \frac{(ne^x)^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ne^x)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n+k+1)t}\Phi(t)dt =$$

$$= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^{x-t}} e^{(x-t)(n+1)}\Phi(t)dt. \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Очевидно, $\Phi \in L_1(\mathbb{R}; dt) \cap L_2(\mathbb{R}; dt)$ и значит допускает преобразование Фурье $\hat{\Phi}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(i\tau) \in L_2(\mathbb{R}; d\tau)$. Поэтому, для любого $n \in \mathbb{N}$ выражение (2.5) является свёрткой Фурье Φ с суммируемой функцией $e^{-ne^t}e^{t(n+1)} \in L_1(\mathbb{R}; dt)$. Используя стандартное интегральное представление для гамма-функции Эйлера и применяя тождество Планшереля (см. [6], Теорема 65), вытекает

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(n+1+i\tau)\hat{\Phi}(\tau)e^{-(x+\log n)i\tau}d\tau. \tag{2.6}$$

Кроме того, из равенства Парсеваля и неравенства $|\Gamma(n+1+i\tau)| \le \Gamma(n+1) = n!$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n!}\right|^2 \left|\hat{\Phi}(\tau)\right|^2 d\tau \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\Phi}(\tau)\right|^2 d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx$$

и аналогично, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n^{i\tau}n!} - 1\right|^2 \left|\hat{\Phi}(\tau)\right|^2 d\tau, \tag{2.7}$$

где интеграл в правой части, при $n \to \infty$ стремится к нулю, согласно теореме о доминантной сходимости и формуле Стирлинга (2.3). Следовательно, при $p = 2$ равенство (2.1) доказано в смысле сходимости в среднем, являясь искомой вещественной формулой обращения.

Если преобразование Фурье $\hat{\Phi}(\tau)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}; d\tau)$, т.е. $\Phi \in L^*(\mathbb{R})$, то функция Φ непрерывна на $\mathbb{R}$. Поэтому имеем

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n^{i\tau}n!} - 1\right| \left|\hat{\Phi}(\tau)\right| d\tau \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|\hat{\Phi}\|_{L_1(\mathbb{R};d\tau)}.$$

Отсюда легко следует, что (2.1) сходится равномерно.

Для того, чтобы получить сходимость почти всюду, воспользуемся формулой Стирлинга (2.3) и запишем

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^{x-t}} e^{(x-t)(n+1)} |\Phi(t) - \Phi(x)| dt \le$$

$$\le M\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{g_n(x-t)} |\Phi(t) - \Phi(x)| dt, \tag{2.8}$$

где $M > 0$ – абсолютная постоянная, а $g_n(y) = n(1-e^y) + (n+1)y$, $g_n(0) = 0$. Легко доказать, что $-\infty < g_n(y) < g_n(y_0)$, $y \in \mathbb{R}$, где $y_0 = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ есть точка, в которой достигается максимальное значение функции

$$g_n(y_0) = (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме этого, функция $g_n(y)$ монотонно возрастает при $-\infty < y \le y_0$ и монотонно убывает при $y_0 < y < \infty$. Поэтому, разбивая интеграл в правой части формулы (2.8), для малых $\delta \in \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2}\right)$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le M[I_1 + I_2 + I_3], \tag{2.9}$$

где

$$I_1 = \sqrt{n}\int_{|t-x|<1/\sqrt{n}} e^{g_n(x-t)}|\Phi(t) - \Phi(x)|\,dt,$$

$$I_2 = \sqrt{n}\int_{|t-x|>1/\sqrt{n}}^{|t-x|<\delta} e^{g_n(x-t)}|\Phi(t) - \Phi(x)|\,dt,$$

$$I_3 = \sqrt{n}\int_{|t-x|>\delta} e^{g_n(x-t)}|\Phi(t) - \Phi(x)|\,dt.$$

Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \to \infty$, выводим

$$I_1 \le \sqrt{n}\int\limits_{|t-x|<1/\sqrt{n}} e^{1/n}\,|\Phi(t) - \Phi(x)|\,dt \le e\sqrt{n}\int\limits_{|t-x|<1/\sqrt{n}} |\Phi(t) - \Phi(x)|\,dt = o(1),$$

в силу того, что $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ и x можно рассматривать как точку Лебега функции Φ. Далее, беря $g_n'(y) = 1 + n(1-e^y) \ne 0$ при $|y| > \delta$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{|t-x|>\delta} e^{g_n(x-t)}dt = \frac{1}{n}\int_{|y|>\delta} e^{g_n(y)}\frac{g_n'(y)dy}{1+1/n-e^y} = \frac{1}{n}\,\frac{e^{g_n(y)}}{1+1/n-e^y}\bigg|_{|y|>\delta} -$$

$$-\frac{1}{n}\int_{|y|>\delta} e^{g_n(y)+y}\frac{dy}{(1+1/n-e^y)^2} \le O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{e}{n}\int_{|y|>\delta}\frac{e^y dy}{(1+1/n-e^y)^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{e}{n}\,\frac{1}{1+1/n-e^y}\bigg|_{|y|>\delta} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, так как $|\Phi(t) - \Phi(x)|$ ограничена, то

$$I_3 \le C\sqrt{n}\int_{|t-x|>\delta} e^{g_n(x-t)}dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Для того, чтобы оценить I_2, запишем

$$I_2 = \sqrt{n}\int_{|y|>1/\sqrt{n}}^{|y|<\delta} e^{g_n(y)}|\Phi(x+y)-\Phi(x)|\,dy = I_{2,1}+I_{2,2},$$

где

$$I_{2,1} = \sqrt{n}\int_{-\delta}^{-1/\sqrt{n}} e^{g_n(y)}|\Phi(x+y)-\Phi(x)|\,dy,$$

$$I_{2,2} = \sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} e^{g_n(y)}\,|\Phi(x+y)-\Phi(x)|\,dy.$$

Оценим только $I_{2,2}$, так как $I_{2,1}$ оценивается аналогично. Интегрируя по частям и используя $g_n'(y)<0$, $y\in(1/\sqrt{n},\delta)$, получаем

$$I_{2,2} = \sqrt{n}e^{g_n(y)}\int_0^y |\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du\Big|_{1/\sqrt{n}}^{\delta} -$$

$$-\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} g_n'(y)e^{g_n(y)}\int_0^y |\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du\,dy =$$

$$= \sqrt{n}e^{g_n(\delta)}\int_0^{\delta}|\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du - \sqrt{n}e^{g_n(1/\sqrt{n})}\int_0^{1/\sqrt{n}}|\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du-$$

$$-\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} yg_n'(y)e^{g_n(y)}\frac{1}{y}\int_0^y |\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du\,dy =$$

$$= \sqrt{n}\delta e^{g_n(\delta)}o(1)+o(1)-o(1)\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} yg_n'(y)e^{g_n(y)}dy,$$

имея ввиду, что x – точка Лебега функции Φ. Легко видеть, что $g_n(\delta)<0$. Действительно, находим

$$g_n(\delta) = \delta + n(1+\delta-e^{\delta}) < \delta - \frac{n\delta^2}{2} < \delta - \frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{n}\,\delta\,e^{g_n(\delta)} < \frac{\sqrt{n}\,\delta}{1-g_n(\delta)} = \frac{\sqrt{n}\,\delta}{1-\delta+n(e^{\delta}-1-\delta)} < \frac{2\sqrt{n}\,\delta}{n\delta^2} = \frac{2}{\sqrt{n}\,\delta} < 2.$$

В тоже время, имеем

$$\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} yg_n'(y)\,e^{g_n(y)}dy = \sqrt{n}\,\delta e^{g_n(\delta)} - e^{g_n(1/\sqrt{n})} - \sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} e^{g_n(y)}dy <$$

$$< O(1) + \frac{2}{\sqrt{n}}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta}\frac{dy}{y^2} = O(1)+\frac{2}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{n}-\frac{1}{\delta}\right] = O(1)+2-\frac{2}{\sqrt{n}\,\delta} = O(1).$$

Поэтому, $I_{2.2} = o(1)$ при $\delta \to 0+$ и $n \to \infty$. Аналогично, $I_{2.1} = o(1)$. Итак, можно найти $\delta > 0$, для которого I_2 достаточно мало и устремляя $n \to \infty$, приходим к (2.9). Следовательно, (2.1) сходится почти всюду.

В случае общего $p \in [1, \infty)$, мы вновь используем (2.5). Действительно, согласно включению $\Phi \in L_p(\mathbb{R}; dx)$, применяя обобщённое неравенство Минковского и тождество

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^t} e^{t(n+1)} dt = 1,$$

выводим

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^t} e^{t(n+1)} \left[\Phi(x-t) - \Phi(x) \right] dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^t} e^{t(n+1)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt.$$

Рассуждая как и в (2.9), получаем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} \le M_1 [J_1 + J_2 + J_3], \tag{2.10}$$

где

$$J_1 = \sqrt{n} \int_{|t| < 1/\sqrt{n}} e^{g_n(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt,$$

$$J_2 = \sqrt{n} \int_{|t| > 1/\sqrt{n}}^{|t| < \delta} e^{g_n(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt,$$

$$J_3 = \sqrt{n} \int_{|t| > \delta} e^{g_n(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt.$$

Поэтому, используя неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} \le 2 \|\Phi\|_{L_p(\mathbb{R}; dx)},$$

нетрудно проверить, что J_3 стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. рассуждения о сходимости почти всюду). Касаясь J_1, воспользуемся непрерывностью в p-среднем, которая означает, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|\Phi(\cdot - t) - \Phi\|_{L_p(\mathbb{R}; dx)} \le \varepsilon, \quad |t| < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sqrt{n}\int_{|t|<1/\sqrt{n}} e^{g_n(t)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x-t)-\Phi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}dt = O(\varepsilon).$$

J_2 снова становится малым для достаточно малого $\delta > 0$ при $n \to \infty$. Итак, формула (2.1) доказана для любого $p \geq 1$ в смысле сходимости в среднем.

Наконец, покажем, что преобразование (1.1) функции $\Phi_n(t)$ сходится к $F(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$. В самом деле, подставив представление (2.5) функции $\Phi_n(x)$ в (1.1), поменяем порядок интегрирования. Тогда, при $n > -x-1$, непосредственным вычислением получим

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi_n(t)\,dt = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^{t-y}}e^{(t-y)(n+1)+xt}dtdy =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1+x)}{n!\,n^x}F(x).$$

Поэтому по формуле Стирлинга, для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Легко видеть, что функция Φ в Лемме 1 очень быстро убывает на бесконечности. Однако, беря, например, $\Phi(t) = e^{-t^2}$, которая не принадлежит данному классу, имеем $F(-n-k-1) = \sqrt{\pi}e^{(n+k+1)^2/4}$ и ряд (2.1) расходится для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.

В качестве следствия, приходим к теореме о преобразовании Меллина вещественной переменной (см. (1.2))

$$h^*(x) = \int_0^{\infty} h(t)t^{x-1}dt. \tag{2.11}$$

Теорема 2. *Пусть $h \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ и $h(t) = O(e^{-\frac{1}{2}(t^\alpha+t^{-\alpha})})$, $\log t \to \infty$, где $\alpha > 1$. Тогда существует преобразование Меллина (2.11), где интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Кроме того, $h(x)$ допускает представление*

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} e^n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^k x^{n+k+1}}{k!}h^*(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где, в свою очередь, ряд абсолютно сходится как по норме пространства $L_p(\mathbb{R}_+;dt)$, $1 \leq p < \infty$, так и почти всюду. В случае $h(e^x) \in L^*(\mathbb{R})$ сходимость равномерна.

Теорема 3. *Пусть функции Φ, Ψ удовлетворяют условиям Леммы 1 с $\alpha > 2$ и F, G суть соответствующие преобразования Лапласа (1.1). Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\Psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} F(-n-k-1)G(n+k+1), \qquad (2.12)$$

где интеграл и ряд сходятся абсолютно. Если функция $\Phi(x)$ чётна (или нечётна) на $\mathbb{R}$, то имеют место соотношения типа Парсеваля для преобразований (1.3) и (1.4) :

$$\int_{0}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{8\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} |F(n+k+1)|^2. \qquad (2.13)$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования и суммирования в равенствах (2.1) и (2.2), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x)\Psi(x)dx = e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} F(-n-k-1)G(n+k+1), \qquad (2.14)$$

так как в силу Леммы 1 имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} |F(-n-k-1)G(n+k+1)| = O\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4en)^k}{k^{k(1-2/\alpha)-n-1}}\right) < \infty, \quad \alpha > 2,$$

для любых $n \in \mathbb{N}$. Более того,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_n(x) - \Phi(x)]\, \Psi(x)dx\right| \leq ||\Psi||_{L_2(\mathbb{R};dx)} ||\Phi_n - \Phi||_{L_2(\mathbb{R};dx)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поэтому вычисление предела в (2.14) приводит к (2.12). Соотношение (2.13) немедленно вытекает из $\Psi = \overline{\Phi}$ и свойства чётности как самой функции, так и преобразований (1.3) и (1.4).

§3. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ

В этом параграфе мы, как и в [7], оценим скорость сходимости аппроксимирующего оператора (2.2) в $L_2(\mathbb{R}; dx)$. Воспользовавшись равномерной для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, оценкой

$$\left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n^{i\tau} n!}\right| \leq 1,$$

равенством $n! = \Gamma(n+1)$ и асимптотической формулой (см. [1, Vol. I]) для отношения Гамма-функций при $n \to \infty$, получаем

$$\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{\Gamma(n+1)n^{i\tau}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{i\tau} \left(1 + \frac{i\tau(i\tau-1)}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{|\tau| + \tau^2}{n}\right).$$

При $\frac{\tau^2}{n} < 1$ имеет место соотношение

$$\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{\Gamma(n+1)n^{i\tau}} = 1 + O\left(\frac{|\tau|}{\sqrt{n}}\right).$$

Возвращаясь к (2.7), находим

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right\|_{L_2(\mathbb{R};dx)} \le$$

$$\le \frac{C}{n}\left[\left\|\tau\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R};d\tau)} + \left\|\tau^2\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R};d\tau)}\right], \tag{3.1}$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right\|_{L_2(\mathbb{R};dx)} \le \frac{C}{\sqrt{n}}\left\|\tau\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R};d\tau)}, \tag{3.2}$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная. Следовательно, правая часть неравенства (3.1) конечна и скорость сходимости – $O\left(\frac{1}{n}\right)$, предполагая, что функция Φ дважды дифференцируема и $\Phi', \Phi'' \in L_2(\mathbb{R}; dx)$. Если же функция Φ только один раз дифференцируема, то в свою очередь, правая часть неравенства (3.2) конечна, и скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Теорема 4. a) *Пусть функция Φ дифференцируема и удовлетворяет условиям Леммы 1, и $\Phi' \in L_2(\mathbb{R}; dx)$. Тогда аппроксимирующий оператор (2.2) сходится к функции Φ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}; dx)$ со скоростью $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

b) *Пусть функция Φ дважды дифференцируема и удовлетворяет условиям Леммы 1, и $\Phi', \Phi'' \in L_2(\mathbb{R}; dx)$. Тогда аппроксимирующий оператор (2.2) сходится к функции Φ в норме пространства $L_2(\mathbb{R}; dx)$ со скоростью n^{-1}.*

Аналогично (см. доказательство Теоремы 1), если $\Phi, \Phi', \Phi'' \in L^*(\mathbb{R})$, то мы получаем ту же скорость сходимости в равномерной метрике :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right| \le \frac{C}{n}\sum_{j=1}^{2}\left\|\tau^j\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_1(\mathbb{R};d\tau)},$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\left\|\tau\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_1(\mathbb{R};d\tau)}.$$

Abstract. For the bilateral Laplace transform $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$ well defined for any $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$ satisfying $\Phi(t) = O(e^{-\cosh \alpha t})$ as $|t| \to \infty$ for some

$\alpha > 1$, the inversion formula

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k e^{x(n+k+1)}}{k!} F(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R},$$

is proved, where the convergence is in the L_p-norm ($1 \le p < \infty$) or almost everywhere. If Φ is representable as the Fourier transform of an L_1-function, then the above limit is uniform for all $x \in \mathbb{R}$. For the Hilbert case $p = 2$ the convergence rate of the approximate operator is obtained. The corresponding inversion formula is derived for the real variable Mellin transform.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vols I, II, McGraw-Hill, New York, London and Toronto, 1953.
2. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Плоскости, Москва, Наука, 1966.
3. I. I. Hirshman, D. V. Widder, The Convolution Transform, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1955.
4. Nguyen Thanh Hai, S. B. Yakubovich, The Double Mellin-Barnes Type Integrals and their Applications to Convolution Theory, World Scientific, Singapore, New York, London, 1992.
5. J. L. Teugels, "Probabilistic proofs of some real inversion formulas", Math. Nachr., vol. 146, pp. 149 - 157, 1990.
6. Е. С. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, Москва, 1948.
7. Vu Kim Tuan, Dinh Thanh Duc. "Convergence rate of Post-Widder approximate inversion of the Laplace transform". Vietnam J. Math., vol. 28, no. 1, pp. 93-96, 2000.
8. Vu Kim Tuan, Dinh Thanh Duc. "A new real inversion formula of the Laplace transform and its convergence rate". Frac. Cal. & Appl. Anal. vol. 5, no. 4, pp. 387-394, 2002.
9. D. V. Widder. The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.

Поступила 23 мая 2005

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

К сожалению, в моей статье ("Операторные алгебры, ассоциированные с многозначными преобразованиями", номер 6, том 38, 2003 год) были допущены ошибки и неточности. Во Введении, "невозвратные процессы" следует заменить на "необратимые" процессы. Везде в тексте "покорный" надо заменить на "ручной", "прямое" произведение на "скрещенное", "полуалгебру" на "подалгебру", "множитель" на "фактор". Вместо "эндоморфизм алгебраического типа" надо читать "алгебраический тип эндоморфизма". В третьем разделе выражение "изгибание единичных типов" следует заменить на "обмотка тора". Фамилию Кумджан следует читать как Кумджян или Кумджиан (Kumjian).

Виктор Арзуманян

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 40, Номер 3, 2005

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 40, No. 3, 2005

Contents