ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

Сборник статей

под редакцией Г. Г. Геворкяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Первый пример полной ортонормальной системы являющейся базисом в пространстве $C[0,1]$ был построен в 1928 году. Исследования З.Чисельского начатые в 1963 году продемонстрировали чрезвычайную плодотворность идей Франклина. В частности, общие системы Франклина очень удобны для изучения таких важных понятий как безусловная и гриди базисность.

Статья К. Керяна содержит оценки L_p, $1 \leq p \leq \infty$ норм функций системы и поточечные оценки общих функций Франклина. Также исследуется почти всюду сходимость рядов Фурье, свойство безусловной базисности общей периодической системы Франклина в пространстве L_p, $1 < p < \infty$ и гриди базисность.

В статье той же тематики К. Керяна и М. Погосяна найдены условия, при которых общая периодическая система Франклина является безусловных базисом в пространстве $H^1[0,1]$ (сильная регулярность порождающего разбиения отрезка $[0,1]$). В этой же статье доказано, что общая периодическая система Франклина является базисом в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда порождающее разбиение отрезка $[0,1]$ регулярно по парам.

В статье Г. Геворкяна и А. Камонта доказано, что ни классическая система Франклина, ни любая система всплеска не может являться квазигриди базисом в пространствах $L_1[0,1]$ или $L_1(R)$ соответственно.

Г. Геворкян — Ереван, январь 2005

Известия НАН Армении. Математика, **40**, № *1, 2005, 5–17*

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О КВАЗИ-ГРИДИ БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

Г. Г. Геворкян, А. Камонт

Ереванский Государственный Университет
Институт математики, Сопот, Польша
E-mail : a.kamont@impan.gda.pl

Резюме. Любая полная ортонормированная система, порожденная интегрируемым всплеском и являющейся базисной последовательностью в $L_1(R)$, не является квази-гриди базисом в $L_1(R)$. Классическая система Франклина также не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с напоминания определения квази-гриди базиса в банаховом пространстве B (см. [1], [2]). Пусть $\{x_n\}$ – нормированный базис в банаховом пространстве B и пусть $\{x_n^*\}$ – биортогональная система к $\{x_n\}$. Для любого $x \in B$ и $m = 1, 2, \ldots$, сумма

$$G_m(x) = \sum_{n \in A} x_n^*(x) x_n$$

определяется по следующему правилу : A есть подмножество натуральных чисел, $card\ A = m$, удовлетворяющее $|x_n^*(x)| \geq |x_k^*(x)|$ при $n \in A$ и $k \notin A$.

Определение 1. Нормированный базис $\{x_n\}$ в банаховом пространстве B называется **квази-гриди базисом**, если для любого $x \in B$ суммы $G_m(x)$ сходятся к x в норме пространства B.

Очевидно, что всякий безусловный базис пространства B является квази-гриди базисом. Однако, для таких пространств как $C[0;1]$ и $L_1[0;1]$, которые не обладают безусловными базисами, существование квази-гриди базиса не очевидно. В

Работа выполнена при финансовой поддержке ANSEF, грант № 05-PS-math-87-65 и Фонд Польской Науки.
Работа выполнена при финансовой поддержке KBN грант № 1 P03A 038 27.

работе [3] доказано, что в пространстве $C[0;1]$ не существует квази-гриди базиса, а также существование квази-гриди базиса в пространстве $L_1[0;1]$, однако еще никому не удавалось построить такой базис. Естественно, что такой базис в первую очередь ищут среди уже известных "хороших" базисов.

Настоящая статья указывает где не следует искать квази-гриди базисы или базисные последовательности для пространств $L_1[0;1]$ и $L_1(R)$.

Замечание 1. Нормированная в пространстве $L_1[0;1]$ система Франклина $\{f_n^{(1)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$.

Напомним, что если $\psi \in L_2(R)$ и система функций $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in Z$ (Z — множество всех целых чисел) является полной ортонормированной системой в $L_2(R)$, то ψ называется **всплеском**. Известно [4], что если функция ψ и ее производные убывают достаточно быстро, то система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ образует безусловный базис в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$. Войташчик [5] доказал, что при весьма слабых ограничениях на ψ система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ является безусловным базисом в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$.

Если даже $\psi \in L_1(R)$, то система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ не может быть базисом в $L_1(R)$. Действительно, не трудно видеть, что $\int_R \psi(t)dt = 0$ и следовательно система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ не может быть полной в $L_1(R)$.

Однако, можно ввести понятие всплеск базиса в $L_1(R)$ при существовании масштабной функции ϕ. Не вдаваясь в подробности, отметим, что в последнем случае для почти всех t выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{0\le j\le J-1} \sum_{k\in Z} \psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(\cdot) + \sum_{k\le K} \psi_{J,k}(t)\psi_{J,k}(\cdot) \right\|_1 \le C, \tag{1.1}$$

где $J \ge 0$ и $K \in Z \cup \{+\infty\}$.

Система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ не нормирована в $L_1(R)$, однако $\psi_{j,k}^{(1)} = 2^j\psi(2^j x - k)$ является почти нормированной системой в $L_1(R)$ в том смысле, что $\|\psi_{j,k}^{(1)}\|_1$ не зависит от j и k.

Замечание 2. Если система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ порождена интегрируемым всплеском ψ и удовлетворяет (1.1), то система $\{\psi_{j,k}^{(1)}\}_{j,k\in Z}$ не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки.

Отметим, что условие (1.1) может выполняться даже без существования масштабной функции. Например, в работе [6] показано выполнение (1.1) при достаточно быстром убывании функции ψ.

Функция Хаара является простейшим примером всплеска, т.е.

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{для} \quad \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

Система функций $\{2^{\frac{j}{2}}h(2^jx-k)\}$ обладает многими хорошими свойствами, однако она не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки. По терминологии [2], система $h_{j,k}=2^jh(2^jx-k)\}$ не является безусловным относительно постоянных коэффициентов, т.е. не существует такой постоянной $C>0$, чтобы для любых $F\subset Z^2$ и $\epsilon_{j,k}=\pm1$ выполнялось бы неравенство

$$\left\|\sum_{(j,k)\in F}\epsilon_{j,k}h_{j,k}\right\|_1\le C\left\|\sum_{(j,k)\in F}h_{j,k}\right\|_1.$$

Действительно, не трудно заметить [7], что

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}h_{j,0}\right\|_1=1,$$

однако

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}(-1)^jh_{j,0}\right\|_1\ge\frac{m}{2}.$$

Отметим, что любая система типа Хаара (включая саму систему Хаара) не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$ (см. [8]).

Система Хаара эквивалентна системе Франклина (см. [9]) в пространстве $L_p[0;1]$, $1<p<\infty$ и многим всплеск системам (см. [4], [10]) в пространстве $L_p(R)$, $1<p<\infty$. Следовательно, некоторые результаты, верные для системы Хаара, переносятся на систему Франклина и на всплеск системы. Однако в пространстве $L_1[0;1]$ система Хаара не эквивалентна системе Франклина (см. [11]), а в пространстве $L_1(R)$ система Хаара не эквивалентна всплеск системам (см. [12]). Поэтому из того, что система Хаара не является квази-гриди базисом в L_1 еще не следует, что система Франклина или всплеск система не является базисом в L_1. Ниже доказываются эти замечания.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть $n=2^\mu+\nu$, где $\mu\ge0$. Обозначим

$$s_{n,i}=\begin{cases}\dfrac{i}{2^{\mu+1}} & \text{для}\quad 0\le i\le2\nu,\\[2mm] \dfrac{i-\nu}{2^\mu} & \text{для}\quad 2\nu<i\le n.\end{cases}\tag{2.1}$$

Каждая функция системы Франклина $f_n(t)$, $n\ge2$, непрерывна на $[0;1]$ и линейна на каждом отрезке $[s_{n,i-1};s_{n,i}]$, $i=1,\dots,n$. Следовательно, $f_n(t)$ однозначно определяется значениями $a_i^{(n)} = f_n(s_{n,i})$. Напомним нужные для дальнейшего использования некоторые оценки для функций f_n и для значений $a_i^{(n)}$, полученные в [13], [14].

Верны следующие интегральные неравенства (см. [14], формулы (64), (39) и (47)) :

$$\int_{s_{n,2\nu-2}}^{s_{n,2\nu}} |f_n(t)|\, dt \geq 2^{-\frac{\mu}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}-1), \tag{2.2}$$

$$\|f_n\|_1 < 5\cdot 2^{-\frac{\mu}{2}-1}, \tag{2.3}$$

$$\int_{A_n} |f_n(t)|dt < \frac{1}{5}2^{-\frac{\mu}{2}-1}, \tag{2.4}$$

где

$$A_n = [0;1]\setminus[s_{n,2\nu-4}; s_{n,2\nu+2}]. \tag{2.5}$$

Для всех n имеют место (см. [14], формулы (27) и (62))

$$\sqrt{\frac{2}{3}}2^{\frac{\mu}{2}+1} \leq |f_n(s_{n,2\nu-1})| = \left|a_{2\nu-1}^{(n)}\right| \leq 2^{\frac{\mu}{2}+1}. \tag{2.6}$$

Формулы (33) и (44) работы [14] запишем в виде

$$\frac{107}{66}\left|a_{2\nu-2}^{(n)}\right| < \left|a_{2\nu-1}^{(n)}\right| < \frac{98}{60}\left|a_{2\nu-2}^{(n)}\right|, \quad \nu > 1, \tag{2.7}$$

$$\frac{59}{66}\left|a_0^{(2^\mu+1)}\right| < \left|a_1^{(2^\mu+1)}\right| < \frac{9}{10}\left|a_0^{(2^\mu+1)}\right|. \tag{2.8}$$

И наконец (см. [13], Лемма 2), для $\nu > 1$ имеем

$$\left|a_0^{(n)}\right| = \frac{1}{\cosh\alpha(2\nu-2)}\left|a_{2\nu-2}^{(n)}\right|, \tag{2.9}$$

где α – положительное решение уравнения $\cosh x = 2$.

Лемма 3. *Для всех $\nu > 1$ и при $\mu_1, \mu_2 \geq \log_2\nu$ выполняются*

$$\frac{\|f_{2^{\mu_1}+\nu}\|_1\left|a_0^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right|}{\|f_{2^{\mu_2}+\nu-1}\|_1\left|a_0^{(2^{\mu_2}+\nu-1)}\right|} < 1. \tag{2.10}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\nu > 2$ и отдельно оценим числитель и знаменатель в (2.10). В силу (2.3), (2.6), (2.7) и (2.9) следует, что для любого $\nu \geq 2$ имеют место неравенства

$$\|f_{2^{\mu_1}+\nu}\|_1\left|a_0^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right| < 5\cdot 2^{-\frac{\mu_1}{2}-1}\frac{\left|a_{2\nu-2}^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right|}{\cosh\alpha(2\nu-2)} \leq \frac{66}{107}5\cdot 2^{-\frac{\mu_1}{2}-1}\frac{\left|a_{2\nu-1}^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right|}{\cosh\alpha(2\nu-2)} \leq$$

$$\leq \frac{66}{107} 5 \cdot 2^{-\frac{\nu-1}{2}-1} \frac{2^{\frac{\nu-1}{2}+1}}{\cosh \alpha(2\nu-2)} = \frac{330}{107} \frac{1}{\cosh \alpha(2\nu-2)} < \frac{3,1}{\cosh \alpha(2\nu-2)}. \tag{2.11}$$

Применяя (2.2), (2.6), (2.7) и (2.9), для $\nu > 2$ получим

$$\|f_{2^{\nu-2}+\nu-1}\|_1 \left|a_0^{(2^{\nu-2}+\nu-1)}\right| \geq 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) \frac{\left|a_{2\nu-4}^{(2^{\nu-2}+\nu-1)}\right|}{\cosh \alpha(2\nu-4)} \geq$$

$$\geq 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) \frac{60}{98} \frac{\left|a_{2\nu-3}^{(2^{\nu-2}+\nu-1)}\right|}{\cosh \alpha(2\nu-4)} \geq$$

$$\geq 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) \frac{60}{98} \sqrt{\frac{2}{3}}\, 2^{\frac{\nu-2}{2}+1} \frac{1}{\cosh \alpha(2\nu-4)} =$$

$$= \frac{60}{98} \frac{8}{3} \frac{\sqrt{2}-1}{\cosh \alpha(2\nu-4)} > \frac{0,65}{\cosh \alpha(2\nu-4)}. \tag{2.12}$$

Нетрудно проверить, что для любого натурального m

$$\frac{\cosh \alpha m}{\cosh \alpha(m+2)} < \frac{1+e^{-2\alpha}}{e^{2\alpha}} < \frac{1}{10}. \tag{2.13}$$

Из (2.11) – (2.13) следует (2.10) для $\nu > 2$. При $\nu = 2$ опять имеем оценку (2.11). Поэтому применяя (2.2), (2.6) и (2.8) для $\|f_{2^{\nu-2}+1}\|_1 \left|a_0^{(2^{\nu-2}+1)}\right|$ получим

$$\|f_{2^{\nu-2}+1}\|_1 \left|a_0^{(2^{\nu-2}+1)}\right| \geq 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) \frac{10}{9} \left|a_1^{2^{\nu-2}+1}\right| \geq$$

$$\geq 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) \frac{10}{9} \sqrt{\frac{2}{3}}\, 2^{\frac{\nu-2}{2}+1} > \frac{32}{27}. \tag{2.14}$$

При $\nu = 2$, оценка (2.10) следует из (2.11), (2.14) и равенства $\cosh 2\alpha = 7$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого натурального $N \geq 2$ имеет место*

$$\left\| \sum_{\mu=2}^{N} a_0^{(2^{\mu}+4)} f_{2^{\mu}+4} \right\|_1 > \frac{N}{4 \cosh 6\alpha}.$$

Доказательство. В силу (2.2), (2.6), (2.7) и (2.9) при $n = 2^{\mu} + 4$ следует

$$\left|a_0^{(2^{\mu}+4)}\right| \int_{s_{n,4}}^{s_{n,5}} |f_n(t)|\, dt \geq \frac{\left|a_6^{(2^{\mu}+4)}\right|}{\cosh 6\alpha} 2^{-\frac{\mu}{2}+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{4}{\cosh 6\alpha} \frac{60}{98} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{80}{49} \left(\sqrt{2}-1\right) \frac{1}{\cosh 6\alpha} > \frac{0,65}{\cosh 6\alpha}. \tag{2.15}$$

С другой стороны, в силу (2.4), (2.6), (2.7) и (2.9) при $n = 2^\mu + 4$ имеем

$$\left|a_0^{(2^\mu+4)}\right| \int_{A_{2^\mu+4}} |f_n(t)|\,dt \le \frac{\left|a_6^{(2^\mu+4)}\right|}{\cosh 6\alpha}\frac{1}{5}2^{-\frac{\mu}{2}-1} \le$$

$$\le \frac{66}{107}\left|a_7^{(2^\mu+4)}\right| \frac{1}{5\cosh 6\alpha}2^{-\frac{\mu}{2}-1} \le \frac{66}{535\cosh 6\alpha} \le \frac{1}{8\cosh 6\alpha}. \tag{2.16}$$

Отметим, что если $n_1 = 2^{\mu+1} + 4$ и $n_2 = 2^\mu + 4$, то $s_{n_1,8} < s_{n_2,6}$. Действительно, из (2.1) имеем

$$s_{n_1,8} = \frac{8}{2^{\mu+2}} = \frac{4}{2^{\mu+1}} < \frac{6}{2^\mu + 1} = s_{n_2,6}.$$

Следовательно, отрезки $I_\mu = [s_{2^\mu+4,6}; s_{2^\mu+4,8}]$ попарно не пересекаются. Кроме того, применив (2.1) и (2.5), можно проверить, что если $\mu \ne l$, то $I_\mu \subset A_{2^l+4}$. Поэтому из (2.5), (2.15) и (2.16) следует

$$\left\|\sum_{\mu=2}^{N} a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}\right\|_1 \ge \sum_{\mu=2}^{N}\int_{I_\mu}\left|\sum_{l=1}^{N} a_0^{(2^l+4)} f_{2^l+4}(t)\right| dt \ge$$

$$\ge \sum_{\mu=2}^{N}\left(\int_{I_\mu}\left|a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}(t)\right| dt - \sum_{l\ne\mu}\int_{I_\mu}\left|a_0^{(2^l+4)} f_{2^l+4}(t)\right| dt\right) \ge$$

$$\ge \sum_{\mu=2}^{N}\int_{I_\mu}\left|a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}(t)\right| dt - \sum_{\mu=2}^{N}\int_{A_{2^\mu+4}}\left|a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}(t)\right| dt \ge$$

$$\ge \frac{N-1}{\cosh 6\alpha}(0,65 - 0,125) > \frac{N}{4\cosh 6\alpha}.$$

Лемма доказана.

Для измеримого множества $E \subset R$ и $j = 0, 1, \ldots, k \in Z$, положим

$$E_{j,k} = 2^{-j}(E + k) = \{2^{-j}(t + k) : t \in E\}. \tag{2.17}$$

Для доказательства Замечания 2 нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 5. *Пусть $\mu(E) < \infty$ и для фиксированного j обозначим через G_j множество точек, принадлежащих бесконечно многим $E_{j,k}$, т.е.*

$$G_j = \bigcap_{l\ge 0}\bigcup_{|k|\ge l} E_{j,k}.$$

Тогда $\mu(G_j) = 0$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_k = \mu([k,k+1]\cap E)$. Из $\mu(E) < \infty$ имеем $\sum\limits_{k\in Z}\alpha_k < \infty$. Далее заметим, что для любых j,k и ν

$$\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap E_{j,k}\right)=\frac{1}{2^j}\mu([\nu-k,\nu-k+1]\cap E)=\frac{1}{2^j}\alpha_{\nu-k}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k\in Z}\alpha_k<\infty$, то для любых $\nu\in Z$ и $l\geq 0$ имеем

$$\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap G_j\right)\leq\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap\bigcup_{|k|\geq l}E_{j,k}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{|k|\geq l}\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap E_{j,k}\right)=\frac{1}{2^j}\sum_{|k|\geq l}(\alpha_{\nu-k}+\alpha_{\nu+k})\to 0\quad\text{при}\quad l\to\infty.$$

Следовательно, $\mu([\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}]\cap G_j)=0$ для любого $\nu\in Z$, и поэтому $\mu(G_j)=0$.

Лемма 6. *Пусть $\mu(E)>0$ и $E_j=\bigcup_{k\in Z}E_{j,k}$. Обозначим через D множество точек, принадлежащих бесконечно многим E_j, $j\geq 0$. Тогда $\mu(R\setminus D)=0$.*

Доказательство : Пусть χ_D характеристическая функция множества D. Для доказательства леммы 6 достаточно доказать, что $\chi_D(t)>0$ для любой точки Лебега t функции χ_D. Не умаляя общности предположим, что $\mu(E\cap[0,1])=\alpha>0$. Тогда, как и при доказательстве Леммы 5, для любого $\nu\in Z$ имеем

$$\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^\xi},\frac{\nu+1}{2^\xi}\right]\cap E_\xi\right)\geq\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^\xi},\frac{\nu+1}{2^\xi}\right]\cap E_{\xi,\nu}\right)=\frac{\alpha}{2^\xi}.\tag{2.18}$$

Для любых $j,\xi,\xi\geq j$ и $x\in R$ имеем

$$\operatorname{card}\left\{\nu\in Z:\left[\frac{\nu}{2^\xi},\frac{\nu+1}{2^\xi}\right]\subset\left[x-\frac{1}{2^j},x+\frac{1}{2^j}\right]\right\}\geq 2^{\xi-j}.\tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что для любых x и $\xi\geq j$ имеет место

$$\mu\left(\left[x-\frac{1}{2^j},x+\frac{1}{2^j}\right]\cap E_\xi\right)\geq\frac{\alpha}{2^j}.\tag{2.20}$$

Теперь, обозначая $D_\xi=\bigcup_{\eta\geq\xi}E_\eta$, имеем $D=\bigcap_{\xi\geq 0}D_\xi$. Для любого u, получаем $\chi_D(u)=\lim\limits_{\xi\to\infty}\chi_{D_\xi}(u)$, и последовательность $\chi_{D_\xi}(u)$ убывает. Следовательно, если t – точка Лебега функции χ_D, то

$$\chi_D(t)=\lim_{j\to\infty}2^{j-1}\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t+\frac{1}{2^j}}\chi_D(u)\,du=\lim_{j\to\infty}2^{j-1}\lim_{\xi\to\infty}\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t-\frac{1}{2^j}}\chi_{D_\xi}(u)\,du.\tag{2.21}$$

Но из (2.20) вытекает, что для $\xi>j$ имеем

$$\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t+\frac{1}{2^j}}\chi_{D_\xi}(u)\,du\geq\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t+\frac{1}{2^j}}\chi_{E_\xi}(u)\,du\geq\frac{\alpha}{2^j}.$$

Поэтому из (2.21) следует, что $\chi_D(t)\geq\frac{\alpha}{2}$ для любой точки Лебега функции χ_D. Следовательно, $\mu(R\setminus D)=0$. Лемма 6 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЙ

П. Войташчик [2] доказал, что если система $\{x_n\}$ является квази-гриди базисом в банаховом пространстве B, то существует постоянная C_1, зависящая только от системы $\{x_n\}$ такая, что для любого $x \in B$ и любых λ_1, λ_2

$$\left\| \sum_{\lambda_1 \leq |a_n| \leq \lambda_2} a_n x_n \right\| \leq C_1 \|x\|, \quad a_n = x^*(x). \tag{3.1}$$

Доказательство Замечания 1 : Рассмотрим суммы

$$F_N(t) = \sum_{\mu=0}^{N} \sum_{\nu=1}^{2^\mu} f_{2^\mu+\nu}(0) f_{2^\mu+\nu}(t).$$

Так как система Франклина является базисом в $C[0;1]$ с базисной постоянной 3 (см. [15]), то

$$\|F_N\|_1 \leq 4 \quad \text{для всех} \quad N. \tag{3.2}$$

Разложим функцию F_N по нормированной в $L_1[0;1]$ системе Франклина $\{f^{(1)}_{2^\mu+\nu}\}$, т.е.

$$F_N(t) = \sum_{\mu=0}^{N} \sum_{\nu=1}^{2^\mu} c_{2^\mu+\nu} f^{(1)}_{2^\mu+\nu}(t), \quad f^{(1)}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_1}. \tag{3.3}$$

Из Леммы 1 следует, что $|c_{2^{\mu_1}+\nu_1}| < |c_{2^{\mu_2}+\nu_2}|$ при $\nu_1 > \nu_2$. Следовательно, если переставить слагаемые в сумме (3.3) в порядке убывания $|c_n|$, то сначала пойдут члены $\{c_{2^\mu+1}\}$ в каком-то порядке, следом за ними члены $\{c_{2^\mu+2}\}$ в каком-то порядке и так далее. Следовательно, сумма

$$\sum_{\mu=2}^{N} c_{2^\mu+4} f^{(1)}_{2^\mu+4}(t) \tag{3.4}$$

будет "куском" в переставленной сумме (3.3). По Лемме 2, норма суммы (3.4) в $L_1[0;1]$ растет вместе с N. Отсюда и из (3.2) доказывается, что $\{f^{(1)}_n\}$ не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$. Замечание 1 доказано.

Известно (см. [2]), что если $\{x_n\}$ является квази-гриди базисом в банаховом пространстве B, то существует постоянная C, зависящая только от системы $\{x_n\}$ такая, что для любого конечного множества F и любых $\epsilon_n = \pm 1$ имеем

$$\left\| \sum_{n\in F} \varepsilon_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n\in F} x_n \right\|. \tag{3.5}$$

Из (3.5), для любого конечного множества F и любого подмножества $G \subset F$ следует

$$\left\|\sum_{n\in G} x_n\right\| \leq C\left\|\sum_{n\in F} x_n\right\|. \tag{3.6}$$

Доказательство Замечания 2. Допустим $\{\psi_{j,k}^{(1)}\}_{j,k\in Z}$ – квази-гриди базисная последовательность с "квази-гриди базисной постоянной" C_1 (см. (3.5)) и базисной постоянной C (см. (1.1)). Поскольку $\|\psi\|_1 > 0$, то существует некоторое $A > 0$ такое, что при любом $\delta > 0$ выполняется

$$\mu\left\{x : \big||\psi(x)| - A\big| < \delta\right\} > 0. \tag{3.7}$$

Для A удовлетворяющего (3.7) и $\delta > 0$, обозначим

$$E = \left\{x : \big||\psi(x)| - A\big| < \delta\right\}. \tag{3.8}$$

Определим множества $E_{j,k}$ по формулам (2.17). Ясно, что $0 < \mu(E) < \infty$. В силу (1.1) и Лемм 5 и 6, существует некоторое t такое, что для всех J и всех $K \in Z \cup \{+\infty\}$

$$\left\|\sum_{0\leq j\leq J-1}\sum_{k\in Z}\psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(\cdot) + \sum_{k\leq K}\psi_{J,k}(t)\psi_{J,k}(\cdot)\right\|_1 \leq C, \tag{3.9}$$

и кроме того, для каждого j точка t принадлежит конечному числу множеств $E_{j,k}$, и t принадлежит бесконечному числу $E_{j,k}$. Выберем наименьшее J, для которого

$$\mathrm{card}\left\{(j,k) : j \leq J, \quad k \in Z,\ t \in E_{j,k}\right\} > \frac{1}{\delta}.$$

Далее, пусть $K \in Z$ такое, что

$$\mathrm{card}(I_{J,K}) = \left[\frac{1}{\delta}\right], \tag{3.10}$$

где

$$I_{J,K}^0 = \left\{(j,k) : 0 \leq j < J \text{ или } j = J \text{ и } k < K\right\} \tag{3.11}$$

и

$$I_{J,K} = \left\{(j,k) : (j,k) \in I_{J,K}^0 \text{ и } t \in E_{j,k}\right\}.$$

Рассмотрим сумму

$$F_1(x) = \sum_{(j,k)\in I_{J,K}^0}\psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(x) = \sum_{(j,k)\in I_{J,K}^0}\psi(2^j t - k)\psi_{j,k}^{(1)}(x) \equiv \sum_{(j,k)\in I_{J,K}^0} a_{j,k}\psi_{j,k}^{(1)}(x). \tag{3.12}$$

Из формул (2.17), (3.8) и (3.10) следует, что

$$\mathrm{card}\left\{(j,k) : \left||a_{j,k}| - A\right| < \delta\right\} = \left[\frac{1}{\delta}\right]. \tag{3.13}$$

Поскольку $\|F_1\|_1 \le C$ (см. (3.9), (3.12) и (3.11)) и $\{\psi^{(1)}_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ является квази-гриди базисом с квази-гриди базисной постоянной C_1, то

$$\left\|\sum_{(j,k)\in I_{J,K}} a_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(x)\right\|_1 = \left\|\sum_{A-\delta<|a_{j,k}|<A+\delta} a_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}\right\|_1 \le C_1 C. \tag{3.14}$$

Для $(j,k)\in I_{J,K}$, обозначим $b_{j,k} = A\ \mathrm{sign}\ (a_{j,k})$. Тогда в силу (3.13) и (3.14) для

$$F_2(x) = \sum_{(j,k)\in I_{J,K}} b_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(x)$$

имеем

$$\|F_2\|_1 \le C_1 C + \|\psi\|_1 = C_2. \tag{3.15}$$

Возможны два случая :

1) существует такое $j_0 \in [0;J]$, что $card\{k : (j_0,k)\in I_{J,K}\} \ge \left[1/\sqrt{\delta}\right]$;

2) $card\{j :$ существует k, для которого $(j,k)\in I_{J,K}\} \ge \left[1/\sqrt{\delta}\right]$.

Покажем, что в обеих случаях существует $D\subset I_{J,K}$ такое, что

$$\left\|\sum_{(j,k)\in D} b_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(\cdot)\right\|_1 \ge C_\psi\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right], \tag{3.16}$$

где C_ψ зависит только от ψ и A. При достаточно малых δ, (3.15) и (3.16) доказывают, что система $\{\psi^{(1)}_{j,k}\}$ не является квази-гриди базисом (см. (3.6)).

Возвращаясь к доказательству формулы (3.16), сначала рассмотрим случай 1). Не умаляя общности, допустим, что $j_0 = 0$. Поскольку $\psi\in L^1(R)$, то существует некоторое число $p\in N$ такое, что

$$\int_{|t|>2^p}|\psi(t)|\,dt < \frac{1}{3}\int_{-2^p}^{2^p}|\psi(t)|\,dt. \tag{3.17}$$

Можно выбрать подмножество $D_2\subset\{k : (0,k)\in I_{J,K}\}$ так, чтобы

$$|k_1 - k_2| \ge 2^{p+1} \quad \text{если} \quad k_1, k_2\in D_2 \quad \text{и} \quad k_1\ne k_2 \tag{3.18}$$

и

$$card(D) \ge 2^{-p-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]. \tag{3.19}$$

Обозначим $D = \{(0,k) : k \in D_2\}$. Тогда в силу (3.17) – (3.19) имеем

$$\left\| \sum_{(j,k)\in D} b_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(\cdot) \right\|_1 \geq \sum_{k\in D_2} \int_{k-2^p}^{k+2^p} \left| \sum_{(0,m)\in D} b_{0,m}\psi(t-m) \right| dt \geq$$

$$\geq \sum_{k\in D_2} \left(\int_{k-2^p}^{k+2^p} |b_{0,k}\psi(t-k)|\, dt - \sum_{m\neq k,(0,m)\in D} \int_{k-2^p}^{k+2^p} |b_{0,m}\psi(t-m)|\, dt \right) \geq$$

$$\geq \sum_{k\in D_2} A \left(\int_{-2^p}^{2^p} |\psi(t)|\, dt - \int_{|t|>2^p} |\psi(t)|\, dt \right) \geq$$

$$\geq A\cdot 2^{-p-2} \int |\psi(t)|\, dt \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right] \geq C_\psi \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right].$$

Теперь рассмотрим случай 2). Существует подмножество

$$D_2 \subset \left\{ j : \text{ существует некоторое } k, \text{ для которого } (j,k) \in I_{J,K} \right\},$$

удовлетворяющее условиям

$$\text{если} \quad j_1, j_2 \in D_2 \quad \text{и} \quad j_1 \neq j_2, \quad \text{то} \quad |j_1 - j_2| \geq q,$$

$$card(D_2) \geq \frac{1}{q}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right], \tag{3.20}$$

где q – некоторое натуральное число, которое выберем позже.

Для каждого $j_i \in D_2$ выберем одно k_i для которого $(j_i, k_i) \in I_{J,K}$ и обозначим множество таких пар через D. Рассмотрим сумму

$$F_3(x) = \sum_{i=1}^{m} b_{j_i,k_i}\psi_{j_i,k_i}(x), \quad m = card(D_2).$$

Обозначим

$$B_i = \left[2^{-j_i}(k_i - 2^p); 2^{-j_i}(k_i + 2^p)\right], \tag{3.21}$$

где число p определяется из (3.17). Тогда

$$\|F_3\|_1 \geq \sum_{\nu=1}^{m} \int_{B_\nu \setminus \bigcup_{i=\nu+1}^{m} B_i} \left| \sum_{i=1}^{m} b_{j_i,k_i}\psi_{j_i,k_i}(t) \right| dt \geq$$

$$\geq |A| \sum_{\nu=1}^{m} \left(\int_{B_\nu \setminus \bigcup_{i=\nu+1}^{m} B_i} |\psi_{j_\nu,k_\nu}(t)|\, dt - \int_{B_\nu \setminus \bigcup_{i=\nu+1}^{m} B_i} \sum_{i\neq\nu} |\psi_{j_i,k_i}(t)|\, dt \right) =$$

$$= |A| \sum_{\nu=1}^{m} (d_\nu - e_\nu). \tag{3.22}$$

Произведя замену переменной, для d_ν получим (см. (3.17), (3.21))

$$d_\nu = \int_{[-2^p;2^p]\setminus B'_\nu} |\psi(t)|\, dt > \frac{3}{4}\|\psi\|_1 - \int_{B'_\nu} |\psi(t)|\, dt,$$

где B'_ν - некоторое множество с $\mu(B'_\nu) < 2^{p-q+1}$. Из интегрируемости ψ следует, что существует некоторое число q, зависящее только от ψ такое, что

$$d_\nu > \frac{2}{3}\|\psi\|_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{m} d_\nu \geq \frac{2m}{3}\|\psi\|_1. \tag{3.23}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{\nu=1}^{m} e_\nu \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{R\setminus B_i} |\psi_{j_i,k_i}(t)|\, dt + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\bigcup_{\nu=i+1}^{m} B_\nu} |\psi_{j_i,k_i}(t)|\, dt. \tag{3.24}$$

Аналогично, из (3.23) и (3.24) получим

$$\sum_{\nu=1}^{m} e_\nu \leq \frac{m}{3}\|\psi\|_1. \tag{3.25}$$

Из (3.20), (3.22), (3.23) и (3.25) следует

$$\|F_3\|_1 \geq C_\psi \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right].$$

Замечание 2 доказано.

Abstract. Any complete orthonormal system generated by an integrable wavelet that is a basis sequence in $L_1(R)$ is not a quasi-greedy basis in $L_1(R)$. The classical Franklin system is not a quasi-greedy basis in $L_1[0;1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
2. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithm for general systems", J. Approx. Theory, vol. 107, pp. 293 – 314, 2000.

3. S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", Studia Math., vol. 159, pp. 67 – 101, 2003.
4. Y. Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge Univ. Press, 1992.
5. P. Wojtaszczyk, "Wavelets as unconditional bases in $L_p(R)$", J. Fourier Analysis and Appl., vol. 5, no. 1, pp. 73 – 85, 1999.
6. S. E. Kelly, M. A. Kon, L. A. Raphael, "Local convergence for wavelet expansions", J. Func. Analysis, vol. 126, pp. 102 – 138, 1994.
7. P. Wojtaszczyk, "Greedy type bases in Banach spaces", Constructive Theory of Functions, DARBA, Sofia, pp. 136 – 155, 2003.
8. S. Gogyan, "Greedy algorithm with regard to Haar subsystems", East J. on Approx., vol. 11, pp. 221 – 236, 2005.
9. Z. Ciesielski, P. Simon, P. Sjölin, "Equivalence of Haar and Franklin bases in L_p spaces", Studia Math. vol. 60, pp. 195 – 210, 1977.
10. G. G. Gevorkyan, B. Wolnik, "Square functions for wavelet type systems", Bull. Pol. Acad. Sci., vol. 46, no. 2, pp. 155 – 172, 1998.
11. P. Sjölin, "The Haar and Franklin systems are not equivalent bases in L^1", Bull. Acad. Polon. Sci., Sr. Sci. Math. Astronom. Phys., vol. 25, no. 11, pp. 1099 – 1100, 1977.
12. P. Bechler, "Inequivalence of wavelet systems in $L_1(R^d)$ and $BV(R^d)$", Bull. Pol. Acad. Sci. Math., vol. 53, pp. 25 – 37, 2005.
13. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.
14. Г. Г. Геворкян, "Неограниченность оператора сдвига по системе Франклина в пространстве L^1", Мат. Заметки, том 38, № 4, стр. 523 – 533, 1985.
15. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.

Поступила 10 января 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 1, 2005, 18–60

СВОЙСТВО БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ ОБЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА В $L_p[0,1], 1 < p < \infty$

К. А. Керян

Ереванский Государственный Университет
E-mail : karenkeryan@yahoo.com

Резюме. Общая периодическая система Франклина, соответствующая всюду плотной последовательности точек $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$ из отрезка $[0,1]$, определяется как последовательность ортонормированных, кусочно-линейных (с конечным множеством узлов $t_0, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$), непрерывных функций с периодом 1. Основной результат данной статьи устанавливает, что любая общая периодическая система Франклина является безусловным и гриди-базисами в пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1928 году Франклин [1] построил первый пример полной, ортонормальной системы, которая является базисом в $C[0,1]$. До этого Хаар [2] построил полную ортонормальную систему такую, что ряд Фурье–Хаара любой непрерывной функции равномерно сходится к той же функции. Однако система Хаара не является базисом в $C[0,1]$, так как функции системы Хаара разрывны.

Систематические исследования системы Франклина начались с работ З. Чисельского [3], [4], где, в частности, получены экспоненциальные оценки функций системы Франклина.

В дальнейшем эти оценки сыграли фундаментальную роль в исследованиях по системе Франклина. В частности, эти оценки были использованы С. В. Бочкаревым [5] для доказательства утверждения, что система Франклина является

Работа выполнена при финансовой поддержке ANSEF, грант № 05-PS-math-87-65.

безусловным базисом в любом рефлексивном пространстве Орлича и поэтому и в пространстве $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

Позже П. Войташчик [6] доказал безусловную базисность системы Франклина в пространстве $\Re H_1$. З. Чисельский [7] ввел в рассмотрение периодическую систему Франклина и показал, что многие свойства непериодической системы Франклина сохраняются также для периодической системы.

Исследование общей системы Франклина началось в работе [8], где получены оценки для частичных сумм ряда Фурье–Франклина. Свойство безусловной базисности общей системы Франклина в пространстве $L_p[0,1]$ при некоторых ограничениях на структуру разбиения отрезка [0,1] было доказано в работах [9, 10]. Г. Г. Геворкян и А. Камонт [11] окончательно решили вопрос безусловной базисности системы Франклина в $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Ими доказано, что при любом допустимом разбиении отрезка [0,1], соответствующая система Франклина является безусловным базисом в $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Они также доказали, что общая система Франклина является гриди-базисом в $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

В настоящей работе исследуются общие периодические системы Франклина. Нами получены оценки частичных сумм ряда Фурье интегрируемых функций по общей периодической системе Франклина. Мы также доказали, что общая периодическая система Франклина является безусловным и гриди-базисами в пространствах $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Отметим, что как в периодическом, так и в непериодическом случаях для функций общей системы Франклина нет экспоненциальных оценок, которые сыграли важную роль в исследованиях классической системы Франклина.

Мы в дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Для любого множества $A \subset [0,1]$ через χ_A мы будем обозначать характеристическую функцию множества A, через $|A|$ лебегову меру множества A, а через A^c дополнение множества A, т.е. $A^c = [0,1]\setminus A$. $\# B$ обозначает число элементов множества B, поэтому $\# B = \infty$ для бесконечного множества B. Поскольку мы будем рассматривать периодический интервал $[0;1]$, то допустимы обозначения $[a;b]$ с $a > b$. В этом случае $[a;b] = [a;1] \bigcup [0;b]$. Для любой интегрируемой функции $f : [0,1] \to R$ положим $\widetilde{\mathbb{M}} f(x) = \sup_{x\in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|dt$, где I – обобщенный интервал, а под функцией $\mathbb{M} f(x)$ будем понимать максимальную функцию Харди–Литлвуда. Для любых a и b обозначим $a \vee b = \max(a,b)$ и $a \wedge b = \min(a,b)$. Наконец, $a \sim b$ будет означать, что существуют положительные константы c_1, c_2 не зависящие от a и b такие, что $c_1 a \le b \le c_2 a$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\sigma = (s_i, 0 \le i \le N)$ разбиение отрезка $[0,1]$ с простыми узлами, причем

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 \ldots < s_{N-1} < s_N = 1. \tag{2.1}$$

Через $S(\sigma)$ обозначим множество всех непрерывных функций f, которые линейны на каждом отрезке $[s_i, s_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, N-1$, и удовлетворяющие условию $f(0) = f(1)$. Далее пусть

$$N_{\sigma,0}(t) = \frac{s_1 - t}{s_1 - s_0}\chi_{[s_0,s_1]}(t) + \frac{t - s_{N-1}}{s_N - s_{N-1}}\chi_{[s_{N-1},s_N]}(t),$$

$$N_{\sigma,i}(t) = \frac{t - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}}\chi_{(s_{i-1},s_i]}(t) + \frac{s_{i+1} - t}{s_{i+1} - s_i}\chi_{(s_i,s_{i+1}]}(t), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Ясно, что любая функция $f \in S(\sigma)$ имеет единственное представление вида

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} a_i N_{\sigma,i},$$

где коэффициенты a_i определяются равенствами $a_i = f(s_i)$.

Пусть $\sigma = (s_i, 0 \le i \le N)$ и $\sigma^* = (s_i^*, 0 \le i \le N+1)$ такие разбиения отрезка $[0,1]$, которые удовлетворяют условию (2.1) и σ^* получается из σ добавлением одной новой точки s^*. Очевидно, $\dim S(\sigma^*) = \dim S(\sigma) + 1$ и $S(\sigma) \subset S(\sigma^*)$. Следовательно, существует единственная функция $\varphi \in S(\sigma^*)$ такая, что φ ортогональна к $S(\sigma)$ в $L^2[0,1]$, $\|\varphi\|_2 = 1$ и $\varphi(s^*) > 0$. Эту функцию φ назовем **общей периодической функцией Франклина соответствующая паре разбиений** (σ, σ^*).

Определение 1. Последовательность точек $\mathcal{T} = (t_n, n \ge 0)$ из $[0,1]$ назовем **допустимой**, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in [0,1]$, $t_i \ne t_j$ при $i \ne j$, и $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0,1]$.

Для допустимой последовательности $\mathcal{T} = (t_n, n \ge 0)$ и $n \ge 1$, через $\pi_n = (t_{n,i}, 0 \le i \le n)$ обозначим разбиение интервала $[0,1]$, полученное возрастающей перестановкой последовательности $(t_i, 0 \le i \le n)$. Отметим, что все разбиения π_n удовлетворяют условию (2.1), и π_n получается из π_{n-1} добавлением точки t_n.

Определение 2. Под общей периодической системой Франклина, соответствующей допустимой последовательности $\mathcal{T}$, будем понимать последовательность функций $\{f_n, n \ge 1\}$, определяемых следующим образом : $f_1(t) = 1$, и f_n $(n \ge 2)$

– общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений (π_{n-1}, π_n).
Известно, что при любом допустимом разбиении, соответствующая общая непериодическая система Франклина является базисом в пространстве непрерывных функций (см. например [12], Теорема 6 в Главе 6). Дословным повторением доказательства этой теоремы, можно показать, что при любом допустимом разбиении, соответствующая общая периодическая система Франклина является базисом в пространстве непрерывных, периодических функций.
Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность и $\{f_n, n \geq 1\}$ соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда для любой интегрируемой функции f частичные суммы $S_n f(x)$ ряда Фурье-Франклина удовлетворяют неравенству*

$$S_n f(x) \leq C\widetilde{\mathcal{M}}f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in [0,1] \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и сходятся к функции $f(x)$ почти всюду в $[0,1]$.

Теорема 2. *Общая периодическая система Франклина, соответствующая любой допустимой последовательности $\mathcal{T}$ является безусловным базисом в пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.*

Теорема 3. Общая периодическая система Франклина, соответствующая любой допустимой последовательности $\mathcal{T}$ является гриди-базисом в пространствах $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.
Отметим, что при доказательстве мы получаем нечто большее. А именно, для любого $p \in (1, \infty)$ существует постоянная C_p, зависящая только от p такая, что при любой последовательности коэффициентов $\{a_n, n \geq 0\}$ и любом выборе знаков $\varepsilon_n = \pm 1$ получаем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n \right\|_p \leq C_p \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_p .$$

Отметим, что в [11] допускались также двойные точки в разбиении $\mathcal{T}$. Здесь мы этого не делаем, поскольку при появлении двойной точки в разбиении, периодическая система Франклина с некоторого номера превращается в непериодическую систему.

§3. ОЦЕНКИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\pi = \{t_i; 0 \leq i \leq n\}$ допустимое разбиение отрезка [0,1], т.е.

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

и пусть S_π - пространство всех непрерывных, кусочно линейных функций с периодом 1 и с узлами t_i. Введем следующие обозначения :

$$l_i = t_i - t_{i-1}, \quad l_{nk+i} = l_i \quad \text{для} \quad k \in Z,$$
$$\nu_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}.$$

Далее, пусть $G = G_\pi = [(N_{\pi,i}, N_{\pi,j}); 0 \leq i, j \leq n-1]$ – матрица Грамма системы $\{N_{\pi,i}\}_{i=0}^{n-1}$ и пусть $G^{-1} = A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{n-1}$. Для удобства будем считать, что

$$a_{nk+i,nm+j} = a_{i,j}, \quad \text{где} \quad k, m \in Z.$$

Тогда числа $a_{i,j}$ имеют следующие свойства.

Свойство 1. Для любых i и j имеют место следующие соотношения

$$l_i a_{i-1,j} + 2(l_i + l_{i+1}) a_{i,j} + l_{i+1} a_{i+1,j} = 6\delta_{i,j}, \tag{3.1}$$
$$1,2 \leq a_{i,i}\nu_i \leq 2, \tag{3.2}$$

и для каждого i существует некоторое n_i такое, что $i < n_i < i + n$ и

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j}|a_{i,j}| \quad \text{при} \quad n_i - n + 1 \leq j \leq n_i, \tag{3.3}$$
$$\begin{cases} |a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j+1}| & \text{при} \quad i \leq j \leq n_i - 1, \\ |a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j-1}| & \text{при} \quad n_i - n + 2 \leq j \leq i, \end{cases} \tag{3.4}$$
$$|a_{i,j}| \leq \frac{2}{2^{|i-j|_n}} \frac{1}{\nu_i \vee \nu_j}, \tag{3.5}$$

где $|i-j|_n = \min(|i-j|, n - |i-j|)$ и

$$\begin{cases} |a_{i,j}| \leq \frac{2}{2^{\min(j-i,-2k+n+j+i)}} \frac{1}{\nu_k} & \text{при} \quad i \leq k \leq j \leq n_i, \\ |a_{i,j}| \leq \frac{2}{2^{\min(i-j,2k+n-(j+i))}} \frac{1}{\nu_k} & \text{при} \quad n_i - n + 1 \leq j \leq k \leq i. \end{cases} \tag{3.6}$$

Для каждого i существует некоторое k_i такое, что $n_i \wedge n_{i-1} \leq k_i \leq n_i \vee n_{i-1}$,

$$|a_{i+\varepsilon,j+\eta}| \leq \frac{8}{2^{\min(j-i,-2k+n+j+i)}} \frac{1}{l_k} \tag{3.7}$$

для $\varepsilon = 0, -1$, $\eta = 0, -1$ и $i \leq k \leq j < k_i \leq n + i$, и

$$|a_{i+\varepsilon,j+\eta}| \leq \frac{8}{2^{\min(n+i-j,2k-j-i)}} \frac{1}{l_k}$$

для $\varepsilon = 0, -1$, $\eta = 0, 1$ и $i < k_i \leq j \leq k \leq n + i$.

Доказательство : Ясно, что равенство (3.1) равносильно условию $G^{-1} = A$. Из $(N_i, N_j) = (N_j, N_i)$ следует, что $a_{i,j} = a_{j,i}$. Покажем, что

$$|a_{i,i}| \geq 2|a_{i,i\pm1}|.$$

Допустим противное. Без ограничения общности можем считать, что $|a_{i,i}| < 2|a_{i,i+1}| = 2|a_{i+1,i}|$. Из равенств (3.1) имеем

$$l_{i+1}a_{i,i} + 2(l_{i+1} + l_{i+2})a_{i+1,i} + l_{i+2}a_{i+2,i} = 0$$

что равносильно

$$l_{i+1}(a_{i,i} + 2a_{i+1,i}) + l_{i+2}(2a_{i+1,i} + a_{i+2,i}) = 0.$$

Из последнего равенства и из sgn $(a_{i,i} + 2a_{i+1,i})$ = sgn $(a_{i+1,i})$ следует, что $\mathrm{sgn}(2a_{i+1,i} + a_{i+2,i}) = -\mathrm{sgn}(a_{i+1,i})$, и поэтому $2|a_{i+1,i}| < |a_{i+2,i}|$. Повторяя эти рассуждения, получим

$$|a_{i,i}| < 2|a_{i+1,i}| < |a_{i+2,i}| < \frac{1}{2}|a_{i+3,i}| < \ldots < \frac{1}{2^{n-3}}|a_{i+n-1,i}| <$$

$$< \frac{1}{2^{n-2}}|a_{i+n,i}| = \frac{1}{2^{n-2}}|a_{i,i}|$$

которое невозможно при $n \geq 2$. Из (3.1) также имеем

$$l_i a_{i-1,i} + 2(l_i + l_{i+1})a_{i,i} + l_{i+1}a_{i+1,i} = 6.$$

Следовательно, из последнего равенства и неравенства $|a_{i,i}| \geq 2|a_{i,i\pm1}|$ вытекает (3.2). Тем же способом можно доказать, что если $|a_{i,j}| \leq 2\,|a_{i,j+1}|$, то

$$2|a_{i,j+1}| \leq |a_{i,j+2}| \leq \frac{1}{2}|a_{i,j+3}| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{i+n-j-2}}|a_{i,i+n}|$$

и $a_{i,k}a_{i,k+1} < 0$ для $j + 1 \leq k \leq i + n - 1$. Определим n_i следующим образом

$$n_i = \max\{j : |a_{i,j-1}| \geq 2|a_{i,j}| \quad \text{и} \quad a_{i,j}a_{i,j-1} \leq 0,\ i \leq j \leq n+1\}.$$

Из определения n_i следует (3.3) и (3.4). Из (3.6) следует оценка (3.5), а (3.6) вытекает из определения n_i и свойства (3.4).

Осталось доказать (3.7). Допустим, что $n_i > n_{i-1}$ и обозначим

$$k_i = \begin{cases} n_{i-1}, & \text{если} \quad |a_{i,n_{i-1}}| < |a_{i-1,n_{i-1}}| \\ n_i, & \text{если} \quad |a_{i,n_i}| \geq |a_{i-1,n_i}| \\ \max\{j \leq n_i ; |a_{i,j}| \geq |a_{i-1,j}|\} + 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда из (3.6) получим (3.7). Доказательство завершено.

С помощью матрицы A, определим биортогональную систему $\{N_i^*\}_{i=0}^{n-1}$ следующим образом :

$$N_i^*(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} N_i(t), \quad t \in [0,1].$$

Ясно, что $(N_i, N_j^*) = \delta_{ij}$ и $N_i^*(t_j) = a_{i,j}$. Пусть

$$K_\pi(t,s) = \sum_{i=0}^{n-1} N_i(t) N_i^*(s), \quad t,s \in [0,1].$$

Тогда для любой функции $f \in L^1[0,1]$ ее проекцией на пространство S_π будет

$$P_\pi f(t) = \int_0^1 K_\pi(t,s) f(s) ds.$$

Теорема 4. *Пусть $\pi = \{t_i : 0 \le i \le n\}$ - разбиение отрезка $[0,1]$ и $t \in [t_{i-1}, t_i]$ для некоторого i. Тогда существует $\tilde{t}_{k_i} \in [t_{k_i-1}, t_{k_i}]$ такое, что*

$$\int_t^{\tilde{t}_{k_i}} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot); [s, \tilde{t}_{k_i}]) ds \le 128, \tag{3.8}$$

$$\int_{\tilde{t}_{k_i}}^t \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot); [\tilde{t}_{k_i}, s]) ds \le 128, \tag{3.9}$$

где $[a,b]$ - обобщенный интервал (т.е. $[a,b] = [a,1] \cup [0,b]$, если $a > b$) и $\text{var}\,(f; [a,b])$ - полная вариация функции f на отрезке $[a,b]$.

Доказательство : Определим точку $\tilde{t}_{k_i}$: если $K_\pi(t, t_{k_i-1}) K_\pi(t, t_{k_i}) < 0$, то точка $\tilde{t}_{k_i}$ удовлетворяет условию $K_\pi(t, \tilde{t}_{k_i}) = 0$; в противном случае, если $|K_\pi(t, t_{k_i-1})| > |K_\pi(t, t_{k_i})|$, то $\tilde{t}_{k_i} = t_{k_i}$; а если $|K_\pi(t, t_{k_i-1})| \le |K_\pi(t, t_{k_i})|$, то $\tilde{t}_{k_i} = t_{k_i-1}$. Из определения $\tilde{t}_{k_i}$ следует, что

$$\text{var}\,(K_\pi(t,\cdot); [t_{k_i-1}, \tilde{t}_{k_i}]) \le |K_\pi(t, t_{k_i-1})|.$$

Мы приведем доказательство неравенства (3.8), а (3.9) доказывается аналогично. Учитывая последнее неравенство и что функция $K_\pi(t,s)$ кусочно линейная с узлами π, получаем

$$\int_t^{\tilde{t}_{k_i}} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,\tilde{t}_{k_i}])ds \le \int_{t_{i-1}}^{\tilde{t}_{k_i}} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,\tilde{t}_{k_i}])ds =$$

$$= \sum_{k=i}^{k_i-1} \int_{I_k} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,\tilde{t}_{k_i}])ds + \int_{t_{k_i-1}}^{\tilde{t}_{k_i}} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,\tilde{t}_{k_i}])ds \le$$

$$\le \sum_{k=i}^{k_i-1} l_k \left[\sum_{j=k}^{k_i-1} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);I_j) + \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[t_{k_i-1},\tilde{t}_{k_i}])\right] +$$

$$+ l_{k_i}\text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[t_{k_i-1},\tilde{t}_{k_i}]) \le$$

$$\le \sum_{k=i}^{k_i-1} l_k \left[\sum_{j=k}^{k_i-1} (|K_\pi(t,t_{j-1})| + |K_\pi(t,t_j)|) + |K_\pi(t,t_{k_i-1})|\right] + l_{k_i}|K_\pi(t,t_{k_i-1})| \le$$

$$\le \sum_{k=i}^{k_i} l_k \left[\sum_{j=k}^{k_i-1} (|a_{i-1,j-1}| \vee |a_{i,j-1}| + |a_{i-1,j}| \vee |a_{i,j}|) + |a_{i-1,k_i-1}| \vee |a_{i,k_i-1}|\right].$$

Из (3.7) следует, что

$$|a_{i-1,j-1}| \vee |a_{i,j-1}| + |a_{i-1,j}| \vee |a_{i,j}| \le \frac{16}{2^{\min(j-i,-2k+n+j+i)}} \frac{1}{l_k}.$$

Следовательно,

$$\int_t^{\tilde{t}_{k_i}} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,\tilde{t}_{k_i}])ds \le \sum_{k=i}^{k_i} l_k \left[2\sum_{j=k}^{k_i}\left(\frac{8}{2^{j-i}} + \frac{8}{2^{-2k+n+j+i}}\right)\frac{1}{l_k}\right] =$$

$$= 16\sum_{k=i}^{k_i}\sum_{j=k}^{k_i}\left(\frac{1}{2^{j-i}} + \frac{1}{2^{-2k+n+j+i}}\right) \le 128.$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Для любого разбиения π отрезка $[0,1]$ и функции $f \in L^1[0,1]$ имеет место*

$$|P_\pi f(t)| \le 256\widetilde{\mathbf{M}}f(t). \tag{3.10}$$

Доказательство : этой теоремы совпадает с доказательством Теоремы 4.2 работы [8].

Из (3.10) и из того, что общая периодическая система Франклина является базисом в пространстве непрерывных, периодических функций, методом работы [13] (стр. 36), можно доказать следующее утверждение.

Corollary. Пусть T допустимая последовательность точек отрезка $[0,1]$ и $\{f_n : n \geq 1\}$ соответствующая ей периодическая система Франклина. Тогда для каждой интегрируемой функции f частичные суммы $S_n f(x)$ ряда Фурье-Франклина сходятся к функции $f(x)$ почти всюду на отрезке $[0,1]$.

§4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОБЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

4.1. Свойства общей периодической системы Франклина. Пусть

$$\tilde{\pi} = \{0 = t_{-l} < \ldots < t_{-1} < t_1 < \ldots < t_{n-l} = 1\} \quad \text{и} \quad \pi = \tilde{\pi} \cup \{t^*\},$$

где $t_{-1} < t^* = t_0 < t_1$. Общая периодическая функция Франклина соответствующая разбиениям $(\tilde{\pi}, \pi)$ определена в параграфе 2. Как и в [11], каждой функции Франклина поставим в соответствие "канонический интервал" J.

Для построения интервала J, рассмотрим следующие интервалы :

$$I = [t_{-1}, t_1], \quad I^- = [t_{-2}, t_0], \quad I^+ = [t_0, t_2],$$
$$\nu = |I|, \quad \nu^- = |I^-|, \quad \nu^+ = |I^+|, \quad \mu = \min(\nu^-, \nu, \nu^+).$$

Если $l = 1$ или $n - l = 1$, возьмем $t_{-2} = t_{n-2}$ и $I^- = [t_{n-2}, t_0] = [t_{n-2}, 1] \cup [0, t_0]$ или $t_2 = t_{-n+2}$ и $I^+ = [t_0, t_2] = [t_0, 1] \cup [0, t_{-n+2}]$ соответственно. Теперь выберем $I^* = [t_{i^*}, t_{i^*+2}]$ один из интервалов I^-, I или I^+ так, чтобы $\mu = |I^*|$. Обозначая $I^{*,l} = [t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ и $I^{*,r} = [t_{i^*+1}, t_{i^*+2}]$, для J выберем или $I^{*,l}$ или $I^{*,r}$ так, чтобы $|J| = \max(|I^{*,l}|, |I^{*,r}|)$.

Заметим, что из такого выбора μ и J следует, что

$$|J| \leq \mu \leq 2|J|.$$

Для удобства будем считать, что

$$t^{-,-} = t_{-2}, \quad t^- = t_{-1}, \quad t^+ = t_1 \quad \text{и} \quad t^{+,+} = t_2.$$

Напомним, что $G = G_\pi = [(N_{\pi,i}, N_{\pi,j}), \ -l \leq i, j \leq n-l-1]$ есть матрица Грамма системы функций $(N_{\pi,i}, -l \leq i \leq n-l-1)$ и $G^{-1} = A = [a_{i,j}, -l \leq i, j \leq n-l-1]$. Также будем считать, что $a_{nk+i,nm+j} = a_{i,j}$ для $k, m \in Z$. Заметим, что функция $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i N_i$, где $\omega_i = -\frac{l_1}{l_0+l_1} a_{i,-1} + a_{i,0} - \frac{l_0}{l_0+l_1} a_{i,1}$ принадлежит $S(\pi)$ и ортогональна $S(\tilde{\pi})$. Следовательно, $f = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_2} \operatorname{sgn} \varphi(t_0)$ является общей периодической функцией Франклина соответствующей паре разбиений $(\tilde{\pi}, \pi)$.

Будем считать, что $f = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i N_i$, где f есть общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений $(\tilde{\pi}, \pi)$.

Лемма 1. *Пусть $\tilde{\pi}$ и π суть разбиения с вышеупомянутыми свойствами и f соответствующая им общая периодическая функция Франклина. Тогда*

$$\|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2}, \quad |\xi_{-1}| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu^-}, \quad |\xi_0| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu}, \quad |\xi_1| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu^+} \tag{4.1}$$

с константами не зависящими от $(\tilde{\pi}, \pi)$ и p.

Доказательство : Очевидно, что $\omega_0 = -\frac{l_1}{l_0+l_1} a_{0,-1} + a_{0,0} - \frac{l_0}{l_0+l_1} a_{0,1}$. Следовательно, из (3.4), (3.2) и Свойство 1, §3 получим, что $\frac{3}{2} a_{0,0} \geq \omega_0 \geq \frac{1}{2} a_{0,0}$ и $\omega_0 > 0$. Поэтому

$$\varphi(t_0) > 0 \quad \text{и} \quad 0,6 \leq \omega_0 \nu \leq 3.$$

Теперь покажем, что $\omega_1 \sim \frac{1}{\nu^+}$ и $\omega_1 < 0$ при $n \geq 4$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

Случай 1 : $a_{1,0} \geq 0$. Из Свойства 1, §3 следует, что

$$l_0 a_{1,-1} + 2(l_0 + l_1) a_{1,0} + l_1 a_{1,1} = 0, \tag{4.2}$$

Из $a_{1,1} > 0$ и $a_{1,0} \geq 0$ следует, что $a_{1,-1} < 0$ и $|a_{1,-1}| > 2a_{1,0}$. Тем же способом можно доказать, что $|a_{1,-2}| > 2|a_{1,-1}|, |a_{1,-3}| > 2|a_{1,-2}|, \ldots$ Таким образом, $a_{1,1} \geq 2|a_{1,2}| > 4|a_{1,3}| > \ldots > 2^{n-2}|a_{1,-1}|$. Следовательно, с учетом (4.2), получим $l_0|a_{1,-1}| > l_1|a_{1,1}| > l_1 2^{n-2}|a_{1,-1}|$, откуда следует, что $l_0 > 2^{n-2} l_1$. Так как $\omega_1 = -\frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)} a_{1,-1} - \frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)} a_{1,1}$, то оно отрицательно и

$$|\omega_1| = \frac{2l_0 + l_1}{2(l_0 + l_1)} |a_{1,1}| - \frac{2l_1 + l_0}{2(l_0 + l_1)} |a_{1,-1}| \geq \frac{|a_{1,1}|}{4} \quad \text{при} \quad n \geq 4.$$

Ясно, что $|\omega_1| \leq |a_{1,1}|$, и, следовательно, $\omega_1 < 0$ и $|\omega_1| \sim |a_{1,1}| \sim \frac{1}{\nu^+}$ при $n \geq 4$.

Случай 2 : $a_{1,0} < 0$ и $a_{1,-1} \geq 0$. В этом случае имеем $\omega_1 < 0$ и $|\omega_1| = \frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)} |a_{1,1}| + \frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)} |a_{1,-1}|$. Следовательно, $\frac{1}{2}|a_{1,1}| \leq |\omega_1| \leq \frac{3}{2}|a_{1,1}|$, так как $|a_{1,1}| \geq 2|a_{1,0}| \geq |a_{1,-1}|$. В этом случае также мы имеем $\omega_1 < 0$ и $|\omega_1| \sim a_{1,1} \sim \frac{1}{\nu^+}$.

Случай 3 : $a_{1,0} < 0$ и $a_{1,-1} < 0$. Многократным применением неравенства (3.1), аналогично первому случаю получим $a_{1,1} \geq 2|a_{1,2}| \geq 4|a_{1,3}| \geq \ldots \geq 2^{n-2}|a_{1,-1}|$. Учитывая последнее неравенство и $\omega_1 = -\frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)} a_{1,1} - \frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)} a_{1,-1}$ получаем

$$\omega_1 < 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{4}|a_{1,1}| \leq |\omega_1| \leq \frac{3}{2}|a_{1,1}| \quad \text{при} \quad n \geq 4.$$

Комбинируя эти три случая получаем

$$\omega_1 < 0 \quad \text{и} \quad \frac{0.3}{\nu^+} \leq |\omega_1| \leq \frac{3}{\nu^+}.$$

Аналогично доказывается, что $\omega_{-1} < 0$ и $|\omega_{-1}| \sim \frac{1}{\nu_{-1}}$. Очевидно, что существует i_0 такое, что $1 \le i_0 \le n-1$ и $|\omega_{i_0}| = \min_{1\le i\le n-1} |\omega_i|$. Учитывая, что $|\omega_{i_0}| \le |\omega_{i_0+1}|$ из равенства $l_i\omega_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})\omega_i + l_{i+1}\omega_{i+1} = 0$, где $2 \le i \le n-2$, для $i = i_0 + 1$ получим, что ω_{i_0+1} и ω_{i_0+2} имеют разные знаки и $|\omega_{i_0+2}| \ge 2|\omega_{i_0+1}|$. Тем же способом, используя неравенство $|\omega_{i_0+2}| \ge |\omega_{i_0+1}|$ из предыдущего равенства для $i = i_0 + 2$ получим, что ω_{i_0+2} и ω_{i_0+3} имеют разные знаки и $|\omega_{i_0+3}| \ge 2|\omega_{i_0+2}|$. Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} &|\omega_{n-1}| \ge 2|\omega_{n-2}| \ge \ldots \ge 2^{n-i_0-2}|\omega_{i_0+1}| \ge 2^{n-i_0-2}|\omega_{i_0}|, \\ &|\omega_1| \ge 2|\omega_2| \ge \ldots \ge 2^{i_0-2}|\omega_{i_0-1}| \ge 2^{i_0-2}|\omega_{i_0}|, \\ &\omega_i = (-1)^i|\omega_i| \quad \text{для} \quad i_0 - n + 1 \le i \le i_0 - 1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Чтобы доказать неравенство $\|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2}$, воспользуемся следующим свойством функций N_i, которое доказывается простыми вычислениями.

Свойство 2 (L_p **стабильность функций** N_i). Пусть π – разбиение отрезка $[0,1]$ и $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i N_i \in S(\pi)$. Тогда для любого $p \in [1,\infty]$, имеем

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \nu_i\right)^{1/p} \le \|f\|_p \le \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \nu_i\right)^{1/p}.$$

Приступим к оцениванию $\|f\|_p$. Заметим, что $|a_{i,j_i}| = \min_{i\le j\le n+i-1} |a_{i,j}|$, где $i \le j_i \le n + i - 1$. Следовательно, многократным применением (3.1) как и выше, получим

$$|a_{i,i}| \ge 2|a_{i,i-1}| \ge \ldots \ge 2^{n+i-j_i-1}|a_{i,j_i-n+1}| \ge 2^{n+i-j_i-1}|a_{i,j_i}|,$$
$$|a_{i,i}| \ge 2|a_{i,i+1}| \ge \ldots \ge 2^{j_i-i-1}|a_{i,j_i-1}| \ge 2^{j_i-i-1}|a_{i,j_i}|.$$

Отсюда и из $|\omega_i| \le |a_{i,-1}| + |a_{i,0}| + |a_{i,1}|$ получаем, что

$$|\omega_i| \le 3 \cdot 2^{-\min(i,n-i)+1}|a_{i,i}|. \tag{4.4}$$

Из (4.4) и (3.2) следует

$$|\omega_i| \le 12 \cdot 2^{-\min(i,n-i)} \frac{1}{\nu_i}. \tag{4.5}$$

Из Свойства 2, (4.3) и (4.5) получаем

$$\|\varphi\|_p^p \le \sum_{i=0}^{n-1} |\omega_i|^p \nu_i \le \frac{3^p}{\nu_0^{p-1}} + 2\frac{3^p}{\nu_1^{p-1}}\left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{(k-i)p}} + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \ldots + \frac{1}{2^p}\right) + 2\frac{3^p}{\nu_{-1}^{p-1}}\left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \ldots + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \ldots + \frac{1}{2^p}\right) \le 3^p 8\left(\frac{1}{\nu_0^{p-1}} + \frac{1}{\nu_1^{p-1}} + \frac{1}{\nu_{-1}^{p-1}}\right) \le$$
$$\le 24 \cdot 3^p \mu^{1-p} \le 24 \cdot 3^p |J|^{1-p}$$

для $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, и

$$\|\varphi\|_p^p \geq \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{n-1}|\omega_i|^p\nu_i \geq \frac{1}{p+1}\left(|\omega_{-1}|^p\nu_{-1} + |\omega_0|^p\nu_0 + |\omega_1|^p\nu_1\right)$$

$$\geq \frac{(0.3)^p}{p+1}\left(\frac{1}{\nu_0^{p-1}} + \frac{1}{\nu_1^{p-1}} + \frac{1}{\nu_{-1}^{p-1}}\right) \geq \frac{(0.3)^p}{p+1}\mu^{1-p} \geq \frac{2(0.15)^p}{p+1}|J|^{1-p}.$$

Следовательно,

$$\|\varphi\|_p \sim |J|^{1/p-1}.$$

Поскольку $\varphi(t_0) > 0$, то функция Франклина будет равным $f = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_2}$. Отсюда получаем

$$\|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2} \quad \text{и} \quad |\xi_i| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu_i} \quad \text{для} \quad i = 0, \pm 1.$$

Пусть $\pi = \tilde{\pi} \cup \{t_0\}$ суть разбиения отрезка $[0,1]$, и пусть $f = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i N_i$ общая периодическая функция Франклина соответствующая разбиениям $(\tilde{\pi}, \pi)$, а i_0 такое, что $|\xi_{i_0}| = \min_{1 \leq i \leq n-1}|\xi_i|$. Тогда из (4.3) получаем

$$\begin{aligned}
&|\xi_1| \geq 2|\xi_2| \geq \ldots \geq 2^{i_0-2}|\xi_{i_0-1}| \geq 2^{i_0-2}|\xi_{i_0}|,\\
&|\xi_{n-1}| \geq 2|\xi_{n-2}| \geq \ldots \geq 2^{n-i_0-2}|\xi_{i_0+1}| \geq 2^{n-i_0-2}|\xi_{i_0}|,\\
&\xi_i = (-1)^{n-i}|\xi_i|, \quad i_0 - n + 1 \leq i \leq i_0 - 1.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

При этих предположениях имеет место следующее свойство.

Свойство 3. (*a*) Если $i_0 + 3 - n \leq i \leq -1$, то

$$(a1) \quad \begin{cases} |\xi_{i-1}| \leq \dfrac{2}{3}\dfrac{l_i}{l_i + l_{i-1}}|\xi_i|, |\xi_{i-1}| \leq \dfrac{|\xi_i|}{2} & \text{для} \quad i = i_0 + 2 - n, \\ |\xi_i| = (-1)^i\xi_i & \text{для} \quad i = i_0 + 2 - n \quad \text{и} \quad i = i_0 + 1 - n. \end{cases}$$

$$(a2) \quad |\xi_i| \leq C\left(\frac{2}{3}\right)^{|i|}\frac{l_{-1}}{\sum_{j=i}^{-1} l_j}\frac{|J|^{1/2}}{\nu^-} \quad \text{для} \quad i = i_0 + 2 - n \quad \text{и} \quad i = i_0 + 1 - n.$$

$$(a3) \quad \begin{cases} |\xi_{i-1}|(\frac{3}{2}l_{i-1} + 2l_i) \leq |\xi_i|l_i \leq 2|\xi_{i-1}|(l_{i-1} + l_i), \\ |\xi_{i_0+1}|(l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}) \leq |\xi_{i_0+2}|l_{i_0+2} \leq |\xi_{i_0+1}|(3l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}). \end{cases}$$

$$(a4) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}|f(t)|^p dt \leq \varepsilon^p \int_{t_{i-1}}^{t_i}|f(t)|^p dt, \; 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{t_{i-2}\leq t\leq t_{i-1}}|f(t)| \leq \varepsilon \max_{t_{i-1}\leq t\leq t_i}|f(t)|, \end{cases} \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{2}+1}{3}.$$

А для $i \leq i + s \leq -1$ имеем

$$
\text{(a5)}\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\int_{t_{i_0}}^{t_i} |f(t)|^p dt \le 5\frac{\varepsilon^{ps}}{1-\varepsilon^p}\int_{t_{i+s-1}}^{t_{i+s}} |f(t)|^p dt,\\[2ex]
\displaystyle\int_{t_{i_0}}^{t_i} |f(t)|^p dt \le 5\frac{\varepsilon^{p|i|}}{1-\varepsilon^p}\|f\|_p^p \quad 1 \le p < \infty.
\end{cases}
$$

$$
\text{(a6)}\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\max_{t_{i-1}\le t\le t_i} |f(t)| \le \varepsilon^s \max_{t_{i+s-1}\le t\le t_{i+s}} |f(t)|,\\[2ex]
\displaystyle\max_{t_{i_0}\le t\le t_i} |f(t)| \le \varepsilon^{|i|}\|f\|_\infty.
\end{cases}
$$

(b) Если $i_0 - 3 \ge i \ge 1$, то

$$
\text{(b1)}\qquad
\begin{cases}
|\xi_{i+1}| \le \dfrac{2}{3}\dfrac{l_{i+1}}{l_{i+1}+l_{i+2}}|\xi_i|, \quad |\xi_{i+1}| \le \dfrac{|\xi_i|}{2} & \text{для} \quad i = i_0 - 2,\\[2ex]
|\xi_i| = (-1)^i\xi_i & \text{для} \quad i = i_0 - 2 \quad \text{и} \quad i = i_0 - 1.
\end{cases}
$$

$$
\text{(b2)}\qquad |\xi_i| \le C\left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{l_2}{\sum_{j=2}^{i+1} l_j}\frac{|J|^{1/2}}{\nu^+} \quad \text{для} \quad i = i_0 - 2 \quad \text{и} \quad i = i_0 - 1.
$$

$$
\text{(b3)}\qquad
\begin{cases}
|\xi_{i+1}|\left(\dfrac{3}{2}l_{i+2} + 2l_{i+1}\right) \le |\xi_i| l_{i+1} \le 2|\xi_{i+1}|(l_{i+2} + l_{i+1}),\\[2ex]
|\xi_{i_0-1}|(l_{i_0} + 2l_{i_0-1}) \le |\xi_{i_0-2}| l_{i_0-1} \le |\xi_{i_0-1}|(3l_{i_0} + 2l_{i_0-1}).
\end{cases}
$$

$$
\text{(b4)}\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} |f(t)|^p dt \le \varepsilon^p \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t)|^p dt, \quad 1 \le p < \infty,\\[2ex]
\displaystyle\max_{t_{i+1}\le t\le t_{i+2}} |f(t)| \le \varepsilon \max_{t_i\le t\le t_{i+1}} |f(t)|.
\end{cases}
$$

А для $i \ge i - s \ge 1$ имеем

$$
\text{(b5)}\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i_0}} |f(t)|^p dt \le 5\frac{\varepsilon^{ps}}{1-\varepsilon^p}\int_{t_{i-s}}^{t_{i-s+1}} |f(t)|^p dt,\\[2ex]
\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i_0}} |f(t)|^p dt \le 5\frac{\varepsilon^{p|i|}}{1-\varepsilon^p}\|f\|_p^p \quad 1 \le p < \infty.
\end{cases}
$$

$$
\text{(b6)}\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\max_{t_i\le t\le t_{i_0}} |f(t)| \le \varepsilon^s \max_{t_{i-s}\le t\le t_{i-s+1}} |f(t)|,\\[2ex]
\displaystyle\max_{t_i\le t\le t_{i_0}} |f(t)| \le \varepsilon^i\|f\|_\infty.
\end{cases}
$$

Доказательство : Из $f \perp S(\widetilde{\pi})$ следует, что

$$
l_i\xi_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})\xi_i + l_{i+1}\xi_{i+1} = 0 \quad \text{для} \quad 2 \le i \le n-2,
$$

$$
\xi_{-2}l_{-1} + \xi_{-1}\left(2(l_{-1} + l_0) + \frac{l_0 l_1}{l_0 + l_1}\right) + \xi_0(l_0 + 2l_1) + \xi_1\frac{l_1^2}{l_0 + l_1} = 0,
$$

$$
\xi_{-1}\frac{l_0^2}{l_0 + l_1} + \xi_0(2l_0 + l_1) + \xi_1\left(2(l_1 + l_2) + \frac{l_0 l_1}{l_0 + l_1}\right) + \xi_2 l_2 = 0.
$$

Из этих равенств и из (4.6) вытекают (a3) и (b3). Неравенства (a1) и (b1) следуют из (a3), (b3) и (4.6). Неравенства (a2) и (b2) следуют из (a1), (b1), (4.1) при многократном применении следующего элементарного неравенства :

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} < \frac{1}{a+b+c}, \qquad a, b, c > 0.$$

Теперь докажем неравенство (a4) (неравенство (b4) проверяется аналогичным образом).
Если $m_{i,p} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)|^p\,dt$, то $m_{i,p} = \frac{l_i}{p+1}\frac{|\xi_{i-1}|^{p+1}+|\xi_i|^{p+1}}{|\xi_{i-1}|+|\xi_i|}$, так как $\xi_i\xi_{i-1} < 0$. Кроме того, для $p \geq 1$ имеем

$$|\xi_i|^p \geq \frac{|\xi_{i-1}|^{p+1} + |\xi_i|^{p+1}}{|\xi_{i-1}| + |\xi_i|} \geq \left(\frac{|\xi_{i-1}|^2 + |\xi_i|^2}{|\xi_{i-1}| + |\xi_i|}\right)^p \geq 2^p(\sqrt{2}-1)^p|\xi_i|^p. \tag{4.7}$$

Следовательно,

$$\frac{m_{i+1,p}}{m_{i,p}} \geq 2^p(\sqrt{2}-1)^p\frac{l_{i+1}}{l_i}\frac{|\xi_{i+1}|^p}{|\xi_i|^p}.$$

Комбинируя эти неравенства с (a3), получим

$$\frac{m_{i+1,p}}{m_{i,p}} \geq 2^p(\sqrt{2}-1)^p\frac{l_{i+1}}{l_i}\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_i}{l_{i+1}}\right)^p \geq \frac{3}{4}4^p(\sqrt{2}-1)^p \geq e^{-p}.$$

Чтобы доказать (a5), покажем, что

$$\int_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}} |f(t)|^p dt \leq 4\int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt.$$

Так как f линейная функция на интервале $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$, то $|f(t)| \leq |\xi_{i_0+1}|$ для $t \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. Отсюда имеем

$$\int_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}} |f(t)|^p dt \leq l_{i_0+1}|\xi_{i_0+1}|^p.$$

Из $\xi_{i_0+1}\xi_{i_0+2} < 0$ следует, что

$$\int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt = \frac{l_{i_0+2}}{p+1}\frac{|\xi_{i_0+1}|^{p+1} + |\xi_{i_0+2}|^{p+1}}{|\xi_{i_0+1}| + |\xi_{i_0+2}|}$$

Из (4.7) получаем

$$\int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt \geq \frac{l_{i_0+2}}{p+1}2^p(\sqrt{2}-1)^p|\xi_{i_0+2}|^p.$$

Из (a3) для $i = i_0 + 2$ имеем

$$|\xi_{i_0+1}|(l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}) \leq |\xi_{i_0+2}|l_{i_0+2} \leq |\xi_{i_0+1}|(3l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}).$$

Следовательно,

$$\frac{\int_{t_{l_{i_0+1}}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt}{\int_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}} |f(t)|^p dt} \geq \frac{l_{i_0+2}}{l_{i_0+1}} \frac{2^p(\sqrt{2}-1)^p}{p+1} \left(2 + \frac{l_{i_0+1}}{l_{i_0+2}}\right)^p \geq \frac{4^p(\sqrt{2}-1)^p}{2(p+1)} \geq \frac{1}{4}.$$

Заметим, что (a5) есть следствие последнего неравенства и (a4).

Неравенство (b5) проверяется тем же способом, а неравенства (a6) и (b6) вытекают из (a4) и (b4) соответственно. Доказательство завершено.

Прежде чем сформулировать Свойство 4, мы нуждаемся в некоторых обозначениях. Пусть $x \in [0,1]$, $x \notin J$ и $x \neq t_{i_0}$. Тогда отрезок $[0,1]$ точкой x и интервалом J разбивается на два обобщенных интервала. Точка t_{i_0} не принадлежит одному из этих интервалов. Длину этого интервала обозначим через $\operatorname{dist}(x, J)$, а количество точек из разбиения π принадлежащих этому интервалу через $d_\pi(x)$. Если $x \in J$, то полагаем $d_\pi(x) = 0$.

Если $J = [\alpha, \beta]$, то через J^- и J^+ будем обозначать обобщенные интервалы $[t_{i_0}, \alpha]$ и $[\beta, t_{i_0}]$ соответственно. Для $x \in J^-$ обозначим через $\int_{t_{i_0}}^x f(t)dt$ интеграл по интервалу $[t_{i_0}, x] \subset J^-$ в положительном направлении. Аналогично определяется интеграл $\int_x^{t_{i_0}} f(t)dt$ для $x \in J^+$.

Для обобщенного интервала $V \subset [0,1]$ с концами α и β (т.е. $V = [\alpha, \beta]$ или $V = [\alpha, 1] \cup [0, \beta]$), будем считать, что $d_\pi(V) = \min(d_\pi(\alpha), d_\pi(\beta))$, если $V \cap J = \emptyset$ и $d_\pi(V) = 0$, если $V \cap J \neq \emptyset$.

Свойство 4. Пусть $\pi = \tilde{\pi} \cup \{t_0\}$ – разбиение с вышеупомянутыми свойствами, и $f = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i N_i$ – общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений $(\tilde{\pi}, \pi)$. Тогда существует постоянная $C > 0$ не зависящая от $\tilde{\pi}$ и π такая, что

$$|\xi_i| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_\pi(t_i)} \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \operatorname{dist}(t_i, J) + |[t_{i-1}, t_{i+1}]|} \quad i \neq i_0, \quad 0 \leq i \leq n-1. \tag{4.8}$$

Более того, для каждого $p \in [1, +\infty)$ существует постоянная $C_p > 0$ такая, что при $x \in J^-$ имеем

$$\int_{t_{i_0}}^x |f(t)|^p dt \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{d_\pi(x)} \frac{|J|^{p/2}}{(|J| + \operatorname{dist}(x, J))^{p-1}} \tag{4.9}$$

а при $x \in J^+$ имеем

$$\int_x^{t_{i_0}} |f(t)|^p dt \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{d_\pi(x)} \frac{|J|^{p/2}}{(|J| + \operatorname{dist}(x, J))^{p-1}}.$$

Кроме того

$$\|f\|_{L^p(J)} \sim \|f\|_p \sim |J|^{1/p - 1/2}, \qquad 1 \leq p \leq \infty, \tag{4.10}$$

где постоянные эквивалентности не зависят от p, π и $\tilde{\pi}$.

Замечание. Из линейности функции f на каждом из отрезков (t_k, t_{k+1}) и (4.8) следует, что

$$|f(x)| \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \mathrm{dist}(x, J)}. \tag{4.11}$$

Доказательство этого замечания и Свойства 4 совпадают с доказательством соответствующего Свойства из [11].

Свойство 5. Пусть $\hat{f}$ – общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений $(\overline{\pi}, \pi)$ и $\chi_{J,2} = \frac{\chi_J}{|J|^{1/2}}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ не зависящая от $\overline{\pi}$ и π такая, что

$$|f(t)| \le C\widetilde{\mathbb{M}}\chi_{J,2}(t) \quad \text{и} \quad |\chi_{J,2}(t)| \le C\widetilde{\mathbb{M}}f(t).$$

Доказательство : При $p = 1$, неравенство справа следует из (4.10) :

$$\widetilde{\mathbb{M}}f(t) \ge \frac{1}{|J|}\int_J |f(t)|dt \ge C|J|^{-1/2} = C\,\chi_{J,2}(t), \quad \text{для} \quad t \in J.$$

Учитывая, что $\widetilde{\mathbb{M}}\chi_{J,2}(t) \ge \frac{|J|^{1/2}}{|J|+\mathrm{dist}(t,J)}$, из (4.11) получим первое неравенство.

4.2. Свойства общей периодической системы Франклина. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \ge 0\}$ – допустимая последовательность точек и пусть $\{f_n, n \ge 1\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина. Через I_n, I_n^-, I_n^+, J_n, ν_n, и d_n обозначим интервалы и величины раннее определенные для общей периодической функции Франклина, которые соответствуют функции f_n и разбиению π_n. Предположим также, что точки t_n^{--}, t_n^-, t_n^+, t_n^{++}, t_{i_n} соответствуют t_n и π_{n-1} в точности также, как точки t^{--}, t^-, t^+, t^{++}, t_{i_0} соответствовали t_0 и $\overline{\pi}$ в параграфе 4.1.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \ge 0\}$ – допустимая последовательность точек и $\{f_n, n \ge 1\}$ – соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Если $t_k \le t_l$, $k, l \ge 0$ и не существует такого номера $i \le \max(k, l)$, со свойством $t_i \in (t_k, t_l)$, то для всех таких k и l имеем*

$$\#\{n; J_n = [t_k, t_l]\} \le 3.$$

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \ge 0\}$ – допустимая последовательность и пусть $\{f_n, n \ge 1\}$ – соответствующая ей периодическая система Франклина. Далее, если $t_k \le t_l$, $k, l \ge 0$ и не существует такого номера $i \le \max(k, l)$ со свойством $t_i \in (t_k, t_l)$, то для всех таких k и l имеем*

$$\#\left\{n : J_n \subset [t_k, t_l], |J_n| \ge \frac{|[t_k, t_l]|}{2}\right\} \le 15.$$

Доказательства этих лемм совпадают с доказательствами лемм 3.4 и 3.5 из [11], с той разницей, что здесь мы не рассматриваем разбиения с двойными точками, и поэтому вместо констант 5 и 25 из [11] здесь выступают константы 3 и 15, соответственно.

Следующее свойство является простым следствием Леммы 3.

Свойство 6. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \geq 0\}$ – допустимая последовательность и пусть $\{f_n, n \geq 1\}$ – соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Если $\{n_s : s \geq 1\}$ есть последовательность натуральных чисел такая, что $J_{n_s} \supset J_{n_{s+1}}$, то для любого числа $\gamma > 0$ имеем

$$\sum_{s\geq 1} |J_{n_s}|^\gamma \sim |J_{n_1}|^\gamma \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{m} |J_{n_s}|^{-\gamma} \sim |J_{n_m}|^{-\gamma}$$

с постоянными эквивалентности, зависящими от γ, но не зависящими от $\mathcal{T}$ и последовательности $\{n_s : s \geq 1\}$.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \geq 0\}$ – допустимая последовательность точек и $\{f_n; n \geq 1\}$ соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Для любой функции $f \in L_p[0,1]$, $f = \sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ обозначим

$$Pf(t) = \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^2 f_n^2(t)\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad S^* f(t) = \sup_{n\geq 1} |\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)|.$$

5.1. Технические Оценки. Ниже нам понадобиться следующее известное свойство полиномов.

Свойство 7. Пусть $k \in N$ и $0 < \rho < 1$ суть фиксированные числа. Тогда для любого интервала $[a,b]$, множества $A \subset [a,b]$, удовлетворяющего условию $|A| \geq \rho|[a,b]|$ и любого полинома Q степени k, существует такая константа $C = C_{k,\rho}$, зависящая только от k и ρ, что

$$\max_{t\in[a,b]} |Q(t)| \leq C_{k,\rho} \sup_{t\in A} |Q(t)| \quad \text{и} \quad \int_a^b |Q(t)|dt \leq C_{k,\rho} \int_A |Q(t)|dt.$$

Для $f = \sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ и $l > 0$ положим $E_l = \{t \in (0,1), Pf(t) > l\}$, и $V = (\alpha, \beta)$, где $\mathbb{M}\chi_{E_l}(\alpha) \leq \frac14$ и $\mathbb{M}\chi_{E_l}(\beta) \leq \frac14$. Пусть $\Gamma = \{n \in N, J_n \subset V\}$ и $\Lambda = N \setminus \Gamma$.

Лемма 4.

$$\int_{V^c} \sum_{n\in\Gamma} |a_n f_n(t)| dt \leq C \int_V \left(\sum_{n\in\Gamma} |a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2} dt, \tag{5.1}$$

$$\left(\sum_{n\in\Lambda} |a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2} \leq Cl, \quad t \in V, \tag{5.2}$$

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство : Начнем с доказательства неравенства (5.1). Оценим интеграл $\int_{V^c\cap J_n^+}|a_n f_n(t)|\,dt$, а интеграл $\int_{V^c\cap J_n^-}|a_n f_n(t)|\,dt$ оценивается аналогично. Заметим, что из (b5), Свойства 3, (4.10) и Свойства 4 следует

$$\int_{V^c\cap J_n^+}|a_n f_n(t)|dt \le C\varepsilon^{d_n(\beta)}\int_{J_n}|a_n f_n(t)|dt$$

для любого $n\in\Gamma$ для которого $V^c\cap J_n^+\ne\emptyset$. Обозначим через J_n^l левую половину интервала J_n. Так как функция f_n линейна на J_n, $J_n^l\subset J_n$ и $|J_n^l|=\frac{|J_n|}{2}$, то из Свойства 7 имеем $\int_{J_n}|f_n(t)|dt\le C\int_{J_n^l}|f_n(t)|dt$. Отсюда следует, что

$$\int_{V^c\cap J_n^+}|a_n f_n(t)|dt \le C\varepsilon^{d_n(\beta)}\int_{J_n^l}|a_n f_n(t)|dt \le C\varepsilon^{d_n(\beta)}\int_{J_n^l}\left(\sum_{n\in\Gamma}|a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2} dt.$$

Положим

$$\Gamma_s=\{n\in\Gamma : d_n(\beta)=s \quad \text{и} \quad V^c\cap J_n^+\ne\emptyset\}.$$

Тогда

$$\int_{V^c\cap J_n^+}\sum_{n\in\Gamma}|a_n f_n(t)|dt=\int_{V^c\cap J_n^+}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_s}|a_n f_n(t)|dt$$

так как $\Gamma_0=\emptyset$. Действительно, если $d_n(\beta)=0$, то $\beta\in J_n$, и из определения множества Γ следует, что $J_n\subset V$, что невозможно.

Если $n\in\Gamma_s$, $s\ge 1$, тогда $\#\{\pi_n\cap(V\cap J_n^+)\}=s$. Отсюда следует, что для любого фиксированного s, интервалы J_n (где $n\in\Gamma_s$) могут быть сгруппированы в пачки с интервалами имеющими общий правый конец и с раздельными максимальными интервалами из различных пачек. Следовательно, из Леммы 3 вытекает, что каждая точка $t\ne t_i$ принадлежит не больше, чем 15 интервалам J_n^l для $n\in\Gamma_s$. Отсюда получаем

$$\sum_{n\in\Gamma_s}\int_{V^c\cap J_n^+}|a_n f_n(t)|dt\le C\varepsilon^s\sum_{n\in\Gamma_s}\int_{J_n^l}\left(\sum_{n\in\Gamma}|a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2}dt\le$$

$$\le C\varepsilon^s\int_V\left(\sum_{n\in\Gamma}|a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2}dt.$$

Суммируя эти неравенства по $s\ge 1$ получим

$$\sum_{n\in\Gamma}\int_{V^c\cap J_n^+}|a_n f_n(t)|dt\le C\int_V\left(\sum_{n\in\Gamma}|a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2}dt.$$

Интеграл $\int_{V^c \cap J_n^-} \sum_{n\in\Gamma} |a_n f_n(t)| dt$ оценивается аналогичным образом. Это завершает доказательство неравенства (5.1).

Перейдем к доказательству неравенства (5.2). Введем следующие обозначения

$$\Lambda' = \{n \in \Lambda, \#\{\pi_n \cap V\} \leq 1\} \quad \text{и} \quad \Lambda'' = \Lambda \setminus \Lambda'.$$

Заметим, что существует такая константа $C > 0$, что

$$\left(\sum_{n\in\Lambda'} |a_n f_n(t)|^2\right)^{1/2} \leq Cl \quad \text{для всех} \quad t \in V. \tag{5.3}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что если γ есть первая точка последовательности $\mathcal{T}$ в интервале V, то сумма $\sum_{n\in\Lambda'} |a_n f_n(t)|^2$ является полиномом второй степени на обоих интервалах (α, γ) и (γ, β). Кроме того, $|E_l^c \cap [\alpha, \gamma]| \geq \frac{3}{4}|[\alpha, \gamma]|$ и $|E_l^c \cap [\gamma, \beta]| \geq \frac{3}{4}|[\gamma, \beta]|$, так как $\mathcal{M}\chi_{E_l}(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ и $\mathcal{M}\chi_{E_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$. Следовательно, на обоих интервалах (α, γ) и (γ, β) неравенство (5.3) вытекает из Свойства 7, так как $Pf(t) \leq l$ на E_l^c.

Для каждого $n \in \Lambda''$ введем следующие обозначения

$$\gamma_n = \begin{cases} t_{i_n} & \text{если} \quad t_{i_n} \in V, \\ \alpha & \text{если} \quad t_{i_n} \notin V \quad \text{и} \quad \alpha \in J_n^-, \\ \beta & \text{если} \quad t_{i_n} \notin V \quad \text{и} \quad \beta \in J_n^+, \end{cases}$$

и $h_n = f_n \chi_{(\alpha, \gamma_n)}$, $g_n = f_n \chi_{(\gamma_n, \beta)}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} &f_n^2(t) \leq h_n^2(t) + g_n^2(t) \quad \text{для} \quad t \in V \quad \text{и} \quad n \in \Lambda'', \\ &f_n^2(t) \geq \max\left(h_n^2(t), g_n^2(t)\right). \end{aligned}$$

Для доказательства существования $C > 0$ такой, что $\sum_{n\in\Lambda''} |a_n g_n(t)|^2 \leq Cl^2$, по индукции определим последовательность точек β_n, и ассоциируем с ней разбиение множества Λ''. Положим, $n_1 = \min \Lambda''$ и пусть $\beta_1 \in \pi_{n_1}$ такое, что $\beta_1 < \beta$ и $(\beta_1, \beta) \cap \pi_{n_1} = \emptyset$ (заметим, что $\alpha < \beta_1$). Обозначим

$$\Lambda_1'' = \{n \in \Lambda'', (\beta_1, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}.$$

Далее, положим $n_2 = \min \Lambda'' \setminus \Lambda_1''$. Заметим, что $\#\{(\beta_1, \beta) \cap \pi_{n_2}\} \geq 1$. Поэтому, мы можем выбрать $\beta_2 \in \pi_{n_2}$ такое, что $\beta_1 < \beta_2 < \beta$ и $(\beta_2, \beta) \cap \pi_{n_2} = \emptyset$. Положим

$$\Lambda_2'' = \{n \in \Lambda'' \setminus \Lambda_1'', (\beta_2, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}.$$

Заметим, что $\beta_2 \in \pi_n$ при $n \geq n_2$. Определив точки $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и множества $\Lambda_1'', \ldots, \Lambda_k''$, возьмем $n_{k+1} = \min \Lambda'' \setminus \cup_{i=1}^k \Lambda_i''$, и заметим, что $\#\{(\beta_k, \beta) \cap \pi_{n_{k+1}}\} > 1$

Теперь определим $\beta_{k+1} \in \pi_{n_{k+1}}$ так, чтобы $\beta_k < \beta_{k+1} < \beta$ и $(\beta_{k+1}, \beta) \cap \pi_{n_{k+1}} = \emptyset$. Положим

$$\Lambda''_{k+1} = \left\{ n \in \Lambda'' \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda''_i, (\beta_{k+1}, \beta) \cap \pi_n = \emptyset \right\}.$$

Ясно, что $\beta_k \in \pi_n$ для любого $n \geq n_k$, и $n \geq n_k$, если $n \in \Lambda''_l$, где $l \geq k$. Применяя Свойство 7, получим

$$\sum_{n \in \cup_{i=1}^{m} \Lambda''_i} |a_n f_n(t)|^2 \leq Cl^2 \quad \text{для} \quad t \in [\beta_m, \beta).$$

Так как $\mathbb{M}\chi_{E_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$ и для каждого m и $n \in \cup_{i=1}^{m} \Lambda''_i$ функции f_n и g_n линейны на (β_m, β). Кроме того, так как $g_n^2(t) \leq f_n^2(t)$, то

$$\sum_{n \in \cup_{i=1}^{m} \Lambda''_i} |a_n g_n(t)|^2 \leq Cl^2, \quad t \in [\beta_m, \beta). \tag{5.4}$$

Теперь рассмотрим сумму $\sum_{n \in \Lambda''_m} |a_n g_n(t)|^2$ на отрезке $[\beta_{k-1}, \beta_k)$, где $k \leq m$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

Случай 1 : $\beta_m = t_n$. Этот случай может встретиться самое большее один раз. Напомним, что $(\beta_m, \beta) \cap \pi_n = \emptyset$ и $J_n \not\subset V$ для $n \in \Lambda''_m$. Итак, мы имеем следующие два подслучая :

1a : $\beta_m = t_n$ **является левым концом интервала** J_n. Тогда $\beta \in J_n$ и $\mathbb{M}\chi_{E_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$. Поэтому из Свойства 7 вытекает существование абсолютной постоянной $C > 0$ такой, что

$$|a_n f_n(t)| \leq Cl, \quad t \in J_n.$$

1b : $\beta_m = t_n$ **и** t_n^+ **является правым концом интервала** J_n. В этом случае $\beta_m \leq t_n^+$. Кроме того, $I_n^* = [t_n, t_n^+] \cup J_n$ и $|J_n| \geq |[t_n, t_n^+]|$, т.е. $|J_n| \leq |I_n^*| \leq 2|J_n|$ по определению интервалов I^* и J. Следовательно, используя неравенство $\mathbb{M}\chi_{E_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$ и Свойство 7 получим

$$|a_n f_n(t)| \leq Cl, \quad t \in J_n.$$

Объединяя случаи (1a) и (1b) с (a6) Свойства 3 и (4.10) Свойства 4, мы получим

$$|a_n g_n(t)| \leq C\epsilon^{m-k} l, \quad t \leq \beta_k. \tag{5.5}$$

Случай 2 : $\beta_m = t_n^+$. Так как $n \in \Lambda''_m$, то точка t_n^+ является левым концом интервала J_n. Из Свойства 4 и определения функции g_n следует, что

$$|g_n(t)| \leq C\epsilon^{m-k} |g_n(\beta_m)|, \quad t \leq \beta_k.$$

Следовательно, для $t \le \beta_k$ получаем

$$\left(\sum_{\substack{n\in\Lambda''_m\\ n\in\text{Случай 2}}} |a_n g_n(t)|^2\right)^{1/2} \le C\varepsilon^{m-k}\left(\sum_{\substack{n\in\Lambda''_m\\ n\in\text{Случай 2}}} |a_n g_n(\beta_m)|^2\right)^{1/2} \le C\varepsilon^{m-k} l. \quad (5.6)$$

Случай 3 : $\beta_m \ne t_n$ и $\beta_m \ne t_n^+$. Так как $n \in \Lambda''_m$, то из Свойства 4 и определения g_n, для $t \le \beta_k$ получим

$$\left(\sum_{\substack{n\in\Lambda''_m\\ n\in\text{Случай 3}}} |a_n g_n(t)|^2\right)^{1/2} \le C\varepsilon^{m-k}\left(\sum_{\substack{n\in\Lambda''_m\\ n\in\text{Случай 3}}} |a_n g_n(\beta_m)|^2\right)^{1/2} \le C\varepsilon^{m-k} l. \quad (5.7)$$

Из неравенств (5.5), (5.6) и (5.7) вытекает

$$\left(\sum_{n\in\Lambda''_m} |a_n g_n(t)|^2\right)^{1/2} \le C\varepsilon^{m-k} l, \quad t \le \beta_k. \quad (5.8)$$

Пусть теперь $t \in [\beta_m, \beta_{m+1})$. Используя неравенства (5.4) и (5.8), получаем

$$\sum_{n\in\Lambda''} |a_n g_n(t)|^2 \le \sum_{n\in\bigcup_{i=1}^m \Lambda''_i} |a_n g_n(t)|^2 + \sum_{k\ge m+1}\sum_{n\in\Lambda''_k} |a_n g_n(t)|^2 \le$$

$$\le Cl^2 + \sum_{k\ge m+1} C\varepsilon^{2(k-m-1)} l^2 \le Cl^2.$$

Из (5.8) получаем аналогичное неравенство для $t \in (\alpha, \beta_1)$. Для $t \in [\beta_{\max}, \beta)$, где $\beta_{\max} = \sup_{k\ge 1}\beta_k$ достаточно применить неравенство (5.4).

Сумма $\sum_{n\in\Lambda''} |a_n h_n(t)|^2$ оценивается аналогично. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $V = (\alpha, \beta) \subset (0,1)$ и $f \in L^p[0,1]$ $(1 < p < 2)$ такие, что* $\operatorname{supp} f \subset V$ *и* $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. *Тогда существует постоянная M_p, зависящая только от p такая, что*

$$\sum_{n=n(V)}^{\infty}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^c)} \le M_p \|f\|_p^p,$$

где $\vartheta = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{3}}$, $n(V) = \min\{n : \pi_n \cap V \ne \emptyset\}$ *и* $\widetilde{V} = (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ *– обобщенный интервал с концами*

$$\widetilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha - 2|V| & \text{если} \quad \alpha - 2|V| \ge 0, \\ \alpha - 2|V| + 1 & \text{если} \quad \alpha - 2|V| < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\beta} = \begin{cases} \beta + 2|V| & \text{если} \quad \beta + 2|V| \le 1, \\ \beta + 2|V| - 1 & \text{если} \quad \beta + 2|V| > 1, \end{cases}$$

и $\widetilde{V} = [0,1]$, *если* $|V| > \frac{1}{5}$.

Доказательство : Обозначим через $1/q = 1 - 1/p$ и заметим, что $0 < \vartheta < 1$. Из очевидного неравенства

$$\int_{\widetilde{V}^*} |f_n(t)|^p dt \le \int_{\widetilde{V}^* \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt + \int_{\widetilde{V}^* \cap (J_n^+ \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt$$

следует, что нужно оценить суммы

$$\sum_{n=n(V)}^{\infty} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^* \cap (J_n^- \cup J_n))},$$

$$\sum_{n=n(V)}^{\infty} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^* \cap (J_n^+ \cup J_n))}.$$

Поскольку обе суммы оцениваются аналогично, мы приведем оценки только для первой суммы. Для этого рассмотрим следующие случаи :

Случай 1 : $J_n \subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 2 : $\widetilde{\alpha} \in J_n$, $|J_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]| \ge |V|$ и $J_n \not\subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 3 : $J_n \subset [\widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}]$ или $\widetilde{\alpha} \in J_n$, $|J_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]| \le |V|$ и $J_n \not\subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$ или $\widetilde{\beta} \in J_n$, $|J_n \cap [\beta, \widetilde{\beta}]| \le |V|$
и $J_n \not\subset [\beta, \widetilde{\beta}]$.

Случай 4 : $\alpha \in J_n$, $|J_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]| \ge |V|$ и $J_n \not\subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 5 : $J_n \subset [\alpha, \widetilde{\beta}]$ или $\alpha \in J_n$, $|J_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]| \le |V|$ и $J_n \not\subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 6 : $\widetilde{\beta} \in J_n$, $|J_n \cap [\beta, \widetilde{\beta}]| > |V|$ и $J_n \not\subset [\beta, \widetilde{\beta}]$.

Обозначим через $\widetilde{V}_- = [\widetilde{\alpha}, \beta]$ и $\widetilde{V}_+ = [\alpha, \widetilde{\beta}]$.

Случай 1 : Для тех n, которые удовлетворяют условиям $J_n \subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$ введем следующие обозначения :

$$T_-^1 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \ge \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T_{-,m}^1 = \left\{ n \in T_-^1 : \#\{\pi_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]\} = m \right\},$$

$$S_-^1 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt < \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$S_{-,m}^1 = \left\{ n \in S_-^1 : \#\{\pi_n \cap \widetilde{V}_-^c\} = m \right\}.$$

Рассмотрим тот случай, когда $n \in T_{-,m}^1$. Для ясности введем обозначения $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \{\pi_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]\}$ так, что $[x_1, x_2] \subset [x_1, x_3] \subset \cdots \subset [x_1, x_m]$ и $m \ge 2$. Также заметим, что

$$\#T_{-,m}^1 \le 7. \tag{5.9}$$

В самом деле, только $[x_1, x_2]$ и $[x_{m-1}, x_m]$ могут быть интервалами J_n для некоторого $t_n \neq x_1, x_2, \ldots, x_m$, и только один из интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ $(3 \leq i \leq m-1)$ может быть интервалом J_n, где $t_n = x_i$, который был добавлен последним. Следовательно, неравенство (5.9) следует из Леммы 2. Кроме того, из $(a5)$ и $(b5)$ Свойства 3 для $n \in T^1_{-,m}$ имеем

$$\int_{\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pd_n(\widetilde{\alpha})} \|f_n\|_p^p,$$
$$\int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq C_p \varepsilon^{qd_n(\alpha)} \|f_n\|_q^q.$$

Добавим, что если $\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n) \neq \emptyset$, то $d_n(\alpha) + d_n(\widetilde{\alpha}) = m$ и $d_n(V) \leq d_n(\alpha) \leq m$. Следовательно,

$$\sum_{n \in T^1_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \int_{\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \vartheta^{mp} \|f\|_p^p \tag{5.10}$$

и из (5.9) получаем очевидную оценку

$$|a_n|^p \leq \int_V |f(t)|^p dt \left(\int_V |f_n(t)|^q dt\right)^{p/q}. \tag{5.11}$$

Теперь рассмотрим случай $n \in S^1_{-,m}$. Заметим, что $t_{i_n} \in \widetilde{V}_-$. Из определения интервала S^1_- следует, что для каждого m и $n \in S^1_{-,m}$ имеем

$$\left(\int_V |f_n(t)|^q dt\right)^{p/q} \leq C_p \left(\int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt\right)^{p/q}. \tag{5.12}$$

Пусть Δ является таким интервалом линейности функции f_n (с концами из π_n), что $\Delta \cap (V \cap J_n^-) \neq \emptyset$. Тогда из определения интервала Δ и Свойства 4 получим, что

$$\max_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C\varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|} \leq C\varepsilon^{d_n(\beta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n)}.$$

Следовательно,

$$\max_{t \in V \cap J_n^-} |f_n(t)| = \max_{\Delta : \Delta \cap V \cap J_n^- \neq \emptyset} \max_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C\varepsilon^{d_n(\beta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n)}.$$

Отсюда и из неравенства (5.12) следует, что

$$\left(\int_V |f_n(t)|^q dt\right)^{p/q} \leq C_p |V|^{p-1} \varepsilon^{pd_n(\beta)} \frac{|J_n|^{p/2}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n))^p}.$$

Учитывая, что $d_n(V) \le d_n(\beta) = m + d_n(\widetilde{\alpha}) - \xi$, где $\xi = \#\{\pi_n \cap \{\widetilde{\alpha}\}\}$, и комбинируя вышеупомянутые соотношения, получаем

$$\sum_{n \in S^1_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \sum_{n \in S^1_{-,m}} \vartheta^{p(m+d_n(\widetilde{\alpha}))} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n))^p} \|f\|_p^p. \tag{5.13}$$

Пусть $k = d_n(\widetilde{\alpha})$ и m и k фиксированы. Тогда интервалы J_n могут быть сгруппированы в пачки, так чтобы интервалы из одной пачки имели общий левый конец и максимальные интервалы из разных пачек не пересекались бы. Из Леммы 14 вытекает, что каждая точка $t \ne t_i$ может принадлежать не более чем 15-ти интервалам J_n^r.

Ясно, что $|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n) > |[\beta, t]|$ для $t \in J_n^r$. Следовательно,

$$\sum_{\substack{d_n(\widetilde{\alpha})=k \\ n \in S^1_{-,m}}} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n))^p} \le C \sum_{\substack{d_n(\widetilde{\alpha})=k \\ n \in S^1_{-,m}}} \int_{J_n^r} \frac{|V|^{p-1}}{|[\beta, t]|^p} dt \le C_p \int_{\widetilde{\alpha}}^{\alpha} \frac{|V|^{p-1}}{|[\beta, t]|^p} dt \le C_p.$$

Из последнего и из неравенства (5.13) вытекает

$$\sum_{n \in S^1_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \vartheta^{mp} \|f\|_p^p. \tag{5.14}$$

Случай 2 : Для n, удовлетворяющему $\widetilde{\alpha} \in J_n$, $|J_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]| \ge |V|$ и $J_n \not\subset [\widetilde{\alpha}, \alpha]$, обозначим

$$T^2_- = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \ge \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T^2_{-,m} = \{ n \in T^2_- : \quad \#\{\pi_n \cap [\widetilde{\alpha}, \alpha]\} = m \},$$

$$S^2_- = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt < \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$S^2_{-,m} = \left\{ n \in S^2_- : \quad \#\{\pi_n \cap \widetilde{V}^c_-\} = m \right\}.$$

Если $n \in T^2_{-,m}$, то $\#T^2_{-,m} < \infty$ и $d_n(\alpha) = m \ge d_n(V)$. Более того, если $n_0 < n_1 < \ldots < n_s$ такие элементы множества $T^2_{-,m}$, что $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset J_{n_2} \cdots \supset J_{n_s}$, то эти интервалы имеют тот же правый конец, и из оценок $\|f_n\|_p^p$ и Свойства 3, для $n \in T^2_{-,m}$, получаем

$$\|f_n\|_p \sim |J_n|^{1/p-1/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \le 2 \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \le C_q e^{qm} |V| |J_n|^{-q/2}.$$

Последнее неравенство вместе с (5.11) дает

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \varepsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Из определения $T^2_{-,m}$ следует, что $|J_{n_s}| \ge |V|$. Следовательно, из Свойства 6 вытекает, что

$$\sum_{n\in T^2_{-,m}} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_s}|^{1-p} \le C_p |V|^{1-p}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n\in T^2_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \vartheta^{mp} \|f\|_p^p. \tag{5.15}$$

Теперь рассмотрим случай когда $n \in S^2_{-,m}$. Заметим, что $\# S^2_{-,m} < \infty$ и $d_n(\beta) = m \ge d_n(V)$. Более того, если $n_0 < n_1 < \ldots < n_s$ суть элементы множества $S^2_{-,m}$, для которых $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset J_{n_2} \ldots \supset J_{n_s}$, то все эти интервалы имеют общий левый конец, и из оценок $\|f_n\|_p^p$ и Свойства 3 получаем

$$\|f_n\|_p \sim |J_n|^{1/p-1/2} \quad \text{и} \qquad \int_V |f_n(t)|^q \, dt \le 2\int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \le C_q \varepsilon^{qm} |V| |J_n|^{-q/2}.$$

Последнее неравенство вместе с (5.11) дают

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \varepsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Из определения $S^2_{-,m}$ следует, что $|J_{n_s}| \ge |V|$. Следовательно, из Свойства 6 вытекает

$$\sum_{n\in S^2_{-,m}} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_s}|^{1-p} \le C_p |V|^{1-p}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n\in S^2_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \vartheta^{mp} \|f\|_p^p. \tag{5.16}$$

Случай 3 : Для тех n, которые удовлетворяют условиям Случая 3, введем обозначения

$$T^3_- = \left\{ n : \int_{V\cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \ge \int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T^3_{-,m} = \left\{ n \in T^3_- : \#\{\pi_n \cap [\bar{\alpha}, \alpha]\} = m \right\}.$$

$$S_-^3 = \left\{n : \int_{V\cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt < \int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt\right\},$$

$$S_{-,m}^3 = \left\{n \in S_-^3 : \#\{\pi_n \cap [\beta, \widetilde{\beta}]\} = m\right\}.$$

Если $n \in T_{-,m}^3$, то обозначим

$$\alpha^* = \max\left\{\widetilde{\alpha} \text{ по правым концам интервалов } J_n,\ n \in T_{-,m}^3\right\}.$$

Из этого определения следует, что $|V| \le \|[\alpha^*, \alpha]\| \le 2|V|$ и $\#(\pi_n \cap [\alpha^*, \alpha]) = m$ для всех $n \in T_{-,m}^3$. Поэтому для $n \in T_{-,m}^3$ имеем $d_n(\alpha) = m + d_n(\alpha^*) - \xi^*$, где $\xi^* = \#(\pi_n \cap \alpha^*)$ и $d_n(V) \le d_n(\alpha)$. Полагая, что $n \in T_{-,m}^3$, сначала оценим $\sup_{t\in V\cap J_n^+} |f_n(t)|$. Для этого допустим, что Δ интервал линейности функции f_n (с концами из π_n) такой, что $\Delta \cap V \cap J_n^+ \ne \emptyset$. Из определения интервала Δ получаем

$$d_n(\Delta) \ge d_n(\alpha) \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(\alpha, J_n) \le \operatorname{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|.$$

Следовательно, из Свойства 4, для $\varepsilon = (\sqrt{2}+1)/3 > 2/3$ получаем

$$\sup_{t\in\Delta} |f_n(t)| \le C\varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \le C\varepsilon^{m+d_n(\alpha^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J_n)}.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in V\cap J_n^+} |f_n(t)| \le C\varepsilon^{m+d_n(\alpha^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J_n)}.$$

Итак, мы имеем

$$\int_V |f_n(t)|^q dt \le 2\int_{V\cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \le C_q \varepsilon^{q(m+d_n(\alpha^*))} \frac{|V||J_n|^{q/2}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J_n))^q}.$$

Так как $\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2}$, последнее неравенство вместе с (5.11) дают

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \|f\|_p^p \vartheta^{p(m+d_n(\alpha^*))} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J_n))^p}. \tag{5.17}$$

Обозначим через J_n^l левую половину интервала J_n и для фиксированного k рассмотрим все $n \in T_{-,m}^3$, удовлетворяющие условию $d_n(\alpha^*) = k$. Если $k = 0$, то из условий Случая 3 вытекает, что α^* является правым концом интервалов J_{n_i} и эти интервалы формируют вложенное семейство, т.е. все эти интервалы можно перенумеровать так, чтобы $J_{n_1} \supset J_{n_2} \supset \ldots \supset J_{n_s}$. Для $k > 0$, рассмотрим два индекса $n_1 < n_2$ таких, что $d_{n_1}(\alpha^*) = k = d_{n_2}(\alpha^*)$. Тогда все точки из разбиения разбиения π_{n_1} принадлежат и π_{n_2}. Следовательно, или правый конец J_{n_2} совпадает с правым концом J_{n_1} (из этого следует, что $J_{n_2} \subset J_{n_1}$) или он лежит между правым концом J_{n_1} и точкой α^* (в этом случае левый конец J_{n_2} также принадлежит тому же интервалу). Из последнего и Леммы 3 следует, что каждая точка $t \neq t_j$ может принадлежать не больше, чем 15-ти интервалам J^l_n, где m и k фиксированы и $d_n(\alpha^*) = k$. Кроме того, для $t \in J^l_n$ имеем

$$|J_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J_n) = |J^l_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J^l_n) \geq |[t, \alpha]|.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \in T^3_{-,m}: d_n(\alpha^*)=k} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\alpha, J_n))^p} \leq C_p \sum_{n \in T^3_{-,m}: d_n(\alpha^*)=k} \int_{J^l_n} \frac{|V|^{p-1}}{|[t,\alpha]|^p} dt$$

$$\leq C_p |V|^{p-1} \int_{-\infty}^{\alpha^*} \frac{1}{(\alpha - t)^p} dt \leq C_p \frac{|V|^{p-1}}{(\alpha - \alpha^*)^{p-1}} \leq C_p.$$

Отсюда и из (5.17), суммированием по k, получим

$$\sum_{n \in T^3_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \|f\|_p^p \, \vartheta^{pm}. \tag{5.18}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n \in S^3_{-,m}$. Обозначим

$$\beta^* = \min\left\{\tilde{\beta} \text{ по левым концам интервалов } J_n,\ n \in S^3_{-,m}\right\}.$$

Следовательно, $|V| \leq |[\beta, \beta^*]| \leq 2|V|$ и для всех $n \in S^3_{-,m}$ имеем $\#(\pi_n \cap [\beta, \beta^*]) = m$. Итак, для $n \in S^3_{-,m}$ имеем, что $d_n(\beta) = m + d_n(\beta^*) - \xi^*$, где $\xi^* = \#(\pi_n \cap \beta^*)$ и $d_n(V) \leq d_n(\beta)$. Для того, чтобы оценить $\sup_{t \in V \cap J_n^-} |f_n(t)|$ для $n \in S^3_{-,m}$, предположим, что Δ является интервалом линейности функции f_n (с концами из π_n) такой, что $\Delta \cap V \cap J_n^- \neq \emptyset$. Из определения интервала Δ следует, что

$$d_n(\Delta) \geq d_n(\beta) \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(\beta, J_n) \leq \operatorname{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|.$$

Из Свойства 4 следует, что (заметим, что $\varepsilon > 2/3$)

$$\sup_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C\varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq C\varepsilon^{m + d_n(\beta^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n)}.$$

Отсюда следует

$$\sup_{t \in V \cap J_n^-} |f_n(t)| dt \leq C\varepsilon^{m + d_n(\beta^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n)}.$$

Следовательно,

$$\int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2\int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{q(m+d_n(\beta^*))} \frac{|V||J_n|^{q/2}}{(|J_n|+\operatorname{dist}(\beta, J_n))^q}.$$

Поскольку $\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2}$, из последнего неравенства и из (5.11), получаем

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p\|f_n\|_p^p \leq C_p\|f\|_p^p \vartheta^{p(m+d_n(\beta^*))} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n|+\operatorname{dist}(\beta, J_n))^p}. \tag{5.19}$$

Для фиксированного k, рассмотрим все $n \in S^3_{-,m}$ со свойством $d_n(\beta^*) = k$. Если $k = 0$, из условий Случая 3 следует, что β^* является левым концом интервалов J_n, и эти интервалы формируют вложенное семейство. Для $k > 0$ рассмотрим два индекса $n_1 < n_2$ таких, чтобы $d_{n_1}(\beta^*) = k = d_{n_2}(\beta^*)$. Тогда все точки разбиения π_{n_1} также принадлежат π_{n_2}. Следовательно, или левый конец отрезка J_{n_2} совпадает с левым концом J_{n_1} (отсюда следует, что $J_{n_2} \subset J_{n_1}$) или он лежит между левым концом интервала J_{n_1} и точкой β^* (в этом случае правый конец интервала J_{n_2} также должен принадлежать тому же интервалу). Из последнего и Леммы 3 следует, что каждая точка $t \neq t_j$ может принадлежать не больше чем 15-ти интервалам из J_n^r= правая половина интервала J_n. Кроме того, для $t \in J_n^r$ имеем

$$|J_n| + \operatorname{dist}(\beta, J_n) = |J_n^r| + \operatorname{dist}(\beta, J_n^r) \geq |[\beta, t]|.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\in S^3_{-,m}:d_n(\beta^*)=k} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n|+\operatorname{dist}(\beta, J_n))^p} \leq C_p \sum_{n\in S^3_{-,m}:d_n(\beta^*)=k} \int_{J_n^r} \frac{|V|^{p-1}}{|[\beta,t]|^p}dt$$

$$\leq C_p|V|^{p-1}\int_{\beta^*}^{\alpha} \frac{1}{|[\beta,t]|^p}dt \leq C_p \frac{|V|^{p-1}}{|[\beta,\beta^*]|^{p-1}} \leq C_p.$$

Отсюда и из (5.19), суммированием по k, получаем

$$\sum_{n\in S^3_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p\|f_n\|_p^p \leq C_p\|f\|_p^p\vartheta^{pm}. \tag{5.20}$$

Случай 4 : Обозначим через

$$T^4_- = \{n \in \text{Случаю } 4\}, \quad T^4_{-,m} = \{n \in T^4_-,\ \#\{\pi_n \cap [\bar{\alpha}, \alpha]\} = m\}.$$

Отметим, что мы можем пропустить случай $m = 0$ или $m = 1$ для которых $[\bar{\alpha}, \alpha] \cap \pi_n = \{\alpha\}$, так как эти случаи уже рассмотрены для $T^2_{-,m}$ или $S^2_{-,m}$. Таким образом, $d_n(V) = 0$. Так как по крайней мере одна точка из π_n принадлежит интервалу V и еще одна точка в интервале π_n, причем $[\widetilde{\alpha}, \alpha)$, то получаем $|J_n \cap [\widetilde{a}, a]| \geq |V|$. Следовательно, $|V| \leq |J_n| \leq 3|V|$. Интервалы $J_n, n \in T^4_{-,m}$ формируют вложенное семейство, так как $\alpha \in J_n$, и по Лемме 3 имеем $\#T^4_{-,m} \leq 30$. Более того, в этом случае из (a5) Свойства 3, имеем

$$\int_{\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f_n\|_p^p.$$

Комбинируя эти соотношения с (5.11) и с оценками для $\|f_n\|_p^p$ и $\|f_n\|_q$, получим

$$\sum_{n \in T^4_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \int_{\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \tag{5.21}$$

Случай 5 : Обозначим

$$T^5_- = \{n \in \text{Случаю } 5\}, \quad T^5_{-,m} = \left\{n \in T^5_-, \#\{\pi_n \cap [\widetilde{a}, a]\} = m\right\},$$

и положим

$$\alpha' = \min\left\{\alpha \text{ по левым концам интервала } J_n,\ n \in T^5_{-,m}\right\}.$$

Тогда $|V| \leq |[\widetilde{a}, \alpha']| \leq 2|V|$ и для всех $n \in T^5_{-,m}$ имеем

$$J_n \subset [\alpha', \beta] \quad \text{и} \quad \#([\widetilde{a}, \alpha'] \cap \pi_n) = m.$$

Мы можем считать, что $J_n^- \cap \widetilde{V}^c \neq \emptyset$, так как

$$\sum_{n \in T^5_-; J_n^- \cap \widetilde{V}^c = \emptyset} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \int_{\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt = 0.$$

Если $n \in T^5_{-,m}$, то $d_n(\widetilde{\alpha}) = m + d_n(\alpha') - \xi'$, где $\xi' = \#(\pi_n \cap \{\alpha'\})$, и $\operatorname{dist}(\widetilde{\alpha}, J_n) \geq |[\widetilde{a}, \alpha']|$, откуда следует, что $|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\alpha}, J_n) \sim |V|$. Из неравенства (4.9) и Свойства 4 следует, что

$$\int_{\widetilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{p(m + d_n(\alpha'))} \frac{|J_n|^{p/2}}{|V|^{p-1}}. \tag{5.22}$$

Для каждого $n \in T^5_{-,m}$, разложим интервал $[\alpha', \beta]$ в сумму трех не пересекающихся интервалов V_n^-, J_n, V_n^+ (где V_n^- и V_n^+ суть левая и правые части интервалов $[\alpha', \beta] \backslash J_n$). Обозначим

$$a_{n,1} = \int_{V_n^-} f(t) f_n(t) dt, \qquad a_{n,2} = \int_{J_n} f(t) f_n(t) dt,$$

$$a_{n,3} = \int_{V_n^+ \cap J_n^+} f(t) f_n(t) dt, \quad a_{n,4} = \int_{V_n^+ \cap J_n^-} f(t) f_n(t) dt.$$

Начнем с оценивания части, которая соответствует $a_{n,2}$. Заметим, что

$$|a_{n,2}|^p \le \|f_n\|_q^p \int_{J_n} |f(t)|^p dt.$$

Для фиксированного k рассмотрим $n \in T^5_{-,m}$, удовлетворяющие условию $d_n(\alpha') = k$. Напомним, что если $n_1 < n_2$, то все точки разбиения π_{n_1} также принадлежат π_{n_2}. Следовательно, для любого фиксированного k, интервалы J_n с индексами $n \in T^5_{-,m}$, где $d_n(\alpha') = k$, можно сгруппировать в пачки так, чтобы интервалы из одной пачки имели бы общий левый конец, а максимальные интервалы из разных пачек были бы разделены. Заметим, что интервалы из одной пачки формируют вложенное семейство интервалов. Через J_{n_0} обозначим один из максимальных интервалов. Тогда используя (5.22) и Свойство 6, получаем

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}, d_n(\alpha')=k, J_n\subset J_{n_0}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,2}|^p \int_{\widetilde{V}^*\cap(J_n^-\cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \le$$

$$\le \sum_{n\in T^5_{-,m}, d_n(\alpha')=k, J_n\subset J_{n_0}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pk} \int_{J_n} |f(t)|^p dt \|f_n\|_q^p \int_{\widetilde{V}^*\cap(J_n^-\cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \le$$

$$\le C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \int_{J_{n_0}} |f(t)|^p dt \sum_{n\in T^5_{-,m}, d_n(\alpha')=k, J_n\subset J_{n_0}} \frac{|J_n|^{p/2}|J_n|^{p/2-1}}{|V|^{p-1}} \le$$

$$\le C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \int_{J_{n_0}} |f(t)|^p dt \frac{|J_{n_0}|^{p-1}}{|V|^{p-1}} \le C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \int_{J_{n_0}} |f(t)|^p dt.$$

Просуммировав по максимальным интервалам, получаем

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}, d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,2}|^p \int_{V^*\cap(J_n^-\cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \le C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p,$$

а просуммировав по k приходим к неравенству

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,2}|^p \int_{\widetilde{V}^*\cap(J_n^-\cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \le C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \tag{5.23}$$

Теперь приступим к оцениванию части, соответствующей $a_{n,3}$. Для фиксированного k, обозначим через $n_{k,j}, j \ge 1$ подпоследовательность (в возрастающем порядке) всех $n \in T^5_{-,m}$ таких, что $d_n(\alpha') = k$. Заметим, что если $n_1 < n_2$ и $d_{n_1}(\alpha') = k = d_{n_2}(\alpha')$, тогда или левый конец J_{n_2} совпадает с левым концом J_{n_1} (в этом случае $J_{n_2} \subset J_{n_1}$ и правый конец J_{n_2} также принадлежит J_{n_1}, причем если он совпадает с правым концом J_{n_1}, то в силу Леммы 2 следует, что число таких интервалов не может быть больше, чем 3), или левый конец J_{n_2} находится между α' и левым концом J_{n_1} (в этом случае правый конец J_{n_2} также находится между α' и левым концом J_{n_1}).

Допустим, что $\gamma_{n_{k,j}}$ – правый конец интервала $J_{n_{k,j}}$ (будем считать, что $\gamma_{n_{k,0}} = \widetilde{\beta}$). Заметим, что $\gamma_{n_{k,i}}$ принадлежит разбиению $\pi_{n_{k,j}}$ для всех $j \geq i \geq 1$, и $[\alpha', \gamma_{n_{k,j+1}}] \subset [\alpha', \gamma_{n_{k,j}}]$. Положим $d^k_{ij} = \#\{\pi_{n_{k,j}} \cap [\gamma_{n_{k,j}}, \gamma_{n_{k,i}}]\}$. Тогда из определения d^k_{ij} вытекает, что $d^k_{ij} \geq \frac{j-i-3}{3}$. Следовательно, для $j \geq i$ из Свойства 3 имеем

$$\int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} |f_{n_{k,j}}(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{q d^k_{ij}} \|f_{n_{k,j}}\|^q_q \leq C_q \varepsilon^{q(j-i)/3} \|f_{n_{k,j}}\|^q_q.$$

Применяя неравенство Гельдера (где $s = \varepsilon^{1/6}$) получаем

$$|a_{n_{k,j},3}|^p = \left| \int_{[\gamma_{n_{k,j}}, \widetilde{\beta}] \cap J^+_{n_{k,j}}} f(t) f_{n_{k,j}}(t) dt \right|^p =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{j} s^{(i-j)} s^{(j-i)} \int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} f(t) f_{n_{k,j}}(t) dt \right|^p \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{j} s^{q(j-i)} \right)^{p/q} \sum_{i=1}^{j} s^{p(i-j)} \left| \int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} f(t) f_{n_{k,j}}(t) dt \right|^p \leq$$

$$\leq C_p \sum_{i=1}^{j} s^{p(i-j)} \int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} |f(t)|^p dt \Big(\int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} |f_{n_{k,j}}(t)|^q dt \Big)^{p/q} \leq$$

$$\leq C_p \sum_{i=1}^{j} s^{p(i-j)} \int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} |f(t)|^p dt \cdot s^{2p(j-i)} \|f_{n_{k,j}}\|^p_q =$$

$$= C_p \sum_{i=1}^{j} s^{p(j-i)} \int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}] \cap J^+_{n_{k,j}}} |f(t)|^p dt \|f_{n_{k,j}}\|^p_q.$$

Из (a5) и Свойства 3 следует, что

$$\int_{\widetilde{V}^* \cap (J^-_{n_{k,j}} \cup J_{n_{k,j}})} |f_{n_{k,j}}(t)|^q dt \leq C_p \varepsilon^{p d_{n_{k,j}}(\widetilde{\alpha})} \|f_{n_{k,j}}\|^p_p \leq C_p \varepsilon^{p(m + d_{n_{k,j}}(\alpha'))} \|f_{n_{k,j}}\|^p_p.$$

Комбинируя эти оценки, для фиксированного k, получаем

$$\sum_{n \in T^k_{-,m} : d_n(\alpha') = k} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V)} |a_{n,3}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^* \cap (J^-_n \cup J_n))} \leq$$

$$\leq \sum_{j\geq 1}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pk} |a_{n_{k,j},3}|^p \|f_{n_{k,j}}\|^p_{L^p(\widetilde{V}^*\cap(J_n^-\cup J_n))} \leq$$

$$\leq C_p \sum_{j\geq 1} \varepsilon^{pm}\vartheta^{pk}\|f_{n_{k,j}}\|_p^p \|f_{n_{k,j}}\|_q^p \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^{p(j-i)} \int_{[\gamma_{n_k,i},\gamma_{n_k,i-1}]} |f(t)|^p dt \leq$$

$$\leq C_p\varepsilon^{pm}\vartheta^{pk}\sum_{i\geq 1}\int_{[\gamma_{n_k,i},\gamma_{n_k,i-1}]} |f(t)|^p dt \sum_{j\geq i}\varepsilon^{p(j-i)} \leq$$

$$\leq C_p\varepsilon^{pm}\vartheta^{pk}\sum_{i\geq 1}\int_{[\gamma_{n_k,i},\gamma_{n_k,i-1}]} |f(t)|^p dt \leq C_p\varepsilon^{pm}\vartheta^{pk}\|f\|_p^p.$$

Просуммировав по $k \geq 0$, получаем

$$\sum_{n\in T^3_{-,m}}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,3}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^*\cap(J_n^-\cup J_n))} \leq C_p\varepsilon^{pm}\|f\|_p^p. \tag{5.24}$$

Перейдем к оцениванию части, соответствующей $a_{n,4}$. Можем считать, что $J_n^- \cap V_n^+ \neq \emptyset$. Чтобы оценить $\sup\limits_{t\in V_n^+\cap J_n^-} |f_n(t)|$, в качестве Δ возьмем интервал линейности функции f_n (с концами из π_n) такой, что $\Delta\cap V_n^+\cap J_n^- \neq \emptyset$. Ясно, что

$$\operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n) < \operatorname{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|.$$

Используя Свойство 4, получим

$$\sup_{t\in\Delta}|f_n(t)| \leq C\varepsilon^{d_n(\Delta)}\frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|} \leq$$

$$\leq C\varepsilon^{d_n(\widetilde{\beta})}\frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n)} \leq C\varepsilon^{m+d_n(\alpha')}\frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n)}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{t\in V_n^+\cap J_n^-}|f_n(t)| = \max_{\Delta,\Delta\cap V_n^+\cap J_n^-\neq\emptyset}\ \sup_{t\in\Delta}|f_n(t)| \leq C\varepsilon^{m+d_n(\alpha')}\frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n)}$$

и

$$\int_{V_n^+\cap J_n^-}|f_n(t)|^q dt \leq C_q\varepsilon^{q(m+d_n(\alpha'))}\frac{|J_n|^{q/2}|V|}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n))^q}.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$|a_{n,4}|^p = \left|\int_{V_n^+\cap J_n^-} f(t)f_n(t)dt\right|^p \leq \|f\|_p^p\left(\int_{V_n^+\cap J_n^-}|f_n(t)|^q dt\right)^{p/q}$$

$$\leq C_p\varepsilon^{p(m+d_n(\alpha'))}\frac{|J_n|^{p/2}|V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n))^p}\|f\|_p^p.$$

Следовательно, для фиксированного k имеем

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}: d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,4}|^p \|f_n\|_p^p \le$$

$$\le C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{pk} \|f\|_p^p |V|^{p-1} \sum_{n\in T^5_{-,m}: d_n(\alpha')=k} \frac{|J_n|^{p/2}|J_n|^{1-p/2}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n))^p} =$$

$$= C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{pk} \|f\|_p^p \sum_{n\in T^5_{-,m}: d_n(\alpha')=k} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n))^p}. \tag{5.25}$$

Для любых фиксированных m и k рассмотрим все $n \in T^5_{-,m}$ со свойством $d_n(\alpha') = k$. Тогда соответствующие интервалы J_n можно сгруппировать также как и мы уже делали выше. Через J^r_n обозначим правую половину интервала J_n. Ясно, что если $t \in J^r_n$, то $|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n) > |[\widetilde{\beta}, t]|$. Следовательно, из Леммы 3 вытекает, что любая точка $t \neq t_j$ может принадлежать не более, чем 15-ти таким интервалам. Следовательно,

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}: d_n(\alpha')=k} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\widetilde{\beta}, J_n))^p} \le C_p \sum_{n\in T^5_{-,m} d_n(\alpha')=k} \int_{J^r_n} \frac{|V|^{p-1}}{|[\widetilde{\beta}, t]|^p} dt \le$$

$$\le C_p \int_{\alpha'}^{\beta} \frac{|V|^{p-1}}{|[\widetilde{\beta}, t]|^p} dt \le C_p \frac{|V|^{p-1}}{|[\widetilde{\beta}, \alpha']|^{p-1}} \le C_p.$$

Из последнего неравенства и из (5.25) следует, что

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}: d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,4}|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{pk} \|f\|_p^p.$$

Просуммировав по k, получаем

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,4}|^p \|f_n\|_p^p \le C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \tag{5.26}$$

Осталось оценить часть, которая соответствует $a_{n,1}$. Для фиксированных k и n (с $d_n(\alpha') = k$) обозначим через $L_{0,n}, \ldots, L_{k,n}$ те интервалы линейности функции f_n, которые содержаться между точкой α' и интервалом J_n (в положительном направлении). Заметим, что если α' не принадлежит разбиению π_n, то $L_{0,n}$ не является интервалом разбиения π_n. Введем следующие обозначения

$$b_{i,n} = \int_{L_{i,n}} f(t) f_n(t) dt.$$

Ясно, что $a_{n,1} = \sum_{i=0}^{k} b_{i,n}$ для всех n, для которых $d_n(\alpha') = k$. Из неравенства Гельдера вытекает

$$|b_{i,n}|^p = |\int_{L_{i,n}} f(t) f_n(t) dt|^p \le C \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \left(\int_{L_{i,n}} |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q}$$

Из Свойства 4 имеем

$$\sup_{t \in L_{i,n}} |f_n(t)| \le C \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + |L_{i,n}| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n})}.$$

Отсюда следует

$$|b_{i,n}|^p \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \frac{|J_n|^{p/2} |L_{i,n}|^{p-1}}{(|J_n| + |L_{i,n}| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}))^p}. \tag{5.27}$$

Рассмотрим следующую дробь

$$\frac{|J_n|^{p/2} |L_{i,n}|^{p-1}}{(|J_n| + |L_{i,n}| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}))^p} \frac{|J_n|^{p/2}}{|V|^{p-1}} \le \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} \frac{(|L_{i,n}| + |J_n|)^{2(p-1)}}{(|J_n| + |L_{i,n}| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}))^p} \le$$
$$\le \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} (|L_{i,n}| + |J_n| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2}.$$

Следовательно, вместе с (5.22) и (5.27) получаем

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\tilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n))} \le C_p \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pk} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(m+k)} \times$$
$$\times \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} (|L_{i,n}| + |J_n| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2} \le$$
$$\le C_p \vartheta^{pk} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} c^{pm} \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} (|L_{i,n}| + |J_n| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2}$$

Для фиксированных k и i, рассмотрим те интервалы $L_{i,n}$, для которых n удовлетворяет условию $d_n(\alpha') = k$. Эти интервалы можно сгруппировать также как и мы уже делали выше.. Интервалы J_n, соответствующие $L_{i,n}$, которые принадлежат одной пачке, можно снова сгруппировать в подпачки так, чтобы они имели бы общий левый конец. Следовательно, они формируют вложенное семейство $J_{n_1} \supset \ldots \supset J_{n_s}$. Обозначим через J_n^r правую половину J_n. Из Леммы 3 получим, что каждая точка $t \ne t_s$ может принадлежать не больше чем 15-ти интервалам J_n^r, которые соответствуют $L_{i,n}$ из одной пачки. Более того, обозначив через u^* общий левый конец интервала $L_{i,n}$ из одной пачки, для $t \in J_n^r$ мы получаем

$$|L_{i,n}| + |J_n| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n}) \ge ||u^*, t||.$$

Напомним, что $p < 2$, $L^*_{i,n}$ является максимальным интервалом пачки и $J_n \subset [\alpha', \widetilde{\beta}]$, то получим

$$\sum_{n \in \text{пачке}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^\varepsilon \cap (J_n^- \cup J_n))} \le$$

$$\le C_p \frac{\vartheta^{pk}\varepsilon^{pm}}{|V|^{p-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \sum_{n \in \text{пачке}} \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \big(|L_{i,n}| + |J_n| + \operatorname{dist}(J_n, L_{i,n})\big)^{p-2} \le$$

$$\le C_p \frac{\vartheta^{pk}\varepsilon^{pm}}{|V|^{p-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \sum_{n \in \text{пачке}} \int_{L^*_{i,n}} |f(t)|^p dt \int_{J_n^*} |[u^*, t]|^{p-2} dt \le$$

$$\le C_p \frac{\vartheta^{pk}\varepsilon^{pm}}{|V|^{p-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \int_{L^*_{i,n}} |f(t)|^p dt \int_{u^*}^{\beta} |[u^*, t]|^{p-2} dt$$

$$\le C_p \vartheta^{pk}\varepsilon^{pm} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \int_{L^*_{i,n}} |f(t)|^p dt.$$

Так как для фиксированных k и i максимальные интервалы $L^*_{i,n}$ раздельны, то имеем

$$\sum_{\text{по пачкам с } d_n(\alpha')=k} \int_{L^*_{i,n}} |f(t)|^p dt \le \|f\|_p^p.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \in T^s_{-,m};\ d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^\varepsilon \cap (J_n^- \cup J_n))} \le C_p \vartheta^{pk}\varepsilon^{pm} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \|f\|_p^p. \tag{5.28}$$

Для n таких, что $d_n(\alpha') = k$ и $s = \sqrt{2/3}$, по неравенству Гельдера получаем

$$|a_{n,1}|^p = \left|\sum_{i=0}^{k} b_{i,n}\right|^p = \left|\sum_{i=0}^{k} s^{(k-i)} s^{(i-k)} b_{i,n}\right|^p \le C_p \sum_{i=0}^{k} s^{p(i-k)} |b_{i,n}|^p.$$

Следовательно, из (5.28) получаем

$$\sum_{n \in T^s_{-,m}; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,1}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^\varepsilon \cap (J_n^- \cup J_n))} \le$$

$$\le C_p \sum_{n \in T^s_{-,m}; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} \sum_{i=0}^{k} s^{p(i-k)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^\varepsilon \cap (J_n^- \cup J_n))} =$$

$$= C_p \sum_{i=0}^{k} s^{p(i-k)} \sum_{n \in T^s_{-,m}; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^\varepsilon \cap (J_n^- \cup J_n))} \le$$

$$\le C_p \sum_{i=0}^{k} s^{p(i-k)} \vartheta^{pk}\varepsilon^{pm} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \|f\|_p^p \le C_p \vartheta^{pk}\varepsilon^{pm} \|f\|_p^p.$$

Просуммировав по k получим

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,1}|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^c\cap(J_n^-\cup J_n))} \le C_p\,\varepsilon^{pm}\|f\|^p_p.$$

Из последнего неравенства и неравенств (5.23), (5.24) и (5.26) получаем

$$\sum_{n\in T^5_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{V}^c\cap(J_n^-\cup J_n))} \le C_p\varepsilon^{pm}\|f\|^p_p. \tag{5.29}$$

Случай 6 : Для n, удовлетворяющих условиям $\bar{\beta} \in J_n$, $|J_n \cap [\beta,\bar{\beta}]| > |V|$ и $J_n \not\subset [\beta,\bar{\beta}]$, обозначим

$$T^6_- = \left\{n : \int_{V\cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \le \int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt\right\},$$

$$T^6_{-,m} = \left\{n \in T^6_{-,m} : \#(\pi_n \cap [\beta,\bar{\beta}]) = m\right\},$$

$$S^6_- = \left\{n : \int_{V\cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt > \int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt\right\},$$

$$S^6_{-,m} = \left\{n \in S^6_- : \#(\pi_n \cap \widetilde{V}^c_+) = m\right\}.$$

Ясно, что множества $S^6_{-,m}$ и $T^6_{-,m}$ конечны. Если $n \in T^6_{-,m}$, то $d_n(\beta) = m \ge d_n(V)$, а если $n_0 < n_1 < \ldots < n_s$ суть элементы множества $T^6_{-,m}$, то $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset \ldots \supset J_{n_s}$, причем эти интервалы имеют общий конец. Из оценок $\|f_n\|^p_p$ и Свойства 3 для $n \in T^6_{-,m}$ имеем

$$\|f_n\|^p_p \sim |J_n|^{1-p/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \le 2\int_{V\cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \le C_q\varepsilon^{qm}|V||J_n|^{-q/2}.$$

Поэтому из (5.11) получаем

$$|a_n|^p\|f_n\|^p_p \le C_p\varepsilon^{pm}|V|^{p-1}|J_n|^{1-p}\|f\|^p_p.$$

Заметим, что из определения множеств $T^6_{-,m}$ следует, что $|J_{n_s}| \ge |V|$. Следовательно, по Свойству 6 имеем

$$\sum_{n\in T^6_{-,m}} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_s}|^{1-p} \le C_p|V|^{1-p},$$

и поэтому

$$\sum_{n\in T^6_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p\|f_n\|^p_p \le C_p\vartheta^{pm}\|f\|^p_p. \tag{5.31}$$

Если $n \in S^6_{-,m}$, то $d_n(a) = m \geq d_n(V)$, а если $n_0 < n_1 < \ldots < n_s$ суть элементы множества $S^6_{-,m}$, то $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset \ldots \supset J_{n_s}$, причем они имеют общий правый конец. Следовательно, для $n \in S^6_{-,m}$ из оценок $\|f\|_p^p$ и Свойства 3 имеем

$$\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2\int_{V\cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{qm} |V||J_n|^{-q/2}.$$

Последнее неравенство вместе с (5.11) дают

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \varepsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Из определения множеств $S^6_{-,m}$ следует, что $|J_{n_s}| \geq |V|$. Следовательно, из Свойства 6 получим, что

$$\sum_{n\in S^6_{-,m}} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_s}|^{1-p} \leq C_p |V|^{1-p},$$

и поэтому

$$\sum_{n\in S^6_{-,m}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \vartheta^{pm} \|f\|_p^p. \tag{5.31}$$

Для завершения доказательства заметим, что просуммировав неравенства (5.10), (5.14), (5.15), (5.16), (5.18), (5.20), (5.21), (5.29)–(5.31) по $m \geq 0$, получаем

$$\sum_{n\geq n(V)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|^p_{L^p(\tilde{V}^c\cap(J_n^- \cup J_n))} \leq C_p \|f\|_p^p.$$

5.2. Доказательства Теорем 2 и 3. Мы приведем наброски доказательств, так как они почти во всем совпадают с доказательствами аналогичных теорем из [11].

Доказательство Теоремы 2 : Для того, чтобы доказать, что система Франклина является безусловным базисом, докажем следующее неравенство :

$$c_p \|Pf\|_p \leq \|f\|_p \leq C_p \|Pf\|_p. \tag{5.32}$$

Введем обозначения

$$E_l = \{t \in (0,1) : Pf(t) > l\}, \quad B_l = \{t \in (0,1) : \mathbb{M}\chi_{E_l}(t) > 1/4\}.$$

Из свойств функции $\mathbb{M}$ следует, что

$$|B_l| \leq C|E_l| \quad \text{и} \quad B_l = \bigcup_k V_k,$$

где $V_k = (\alpha_k, \beta_k)$ суть непересекающиеся интервалы со свойством :

$$\mathbb{M}\chi_{E_l}(\alpha_k) \le \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \mathbb{M}\chi_{E_l}(\beta_k) \le \frac{1}{4}.$$

Будем считать, что множество Γ_k, соответствующая множеству V_k как и в Лемме 4. Имеем

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_k \Gamma_k, \quad \bar{\Lambda} = N \setminus \bar{\Gamma}, \quad \varphi_1 = \sum_{n \in \bar{\Gamma}} a_n f_n, \quad \varphi_2 = \sum_{n \in \bar{\Lambda}} a_n f_n.$$

Из неравенства (5.1) и Леммы 4 получаем

$$\int_{B_l^*} \sum_{n \in \bar{\Gamma}} |a_n f_n(t)| dt \le C \int_{B_l} Pf(t) dt.$$

Используя последнее неравенство и $Pf(t) \le l$, для $t \notin E_l$, получаем

$$\psi_1(l) = |\{t \in (0,1) : S^* \varphi_1(t) > \lambda/2\}| \le |B_l| + \frac{2}{l} \int_{B_l^*} S^* \varphi_1(t) dt$$

$$\le |B_l| + \frac{C}{l} \int_{B_l} Pf(t) dt \le |B_l| + C|B_l \setminus E_l| + \frac{C}{l} \int_{E_l} Pf(t) dt.$$

Следовательно,

$$\psi_1(l) \le C\left(|E_l| + \frac{1}{l} \int_{E_l} Pf(t) dt\right). \tag{5.33}$$

Так как для $t \notin E_l$ мы имеем $Pf(t) \le l$, из неравенства (5.2) следует, что

$$P\varphi_2(t) \le Cl, \quad \text{где} \quad t \in (0,1). \tag{5.34}$$

Так как $S^* g \le C\widetilde{\mathbb{M}} g$ и функция $\widetilde{\mathbb{M}}$ имеет вид (2.2), то

$$\psi_2(l) = \left|\left\{t \in (0,1) : S^* \varphi_2(t) > \frac{l}{2}\right\}\right| \le \frac{C}{l^2} \|\widetilde{\mathbb{M}} \varphi_2\|_2^2 \le \frac{C}{l^2} \|\varphi_2\|_2^2 = \frac{C}{l^2} \|P\varphi_2\|_2^2.$$

Это неравенство вместе с (5.34) дают

$$\psi_2(l) \le C(|E_l| + \frac{1}{l^2} \int_{E_l^c} (Pf(t))^2 dt). \tag{5.35}$$

Из неравенств (5.33) и (5.35) следует

$$\psi(l) = |\{t \in (0,1) : S^* f(t) > l\}| \le \psi_1(l) + \psi_2(l) \le$$

$$\leq C\left(|E_l| + \frac{1}{l}\int_{E_l} Pf(t)dt + \frac{1}{l^2}\int_{E_l^c}(Pf(t))^2dt\right).$$

Так как $1 < p < 2$, то имеем

$$\|S^* f\|_p^p = p\int_0^\infty l^{p-1}\psi(l)dl \leq C_p\|Pf\|_p^p.$$

Из этого неравенства следует правостороннее неравенство (5.32). Перейдем к доказательству левостороннего неравенства в (5.32). Для этого достаточно показать, что для каждого p $(1 < p < 2)$ функция P имеет слабый тип (p,p). Поэтому нам нужно доказать, что для любого фиксированного p $(1 < p < 2)$ и любой функции $f \in L^p[0,1]$ имеет место

$$|\{t \in (0,1) : Pf(t) \geq l\}| \leq \frac{C_p}{l^p}\|f\|_p^p,$$

где $l > 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\|f\|_p = 1$ и $l > 1$. Обозначая

$$G_l = \{t \in (0,1) : \mathbb{M}f(t) > l\},$$

получаем

$$|G_l| \leq C_p\frac{\|f\|_p^p}{l^p} \quad \text{и} \quad G_l = \bigcup_k V_k, \tag{5.38}$$

где $V_k = (\alpha_k, \beta_k)$ суть непересекающиеся интервалы. Кроме того, $|G_l| = \sum_k |V_k|$, и

$$|f(t)| \leq l \quad \text{п.в. на} \quad G_l^c \quad \text{и} \quad \int_{V_k}|f(t)|dt \leq l|V_k|,\ k = 1,2,\ldots \tag{5.39}$$

Через $T_V f$ обозначим проекцию функции $f\chi_V$ на пространство линейных функций. Если $\int_V |f(t)|dt \leq l|V|$, то

$$\|T_V f\|_2^2 \leq 4l^2|V| \quad \text{и} \quad \|T_V f\|_p \leq C_p\|f\|_{L^p(V)}.$$

Введем обозначения

$$h = f\chi_{G_l^c} + \sum_k T_{V_k}f, \quad g = f - h$$

и оценим части, соответствующие Ph и Pg.

Используя неравенства (5.38), (5.39) и свойства оператора T_V получим, что

$$\|h\|_2^2 = \int_{G_l^c} f^2(t)dt + \sum_k\int_{V_k}(T_{V_k}f)^2(t)dt \leq l^{2-p}\int_{G_l^c} f^p(t)dt + 4\,l^2|G_l| \leq C_p l^{2-p}\|f\|_p^p.$$

Отсюда имеем

$$\left|\left\{t \in (0,1) : Ph(t) > \frac{l}{2}\right\}\right| \le \frac{4}{l^2}\|Ph\|_2^2 = \frac{4}{l^2}\|h\|_2^2 \le C_p\frac{\|f\|_p^p}{l^p}. \tag{5.40}$$

Остается оценить часть, соответствующую Pg. Так как при $p < 2$, то

$$(Pg(t))^p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)^2 f_n^2(t)\right)^{p/2} \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p.$$

Пусть $\widetilde{V}_k = (\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\beta}_k)$, где $\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k - 2|V_k|$, $\widetilde{\beta}_k = \beta_k + 2|V_k|$ и $\widetilde{G}_l = \cup_k \widetilde{V}_k$. Тогда очевидно, что $|\widetilde{G}_l| \le 5|G_l|$. Следовательно,

$$\left|\left\{t \in (0,1) : Pg(t) > \frac{l}{2}\right\}\right| \le |\widetilde{G}_l| + \frac{2^p}{l^p}\int_{\widetilde{G}_l^c} (Pg)^p(t)dt \le$$

$$\le C_p\frac{\|f\|_p^p}{l^p} + \frac{2^p}{l^p}\sum_n \int_{\widetilde{G}_l^c} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p dt. \tag{5.41}$$

Из определения функции g имеем

$$\|g\|_p^p = \sum_k \int_{V_k} |f(t) - T_{V_k}f(t)|^p dt \le C_p \sum_k \int_{V_k} |f(t)|^p dt \le C_p\|f\|_p^p. \tag{5.42}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\sum_n \int_{\widetilde{G}_l^c} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p dt \le C_p\|g\|_p^p. \tag{5.43}$$

Для этого, обозначим $g_k = g\chi_{V_k}$ и заметим, что $\|g\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_p^p$ и $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$, где под равенством понимаем сходимость к функции g в $L^p[0,1]$. Более того, для каждого $n \ge 1$ имеем $a_n(g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n(g_k)$. Из определения T_{V_k} следует, что $a_n(g_k) = 0$ для $n < n(V_k)$. Применяя неравенство Гельдера с $\vartheta = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}$, получаем

$$|a_n(g)|^p = \left|\sum_{k:n\ge n(V_k)} a_n(g_k)\right|^p \le \left(\sum_{k:n\ge n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{d_n(V_k)} |a_n(g_k)|\vartheta^{d_n(V_k)}\right)^p$$

$$\le \left(\sum_{k:n\ge n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V_k)} |a_n(g_k)|^p\right)\left(\sum_{k:n\ge n(V_k)} \vartheta^{qd_n(V_k)}\right)^{p/q}$$

Если $n \geq n(V_k)$, то V_k имеет по крайней мере одну точку из разбиения π_n. Поэтому, для каждого $s \geq 1$ существуют не более двух значений k, для которых $n \geq n(V_k)$ и $d_n(V_k) = s$. Следовательно,

$$\left(\sum_{k:n \geq n(V_k)} \vartheta^{q d_n(V_k)} \right)^{p/q} \leq C_p.$$

Из предыдущих неравенств следует

$$|a_n(g)|^p \leq C_p \sum_{k:n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{p d_n(V_k)} |a_n(g_k)|^p.$$

Заметим, что $\operatorname{supp} g_k \subset V_k$. Следовательно, используя последнее неравенство и Лемму 5, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\widetilde{G}_l^c} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p dt \leq C_p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{p d_n(V_k)} \int_{\widetilde{G}_l^c} |a_n(g_k)|^p |f_n(t)|^p dt$$
$$\leq C_p \sum_k \sum_{n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{p d_n(V_k)} |a_n(g_k)|^p \int_{\widetilde{V}_k^c} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \sum_k \|g_k\|_p^p = C_p \|g\|_p^p,$$

т.е. неравенство (5.43). Из (5.43), (5.41) и (5.42) имеем

$$\left| \left\{ t \in (0,1) : Pg(t) > \frac{l}{2} \right\} \right| \leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p}. \tag{5.44}$$

Так как $f = g + h$, из (5.40) и (5.44) следует

$$|\{t \in (0,1) : Pf(t) > l\}| \leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p},$$

т.е. P имеет слабый тип (p,p) для каждого p $(1 < p < 2)$. Следовательно, в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича, если P имеет тип $(2,2)$, то P имеет тип (p,p) для каждого p $(1 < p < 2)$, т.е. левая часть неравенства в (5.32) доказана. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 3 : С. В. Конягин и В. Н. Темляков [15] доказали, что нормированный базис $\chi = (x_n, n \geq 0)$ в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ является гриди-базисом тогда и только тогда, когда он является "демократическим" и безусловным базисом. "Демократичность" означает, что для любых конечных подмножеств A и B таких, что $\#A = \#B$ имеем

$$\left\| \sum_{n \in A} x_n \right\| \sim \left\| \sum_{n \in B} x_n \right\|. \tag{5.45}$$

Поэтому, достаточно проверить, что $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ демократична в $L_p[0,1]$, где $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ – общая периодическая система Франклина, нормированная в L_p. Допустим $\chi_{J_n,p} = |J_n|^{-1/p}\chi_{J_n}$. Так как система $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ является нормализованным безусловным базисом, то из Свойства 4 и максимального неравенства Фефферманa-Стейна (Теорема 1, Глава II из [14]) вытекает, что для любой последовательности чисел $\{u_n, n \geq 1\}$ имеет место

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n f_{n,p}\|_p^p \sim \int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n f_{n,p}(t)|^2)^{p/2} dt \sim \int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n \chi_{J_n,p}(t)|^2)^{p/2} dt.$$

Заметим, что для любой функции $f \in L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ имеет место $\|\widetilde{\mathbf{M}} f\|_p \sim \|f\|_p$. Кроме того, из Свойства 6 следует

$$(\sum_{i=1}^{m} |\chi_{J_{n_i},p}(t)|^2)^{p/2} \sim (|J_{n_m}|^2)^{p/2} \sim \sum_{i=1}^{m} |\chi_{J_{n_i},p}(t)|^p$$

для любого t и любых индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$. Следовательно,

$$\|\sum_{i=1}^{m} f_{n_i,p}\|_p^p \sim \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} |\chi_{J_{n_i},p}(t)|^p dt,$$

что и доказывает демократичность $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ в $L_p[0,1]$. Из метода доказательства следует, что постоянные, участвующие в доказательстве, не зависят от $\mathcal{T}$.

Abstract. A general Franklin periodic system corresponding to an everywhere dense in $[0,1]$ sequence of points $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$ is defined to be a sequence of orthonormalised, piecewise linear (with finite set of knots $t_0, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$), continuous functions with period 1. The main result of the paper states that any general, periodic Franklin system is an unconditional and greedy basis in the spaces $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., vol. 100, pp. 522 – 528, 1928.
2. A. Haar, "Theorie der orthogonalen Functionensysteme", Math. Ann., vol. 10, pp. 331 – 371, 1910.
3. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.
4. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.

5. S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math., vol. 1, pp. 249 – 257, 1975.
6. P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is an unconditional basis in H^1", Ark. Mat., vol. 20, pp. 293 – 300, 1982.
7. Z. Ciesielski, "Bases and approximation by splines", Proc. of the Intern. Congr. of Math., Vancouver, pp. 47 – 51, 1974.
8. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp 129 – 143, 1997.
9. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), vol. 374, pp. 1 – 59, 1998.
10. Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян, "Безусловное базисное свойство общих систем Франклина", Изв. АН Армении, серия Математика, том 35, № 4, стр. 7 – 25, 2000.
11. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math., vol. 164, pp. 161 – 204, 2004.
12. Б. Кашин, А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
13 М. Гусман, Дифференцирование интегралов в R^n, Москва, Мир, 1978.
14. E. Stein, Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
15. S.V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.

Поступила 20 января 2005

Известия НАН Армении. Математика, 40, № 1, 2005, 61-84

ОБЩАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ФРАНКЛИНА КАК БАЗИС В $H^1[0,1]$

М. П. Погосян, К. А. Керян

Ереванский Государственный Университет
E-mails : michael@ysu.am, karenkeryan@yahoo.com

Резюме. Общая периодическая система Франклина, соответствующая последовательности плотных в $[0,1]$ узлов $\mathcal{T} = \{t_n, n \geq 0\}$ определяется как последовательность ортонормированных, кусочно-линейных, непрерывных функций $f_n(x)$ с узлами $\mathcal{T}$, удовлетворяющими $f_n(0) = f_n(1)$. Основной результат данной статьи дает характеризацию тех последовательностей $\mathcal{T}$, для которых соответствующая общая периодическая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Классическая система Франклина - это полная ортонормированная система, состоящая из кусочно линейных, непрерывных функций с двоичными узлами. Эта система была введена в 1928 году Ф. Франклином [1] как первый пример базиса в $C[0,1]$. В 1960-ых З. Чисельский начал систематическое изучение системы Франклина. В [2], [3] и дальнейших работах были доказаны основные свойства классической системы Франклина, включая так-называемые экспоненциальные оценки функций Франклина. Оказалось, что эти экспоненциальные оценки играют фундаментальную роль в исследовании свойств классической системы Франклина.

Позднее, система Франклина изучалась многими авторами с различных точек зрения. В 1975 году С. В. Бочкарев [4] доказал, что классическая система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L^p[0,1]$ для любого p, $1 < p < +\infty$. Используя эту систему, он также построил первый пример базиса

Работа выполнена при финансовой поддержке ANSEF, грант № 05-PS-math-87-65.

в пространстве функций аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывных до его границы (тем самым решив проблему сформулированную С. Банахом).

В 1982 году П. Войташчик [5] доказал, что классическая система Франклина является безусловным базисом в действительном пространстве Харди $H^1[0,1]$. В 1983 году П. Шёлин и Дж. Стромберг [6] доказали, что классическая система Франклина является безусловным базисом в $H^p[0,1]$ для $1/2 < p \le 1$.

Аналогичные построения были рассмотрены для сплайн функций высшего порядка, периодических сплайнов, сплайнов в $\mathbb{R}$, для многомерного случая и т.д. (З. Чисельский, Дж. Домста, Т. Фигель, П. Освальд, Дж. Стромберг и другие).

Общая конструкция другого типа была рассмотрена Г. Геворкяном, А. Камонтом, А. Саакяном и другими. Их обобщение относится к разбиению интервала $[0,1]$. В 1998 году Г. Геворкян и А. Камонт [7] начали систематическое исследование общих систем Франклина соответствующих так-называемым квазидвоичным последовательностям разбиений отрезка $[0,1]$. В частности, они доказали, что многие свойства классической системы Франклина остаются верными для общей системы Франклина, если разбиение удовлетворяет некоторому условию регулярности. Оказалось, что экспоненциальные оценки функций Франклина в общем случае не существуют.

Как доказано в [7], система Франклина, соответствующая слабо регулярному разбиению отрезка $[0,1]$ (определение см. [7], стр. 14), является безусловным базисом в пространстве $L^p[0,1]$ для любого p, $1 < p < +\infty$. Позднее было доказано, что для любой допустимой (т.е. плотной в $[0,1]$) последовательности узлов соответствующая система Франклина остается безусловным базисом в $L^p[0,1]$, без какого-либо структурного предположения о разбиении (см. [8], [9]).

В работе [7] доказано, что общая система Франклина, соответствующая квазидвоичному разбиению отрезка $[0,1]$, является базисом в пространстве $H^p[0,1]$, $1/2 \le p < 1$ тогда и только тогда, когда разбиение сильно регулярно; в последнем случае система является безусловным базисом в $H^p[0,1]$, $1/2 \le p < 1$, т.е. свойства базисности и безусловной базисности общих систем Франклина, соответствующих квазидвоичным разбиениям отрезка $[0,1]$ эквивалентны.

Для общей системы Франклина Г. Геворкян и А. Камонт (см. [10]) получили необходимые и достаточные условия (без какого-либо структурного предположения о разбиении), при которых система является базисом или безусловным базисом в пространстве $H^1[0,1]$. Оказывается, что эти два свойства не эквивалентны в общем случае. Они доказали следующие теоремы (определения сильной регулярности и сильной регулярности по парам см. [10]) :

Теорема A. *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$ и пусть $\{f_n, n \geq 0\}$ – соответствующая система Франклина. Тогда $\{f_n, n \geq 0\}$ является базисом в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ сильно регулярна по парам с некоторым параметром $\gamma > 1$.*

Теорема B. *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$ и пусть $\{f_n, n \geq 0\}$ – соответствующая система Франклина. Тогда $\{f_n, n \geq 0\}$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ сильно регулярна с некоторым параметром $\gamma > 1$.*

В 2005 году один из соавторов начал исследование свойств общей периодической системы Франклина и доказал, что общая периодическая система Франклина соответствующая любой допустимой последовательности узлов является безусловным базисом в $L^p[0,1]$ для любого p, $1 < p < +\infty$ (см. [11]).

Основной результат настоящей работы распространяет Теоремы A и B на периодический случай.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Начнем с некоторых определений и обозначений, используемых ниже. Напомним определение действительного пространства Харди $H^1[0,1]$.

Определение 1. Функция $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ называется **атомом**, если либо $a(x) \equiv 1$ либо существует интервал $\Gamma \subset [0,1]$ такой, что

$$\operatorname{supp} a \subset \Gamma, \quad \sup |a| \leq \frac{1}{|\Gamma|}, \quad \int_\Gamma a(x)dx = 0.$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $f \in L^1[0,1]$ принадлежит $H^1[0,1]$, если существуют атомы a_j и действительные коэффициенты c_j, $j \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел) такие, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty, \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j.$$

Известно, что $H^1[0,1]$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H^1} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| : \right.$$

$$\left. c_j \in \mathbb{R},\ f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j \text{ для некоторой последовательности атомов } \{a_j\} \right\}.$$

Для определения периодической системы Франклина, предположим, что $\pi = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}\}$ является разбиением отрезка $[0, 1]$ и обозначим через S_π линейное пространство непрерывных, кусочно линейных, периодических функций, соответствующих узлам π, т.е. (полагая $t_n = 1 + t_0$)

$$f \in S_\pi \iff f \in C^*[0,1], \quad f \text{ линейна в } [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

где $C^*[0,1]$ - пространство 1-периодических непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Очевидно, $\dim S_\pi = n$, и если π^* - разбиение отрезка $[0,1]$, полученное добавлением одного узла t^* к π, то $[S_{\pi^*} : S_\pi] = 1$. Таким образом, существует единственная функция $\varphi \in S_{\pi^*}$, ортогональная к S_π в $L^2[0,1]$ и такая, что $\|\varphi\|_2 = 1$ и $\varphi(t^*) > 0$. Эта функция φ называется **общей периодической функцией Франклина**, соответствующая паре (π, π^*).

Определение 3. Последовательность узлов $\mathcal{T} = \{t_i, i \geq 0\}$ из $[0, 1)$ называется **допустимой последовательностью**, если $t_i \neq t_j$, $i \neq j$ и $\mathcal{T}$ плотна в $[0, 1]$.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_i, i \geq 0\}$ - допустимая последовательность узлов в $[0,1]$. Обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i, 0 \leq i < n\}$, $n \geq 1$, и допустим, что $\pi_n = \{t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n-1}\}$ - разбиение отрезка $[0,1]$, полученное возрастающей перестановкой последовательности $\mathcal{T}_n$. Ниже используются следующие обозначения :

$$I_{n,i} = [t_{n,i-1}, t_{n,i}], \quad \lambda_{n,i} = |I_{n,i}| = t_{n,i} - t_{n,i-1}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$t_{n,n} = t_{n,0}, \quad I_{n,n} = [t_{n,n-1}, t_{n,n}] = [t_{n,n-1}, 1] \cup [0, t_{n,0}],$$

$$\lambda_{n,n} = |I_{n,n}| = (1 - t_{n,n-1}) + t_{n,0}, \quad |\pi_n| = \max\{\lambda_{n,i} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Ясно, что для любого n разбиение π_{n+1} получается добавлением одного узла к π_n.

Определение 4. Общая периодическая система Франклина, соответствующая допустимой последовательности узлов $\mathcal{T}$ - это последовательность функций $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$, определенных следующим образом : $f_1(x) \equiv 1$, f_n есть общая периодическая функция Франклина, соответствующая (π_{n-1}, π_n), $n \geq 2$.

Основные результаты данной статьи относятся к двум типам регулярности для разбиений.

Определение 5. Пусть $\mathcal{T}$ - допустимая последовательность узлов. Скажем, что $\mathcal{T}$ **сильно регулярна** с параметром $\gamma > 1$, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $1 \leq i \leq n$ (полагая $\lambda_{n,0} = \lambda_{n,n}$) имеем

$$\frac{1}{\gamma}\lambda_{n,i-1} \leq \lambda_{n,i} \leq \gamma\lambda_{n,i-1}.$$

Определение 6. Пусть $\mathcal{T}$ — допустимая последовательность узлов. Будем говорить, что $\mathcal{T}$ **сильно регулярна по парам** с параметром $\gamma > 1$, если для каждого $n \geq 2$ и $1 \leq i \leq n$ имеем

$$\frac{1}{\gamma}(\lambda_{n,i-1} + \lambda_{n,i}) \leq \lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1} \leq \gamma(\lambda_{n,i-1} + \lambda_{n,i}),$$

где $\lambda_{n,0} = \lambda_{n,n}$ и $\lambda_{n,n+1} = \lambda_{n,1}$.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{T}$ — допустимая последовательность узлов в $[0,1]$ и пусть $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая периодическая система Франклина. Тогда $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ является базисом в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ сильно регулярна по парам с некоторым параметром $\gamma > 1$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{T}$ — допустимая последовательность узлов в $[0,1]$ и пусть $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая периодическая система Франклина. Тогда $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ сильно регулярна с некоторым параметром $\gamma > 1$.*

Далее, для каждого $a, b \in \mathbb{R}$ обозначим $a \vee b = \max(a,b)$ и $a \wedge b = \min(a,b)$, будем писать $A \sim B$, если существуют некоторые положительные постоянные C_1, C_2 такие, что $C_1 A \leq B \leq C_2 A$, и $A \sim_\gamma B$, если $A \sim B$, а соответствующие постоянные C_1 и C_2 зависят от γ. Через C, C_i, C_γ обозначим постоянные, зависящие от параметров, указанных в индексах. Через $|A|$ обозначим меру Лебега измеримого множества A, а через $\#M$ – число элементов конечного множества M.

§2. СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

Пусть $\pi = (t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1})$ – разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{N_i(t) : 0 \leq i < n\}$ – соответствующий периодический B-сплайн базис, т.е. $N_i(t) \in S_\pi$ является единственной кусочно линейной (с узлами π), непрерывной функцией такой, что $\operatorname{supp} N_i(t) = [t_{i-1}, t_{i+1}]$ и $N_i(t_i) = 1$, $i = 0, \ldots, n-1$, где

$$t_{-1} = t_{n-1}, \quad [t_{-1}, t_1] = [t_{n-1}, 1] \cup [0, t_1], \quad t_n = t_0, \quad [t_{n-2}, t_n] = [t_{n-2}, 1] \cup [0, t_0].$$

Далее, пусть $G_n = \Big((N_i, N_j)\Big)_{i,j=\overline{0,n-1}}$ – матрица Грамма для системы $(N_i(t))$, где

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Система $\{N_i(t)\}$ состоит из линейно независимых функций, и поэтому $\det G_n \neq 0$ т.е. G_n обратима. Обозначим $A = G_n^{-1}$ и предположим, что $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{0,n-1}}$. Тогда

$$\lambda_i a_{i-1,j} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,j} + \lambda_{i+1}a_{i+1,j} = 6\delta_{i,j} \tag{2.1}$$

для всех $0 \le i, j \le n-1$, где $\lambda_i = t_i - t_{i-1}$, $\delta_{i,j} = 0$ при $i \ne j$ и $\delta_{i,i} = 1$ (см. [11]).
Для удобства, определим

$$a_{i,n+j} = a_{n+i,j} = a_{n+i,n+j} = a_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, n-1$$

и обозначим $\nu_i = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2}$.
Следующее предложение является следствием формулы (2.1) и доказано в [11].

Предложение 1. *Матрица A симметрична и обладает следующими свойствами :*

1)

$$1.2 \le a_{i,i}\nu_i \le 2; \tag{2.2}$$

2) существует индекс n_i, $i < n_i < i + n$ такой, что

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j}|a_{i,j}|, \quad n_i - n + 1 \le j \le n_i, \tag{2.3}$$

$$|a_{i,j}| \ge 2|a_{i,j+1}|, \quad i \le j \le n_i - 2, \tag{2.4}$$

$$|a_{i,j}| \ge 2|a_{i,j-1}|, \quad n_i - n + 2 \le j \le i, \tag{2.5}$$

$$|a_{i,j}| \le \frac{2}{2^{|i-j|_n}} \cdot \frac{1}{\nu_i \vee \nu_j}; \tag{2.6}$$

3)

$$\begin{aligned} |a_{i,j}| &\le \frac{2}{2^{\min(j-i,-2k+n+j+i)}} \cdot \frac{1}{\nu_k} \le \frac{2}{2^{|i-j|_n}} \cdot \frac{1}{\nu_k}, \quad i \le k \le j \le n_i \\ |a_{i,j}| &\le \frac{2}{2^{\min(i-j,2k+n-j-i)}} \cdot \frac{1}{\nu_k} \le \frac{2}{2^{|i-j|_n}} \cdot \frac{1}{\nu_k}, \quad n_i - n + 1 \le j \le k \le i, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $|i-j|_n = \min\{|i-j|, n - |i-j|\}$.

Замечание 1. Используя Предложение 1, можно показать, что

$$\begin{cases} a_{i,i} \ge 2|a_{i,i+1}| \ge \dots \ge 2^{n_i - i}|a_{i,n_i}| \\ a_{i,i} \ge 2|a_{i,i-1}| \ge \dots \ge 2^{n+i-n_i-1}|a_{i,n_i-n+1}| \end{cases} \tag{2.8}$$

Замечание 2. Для $n_{i-1} \le n_i$ обозначим

$$k_i = \max\{j : n_{i-1} \le j \le n_i, \ |a_{i,j}| > |a_{i-1,j}|\} + 1,$$

т.е. k_i есть (единственный) индекс из $[n_{i-1}, n_i + 1] \cap \mathbb{N}$ такой, что $|a_{i-1,k_i-1}| < |a_{i,k_i-1}|$ и $|a_{i-1,k_i}| \ge |a_{i,k_i}|$ или $k_i = n_{i-1}$, если $|a_{i-1,n_{i-1}}| \ge |a_{i,n_i}|$. Для $n_{i-1} > n_i$, возьмем k_i как (единственный) индекс из $[n_i, n_{i-1} + 1] \cap \mathbb{N}$ такой, что $|a_{i-1,k_i-1}| \ge |a_{i,k_i-1}|$ и $|a_{i-1,k_i}| < |a_{i,k_i}|$, и $k_i = n_i$ в противном случае. Тогда, по построению

$$i + 1 \le k_i \le \max\{n_{i-1}, n_i\} + 1 \le n + i$$

и

$$|a_{i+\varepsilon,j+\eta}| \le \frac{4}{2^{\min(j-i,-2k+n+j+1)}} \cdot \frac{1}{\lambda_k}, \quad i \le k \le j < k_i, \quad \varepsilon,\eta \in \{-1,0\}. \qquad (2.9)$$

Имеем также

$$\max_{\varepsilon,\eta\in\{0,1\}} |a_{i+\varepsilon,j+\eta}| \le \frac{1}{2^{m-1}} \max_{\varepsilon\in\{0,1\}} |a_{i+\varepsilon,j-m}|, \quad i \le j-m \le j < k_i.$$

Используя матрицу A, определим биортогональную систему $\{N_i^*, i = 0,\dots,n-1\}$ следующим образом :

$$N_i^*(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} N_j(t), \quad t \in [0,1].$$

Ясно, что $N_i^*(t_j) = a_{i,j}$ и $(N_i, N_j^*) = \delta_{i,j}$ при всех $i,j = 0,\dots,n-1$. Далее, определим

$$K_\pi(t,s) = \sum_{i=0}^{n-1} N_i(t) N_i^*(s), \quad t,s \in [0,1],$$

и заметим, что

$$P_\pi f(x) = \int_0^1 f(t) K_\pi(x,t)dt$$

является ортогональной (в $L^2[0,1]$) проекцией функции f на пространство кусочно линейных, непрерывных, периодических функций, соответствующей разбиению π.

Теорема 3. *Пусть $\pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}\}$ - разбиение отрезка $[0,1]$ и пусть $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Тогда существует некоторое $t_i' \in (t_{k_i-1}, t_{k_i})$ такое, что*

$$\int_t^{t_i'} \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,t_i'])\,ds \le 136, \qquad (2.10)$$

$$\int_{t_i'}^t \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[t_i',s])\,ds \le 136, \qquad (2.11)$$

где var $(f;[a,b])$ *- полная вариация функции f на $[a,b]$.*

Доказательство : Функция $K_\pi(t,\cdot)$ кусочно линейна с узлами из π. Поэтому

$$\text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);I_{k_i}) \le |K_\pi(t,t_{k_i})| + |K_\pi(t,t_{k_i-1})|.$$

Следовательно, существует некоторое $t_i' \in (t_{k_i-1}, t_{k_i})$ такое, что

$$\text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[t_{k_i-1},t_i']) \le |K_\pi(t,t_{k_i-1})|, \quad \text{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[t_i',t_{k_i}]) \le |K_\pi(t,t_{k_i})|.$$

Обозначим $I_k = [t_{k-1}, t_k]$. Тогда

$$\int_t^{t_i'} \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,t_i'])\,ds \le \int_{t_{i-1}}^{t_i'} \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,t_i'])\,ds \le$$

$$\le \sum_{k=i}^{k_i-1} \int_{I_k} \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,t_i'])\,ds + \int_{t_{k_i-1}}^{t_i'} \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot);[s,t_i'])\,ds \le$$

$$\le \sum_{k=i}^{k_i-1} \lambda_k \left(\sum_{j=k}^{k_i-1} \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot),I_j) + \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot),[t_{k_i-1},t_i']) \right) +$$

$$+\lambda_{k_i} \operatorname{var}\,(K_\pi(t,\cdot),[t_{k_i-1},t_i']) \le$$

$$\le \sum_{k=i}^{k_i-1} \lambda_k \left(\sum_{j=k}^{k_i-1} (|K_\pi(t,t_{j-1})| + |K_\pi(t,t_j)|) + |K_\pi(t,t_{k_i-1})| \right) + \lambda_{k_i} |K_\pi(t,t_{k_i-1})| \le$$

$$\le 2 \sum_{k=i}^{k_i-1} \lambda_k \left(\sum_{j=k}^{k_i-1} (|a_{i-1,j-1}| \vee |a_{i,j-1}| + |a_{i-1,j}| \vee |a_{i,j}|) \right) + \lambda_{k_i} |a_{i-1,k_i-1}| \vee |a_{i,k_i-1}|.$$

По определению k_i и (2.9), при $i \le j < k_i$ получим

$$|a_{i-1,j-1}| \vee |a_{i,j-1}| + |a_{i-1,j}| \vee |a_{i,j}| \le \frac{8}{2^{\min\{j-i,-2k+n+j+i\}}} \frac{1}{\lambda_k}$$

и в силу (2.7) имеем

$$|a_{i-1,k_i-1}| \vee |a_{i,k_i-1}| \le \frac{4}{2^{|k_i-i|_n}} \frac{1}{\nu_{k_i-1}} \le \frac{8}{2^{|k_i-i|_n}} \frac{1}{\lambda_{k_i}}.$$

Поэтому

$$\int_t^{t_i'} \operatorname{var}\,(K_\pi(t_i,\cdot),[s,t_i'])\,ds \le 2 \sum_{k=i}^{k_i-1} \lambda_k \sum_{j=k}^{k_i-1} \frac{8}{2^{\min\{j-i,-2k+n+j+i\}}} \frac{1}{\lambda_k} + 8 \le$$

$$\le 2 \left(\sum_{k=i}^{k_i-1} \sum_{j=k}^{k_i-1} \frac{8}{2^{j-i}} + \sum_{k=i}^{k_i-1} \sum_{j=k}^{k_i-1} \frac{8}{2^{-2k+n+j+i}} \right) + 8 \le 136.$$

Неравенство (2.11) доказывается аналогичным путем. Доказательство завершено.

Пусть $\pi = \{t_{-l} < \ldots < t_{-1} < t_1 < \ldots < t_{n-l}\}$ - разбиение отрезка $[0,1]$ и пусть $\pi^* = \pi \cup \{t^*\}$ с $t_{-1} < t^* = t_0 < t_1$. Пусть φ – общая периодическая функция Франклина, соответствующая (π, π^*). Обозначим

$$I = [t_{-1}, t_1], \quad I_- = [t_{-2}, t_0], \quad I_+ = [t_0, t_2],$$

$$\nu = |I|, \quad \nu^- = |I_-|, \quad \nu^+ = |I_+|, \quad \mu = \min(\nu^-, \nu, \nu^+).$$

Если $l = 1$ или $n - l = 1$, возьмем $t_{-2} = t_{n-2}$ и $I_- = [t_{n-2}, t_0] = [t_{n-2}, 1] \cup [0, t_0]$ или $t_2 = t_{-n+2}$ и $I_+ = [t_0, t_2] = [t_0, 1] \cup [0, t_{-n+2}]$, соответственно. После этого, выберем в качестве $I^\circ = [t_{i^\circ}, t_{i^\circ+2}]$ один из отрезков I_-, I, I_+ так, чтобы $\mu = |I^\circ|$ и рассмотрим его правые и левые части $I^{\circ,l} = [t_{i^\circ}, t_{i^\circ+1}]$ и $I^{\circ,r} = [t_{i^\circ+1}, t_{i^\circ+2}]$. Наконец, J есть наибольший из $I^{\circ,l}$ и $I^{\circ,r}$ (если длины равны, берём любой из них).

Построенный отрезок J называется **каноническим отрезком, соответствующим общей периодической функции Франклина** φ. Этот канонический отрезок участвует во многих оценках функций Франклина и помогает преодолеть трудности, возникшие ввиду отсутствия экспоненциальных оценок (см., например, [7] – [11]).

Пусть $\mathcal{T} = \{t_i, i \geq 0\}$ – допустимая последовательность узлов в $[0, 1]$. Обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i, 0 \leq i < n\}$, $n \geq 1$, и предположим, что $\pi_n = \{t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n-1}\}$ – разбиение отрезка $[0, 1]$, полученное возрастающей перестановкой $\mathcal{T}_n$. Далее, обозначим через J_n канонический отрезок, соответствующий общей периодической функции Франклина f_n, и допустим, что $t_{n,i_n} \in \pi_n$ такой узел, что $|f_n(t_{n,i_0})| = \min\{|f_n(t_{n,i})| : i = 0, \ldots, n\}$. Кроме того, предположим, что $J_n = [\alpha_n, \beta_n]$ и обозначим $J_n^- = [t_{n,i_0}, \alpha_n]$ и $J_n^+ = [\beta_n, t_{n,i_0}]$, где отрезки подразумеваются периодичными.

Определение 7. Точка a называется слабой точкой Лебега интегрируемой функции f, если

$$f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)\, dt. \tag{2.12}$$

Заметим, что для любой интегрируемой функции почти все точки являются слабыми точками Лебега.

Следующая лемма доказана Р. Таберским [12].

Лемма 1. *Пусть g – функция конечной полной вариации на каждом отрезке $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$, и*

$$\int_a^b \mathrm{var}\,(g; [s, b])ds < \infty.$$

Если $f \in L^1[a, b]$, то интеграл

$$A = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

существует и

$$|A| \leq M \int_a^b [\mathrm{var}\,(g;[s,b]) + |g(b)|]\ ds,$$

где

$$M = \sup_{0<h\leq b-a} \left|\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\ dt\right|.$$

Эта лемма позволяет доказать следующее распространение Теоремы 3.2 из [13] на периодический случай.

Теорема 4. *Пусть $f \in L^1[0,1]$, $a \in [0,1]$ – слабая точка Лебега функции f и*

$$\mathcal{T}^* = \{\pi : \pi = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}\}, \quad n = 2m+1\}.$$

Тогда

$$f(a) = \lim_{\substack{|\pi|\to 0 \\ \pi\in\mathcal{T}^*}} P_\pi f(a),$$

где $P_\pi f$ означает ортогональную (в L^2) проекцию на пространство непрерывных, кусочно линейных, периодических функций с узлами π.

Доказательство : Ясно, что

$$\int_0^1 K_\pi(t,s)ds = 1 \quad \text{для любого} \quad t \in [0,1].$$

Поэтому

$$P_\pi f(a) - f(a) = \int_0^1 K_\pi(a,s)\cdot[f(s) - f(a)]ds.$$

Кроме того, по определению слабых точек Лебега, для каждого $\varepsilon > 0$ существует некоторое $\delta > 0$ такое, что

$$M = \sup_{0<|h|\leq\delta} \left|\frac{1}{h}\int_a^{a+h} (f(t) - f(a))\ dt\right| < \varepsilon.$$

Очевидно

$$|P_\pi f(a) - f(a)| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \left|\int_{|s-a|>\delta} K_\pi(a,s)[f(s) - f(a)]\ ds\right|,$$

$$I_2 = \left|\int_a^{a+\delta} K_\pi(a,s)[f(s) - f(a)]\ ds\right|,$$

$$I_3 = \left| \int_{a-\delta}^{a} K_\pi(a,s)[f(s) - f(a)]\, ds \right|,$$

где интегралы взяты по периодическим отрезкам, т.е.

$$[-a, b] = [0, b] \cup [1-a, 1], \quad [b, 1+a] = [b, 1] \cup [0, a], \quad a, b \in (0, 1).$$

Первый интеграл в правой части последнего неравенства имеет следующую оценку :

$$I_1 \le (\|f\|_1 + |f(a)|) \sup_{|s-a|>\delta} |K_\pi(a,s)|.$$

Для дальнейших оценок допустим, что i, j суть такие числа, что $a \in [t_{i-1}, t_i]$, $s \in [t_{j-1}, t_j)$ и $i \le j < n + i$. Тогда

$$|s-a| \le |[t_{i-1}, t_j]| = \sum_{k=i}^{j} |I_k| \le (|j-i|+1) \max_{i \le k \le j} \lambda_k$$

и

$$|s-a| \le |[t_{j-1}, t_i]| = \sum_{k=j}^{n+i} |I_k| \le (n - |j-i| + 1) \max_{j \le k \le n+i} \lambda_k.$$

Поэтому

$$\min_{i \le k \le j} \frac{1}{\lambda_k} \le \frac{j-i+1}{\delta}, \quad \min_{j \le k \le n+i} \frac{1}{\lambda_k} \le \frac{n-(j-i)+1}{\delta},$$

поскольку $|s-a| > \delta$. Предположим, что $\pi \in \mathcal{T}^*$.

В силу (2.3) $a_{i',j'} = a_{j',i'}$ и $a_{i',j'} = (-1)^{i'+j'}|a_{i',j'}|$, где $n_{i'} - n + 1 \le j' \le n_{i'}$. Поэтому, лишь $n_{i'}$ удовлетворяет условию $a_{i',j'}a_{i',j'+1} > 0$ для каждого i'. По симметрии, подобное утверждение верно также для столбцов. Следовательно,

$$a_{j',n_{i'}} = (-1)^{n_{i'}+j'}|a_{j',n_{i'}}| \quad \text{при} \quad i' \le j' \le n_{i'}.$$

Поэтому $a_{i'+1,n_{i'}} = (-1)^{n_{i'}+i'+1}|a_{i'+1,n_{i'}}|$ и $n_{i'+1} \ge n_{i'}$. Итак, $n_{i'} \le k_{i'+1} \le n_{i'+1}$ и аналогично (2.9) можно доказать, что

$$|a_{i'+1,j'}| \vee |a_{i',j'}| \le \frac{4}{2^{j'-i'}} \frac{1}{\lambda_k}, \quad i'+1 \le k \le j' \le k_{i'+1} - 1.$$

Следовательно,

$$|K_\pi(s,a)| \le \max(|a_{i-1,j-1}|, |a_{i,j-1}|, |a_{i-1,j}|, |a_{i,j}|) \le$$

$$\le \max\left\{ \frac{4}{2^{|j-i|}} \min_{i \le k \le j} \frac{1}{\lambda_k} ; \frac{4}{2^{n-|j-i|}} \min_{j \le k \le n+i} \frac{1}{\lambda_k} \right\} \le \frac{8}{2^{|j-i|_n+1}} \frac{|i-j|_n+1}{\delta}.$$

Из $|\pi| \to 0$ следует, что $|i - j| \to \infty$. Следовательно, существует некоторое $\delta^* = \delta^*(f, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$I_1 \leq (\|f\|_1 + |f(a)|) \sup_{|s-a|>\delta} |K_\pi(s,a)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad |\pi| < \delta^*.$$

Для оценки I_2 предположим, что i_0, j_0 такие, что $a \in [t_{i_0-1}, t_{i_0})$ и $a+\delta \in [t_{j_0-1}, t_{j_0})$ при $i_0 \leq j_0 < k_{i_0}$. Тогда по Лемме 1 имеем

$$\left| \int_a^{a+\delta} K_\pi(a,s)[f(s) - f(a)]\, ds \right| \leq$$

$$\leq M \int_a^{a+\delta} [\mathrm{var}\,(K_\pi(a,\cdot\,);[t, a+\delta]) + |K_\pi(a, a+\delta)|]\, dt.$$

Используя (2.10), получим

$$I_2 \leq \varepsilon(136 + \delta|K_\pi(a, a+\delta)|).$$

Отметим, что из (2.9) следует, что

$$\delta|K_\pi(a, a+\delta)| \leq \sum_{i=i_0}^{j_0} \lambda_i \max\{|a_{i_0-1, j_0-1}|, |a_{i_0-1, j_0}|, |a_{i_0, j_0-1}|, |a_{i_0, j_0}|\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=i_0}^{j_0} \lambda_i \frac{4}{\lambda_i 2^{\min(j_0-i_0, -2i+n+i_0+j_0)}} \leq 4\left(\frac{j_0 - i_0 + 1}{2^{j_0-i_0}} + \sum_{i=i_0}^{j_0} \frac{1}{2^{-2i+n+i_0+j_0}} \right) \leq 8. \tag{2.13}$$

Для случая $a < t_{k_{i_0}-1} \leq a + \delta$ предположим, что $t'_{k_{i_0}} \in [t_{k_{i_0}-1}, t_{k_{i_0}}]$ есть точка, о которой идёт речь в Теореме 3. Тогда очевидно

$$I_2 \leq \varepsilon \left(\int_a^{t'_{k_{i_0}}} \mathrm{var}\,(K_\pi(a,\cdot\,);[t, t'_{k_{i_0}}])\, dt + \delta \mathrm{var}\,(K_\pi(a,\cdot\,);[t'_{k_{i_0}}, a+\delta]) + \right.$$

$$\left. + \delta|K_\pi(a, a+\delta)| \right) \leq \varepsilon \left(136 + \delta \mathrm{var}\,(K_\pi(a,\cdot\,);[t'_{k_{i_0}}, a+\delta]) + \delta|K_\pi(a, a+\delta)| \right).$$

Для оценки члена $\delta|K_\pi(a, a+\delta)|$, рассмотрим случаи $j_0 = k_{i_0}$ и $j_0 > k_{i_0}$. Если $j_0 = k_{i_0}$, то

$$\delta|K_\pi(a, a+\delta)| \leq \delta(|a_{i_0-1, j_0-1}| \vee |a_{i_0, j_0-1}| + |a_{i_0-1, j_0}| \vee |a_{i_0, j_0}|) \leq$$

$$\leq \sum_{i=j_0}^{n+i_0} \lambda_i (|a_{i_0-1, k_{i_0}}| \vee |a_{i_0, k_{i_0}}|) + \sum_{i=i_0}^{k_{i_0}} \lambda_i (|a_{i_0-1, k_{i_0}-1}| \vee |a_{i_0, k_{i_0}-1}|) \leq$$

$$\leq \sum_{i=j_0}^{n+i_0} \lambda_i \frac{4}{\lambda_i 2^{\min(n-j_0+i_0,\,2n-2i+i_0+j_0)}} + \sum_{i=i_0}^{k_{i_0}} \lambda_i \frac{4}{\lambda_i 2^{\min(k_{i_0}-i_0,\,k_{i_0}+i_0+n-2i)}} \leq C.$$

Если $j_0 > k_{i_0}$, то

$$\delta|K_\pi(a, a+\delta)| \leq \delta(|a_{i_0-1,j_0}| \vee |a_{i_0,j_0}|) \leq C,$$

где последнее неравенство доказывается как и в предыдущем случае. Как в (2.13), получим

$$\delta \operatorname{var}\left(K_\pi(a,\cdot)\,;\,[t'_{k_{i_0}}, a+\delta]\right) \leq 2\delta \sum_{j=k_{i_0}}^{j_0} |K_\pi(a,t_j)| \leq 2\delta \sum_{j=k_{i_0}}^{j_0} \max\{|a_{i_0-1,j}|, |a_{i_0,j}|\} \leq$$

$$\leq 2\delta \sum_{j=k_{i_0}+1}^{j_0} \frac{\max\{|a_{i_0-1,j_0}|, |a_{i_0,j_0}|\}}{2^{j_0-j}} + C \leq 4\delta \max\{|a_{i_0+\gamma,j_0}| : \gamma = -1, 0\} + C \leq C_1.$$

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $\pi = \{\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1}\}$ - разбиение такое, что существуют отрезки Λ_{k-1}, Λ_k, Λ_{k+1} с $\Lambda_l = [\tau_{l-1}, \tau_l]$ такие, что или*

$$|\Lambda_{k+1}| \leq \varepsilon|\Lambda_{k-1}| \quad \text{и} \quad |\Lambda_k| \leq \varepsilon|\Lambda_{k-1}|$$

или

$$|\Lambda_{k-1}| \leq \varepsilon|\Lambda_{k+1}| \quad \text{и} \quad |\Lambda_k| \leq \varepsilon|\Lambda_{k+1}|.$$

Далее, пусть P_π – ортогональная (в L^2) проекция на пространство кусочно линейных (с узлами π), непрерывных, периодических функций в $[0,1]$, с нормой

$$\|P_\pi\|_{H_1} = \sup\{\|P_\pi f\|_{H_1} : \|f\|_{H_1} \leq 1\}.$$

Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и C_0 такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого разбиения π, удовлетворяющего вышеприведенному условию имеем

$$\|P_\pi\|_{H_1} \geq C_0 \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Доказательство : Обозначим $\lambda_l = |\Lambda_l|$. Допустим, что первая система неравенств удовлетворяется, т.е.

$$\lambda_{k+1} \leq \varepsilon\lambda_{k-1} \quad \text{и} \quad \lambda_k \leq \varepsilon\lambda_{k-1}. \tag{2.14}$$

Для функции

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_k} & \text{при} \quad u \in [\tau_{k-1}, \tau_k], \\ -\dfrac{1}{\lambda_k} & \text{при} \quad u \in (\tau_{k-1} - \lambda_k, \tau_{k-1}], \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

имеем $\|\varphi\|_{H_1} \le 2$, поскольку $\varphi/2$ есть атом. Кроме того, из $\|\varphi\|_1 = 2$ и $\|P_\pi\varphi\|_1 \le 3\|\varphi\|_1$ (см. Предложение 3) следует, что

$$\frac{2}{5}\lambda_{k-1}\max(|a_{k-1}|,|a_{k-2}|) \le \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} |P_\pi\varphi(u)|du \le 6.$$

Следовательно

$$\max(|a_{k-1}|,|a_{k-2}|) \le \frac{15}{\lambda_{k-1}}, \tag{2.15}$$

и из (2.14) имеем

$$|a_{k-1}|\lambda_k \le 15\epsilon. \tag{2.16}$$

Ввиду $P_\pi\varphi \in S_\pi$, существуют некоторые $\{a_j : j = 0,1,\dots,n-1\}$ такие, что

$$P_\pi\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} a_j N_j, \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_j(N_i,N_j) = (\varphi,N_i), \quad i = 0,\dots,n-1.$$

Приходим к следующей системе уравнений :

$$\begin{cases} \lambda_i a_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_i + \lambda_{i+1}a_{i+1} = 0 \quad \text{for} \quad i = k+1,\dots,n+k-3, \\ \lambda_{k-2}a_{k-3} + 2(\lambda_{k-2} + \lambda_{k-1})a_{k-2} + \lambda_{k-1}a_{k-1} = -3\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}, \\ \lambda_{k-1}a_{k-2} + 2(\lambda_{k-1} + \lambda_k)a_{k-1} + \lambda_k a_k = 3\dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1}}, \\ \lambda_k a_{k-1} + 2(\lambda_k + \lambda_{k+1})a_k + \lambda_{k+1}a_{k+1} = 3. \end{cases} \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что

$$|a_{k+1}| \le \frac{1}{2}|a_k|. \tag{2.18}$$

Действительно, если (2.18) не верно, то $|a_k| < 2|a_{k+1}|$ и в силу (2.17) получаем

$$\lambda_{k+1}a_k + 2(\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2})a_{k+1} + \lambda_{k+2}a_{k+2} = 0.$$

Поэтому

$$\lambda_{k+2}a_{k+2} = -\lambda_{k+1}(a_k + 2a_{k+1}) - 2\lambda_{k+2}a_{k+1}.$$

Кроме того, по нашему предположению $\operatorname{sgn}(a_k + 2a_{k+1}) = \operatorname{sgn} a_{k+1}$ и

$$\lambda_{k+2}|a_{k+2}| = \lambda_{k+1}|a_k + 2a_{k+1}| + 2\lambda_{k+2}|a_{k+1}| \ge 2\lambda_{k+2}|a_{k+1}|.$$

Поэтому $|a_{k+1}| \le \frac{1}{2}|a_{k+2}|$ и следовательно $|a_{k+2}| \le \frac{1}{2}|a_{k+3}|$. Повторяя это рассуждение, получим

$$|a_k| < 2|a_{k+1}| \le |a_{k+2}| \le \dots \le \frac{1}{2^{n-4}}|a_{n+k-2}| = \frac{1}{2^{n-4}}|a_{k-2}|,$$

в частности,

$$2|a_{k+1}| \le \frac{1}{2^{n-4}}|a_{k-2}|. \tag{2.19}$$

Используя (2.16) с $\varepsilon < \frac{1}{15}$, из последнего неравенства (2.17) получим

$$2 \le 2(\lambda_k + \lambda_{k+1})|a_k| + \lambda_{k+1}|a_{k+1}| \le |a_{k+1}|(4\lambda_k + 5\lambda_{k+1}) \le 9\varepsilon\lambda_{k-1}|a_{k+1}|,$$

где на последнем шаге мы воспользовались формулой (2.14). Итак, $\lambda_{k-1}|a_{k+1}| > 2/9\varepsilon$. Кроме того, используя (2.15) получим

$$|a_{k-2}| < \frac{9\cdot 15}{2}\varepsilon|a_{k+1}|,$$

а из (2.19) получим

$$2|a_{k+1}| \le \frac{1}{2^{n-4}}|a_{k-2}| < \frac{1}{2^{n-4}}\frac{9\cdot 15}{2}\varepsilon|a_{k+1}|.$$

Таким образом, $2^{n-3} < 9\cdot 15\varepsilon$, и беря $\varepsilon < \frac{1}{9\cdot 15}$ приходим к противоречию, доказывающую (2.18).

С учетом (2.18), последнее уравнение в системе (2.17) можно записать в виде

$$\lambda_k a_{k-1} + 2\lambda_k a_k + \xi\lambda_{k+1}a_k = 3,$$

где $3/2 \le \xi \le 5/2$. Следовательно, ввиду (2.16)

$$\frac{1}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \le a_k$$

для достаточно маленьких ε, т.е. $a_k > 0$. Остальная часть доказательства аналогична доказательству Леммы 5.2 из [7].

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{T} = \{t_i, i \ge 0\}$ - последовательность узлов в $[0,1]$, сильно регулярная по парам с некоторым параметром $\gamma > 1$. Кроме того, пусть $\mathcal{T}_n = \{t_i, 0 \le i < n\}$, пусть π_n - разбиение отрезка $[0,1]$, полученное возрастающей перестановкой $\mathcal{T}_n$, и пусть P_{π_n} - ортогональная проекция на S_{π_n}. Тогда существует постоянная C_γ такая, что*

$$\|P_{\pi_n}f\|_{H^1} \le C_\gamma\|f\|_{H^1}$$

для любых $n \ge 1$ и $f \in H^1[0,1]$.

Доказательство : Предположим, что $\pi_n = \{t_{n,i}, 0 \le i < n\}$ с $t_{n,i} < t_{n,i+1}$ и ϕ – некоторый атом. Обозначим $\eta = P_{\pi_n}\phi$. Чтобы доказать, что $\|\eta\|_{H^1} \le C_\gamma \|\phi\|_{H^1}$, построим подходящее атомическое разложение η.

Если $\phi \equiv 1$, то $\eta \equiv 1$, и неравенство очевидно.

Пусть теперь ϕ такой атом, что

$$\int_0^1 \phi(t)\, dt = 0, \quad \operatorname{supp} \phi \subset \Gamma = [\alpha, \beta], \quad |\phi| \le \frac{1}{|\Gamma|}.$$

Пусть $\Delta = [t_{n,k}, t_{n,l}]$ – минимальный отрезок (с концами из π_n), содержащий Γ. Предположив, что N_i есть периодический B-сплайн базис с узлами π_n, обозначим $N_i^- = N_i \cdot \chi_{(t_{n,i-1}, t_{n,i})}$ и $N_i^+ = N_i \cdot \chi_{(t_{n,i}, t_{n,i+1})}$. В силу включения $\eta \in S_{\pi_n}$, существуют некоторые коэффициенты a_i такие, что $\eta = \sum_{i=0}^{n} a_i N_i$. Следовательно, полагая

$$\psi_i = \frac{1}{3} a_{i-1} N_{i-1}^+ + \frac{2}{3} a_i N_i + \frac{1}{3} a_{i+1} N_{i+1}^-, \tag{2.20}$$

получаем $\eta = \sum_{i=0}^{n} \psi_i$ и

$$(\eta, N_i) = \frac{\lambda_{n,i}}{6} a_{i-1} + \frac{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}}{3} a_i + \frac{\lambda_{n,i+1}}{6} a_{i+1} = \int_0^1 \psi_i(t) dt, \quad 0 \le i < n, \tag{2.21}$$

где $(\eta, N_i) = (\phi, N_i)$. Если $l+1 \le i \le n+k-1$, то носители ϕ и N_i не пересекаются. Поэтому $\int_0^1 \psi_i(t)dt = 0$, и приходим к системе

$$\lambda_{n,i} a_{i-1} + 2(\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}) a_i + \lambda_{n,i+1} a_{i+1} = 0, \quad l+1 \le i \le n+k-1. \tag{2.22}$$

Если $i_0 \in [l+1, n+k-1]$ такое, что $|a_{i_0}| = \min\{|a_i|, l+1 \le i \le n+k-1\}$, и если $i_0 + 1 < n+k-1$, то можно легко получить следующие оценки для a_i (см., например, [11]) :

$$a_i a_{i+1} \le 0 \quad \text{при} \quad i = i_0+1, \dots, n+k-2,$$

$$|a_{i_0}| \le |a_{i_0+1}| \le \frac{1}{2}|a_{i_0+2}| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n+k-i_0-1}}|a_{n+k}| = \frac{1}{2^{n+k-i_0-1}}|a_k|;$$

и

$$a_i a_{i-1} \le 0 \quad \text{при} \quad i = i_0-1, \dots, l+1,$$

$$|a_{i_0}| \le |a_{i_0-1}| \le \frac{1}{2}|a_{i_0-2}| \le \cdots \le \frac{1}{2^{i_0-l-1}}|a_l|.$$

Таким образом

$$|a_i| \le \frac{2}{3} \frac{\lambda_{n,i+1}}{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}} |a_{i+1}| \quad \text{при} \quad i_0 + 1 \le i \le n+k-1,$$

$$|a_i| \le \frac{2}{3} \frac{\lambda_{n,i-1}}{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i-1}} |a_{i-1}| \quad \text{при} \quad l+1 \le i \le i_0 - 1.$$

Заметим, что $\|\phi\|_1 = 1$. Кроме того, $\|\eta\|_1 \le 3$ так как $\|P_{\pi_n}\phi\|_1 \le 3\|\phi\|_1$ (см. Предложение 3) и

$$\|\eta\|_1 \sim \sum_{i=0}^{n} |a_i|(\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}) \ge |a_k|(\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k+1}).$$

Используя вышеприведенные оценки, получаем

$$|a_i| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+k-i} \left(\prod_{j=i}^{n+k-1} \frac{\lambda_{n,j+1}}{\lambda_{n,j} + \lambda_{n,j+1}}\right) |a_k| =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+k-i} \frac{\lambda_{n,k}|a_k|}{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}} \prod_{j=i+1}^{n+k-1} \frac{\lambda_{n,j}}{\lambda_{n,j} + \lambda_{n,j+1}} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+k-i} \frac{\lambda_{n,k}|a_k|}{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}} \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{n+k-i} \frac{1}{\lambda_{n,i} + \lambda_{n,i+1}}$$

для любого i ($i_0 + 1 \le i \le n + k - 1$), причем аналогичное неравенство имеет место также для $l + 1 \le i \le i_0 - 1$. Имеем

$$|a_{i_0}| \le |a_{i_0+1}|, \quad |a_{i_0}| \le |a_{i_0-1}|, \quad \|\psi_i\|_\infty \le \max\{|a_{i-1}|, |a_i|, |a_{i+1}|\}.$$

Следовательно, используя сильную регулярность по парам, получим

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^{n+k-i} \psi_i(t)\right| \le \frac{C_\gamma}{|L_i|}, \quad t \in L_i, \quad l + 1 \le i \le n + k - 1,$$

где $L_i = \operatorname{supp} N_i$. Таким образом, функции

$$\bar{\psi}_i = \frac{1}{C_\gamma}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+k-i} \psi_i(t)$$

суть искомые атомы при $l + 1 \le i \le n + k - 1$. Остальная часть доказательства похожа на доказательство Леммы 5.2 из [7].

Для последовательности $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ определим квадратичную функцию P и максимальную функцию S следующим образом :

$$P(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right)^{1/2}, \quad S(x) = \sup_{N \ge 1} \left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x)\right|$$

Для $f \in L^1[0,1]$ положим $a_n = (f, f_n)$ и $Pf(x) = P(x)$, $Sf(x) = S(x)$.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{T}$ - допустимая последовательность узлов, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ - соответствующая общая периодическая система Франклина. Пусть $\gamma > 1$, а $\mathcal{T}$ сильно регулярна с параметром γ. Тогда существует постоянная C_γ, зависящая только от γ такая, что для каждого атома ϕ имеем*

$$\|S\phi\|_1 \le C_\gamma \quad \text{и} \quad \|P\phi\|_1 \le C_\gamma.$$

Доказательство : Требуемые оценки верны для $\phi \equiv 1$. Пусть ϕ - некоторый атом такой, что $\int_0^1 \phi(u)\, du = 0$, а Γ - произвольный отрезок такой, что

$$\operatorname{supp} \phi \subset \Gamma, \quad \Gamma = [\alpha, \beta], \quad \sup |\phi| \le \frac{1}{|\Gamma|}.$$

Тогда обозначим

$$a_n = a_n(\phi) = (\phi, f_n), \quad n_\Gamma = \max\{n : \#(\pi_n \cap \Gamma) \le 1\},$$

$$P_1\phi = \left(\sum_{n=1}^{n_\Gamma} a_n^2 f_n^2\right)^{1/2}, \quad P_2\phi = \left(\sum_{n=n_\Gamma+1}^{\infty} a_n^2 f_n^2\right)^{1/2},$$

$$S_1\phi = \max_{1 \le m \le n_\Gamma} \left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right|, \quad S_2\phi = \sup_{m \ge n_\Gamma+1} \left|\sum_{n=n_\Gamma+1}^{m} a_n f_n\right|.$$

Очевидно, достаточно доказать, что

$$\|P_1\phi\|_1, \|P_2\phi\|_1, \|S_1\phi\|_1, \|S_2\phi\|_1 \le C_\gamma. \tag{2.23}$$

Величины $\|P_1\phi\|_1$ и $\|S_1\phi\|_1$ оцениваются также как и в Лемме 4.4 из [10]. Для оценки $\|P_2\phi\|_1$ и $\|S_2\phi\|_1$, изменим доказательство Леммы 4.4 из [10] следующим образом.

Рассмотрим разбиение $\pi_{n_\Gamma+1}$. По определению n_Γ, существуют точно два узла разбиения $\pi_{n_\Gamma+1}$ в Γ. Для простоты, положим $\pi_{n_\Gamma+1} = \{\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n_\Gamma}\}$, и предположим, что j такое, что $\tau_j, \tau_{j+1} \in \Gamma$. Пусть

$$V_0 = [\tau_j, \tau_{j+1}], \quad V = [\tau_{j-1}, \tau_{j+2}],$$

$$V^- = [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad V^+ = [\tau_{j+1}, \tau_{j+2}], \quad \bar{V} = [\tau_{j-3}, \tau_{j+4}].$$

В силу сильной регулярности $\mathcal{T}$, приняв во внимание включение $V_0 \subset \Gamma \subset V$, получим

$$|V_0|, |V^-|, |V|, |V^+|, |\bar{V}| \sim_\gamma |\Gamma|. \tag{2.24}$$

Кроме того, $\|\phi\|_2 \le |\Gamma|^{-1/2}$. Следовательно, в силу (2.24) и неравенства Коши-Шварца имеем

$$\int_{\tilde{V}} P_2\phi(t)\, dt \le \|\chi_{\tilde{V}}\|_2 \|\phi\|_2 \le \frac{|\tilde{V}|^{1/2}}{|\Gamma|^{1/2}} \le C_\gamma. \tag{2.25}$$

В силу Предложения 3 $S_2\phi \le 512\,\mathcal{M}\phi$. Поскольку $\mathcal{M}$ имеет тип (2, 2), то аналогичными рассуждениями получаем

$$\int_{\tilde{V}} S_2\phi(t)\, dt \le C_\gamma. \tag{2.26}$$

Теперь осталось оценить $\int_{\tilde{V}^c} P_2\phi(t)dt$ и $\int_{\tilde{V}^c} S_2\phi(t)dt$. Достаточно показать, что

$$\sum_{n=n_\Gamma+1}^{\infty} |a_n| \int_{\tilde{V}^c} |f_n(t)|\, dt \le C_\gamma. \tag{2.27}$$

Чтобы доказать эту оценку отметим, что для каждого $n > n_\Gamma$ концы $\tilde{V}$ суть некоторые узлы из разбиения π_n. Поэтому, существуют два возможных положения J_n относительно $\tilde{V}$: $J_n \subset \tilde{V}$ или $J_n \subset \tilde{V}^c$. Если $J_n \subset \tilde{V}$, то по Лемме 1 из [11], и принимая во внимание что ϕ есть атом, имеем

$$|a_n| = \left| \int_\Gamma \phi(t) f_n(t)\, dt \right| \le \frac{\|f_n\|_1}{|\Gamma|} \le C \frac{|J_n|^{1/2}}{|\Gamma|}.$$

Следовательно, применяя Лемму 5 к $\tilde{V}$ и используя (2.24), получим

$$\sum_{n: J_n \subset \tilde{V}} |a_n| \int_{\tilde{V}^c} |f_n(t)|\, dt \le C \frac{|\tilde{V}|}{|\Gamma|} \le C_\gamma. \tag{2.28}$$

Пусть теперь $J_n \subset \tilde{V}^c$. Через V_n обозначим минимальный отрезок (с концами из π_n), содержащий Γ, через α', β' соответственно обозначим левый и правый концы V_n (таким образом $V_n = [\alpha', \beta']$), через L_n^- - отрезок линейности f_n с правым концом β' если $\beta' \in J_n$ и $L_n^- = \emptyset$ в противном случае. L_n^+ определяется аналогично.

Заметим, что по выбору отрезка $\tilde{V}$, для каждого $n > n_\Gamma$ существует хотя бы один узел из π_n, лежащий между β' и правым концом $\tilde{V}$. Кроме того, $t_n^-, t_n^+ \notin V_n$ поскольку $J_n \subset \tilde{V}^c$, и по Свойству 3 из [11] имеем

$$|a_n| \le \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma |f_n(t)|\, dt \le \frac{C}{|\Gamma|} \left(\int_{L_n^-} |f_n(t)|\, dt + \int_{L_n^+} |f_n(t)|\, dt \right), \tag{2.29}$$

поскольку $\Gamma \subset V$. Оценим интеграл по L_n^-, другой оценивается подобным образом.

Пусть $\Lambda_1^- \supset \Lambda_2^- \supset \ldots$ – совокупность всех разных отрезков L_n^-. Отметим, что $\Lambda_1^- = V^+$ и зафиксируем любые Λ_i^- и $k \geq 0$. Пусть n выбрано так, чтобы удовлетворялись $L_n^- = \Lambda_i^-$ и $d_n(\beta') = k$: для случая $\beta' \in J_n^-$ обозначим $d_n(\beta')$ = число узлов из π_n, принадлежащих J_n^-, которые лежат между β' и J_n, плюс один. Аналогично определим $d_n(\beta')$ для $\beta' \in J_n^+$. Тогда по Свойству 4 из [11]

$$\frac{C}{|\Gamma|}\int_{L_n^-}|f_n(t)|\,dt\int_{\bar{V}^c}|f_n(t)|\,dt \leq C\left(\frac{2}{3}\right)^k\frac{|J_n|}{|J_n|+\operatorname{dist}(J_n,\Lambda_i^-)+|\Lambda_i^-|}\frac{|\Lambda_i^-|}{|\Gamma|}.$$

Применяя Лемму 3.4 из [10] (которая верна также для периодического случая), получим

$$\sum_{n:L_n^-=\Lambda_n^-,d_n(\beta')=k}\frac{C}{|\Gamma|}\int_{L_n^-}|f_n(t)|\,dt\int_{\bar{V}^c}|f_n(t)|\,dt \leq C_\gamma(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k\frac{|\Lambda_i^-|}{|\Gamma|}. \qquad (2.30)$$

В силу требования сильной регулярности,

$$\frac{1}{\gamma+1}|\Lambda_i^-| \leq |\Lambda_{i+1}^-| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1}|\Lambda_i^-|$$

Следовательно, суммируя (2.30) по i и k, ввиду $|\Lambda_1^-| \sim_\gamma |\Gamma|$ получим

$$\sum_n\frac{C}{|\Gamma|}\int_{L_n^-}|f_n(t)|\,dt\int_{\bar{V}^c}|f_n(t)|\,dt \leq$$

$$\leq C_\gamma\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\Lambda_i^-|}{|\Gamma|}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq C_\gamma\frac{|\Lambda_1^-|}{|\Gamma|} \leq C_\gamma.$$

Аналогичная оценка интеграла по L_n^+ дает

$$\sum_{n=n_\Gamma+1}^{\infty}|a_n|\int_{\bar{V}^c}|f_n(t)|\,dt \leq C_\gamma.$$

Следующее предложение непосредственно следует из Леммы 4.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов, а $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина. Далее, пусть $\gamma > 1$ и $\mathcal{T}$ сильно регулярна с параметром γ. Тогда существует постоянная C_γ, зависящая только от γ такая, что для любого $f \in H^1[0,1]$*

$$\|Sf\|_1 \leq C_\gamma\|f\|_{H^1} \quad \text{и} \quad \|Pf\|_1 \leq C_\gamma\|f\|_{H^1}.$$

Следующее предложение имеет место для любого разбиения $\pi = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}\}$ отрезка $[0,1]$ и для ортогональной (в $L^2[0,1]$) проекции P_π в S_π.

Предложение 3.

(i) Если $f \in L^p[0,1]$ с $1 \le p \le \infty$, то $\|P_\pi f\|_p \le 3\|f\|_p$.

(ii) Если $f \in L^1[0,1]$, то $\sup_\pi |P_\pi f| \le 256\,\mathcal{M}f$, где $\mathcal{M}f$ – максимальная функция Харди-Литтлвуда функции f.

Утверждение (i) доказано в [2], а (ii) совпадает с Теоремой 5 из [11].

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{T}$ – любая допустимая последовательность узлов в $[0,1]$, а $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная C, не зависящая от $\mathcal{T}$ такая, что*

$$\sum_{n: J_n \subset V} |J_n|^{1/2} \int_{V^c} |f_n(t)|\, dt \le C|V|$$

для любого периодического отрезка $V = [\alpha, \beta]$.

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 4.6 в [9]. Единственное отличие в том, что интегралы должны быть взяты по $J_n^+ \cap V^c$ вместо $[\beta, 1]$.

Ниже приводятся без доказательств три предложения, являющиеся аналогами Предложений 4.3, 4.6 и 4.7 из [10]. Доказательства этих предложений проводятся точно также, как и их аналоги для непериодического случая, только для периодического случая мы опираемся на Теорему 4 вместо второй части Предложения 3.6 из [10].

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина, $a = \{a_n, n \ge 1\}$ – последовательность коэффициентов такая, что $P \in L^1[0,1]$. Тогда $S \in L^1[0,1]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ сходится безусловно в $L^1[0,1]$. Кроме того, существует постоянная $C > 0$ не зависящая от $\mathcal{T}$ и a такая, что $\|S\|_1 \le C\|P\|_1$ и*

$$\sup_{\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\ge 1},\, \varepsilon_n=\pm 1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n \right\|_1 \le C\|P\|_1.$$

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$, которая сильно регулярна по парам с некоторым параметром $\gamma > 1$, но не удовлетворяет какому либо условию сильной регулярности. Тогда соответствующая общая периодическая система Франклина $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию*

$$\sup \left\| \sup_{n \ge 1} |a_n(\phi) f_n| \right\|_1 = \infty,$$

где супремум берётся по всем атомам ϕ и $a_n(\phi) = (\phi, f_n)$.

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина, $\mathcal{T}$ сильно регулярна по парам с некоторым параметром $\gamma > 1$, а $\{a_n, n \geq 1\}$ – последовательность коэффициентов такая, что $S \in L^1[0,1]$. Тогда существует $f \in H^1[0,1]$ такая, что $a_n = (f, f_n)$ для каждого $n \geq 1$. Кроме того, существует постоянная C_γ, зависящая только от γ такая, что*

$$\|f\|_{H^1} \leq C_\gamma \|Sf\|_1$$

для любого $f \in H^1[0,1]$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$, которая сильно регулярна по парам, а $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина. Необходимо доказать, что $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ является базисом в $H^1[0,1]$. Для этого покажем, что система $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ полна, минимальна и последовательность частичных сумм операторов относительно этой системы ограничена в $H^1[0,1]$. Полноту и минимальность можно легко проверить, следовательно остается убедиться (Лемма 3), что существует постоянная $C_\mathcal{T}$ такая, что

$$\|P_{\pi_n}\|_{H^1} \leq C_\mathcal{T} \quad \text{для всех} \quad n.$$

Теперь допустим, что $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$ такая, что соответствующая общая периодическая система Франклина образует базис в $H^1[0,1]$. Тогда по Лемме 2, $\mathcal{T}$ сильно регулярна по парам.

Доказательство Теоремы 2 : Пусть $\mathcal{T}$ – допустимая последовательность узлов в $[0,1]$, которая сильно регулярна, а $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая общая периодическая система Франклина. Чтобы доказать, что система $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$ заметим, что сильная регулярность разбиения влечет её сильную регулярность по парам. Следовательно, по Теореме 1, система $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ есть базис в $H^1[0,1]$.
Теперь, предполагая, что $f \in H^1[0,1]$ и

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \tag{3.1}$$

докажем, что этот ряд сходится безусловно, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n$ сходится в $H^1[0,1]$ для любой последовательности $\{\varepsilon_n : \varepsilon_n = \pm 1, n \in \mathbb{N}\}$. Для этого заметим, что в силу Предложения 2, $Pf \in L^1[0,1]$ и $\|Pf\|_1 \le C_\gamma \|f\|_{H^1}$. Поэтому, используя Предложения 4 и 6 получаем, что

$$S_n^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k f_k(x)$$

есть последовательность Коши в $H^1[0,1]$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n$ сходится в $H^1[0,1]$ к некоторой функции $f_\varepsilon \in H^1[0,1]$ такой, что

$$\|f_\varepsilon\|_{H^1} \le C_\gamma \|Sf_\varepsilon\|_1 \le C_\gamma \|Pf_\varepsilon\|_1 = C_\gamma \|Pf\|_1 \le C_\gamma \|f\|_{H^1}.$$

Таким образом, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

Теперь надо доказать, что сильная регулярность разбиения необходима для безусловной базисности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ в $H^1[0,1]$. Допустим, что $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$, а последовательность узлов не является сильно регулярной. Тогда, по Теореме 1 соответствующее разбиение сильно регулярно по парам (поскольку $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ также является базисом в $H^1[0,1]$). Следовательно, если $f \in H^1[0,1]$ и

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_n, n \ge 1\}, \quad \varepsilon_n \in \{-1, 1\},$$

то полагая, что $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ является безусловным базисом в $H^1[0,1]$, получим $f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n \in H^1[0,1]$ (сходящийся в $H^1[0,1]$). Поэтому, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ безусловно сходится в $L^1[0,1]$, а $Pf \in L^1[0,1]$ по неравенству Хинчина. Кроме того, из неравенства Хинчина и безусловности базиса $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ в $H^1[0,1]$ следует, что для любого $f \in H^1[0,1]$ имеем

$$\|Pf\|_1 \le C \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_1 \le C \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{H_1} \le C_{\mathcal{T}} \|f\|_{H^1} \tag{3.2}$$

с постоянной $C_{\mathcal{T}}$, не зависящей от f. Теперь заметим, что по Предложению 5 неравенство (3.2) не выполняется для любого $\mathcal{T}$, который сильно регулярен по парам, но не сильно регулярен, поэтому (3.2) не верно даже для атомов.

Это противоречие означает, что если $\mathcal{T}$ сильно регулярен по парам, но не сильно регулярен, то соответствующая периодическая система Франклина не является безусловным базисом в $H^1[0,1]$.

Abstract. The general periodic Franklin system corresponding to a sequence of knots $\mathcal{T} = \{t_n, n \ge 0\}$ dense in $[0,1]$ is defined to be a sequence of orthonormal, piecewise linear, continuous functions $f_n(x)$ with knots $\mathcal{T}$ satisfying $f_n(0) = f_n(1)$. The main result of this paper yields a characterisation of those sequences $\mathcal{T}$, for which the corresponding general periodic Franklin system is a basis or an unconditional basis in $H^1[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., vol. 100, pp. 522 – 528, 1928
2. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 - 157, 1963.
3. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.
4. S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math., vol. 1, pp. 249 – 257, 1975.
5. P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is an unconditional basis in H^1", Ark. Mat., vol. 20, pp. 293 – 300, 1982.
6. P. Sjolin, J. O. Strömberg, "Basis properties of Hardy spaces", Ark. Mat., vol. 21, pp. 111 – 125, 1983.
7. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), vol. 374, pp. 1 – 59, 1998.
8. Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян, "Безусловное базисное свойство общих систем Франклина", Изв. АН Армении, серия Математика, том 35, № 4, стр. 2 – 22, 2000.
9. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math., vol. 164, pp. 161 – 204, 2004.
10. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin systems as bases in H^1", Studia Math., vol. 167, pp. 259 – 292, 2005.
11. К. А. Керян, "Безусловное базисное свойство общей периодической системы Франклина в $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Изв. АН Армении, серия Математика, том 40, № 1, стр. 15 – 55, 2005.
12. R. Taberski, "Singular integrals depending on two parameters", Prace matematyczne, vol. 7, pp. 173 – 179, 1962.
13. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 – 143, 1997.

Поступила 27 октября 2004

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 40, Номер 1, 2005

СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

Сборник статей

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 40, No. 1, 2005

FRANKLIN SYSTEMS

Collection of Papers

Contents