ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան
Մ. Ս. Գինովյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Գ. Գ. Գևորգյան
Վ. Ս. Զաքարյան
Ա. Ա. Թալալյան
Ն. Ե. Թովմասյան
Վ. Ա. Մարտիրոսյան
Ս. Ն. Մերգելյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Ա. Բ. Ներսիսյան
Ա. Ա. Սահակյան
Ա. Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян
Г. Г. Геворкян
М. С. Гиновян (зам. главного редактора)
В. С. Закарян
А. Г. Камалян
В. А. Мартиросян
С. Н. Мергелян
Б. С. Нагапетян
А. Б. Нерсесян
А.А. Саакян
А. А. Талалян
Н. Е. Товмасян

Ответственный секрстарь М. А. Оганесян

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № *6, 2004, 3–16*

ЧИСЛО ЗАЙДЕНБЕРГА-ТАРСКОГО ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. Г. Казарян и В. Н. Маргарян

Ереванский государственный университет

Резюме. В работе доказывается существование и приводится алгоритм вычисления положительного числа Зайденберга-Тарского для двумерных многочленов, бесконечно растущих на бесконечности и представленных в виде суммы однородных многочленов.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^2$ – двумерное евклидово пространство точек (векторов) $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, N – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, и $N_0^2 = N_0 \times N_0$. Для $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in N_0^2$ обозначим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Пусть $P(\xi) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – многочлен с конечным числом отличных от нуля вещественных коэффициентов $\{\gamma_\alpha\}$. Известно (см. [1] – [4]), что для многочлена $P(\xi) > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ существуют вещественные постоянные $C > 0$ и A, такие, что

$$P(\xi) \geq C(1 + |\xi|)^A, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{0.1}$$

Наибольшее из чисел A, удовлетворяющих соотношению (0.1), обозначим через $ST(P)$ и назовем *числом Зайденберга–Тарского* многочлена P. Хорошо известно, что многие свойства решений дифференциальных уравнений $P(D)u = f$, где $P(D)$ – дифференциальный оператор с частными производными, определяются поведением на бесконечности соответствующих характеристических многочленов $P(\xi)$ и, в частности, их числами Зайденберга–Тарского. В частности, эти

числа определяют пространства Жевре, к которым принадлежат решения уравнений $P(D)u = 0$ для гипоэллиптических операторов $P(D)$, поведение фундаментальных решений в начале координат и на бесконечности и некоторые другие (см. [6] – [9]).

Обозначим через I_2 множество многочленов $\{P(\xi)\} = \{P(\xi_1, \xi_2)\}$ таких, что $P(\xi) > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$. Нашей целью является описание вычисления положительного числа Зайденберга–Тарского для положительных многочленов $P \in I_2$, представимых в виде суммы трех однородных многочленов :

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi), \tag{0.2}$$

где P_j – ненулевой однородный многочлен порядка d_j $(j = 0, 1, 2)$, $d_0 > d_1 > d_2$.

В работе [10] для многочленов вида (0.2) и в работе [11] для общих многочленов двух переменных нами получены необходимые и достаточные условия для $P \in I_2$. В настоящей работе мы будем пользоваться методами и результатами работ [10] – [13].

Пусть P – многочлен вида (0.2), обозначим

$$\Sigma(P_0) = \{\eta \in R^2, |\eta| = 1, P_0(\eta) = 0\},\ \Sigma(P_j) = \{\eta \in \Sigma(P_{j-1}), P_j(\eta) = 0\},\ j = 1, 2.$$

Для точки $\eta \in \Sigma(P_0)$, обозначим через $l_j(\eta)$ кратность корня η многочлена P_j $(0 \le j \le 2)$ и положим

$$\delta_{0,1}(\eta) = \frac{d_0 - d_1}{l_0(\eta) - l_1(\eta)}, \quad \delta_{0,2}(\eta) = \frac{d_0 - d_2}{l_0(\eta) - l_2(\eta)}, \quad \delta_{1,2}(\eta) = \frac{d_1 - d_2}{l_1(\eta) - l_2(\eta)}.$$

Представим множество $\Sigma(P_0)$ в виде объединения множеств

$$\Sigma_0 = \Sigma(P_0) \setminus \Sigma(P_1), \quad \Sigma_1 = \{\eta \in \Sigma(P_1),\ l_0(\eta) \le l_1(\eta)\},$$

$$\Sigma_2 = \{\eta \in \Sigma(P_1),\ l_0(\eta) > l_1(\eta),\ \delta_{0,1}(\eta) > \delta_{1,2}(\eta)\},$$

$$\Sigma_3 = \{\eta \in \Sigma(P_1),\ l_0(\eta) > l_1(\eta),\ \delta_{0,1}(\eta) < \delta_{1,2}(\eta)\},$$

$$\Sigma_4 = \{\eta \in \Sigma(P_1),\ l_0(\eta) > l_1(\eta),\ \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta)\},$$

при этом для точек $\eta \in \Sigma_4$ положим

$$\Delta(\eta) \equiv \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta) = \delta_{0,2}(\eta). \tag{0.3}$$

Далее, каждой точке $\eta \in \Sigma(P_0)$ сопоставим точку $\tau = \tau(\eta) \in \mathbb{R}^2$, $|\tau| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$ и для $l \in N_0$ положим

$$D_\tau^l P_j(\eta) = \sum_{|\alpha|=l} \frac{\tau^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\eta), \quad j = 0, 1, 2. \tag{0.4}$$

Легко убедиться в том, что $D_\tau^{l_0(\eta)} P_0(\eta) > 0$ для многочлена $P \in I_2$.

Для полноты изложения приведем следующее предложение, доказанное в [10] (см. [10], лемма 1.1, теорема 1.1).

Лемма 0.1. *Пусть $P \in I_2$. Тогда :*

1) $P_0(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in R^2$,

2) $P_1(\eta) > 0$ при $\eta \in \Sigma_0$,

3) $P_2(\eta) > 0$ при $\eta \in \Sigma(P_1)$, при этом $d_2 > 0$ если $\Sigma(P_1) \neq \emptyset$,

4) для каждой точки $\eta \in \Sigma_3$ существует окрестность $U(\eta)$ такая, что $P_1(\xi) \geq 0$ при всех $\xi \in U(\eta)$.

Следующая теорема дает решение поставленной задачи, когда $\Sigma_4 = \emptyset$.

Теорема 0.1. *Пусть $P \in I_2 d$, при этом $\Sigma_4 = \emptyset$. Тогда*

1) $ST(P) = d_0$ при $\Sigma(P_0) = \emptyset$,

2) $ST(P) = d_1$ при $\Sigma(P_0) \neq \emptyset$ и $\Sigma(P_1) = \emptyset$,

3) $ST(P) = d_2$ при $\Sigma(P_1) \neq \emptyset$.

Доказательство : Пункт 1) очевиден. Докажем пункт 2). Пусть, наоборот, при выполнении условий $\Sigma(P_0) \neq \emptyset$ и $\Sigma(P_1) = \emptyset$, существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что

$$|\xi^s| \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{P(\xi^s)}{(1+|\xi^s|)^{d_1}} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{0.5}$$

Положим $\eta^s = \xi^s/|\xi^s|$. Тогда $|\eta^s| = 1$ $(s \in N)$ и за счет выбора подпоследовательности можно считать, что $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ для некоторой точки $\eta \in R^2$, $|\eta| = 1$. Если $\eta \notin \Sigma(P_0)$, то противоречие с (0.5) очевидно. Пусть $\eta \in \Sigma(P_0)$. Тогда $\eta \in \Sigma_0$, поскольку $\Sigma(P_1) = \emptyset$, и по лемме 0.1 $P_1(\eta) > 0$, $P_0(\eta^s) \geq 0$ $(s \in N)$. Отсюда и из условия $d_1 > d_2$ имеем для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq P_0(\xi^s) + P_1(\xi^s) - |P_2(\xi^s)| \geq P_1(\xi^s) - |P_2(\xi^s)| =$$

$$= |\xi^s|^{d_1} P_1(\eta^s) - |\xi^s|^{d_2} |P_2(\eta^s)| \geq C|\xi^s|^{d_1}, \quad C > 0,$$

что противоречит (0.5). Докажем пункт 3). Пусть $\eta^0 \in \Sigma(P_1)$. Рассматривая поведение многочлена P на последовательности $\{s\eta^0\}$, мы легко получим, что $ST(P) \leq d_2$. Покажем, что $ST(P) \geq d_2$. Пусть, наоборот, на некоторой последовательности $\{\xi^s\}$:

$$|\xi^s| \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{P(\xi^s)}{(1+|\xi^s|)^{d_2}} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty \tag{0.6}.$$

Поступая как выше, получим точку $\eta \in R^2$. Если $\eta \notin \Sigma(P_1)$, то противоречие с (0.6) получается как выше. Пусть $\eta \in \Sigma(P_1)$, тогда представим векторы $\xi^s \in R^2$

($s \in N$) по ортогональному базису $\{\eta, \tau\}$, где вектор $\tau = \tau(\eta)$ определяется как выше,

$$\xi^s = \varphi_s \eta + \psi_s \tau, \quad s \in N. \tag{0.7}$$

Так как вместе с точкой η множество $\Sigma(P_1)$ содержит также точку $(-\eta)$, то, заменяя по необходимости η через $(-\eta)$ или τ через $(-\tau)$, можем считать, что $\varphi_s \geq 0$ и $\psi_s \geq 0$ $(s \in N)$. Если для некоторой подпоследовательности $\{\eta^s\}$ имеем $\psi_s = 0$ $(s \in N)$, то $P(\xi^s) = \varphi_s^{d_2} P_2(\eta) = |\xi^s|^{d_2} P_2(\eta)$. Это противоречит (0.6), так как $P_2(\eta) > 0$ согласно лемме 0.1.

С другой стороны, из ортогональности векторов η и τ и из того, что $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ следует, что $\varphi_s \neq 0$ для достаточно больших s, при этом $\psi_s/\varphi_s \to 0$ при $s \to \infty$. Поэтому далее будем считать, что $\varphi_s > 0$, $\psi_s > 0$ $(s \in N)$ и положим

$$\rho_s = 1 - \ln \psi_s / \ln \varphi_s, \quad \text{т.е.} \quad \psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s}, \quad s \in N.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\rho_s \geq 0$ для всех $s \in N$. Пусть сначала (для некоторой последовательности) $\rho_s \to \infty$ при $s \to \infty$, тогда, применяя формулу Тейлора для $j = 0, 1, 2$, получим

$$P_j(\xi^s) = \varphi_s^{d_j} P_j(\eta + \frac{\psi_s}{\varphi_s}\tau) = \varphi_s^{d_j} \sum_{|\alpha| \geq l_j} \left(\frac{\psi_s}{\varphi_s}\right)^{|\alpha|} \frac{\tau^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_j(\eta) =$$

$$= \varphi_s^{d_j} \sum_{i \geq 0} \left(\frac{\psi_s}{\varphi_s}\right)^{l_j+i} D_\tau^{l_j+i} P_j(\eta) = \sum_{i \geq 0} \varphi_s^{d_j-(l_j+i)\rho_s} D_\tau^{l_j+i} P_j(\eta), \tag{0.8}$$

где $l_j = l_j(\eta)$ $(j = 0, 1)$.

Далее, имеем $P_0(\xi^s) + P_1(\xi^s) \to 0$ при $s \to \infty$, так как $l_j > 0$ $(j = 0, 1)$ и $\rho_s \to \infty$ при $s \to \infty$. С другой стороны, так как $P_2(\eta) > 0$, то для достаточно больших s имеем

$$P_2(\xi^s) = |\xi^s|^{d_2} P_2(\eta^s) \geq \frac{1}{2}|\xi^s|^{d_2} P_2(\eta), \tag{0.9}$$

что противоречит (0.6) Пусть теперь $0 \leq \rho_s \leq \rho < \infty$ $(s \in N)$. За счет выбора подпоследовательности можно считать, что последовательность $\{\rho_s\}$ сходится. Пусть $\rho_s \to \delta$ при $s \to \infty$ и сначала $\delta = 0$. Так как $D_\tau^{l_0} P_0(\eta) > 0$, то, выбирая число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $d_0 - \varepsilon l_0 > \max\{d_1 + \varepsilon l_1, d_2\}$, из (0.8) – (0.9) получаем для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq P_0(\xi^s) - |P_1(\xi^s)| - |P_2(\xi^s)| \geq C_1 D_\tau^{l_0} P_0(\eta) \varphi_s^{d_0-\varepsilon l_0} \geq C_2 |\xi^s|^{d_0-\varepsilon l_0},$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – постоянные. Так как $d_0 - \varepsilon l_0 > d_2$, то это противоречит (0.6).

Пусть теперь $\delta > 0$. Если $\eta \in \Sigma_1$, то $d_1 - l_1\delta < d_0 - l_0\delta$. Поэтому, из (0.8) – (0.9) и из того, что $P_0(\xi^s) \geq 0$ и $P_2(\xi^s) > 0$, получим с некоторыми положительными постоянными C_3, C_4 и C_5

$$P(\xi^s) \geq P_0(\xi^s) + P_2(\xi^s) - |P_1(\xi^s)| \geq C_3\varphi_s^{d_0 - l_0(\delta+\epsilon)} + C_4|\xi^s|^{d_2} - C_5\varphi_s^{d_1 - l_1(\delta-\epsilon)}$$

при достаточно больших s и произвольного $\epsilon > 0$. Выбирая ϵ так, чтобы $d_1 - l_1(\delta - \epsilon) < d_0 - l_0(\delta + \epsilon)$, отсюда получим $P(\xi^s) \geq C_6|\xi^s|^{d_2}$ $(C_6 > 0)$ для достаточно больших s, что противоречит (0.6).

Пусть $\eta \in \Sigma_2$, тогда из простых геометрических соображений следует, что $d_1 - l_1\delta < d_0 - l_0\delta$ при $\delta < \delta_{0,1}$ и $d_1 - l_1\delta < d_2$ при $\delta > \delta_{1,2}$, при этом $d_0 - l_0\delta \geq d_2$ при $\delta \leq \delta_{0,2}$. Выберем число $\epsilon > 0$ так, чтобы

$$d_1 - l_1(\delta - \epsilon) < d_0 - l_0(\delta + \epsilon) \quad \text{при} \quad \delta < \delta_{0,1}$$

и $d_1 - l_1(\delta - \epsilon) < d_2$ при $\delta > \delta_{1,2}$. Аналогично предыдущему случаю, из (0.8) – (0.9) получим для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq C_7|\xi^s|^{d_0 - l_0(\delta+\epsilon)} \quad \text{при} \quad \delta < \delta_{0.1} \quad (C_7 > 0), \tag{0.10}$$

$$P(\xi^s) \geq C_8|\xi^s|^{d_2} \quad \text{при} \quad \delta > \delta_{1,2} \quad (C_8 > 0). \tag{0.11}$$

С другой стороны, так как $\eta \notin \Sigma_4$, то $\delta_{1,2} < \delta_{0,2} < \delta_{0,1}$. Предполагая, что число ϵ удовлетворяет дополнительному условию $\delta_{1,2} < \delta_{0,2} - \epsilon$, принимая во внимание соотношение $d_0 - l_0(\delta + \epsilon) \geq d_2$ при $\delta_{1,2} < \delta < \delta_{0,2} - \epsilon$ и используя неравенства (0.10) – (0.11), получим противоречие с (0.6).

В случае $\eta \in \Sigma_3$, по лемме 0.1 $P_0(\eta^s) \geq 0$, $P_1(\eta^s) \geq 0$ и $P_2(\eta^s) \geq C > 0$ для достаточно больших s, и противоречие с (0.6) непосредственно следует. Так как $\Sigma_4 = \emptyset$, то теорема доказана.

Таким образом, поставленная задача для многочлена P вида (0.2) решена, если $\Sigma_4 = \Sigma_4(P) = \emptyset$. Следующий параграф будет посвящен решению задачи при $\Sigma_4 \neq \emptyset$.

§1. СЛУЧАЙ $\Sigma_4 \neq \emptyset$

Пусть P - многочлен вида (0.2), $\Sigma_4 = \Sigma_4(P) \neq \emptyset$, $\eta \in \Sigma_4$, $l_j = l_j(\eta)$ - кратность корня η многочлена P_j $(0 \leq j \leq 2)$, $\tau = \tau(\eta) \in \mathbb{R}^2$, $|\tau| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$, а число $\Delta(\eta)$ определяется формулой (0.3). Для $\eta \in \Sigma_4$, $x \in R^1$ и $t \geq 0$ обозначим

$$a_0(\eta) = \left|\frac{D_\tau^{l_1} P_1(\eta)}{D_\tau^{l_0} P_0(\eta)}\right|^{1/(l_0 - l_1)}, \quad f_0(t, x, \eta) = \left|P\left[t\left(\eta + t^{-\Delta(\eta)}x\tau\right)\right]\right|.$$

Так как множество Σ_4 конечно, то, для простоты обозначений, будем считать, что $\max\{a_0(\eta) : \eta \in \Sigma_4\} = 1$. В [10] доказана следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть многочлен P удовлетворяет условиям 1) - 4) леммы 0.1. Тогда $P \in I_2$ в том и только в том случае, когда для всех $\eta \in \Sigma_4$*

$$\min_{|x|\leq 1} f_0(t,x,\eta) \to \infty \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \tag{1.1}$$

При этом функция f_0 представляется в виде

$$f_0(t,x,\eta) = \sum_{i=0}^{M_0} t^{d_2 - i\Delta(\eta)} r_i^0(x,\eta), \tag{1.2}$$

где $M_0 = M_0(\eta) \in N$ и $\left\{r_i^{(1)}\right\}$ - многочлены, задаваемые формулами

$$r_i^0(x,\eta) = \left[D_\tau^{l_0+i} P_0(\eta)x^{l_0} + D_\tau^{l_1+i} P_1(\eta)x^{l_1} + D_\tau^i P_2(\eta)\right] x^i \quad (0 \leq i \leq M_0). \tag{1.3}$$

Таким образом, при $\Sigma_4 \neq \emptyset$ поведение многочлена P на бесконечности определяется поведением множества функций $\{f_0(t,x,\eta) : \eta \in \Sigma_4\}$.

Обозначим через I_1 множество функций (1.2), которые удовлетворяют условиям (1.1) для всех $\eta \in \Sigma_4$. Из леммы 1.1 следует, что при выполнении условий 1) – 4) леммы 0.1, $P \in I_2$ тогда и только тогда, когда $f_0(t,x,\eta) \in I_1$ для всех $\eta \in \Sigma_4$.

Приступим к исследованию поведения функций вида (1.2) – (1.3) на бесконечности, при этом положим

$$X_0(\eta) = X_0(r_0^0,\eta) = \left\{x : -1 \leq x \leq 1,\ r_0^0(x,\eta) = 0\right\}.$$

Следующая лемма также следует из результатов работы [10] (см. [10], лемма 3.4, теорема 4.1 и лемма 4.1).

Лемма 1.2. *Пусть $f_0 \in I_1$, тогда*

1) $r_0^0(x,\eta) \geq 0, \quad \forall \eta \in \Sigma_4, \forall x \in R^1$,

2) для каждой точки $\eta \in \Sigma_4$ множество $X_0(\eta)$ состоит из не более, чем двух элементов, при этом каждый корень $x_0 \in X_0(\eta)$ является двукратным,

3) для каждой пары точек (η, x_0), где $\eta \in \Sigma_4$ и $x_0 \in X_0(\eta)$, существует число $k_0(x_0) = k_0(x_0,\eta) \leq M_0$ такое, что $r_i^0(x_0) = 0$ при $0 \leq i < k_0(x_0)$ и $r_{k_0(x_0)}^0(x_0) > 0$, при это $d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta) > 0$,

4) $x_0 \in X_0(\eta)$ является по меньшей мере двукратным корнем для многочленов r_i^0 при $i = 0,1,\ldots k_0'(x_0)$, где $k_0'(x_0) = \left[\frac{1}{2}k_0(x_0)\right]$, если число $k(x_0)$ - нечетное, и $k_0'(x_0) = \frac{1}{2}k_0(x_0) - 1$, если $k(x_0)$ - четное ($[a]$ = - целая часть числа a).

Следующее предложение дополняет теорему 0.1 и дает ответ на поставленный вопрос, когда $X_0(\eta) = \emptyset$ для всех $\eta \in \Sigma_4$.

Теорема 1.1. *Пусть* $P \in I_2$, $\Sigma_4 \neq \emptyset$ *и* $X_0(\eta) = \emptyset$ *для всех* $\eta \in \Sigma_4$, *тогда* $ST(P) = d_2$.

Доказательство : Из теоремы 0.1 следует, что $ST(P) \leq d_2$. Докажем, что $ST(P) \geq d_2$. Пусть, наоборот, (0.6) справедливо на некоторой последовательности $\{\xi^s\}$. Поступая как при доказательстве теоремы 0.1, найдем точку $\eta \in \mathbb{R}^2$ и сходящуюся последовательность $\rho_s \to \delta > 0$, $s \to \infty$. Если $\eta \notin \Sigma_4$ или $\eta \in \Sigma_4$. но $\delta \neq \Delta(\eta)$, то придем к противоречию аналогично тому, как было при доказательстве теоремы 0.1. Пусть $\eta \in \Sigma_4$ и $\delta = \Delta(\eta)$. Представим $\{\xi^s\}$ $(s \in N)$ в виде

$$\xi^s = \varphi_s\left(\eta + \frac{\psi_s}{\varphi_s}\tau\right) = \varphi_s(\eta + \varphi_s^{-\rho_s}\tau) = \varphi_s(\eta + \varphi_s^{-\Delta(\eta)}x_s\tau), \quad x_s = \varphi_s^{\Delta(\eta)-\rho_s}.$$

Тогда из формулы Тейлора (см. (0.8)) имеем для всех $s \in N$ и $j = 0, 1, 2$

$$P_j(\xi^s) = \sum_{i \geq 0} \varphi_s^{d_j-(l_j+i)\Delta(\eta)} D_\tau^{l_j+i} P_j(\eta) x_s^{l_j+i}.$$

Так как $d_0 - l_0\Delta(\eta) = d_1 - l_1\Delta(\eta) = d_2$ по определению множества Σ_4, то отсюда и из (1.3) имеем для всех $s \in N$

$$P(\xi^s) = \varphi_s^{d_2}\left[r_0^0(x_s) + \sum_{i \geq 1} \varphi_s^{-i\Delta(\eta)} r_i^0(x_s)\right]. \tag{1.4}$$

Если для некоторой последовательности $x_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то для достаточно больших s

$$|r_0^0(x_s)| \geq \frac{1}{2}\left|D_\tau^{l_0} P_0(\eta)\right| x_s^{l_0}, \tag{1.5}$$

так как $l_0(\eta) > l_1(\eta)$ при $\eta \in \Sigma_4$ и $D_\tau^{l_0} P_0(\eta) \neq 0$. С другой стороны, для $i = 1, 2, \ldots, M_0$

$$\varphi_s^{-i\Delta(\eta)} r_i^0(x_s) = D_\tau^{l_0+i} P_0(\eta)\varphi_s^{-i\rho_s+l_0(\Delta(\eta)-\rho_s)} + D_\tau^{l_1+i} P_1(\eta)\varphi_s^{-i\rho_s+l_1(\Delta(\eta)-\rho_s)} +$$

$$+ D_\tau^i P_2(\eta)\varphi_s^{-i\rho_s} \to 0, \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Отсюда и из (1.4) – (1.5) следует, что $|P(\xi^s)| \geq C\varphi_s^{d_2}$ $(C > 0)$ для достаточно больших s. Это противоречит (0.6). Теорема 1.1 доказана.

Пример 1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^1$, d_0, d_1, d_2, l_0, l_1 - четные числа, и $d_0 > d_1 > d_2$, $d_0 > l_0$, $d_1 > l_1$, и пусть

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi) = (\xi_1^{d_0-l_0} + \xi_2^{d_0-l_0})(a\xi_1^{l_0} + \xi_2^{l_0}) + \xi_1^{d_1-l_1}(b\xi_1^{l_1} + \xi_2^{l_1}) + \xi_1^{d_2}.$$

Положим

$$D_1 = \{(a,b) : a > 0,\ b \in \mathbb{R}^1\}, \quad D_2 = \{(0,b) : b \geq 0\}, \quad D = D_1 \cup D_2.$$

По теореме 1.1 работы [10], $P \in I_2$ при $(a,b) \in D$ и $P \notin I_2$ в противном случае. Пусть $(a,b) \in D_1$, тогда $\Sigma(P_0) = \emptyset$ и $ST(P) = d_0$ по теореме 0.1. Пусть $(0,b) \in D_2$, тогда $\Sigma(P_0) = \{\pm\eta = (\pm 1, 0)\}$ и $\Sigma(P_1) = \emptyset$. В этом случае, $ST(P) = d_1$ по той же теореме. Если $a = b = 0$ и $\delta_{0,1} = (d_0 - d_1)/(l_0 - l_1) \neq (d_1 - d_2/l_1 = \delta_{1,2}$, то $\Sigma_4 = \emptyset$, $\pm\eta \in \Sigma(P_1)$, $\Sigma(P_2) = \emptyset$ и $ST(P) = d_2$ по теореме 0.1. Если $a = b = 0$ и $\delta_{0,1} = \delta_{1,2}$, то $\pm\eta \in \Sigma_4$, $r_0^{\pm}(x) = r(x, \pm\eta) = x^{l_0} + x^{l_1} + 1$ и в этом случае также $ST(P) = d_2$ по теореме 1.1.

Таким образом, поставленная задача решена и в том случае, когда $\Sigma_4 \neq \emptyset$, но $X_0(\eta) = \emptyset$ для всех $\eta \in \Sigma_4$.

Приступим к решению задачи, когда $X_0(\eta) \neq \emptyset$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma_4$. Обозначим через Σ_4' множество таких точек. Итак, предположим, что $\eta \in \Sigma_4'$, $x_0 \in X_0(\eta)$, и обозначим через $l_i^0(x_0, \eta)$ кратность корня x_0 многочлена r_i^0 $(0 \leq i \leq M_0)$. Пусть число $k_0(x_0) = k_0(x_0, \eta)$ определено по лемме 1.2, $\Delta_0(x_0, \eta) = \frac{1}{2} k_0(x_0)\Delta(\eta)$. Для $t \geq 0$ и $y \in \mathbb{R}^1$ положим

$$f_1(t,y) = f_1(t,y,x_0,\eta) = f_0(t, x_0 + t^{-\Delta_0(x_0,\eta)} y).$$

В [10] доказано следующее представление :

$$f_1(t,y) = f_1(t,y,x_0,\eta) = \sum_{i=0}^{M_1} t^{d_2 - 2\Delta_0(x_0,\eta) - i\Delta(\eta)} r_i^1(y), \tag{1.6}$$

где $\{r_i^0\}$ – многочлены, однозначно определяемые многочленами $\{r_j^0\}$ и точкой x_0, в частности,

$$r_0^1(y) = \frac{1}{2}\alpha_0^1 y^2 + \alpha_1^1 \theta y + \alpha_2^1, \tag{1.7}$$

где

$$\alpha_0^1 = \left(r_0^0(x_0)\right)'', \quad \alpha_1^1 = \left(r^0_{\left[\frac{k_0(x_0)}{2}\right]}(x_0)\right)', \quad \alpha_2^1 = r^0_{k_0(x_0)}(x_0),$$

$\theta = 1$, если $k_0(x_0)$ – четное число и $l^0_{\frac{k_0(x_0)}{2}}(x_0, \eta) = 1$, и $\theta = 0$ в противном случае. Пусть $x_0 \in X_0(\eta)$ и

$$X_1(x_0) = X_1(x_0, \eta) = \left\{y \in \mathbb{R}^1 : r_0^1(y) = r_0^1(y, x_0, \eta) = 0\right\}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $P \in I_2$, $\Sigma_4' \neq \emptyset$ и $X_1(x_0, \eta) = \emptyset$ для всех $\eta \in \Sigma_4'$ и $x_0 \in X_0(\eta)$. Тогда*

$$ST(P) = b_0 \equiv \min\left\{d_2 - 2\Delta_0(x_0,\eta) : x_0 \in X_0(\eta),\ \eta \in \Sigma_4'\right\}.$$

Доказательство : Пусть пара точек (x_0, η) реализует минимум в определении числа b_0, $y_0 \neq 0$ и $\xi^s = s\left[\eta + s^{-\Delta(\eta)}\left(x_0 + s^{-\Delta_0(x_0,\eta)}y\right)\tau\right]$, $(s \in N)$. Тогда

$$P(\xi^s) = f_0(s, x_0 + s^{-\Delta_0(x_0,\eta)}y_0) = f_1(s, y_0) = \sum_{i=0}^{M_1} s^{d_2 - 2\Delta(x_0,\eta) - i\Delta(\eta)} r_i^1(y_0).$$

Так как $\{\xi^s\}$ и $\{s\}$ имеют одинаковый порядок роста, то отсюда имеем для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \leq C_1 s^{d_2 - 2\Delta_0(x_0,\eta)} \leq C_2 |\xi^s|^{d_2 - 2\Delta_0(x_0,\eta)}, \quad C_1, C_2 \geq 0.$$

Следовательно, $ST(P) \leq b_0$. Докажем обратное неравенство. Пусть наоборот, для некоторой последовательности $\{\xi^s\}$

$$|\xi^s| \to \infty \quad \text{и} \quad P(\xi^s)|\xi^s|^{-b_0} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty \tag{1.8}$$

Поступая как при доказательстве теоремы 1.1, получим противоречие, если $\eta \notin \Sigma_4'$ или $\eta \in \Sigma_4'$ и $\bar{x} \notin X_0(\eta)$. Пусть $\eta \in \Sigma_4^1$ и $\bar{x} \in X_0(\eta)$, т.е. $r_0^0(\bar{x}) = 0$ и пусть $\{P(\xi^s)\}$ представимы в виде (1.4). Если $x_s = \bar{x}$ для бесконечного множества $\{s\}$, то можно считать, что $x_s = \bar{x}$ для всех $s \in N$. Тогда из (1.4) и леммы 1.2

$$P(\xi^s) = \varphi_s^{d_2 - \Delta_0(\bar{x},\eta)} r^0_{k_0(\bar{x})}(\bar{x}) + o\left(\varphi_s^{d_2 - \Delta_0(\bar{x},\eta)}\right) \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

где $r^0_{k_0(x)}(\bar{x}) \neq 0$, что противоречит (1.8).

Пусть теперь $x_s \neq \bar{x}$ $(s \in N)$ и обозначим $y_s = (x_s - \bar{x})\varphi_s^{\Delta_0(\bar{x},\eta)}$ $(s \in N)$. Из (1.4) и определения функций f_0 и f_1 имеем для всех $s \in N$

$$P(\xi^s) = f_0(\varphi_s, x_s, \eta) = f_1(\varphi_s, y_s, \bar{x}, \eta) = \sum_{i=0}^{M_1} \varphi_s^{d_2 - 2\Delta_0(\bar{x},\eta) - i\Delta(\eta)} r_i^1(y_s). \tag{1.9}$$

Если множество $\{|y_s|\}$ неограничено, то можно считать что $|y_s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Тогда по определению многочлена r_0^1 (см. (1.7)) $|r_0^1(y_s)| \geq \frac{1}{4}\alpha_0^1|y_s|^2$ для достаточно больших s. С другой стороны, учитывая формулы (3.8) - (3.10) из [10] поступая как при доказательстве теоремы 1.1, можно показать, что $\varphi_s^{-i\Delta(\eta)} r_i^1(y_s) \to 0$ при $s \to \infty$ $(i = 1, 2, \ldots M_1)$.

Таким образом, мы доказали, что для достаточно больших s $P(\xi^s) \geq C\varphi_s^{d_2 - 2\Delta_0(\bar{x},\eta)}$, $C > 0$, что противоречит (1.8). Если множество $\{|y_s|\}$ ограничено, то можно считать, что $y_s \to \bar{y}$ при $s \to \infty$ для некоторого $\bar{y} \in \mathbb{R}^1$. Так как $X_1(\bar{x}, \eta) = \emptyset$, то $r_0^1(\bar{y}) \neq 0$, и из (1.9) имеем для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq \frac{1}{2}|r_0^1(\bar{y})|\varphi_s^{d_2 - 2\Delta_0(\bar{x},\eta)}.$$

Это противоречит (1.8) и доказывает теорему 1.2.

Следующий пример иллюстрирует теорему 1.2.

Пример 2. Пусть

$$P(\xi) = (\xi_1^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4)\xi_2^4 - 2\xi_1^2\xi_2^4 + \xi_1^4.$$

По теореме 3.2 работы [10] $P \in I_2$ тогда и только тогда, когда $a > 0$. Здесь $\Sigma(P_0) = \{\pm\eta = (\pm 1, 0)\}$, и простой подсчет показывает, что $\delta_{0,1}(\pm\eta) = \delta_{1,2}(\pm\eta) \equiv \Delta(\pm\eta) = 1$. Так, что $\Sigma_4 = \Sigma(P_0)$, при этом

$$r_0^0(x, \pm\eta) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2, \quad r_1^0(x, \pm\eta) \equiv 0, \quad r_2^0(x, \pm\eta) \equiv r_3^0(x, \pm\eta) \equiv 0,$$

$$r_4^0(x, \pm\eta) = x^8, \quad X_0(\pm\eta) = \{\pm 1\}, \quad r_2^0(\pm 1, \pm\eta) = a > 0, \quad k_0(\pm 1) = 2.$$

По теореме 1.2, $ST(P) = d_2 - k_0(\pm 1)\Delta = 4 - 2 = 2$.

Таким образом, поставленная задача решена также и в случае, когда $\Sigma_4' \neq \emptyset$ и $X_1(x_0, \eta) = \emptyset$ для всех $\eta \in \Sigma_4'$, $x_0 \in X_0(\eta)$. Обозначим через $B_0 = B_0(P)$ множество всех пар (x_0, η), где $\eta \in \Sigma_4'$, $x_0 \in X_0(\eta)$, для которых $X_1(x_0, \eta) \neq \emptyset$.

Пусть $P \in I_2$, $B_0(P) \neq \emptyset$, $(x_0, \eta) \in B_0(P)$ и либо числа $k_0 = k_0(x_0, \eta)$ – нечетные, либо k_0 – четные и $l_{k_0/2}(x_0, \eta) \geq 2$. Легко убедиться в том, что в этом случае $(r_0^0(x_0))'' \geq 0$. с другой стороны, так как $r_{k_0}^0(x_0) > 0$ по лемме 1.2, то из определения многочленов $\{r_j^1\}$ (см. (1.7)) следует, что $X_1(x_0, \eta) = \emptyset$. Мы получили следующее следствие.

Следствие 1.1. Пусть $P \in I_2$, $B_0(P) \neq \emptyset$ и либо числа $k_0(x_0, \eta)$ – нечетные для всех $(x_0, \eta) \in B_0$, либо $l_{k_0(x_0,\eta)/2} \geq 2$ для тех пар $(x_0, \eta) \in B_0$, для которых $k_0(x_0, \eta)$ – четные. Тогда $ST(P) = b_0$, где число b_0 определяется как в теореме 1.2.

Остается рассмотреть случай, когда для некоторой пары $(x_0, \eta) \in B_0$ число $k_0(x_0, \eta)$ – четное и $l_{k_0(x_0,\eta)/2} = 1$. Обозначим через B_1 множество таких пар. Итак, рассмотрим случай $B_1 \neq \emptyset$. Пусть число $a_1 > 0$ выбрано так, что $X_1(x_0, \eta) \subset (-a_1, a_1)$ для всех $(x_0, \eta) \in B_1$ и пусть многочлен P удовлетворяет условиям 1) - 4) леммы 0.1. В работе [10] доказано, что $P \in I_2$ тогда и только тогда, когда $f_1 \in I_1$, т.е. когда для всех $(x_0, \eta) \in B_1$

$$\min_{|y| \leq a_1} f_1(t, y, x_0, \eta) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{1.10}$$

Обозначим через $l_i^1(y_0) = l_i^1(y_0, x_0, \eta)$ кратность корня $y_0 \in X_1(x_0, \eta)$ многочлена r_i^1 $(0 \leq i \leq M_1)$ и пусть для всех функций $f_1(t, y, x_0, \eta)$ число $k_1(y_0) = k_1(y_0, x_0, \eta)$ определяется так, как определялось число $k_0(x_0, \eta)$ для $f_0(t, x, \eta)$ (см. лемму 1.2). Для $t > 0$, $z \in R^1$ положим

$$f_2(t, z) = f_2(t, z, y_0, x_0, \eta) = f_1(t, y_0 + t^{-k_1(y_0)\Delta(\eta)}z).$$

В [10] показано, что при выполнении условий 1) – 4) леммы 0.1 включение $f_2 \in I_1$ справедливо (т.е. f_2 удовлетворяет (1.10)), тогда и только тогда, когда $f_1 \in I_1$. При этом, f_2 представляется в виде

$$f_2(t,z) = \sum_{i=0}^{M_2} t^{[d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta)] - k_1(y_0)\Delta(\eta) - i\Delta(\eta)} r_i^2(z), \tag{1.11}$$

где многочлены $\left\{r_i^2(z) = r_i^2(z, y_0, x_0, \eta)\right\}$ однозначно определяются многочленами $\{r_i^1\}$ и точкой y_0, В частности,

$$r_0^2(z) = \frac{1}{2}\alpha_0^2 z^2 + \theta\alpha_1^2 z + \alpha_2^2,$$

где

$$\alpha_0^2 = \left(r_0^1(y_0)\right)'' > 0, \quad \alpha_1^2 = \left(r_{\left[\frac{k_1(y_0)}{2}\right](y_0)}\right)', \quad \alpha_2^2 = \left(r_{k_1(y_0)}(y_0)\right)' > 0$$

$\theta = 1$, если $(x_0, \eta) \in B_1$ и $\theta = 0$ в противном случае.

Обозначим через $B_2 = B_2(P)$ множество троек (y_0, x_0, η) таких, что $(x_0, \eta) \in B_1$, $y_0 \in X_1(x_0, \eta)$. Для $(y_0, x_0, \eta) \in B_2$ положим

$$X_2(y_0, x_0, \eta) = \left\{z \in R^1 : r_0^2(z, y_0, x_0, \eta) = 0\right\}.$$

По определению этих множеств, если $B_2 \neq \emptyset$, то $B_1 \neq \emptyset$.

Теорема 1.3. *Пусть $P \in I_2$, $B_2(P) \neq \emptyset$ и $X_2(y_0, x_0, \eta) = \emptyset$ для всех $(y_0, x_0, \eta) \in B_2$, тогда*

$$ST(P) = b_1 = \min_{(y, x_0, \eta) \in B_2} \left\{d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta) - k_1(y_0)\Delta(\eta)\right\}.$$

Доказательство : Пусть тройка (y_0, x_0, η) реализует минимум в определении числа b_1. Для $z_0 \neq 0$ положим

$$\xi^s = s\left[\eta + s^{-\Delta(\eta)} z_s \tau\right], \quad z_s = x_0 + s^{-\frac{1}{2}k_0(x_0)\Delta(\eta)}\left(y_0 + s^{-\frac{1}{2}k_1(y_0)\Delta(\eta)} z_0\right)\tau,$$

где, как выше, $\eta \in \Sigma(P_0)$ однозначно определяет вектор $\tau = \tau(\eta)$. Тогда по определению функций f_0, f_1, f_2 имеем для всех $s \in N$

$$P(\xi^s) = f_0(s, z_s) = f_1\left(s, y_0 + s^{-\frac{1}{2}k_1(y_0)\Delta(\eta)} z_0\right) = f_2(s, z_0) = \sum_{i=0}^{M_2} s^{b_1 - i\Delta(\eta)} r_i^2(z_0).$$

Величины $|\xi^s|$ и s имеют одинаковый порядок роста при $s \to \infty$ и $\Delta(\eta) > 0$. Поэтому $|P(\xi^s)| \le C_1 s^{b_1} \le C_2 |\xi^s|^{b_1}$ $(C_1, C_2 \ge 0)$, т.е. $ST(P) \le b_1$.

Докажем обратное неравенство. Пусть, наоборот, для некоторой последовательности $\{\xi^s\}$

$$|\xi^s| \to \infty \quad \text{и} \quad P(\xi^s)|\xi^s|^{-b_1} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{1.12}$$

Рассуждая как при доказательстве теорем 1.1 и 1.2, получим

$$\xi^s = \varphi_s \left(\eta + \varphi_s^{-\frac{1}{2}k_0(x_0)\Delta(\eta)} y_s\right) \tau, \quad s \in N,$$

где $\eta \in \Sigma_4'$, $x_0 \in X_0(\eta)$, $y_s \to y_0$ при $s \to \infty$ для некоторого $y_0 \in X_1(x_0, \eta)$, а $\tau = \tau(\eta)$ определяется как выше. При этом,

$$P(\xi^s) = f_1(\varphi_s, y_s) = \sum_{i=0}^{M_1} \varphi_s^{d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta) - i\Delta(\eta)} r_i^1(y_s), \quad s \in N.$$

Если $y_s = y_0$ для бесконечного множества индексов $\{s\}$, то можно считать, что $y_s = y_0$ для всех $s \in N$. Тогда в силу того, что $f_1 \in I_1$ и из определения числа $k_1(y_0)$ имеем для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \ge \varphi_s^{[d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta)] - k_1(y_0)\Delta(\eta)} |r_{k_1(y_0)}^1(y_0)| - o\left(\varphi_s^{[d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta)] - k_1(y_0)\Delta(\eta)}\right).$$

Это противоречит (1.12), так как $r_{k_1}^1(y_0) \ne 0$ и последовательности $\{\xi^s\}$ и $\{\varphi_s\}$ имеют одинаковый порядок роста при $s \to \infty$. Таким образом, не умаляя общности, можно считать, что $y_s \ne y_0$ для всех $s \in N$. Пусть

$$\rho_s = -\frac{\ln|y_s - y_0|}{\ln \varphi_s}, \quad \text{т.е.} \quad y_s = y_0 + \varphi_s^{-\rho_s} sign(y_s - y_0), \quad s \in N.$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 1.1, легко показывается, что при выполнении условия (1.12) $\rho_s \to \frac{1}{2}k_1(y_0)\Delta(\eta)$ при $s \to \infty$. Обозначим

$$z_s = \varphi_s^{\frac{1}{2}k_1(y_0)\Delta(\eta) - \rho_s} sign(y_s - y_0), \quad s \in N.$$

По определению функции f_2 (см. формулу (1.11)) имеем

$$P(\xi^s) = f_2(\varphi_s, z_s) = \sum_{i=0}^{M_2} \varphi_s^{[d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta)] - k_1(y_0)\Delta(\eta) - i\Delta(\eta)} r_i^2(z_s) \tag{1.13}$$

для всех $s \in N$. Если множество $\{z_s\}$ неограничено, то можно считать, что $|z_s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Тогда $|r_0^2(z_s)| \ge \frac{1}{4}\alpha_0^1 z_s^2$ для достаточно больших s (по определению многочлена r_0^2). Для многочленов r_i^2 $(i = 1, \ldots, M_2)$ имеем

$\varphi_s^{-\Delta(\eta)} r_i^2(z_s) \to 0$ при $s \to \infty$, в силу того, что $\rho_s \to \frac{1}{2}k_1(y_0)\Delta(\eta)$ при $s \to \infty$. Таким образом, из (1.13) имеем при достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq \frac{1}{8}\alpha_0^1 z_s^2 \varphi_s^{[d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta)] - k_1(y_0)\Delta(\eta)},$$

что противоречит (1.12).

Если множество $\{z_s\}$ ограничено, то можно считать, что $z_s \to z_0$ при $s \to \infty$ для некоторого $z_0 \in R^1$. Так как по условию теоремы, $X_2(y_0, x_0, \eta) = \emptyset$ для всех троек $(y_0, x_0, \eta) \in B_2$, то $r_0^2(z_0) \neq 0$ и из (1.11) и (1.13) получаем для достаточно больших s

$$P(\xi^s) \geq \frac{1}{2}|r_0^2(z_0)|\varphi_s^{[d_2 - k_0(x_0)\Delta(\eta)] - k_1(y_0)\Delta(\eta)}.$$

Это противоречит (1.12), так как $\{\xi^s\}$ и $\{\varphi_s\}$ имеют одинаковый порядок роста при $s \to \infty$. Доказательство теоремы 1.3 завершено.

Таким образом, поставленная задача решена и в случае, когда $X_2(y_0, x_0, \eta) = \emptyset$ для всех $(y_0, x_0, \eta) \in B_2$. Если $X_2(y_0^0, x_0^0, \eta^0) \neq \emptyset$ для некоторой тройки $(y_0^0, x_0^0, \eta^0) \in B_2$, то обозначим множество таких троек через B_3, а через B_4 – множество четверок (z_0, y_0, x_0, η) таких, что $(y_0, x_0, \eta) \in B_3$ и $z_0 \in X_2(y_0, x_0, \eta)$. Поступая как выше, получим числа $\{k_2(z_0)\}$ и докажем, что

$$ST(P) = \min_{(z_0, y_0, x_0, \eta) \in B_3} \{d_2 - [k_0(x_0) + k_1(y_0) + k_2(z_0)]\,\Delta(\eta)\}.$$

Покажем, что этот процесс остановится после конечного числа шагов, при этом $ST(P) > 0$ для многочленов $P \in I_2$ вида (0.2). Действительно, так как $k_0(x_0), k_0(y_0), \ldots$ – натуральные числа и $\Delta(\eta) > 0$, то, предполагая обратное, получим, что на некотором шаге m для некоторых натуральных чисел $k_0, k_1, \ldots, k_m$:

$$b_{m-1} = d_2 - (k_0 + k_1 + \ldots + k_m)\Delta(\eta) \leq 0, \quad \eta \in \Sigma(P_0).$$

Поступая как при доказательстве теоремы 1.3, построим последовательность $\{\xi^s\}$ такую, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $|P(\xi^s)| \leq C|\xi^s|^{b_{m-1}}$ $(C \geq 0)$ для достаточно больших s, что противоречит условию $P \in I_2$.

Таким образом, построен алгоритм вычисления числа Зайденберга–Тарского для двумерных многочленов вида (0.2).

Abstract. The paper proves the existence of positive Seidenberg-Tarski number for two-dimensional polynomials with infinite growth at infinity and representable as sums of three homogeneous polynomials. An algorithm for calculation of the ST-number is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Seidenberg, "A new decision method for elementary algebra", Ann.Math., vol. 60, pp. 365 – 374, 1954.
2. A. Tarski, A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. Manuscript, Berkley, 1951.
3. L. Hörmander, "On the theory of general partial differential operators", Acta Math., vol. 94, pp. 161 – 248, 1955.
4. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. Е. А. Горин, "Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций", УМН, том 16, № 1, стр. 91 – 118, 1961.
6. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, Москва, 1996.
7. F. Treves, "Fundamental solutions of linear partial differential equations", Amer. J. Math., vol. 84, pp. 561 – 577, 1962.
8. Ю. В. Егоров, "О субэллиптических операторах", УМН, том 30, № 2, стр. 57 – 114, 1975.
9. М. И. Вишик, Г. Н. Эскин, "Нормально разрешимые задачи для эллиптических систем", Мат. Сб., том 74, № 3, стр. 326 – 356, 1967.
10. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О поведении неэллиптических многочленов $P(\xi_1, \xi_2)$ на бесконечности", Изв. НАН Армении. Математика, том 39, № 3, стр. 1 – 18, 2004.
11. H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior at infinity of polynomials of two variables", Topics in Analysis and its Applications, Kluwer Academic Press, NATO Science Publications, pp. 163 – 190, 2004.
12. O. R. Gabrielyan, H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Reducing the comparison of polynomials of two variables to a comparison of functions of one variable", Complex Analysis, Differential Equations and Related Topics, Proceedings of the ISAAC Conference on Analysis, pp. 41 - 51, Yerevan, 2004.
13. Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах", Доклады РАН, том 398, № 6, стр. 701 – 703, 2004.

Поступила 29 февраля 2004

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 6, 2004, 17–28

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ С НЕКОТОРЫМИ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

С. А. Акопян

Ереванский государственный университет
E-mail : sarhak@ysu.am

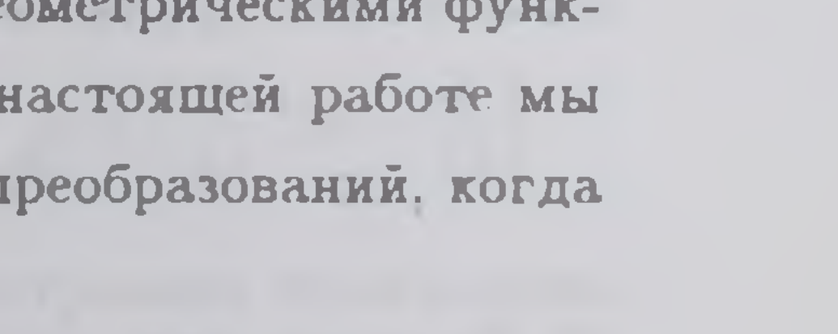
Резюме. В работе показывается, что обращающее ядро преобразования типа Ватсона-Джрбашяна с ядрами ${}_1F_0(z,\rho,\mu)$ и $\nu_\rho(z)$ является целой функцией $\Phi_{\rho,\mu}(z)$, введенной М.М. Джрбашяном и Р. А. Багияном в связи с новым интегральным представлением целой функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,\mu)$.

В работе [1] мы построили интегральные преобразования типа Ватсона-Джрбашяна с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями или обобщенными функциями типа Вольтерра. В настоящей работе мы показываем, что для специальных частных случаев этих преобразований, когда в качестве ядер берутся значения функций

$$ {}_1F_0(z,\rho,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)}{k!}z^k \quad \text{и} \quad \nu_\rho(z)=\int_0^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{\rho}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\tau+\frac{1}{2}\right)}z^\tau d\tau \qquad (\rho>1) $$

на определенных лучах комплексной плоскости, тогда обращающие ядра являются сужениями на определенные лучи целой функции $\Phi_{\rho,\mu}(z)$, введенной М. М. Джрбашяном и Р. А. Багияном [2] в их совместной работе по интегральным представлениям целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$ E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)}. $$



Функция $\Phi_{\rho,\mu}(z)$ определена посредством формулы

$$ \Phi_{\rho,\mu}(z)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}e^{\zeta^\rho-z\zeta}\zeta^{\rho(1-\mu)}d\zeta, \quad \rho>1, $$

где контур интегрирования $\gamma(\varepsilon,\beta)$ состоит из двух лучей

$$L^{(\pm)}(\varepsilon,\beta) = \{\zeta : |\zeta| \geq \varepsilon, \arg\zeta = \pm\beta\}$$

и дуги окружности

$$l(\varepsilon,\beta) = \{\zeta : |\zeta| = \varepsilon, |\arg\zeta| \leq \beta\} \quad \left(\varepsilon > 0, \quad \frac{\pi}{2\rho} < \beta \leq \frac{\pi}{\rho}\right).$$

Направление обхода контура $\gamma(\varepsilon,\beta)$ таково, что точка $\zeta = 0$ остается слева. Функция $\Phi_{\rho,\mu}(z)$ имеет порядок $\lambda = \frac{\rho}{\rho-1}$ и тип $\sigma = \left(1-\frac{1}{\rho}\right)\rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$ и разлагается в ряд Тейлора–Маклорена

$$\Phi_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}z^k.$$

Целая функция ${}_1F_0(z,\rho,\mu)$ того же порядка λ и типа σ, удовлетворяет соотношению

$$\Phi_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{e^{i\pi(\mu-\frac{1}{\rho})}\,{}_1F_0\left(ze^{i\frac{\pi}{\lambda}},\rho,\frac{1}{\rho}+1-\mu\right) - e^{-i\pi(\mu-\frac{1}{\rho})}\,{}_1F_0\left(ze^{-i\frac{\pi}{\lambda}},\rho,\frac{1}{\rho}+1-\mu\right)\right\}$$

и имеет интегральное представление

$${}_1F_0(z,\rho,\mu) = \rho\int_0^{\infty} e^{-t^\rho}t^{\mu\rho-1}e^{zt}dt \quad (\mu > 0).$$

1°. Выделим один частный случай из результатов, полученных в работе [1]. Рассмотрим в комплексной плоскости s $(s = \tau + it)$ мероморфные функции

$$\mathcal{K}(s,\rho,\mu,\alpha) = \lambda e^{i\lambda(s+\frac{1}{2}-\mu)(\pi-\alpha)}\Gamma\left(\lambda\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)\right)\Gamma\left(\mu-\frac{\lambda}{\rho}\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)\right),$$

где $\rho > 1$, $\frac{1}{\lambda} = 1-\frac{1}{\rho}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2\lambda}, 2\pi-\frac{\pi}{2\lambda}\right]$ и

$$\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta) = e^{i\vartheta s}\frac{\Gamma\left(1+\lambda\left(s-\frac{3}{2}+\mu\right)\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(s-\frac{3}{2}+\mu\right)\right)}, \quad \vartheta \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

В работе [1] рассмотрены функции

$$\mathcal{H}^{(+)}(s,\rho,\mu) \equiv \mathcal{H}\left(s,\rho,\mu,\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^{(-)}(s,\rho,\mu) \equiv \mathcal{H}\left(s,\rho,\mu,-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (1)$$

и доказаны утверждения :

а) при $\frac{1}{\rho} < \mu < 1$ и $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2\lambda}, 2\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right]$ имеем

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{K}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu,\alpha\right)\right| < +\infty, \tag{2}$$

б) при $\mu > \frac{1}{\rho}$ имеем

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{H}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu\right)\right| < +\infty. \tag{3}$$

Обозначая $\mathcal{K}^{(+)}(s,\rho,\mu) \equiv \mathcal{K}\left(s,\rho,\mu,\frac{\pi}{2\lambda}\right)$ и $\mathcal{K}^{(-)}(s,\rho,\mu) \equiv \mathcal{K}\left(s,\rho,\mu,2\pi-\frac{\pi}{2\lambda}\right)$, имеем на всей комплексной плоскости s тождество :

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\mathcal{K}^{(+)}(s,\rho,\mu)\mathcal{H}^{(-)}(1-s,\rho,\mu)+e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\mathcal{K}^{(-)}(s,\rho,\mu)\mathcal{H}^{(+)}(1-s,\rho,\mu) \equiv 2\pi\lambda. \tag{4}$$

По теореме Меллина ([3], [4]) существуют пределы в среднем :

$$\frac{k(x,\rho,\mu,\alpha)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\ \underset{a\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{K}(s,\rho,\mu,\alpha)}{1-s} x^{-s}\,ds \in \bar{L}^2(\bar{0},\infty),$$

$$\frac{h^{(\pm)}(x,\rho,\mu)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\ \underset{a\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{H}^{(\pm)}(s,\rho,\mu)}{1-s} x^{-s}\,ds \in L^2(0,\infty).$$

По лемме 3 работы [1] для функции $k(x,\rho,\mu,\alpha)$ имеем явное представление :

$$k(x,\rho,\mu,\alpha) = \int_0^x {}_1F_0\left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right) t^{\frac{1}{2}-\mu}dt, \quad \frac{1}{\rho} < \mu < 1, \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2\lambda}, 2\pi-\frac{\pi}{2\lambda}\right].$$

Тождество (4) и формулы (2), (3) дают возможность построения преобразования Ватсона–Джрбашяна с ядрами $k^{(+)}(x,\rho,\mu) \equiv k\left(x,\rho,\mu,\frac{\pi}{2\lambda}\right)$, $k^{(-)}(x,\rho,\mu) \equiv k\left(x,\rho,\mu,2\pi-\frac{\pi}{2\lambda}\right)$ и $h^{(\pm)}(x,\rho,\mu)$.

Теперь установим связь между функциями $h^{(\pm)}(x,\rho,\mu)$ и $\Phi_{\rho,\mu}(z)$. Нетрудно убедиться, что при условии $\mu > \frac{1}{\rho}$ функция $\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta)$ $(|\vartheta| \le \frac{\pi}{2})$ не имеет полюсов на прямой $\mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулой

$$|\Gamma(\tau+it)| \sim \sqrt{2\pi}|t|^{\tau-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}, \quad t\to\pm\infty$$

(см. [5]), получим

$$\left|\mathcal{H}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu,\vartheta\right)\right| \sim \rho^{\frac{1}{2}+\lambda(\mu-1)}e^{-\vartheta t-\frac{\pi}{2}|t|}, \quad t\to\pm\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{H}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu,\vartheta\right)\right| < +\infty, \quad |\vartheta| \le \frac{\pi}{2},$$

и по теореме Меллина существует предел в среднем :

$$\frac{h(x,\rho,\mu,\vartheta)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds\in L^2(0,\infty). \tag{5}$$

Лемма 1. *Если* $\rho>1$, $\mu>\frac{1}{\rho}$ *и* $|\vartheta|\le\frac{\pi}{2}$, *то*

$$h(x,\rho,\mu,\vartheta)=\frac{1}{\lambda}e^{i\vartheta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}-\mu\right)}\int_0^x\Phi_{\rho,\mu}\left(\left(e^{-i\vartheta}t\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)t^{\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}}dt. \tag{6}$$

Доказательство : При $\mu>\frac{1}{\rho}$ мероморфная функция

$$\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)=e^{i\vartheta(1-s)}\frac{\Gamma\left(1+\lambda\left(\mu-\frac{1}{2}-s\right)\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(\mu-\frac{1}{2}-s\right)\right)}$$

не имеет полюсов на прямой $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$, а полюсы, лежащие на полуплоскости $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$, простые и совпадают с точками $s_k=\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{1}{2}$ $(k=0,1,2,\ldots)$, причем

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=s_k}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}&=\frac{(-1)^{k+1}}{\pi\lambda}e^{-i\vartheta\left(\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{s}{2}\right)}\times\\ &\times\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!\left(\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{s}{2}},\ k=0,1,2,\ldots\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $R_n=\mu-\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\left(n+\frac{3}{2}\right)$ $(n=0,1,2,\ldots)$, а L_n обозначает контур области D_n, являющейся пересечением круга $|s|<R_n$ и полуплоскости $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$. Функция $\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}$ голоморфна всюду в D_n, кроме точек $s_k=\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{1}{2}$ $(k=0,1,\ldots,n)$, где имеет простые полюсы с вычетами (7). Поэтому, для $x\in(0,+\infty)$ по теореме Коши, имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}ds&=-\frac{e^{-i\vartheta\left(\mu-\frac{s}{2}\right)}}{\pi\lambda}\times\\ \times\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}&\frac{\left(e^{-i\vartheta}x\right)^{\frac{k+1}{\lambda}}}{\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{1}{2}}x^{\mu-\frac{s}{2}}=-\frac{e^{-i\vartheta\left(\mu-\frac{s}{2}\right)}}{\pi\lambda x}\times\\ \times\int_0^x\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}\left(e^{-i\vartheta}t\right)^{\frac{k+1}{\lambda}}\right\}&t^{\mu-\frac{s}{2}}dt.\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\frac{1}{2}+iR_n^*$ – точки пересечения окружности $|s|=R_n$ с прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$. Очевидно, что $R_n^*=\sqrt{R_n^2-\frac{1}{4}}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}R_n^*=+\infty$, а C_{R_n} – дуга окружности $\{|s|=R_n, \operatorname{Re} s\geq\frac{1}{2}\}$. Напишем формулу (8) в развернутом виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}ds=$$

$$=\frac{e^{-i\vartheta(\mu-\frac{s}{2})}}{\pi\lambda x}\int_0^x\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}(e^{-i\vartheta})^{\frac{k+1}{\lambda}}\right\}t^{\mu-\frac{s}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_n}}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}ds. \tag{9}$$

Согласно формуле дополнения для гамма-функции, имеем равенство

$$\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)=e^{i\vartheta(1-s)}\frac{\sin\pi\left(\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(\mu-\frac{1}{2}-s\right)\right)}{\sin\pi\lambda\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)}\frac{\Gamma\left(1-\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)\right)}{\Gamma\left(\lambda\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)\right)}.$$

Согласно лемме 8 работы [6] при $n\geq n_0$ на дуге C_{R_n} имеем

$$\left|\frac{\sin\pi\left(\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(\mu-\frac{1}{2}-s\right)\right)}{\sin\pi\lambda\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)}\right|\leq\begin{cases}2\sqrt{2}e^{-\pi R_n|\sin\varphi|}, & \frac{\pi}{4}\leq|\varphi|\leq\frac{\pi}{2},\\ e^{\frac{\pi}{\rho}\lambda R_n|\sin\varphi|}, & |\varphi|\leq\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Пользуясь также обобщенной формулой Стирлинга [5]

$$\ln\left|\Gamma(a+Re^{i\varphi})\right|=\left(R\cos\varphi+a-\frac{1}{2}\right)\ln R-R(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)+O(1),\quad R\to+\infty, \tag{10}$$

где $\delta>0$ и $a\in(-\infty,\infty)$ – произвольные числа, а величина $O(1)$ равномерно ограничена для всех значений $|\varphi|\leq\pi-\delta$, приходим к следующей оценке :

$$|\mathcal{H}(1-R_ne^{i\varphi},\rho,\mu,\vartheta)|\leq\begin{cases}C_1R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}, & \frac{\pi}{4}\leq|\varphi|\leq\frac{\pi}{2},\\ C_2R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e^{\frac{7}{2}+\frac{\pi\lambda}{\rho}}}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}, & 0\leq|\varphi|\leq\frac{\pi}{4},\end{cases}\qquad n\geq n_0.$$

С помощью этой оценки легко доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_{R_n}}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}ds=0\quad(x>0).$$

Переходя к пределу в (9) при $n\to\infty$, приходим к равенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*}\frac{\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{e^{-i\vartheta\left(\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}\right)}}{\lambda x}\int_0^x\Phi_{\rho,\mu}\left((e^{-i\vartheta}t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)t^{\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}}dt,$$

которое остается в силе, когда числа R_n^* в его левой части заменяются числами a_n, удовлетворяющимися условиям $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ и $\lim a_n = +\infty$.

При $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ из (6) следует, согласно (1) и (5), что

$$h^{(\pm)}(x,\rho,\mu) = \frac{1}{\lambda} e^{\mp i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho})} \int_0^x \Phi_{\rho,\mu}\left((e^{\mp i\frac{\pi}{2}}t)^{\frac{1}{\lambda}}\right) t^{\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}}\,dt.$$

Следовательно, теорема 1 работы [1] для настоящего специального случая имеет следующую формулировку.

Теорема 1. *Пусть параметры ρ и μ удовлетворяют условиям $\rho > 1$, $\frac{1}{\rho} < \mu < 1$ и $\lambda = \frac{\rho}{\rho-1}$. Тогда*

а) для любой функции $g(y) \in L^2(0,\infty)$ функции

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k^{(\pm)}(xy,\rho,\mu)}{y} g(y)dy$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ и $f^{(\pm)}(x) \in L^2(0,\infty)$. При этом, если

$$f_a^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_0^a {}_1F_0\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right)(xy)^{\frac{1}{2}-\mu} g(y)dy,$$

то $f^{(\pm)}(x) = \mathrm{l.i.m}_{a\to\infty} f_a^{(\pm)}(x)$. Формула обращения

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(+)}(xy,\rho,\mu)}{x} f^{(-)}(x)dx + \right.$$
$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(-)}(xy,\rho,\mu)}{x} f^{(+)}(x)dx \right\}$$

также имеет место почти всюду на $(0,\infty)$, при этом, если

$$g_a(y) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi\lambda}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\rho} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}}\right) f^{(-)}(x)dx + \right.$$
$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}}\right) f^{(+)}(x)dx \right\},$$

то $g(y) = \mathrm{l.i.m}_{a\to\infty} g_a(y)$. Справедливы также равенства,

$$\int_0^\infty \left|f^{(\pm)}(x)\right|^2 dx \le \frac{M_1}{2\pi\lambda} \int_0^\infty |g(y)|^2 dy,$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^2 dy \le \frac{M_2}{\pi\lambda} \left\{ \int_0^\infty \left|f^{(+)}(x)\right|^2 dx + \int_0^\infty \left|f^{(-)}(x)\right|^2 dx \right\},$$

где

$$M_1 = \sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{K}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu\right)\right|^2, \quad M_2 = \sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{H}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu\right)\right|^2$$

б) Обратно, для любой функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$ *функции*

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy,\rho,\mu)}{x} f(x)dx$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ *и* $g^{(\pm)}(y) \in L^2(0,\infty)$. *При этом, если*

$$g_a^{(\pm)}(y) = \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2})}}{\lambda\sqrt{2\pi\lambda}}\int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}}\right)(xy)^{\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}} f(x)dx,$$

то $g^{(\pm)}(y) = \text{l.i.m.}_{a\to\infty} g_a^{(\pm)}(y)$. *Формула обращения также имеет место почти всюду на* $(0,\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k^{(-)}(xy,\rho,\mu)}{y} g^{(+)}(y)dy + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k^{(+)}(xy,\rho,\mu)}{y} g^{(-)}(y)dy\right\},$$

при этом, если

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\int_0^a {}_1F_0\left(e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right) g^{(+)}(y)dy + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\int_0^a {}_1F_0\left(e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right) g^{(-)}(y)dy\right\},$$

то $f(x) = \text{l.i.m.}_{a\to\infty} f_a(x)$. *Справедливы неравенства,*

$$\int_0^\infty \left|g^{(\pm)}(y)\right|^2 dy \le \frac{M_2}{2\pi\lambda}\int_0^\infty |f(x)|^2 dx,$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \le \frac{M_1}{\pi\lambda}\left\{\int_0^\infty \left|g^{(+)}(y)\right|^2 dy + \int_0^\infty \left|g^{(-)}(y)\right|^2 dy\right\}.$$

2^0. Перейдем теперь к рассмотрению интегральных преобразований с ядрами $\nu_\rho(z)$.

Рассмотрим следующие функции комплексного переменного $s = \tau + it$:

$$\mathcal{K}(s,\vartheta) = e^{-i\vartheta s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\mu+\frac{s-1}{\rho}\right)}, \quad \rho>1, \quad |\vartheta|\le\frac{\pi}{2\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda}=1-\frac{1}{\rho},$$

$$\mathcal{H}^{(+)}(s,\vartheta)=\begin{cases} -2\pi i e^{-i\vartheta s}\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma(1-s)}, & \operatorname{Im} s>0, \quad \vartheta\le-\frac{\pi}{2\lambda}, \\ 0, & \operatorname{Im} s<0, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}^{(-)}(s,\vartheta)=\begin{cases} 0, & \operatorname{Im} s>0, \\ 2\pi i e^{-i\vartheta s}\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma(1-s)}, & \operatorname{Im} s<0, \quad \vartheta\ge\frac{\pi}{2\lambda}. \end{cases}$$

Выбирая $\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho}$, на прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$, получим

$$\left|\mathcal{K}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right|^2 = e^{2\vartheta t}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{t}{\rho}\right)}\right|^2 = e^{2\vartheta t}\frac{\cosh\frac{\pi t}{\rho}}{\cosh\pi t} < 2e^{2\vartheta t-\frac{\pi}{\lambda}|t|},$$

$$\left|\mathcal{H}^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right|^2 = 4\pi^2 e^{2\vartheta t}\frac{\cosh\pi t}{\cosh\frac{\pi t}{\rho}} \le 4\pi^2 e^{2\vartheta t+\frac{\pi}{\lambda}t}, \quad t>0, \quad \vartheta\le-\frac{\pi}{2\lambda},$$

$$\left|\mathcal{H}^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right|^2 = 4\pi^2 e^{2\vartheta t}\frac{\cosh\pi t}{\cosh\frac{\pi t}{\rho}} \le 4\pi^2 e^{2\vartheta t-\frac{\pi}{\lambda}t}, \quad t<0, \quad \vartheta\ge\frac{\pi}{2\lambda}.$$

Откуда следует

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\mathcal{K}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right| \le \sqrt{2}, \quad |\vartheta|\le\frac{\pi}{2\lambda},$$

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\mathcal{H}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right| \le 2\pi.$$

Обозначая

$$\mathcal{K}^{(\pm)}(s)=\mathcal{K}\left(s,\pm\frac{\pi}{2\lambda}\right), \quad \mathcal{H}^{(\pm)}(s)=\mathcal{H}^{(\pm)}\left(s,\mp\frac{\pi}{2\lambda}\right),$$

легко проверить, что на прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$

$$e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\mathcal{K}^{(+)}(s)\mathcal{H}^{(-)}(1-s)+e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\mathcal{K}^{(-)}(s)\mathcal{H}^{(+)}(1-s)=2\pi.$$

Лемма 2. *Если* $\rho>1$, $\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho}$ *и* $\frac{1}{\lambda}=1-\frac{1}{\rho}$, то

$$\text{а)} \quad \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{K}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{1}{x}\int_0^x\Phi_{\rho,\mu}(te^{i\vartheta})dt, \quad |\vartheta|\le\frac{\pi}{2\lambda},$$

$$\text{б)} \quad \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{H}^{(+)}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{1}{x}\int_0^x\nu_\rho\left(te^{i\vartheta}\right)\left(te^{i\vartheta}\right)^{-\frac{1}{2}}dt, \quad \vartheta\le-\frac{\pi}{2\lambda}, \tag{11}$$

в) $$\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{H}^{(-)}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{1}{x}\int_0^x\nu_\rho\left(te^{i\vartheta}\right)\left(te^{i\vartheta}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}dt,\quad \vartheta\geq\frac{\pi}{2\lambda}. \tag{12}$$

Доказательство : утверждение а) доказывается аналогично лемме 1. Для доказательства б), рассмотрим область

$$D_a^{(-)}=\left\{s:|s|<a,\ -\frac{\pi}{2}<\arg s<0\right\}$$

и обозначим ее границу через L_a. Функция

$$h^{(+)}(s)\equiv\frac{\Gamma\left(\frac{s}{\rho}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{i\vartheta\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{s+\frac{1}{2}}x^{s-1},\quad x>0,\quad \vartheta\leq-\frac{\pi}{2\lambda},$$

голоморфна в $D_a^{(-)}$, поэтому, по теореме Коши имеем

$$\int_{L_a}h^{(+)}(s)ds=\int_a^0h(\tau)d\tau+\int_{C_a^{(-)}}h(s)ds+\int_0^{-ia}h(s)ds=0, \tag{13}$$

где $C_a^{(-)}$ - дуга окружности $s=ae^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq 0$. Пользуясь формулой (10), на $C_a^{(-)}$ получим оценку

$$\left|h^{(+)}(s)\right|=O\left(e^{a\left(\frac{\varphi}{\lambda}-\vartheta\right)\sin\varphi}\left(\frac{xe^{\frac{1}{\lambda}}}{a^{\frac{1}{\lambda}}\rho^{\frac{1}{\rho}}}\right)^{a\sin\varphi}\right),\quad x>0.$$

Учитывая, что $0\leq-\frac{\pi}{2\lambda}-\vartheta\leq\frac{\varphi}{\lambda}-\vartheta\leq-\vartheta\ \left(\vartheta\leq-\frac{\pi}{2\lambda}\right)$ и выбирая a так, чтобы $xe^{1/\lambda}a^{-1/\lambda}\rho^{-1/\rho}<e^{-1}$, получаем, что

$$\left|\int_{C_a^{(-)}}h^{(+)}(s)ds\right|\leq C_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-a\cos\varphi}d\varphi<\frac{C_2}{a}\longrightarrow 0\quad\text{при}\quad a\to+\infty. \tag{14}$$

Написав (13) в виде

$$\int_0^a\frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{\rho}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\tau+\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{i\vartheta\left(\tau-\frac{1}{2}\right)}}{\tau+\frac{1}{2}}x^{\tau-\frac{1}{2}}d\tau-\int_{C_a^{(-)}}h^{(+)}(s)ds+$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s-1}{\rho}\right)}{\Gamma(1-s)}\frac{e^{-i\vartheta s}}{1-s}x^{-s}ds=0,$$

или в виде

$$\frac{1}{x}\int_0^x\left\{\int_0^a\frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{\rho}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\tau+\frac{1}{2}\right)}e^{i\vartheta\left(\tau-\frac{1}{2}\right)}t^{\tau-\frac{1}{2}}d\tau\right\}dt-$$
$$-\int_{C_a^{(-)}}h^{(+)}(s)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{H}^{(+)}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=0.$$

и переходя к пределу при $a \to +\infty$, в силу (14) получаем (11).

Утверждение в) устанавливается аналогично, при рассмотрении

$$D_a^{(+)} \equiv \left\{ s : |s| < a,\ 0 < \arg s < \frac{\pi}{2} \right\}$$

вместо $D_a^{(-)}$ и интегрировании функции

$$h^{(-)}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \frac{e^{i\vartheta\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{s + \frac{1}{2}} x^{s-\frac{1}{2}}, \quad \vartheta \geq \frac{\pi}{2\lambda},$$

вдоль границы $D_a^{(+)}$. В этом случае на части $C_a^{(+)} = \{s : s = ae^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ границы области $D_a^{(+)}$ имеем

$$|h^{(-)}(s)| = O\left(e^{a \sin\varphi\left(\frac{\varphi}{\lambda} - \vartheta\right)} \left(\frac{xe^{\frac{1}{\lambda}}}{a^{\frac{1}{\lambda}} \rho^{\frac{1}{\rho}}} \right)^{a\cos\varphi} \right) \quad \left(-\vartheta \leq \frac{\varphi}{\lambda} - \vartheta \leq \frac{\pi}{2\lambda} - \vartheta \leq 0 \right).$$

В частности, из (11) и (12) получаем равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{H}^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \nu_\rho\left(te^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}\right) \left(te^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}\right)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{x} \int_0^x \nu_\rho\left(te^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}\right) t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Следующая теорема является частным случаем теоремы 3 работы [1].

Теорема 2. *Пусть* $\rho > 1$, $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$ *и* $\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho}$, *тогда*

а) для любой функции $g(y) \in L^2(0,\infty)$, *функции*

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k^{(\pm)}(xy)}{y} g(y) dy$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ *и* $f^{(\pm)}(x) \in L^2(0,\infty)$. *Если*

$$f_a^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}} xy\right) g(y) dy,$$

то $f^{(\pm)}(x) = \operatorname{l.i.m}_{a\to\infty} f_a^{(\pm)}(x)$. *Почти всюду на* $(0,\infty)$ *имеет место формула обращения*

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(+)}(xy)}{x} f^{(-)}(x) dx + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(-)}(xy)}{x} f^{(+)}(x) dx \right\},$$

и $\mathrm{l.i.m.}_{a\to\infty} g_a(y) = g(y)$, *где*

$$g_a(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \int_0^a \nu_\rho(xye^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})(xy)^{-\frac{1}{2}} f^{(-)}(x)dx + \right.$$
$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \int_0^a \nu_\rho\left(xye^{i\frac{\pi}{2\lambda}}\right)(xy)^{-\frac{1}{2}} f^{(+)}(x)dx \right\}.$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^\infty |f^{(\pm)}(x)|^2 dx \le \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |g(y)|^2 dy,$$
$$\int_0^\infty |g(y)|^2 dy \le 4\pi \left\{ \int_0^\infty |f^{(+)}(x)|^2 dx + \int_0^\infty |f^{(-)}(x)|^2 dx \right\}.$$

б) Обратно, для любой функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$ *функции*

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy)}{x} f(x)dx$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ *и* $g^{(\pm)}(y) \in L^2(0,\infty)$. *Если*

$$g_a^{(\pm)}(y) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \nu_\rho\left(e^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}} xy\right)(xy)^{-\frac{1}{2}} f(x)dx,$$

то $\mathrm{l.i.m.}_{a\to\infty} g_a^{(\pm)}(y) = g^{(\pm)}(y)$. *Почти всюду на* $(0,\infty)$ *имеет место формула обращения :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k^{(-)}(xy)}{y} g^{(+)}(y)dy + \right.$$
$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k^{(+)}(xy)}{y} g^{(-)}(y)dy \right\},$$

и $\mathrm{l.i.m.}_{a\to\infty} f_a(x) = f(x)$, *где*

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}} xy\right) g^{(+)}(y)dy + \right.$$
$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{i\frac{\pi}{2\lambda}} xy\right) g^{(-)}(y)dy \right\}.$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^\infty \left|g^{(\pm)}(y)\right|^2 dy \le 2\pi \int_0^\infty |f(x)|^2 dx,$$
$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \le \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \left|g^{(+)}(y)\right|^2 dy + \int_0^\infty \left|g^{(-)}(y)\right|^2 dy \right\}.$$

Abstract. It is shown that the inversion kernel for the Watson-Djrbashian's type integral transforms with the kernels ${}_1F_0(z,\rho,\mu)$ and $\nu_\rho(z)$ is the entire function $\Phi_{\rho,\mu}(z)$ introduced by M.M.Djrbashian and R. A. Baghyan in their studies of the integral representations of the function $E_\rho(z,\mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Акопян, "Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра", Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки, том 15, № 1, стр. 13 - 36, 1962.
2. М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян, "Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных функциями типа Миттаг-Леффлера", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 10, № 6, стр. 483 - 508, 1975.
3. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Москва–Ленинград, 1948.
4. М. М. Джрбашян, Интегральные представления и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
5. Е. Титчмарш, Теория функций, Наука, Москва, 1980.
6. М. М. Джрбашян, "Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций", Изв. АН СССР, сер. мат., том 19, стр. 133 - 190, 1955.

Поступила 11 октября 2004

Известия НАН Армении. Математика, **39**. № 6, 2004, 29–38

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Т. Н. Арутюнян и В. В. Нерсесян

Ереванский государственный университет

Резюме. В работах Трубовица были доказаны теоремы единственности в обратной задаче Штурма-Лиувилля, где в качестве спектральных данных вместе со спектром брались некоторые "новые" последовательности $\{l_n\}$, удобные при исследовании "четного случая". Мы доказываем аналогичные теоремы единственности для тех двух случаев краевых условий, которые остались нерассмотренными в работах Трубовица.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Обозначим через $L(q,\alpha,\beta)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$-y''+q(x)y=\mu y,\quad x\in(0,\pi),\quad \mu\in\mathbb{C}, \tag{1.1}$$

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\quad \alpha\in(0,\pi], \tag{1.2}$$

$$y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0,\quad \beta\in[0,\pi), \tag{1.3}$$

где q – действительная функция из $L^2[0,\pi]$ (будем писать $q\in L^2_R[0,\pi]$). Известно, (см. [1], [2]), что собственные значения $\mu_n=\mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n=0,1,2,\ldots$ этой задачи действительные, простые и образуют последовательность, стремящуюся к $+\infty$ при $n\to\infty$. Через $h_n(x)=h_n(x,q,\alpha,\beta)$ будем обозначать нормированные собственные функции, сответствующие μ_n, $n=0,1,2,\ldots$.

Обратные задачи для $L(q,\alpha,\beta)$ ставились и решались в различных постановках (см., например, [3] – [12]). В работе [6], вместе с собственными значениями $\mu_n=\mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n=0,1,2,\ldots$, в качестве спектральных данных рассмотрены

величины[1]

$$l_n(q,\alpha,\beta) \equiv \log\left[(-1)^n \frac{h_n(\pi,q,\alpha,\beta)}{h_n(0,q,\alpha,\beta)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots, \quad \sin\alpha \neq 0, \quad \sin\beta \neq 0$$

и доказана теорема единственности :

Теорема 1 [6]. *Если* $\mu_n(q_1,\alpha_1,\beta_1) = \mu_n(q_2,\alpha_2,\beta_2)$ *и* $l_n(q_1,\alpha_1,\beta_1) = l_n(q_2,\alpha_2,\beta_2)$ *для всех* $n=0,1,2,\ldots$, *то* $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$ *и* $q_1(x)=q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

В [5] рассмотрена "задача Дирихле" $L(q,\pi,0)$ (т.е. случай $\sin\alpha=0$, $\sin\beta=0$), и вместе с собственными значениями $\mu_n(q,\pi,0)$, в качестве спектральных данных рассмотрены величины

$$l_n(q,\pi,0) = k_n(q) \equiv \log\left[(-1)^{n+1}\frac{h'_n(\pi,q)}{h'_n(0,q)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots$$

Доказана теорема единственности, которую можно сформулировать так :

Теорема 2. *Если* $\mu_n(q_1)=\mu_n(q_2)$ *и* $k_n(q_1)=k_n(q_2)$ *для всех* $n=0,1,2,\ldots$, *то* $q_1(x)=q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Целью данной работы является доказательство аналогичных теорем единственности в двух оставшихся нерассмотренными случаях : $\sin\alpha=0$ и $\sin\beta\neq 0$, т.е.задачи $L(q,\pi,\beta)$, и $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta=0$, т.е. задачи $L(q,\alpha,0)$. Здесь вопрос в том, что брать в качестве дополнительных к спектру $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ спектральных данных. Положим

$$l_n(q,\pi,\beta) = l_n(q,\beta) \equiv \log\left[(-1)^n\frac{h_n(\pi,q,\beta)}{h'_n(0,q,\beta)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{1.4}$$

Теорема 3. *Если* $\mu_n(q_1,\pi,\beta_1) = \mu_n(q_2,\pi,\beta_2)$, $l_n(q_1,\beta_1) = l_n(q_2,\beta_2)$ *при* $n=0,1,2,\ldots$, *то* $\beta_1=\beta_2$ *и* $q_1(x)=q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Рассмотрим также задачу $L(q,\alpha,0)$, $\sin\alpha\neq 0$. Положим

$$l_n(q,\alpha,0) = l_n(q,\alpha) \equiv \log\left[(-1)^{n+1}\frac{h'_n(\pi,q,\alpha)}{h_n(0,q,\alpha)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots$$

Теорема 4. *Если* $\mu_n(q_1,\alpha_1,0) = \mu_n(q_2,\alpha_2,0)$ *и* $l_n(q_1,\alpha_1) = l_n(q_2,\alpha_2)$ *при* $n=0,1,2,\ldots$, *то* $\alpha_1=\alpha_2$ *и* $q_1(x)=q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Обозначим через $y=\varphi(x,\mu)$ решение задачи Коши

$$-y''+q(x)y=\mu y,$$

[1] В работах [5] – [8] задача $L(q,\alpha,\beta)$ рассматривается на интервале $[0,1]$, тогда как мы рассматриваем задачу на $[0,\pi]$.

$$y(0,\mu)=0, \quad y'(0,\mu)=1.$$

Собственные значения $\mu_n(q,\beta)$ задачи $L(q,\pi,\beta)$ суть нули функции

$$D(\mu)=\frac{\varphi(\pi,\mu)\cos\beta+\varphi'(\pi,\mu)\sin\beta}{\sin\beta}=\varphi(\pi,\mu)\cot\beta+\varphi'(\pi,\mu), \qquad (1.5)$$

а функции $\varphi(x,\mu_n(q,\beta))=\varphi(x,\mu_n)$ есть собственные функции, соответствующие собственным значениям $\mu_n=\mu_n(q,\beta)$, $n=0,1,2,....$ Величины

$$a_n=a_n(q,\pi,\beta)=\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n)dx$$

называются *нормировочными постоянными*. Известную теорему единственности В.А. Марченко ([3], стр. 375) в случае задачи $L(q,\pi,\beta)$ можно сформулировать так :

Если $\mu_n(q_1,\pi,\beta_1)=\mu_n(q_2,\pi,\beta_2)$ *и* $a_n(q_1,\pi,\beta_1)=a_n(q_2,\pi,\beta_2)$ *для всех* $n=0,1,2,...,$ *то* $\beta_1=\beta_2$ *и* $q_1(x)=q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Теорема 3 и теорема Марченко эквивалентны, ибо согласно нижеследующей лемме 2.1

$$a_n=(-1)^{n+1}\exp[l_n]\dot{D}(\mu_n(\beta)),$$

где величины $\dot{D}(\mu_n)$ однозначно определяются только множеством собственных значений $\mu_0,\mu_1,\mu_2,....$

Приводимое нами доказательство теоремы 3 основано на контурном интегрировании (см. также [5], [6]) и не использует операторы преобразования, на которых основано доказательство теоремы Марченко. Поэтому приведенное доказательство можно рассматривать также как альтернативное доказательство теоремы Марченко в указанном случае и указанной формулировке.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3 И 4

Для собственных значений $\mu_n(q,\beta)$ известна асимптотика ([3], [4]) :

$$\mu_n(q,\beta)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{\pi}\cot\beta+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt+r_n(\beta), \qquad (2.1)$$

где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n^2(\beta)<\infty$. Кроме того, аналогично тому, как это делается в [3], можно доказать, что функцию $D(\mu)$ можно представить в виде произведения

$$D(\mu)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n(q,\beta)-\mu}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}. \qquad (2.2)$$

В дальнейшем, производную по μ будем обозначать точкой, т.е. $\dot{D}(\mu)=\frac{\partial D(\mu)}{\partial\mu}$ и $\dot{\varphi}(x,\mu)=\frac{\partial\varphi(x,\mu)}{\partial\mu}$, и т.д.,.

Лемма 2.1. *Имеет место равенство :*

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n(\beta))\,dx = -\varphi(\pi,\mu_n(\beta))\dot{D}(\mu_n). \tag{2.3}$$

Доказательство : Запишем тождество

$$-\varphi''(x,\mu)+q(x)\varphi(x,\mu)\equiv\mu\varphi(x,\mu) \tag{2.4}$$

и продифференцировав его по μ, получим

$$-\dot{\varphi}''(x,\mu)+q(x)\dot{\varphi}(x,\mu)\equiv\varphi(x,\mu)+\mu\dot{\varphi}(x,\mu). \tag{2.5}$$

Далее, умножив (2.4) на $\dot{\varphi}(x,\mu)$, а (2.5) на $\varphi(x,\mu)$ и, отняв полученные тождества, получим[2]

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi'\dot{\varphi}-\dot{\varphi}'\varphi\right]\equiv\varphi^2(x,\mu). \tag{2.6}$$

Поскольку функция $\varphi(x,\mu)$ удовлетворяет начальным условиям $\varphi(0,\mu)\equiv 0$ и $\varphi'(0,\mu)\equiv 1$ при всех $\mu\in\mathbb{C}$, то

$$\dot{\varphi}(0,\mu)\equiv 0,\quad \dot{\varphi}'(0,\mu)\equiv 0. \tag{2.7}$$

Проинтегрировав тождество (2.6) по x от 0 до π и приняв во внимание (2.7), получим

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu)\,dx=\varphi'(\pi,\mu)\dot{\varphi}(\pi,\mu)-\dot{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu). \tag{2.8}$$

Поскольку собственные значения μ_n есть корни уравнения

$$D(\mu)\equiv\varphi(\pi,\mu)\cot\beta+\varphi'(\pi,\mu)=0, \tag{2.9}$$

то при $\mu=\mu_n(\beta)$[3]

$$\frac{\varphi'(\pi,\mu_n)}{\varphi(\pi,\mu_n)}=-\cot\beta,$$

следовательно, из (2.8) при $\mu=\mu_n$ имеем

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n)\,dx=\varphi(\pi,\mu_n)\left[\frac{\varphi'(\pi,\mu_n)}{\varphi(\pi,\mu_n)}\dot{\varphi}(\pi,\mu_n)-\dot{\varphi}'(\pi,\mu_n)\right]=$$

$$=-\varphi(\pi,\mu_n)[\dot{\varphi}(\pi,\mu_n)\cot\beta+\dot{\varphi}'(\pi,\mu_n)]=-\varphi(\pi,\mu_n)\dot{D}(\mu_n).$$

---

[2] Замену порядка дифференцирования по x и по μ можно обосновать так, как это делается в [5].

[3] Заметим, что $\varphi(\pi,\mu_n)\neq 0$ при $\sin\beta\neq 0$.

Лемма 2.1 доказана.

Из представления (2.2) нетрудно получить, что

$$\dot{D}(\mu_n) = -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \prod_{\substack{m\neq n\\ m=0}}^{\infty} \frac{\mu_m - \mu_n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Поскольку $\mu_0 < \mu_1 < \cdots$, то легко заметить, что $sgn\ \dot{D}(\mu_n) = (-1)^{n+1}$. Отсюда и из (2.3) следует, что

$$sgn[\varphi(\pi, \mu_n)] = (-1)^n. \tag{2.10}$$

Обозначим через $||f||$ L^2-норму функции $f \in L^2[0,\pi]$, т.е. $||f||^2 = \int_0^\pi |f(x)|^2\, dx$. Поскольку

$$h_n(x) = \frac{\varphi(x,\mu_n)}{||\varphi(\cdot,\mu_n)||}, \quad h_n'(x) = \frac{\varphi'(x,\mu_n)}{||\varphi(\cdot,\mu_n)||},$$

то

$$\frac{h_n(\pi)}{h_n'(0)} = \frac{\varphi(\pi,\mu_n)}{\varphi'(0,\mu_n)} = \frac{\varphi(\pi,\mu_n)}{1},$$

Поэтому, $(-1)^n \frac{h_n(\pi)}{h_n'(0)} = (-1)^n \varphi(\pi,\mu_n)$. Из (2.10) следует, что определение (1.4) корректно.

Лемма 2.2. ***Имеет место равенство***

$$\varphi(\pi,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\pi,\mu_n) \prod_{m\neq n}^{\infty} \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m - \mu_n}, \quad \mu \in \mathbb{C}. \tag{2.11}$$

Доказательство : Рассмотрим следующий контурный интеграл

$$I_N(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=N^2} \frac{\varphi(\pi,\lambda) D(\mu)}{(\lambda-\mu) D(\lambda)}\, d\lambda,$$

где подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$ ($|\mu_n| < N^2$) и в точке μ. Согласно теореме о вычетах (см., например, [13]), этот интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах, лежащих внутри контура $|\lambda| = N^2$. Учитывая (2.2), получаем

$$\operatorname{res} \frac{\varphi(\pi,\lambda) D(\mu)}{(\lambda-\mu) D(\lambda)}\bigg|_{\lambda=\mu_k} = -\varphi(\pi,\mu_k) \prod_{m\neq k}^{\infty} \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m - \mu_k},$$

$$\operatorname{res} \frac{\varphi(\pi,\lambda) D(\mu)}{(\lambda-\mu) D(\lambda)}\bigg|_{\lambda=\mu} = \varphi(\pi,\mu).$$

Таким образом,

$$I_N(\mu) = \varphi(\pi,\mu) - \sum_{|\mu_k|<N^2} \varphi(\pi,\mu_k) \prod_{m\neq k}^{\infty} \frac{\mu_m - \mu}{\mu_m - \mu_k}.$$

Нетрудно доказать, что подынтегральная функция на контурах $|\lambda| = N^2$, при достаточно больших N не имеет особенностей. Следующие леммы доказываются аналогично леммам 3.1 и E.2 из работы [5].

Лемма 2.3. *Если* $z \in \mathbb{C}$ *и* $\left|z - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{4}$ *для каждого целого* n, *то*

$$\exp^{|Im\, z\pi|} < 4|\cos z\pi|. \tag{2.12}$$

Лемма 2.4. *На контурах* $|\lambda| = N^2$ *имеет место оценка*

$$D(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{2.13}$$

Возвращаясь к доказательству леммы 2.2, заметим, что справедлива оценка ([5]) :

$$\varphi(\pi, \lambda) = O\left(\frac{\exp^{|Im\sqrt{\lambda}|\pi}}{|\sqrt{\lambda}|}\right). \tag{2.14}$$

Таким образом, при $|\lambda| = N^2$ из (2.12), (2.13) и (2.14) получаем

$$\left|\frac{\varphi(\pi, \lambda)D(\mu)}{(\lambda - \mu)D(\lambda)}\right| \leq \frac{M|D(\mu)|}{(N^2 - |\mu|)N},$$

где M – некоторая постоянная. Так как μ фиксировано, получаем, что $I_N(\mu) \to 0$ при $N \to \infty$. Лемма 2.2 доказана.

Обозначим через $\psi(x, \mu, \beta)$ решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями

$$\psi(\pi, \mu, \beta) = \sin\beta, \tag{2.15}$$

$$\psi'(\pi, \mu, \beta) = -\cos\beta. \tag{2.16}$$

Очевидно, что $\psi(x, \mu_n(\beta), \beta)$ есть собственные функции задачи $L(q, \pi, \beta)$. Поскольку собственные значения задачи $L(q, \pi, \beta)$ простые, то существуют постоянные c_n такие что

$$\varphi(x, \mu_n(\beta)) = c_n\psi(x, \mu_n(\beta), \beta).$$

Отсюда получаем, согласно (2.15) и (2.16)

$$\varphi(\pi, \mu_n) = c_n \sin\beta, \quad \varphi'(\pi, \mu_n) = -c_n\cos\beta, \quad c_n = \frac{\varphi(\pi, \mu_n)}{\sin\beta},$$

т.е.

$$\psi(x, \mu_n(\beta), \beta) = \frac{1}{c_n}\varphi(x, \mu_n(\beta)) = \frac{\sin\beta}{\varphi(\pi, \mu_n)}\varphi(x, \mu_n) \tag{2.17}$$

Обозначим также через $y_3(x, \mu)$ и $y_4(x, \mu)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$y_3(\pi, \mu) = 1, \quad y_3'(\pi, \mu) = 0,$$

$$y_4(\pi,\mu)=0,\quad y_4'(\pi,\mu)=1.$$

Для этих решений нетрудно получить асимптотические представления (см., например, [5], [12])

$$y_3(x,\mu)=\cos\sqrt{\mu}(\pi-x)+O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|(\pi-x))}{|\sqrt{\mu}|}\right),$$

$$y_4(x,\mu)=\frac{\sin\sqrt{\mu}(\pi-x)}{\sqrt{\mu}}+O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|(\pi-x))}{|\mu|}\right).$$

Решение $y=\psi(x,\mu,\beta)$ может быть представлено в виде линейной комбинации линейно независимых решений y_3 и y_4 :

$$\psi(x,\mu,\beta)=y_3(x,\mu)\sin\beta-y_4(x,\mu)\cos\beta. \tag{2.18}$$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Заметим, что из условий теоремы следует, что

$$\mu_n(q_1,\beta_1)=\mu_n(q_2,\beta_2)\equiv\mu_n, \tag{2.19}$$

и

$$l_n(q_1,\beta_1)=l_n(q_2,\beta_2)=\log[(-1)^n\varphi(\pi,\mu_n,q_{1,2})], \tag{2.20}$$

т.е. имеем

$$\varphi(\pi,\mu_n,q_1)=\varphi(\pi,\mu_n,q_2). \tag{2.21}$$

Следовательно, из равенства (2.11) следует, что

$$\varphi(\pi,\mu,q_1)\equiv\varphi(\pi,\mu,q_2) \tag{2.22}$$

при всех $\mu\in\mathbb{C}$. Далее, для решения $\varphi(x,\mu)$ известна асимптотическая формула [5] :

$$\varphi(\pi,\mu,q)=\frac{\sin\sqrt{\mu}\pi}{\sqrt{\mu}}-\frac{\cos\sqrt{\mu}\pi}{2\mu}\int_0^\pi q(t)\,dt+o\left(\frac{1}{\mu}\right)\quad\text{при}\quad\mu\to+\infty. \tag{2.23}$$

Из (2.22) и (2.23) следует, что на последовательности $\lambda_n=n^2$ имеет место равенство

$$\varphi(\pi,\lambda_n,q_1)=\frac{\sin\pi n}{n}-\frac{\cos\pi n}{2n^2}\int_0^\pi q_1(t)\,dt+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\pi n}{n}-\frac{\cos\pi n}{2n^2}\int_0^\pi q_2(t)\,dt+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\varphi(\pi,\lambda_n,q_2)$$

т.е.

$$\frac{(-1)^n}{2n^2}\left[\int_0^\pi q_2(t)\,dt - \int_0^\pi q_1(t)\,dt\right] = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

или,

$$\int_0^\pi q_2(t)\,dt - \int_0^\pi q_1(t)\,dt = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку левая часть не зависит от n, то получаем

$$\int_0^\pi q_2(t)\,dt = \int_0^\pi q_1(t)\,dt. \tag{2.24}$$

Используя (2.1), (2.19) и (2.24), получаем равенство

$$\frac{2}{\pi}(\cot\beta_1 - \cot\beta_2) = r_n(\beta_2) - r_n(\beta_1) = o(1).$$

Откуда следует равенство $\cot\beta_1 = \cot\beta_2$, т.е. $\beta_1 = \beta_2$. Рассмотрим теперь контурный интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=n^2} \frac{1}{D(\mu)}[\varphi(x,\mu,q_1) - \varphi(x,\mu,q_2)][\psi(x,\mu,q_1) - \psi(x,\mu,q_2)]\,d\mu. \tag{2.25}$$

Известна оценка (см. [5])

$$\varphi(x,\mu,q) = \frac{\sin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}} + O\left(\frac{\exp|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}x|}{|\mu|}\right). \tag{2.26}$$

Откуда следует

$$\varphi(x,\mu,q_1) - \varphi(x,\mu,q_2) = O\left(\frac{\exp|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|x}{|\mu|}\right).$$

Из (2.18) и оценок для y_3 и y_4 следует, что

$$\psi(x,\mu,q_1) - \psi(x,\mu,q_2) = O\left(\frac{\exp|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|(\pi - x)}{|\sqrt{\mu}|}\right).$$

Учитывая оценку (2.12) и неравенство (2.13), получаем, что для достаточно больших n подынтегральное выражение в (2.25) при $|\mu| = n^2$ есть величина порядка $O\left(\frac{1}{|\mu||\sqrt{\mu}|}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и поэтому

$$|J_n| = \frac{1}{2\pi} O\left(\frac{1}{n^3}\right) 2\pi n^2 = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, J_n равен сумме вычетов в простых полюсах подынтегральной функции (т.е. в нулях $D(\mu)$, которые есть μ_n). Учитывая (2.3) и (2.17), получаем

$$J_n = \sum_{|\mu_n|<n^2} \frac{1}{\dot{D}(\mu_n)}[\varphi(x,\mu_n,q_1) - \varphi(x,\mu_n,q_2)][\psi(x,\mu_n,q_1) - \psi(x,\mu_n,q_2)] =$$

$$= - \sum_{|\mu_n|<n^2} \frac{\sin\beta}{\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n)\,dx}[\varphi(x,\mu_n,q_1) - \varphi(x,\mu_n,q_2)]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Поскольку все члены неотрицательны, то отсюда следует, что

$$\varphi(x,\mu_n,q_1) \equiv \varphi(x,\mu_n,q_2) = \varphi(x,\mu_n)$$

при всех n. Если это тождество справедливо хотя бы при одном значении $n = n_0$, то из уравнения (1.1) следует, что

$$[q_1(x) - q_2(x)]\varphi(x,\mu_{n_0}) = 0,$$

почти всюду на $[0,\pi]$, и поскольку $\varphi(x,\mu_{n_0})$ есть собственная функция (т.е. отличная от нуля почти всюду), то $q_1(x) \equiv q_2(x)$ почти всюду. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 4 заметим, что собственные значения задач $L(q,\alpha,\beta)$ и $L(q^*,\pi-\beta,\pi-\alpha)$ (где $q^*(x) = q(\pi-x)$) совпадают (см., например, [6]) и собственные функции этих задач связаны соотношением

$$h_n(x,q^*,\pi-\beta,\pi-\alpha) = h_n(\pi-x,q,\alpha,\beta), \quad n = 0,1,\ldots$$

Отсюда получаем, что $\mu_n(q,\pi,\beta) = \mu_n(q^*,\pi-\beta,0)$ и

$$l_n(q,\pi,\beta) = \log\left[(-1)^n \frac{h_n(\pi,q,\pi,\beta)}{h_n'(0,q,\pi,\beta)}\right] = \log\left[(-1)^n\left(-\frac{h_n(0,q^*,\pi-\beta,0)}{h_n'(\pi,q^*,\pi-\beta,0)}\right)\right] =$$

$$= -\log\left[(-1)^{n+1}\frac{h_n'(\pi,q^*,\pi-\beta,0)}{h_n(0,q^*,\pi-\beta,0)}\right] = -l_n(q^*,\pi-\beta,0).$$

Таким образом, доказательство теоремы 4, по существу, следует из доказательства теоремы 3.

Abstract. In the uniqueness theorems for the Sturm–Liouville inverse problem proved by Trubowitz along with the spectrum as the spectral data some "new" sequences $\{l_n\}$ were used convinient for investigation of the "even case". We prove similar uniqueness theorems for the two cases of boundary conditions not considered by Trubowitz.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Наукова Думка, Киев, 1977.
2. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Наука, Москва, 1988.
3. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I", Труды ММО, том I, стр. 327 – 420, 1952.
4. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1 – 63, 1964.
5. J. Pöschel, E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Acad. Press, 1987.
6. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem, I", Com. Pure and Appl. Math., vol. 36, pp. 767 – 783, 1983.
7. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem, II", Com. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 1 – 11, 1984.
8. B. E. I. Dahlberg, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem, III", Com. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 255 – 267, 1984.
9. J. R. McLaughlin, "On uniqueness theorems for second order inverse eigenvalue problems", J. of Math. Anal. and Appl., vol. 118, pp. 38 – 41, 1986.
10. J. R. McLaughlin, W. Rudnell, "A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem", J. Math. Phys., vol. 28, no. 7, pp. 1471 – 1472, 1987.
11. J. R. McLaughlin, "Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data", SIAM Review, vol. 28, no. 1, pp. 53 – 72, 1986.
12. N. Lewinson "The inverse Sturm-Liouville Problem", Matematisk Tidsskrift, B, pp. 25 – 30, 1949.
13. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, I. Москва, 1963

Поступила 7 Мая 2004

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 6, 2004, 39–55

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ЛИПШИЦЕВЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

А. Р. Хачатрян

Ереванский государственный университет
E-mail : xfile@ freenet.am

Резюме. В статье рассматриваются непрерывные и липшицевые свойства многозначных отображений, заданных с помощью как гладких, так и негладких ограничений типа равенств. Приводится достаточное условие, при выполнении которого пересечение липшицева и выпуклового отображений будет липшицевым.

МОТИВАЦИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. В последнее время параметризованные экстремальные задачи и многозначные отображения все чаще становятся объектом исследования математиков. Это связано с необходимостью изучения таких свойств экстремальных задач, как стабильность, устойчивость и т.п. Кроме того, параметризованные экстремальные задачи возникают при применении методов штрафных функций и параметризации целевой функции, связанных с погружением исходной задачи в класс задач, аппроксимирующих исходную. И наконец, параметризованные задачи возникают и в самой теории экстремальных задач теории двойственности выпуклого и невыпуклого программирования и теории игр [4, 7, 9], и т. п.

Различные классы многозначных отображений и параметризованных экстремальных задач были рассмотрены в работах Б. Н. Пшеничного [9], Е. С. Половинкина [8], Р. Т. Рокфеллара [22], Ж-П. Обена [7], Ф. Кларка [5] и других.

Почти во всех этих работах многозначные отображения задаются с ограничениями типа неравенств, и, следоательно, имеют выпуклые образы. В результате этих исследований методом выпуклого анализа были введены различные характеристики многозначных отображений : селекторы, производные, и т. п. [16, 21]. Однако класс этих многозначных отображений либо вообще не охватывает негладкие ограничения типа равенств, либо многозначные отображения с такими ограничениями задаются линейными или гладкими функциями. Из-за сложности учета негладких ограничений типа равенств возникает необходимость применения теорем о неявных функциях (см. [10], [11]).

В настоящей работе показано, что метод шатров [2, 15] не только является общим методом получения необходимых условий экстремума в задачах с ограничениями, но и удобным аппаратом для изучения непрерывности многозначных отображений с негладкими ограничениями типа равенств. В статье при помощи метода шатров исследуются непрерывные свойства некоторых обратных отображений, которые задаюся гладкими или негладкими ограничениями типа равенства. Рассмотрен и вопрос существования гладких селекций для таких отображений.

Различные аспекты липшицевых свойств многозначных отображений рассматриваются в работах [5, 7, 9, 17, 20, 22]. В работе [9] показано, что выпуклое многозначное отображение с компактным множеством значений является липшицевым. В [22] доказано, что липшицевым будет и так называемое полиэдральное многозначное отображение. При довольно естественных предположениях в [17] показано, что мнозначное отображение вида $a(x) = \{y \in F : f(x, y) \leq 0\}$ является липшицевым. Однако такие многозначные отображения охватывают лишь узкие классы параметризованых экстремальных задач.

В настоящей статье приводится достаточное условие, при котором пересечение липшицева отображения с выпуклым отображением будет липшицевым. Рассматриваются также параметризованные задачи линейного программирования и показывается, с использованием их специфики, что маргинальное отображение в этих задачах является липшицевым сверху отображением.

2. Приведем основные обозначения и определения. Пусть X – метрическое про-

странство, а Y – нормированное пространство. Обозначим через $B_\epsilon(x)$ замкнутый шар с радиусом ϵ и центром в точке x.

Многозначным отображением (м.о.) a из X в Y называется отображение, которое каждому $x \in X$ сопоставляет множество $a(x) \subseteq Y$, т.е. $a : X \to 2^Y$. Селекция для a определяется как однозначное отображение $y(\cdot) : X \to Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Пусть $M \subset R^n$ – выпуклое множество и $x_0 \in M$ – произвольная точка. Тогда множество $K = \{\nu : \nu = \lambda(x - x_0),\ \lambda > 0,\ x \in M\}$ называется *конусом касательных направлений* для M в точке x_0. Множество $K^* = \{\nu^* : \langle \nu^*, u \rangle \geq 0,\ u \in K\}$, где $\langle \nu^*, u \rangle$ – скалярное произведение векторов u и $\nu^* \in R^n$, называется *сопряженным конусом* к конусу K.

Обозначим через $f'(x_0, \overline{x})$ производную в точке x_0 по направлению $\overline{x}$, а через $\partial f(x_0)$ – субдифференциал выпуклой, непрерывной функции f в точке x_0. Обозначим через $Lin\, M$ линейную оболочку множества M. Множество

$$gr\,(a) = \{(x, y) : y \in a(x)\}$$

называется *графиком многозначного отображения* a. Обратное отображение a^{-1} определяется как м.о. из Y в X по правилу $x \in a^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in a(x)$.

Выпуклый конус $K_M(x)$ называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности нуля $U(0)$, такое, что $x + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M$, если $\overline{x} \subset K_M(x) \cap U(0)$ и $\frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0$, при $\overline{x} \to 0$ (см. [2]).

Шатер называется гладким, липшицевым или непрерывным, если соответствующими свойствами обладает отображение r.

Напомним некоторые свойства из [4].

Определение 1. Скажем, что м.о. a является H-полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\epsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x_0) \subset a(x) + B_\epsilon(0)$, $\forall x \in U(x_0)$.

Определение 2. Скажем, что м.о. a является H-полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\epsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \subset a(x_0) + B_\epsilon(0)$, $\forall x \in U(x_0)$.

М.о. a называется непрерывным в точке x_0, если оно одновременно H-п.н.св. и H-п.н.сн. в этой точке.

Определение 3. М.о. a называется K-полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любой $y_0 \in a(x_0)$ и любой последовательности $\{x_j\}$ такой, что $x_j \to x_0$ при $j \to \infty$, найдутся $y_j \in a(x_j)$ такие, что $y_j \to y_0$ при $j \to \infty$.

Определение 4. М.о. a называется K-полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x_0 \in X$, если из того, что $x_j \to x_0$, $\nu_j \in a(x_j)$, $\nu_j \to \nu_0$ следует, что $\nu_0 \in a(x_0)$. М.о. a называется K-непрерывным в точке $x_0 \in X$ если оно одновременно K-п.н.св. и K-п.н.сн.в этой точке.

Определение 5. [7] Скажем, что м.о. a удовлетворяет условию Липшица на множестве $E \subseteq X$, если существует число $L > 0$ такое, что $a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, $\forall x_1, x_2 \in E$.

§ 1. О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ниже приводятся некоторые достаточные условия, при выполнении которых K-непрерывные многозначные отображения с выпуклыми значениями будут H-непрерывными. Результат теоремы 1.1 существенным образом используется в параграфе 3 при исследовании липшицевых свойств маргинальных отображений в линейных параметризованных задачах оптимизации.

Теорема 1.1. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$ есть K-непрерывное в $x_0 \in X$ отображение с выпуклыми замкнутыми значениями. Пусть, далее,* $\operatorname{int} a(x_0) \neq \emptyset$ *и множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда отображение a будет H-непрерывным в x_0.*

Доказательство : Пусть $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$ – произвольная фиксированная точка. Так как отображение a – K-п.н.сн., и, следовательно, (см. теорему 5.9, работы [22], стр. 155) существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $y_0 \in a(x)$, $\forall x \in U(x_0)$. Покажем, что отображение a ограничено в некоторой окрестности x_0. Допустим, что это не так. Тогда существуют некоторые последовательности $x_j \to x_0$ и $y_j \in a(x_j)$ такие, что $\|y_j\| \to \infty$. Положим $h_j = \frac{y_j - y_0}{\|y_j - y_0\|}$. Можно считать, что $h_j \to h_0 \neq 0$. Тогда

$$y_0 + \alpha h_0 \in a(x_0), \quad \forall \alpha \geq 0. \tag{1.1}$$

Действительно, если это не так, то существуют числа $\alpha_0 > 0$ и $\epsilon > 0$ такие, что $d(y_0 + \alpha_0 h_0, a(x_0)) \geq \epsilon$. Отсюда $d(y_0 + \alpha_0 h_j, a(x_j)) \geq \epsilon/2$ $(j \geq j_0)$ в силу полунепрерывности снизу функции $g(h, x) = d(y_0 + \alpha_0 h_0, a(x))$ по (h, x) (так как a полунепрерывна сверху). Полагая $t_j = \frac{\alpha_0}{\|y_j - y_0\|}$ и заметив, что $y_0 + \alpha_0 h_j = t_j y_j + (1 - t_j) y_0$ $(0 < t_j < 1)$ для достаточно больших j, получим

$$\frac{\epsilon}{2} \leq d(y_0 + \alpha_0 h_j, a(x_j)) \leq d(y_j, a(x_j)) + (1 - t_j) d(y_0, a(x_j)) = 0, \qquad (1.2)$$

противоречие, которое доказывает (1.1). Однако, из (1.1) следует также, что множество $a(x_0)$ – неограничено. Таким образом, отображение a ограничено в некоторой окрестности точки x_0. Кроме того, поскольку a является K-непрерывным в x_0, то из теоремы 2.1 из [4] следует, что a – H-непрерывно. Теорема доказана. Рассмотрим пример, имеющий важное значение в линейных параметризованных задачах математического программирования.

Пример. Пусть $a(x) = \{y \in R^m : \langle f_i(x), y\rangle \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$, где $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ – вектор-функции, непрерывные в точке $x_0 \in X$. Пусть система строгих неравенств $\langle f_i(x_0), y\rangle > -b_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ разрешима и множество $a(x_0)$ есть ограниченный выпуклый многогранник. Тогда из примера 5.10, данного в [22] (стр. 156) следует, что a является K-непрерывным отображением в x_0. Следовательно, согласно теореме 1.1, отображение a является H-непрерывным в x_0.

Расмотрим вопрос непрерывности маргинального отображения

$$a_0(x) = \{y \in a(x) : f(x, y) = \inf_{u \in a(x)} f(x, u)\}.$$

В [7] показано, что если f непрерывна и многозначное отображение a непрерывно и имеет компактное множество значений, то многозначное маргинальное отображение a_0 полунепрерывно сверху. Однако, в выпуклых задачах существуют условия, более слабые, чем непрерывность отображения a, при выполнении которых маргинальное отображение a_0 снова будет полунепрерывным сверху.

Теорема 1.2. *Пусть a – многозначное отображение с выпуклым замкнутым множеством значений и отображение $K^*(x, \nu)$ является K-п.н.св. в точках (x_0, ν)*

($\nu \in a(x_0)$). *Если функция f непрерывна по x и выпукла по y и отображение a_0 определено в некоторой окрестности x_0, то отображение a_0 является K-п.н.св. в точке x_0.*

Доказательство : Пусть $x_j \to x_0$, $y_j \in a_0(x_j)$, $y_j \to y_0$ $(j \to \infty)$. Нужно показать, что $y_0 \in a_0(x_0)$. Поскольку y_j – точка минимума выпуклой функции $f(x_j, \cdot)$ на замкнутом, выпуклом множестве $a(x_j)$, то она удовлетворяет необходимым и достаточным условиям экстремума в y_j :

$$0 \in \partial f_y(x_j, y_j) - K^*(x_j, y_j). \tag{1.3}$$

Следовательно, существуют некоторые последовательности $u_j^* \in \partial f_y(x_j, y_j)$ и $\nu_j^* \in K^*(x_j, y_j)$ такие, что

$$u_j^* - \nu_j^* = 0. \tag{1.4}$$

Так как отображение $\partial f_y(x, y)$ является H-п.н.св. в (x_0, y_0) (см лемму 4.2 из [4], стр. 210), и множество $\partial f_y(x_0, y_0)$ является выпуклым компактом, то можно предположить, что $u_j^* \to u_0^*$. Так как, м.о. $K^*(x, y)$ – полунепрерывно сверху в (x_0, y_0), то $\nu_j^* \to \nu_0^* \in K^*(x_0, y_0)$ согласно (1.4). Теперь, из (1.3) получим $0 \in \partial f_y(x_0, y_0) - K^*(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что $y_0 \in a_0(x_0)$, и доказательство завершено.

Следующий пример показывает, что хотя отображение a не является непрерывным, однако маргинальное отображение a_0 – K-п.н.св.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = \|y\|$ $(y \in R^2)$ и $a(x) = \{y \in R^2 : y = (x, \alpha),\ \alpha \geq 1/|x|\}$ для $x \neq 0$ и $a(0) = (0, 1)$. Тогда очевидно, что отображение a – K-п.н.св., но не K-п.н.сн. в нуле. Нетрудно заметить, что $K^*(0, \nu) = R^2$, если $\nu \in a(0)$. Поэтому отображение $K^*(x, \nu)$ $(\nu \in a(x))$ – полунепрерывно сверху в точке $(0, 1)$. Следовательно, по теореме 1.2 отображение $a_0(x)$ является K-полунепрерывным сверху в нуле. Действительно, очевидно, что $a_0(x) = \left\{y : y = \left(x, \frac{1}{|x|}\right)\right\}$, если $x \neq 0$ и $a_0(0) = \{(0, 1)\}$.

Приведем пример, показывающий, что требования теоремы 1.2 являются минимальными.

Пример 2. Пусть $a(\epsilon) = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 - (1-\epsilon)x_1 \leq 0,\ (1+\epsilon)x_1 - x_2 \leq 0\}$. Задача состоит в минимизации $f(x) = -x_1 - x_2$ на $a(\epsilon)$. Очевидно, что $K^*(\epsilon, x) = R^2$ при $x \in a(\epsilon)$ и $K^*(0, x_0) = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 0\}$, если $x_0 = (1, 1)$. Значит, многозначное отображение $K^*(\epsilon, x)$ не является полунепрерывным сверху в точке $(0, x_0)$. Легко проверить, что $\arg\min_{x \in a(\epsilon)} f(x) = (1, 1)$ и что $\arg\min_{x \in a(\epsilon)} f(x) = (0, 0)$ для любого $\epsilon > 0$. Таким образом, маргинальное отображение a_0 не является K-п.н.св. в точке $(0, x_0)$.

§2. О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

В этом параграфе при помощи метода шатров исследуется вопрос непрерывности некоторых обратных отображений. Рассмотрим следующее многозначное отображение :

$$F_M^{-1}(\alpha) = \{x \in M : F(x) = \alpha\} = F^{-1}(\alpha) \bigcap M,$$

где $M \subset R^m$, $F : R^m \to R^n$ $(m > n,\ F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ и $\alpha \in R^n$.

Теорема 2.1. *Пусть $x \in F_M^{-1}(0)$ и выпуклый конус $K_M(x)$ является непрерывным шатром для множества M в точке x. Если F непрерывно на R^m, дифференцируемо во всех точках $x \in F_M^{-1}(0)$ и удовлетвотряет условию регулярности*

$$F'(x)K_M(x) = R^n, \quad \forall x \in F_M^{-1}(0), \tag{2.1}$$

то м.о. $F_M^{-1}(\alpha) = \{x \in M : F(x) = \alpha\}$ *является K-п.н.сн. в нуле.*

Доказательство : Пусть $x_0 \in F_M^{-1}(0)$ и $U(x_0)$–окрестность точки x_0. Тогда из (2.1) следует, что существует симплекс $[z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}] \subset R^n$, содержащий 0 в качестве внутренней точки и такой, что $[z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}] \subset F'(x_0)K_m(x_0)$. Отсюда следует, что существуют векторы $\overline{x}_j \in K_M(x_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ такие, что

$$z_j = F'(x_0)\overline{x}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{2.2}$$

Векторы $z_j - z_1$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ образуют базис в R^n, поэтому определим линейное отображение $L : R^n \to R^m$ следующим образом :

$$L(z_j - z_1) = \overline{x}_j - \overline{x}_1, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Если

$$z=\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j z_j+\sum_{j=2}^{n+1}(1-\beta_j)z_1, \quad \text{то положим} \quad \varphi(z)=L(z-z_1)+\overline{x}_1.$$

Здесь отображение $\varphi(z)$ есть непрерывное отображение симплекса $[z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}]$ в множество $conv\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n+1}\}$. Действительно, имеем

$$\varphi(z)=L(z-z_1)+\overline{x}_1=L\left(\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j z_j+\left(1-\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j\right)z_1-z_1\right)+\overline{x}_1=$$

$$=L\left(\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j(z_j-z_1)\right)+\overline{x}_1=\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j L(z_j-z_1)+\overline{x}_1=\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j(\overline{x}_j-\overline{x}_1)+\overline{x}_1=$$

$$=\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j\overline{x}_j+\left(1-\sum_{j=2}^{n+1}\beta_j\right)\overline{x}_1\in conv\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{n+1}\}.$$

Так как $K_M(x_0)$ является непрерывным шатром для M в точке x_0, то существует непрерывное отображение $\psi(\overline{x})=\overline{x}+r(\overline{x})$, $r(\overline{x})/\|\overline{x}\|\to 0$ такое, что $x_0+\psi(\overline{x})\in M$ для $\overline{x}\in K_M(x_0)\bigcap B_\epsilon(0)$. Для $\delta\in(0,1)$ определим непрерывное отображение Φ_δ^α из $\delta[z_1,\ldots,z_{n+1}]$ в R^n следующим образом :

$$\Phi_\delta^\alpha(y)=y-F(x_0+\Psi(L(y-\delta\,\overline{z}_1)+\delta\,\overline{x}_1))-\alpha, \quad y\in\delta[\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_{n+1}]. \tag{2.3}$$

При малых $\delta>0$ имеем $\delta\,\mathrm{conv}\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{n+1}\}\subset B_\epsilon(0)$ и, следовательно, $\delta\,\varphi(z)\in K_M(x_0)\bigcap B_\epsilon(0)$. Из (2.2) и (2.3) следует, что $\Phi_\delta^\alpha(y)=-o(x_0,\delta\varphi(z))-\alpha$ для всех α ($\|\alpha\|\leq\beta_0$). Отсюда следует, что существуют $\delta_0>0$ и $\beta_0>0$ такие, что $\Phi_\delta^\alpha(y)\in\delta_0[z_1,\ldots,z_{n+1}]$ при всех α, $\|\alpha\|\leq\beta_0$. Таким образом, для любого фиксированного α ($\|\alpha\|\leq\beta_0$) непрерывное отображение $\Phi_\delta^\alpha(y)$ отображает выпуклое, компактное множество $\delta_0[z_1,\ldots,z_{n+1}]$ в себя. Согласно теореме Бауера существует неподвижная точка отображения $\Phi_\delta^\alpha(y)$, т.е. существует элемент $y_\alpha\in\delta_0[z_1,\ldots,z_{n+1}]$ ($y_\alpha=\delta_0 z_\alpha$) такой, что $\Phi_\delta^\alpha(y_\alpha)=y_\alpha$. Отсюда следует, что $F(x_0+\psi(\delta_0\varphi(z_\alpha))=\alpha$ при $x_0+\psi(\delta_0\varphi(z_\alpha))\in U(x_0)$, и теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $M = \{x \in R^m : g(x) = 0\}$, где $g(x)$ –локально липшицевая функция, и пусть для любого $x \in M$ имеют место следующие предположения :

1) $0 \neq \partial^0 g(x)$ – субдифференциал Кларка [5],

2) если $y^* \in Lin\,\partial^0 g(x)$ $(y^* \neq 0)$, то векторы $y^*, f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_n'(x)$ – линейно независимы.

Тогда м.о. $F_M^{-1}(\alpha)$ является K-п.н.сн. в нуле.

Доказательство : В работе [15] показано, что при выполнении условия 1), выпуклый конус $K_M(x) = \{\overline{x} : g^0(x, \overline{x}) \leq 0,\ g^0(x, -\overline{x}) \leq 0\}$, где $g^0(x, \overline{x}) = \max_{x^* \in \partial^0 g(x)} \langle x^*, \overline{x} \rangle$ является непрерывным шатром для M в точке $x \in M$. Отсюда $K_M(x) = \{\overline{x} \in R^m : \langle y^*, \overline{x} \rangle = 0,\ \forall y^* \in \partial^0 g(x)\}$.

Пусть $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$ – система векторов, принадлежащих множеству $\partial^0 g(x)$ и образующих базис в подпространстве $Lin\,\partial^0 g(x)$. Очевидно, что $K_M(x) = \{\overline{x} : \langle y^*, \overline{x} \rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$. Так как система векторов $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*,\ f_j'(x),\ (j = 1, \ldots, n)$ – линейно независима в R^m, и, следовательно, для любого $y \in R^n$ система линейных уравнений $F'(x)\overline{x} = y,\ y, \langle y_i^*, \overline{x} \rangle = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ разрешима, т.е. условие (2.1) справедливо. Значит, м.о. F_M^{-1} является K-п.н.сн.

Следствие 2. Пусть $M = \{x \in R^m : g(x) \leq 0\}$, где $g(x)$ выпукла и непрерывна, и для для любого $x \in M$ имеет место

1) $0 \notin \partial g(x)$,

2) если $y^* \in \partial g(x)$, то векторы $y^*, f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_n'(x)$ линейно независимы.

Тогда м.о. F_M^{-1} является K-п.н.сн. в нуле.

Доказательство : Сначала покажем, что из соотношения

$$(Ker\,F'(x))^{\perp} \bigcap K_M^*(x) = \{0\} \tag{2.4}$$

следует (2.1). Пусть это не так. Тогда $(F'(x)K_M(x))^* \neq \{0\}$. Следовательно, существует ненулевой вектор y^* такой, что $\langle y^*, F'(x)\overline{x} \rangle \geq 0$, $\forall \overline{x} \in K_M(x)$, т.е. $\langle (F'(x))^* y^*, \overline{x} \rangle \geq 0$, а это означает, что

$$z^* \equiv (F'(x))^* y^* \in K_M^*(x). \tag{2.5}$$

Покажем, что этот вектор ненулевой. Действительно, если $z^* = 0$, то $F'(x) \circ (F'(x))^* y^* = 0$, и $rank\,F'(x) = n$ в силу условия 2). Следовательно, матрица $F'(x) \circ (F'(x))^*$ обратима, и поэтому $y^* = 0$, что является противоречием.

Известно [1], что $\mathrm{Im}\,(F'(x))^* = (Ker\,F'(x))^{\perp}$. Следовательно, из (2.5) следует, что $(Ker\,F'(x))^{\perp} \bigcap K^*_M(x) \neq \{0\}$, что противоречит соотношению (2.4). Далее, известно [9], что при выполнении условия 1), выпуклый конус $K_M(x) = \{\overline{x} \in R^n : g'(x,\overline{x}) \leq 0\}$ является непрерывным шатром для M в точке x и,

$$K^*_M(x) = -con\,\partial g(x) \quad \text{и}$$

$$(Ker\,F'(x))^{\perp} = \left\{ y : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x),\ \alpha_i \in R,\ i = 1,2,\ldots,n \right\}.$$

Поэтому, из условия 2) следует соотношение (2.4), и, следовательно, (2.1).

§ 3. ЛИПШИЦЕВЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Теорема 3.1. *Пусть* $a(x) = \{y \in R^m : \langle f_i(x), y\rangle \leq b_i,\ i = 1,\ldots,p\}$, *где функции* $f_i(x)$ $(i = 1,\ldots,p)$ *являются липшицевыми в точке* $x_0 \in X$. *Пусть далее* $a(x) \neq \emptyset$ *и* $\mathrm{Im}\,a = \bigcup_{x \in U(x_0)} a(x)$ *ограничено. Тогда отображение* a *– липшицево сверху в точке* x_0, *т.е. существует окрестность* $U(x_0)$ *точки* x_0 *и постоянная* $L > 0$ *такие, что*

$$a(x) \subseteq a(x_0) + L\|x - x_0\|B_1(0), \quad \forall x \in U(x_0).$$

Доказательство : В работе [14] (лемма 1.12, стр. 54) показано, что существует число $\beta > 0$ такое, что $d(y, a(x_0)) \leq \beta \max_{1 \leq i \leq p}\{\langle f_i(x_0), y\rangle - b_i\}$ для любого $y \notin a(x_0)$. Так как множество $\mathrm{Im}\,a$ ограничено и функции f_i – липшицевы в точках x_0, то существуют числа $m > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\|f_i(x) - f_i(x_0)\| \leq c\|x - x_0\| \quad (1 \leq i \leq p, \quad \forall x \in U(x_0)) \quad \text{и} \quad \|y\| \leq m \quad (\forall y \in \mathrm{Im}\,a).$$

Пусть $L = \beta cm$. Тогда из $y \in a(x)$ следует, что существует индекс i_0 такой, что

$$d(y, a(x_0)) \leq \beta(\langle f_{i_0}(x_0), y\rangle > -b_{i_0}) \leq \beta(\langle f_{i_0}(x_0), y\rangle - \langle f_{i_0}(x), y\rangle) \leq$$

$$\leq \beta \max_{1 \leq i \leq p} \|f_i(x_0) - f_i(x)\| \cdot \|y\| \leq L\|x - x_0\|,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ в точке x_0 удовлетворяют условию Липшица и существует вектор $\overline{y}$ такой, что $\langle f_i(x_0), \overline{y}\rangle - b_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Пусть множество $a(x_0) = \{y : \langle f_i(x_0), y\rangle \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$ ограничено, тогда м.о. $a(x) = \{y : \langle f_i(x), y\rangle \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$ в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство : Согласно теореме 1.1, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что множество $\operatorname{Im} a = \bigcup_{x \in U(x_0)} a(x)$ ограничено, т.е. существует выпуклый компакт F такой, что $\operatorname{Im} a \subseteq F$. Следовательно, в силу теоремы 3.1 отображение a – липшицево сверху в точке x_0. Докажем теперь, что a – липшицево снизу в точке x_0, т.е. существует число $L > 0$ и окрестность $N(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + L\|x - x_0\|B_1(0), \quad \forall x \in N(x_0).$$

Положим $\varphi(x, y) = \max_{1 \leq i \leq p}\{\langle f_i(x), y\rangle - b_i\}$. Очевидно, что для фиксированного x $\varphi(x, y)$ выпукла по y, и для фиксированного y удовлетворяет условию Липшица в точке x_0, т.е. существует число $L_1 > 0$ такое, что

$$\|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y)\| \leq L_1\|x - x_0\|, \quad \forall x \in U(x_0), \quad \forall y \in F.$$

Кроме того, из условий теоремы следует, что окрестность $U(x_0)$ можно выбрать настолько малой, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $\varphi(x, \overline{y}) < 0$. Проводя доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [17], получим требуемый результат.

Рассмотрим маргинальное отображение

$$a_0(x) = \{y \in a(x) : \langle f_0(x), y\rangle = \min_{u \in a(x)} \langle f_0(x), u\rangle\}.$$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.2, и функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица в точке x_0, тогда маргинальное отображение $a_0(x)$ – липшицево сверху в точке x_0.*

Доказательство : Положим $W(x, y) = \langle f_0(x), y\rangle$ и $V(x) = \min_{y \in a(x)}\langle f_0(x), y\rangle$. Очевидно существует число $l > 0$ такое, что

$$|W(x, y_1) - W(x_0, y_2)| \leq l(\|x - x_0\| + \|y_1 - y_2\|), \quad x \in U(x_0), \quad y_1, y_2 \in F.$$

Так как отображение a удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой c, то согласно предложению 24 работы [7] (стр. 126), маргинальная функция тоже удовлетворяет условию Липшица с константой $c(l+1)$, и, очевидно, что

$$a_0(x) = \{y : \langle f_i(x), y\rangle \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p,\ \langle f_0(x), y\rangle >= V(x)\}.$$

Пусть $y \notin a_0(x_0)$, тогда в силу леммы 1.12 из [14] существует число $\beta > 0$ такое, что

$$d(y, a_0(x_0)) \leq \beta \max\left\{ \max_{1\leq i\leq p} \{\langle f_i(x_0), y\rangle - b_i\},\ \langle f_0(x_0), y\rangle - V(x_0) \right\}.$$

Теперь, если $y \in a_0(x)$, то либо существует индекс i_0 такой, что $d(y, a(x_0)) \leq f_{i_0}(x_0) - b_{i_0}$, либо $d(y, a(x_0)) \leq \langle f_0(x_0), y\rangle - V(x_0)$. Первый случай рассмотрен в теореме 3.1. Рассмотрим второй случай. Имеем

$$\begin{aligned} d(y, a(x_0)) &\leq \langle f_0(x_0), y\rangle - V(x_0) \leq \|f_0(x) - f_0(x_0)\| \cdot \|y\| + \langle f_0(x), y\rangle - V(x_0) \leq \\ &\leq \|f_0(x) - f_0(x_0)\| \cdot \|y\| + V(x) - V(x_0) \leq l_1\|x - x_0\| + l(c+1)\|x - x_0\| \leq \\ &\leq L\|x - x_0\|, \end{aligned}$$

где $L = l_1 + l(c+1)$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть X и Y – банаховы пространства и м.о. $a_1 : X \to 2^Y$ с выпуклыми, компактными значениями удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x_0 \in X$. Пусть $a_2 : X \to 2^Y$ – замкнутое, выпуклое отображение такое, что $x_0 \in \operatorname{int} dom\, a_2$ и $0 \subseteq \operatorname{int}\{a_1(x_0) - a_2(x_0)\}$, тогда м.о. $a(x) \equiv a_1(x) \cap a_2(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0.*

Доказательство : Сначала заметим, что множество значений м.о. $a_1 - a_2$ выпукло и замкнуто, и $a_1 - a_2$ является H-п.н.сн. в точке x_0. Поэтому, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\tau B_1(0) \subseteq a_1(x) - a_2(x)$, $\forall x \in U(x_0)$. Далее, так как $a_2(x)$ – выпуклое, замкнутое отображение и $x_0 \in \operatorname{int} dom\, a_2$, $y_0 \in a_2(x_0)$, то существует число $\gamma > 0$ такое, что для любого $z \in B_\gamma(x_0)$ и для любого $y \in \operatorname{Im} a_2$ имеет место неравенство

$$d(y, a_2(z)) \leq \frac{1}{\gamma} d(z, a_2^{-1}(y))\,(1 + \|y - y_0\|) \tag{3.1}$$

(см. [7], теорема1, стр. 136). Положим $L = a_1(z)$, $M = a_2(z)$ $(\forall z \in B_\gamma(x_0))$ и $F(u) = M - u$ $(u \in L)$. Очевидно $\tau B_1(0) \subseteq F(L)$ $(\forall z \in B_\gamma(x_0))$. Рассуждая как при доказательстве предложения 8 (см. [7], стр. 139), установим, что существует число $c_1 > 0$, независящее от z и такое, что для любого $u \in L$ и любого $\nu \in B_\tau(0)$ имеем $d(u, F^{-1}(\nu)) \leq c_1\, d(\nu, F(u))$. Положим $\nu = 0$, и так как $F^{-1}(0) = M \cap L$, то получим

$$d(u, M \cap L) \leq c_1 d(0, F(u)) = c_1 d(u, M). \qquad (3.2)$$

Пусть теперь w – произвольная точка из Y. Из (3.2) следует, что

$$d(w, M \cap L) \leq \|w - u\| + d(u, M \cap L) \leq \|w - u\| + c_1 d(u, M)$$

для любого $u \in L$. Отсюда получаем, что $d(w, M \cap L) \leq d(w, L) + c_1 d(u, M) \leq d(w, L) + c_1(\|w - u\| + \|w - \nu\|)$, где $\nu \in M$. Следовательно,

$$d(w, M \cap L) \leq (c_1 + 1)(d(w, M) + d(w, L)). \qquad (3.3)$$

Пусть $z' \in B_\gamma(x_0)$ и $y \in a(z')$. Подставляя $w = y$ в (3.3) и используя (3.1), получим

$$d(y, a(z)) \leq (c_1 + 1)(d(y, a_1(z)) + \frac{c_2}{\gamma} d(z, z'), \text{ где } c_2 = \sup_{y \in \mathrm{Im}\, a} \{\|y - y_0\| + 1\}. \qquad (3.4)$$

Так как м.о. a_1 удовлетворяет условию Липшица, то из (3.4) следует, что существует число $R > 0$ такое, что $d(y, a(z)) \leq R\|z - z'\|$. И так как y – произвольная точка из $a(z')$, то из неравенства следует утверждение теоремы.

§ 4. О СУЩЕСТВОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ СЕЛЕКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

В этом параграфе методом шатров исследуется вопрос существования дифференцируемых селекций для некоторых многозначных отображений, заданных при помощи гладких и негладких ограничений типа неравенств.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о неявных функциях для негладкого случая.

Теорема 4.1. *Пусть* $b(x) = \{y \in R^m : F(x,y) = g(y) = 0\}$, *где* $F(x,y) : R^n \times R^m \to R^k$ – *гладкое отображение и* $g : R^m \to R$ – *выпуклая, непрерывная функция,* $x_0 \in R^m$ – *произвольная точка,* $y_0 = b(x_0)$. *Если для любого* $y^* \in Lin\,\partial g(y_0)$ $(y^* \neq 0)$ *система векторов* y^*, $F'_y(x_0,y_0)$ *линейно независима, то тогда существует отображение* $y(x)$, *определенное в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *и дифференцируемое в этой точке, такое, что* $y(x) \in b(x)$, $\forall x \in U(x_0)$ *и* $y(x_0) = y_0$.

Доказательство : Пусть $z = (x,y) \in R^n \times R^m$,

$$M_1 = \{(x,y) \in R^n \times R^m : g(y) = 0\} \quad \text{и} \quad M_2 = \{(x,y) \in R^n \times R^m : F(x,y) = 0\}.$$

Известно (см.[16]), что подпространство

$$H_1 = \{(\overline{x},\overline{y}) \in R^n \times R^m : g'(y_0,\overline{y}) \leq 0,\ g'(y_0,-\overline{y}) \leq 0\}$$

является Липшицевым шатром для множества M_1 в точке y_0, а

$$H_2 = \{(\overline{x},\overline{y}) \in R^n \times R^m : F'_x(x_0,y_0)\overline{x} + F'_x(x_0,y_0)\overline{y} = 0\}$$

является гладким шатром для M_2 в точке (x_0,y_0). Поэтому существуют липшицевые отображения $r_i(\overline{z})$ $(i = 1,2)$ такие, что $\|\overline{z}\|^{-1} r_i(\overline{z}) \to 0$ и $z_0 + \overline{z} + r_i(\overline{z}) \in M_i$ при достаточно малых $\overline{z} \in H_i$.

Пусть $\Lambda_1 = F'_x(x_0,y_0)$ и $\Lambda_2 = F'_y(x_0,y_0)$. Покажем, что подпространство $H = H_1 \cap H_2$ является непрерывным шатром для $M = M_1 \cap M_2 = gr\,(b)$ в точке (x_0,y_0). Сначала покажем, что $H_1 + H_2 = Z$ (где $Z = R^n \times R^m$). Действительно,

$$H_1 + H_2 = Z \Longleftrightarrow H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} = \{0\}, \tag{4.1}$$

где

$$H_1^{\perp} = \{(0,y^*) : y^* \in Lin\,\partial g(y_0)\} \quad H_2^{\perp} = \{(x^*,y^*) : x^* = \Lambda_1^* \alpha,\ y^* = \Lambda_2^* \alpha,\ \alpha \in R^k\}.$$

Следовательно, в силу условий теоремы, соотношение (4.1) имеет место. Значит, существуют линейные, непрерывные отображения $P_1 : Z \to H_1$ и $P_2 : Z \to H_2$ такие, что любой вектор представим в виде $z = P_1 z + P_2 z$.

Расмотрим теперь систему уравнений

$$\varphi(\overline{z},u)\equiv\psi_1(\overline{z}+P_1u)-\psi_2(\overline{z}-P_2u)=0,\qquad\text{где}\quad\psi_i(\overline{z})=z_0+\overline{z}+r_i\overline{z})\quad(i=1,2).$$

Имеют место следующие условия :

а) $\varphi:Z\times Z\to Z$ – непрерывное отображение, и $\varphi(0,0)=0$,

б) для любого $\epsilon>0$ найдутся число $\delta>0$ и окрестность нуля $U(0)$ такие, что из условия $\overline{z}\in U(0)$ и неравенств $\|u'\|<\delta$, $\|u''\|<\delta$ следует неравенство $\|\varphi(\overline{z},u')-\varphi(\overline{z},u'')-(u'-u'')\|<\epsilon$.

В силу теоремы о неявной функции (см.[1], стр. 161) найдутся число $C>0$, окрестность нуля $U(0)$ и непрерывное отображение $u:U(0)\to Z$ такие, что

$$\varphi(\overline{z},u(\overline{z}))=0\quad\text{и}\quad\|u(\overline{z})\|\leq C\|\varphi(\overline{z},0)\|.\tag{4.2}$$

Пусть $\psi(\overline{z})\equiv\psi_1(\overline{z}+P_1u(\overline{z}))=z_0+\overline{z}+r(\overline{z})$, где $r(\overline{z})=P_1u(\overline{z})+r_1(\overline{z}+P_1u(\overline{z}))$. Из соотношения (4.2) следует, что $r(\overline{z})/\|\overline{z}\|\to0$ при $\overline{z}\to0$. Положим $\nu_1(\overline{z})=\overline{z}+P_1u(\overline{z})$ и $\nu_2(\overline{z})=\overline{z}-P_2u(\overline{z})$. Так как H_1 и H_2 – подпространства, то $\nu_1(\overline{z})\in H_1$ $\nu_2(\overline{z})\in H_2$ для любого $\overline{z}\in H_1\cap H_2$. Таким образом, согласно определению шатра, $\psi(\overline{z})\in M_1\cap M_2$ для достаточно малых $\overline{z}\in H_1\cap H_2$.

Покажем, что существует линейный, непрерывный оператор $A:R^n\to R^m$ такой, что $(\overline{x},A(\overline{x}))\in H_1\cap H_2$ для любого $\overline{x}\in R^n$. Действительно, если $y_1^*,y_2^*,\ldots,y_p^*$ – максимальная, линейно независимая система векторов в $Lin\,\partial g(y_0)$, то для любого фиксированного $\overline{x}$ система уравнений

$$F_y'(x_0,y_0)\overline{y}=-F_x'(x_0,y_0)\overline{x},\quad\langle y_i^*,\overline{y}\rangle=0\quad(i=1,2)\tag{4.3}$$

имеет решение $\overline{y}$, поскольку по предположению система векторов $F_y'(x_0,y_0)$, y_1^*, y_2^*, ..., y_p^* линейно независима. Следовательно, существует линейный оператор $A:R^n\to R^m$ такой, что для любого $\overline{x}$ вектор $\overline{y}=A\overline{x}$ является решением системы (4.3), т.е. $(\overline{x},A\overline{x})\in H_1\cap H_2$. Таким образом, $\psi(\overline{z})=(\psi_1(\overline{x},\overline{y}),\psi_2(\overline{x},\overline{y}))$ и $\psi_{1x}'(0,0)=I_x$, $\psi_{1y}'(0,0)=0$, $\psi_{2x}'(0,0)=0$, $\psi_{2y}'(0,0)=I_y$, поскольку $Z=X\times Y$. Покажем, что для системы уравнений $g(\overline{x},\alpha)=\psi_1(\overline{x}+\alpha,A(\overline{x}+\alpha))-\overline{x}=0$ выполнены все условия теоремы 5.1.1 работы [9] (теорема о неявной функции).

Действительно, функция g непрерывна и $g(0,0)=0$. Кроме того, имеем $\|g(\overline{x},\alpha)-\alpha\| \leq o\left(\sqrt{\|\overline{x}\|^2+\|\alpha\|^2}\right)$. Поэтому система уравнений $g(\overline{x},\alpha)=0$ разрешима относительно $\overline{x}$, причем существует такое решение $\alpha(\overline{x})$, что $\lim_{\overline{x}\to 0}\alpha(\overline{x})/\|\overline{x}\|=0$. Обозначим $z(\overline{x})=(\overline{x}+\alpha(\overline{x}), A\overline{x}+A\alpha(\overline{x}))$. Тогда имеем $z(\overline{x})\in H\equiv H_1\cap H_2$ при достаточно малых $\overline{x}$. Следовательно, $z_0+\psi(z(\overline{x}))\in gr(b)$. Так как $\psi(z(\overline{x}))=(\psi_1(z(\overline{x})),\psi_2(z(\overline{x})))=(\overline{x},\psi_2(z(\overline{x})))$, то $y_0+\psi_2(z(\overline{x}))\in b(x_0+\overline{x})$. Следовательно, отображение $y(x)\equiv y_0+A(x-x_0)+o(x-x_0)$ дифференцируемо в точке x_0 и $y(x)\in b(x)$, $y(x_0)=y_0$. Теорема доказана.

Abstract. The paper is mainly devoted to investigation of continuity and Lipschitz properties of multivalued mappings given by smooth or non-smooth restrictions of equality type. A sufficient condition under which the intersection of a Lipschitz and a convex mappings is a Lipschitz mapping is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Москва, Наука, 1979.
2. В. Г. Болтянский. Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, том 30, № 6, стр. 3 – 55, 1979.
3. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов, Введение в минимакс, Москва, Наука, 1972.
4. В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, Недифференцируемая оптимизация, Москва, Наука, 1981.
5. Ф. Кларк, Оптимизация и негладкий анализ, Москва, Наука, 1988.
6. И. И. Еремин, Н. Н. Астафьев, Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, Москва, Наука, 1976.
7. Ж.-П. Обен, И. Экланд, Прикладной нелинейный анализ, Москва, Мир, 1988.
8. Е. С. Половинкин, Теория многозначных отображений, Уч. пос., Москва, 1983.
9. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Москва, Наука, 1982.
10. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации", Докл, АН СССР, том 287, № 3, стр. 553 – 556, 1982.
11. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума для негладких функций", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 18, № 4, стр. 318 – 325, 1983.
12. Б. Н. Пшеничный, "Теоремы о неявных функциях для многозначных отображений", Кибернетика, № 6, стр. 60 – 73, 1976.
13. Б. Ш. Мордухович, Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления, Москва, Наука, 1988.

14. В. В. Федоров, Численные методы Максимина, Москва, Наука, 1980.
15. Р. А. Хачатрян, "О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 23, № 2, стр. 149 – 122, 1988.
16. Р. А. Хачатрян, "О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 2, стр. 65 – 76, 2002.
17. А. Р. Хачатрян, Р. А. Хачатрян, "О непрерывности мнозначных отображений", Уч. зап. ЕГУ, № 2, стр. 3 – 13, 2003.
18. Р. А. Хачатрян, Р. А. Аветисян, А. Р. Хачатрян, "Непрерывность множеств ϵ-оптимальных стратегий". Изв. НАН Армении, Математика, том 38, № 1, стр. 69 – 82, 2003.
19. А. Р. Хачатрян, "О непрерывности некоторых многозначных отображений". Докл. НАН Армении, сер. математика, том 104, № 2, стр. 90 – 93, 2004.
20. А. Р. Хачатрян, "Представление липшицевых многозначных отображений". Изв. НАН Армении, Математика, том 39, № 3, стр. 38 - 48, 2004.
21. E. Michael, "Continuous selections", Ann. of Math., vol. 63, pp. 281 – 361, 1956.
22. R. T. Rockfellar, J.-B. Wets. Roger. Variational analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Поступила 21 сентября 2004

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 6, 2004, 56–76

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ПАРЫ БОРСУКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. А. Мирзаханян и Н. Э. Мирзаханян

Ереванский государственный университет

Резюме. В настоящей работе представляются модификации некоторых главных результатов, относящихся к парам Борсука в категории $K_0(H))^\infty$, где H есть произвольное вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Описываются допустимые K_0-отображения и устанавливаются K_0-аналоги главных свойств пары Борсука.

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена построению бесконечномерной алгебраической топологии в вещественных сепарабельных гильбертовых пространствах. Одним из важных понятий класической алгебраической топологии является понятие пары Борсука [1], обладающей свойством продолжения гомотопий.

В работе определяется модификация этого понятия, называемая K_0-парой Борсука, а также приводятся модификации некоторых, относящихся к этому понятию результатов в категории $(K_0(H))^\infty$ (см. определение 6, параграфа 2), где H – произвольное зафиксированное вещественное сепарабельное гильбертово пространство.

В параграфе 1 приводятся определения допустимых отображений, называемых K_0-отображениями, и некоторых необходимых понятий, а также сведения, относящиеся к этим отображениям [2 – 7].

В параграфе 2 определяются некоторые понятия и доказываются некоторые факты о K_0-отображениях, необходимые для их применения в параграфе 3.

В параграфе 3 доказываются несколько теорем и предложений, представляющих собой K_0-аналоги некоторых основных свойств пар Борсука.

§ 1. ДОПУСТИМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть H – произвольное зафиксированное вещественное гильбертово пространство.

Определение 1. Назовем непрерывное отображение $f : G \longmapsto H$ открытого множества $G \subset H$ в пространство H K_0-отображением (относительно H), если выполнено следующее условие :

(K_0) : для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественного числа $\epsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное (линейное) подпространство $L \subset H$ и вещественные числа λ и $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ такие, что, если для точек $x, y \in U$ угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \epsilon\|x - y\|. \tag{1}$$

Замечание 1. Условие (K_0) равносильно [2] одновременному выполнению следующих двух условий : условию (K) и локальному условию Липшица (L) :

(K) : для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\epsilon > 0$ сущствуют окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство $L \subset H$ и вещественное число λ такие, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение (1) ;

(L) : для каждой точки $x_0 \in G$ существуют числа $r = r(x_0) > 0$ и $c = c(x_0) > 0$ такие, что, если точки $x, y \in G$ $\|x - x_0\| < r$ и $\|y - x_0\| < r$, то

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Важным характеризующим свойством K_0-отображений является то, что число λ в условии (K_0) можно выбрать так, чтобы оно зависело бы лишь от x_0, но не от числа ϵ. Получающуюся при этом единственную, непрерывную,

вещественнозначную функцию $\lambda(x) = \lambda_f(x)$ $(x \in G)$ назовем *терминальной производной отображения* $f : G \longmapsto H$. Композиция двух K_0-отображений есть K_0-отображение; из ортопроекторов $p : H \longmapsto L$ K_0-отображением являются только те, для которых L – конечномерно или имеет конечную коразмерность относительно H.

Определение 2. Пусть M – произвольное (необязательно открытое) подмножество H. Непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ будем называть K_0-отображением, если существуют открытое подмножество $G \subset H$, содержащее M, и K_0-отображение $g : G \longmapsto H$ такие, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \in M$.

Пусть X и Y – произвольные подмножества пространства H. Непрерывное отображение $f : X \longmapsto Y$ называется K_0-отображением, если композиция $i \circ f : X \longmapsto H$ является K_0-отображением, где $i : Y \longmapsto H$ есть вложение. Гомеоморфизм $f : X \cong Y$ называется K_0-гомеоморфизмом, если отбражения f и $f^{-1} : Y \longmapsto X$ суть K_0-отображения.

Определение 3. Семейство (f_t) $(0 \leq t \leq 1)$ K_0-отображений $f_t : X \longmapsto Y$ называется K_0-гомотопией, если отображение $F : I \times X \longmapsto Y$, определяемое формулой $F(t, x) = f_t(x)$ $(x \in X, t \in I = [0, 1])$ является K_0-отображением.

Два K_0-отображения $f, g : X \longmapsto Y$ называются K_0-гомотопными и пишутся в виде $f \overset{K_0}{\simeq} g$, если существует связывающая их K_0-гомотопия (f_t), т.е. такая, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Аналогично, два отображения $f, g : X \longmapsto Y$ называются K_0-гомотопными, если существует K_0-отображение $F : I \times X \longmapsto Y$ такое, что $F(0, x) = f(x)$ и $F(1, x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 4. Подпространство A такое, что $A \subset X \subset H$, называется K_0-ретрактом в X, если существует K_0-ретракция X на A, т.е. K_0-отображение $r : X \longmapsto A$ такое, что $r|A = id_A$ ($r|A = id_A$ означает, что $r \circ i = id_A$, где $i : A \longmapsto X$ есть вложение). Ретракт A называется K_0-деформационным ретрактом в X, если существует такая K_0-ретракция $r : X \longmapsto A$, называемая K_0-деформационной ретракцией, что выполнено условие $i \circ r \overset{K_0}{\simeq} id_X$. Если эта K_0-гомотопия неподвижна, т. е. связана на A, то r называется K_0-строгой (или

сильной) деформационной ретракцией, а A называется K_0-строгим деформационным ретрактом в X.

Существуют окрестностные варианты этих ретрактов, а именно : A называется окрестностным K_0-ретрактом, окрестностным K_0-деформационным ретрактом или окрестностным K_0-строгим деформационным ретрактом в X, соответственно, если существует такое открытое в X подмножество $U \supset A$, что A является K_0-ретрактом, K_0-деформационным ретрактом или K_0-строгим деформационным ретрактом в U, соответственно.

Определение 5. Подмножество A подпространства X называется K_0-окрестностным строгим деформационным ретрактом в слабом смысле подпространства X, если существует такое открытое в X множество $U \supset A$ и такая K_0-гомотопия $(g_t) : U \longmapsto X$, что (g_t) неподвижна на A (т.е. $g_t(x) = g_0(x)$ при $x \in A$ и $t \in I$) и $g_0(x) = x$, $g_1(x) \in A$ при всех $x \in U$.

§ 2. КАТЕГОРИИ $K_0(H)$ И $(K_0(H))^\infty$. ЛОКАЛЬНО K_0–ОТОБРАЖЕНИЯ

Для некоторых конкретных задач рамки одного гилбертова пространства H становятся узкими. Для исследования различных сторон задачи приходится вводить расширенные гильбертовы пространства. Для наших целей необходимо рассматривать такие действительные гильбертовы пространства H^* (например, $R^n \times H$), в которых простанство H содержится как линейное (векторное) подпространство конечной коразмерности, т.е. $H \subset H^*$ и $Codim\, H$ относительно H^* конечно. В связи с этим существенным является следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть X и Y – подмножества гильбертова пространства H, $f : X \longmapsto Y$ – непрерывное отображение. Тогда для того, чтобы f было K_0-отображением относительно H необходимо и достаточно, чтобы f было K_0-отбражением относительно гильбертова пространства $H^* = R^n \times H$, где n некоторое произвольное натуральное число.*

Доказательство : Необходимость. Пусть $f : X \longmapsto Y$ есть K_0-отображение относительно H, G – открытое в H множество такое, что $X \subset G$ и $g : G \longmapsto H$ есть K_0-отображение такое, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Далее, пусть

$p : H^* \longmapsto H$ – ортогональное проектирование, $G^* = p^{-1}(G)$ и $g^* = g \circ p : G^* \longmapsto H \subset H^*$. Выберем произвольно точку $x_0^* \in G^*$ и число $\epsilon > 0$ и положим $x_0 = p(x_0^*)$. Так как g есть K_0-отображение относительно H, то существуют окрестность U точки x_0 в G, линейное конечномерное подпространство $L \subset H$ и число λ такие, что, если для точек $x, y \in U$ вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то (см. условие (K)) выполнено соотношение

$$\|g(x) - g(y) - \lambda(x - y)\| \leq \epsilon\|x - y\| \tag{2}$$

Пусть U^* такая окрестность точки x_0^* в G^*, что $p(U^*) \subset U$ и $L^* \subset H^*$ – линейное конечномерное подпространство в H^*, содержащее R^n и L (R^n, $L \subset L^*$). Пусть теперь для точек $x^*, y^* \in U^*$ вектор $x^* - y^*$ ортогонален к L^*. Тогда точки $x = p(x^*)$ и $y = p(y^*)$ принадлежат U и вектор $x - y = x^* - y^*$ ортогонален подпространству L. Поэтому, в силу формулы (2) будем иметь

$$\|g^*(x^*) - g^*(y^*) - \lambda(x^* - y^*)\| = \|(g \circ p)(x^*) - (g \circ p)(y^*) - \lambda(x^* - y^*)\| =$$
$$= \|g(x) - g(y) - \lambda(x - y)\| = \epsilon\|x - y\| = \epsilon\|x^* - y^*\|.$$

Таким образом, отображение g^* в каждой точке $x_0^* \in G^*$ удовлетворяет условию (K) и, поскольку отображения p и g локально удовлетворяют условию Липшица, то отображение g^* тоже локально удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, g^* есть K_0-отображение относительно H^*, и то же самое утверждение верно для f, так как $X \subset G^*$ и $g^*(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Достаточность. Пусть теперь $f : X \longmapsto Y$ есть K_0-отображение относительно H^*. По определению 1 существуют открытое в H^* множество G^* и K_0-отображение $g^* : G^* \longmapsto H^*$ относительно H^* такие, что $X \subset G^*$ и $g^*(x) = f(x)$, $x \in X$. Пусть $G = G^* \cap H$ и $g = g^*|G$. Тогда G открыто в H и $g(x) = f(x)$, $x \in X$. Покажем, что g является K_0-отображением относительно H, для этого выберем произвольно точку $x_0 \in G$ и число $\epsilon > 0$. По определению существуют окрестность $U^* \subset G^*$ точки x_0, линейное конечномерное подпространство L^* из H^* и число λ такие, что если для точек $x^*, y^* \in U^*$ вектор $x^* - y^*$ ортогонален к L^*, то выполнено соотношение

$$\|g^*(x^*) - g^*(y^*) - \lambda(x^* - y^*)\| \leq \epsilon\|x^* - y^*\| \tag{3}$$

Положим $U = U^* \cap H$. Ясно, что U есть окрестность точки x_0 в G. Обозначим через L_1 и L_2 проекции подпространств L^* на R^n и H соответственно. Пусть теперь $x, y \in U$ такие точки, что вектор $x - y$ ортогонален к L_2. Так как вектор $x-y$ ортогонален и к L_1, то $x-y$ будет ортогонален и к L^*. Из того, что $x, y \in U^*$ и в силу (3) будем иметь

$$\|g(x) - g(y) - \lambda(x-y)\| = \|g(x^*) - g(y^*) - \lambda(x-y)\| \leq \varepsilon\|x-y\|.$$

Таким образом, отображение $g : G \longmapsto H$ удовлетворяет условию (K) и, так как g^* локально удовлетворяет условию Липшица, то и его ограничение g удовлетворяет условию Липшица. Из изложенного следует, что отображение g является K_0-отображением относительно H ; откуда и следует, что отображение $f : X \longmapsto Y$ является K_0-отображением относительно H. Лемма 1 доказана.

Так как композиция K_0-отображений есть K_0-отображение, то можем построить категорию $K_0(H)$, объектами которой являются всевозможные подмножества из H, а морфизмами – всевозможные K_0-отображения этих множеств относительно H. Если H^* – произвольное гильбертово пространство, содержащее H как линейное подпространство конечной коразмерности $n \geq 0$, то, согласно лемме 1, $K_0(H)$ является полной подкатегорией категории $K_0(H^*)$.

Определение 6. Категорию, объектами и морфизмами в которой соответственно являются всевозможные объекты и морфизмы категорий $K_0(H)$ и всех категорий $K_0(H^*)$ будем обозначать через $(K_0(H))^\infty)$ и называть K_0-категорией, ассоциированной с гильбертовым пространством H. Таким образом, $(K_0(H))^\infty = \bigcup_{H^* \supset H} K_0(H^*)$, где $Codim\, H$ конечна относительно H^*.

$(K_0(H))^\infty$ есть категории с гомотопиями (см. [1]), где гомотопиями являются K_0-гомотопии. Морфизмы этой категории $(K_0(H))^\infty$ в дальнейшем будем называть K_0-отображениями.

Определение 7. Декартово произведение $Z \times X$ будем наывать K_0-допустимым, если оно является подмножеством $R^n \times H^*$, т.е. $Z \subset R^n$ и $X \subset H^*$, где $H \subset H^*$ и $\dim(H^*/H)$ конечна. В этом случае обе проекции $Z \times X \longmapsto Z$ и $Z \times X \longmapsto X$ суть K_0-отображения.

Определение 8. Непрерывную функцию $\varphi : G \longmapsto R$ открытого подмножества из H в вещественную прямую R будем называть K_0-функцией (относительно H), если отображение $f : G \longmapsto H$, определяемое формулой $f(x) = \varphi(x)e$ для произвольного единичного вектора $e \in H$, является K_0-отображением относительно H.

Замечание 2. Когда область значений K_0-отображений $f : G \longmapsto H$ является конечномерным подпространством, терминальная прозводная $\lambda_f(x)$ всюду на G равна нулю. Таким образом, непрерывная функция $\varphi : G \longmapsto R$ будет K_0-функцией тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям :

1) для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\epsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что при $x, y \in U$ и $(x - y) \perp L$ будем иметь $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon \|x - y\|$;
2) существуют вещественные числа $r > 0$ и $c > 0$ такие, что выполняется $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c\|x - y\|$ при $\|x - x_0\| < r$ и $\|y - x_0\| < r$.

Лемма 2. *Пусть G – открытое подмножество H. Тогда всякая непрерывно дифференцируемая, в частности, линейная непрерывная функция (функционал) $\varphi : G \longmapsto R$ является K_0-функцией.*

Доказательство : Сначала рассмотрим случай, когда φ есть линейная непрерывная функция. Как известно из теории гильбертовых пространств, между линейными непрерывными функционалами, заданными на H, и элементами из H существует взаимнооднозначное соответствие. Поэтому функция φ, являющаяся ограничением на G некоторого непрерывного линейного функционала, будет иметь вид $\varphi(x) = (x, a)$ $(x \in G)$, где $a \in H$ – вектор, а (x, a) – скалярное произведение в H. Обозначим через L_a – одномерное линейное подпространство из H, являющееся прямой, проходящей через точки 0 и a. Пусть $U \subset G$ – произвольная окрестность точки x_0 и $\epsilon > 0$ произвольно. Тогда при $x, y \in U$ и $(x-y) \perp L_a$ будем иметь

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x - y, a)| = 0 \leq \epsilon\|x - y\|.$$

Далее, для любых $x, y \in U$ будем иметь

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x - y, a)| \leq \|a\|\|x - y\| = c\|x - y\| \quad (c = \|a\|).$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет обоим условиям, приведенным в замечании 2. Откуда следует, что φ есть K_0-функция.

Пусть теперь φ – непрерывно дифференцируемая функция, $x_0 \in G$ и $\epsilon > 0$ произвольны. Так как производная $\varphi'(x_0)$ является линейной, непрерывной функцией, то по доказанному $\varphi'(x_0)$ есть K_0-функция. В силу замечания 2 существуют окрестность $U_1 \subset G$ точки x_0 и линейное, конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что при $x, y \in U_1$ и $(x-y) \perp L$ имеет место

$$|\varphi'(x_0)(x-y)| = |\varphi'(x_0)(x) - \varphi'(x_0)(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}\|x-y\|. \tag{4}$$

Далее, в силу непрерывной дифференцируемости φ существует окрестность $U_2 \subset G$ точки x_0 такая, что при $y \in U_2$ имеет место

$$\|\varphi'(y) - \varphi'(x_0)\| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{5}$$

С другой стороны, из дифференцируемости φ следует, что существует такая окрестность $V \subset G$ точки x_0, что при любых $x, y \in V$ имеет место

$$|\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)| \leq \frac{\epsilon}{3}\|x-y\|. \tag{6}$$

Согласно соотношениям (4) – (6), получим, что при $x, y \in W = V \cap U_2$ имеет место

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y) + \varphi'(y)(x-y) - \varphi'(x_0)(x-y) +$$
$$+ \varphi'(x_0)(x-y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)| + |\varphi'(y)(x-y) - \varphi'(x_0)(x-y)| +$$
$$+ |\varphi'(x_0)(x-y)| \leq \frac{\epsilon}{3}\|x-y\| + \frac{\epsilon}{3}\|x-y\| + \frac{\epsilon}{3}\|x-y\| = \epsilon\|x-y\|.$$

Итак, условие 2) замечания 2 выполнено.

Покажем теперь, что φ локально удовлетворяет условию Липшица. Пусть $x_0 \in G$ и $\epsilon > 0$ произвольны. Из непрерывной дифференцируемости φ имеем, что существует окрестность $W \subset G$ точки x_0 такая, что $\|\varphi'(y) - \varphi'(x_0)\| \leq \epsilon$ при любом $y \in W$, и, следовательно,

$$\|\varphi'(y)\| \leq c_1\|x-y\|, \quad \text{где} \quad c_1 = \|\varphi'(x_0)\| + \epsilon. \tag{7}$$

Далее, из дифференцируемости φ следует, что при $x \in W$ будем иметь

$$\|\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)\| \leq c_2\|x-y\|, \tag{8}$$

где $c_2 > 0$ – некоторая константа. Таким образом, применяя соотношения (7) и (8), для любых $x, y \in W$ будем иметь

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y) + \varphi'(y)(x-y)| \leq \\
&\leq |\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)| + |\varphi'(y)(x-y)| \leq \\
&\leq c_2\|x-y\| + c_1\|x-y\| = c\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, φ удовлетворяет обоим условиям 1) и 2) замечания 2 и, следовательно, φ является K_0-функцией.

Лемма 3. *Пусть G – открытое подмножество из H, $\varphi : G \longmapsto R$ – K_0-функция и $g : G \longmapsto H$ – K_0-отображение относительно H. Тогда отображение $f : G \longmapsto R \times H = H^*$, определенное формулой $f(x) = (\varphi(x), g(x))$, является K_0-отображением относительно H^*.*

Доказательство : Пусть $q : R \times H \longmapsto H$ – ортогональное проектирование, $G^* = q^{-1}(G)$ и $f^* = f \circ q : G^* \longmapsto H^*$. Покажем, что f^* является K_0-отображением относительно H. С этой целью рассмотрим произвольную точку $x_0^* = (t_0, x_0) \in G^*$, число $\epsilon > 0$ и положим $x_0 = q(x_0^*)$.

Поскольку, по условию отображение g есть K_0-отображение, то существуют окрестность $U_1 \subset G$ точки x_0 и (линейное) конечномерное подпространство $L_1 \subset H$ такие, что при $x, y \in U_1$ и $(x-y) \perp L_1$ имеет место

$$\|g(x) - g(y) - \lambda_g(x_0)(x-y)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|x-y\|. \tag{9}$$

Далее, существуют окрестность $V_1 \subset G$ точки x_0 и число $c_1 > 0$ такие, что для любых $x, y \in V_1$ имеет место

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c_1\|x-y\|. \tag{10}$$

Аналогично, (см. замечание 2), существуют окрестность $U_2 \subset G$ точки x_0 конечномерное подпространство $L_2 \subset H$ такие, что для любых $x, y \in U_2$ и $(x-y) \perp L_2$ имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - y\|. \tag{11}$$

Далее, существуют окрестность $V_2 \subset G$ и число $c_2 > 0$, что для любых $x, y \in V_2$ имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c_2\|x - y\|. \tag{12}$$

Положим $U = U_1 \cap U_2$, $V = V_1 \cap V_2$, $c = c_1 + c_2$ и пусть $U^* \subset G^*$, $V^* \subset G^*$ окрестности точки x_0^* такие, что $q(U^*) \subset U$ и $q(V^*) \dot{\subset} V$. Обозначим через L^* линейное, конечномерное подпространство H^*, содержащее объединение $R \cup L_1 \cup L_2$. Пусть теперь $(t, x) \in U^*$ и $(t', y) \in U^*$ такие точки, что вектор $(t, x) - (t', y)$ ортогонален к L^*. Тогда необходимо $t = t'$, и, приняв $\lambda = \lambda_g(x_0)$, в силу (9) и (11) получаем

$$\|f^*(t,x) - f^*(t,y) - \lambda_g(x_0)((t,x) - (t,y))\| = \|f(x) - f(y) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| =$$

$$= \|(\varphi(x), g(x)) - (\varphi(y), g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| =$$

$$= \|(\varphi(x) - \varphi(y), g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| =$$

$$= \|(\varphi(x) - \varphi(y))e + (g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| \leq \|(\varphi(x) - \varphi(y))e\| +$$

$$+ \|(g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| =$$

$$= |(\varphi(x) - \varphi(y)|\|e\| + \|(g(x) - g(y)) - \lambda_g(x_0)(0, x-y)\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x - y\| = \epsilon\|x - y\| = \epsilon\|(t,x) - (t',y)\|,$$

где e – единичный вектор на прямой R.

Итак, для f^* условие (K) замечания 1 выполнено. Покажем теперь, что f^* локально удовлетворяет условию Липшица. Для точек $(t, x) \in V^*$ и $(s, y) \in V^*$ будем иметь

$$\|f^*(t,x) - f^*(s,y)\| = \|f(x) - f(y)\| = \|(\varphi(x), g(x)) - (\varphi(y), g(y))\| =$$

$$= \|(\varphi(x) - \varphi(y))e + (g(x) - g(y))\| \leq \|(\varphi(x) - \varphi(y))e\| + \|g(x) - g(y)\| =$$

$$= |\varphi(x) - \varphi(y)| + \|g(x) - g(y)\| \leq c_2\|x - y\| + c_1\|x - y\| = (c_1 + c_2)\|x - y\| =$$

$$= c\|x - y\| \leq c\|(t,x) - (s,y)\|.$$

Таким образом, f^* удовлетворяет обоим условиям принадлежности к классу K_0 относительно H^*. Отсюда, отображение $f : G \longmapsto H^*$ является K_0-отображением и $\lambda_f(x_0) = \lambda_g(x_0)$, поскольку множество G^* открыто в H^* и f^* является продолжением f. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. Пусть G – открытое подмножество из H, $\varphi : G \longmapsto R$ есть K_0-функция и $g : G \longmapsto H$ есть K_0-отображение. Тогда отображение $h : G \longmapsto H$, определенное формулой $h(x) = \varphi(x)g(x)$ является K_0-отображением.

Действительно, $f : G \longmapsto R \times H$ –отображение, определенное формулой $f(x) = (\varphi(x), g(x))$ является K_0-отображением в силу леммы 3. Далее, $\psi : R \times H \longmapsto H$ – отображение, определенное формулой $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ $(\lambda \in R, x \in H)$ является K_0-отображением относительно H^* [4]. Ясно, что h представляет собой композицию отображений f и ψ, и, следовательно, h есть K_0-отображение относительно H^*. Согласно лемме 1 h будет K_0-отображением относительно H.

Определение 9. Непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ произвольного множества $M \subset H$ будем называть локально K_0-отображением (относительно H), если существует такое открытое относительно M покрытие $\{U_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ подпространства M, что ограничение $f_\alpha = f|U_\alpha$ есть K_0-отображение $\alpha \in A$ (в смысле определения 2).

Теорема 1. *В сепарабельном (т.е. обладающем счетным базисом) гильбертовом пространстве H для того, чтобы непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ было K_0-отображением (см. определение 2), необходимо и достаточно, чтобы f было локально K_0-отображением.*

Доказательство : Необходимость очевидна. Докажем достаточность. По предположению для каждого $\alpha \in A$ существуют открытое в H множество G_α и K_0-отображение $g_\alpha : G_\alpha \longmapsto H$ такие, что $U_\alpha \subset G_\alpha$ и $f|U_\alpha = G_\alpha|U_\alpha$. Используя индуцированную топологию в M, можно, уменьшив G_α, считать, что $U_\alpha = M \cap G_\alpha$. Положим $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Поскольку открытые множества из H, являясь гладкими многообразиями, допускают гладкое разбиение единицы (см. [9]), то существует гладкое разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, подчиненное открытому покрытию $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ подпространства G. Посредством разбиения $\{\varphi_\alpha\}$ из семейства

g_α, $(\alpha \in A)$ K_0-отображений склеим K_0-отображение $g : G \longmapsto H$, являющееся продолжением отображения f. Пусть $x_0 \in G$ – произвольная точка. Положим

$$g(x_0) = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) g_\alpha(x_0). \tag{13}$$

По определению разбиения единицы у точки x_0 существует такая открытая окрестность $U_{x_0} \subset H$, что все функции φ_α, за исключением конечного их числа, тождественно равны нулю на U_{x_0}. Поэтому в правой части формулы (13) стоит конечная сумма. И в результате, можем однозначно построить некоторое отображение $g : G \longmapsto H$.

По определению разбиения единицы множество $B = \{\alpha \in A \,|\, x_0 \in G_\alpha\}$ конечно, положим $V_{x_0} = \bigcap_{\alpha \in B} G_\alpha$, где G_α заданы на V_{x_0} и непрерывны на нем. Определим открытую окрестность $W_{x_0} = V_{x_0} \bigcap U_{x_0}$: для каждого $x \in W_{x_0}$ будем иметь

$$g(x) = \sum_{\alpha \in B} \varphi_\alpha(x) g_\alpha(x). \tag{14}$$

Каждое из отображений g_α в этой сумме является K_0-отображением на W_{x_0}, а каждая функция $\varphi_\alpha(x)$, будучи гладкой в силу леммы 2, будет K_0-функцией. Откуда следует, что каждое из слагаемых $\varphi_\alpha(x) g_\alpha(x)$ в (14), согласно следствию 1, будет K_0-отображением окрестности W_{x_0} в H. Поскольку конечная сумма K_0-отображений есть K_0-отображение, то ограничение $g|W_{x_0} : W_{x_0} \longmapsto H$ будет K_0-отображением.

Таким образом, семейство $\{W_x\}$ $(x \in G)$ является открытым покрытием пространства G и все ограничения отображения g на элементах этого покрытия являются K_0-отображениями. Отсюда следует, что отображение $g : G \longmapsto H$ также есть K_0-отображение. Для завершения доказательства остается показать, что g на M совпадает с f. Поскольку $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) = 1$, то для произвольной точки $x_0 \in M$ будем иметь

$$g(x_0) = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) g_\alpha(x_0) = \left(\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x_0) \right) f(x_0) = f(x_0).$$

§ 3. K_0-ПАРА БОРСУКА

В этом параграфе все рассматриваемые множества, составляющие пары множества, декартовы произведения и K_0-отображения, являются соответственно объектами и морфизмами категории $K_0(H\rfloor)^\infty$ (см. определение 6).

Определение 10. Назовем K_0-отображение $i : A \longmapsto X$ K_0-корасслоением или обладающим свойством продолжения (распространения) K_0-гомотопий, если для любых множества Y, K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ и K_0-гомотопии $g_t : A \longmapsto Y$ такой, что $g_0 = f \circ i$, существует K_0-гомотопия $f_t : X \longmapsto Y$ такая, что $f_0 = f$ и $g_t = f_t \circ i$ для каждой $t \in I$.

Очевидно, что композиция K_0-корасслоений есть K_0-корасслоение.

Мы будем в дальнейшем рассматривать тот важный частный случай K_0-корасслоения, когда $A \subset X$ и $i : A \longmapsto X$ есть отображение вложения. В этом случае пару (X, A) будем называть K_0-парой Борсука.

Таким образом, (X, A) есть K_0-пара Борсука, если для любых Y, K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ и частичной K_0-гомотопии $g_t : A \longmapsto Y$, т.е. $g_0 = f \circ i$, существует K_0-гомотопия $f_t : X \longmapsto Y$ с $f_0 = f$ и $g_t = f_t|A$ для всех $t \in I$.

Существенное свойство K_0-пары Борсука заключается в следующем : если (X, A) – K_0-пара Борсука, $g, g' : A \longmapsto Y$ – K_0-гомотопные K_0-отображения и одно из них непрерывно продолжимо до K_0-отображения на X, то и другое непрерывно продолжимо до K_0-отображения на X. Это означает, что если (X, A) есть K_0-пара Борсука, то непрерывное K_0-продолжение на X K_0-отображение $g : A \longmapsto Y$ зависит только от K_0-гомотопического класса отображения g.

Приведем часто используемую форму определения понятия K_0-пары Борсука : пара (X, A) есть K_0-пара Борсука, если для любых множества Y, K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ и K_0-гомотопии $G : I \times A \longmapsto Y$ такой, что $G(0, x) = f(x)$ $(x \in A)$, существует K_0-гомотопия $F : I \times X \longmapsto Y$ такая, что $F(0, x) = f(x)$ при всех $x \in X$ и $F(t, x) = G(t, x)$ при всех $t \in I$ и $x \in A$.

Пару (X, A) будем называть замкнутой, если множество A замкнуто в X.

В оставшейся части статьи гильбертово пространство H будет предполагаться сепарабельным.

Теорема 2. *Для того, чтобы замкнутая пара* (X, A) *была* K_0*-парой Борсука необходимо и достаточно, чтобы множество* $\tilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$ *было* K_0*-ретрактом цилиндра* $I \times X$.

Отметим, что ход доказательства теоремы 2 таков же, что и в случае категории *Top* всех топологических пространств и их непрерывных отображений. Теорема остается справедливой и в категории $(K_0(H))^\infty$, благодаря тому, что все шаги этого доказательства не выводят нас из допустимого класса K_0 непрерывных отображений.

Замечание 3. K_0-пара Борсука необходимо замкнута.

Предложение 1. *Если* (X, A) *есть* K_0*-пара Борсука, то множество* $\tilde{A} = (0, \times X) \cup (I \times A)$ *будет* K_0*-строгим деформационным ретрактом цилиндра* $I \times X$.

Доказательство : Пусть (X, A) есть K_0-пара Борсука. Тогда по теореме 2, множество $\tilde{A}$ будет K_0-ретрактом в $I \times X$. Пусть $r : I \times X \longmapsto \tilde{A}$ некоторая K_0-ретракция, положим $r_1 = p \circ r : I \times X \longmapsto I$ и $r_2 = q \circ r : I \times X \longmapsto X$, где p и q – проекции. Для каждого $s \in I$ построим отображение $F_s : I \times X \longmapsto I \times X$, приняв $F_s : (t, x) \longmapsto ((1-s)r_1(t, x) + ts, r_2((1-s)t, x))$.

Поскольку r_1 и r_2 являются K_0-отображениями, то, F_s являясь диагональным произведением K_0-отображений (см. лемму 3), также будет K_0-отображением. Далее, семейство (F_s) $(s \in I)$ является K_0-гомотопией, причем $F_0 = i \circ r$, где $i : \tilde{A} \longmapsto I \times X$ есть отображение вложения, $F_1 = id_{I \times X}$ и K_0-гомотопия (F_s) неподвижна на $\tilde{A}$, т.е. $F_s(t, x) = (i \circ r)(t, x)$ при $(t, x) \in \tilde{A}$ и $s \in I$. Таким образом, отображение $r : I \times X \longmapsto \tilde{A}$ есть K_0-строгая деформационная ретракция, следовательно, $\tilde{A}$ есть K_0-строгий деформационный ретракт в $I \times X$.

Лемма 4. *Подмножество* $Y \subset H$ *будет* K_0*-окрестностным ретрактом в* H *тогда и только тогда, когда для любой пары* (Z, C) *подмножеств из* H, *любое* K_0*-отображение* $f : C \longmapsto Y$ *продолжимо до* K_0*-отображения* $f^* : U \longmapsto Y$, *где* $U \subset Z$ *есть некоторое открытое множество, содержащее* C.

Доказательство : Пусть $Y \subset H$ есть K_0-окрестностный ретракт в H, а $G_0 \subset H$ – открытое множество, в котором Y есть K_0-ретракт и $r_0 : G_0 \longmapsto Y$ – некоторая K_0-ретракция. Пусть, далее, $G \subset H$ – открытое множество и $g : G \longmapsto H$

– K_0-отображение такие, что $C \subset G$ и $g|C = f$ (см. Параграф 1), положим, $G' = g^{-1}(G_0)$, $g' = g|G'$, $U = Z \cap G'$ и $f^* = r_0 \circ g' : U \longmapsto Y$. Ясно, что U открыто в Z и f^* является K_0-продолжением отображения f до U.

Обратно, взяв пару (H, Y) за (Z, C), а тождественное отображение $id_Y : Y \longmapsto Y$ за f, получим открытое в H множество $G^* \supset Y$, в котором Y будет K_0-ретрактом и, значит, Y будет K_0-окрестностным ретрактом в H.

Теорема 3. *Пусть (X, A) – замкнутая пара подмножеств из H, где X есть K_0-окрестностный ректракт в H. Тогда для того, чтобы (X, A) была K_0-парой Борсука необходимо и достаточно, чтобы A было K_0-окрестностным ретрактом в H (эквивалентно, K_0-окрестностным ретрактом в X).*

Доказательство : Необходимость. В силу теоремы 2, множество $\tilde{A} = (0, X) \cup (I \times A)$ есть K_0-ретракт в $I \times X$. Так как I есть K_0-ретракт в R, множество $I \times X$ есть K_0-окрестностный ретракт в гильбертовом пространстве $H^* = R \times H$. Отсюда следует, что $\tilde{A}$ есть K_0-окрестностный ретракт в H^*.

Покажем, что A есть K_0-окрестностный ретракт в H. С этой целью рассмотрим произвольую пару (Z, C) подмножеств H и K_0-отображение $f : C \longmapsto A$. Посредством K_0-гомеоморфизма $x \longmapsto (1, x)$ отождествим A с $1 \times A$. Таким образом, $f : C \longmapsto A \subset \tilde{A}$.

Положим $W = \{(t, x) \in \tilde{A} : t > 0\}$. Ясно, что W – окрестность множества A в $\tilde{A}$. Очевидно, что отображение $\varphi : W \longmapsto A$, $\varphi : (t, x) \longmapsto (1, x)$ является K_0-отображением, и $\tilde{A}$ есть K_0-окрестностный ретракт в H^*. Следовательно, согласно лемме 4, f можно продолжить до K_0-отображения $f^* : U \longmapsto \tilde{A}$, где U – открытое в Z множество, содержащее C. Рассмотрим открытое в Z множество $V = (f^*)^{-1}(W)$ и отображение $\tilde{f} = \varphi \circ f^* : V \longmapsto A$. Отображение $\tilde{f}$, будучи композицией K_0-отображений, является само K_0-отображением, являясь продолжением отображения f и A, согласно лемме 4, будет K_0-окрестностным ретрактом в H (значит, и в X).

Достаточность. Пусть $G \subset H$ – открытое множество и $r : G \longmapsto X$ некоторая K_0-ретракция. По условию A есть K_0-окрестностный ретракт в H и, следовательно, в X. Пусть G_0 открыто в X, $r_0 : G_0 \longmapsto A$ есть K_0-ретракция. Обозначим

через $U_x \subset G$ ε_x-окрестность точки $x \in A$. В силу непрерывности r_0 для точки x, ее окрестности W_x существует окрестность $V_x \subset G_0$ точки x, такая что $V_x \subset U_x$ и $r_0(V_x) \subset W_x = A \cap U_x$.

Рассмотрим открытое в X множество $V = \bigcup_{x \in A} V_x$. Пусть $z \in V$ – произвольная точка, такая, что $z \in V_{x_0}$ для некоторой $x_0 \in A$. По построению, z и $r_0(z)$ принадлежат U_{x_0}. Так как U_{x_0} – выпуклое множество, то прямолинейный отрезок $[z, r_0(z)] \subset U_{x_0}$. Для каждой $t \in I$ пусть $z_t \in [z, r_0(z)]$ – точка, удовлетворяющая условию :

$$\|z - z_t\| = t \quad \text{при} \quad t < \|z - r_0(z)\| \qquad \text{и} \qquad z_t = r_0(z) \quad \text{при} \quad t \geq \|z - r_0(z)\|.$$

Ясно, что радиус ε_{x_0} окрестности U_{x_0} можем выбрать так, чтобы выполнялось $\|z - r_0(z)\| < 1$. Положив $\psi_t(z) = r(z_t)$ $(z \in V,\ 0 \leq t \leq 1)$, построим гомотопию $\psi_t : V \longmapsto X$. Очевидно, что ψ_0 есть вложение V в X и $\psi_t = r_0|V$ при $t \geq \|z - r_0(z)\|$. Гомотопия ψ_t есть K_0-гомотопия и $\psi_t(z) = z$ при $t \geq \|z - r_0(z)\|$ и $z \in A$.

Рассмотрим произвольные множество $Y \subset H$, K_0-отображение $f : X \longmapsto Y$ и его частичную K_0-гомотопию $g_t : V \longmapsto Y$ (т.е. $G_0 = f|A$). Определим K_0-гомотопию $g_t : V \longmapsto Y$, положив :

$$\widetilde{g}_t(z) = \begin{cases} f(\psi_t(z)) & \text{при} \quad t < \|z - r_0(z)\|, \\ g_t(\psi_t(z)) & \text{при} \quad t \geq \|z - r_0(z)\|. \end{cases}$$

Очевидно, что $\widetilde{g}_0 = f|V$ и $\widetilde{g}_t|A = g_t$ при $t \in I$. Продолжим гомотопию $\widetilde{g}_t$ до полной K_0-гомотопии $f_t : X \longmapsto Y$ отображения f (т.е. $f_0 = f$). Пусть $\varphi : X \longmapsto I$ – гладкая функция Урысона пары $A, X \backslash V$, равная нулю на $X \backslash V$ и равная 1 на A [9, 4]. Определим K_0-гомотопию $f_t : X \longmapsto Y$, положив :

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in X \backslash V, \\ \widetilde{g}_{\varphi(x)t}(x) & \text{при} \quad x \in V. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_0 = f$ и $f_t|A = g_t$ для $t \in I$. Таким образом, пара (X, A) является K_0-парой Борсука.

Следствие 2. Пусть $B^{(r)}$ – единичный замкнутый шар, $S^{(r+1)}$ его граничная сфера в линейном подпространстве $H_1 \subset H$ конечной коразмерности $r \geq 0$. Тогда пара $(B^{(r)}, S^{(r+1)})$ является K_0-парой Борсука.

Доказательство : Ортопроектор H на H_1 является K_0-ретракцией [3], и, стало быть, H_1 есть K_0-ретракт в H. С другой стороны, $B^{(r)}$ есть K_0-ретракт, а $S^{(r+1)}$ – K_0-окрестностный ретракт в H_1. В самом деле, отобтажение r : $H_1 \longmapsto B^{(r)}$, задаваемое формулой $r(x) = x$ при $x \in B^{(r)}$ и $r(x) = x/\|x\|$ при $x \in (H_1 \setminus B^{(r)})$, а также отображение $r' : H_1 \setminus \{0\} \longmapsto S^{(r+1)}$, задаваемое формулой $r'(x) = x/\|x\|$ для $x \in (H_1 \setminus \{0\})$ являются K_0-ретракциями. Следовательно, $B^{(r)}$ есть K_0-ретракт и, стало быть, является K_0-окрестностным ретрактом в H, а $S^{(r+1)}$ также является K_0-окрестностным ретрактом в H. В силу теоремы 3, $(B^{(r)}, S^{(r+1)})$ будет K_0-парой Борсука.

Предложение 2. *Если замкнутая пара (X, A) есть K_0-пара Борсука и декартово произведение $Z \times X$ K_0-допустимо (см. Определение 7), то и пара $(Z \times X, Z \times A)$, а в частности, пара $(I \times X, I \times A)$ есть K_0-пары Борсука.*

Доказательство : По теореме 2 множество $\tilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$ есть K_0-ретракт в $I \times X$. Пусть $\overline{r} : I \times X \longmapsto A$ – некоторая K_0-ретракция. Рассмотрим гомеоморфизм $h : I \times (Z \times X) \overset{K_0}{=} Z \times (I \times X)$. Декартово произведение $id_z \times \overline{r}$: $Z \times (I \times X) \longmapsto Z \times \tilde{A}$ будет K_0-отображением [4]. Положим $r = h^{-1} \circ (id_z \times \overline{r}) \circ h$. Отображение $r : I \times (Z \times X) \longmapsto (\widetilde{Z \times A})$ будет K_0-отображением, как композиция K_0-отображений. Ясно, что $\widetilde{Z \times A} = h^{-1}(Z \times \tilde{A})$. Наконец, легко проверить, что r есть K_0-ретракция, откуда следует, в силу теоремы 2, что $(Z \times X, Z \times A)$ является K_0-парой Борсука.

Замечание 4. Если линейная оболочка множества Z в H не конечномерна, то декартово произведение $Z \times X$ не является K_0-допустимым, ибо ортогональный проектор пространства H на эту линейную оболочку не может быть K_0-отображением. Таким образом, в отличие от классического случая, предложение 2 не всегда верно в классе K_0.

Теорема 4. *Пусть (X, A) – замкнутая пара и A есть K_0-деформационный ретракт подпространства X. Тогда, если пара $(I \times X, X_A)$, где $X_A = (0 \times X) \cup (I \times A) \cup (1 \times X)$, является K_0-парой Борсука, то A будет K_0-строгим деформационым ретрактом подпространства X.*

Доказательство : Пусть $r : X \longmapsto A$ – некоторая K_0-деформационная ретракция (см. Параграф 1). По отределению существует K_0-гомотопия $F : I \times X \longmapsto X$, связывающая id_x с отображением $i \circ r$, где $i : A \subset X$ есть вложение. На подмножестве X_A зададим частичную гомотопию $G_s : X_A \longmapsto X$ отображения F следующим образом :

$$G_s(t,x) = \begin{cases} F(0,x) = x & \text{где} \quad t = 0,\ x \in X, \\ F((1-s)t, x) & \text{где} \quad t \in I,\ x \in A, \\ F((1-s)t, r(x)) & \text{где} \quad t = 1,\ x \in X. \end{cases} \tag{15}$$

Легко проверить, что это определение корректно, и $G_0 = F|_{X_A}$. Далее, $G_s|_{0\times X} = id_X$ и $G_s|_{1\times X} = r$. Множества $0 \times X$, $I \times A$ и $1 \times X$ образуют замкнутое покрытие подмножества X_A, и на элементах этого покрытия отображение G_s непрерывно, откуда и следует, что отображение $G_s : X_A \longmapsto X$ тоже непрерывно. Из построения G_s следует также, что все три ограничения отображения G_s на элементы упомянутого покрытия являются K_0-отображениями. Применяя теорему 1, заключаем, что $G_s : X_A \longmapsto X$ является K_0-отображением.

Рассмотрим отображение $\overline{G} : I \times X_A \longmapsto X$, порожденное семейством (G_s) $(s \in I)$, т.е. $\overline{G}(s,t,x) = G_s(t,x)$ $(x \in X,\ s,t \in I)$. Из построения отображения G_s следует, что $\overline{G}$ является K_0-отображением. Таким образом, гомотопия G_s является частичной K_0-гомотопией K_0-отображения F. Так как $(I \times X, X_A)$ является K_0-парой Борсука, то существует K_0-гомотопия $F_s : I \times X \longmapsto X$ отображения F, продолжающая частичную K_0-гомотопию $G_s : X_A \longmapsto X$.

Рассмотрим конечное отображение $F_1 : I \times X \longmapsto X$ этой гомотопии. Ясно, что $F_1(0,x) = x$ и $F_1(1,x) = r(x)$ для каждой точки $(x \in X)$. Это означает, что F_1 есть K_0-гомотопия, связывающая id_X с $i \circ r$. Из второй строки формулы (15) и построения отображения G_s следует, что $F_1(t,x) = x$ для каждой точки $x \in A$ и $t \in I$, т.е. гомотопия F_1 неподвижна на A. Таким образом, $r : X \longmapsto A$ является K_0-строгой деформационной ретракцией, т.е. A является K_0-строгим деформационным ретрактом подпространства X.

Теорема 5. *Пусть (X, A) – замкнутая пара. Тогда, если (X, A) есть K_0-пара*

Борсука, то A есть K_0-окрестностный строгий деформационный ретракт подпространства X в слабом смысле (см. определение 5 параграфа 1).

Обратно, если A является K_0-окрестностным строгим деформационным ретрактом в слабом смысле некоторого открытого в X подмножества $U \supset A$, т.е. A является K_0-окрестностным строгим деформационным ретрактом подпространства X в слабом смысле, и существует K_0-функция Урысона $\varphi : X \longmapsto I$ пары $A, X\backslash U$ и $A = \varphi^{-1}(0)$, то (X, A) будет K_0-парой Борсука.

Доказательство : Пусть (X, A) есть K_0-пара Борсука и $r : I \times X \longmapsto \tilde{A}$ – некоторая K_0-ретракция. (По теореме 2 множество $\tilde{A} = (0, \times X) \cup (I \times A)$ есть K_0-ретракт в $I \times X$.) Положим

$$U = \{x \in X \mid r(1, x) \in (0, 1] \times A\}.$$

Так как $\tilde{A}\backslash(0 \times X) = (0, 1] \times A$ есть открытое множество в $\tilde{A}$, то множество $1 \times U = (1 + X) \cap r^{-1}[(0, 1] \times A]$ открыто в $1 \times X$. Далее, $U = \psi^{-1}(1 \times U)$, где $\psi : X \longmapsto I \times X$ – отображение, оределяемое формулой $\psi : x \longmapsto (1, x)$. Откуда следует, что U есть открытое множество в X и U содержит A.

Рассмотрим K_0-отображение $F : I \times U \longmapsto X$, являющееся композицией следующих K_0-отображений :

$$I \times U \subset I \times X \xmapsto{r} \tilde{A} \subset I \times X \longmapsto X.$$

легко проверить, что $F(0, x) = x$ и $F(1, x) \in A$ при $x \in U$. Так как $F(t, x) = x$ при $x \in A$ и $t \in I$, то F есть неподвижная K_0-гомотопия на A, связывающая отображение включения $U \subset X$ с отображением, переводящим U в A, т.е. A есть K_0-окрестностный строгий деформационный ретракт в слабом смысле подпространства X.

Обратно, пусть теперь A есть K_0-окрестностный строгий деформационный ретракт в слабом смысле подпространства X, и пусть $\varphi : X \longmapsto I$ есть K_0-функция Урысона пары A, $X\backslash U$, выделяющая A, т.е. $A = \varphi^{-1}(0)$. По условию существует K_0-гомотопия $F : I \times U \longmapsto X$, для которой $F(0, x) = x$ и $F(1, x) \in A$ $(x \in U)$, и эта гомотопия неподвижна на A, т.е. $F(t, x) = x$ при $x \in A$ и $t \in I$. Пусть

отображение $G : I \times U \longmapsto X$ корректно определено и непрерывно и таково, что

$$G(t,x) = \begin{cases} F\left(\frac{1}{\varphi(x)}, x\right) & \text{если} \quad x \in U\backslash A,\ t < \varphi(x), \\ F(1,x) & \text{если} \quad x \in U\backslash A,\ t \geq \varphi(x), \\ x & \text{если} \quad x \in A. \end{cases}$$

Ясно, что $G(0,x) = x$, $G(t,x) \in A$, если $t \geq \varphi(x)$ и G неподвижно на A. С другой стороны, из построения G заключаем, что все три ограничения являются K_0-отображениями, и, принимая во внимание утверждение теоремы 1. заключаем, что отображение $G : I \times U \longmapsto X$ является K_0-отображением.

Рассмотрим отображение $\widehat{F} : I \times X \longmapsto \widetilde{A} = (0 \times X) \cup (I \times A)$, задаваемое формулой

$$\widehat{F}(t,x) = \begin{cases} (0, G(0,x)) & \text{если} \quad x \in U,\ t \leq \varphi(x), \\ (t - \varphi(x), G(t - \varphi(x), x)) & \text{если} \quad x \in U,\ t > \varphi(x), \\ (0,x) & \text{если} \quad x \in X\backslash U,\ t \in I. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше относительно отображения G, заключаем, что отображение $\widehat{F}$ есть K_0-отображение и $\widehat{F}|_{\widetilde{A}} = id_{\widetilde{A}}$, т.е. $\widetilde{A}$ есть K_0-ретракт цилиндра $I \times X$, и, следовательно, по теореме 2 X, A есть K_0-пара Борсука.

Abstract. The paper presents modifications of some of the main results relating to Borsuk pairs in the category $K_0(H))^\infty$, where H is any real, separable Hilbert space. Admissible K_0-mappings are described and the K_0-versions of the main properties of Borsuk pairs are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Постников. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. Москва, 1984.
2. В. Г. Болтянский, "Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 9, № 2, стр. 107 - 120, 1974.
3. Э. А. Мирзаханян, "О свойствах одного класса отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 15, № 5, стр. 349 - 356, 1980.
4. Э. А. Мирзаханян, "Об одной теореме инвариантности области гильбертова пространства при K_0-диффеоморфизмах", Уч. Зап. ЕГУ, № 2, стр. 28 - 33, 1986.

5. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, I", Уч. Зап. ЕГУ, № 3, стр. 21 - 28, 1990.
6. Э. А. Мирзаханян, "Модифицированные ретракты в гильбертовых пространствах", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 6, стр. 10 - 27, 1998.
7. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, II", Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 3 - 10, 1991.
8. С. Ленг. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Москва, 1964.

Поступила 1 ноября 2004

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 6, 2004, 77–90

БЫСТРАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И ЛЕБЕГА

С. В. Самарчян

Ереванский государственный университет
E-mail : samarchyan@yahoo.com

Резюме. В настоящей работе изучена быстрая аппроксимация функций пространств Харди и Лебега классическими линейными многообразиями. Получены аналитические описания подклассов этих пространств, аппроксимируемых некоторыми классическими системами быстрее скорости геометрической прогрессии.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 1930-ых годов, когда А. Н. Колмогоров [1] предложил в качестве средств аппроксимации рассматривать всевозможные линейные многообразия заданной конечной размерности, одной из центральных задач в теории конструктивной аппроксимации остается вопрос нахождения некоторой системы функций $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, конечные линейные комбинации которых хорошо аппроксимируют функции наперед заданного класса (см. [2], гл. 13–14, [3] и [4]).

В задачах, рассмотренных в настоящей работе, основным вопросом является сравнение скорости этой аппроксимации со скоростью геометрической прогрессии.

Задача 1. Требуется построить систему функций $e_k : E \to \mathbb{C}$, $E \subset [0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$ так, чтобы для каждой функции $f \in H^{\infty}$ существовала последовательность полиномов $\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k(x)$ такая, что

$$\sqrt[n]{\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k(x) \right|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x \in E. \tag{1}$$

При выполнении условия (1) будем говорить, что система $e_k : E \to \mathbb{C}$, $E \subset [0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$ аппроксимирует функции класса H^∞ быстрее скорости геометрической прогрессии.

Например, если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – система Хаара или Франклина, или тригонометрическая система $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^\infty$, или система $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ на отрезке $E = [0,1)$, то условие (1) не выполняется. Особый интерес представляет случай $e_k = x^k$, $k = 0, 1, \ldots$ на "узких" множествах E.

Пусть $\gamma(E)$ – логарифмическая емкость множества E (см., например, [2], стр. 603).

Теорема 1. *Пусть $E \subset [0,1)$ – компактное множество. Для того, чтобы каждой функции $f \in H^\infty$ соответствовала последовательность полиномов $\sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k$, удовлетворяющая условию*

$$\sqrt[n]{\left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k \right|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x \in E,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(E) = 0$.

Задача 2. Пусть D – некоторое подмножество открытой левой полуплоскости и пусть $F = L^2(0,\infty) \cap \Im$, где $\Im$ – класс целых функций экспоненциального типа, индикаторные диаграммы которых лежат в D. Требуется построить систему функций $e_k \in L^2(0,\infty)$, $k = 1, 2, \ldots$ так, чтобы для каждой функции $f \in F$ существовала последовательность полиномов $\sum_{k=1}^n a_k^{(n)} e_k$ такая, что

$$\sqrt[n]{\left\| f - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} e_k \right\|_{L^2(0,\infty)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

В случае, когда $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – система из экспонент, аппроксимация со скоростью геометрический прогрессии обеспечена теоремой В. Х. Мусояна [5]. С другой стороны, в работе [6] показано, что аппроксимация экспонентами быстрее скорости геометрической прогрессии невозможна, если D имеет положительную меру. В настоящей работе получено, что если D – компактное множество положительной логарифмической емкости, то результат [6] остается в силе.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность различных комплексных чисел, выбранных из некоторого компактного подмножества открытой правой полуплоскости, D – компактное множество положительной логарифмической*

емкости из открытой левой полуплоскости и $-\overline{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\bar{\lambda} \in D\}$. *Тогда для некоторого* $\lambda \in (-\overline{D})$ *функция* $f_\lambda(z) = e^{-\lambda z}$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f_\lambda)} > 0,$$

где

$$E_n(f) = \inf_{P\in H_n} \|f - P\|_{L^2(0,\infty)}, \quad H_n = \left\{ P : P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k x} \right\}.$$

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим вопрос описания класса функций, аппроксимируемых конечными линейными комбинациями системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ со скоростью быстрее скорости геометрической прогрессии.

Пусть X – локально выпуклое топологическое векторное пространство с топологией, индуцированой разделяющим семейством полунорм $\{p\}$. Далее, пусть $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ – бесконечная треугольная матрица векторов из X, L_n – линейная оболочка конечной системы $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$, а $q \in (0,\infty)$.

Определение 1. Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется *q-ограниченной снизу*, если для любой последовательности полинимов $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k^{(n)} \in L_n$ имеет место неравенство

$$\sup_{p\in\{p\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p(P_n)} \ge q \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\le k\le n} |a_k^{(n)}|}.$$

Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется 0-ограниченной снизу, если она q-ограничена снизу для некоторого $q \in (0,\infty)$.

Определение 2. Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется *q-ограниченной сверху*, если

$$\sup_{p\in\{p\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\le k\le n} p(e_k^{(n)})} \le q.$$

Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется ∞-ограниченной сверху, если она q-ограничена сверху для некоторого $q \in (0,\infty)$.

Систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем отождествлять с бесконечной треугольной матрицей $(e_k^{(n)})_{k\le n}$, n-ая строка которой состоит из первых n членов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 3. *Пусть система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 0*-ограничена снизу и* ∞*-ограничена сверху. Для функции* $f \in X$ *существует последовательность полиномов* $P_n =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k$, *удовлетворяющая условию* $\sqrt[n]{p(f - P_n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *для всех полунорм* $p \in \{p\}$, *тогда и только тогда, когда в топологии* X *имеет место представление*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad \text{где} \quad \sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Легко заметить, что ортонормальная система в гильбертовом пространстве 1-ограничена снизу и 1-ограничена сверху. Для биортогональных систем справедлива

Теорема 4. *Если системы* $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *и* $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *биортогональны при всех* $n \in \mathbb{N}$, *и матрица* $(\varphi_k^{(n)})_{k\le n}$ q*-ограничена сверху в нормированном пространстве* Y, *то матрица* $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ $1/q$*-ограничена снизу в сопряженном пространстве* Y^*.

Обратное утверждение неверно. Это можно легко проверить в гильбертовом пространстве на примере ортонормальной системы $e_k^{(n)} = e_k$, $n = 1, 2, \ldots$, $k \le n$, используя большой произвол выбора биортогональной матрицы $(\varphi_k^{(n)})_{k\le n}$. Но если в гильбертовом пространстве потребовать, чтобы линейные оболочки систем $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ совпадали для всех $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ порождали друг друга (см. [7]), то получим также обратный результат.

Теорема 4А. *Пусть* $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *и* $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *– порожденные биортогональные системы в гильбертовом пространстве* H *при всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда матрица* $(\varphi_k^{(n)})_{k\le n}$ q*-ограничена сверху тогда и только тогда, когда матрица* $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ $1/q$*-ограничена снизу.*

В работах [7] – [10] В. Х. Мусояном и М. С. Мартиросяном получены явные представления порожденных биортогональных систем для экспонент и простейших рациональных дробей в пространствах Лебега $L^p(0,\infty)$ и Харди H^p, H_+^p $(1 < p < \infty)$. В результате получаем эффективное приложение теоремы 4.

Пусть $\Lambda(K)$ есть множество бесконечных треугольных матриц комплаксных чисел $(\lambda_{kn})_{k\le n}$, выбранных из множества $K \subset \mathbb{C}$ и

$$d(K) = \inf\{2M : K \subset \{z : |z| \le M\}\}.$$

Теорема 5. *а) Пусть* K *– компакт положительной логарифмической емкости, содержащийся в открытой правой полуплоскости. Тогда существуют матрицы* $(\mu_{kn})_{k\le n}$ *и* $(\lambda_{kn})_{k\le n} \in \Lambda(K)$ *такие, что матрица* $(e^{-\mu_{kn}x})_{k\le n}$ *не* 0*-ограничена снизу, а* $(e^{-\lambda_{kn}x})_{k\le n}$ *является* $\left(\frac{\gamma(K)}{d(K)}\right)^2$*-ограниченной снизу в пространствах* $L^p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$.

b) Пусть K – компакт положительной логарифмической емкости, содержащийся в единичном круге. Тогда существуют матрицы $(\mu_{kn})_{k\le n}$ и $(\lambda_{kn})_{k\le n} \in \Lambda(K)$ такие, что матрица $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-\overline{\mu_{kn}}z}\right)_{k\le n}$ не 0-ограничена снизу, а $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-\overline{\lambda_{kn}}z}\right)_{k\le n}$ является $\gamma(K)/2$-ограниченной снизу в пространствах H^p, $1<p<\infty$.

c) Пусть K – компакт положительной логарифмической емкости, содержащийся в открытой верхней полуплоскости. Тогда существуют матрицы $(\mu_{kn})_{k\le n}$ и $(\lambda_{kn})_{k\le n} \in \Lambda(K)$ такие, что матрица $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\mu_{kn}}}\right)_{k\le n}$ не 0-ограничена снизу, а $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\lambda_{kn}}}\right)_{k\le n}$ является $\frac{\gamma(K)}{d(K)}$-ограниченной снизу в пространствах H^p_+, $1<p<\infty$.

d) Если в пунктах a), b) или c) дополнительно предположить, что K – самоподобная фрактальная строка (см. [11]), тогда матрицы $(\lambda_{kn})_{k\le n}$ можно заменить последовательностями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, выбранными так, чтобы соответствующие системы были 0-ограниченными снизу.

Аналогичная задача решается для системы $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, хотя она находится вне рамок приложений Теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть $E \subset \overline{\mathrm{D}}$ – компактное множество положительной логарифмической емкости. Тогда система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является $\frac{1}{4}\gamma(E)$-ограниченной снизу в топологии точечной сходимости на E.*

Для тригонометрической системы можно провести аналогичные рассуждения, предварительно заметив, что функция $e^{2\pi i z}$ переводит самоподобную фрактальную строку отрезка $[0,1)$ на самоподобную фрактальную строку единичной окружности. Пусть $E \subset [0,1)$ и $e^{2\pi iE}$ – компактное множество положительной логарифмической емкости. Тогда система функций $\{e^{2\pi ikx},\ k=0,\pm1,\pm2\ldots\}$ $\frac{1}{4}\gamma(e^{2\pi iE})$-ограничена снизу в топологии точечной сходимости на E.

Таким образом, теорему 3 можно применить ко всем рассматриваемым 0-ограниченым снизу системам. Например, применив теорему 3 к системе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, получим элементарное доказательство следующей классической теоремы.

Теорема (Бернштейн–Уолш). *Пусть $E \subset \overline{\mathrm{D}}$ – компактное множество положительной логарифмической емкости. Если для функции $f: E \to \mathbb{C}$ существует последовательность полиномов $\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k$ такая, что*

$$\sqrt[n]{\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k\right|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x \in E,$$

то f можно продолжить до целой функции.

Отметим также, что если в условии (1) рассматривать сходимость в смысле нижнего предела, то удовлетворяющая этому условию система существует.

Теорема 7. *Каждой функции $f \in H(\overline{\mathbf{D}})$ соответствует последовательность полиномов $\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ такая, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \right|} = 0, \quad x \in [0,1].$$

§2. ОЦЕНКИ ПОЛИНОМОВ С ДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОРНЕЙ

Для данной бесконечной, треугольной матрицы $(x_k^{(n)})_{k\le n} \subset \mathbb{C}$ обозначим

$$f_n(x) = \sqrt[n]{\left|x - x_1^{(n)}\right| \left|x - x_2^{(n)}\right| \cdots \left|x - x_n^{(n)}\right|}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем отождествлять с бесконечной треугольной матрицей $(x_k^{(n)})_{k\le n}$, n-ая строка которой состоит из первых n членов последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Лемма 1. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – компактное множество. Тогда*

$$\inf_{(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n},\, n_k\uparrow\in\mathbb{N}} \sup_{x\in E} \varlimsup_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \gamma(E),$$

где инфимум достигается для некоторой бесконечной треугольной матрицы $(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n}$ и последовательности $n_k = k$.

Доказательство : Существование бесконечной треугольной матрицы, удовлетворяющей условию $\sup_{x\in E} \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) \le \gamma(E)$ непосредственно следует из теоремы Фекете–Сеге (см. [2], стр. 606). Остается доказать нижнюю оценку. Допустим обратное, существует бесконечная треугольная матрица $(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n}$ и возрастающая последовательность $n_k \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\sup_{x\in E} \varlimsup_{k\to\infty} f_{n_k}(x) < C < \gamma(E).$$

Обозначим $E_s = \{x \in E : f_{n_k}(x) \le C,\ k \ge s\}$. Тогда E_s являются компактами и $E_s \uparrow E$. Из определения множеств E_s имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sup_{x\in E_s} f_{n_k}(x) \le C$$

и, следовательно, $\gamma(E_s) \le C$. Но поскольку $\gamma(E_s) \uparrow \gamma(E)$, то $\gamma(E) \le C$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого полинома* $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_0 \neq 0$ *существует полином* $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}$, $b_0 = 1$ *удовлетворяющий неравенству*

$$|P_n(x)| \geq 4^{-n} \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \cdot |Q_n(x)|, \quad x \in \overline{\mathbf{D}}.$$

Доказательство : Пусть $P_n(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, и $\max_{0 \leq j \leq n} |a_j| = |a_k|$. Тогда согласно теореме Виета

$$a_0 \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = \pm a_k \quad .$$

Не теряя общности, предположим, что в этой сумме наибольшим по модулю слагаемым является $x_1 x_2 \cdots x_k$. Тогда $C_n^k |a_0 x_1 x_2 \cdots x_k| \geq |a_k|$, поэтому

$$|a_0 x_1 x_2 \cdots x_k| \geq 2^{-n} |a_k|.$$

Предложение 1. *Существует функция* $z : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию*

$$|x - y| \geq \frac{|y|}{2} |x - z(y)|, \quad x \in \overline{\mathbf{D}}, \quad y \in \mathbb{C}.$$

Доказательство : Достаточно выбрать

$$z(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq 2, \\ 0, & |y| > 2. \end{cases}$$

Откуда получим

$$|P_n(x)| = |a_0| \prod_{i=1}^{k} |x - x_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i| \geq 2^{-k} \left| a_0 \prod_{i=1}^{k} x_i \right| \prod_{i=1}^{k} |x - y_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i| \geq$$

$$\geq 4^{-n} |a_k| \prod_{i=1}^{k} |x - y_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i|,$$

где $y_i = z(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Остается выбрать

$$Q_n(x) = \prod_{i=1}^{k} |x - y_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i|.$$

Лемма 2 доказана.

Предложение 2. *Пусть* $\pi_n[a,b]$ – *количество точек* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *попавших в отрезок* $[a,b]$. *Тогда существует последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что для любого отрезка* $[a,b] \subset [0,1]$ *имеем*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\pi_n[a,b]}{n} = 1.$$

Доказательство : Построим последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ так, чтобы при любом $m = 0, 1, 2, \ldots$ конечная последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_{2^m+1}$ являлась множеством точек деления отрезка $[0,1]$ на 2^m равных частей. Выберем $x_k = y_i$, где $i! \leq k < (i+1)!$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $[a,b] \subset [0,1]$. Тогда для любого $i_0 \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $i > i_0$ такое, что $y_i \in [a,b]$ и, следовательно, $x_k \in [a,b]$, $i! \leq k < (i+1)!$. Таким образом,

$$\frac{\pi_{(i+1)!}[a,b]}{(i+1)!} \geq \frac{(i+1)! - i!}{(i+1)!} = \frac{i}{i+1},$$

и доказательство завершено.

Лемма 3. *Существует последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ *такая, что*

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

Доказательство : Выберем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию предложения 2. Для любой точки $x \in [0,1]$ и любого отрезка $[a,b]$, содержащего точку x, имеем

$$f_n(x) = \sqrt[n]{|x-x_1||x-x_2|\cdots|x-x_n|} \leq (b-a)^{\frac{1}{n}\pi_n[a,b]}.$$

Следовательно, $\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq b-a$. Поэтому $\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

§3. 0-ОГРАНИЧЕННЫЕ СНИЗУ СИСТЕМЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство теоремы 3. Неоходимость. При фиксированном k рассмотрим числовой ряд

$$a_k^{(k)} + \left(a_k^{(k+1)} - a_k^{(k)}\right) + \left(a_k^{(k+2)} - a_k^{(k+1)}\right) + \cdots. \tag{3}$$

Так как для любой полунормы $p \in \{p\}$ выполняется

$$\sqrt[n]{p(P_n - P_{n-1})} \leq \sqrt[n]{p(P_n - f)} + \sqrt[n]{p(f - P_{n-1})} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

и система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 0-ограничена снизу, то

$$\sqrt[n]{\max\left\{\left|a_j^{(n)} - a_j^{(n-1)}\right|, \left|a_n^{(n)}\right| : j = 1, \ldots, n-1\right\}} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда для любого положительного числа $\epsilon < 1$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\max\left\{\left|a_j^{(n)} - a_j^{(n-1)}\right|, \left|a_n^{(n)}\right| : j = 1, \ldots, n-1\right\} \leq 2^{-n}\epsilon^n, \quad n \geq n_0, \tag{4}$$

поэтому ряд (3) абсолютно сходится к сумме $c_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)}$. Согласно оценке (4) имеем

$$|c_k| \leq \left|a_k^{(k)}\right| + \sum_{n=k}^{\infty}\left|a_k^{(n+1)} - a_k^{(n)}\right| \leq \frac{\epsilon^k}{2^k} + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\epsilon^{n+1}}{2^{n+1}} \leq 2\,\frac{\epsilon^k}{2^k}, \quad k \geq n_0.$$

Следовательно, $\sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Пусть $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Достаточно показать, что $P_n - Q_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Зафиксируем полунорму $p \in \{p\}$. В силу ∞-ограниченности сверху системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует константа M, удовлетворяющая условию $p(e_k) \leq M^k$. Не теряя общности предположим, что $M > 1$ и выберем $\epsilon < 1/M$. Тогда, учитывая (4), при $n \geq n_0$ имеем

$$p(Q_n - P_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\left|c_k - a_k^{(n)}\right| p(e_k) = \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=n}^{\infty}\left(a_k^{(i+1)} - a_k^{(i)}\right)\right| M^k \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\epsilon^{i+1}}{2^{i+1}}\right) M^k \leq n\left(\frac{\epsilon M}{2}\right)^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Достаточность. Выберем $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Тогда для любой полунормы $p \in \{p\}$ имеем

$$\sqrt[n]{p(f - P_n)} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k| p(e_k)} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k| M^k} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема 3 доказана.

§4. ПРИМЕРЫ 0-ОГРАНИЧЕННЫХ СНИЗУ СИСТЕМ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 4, 4А, 5 И 6

Доказательство теоеремы 4. Пусть $X = Y^*$ и $P_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)}$. Тогда

$$\sqrt[n]{\|P_n\|_X} = \sqrt[n]{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)}\right\|_X} = \sqrt[n]{\sup_{\|y\|_Y=1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)}, y\right)},$$

и, следовательно,

$$\sqrt[n]{\|P_n\|_X} \geq \max_{1\leq k\leq n} \sqrt[n]{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)},\ \frac{\varphi_k^{(n)}}{\max\limits_{1\leq k\leq n}\|\varphi_k^{(n)}\|_Y}\right)\right|} = \frac{\sqrt[n]{\max\limits_{1\leq k\leq n}|a_k^{(n)}|}}{\sqrt[n]{\max\limits_{1\leq k\leq n}\|\varphi_k^{(n)}\|_Y}}.$$

Доказательство теоремы 4А. Пусть

$$\max_{1\leq k\leq n}\|\varphi_k^{(n)}\| = \|\varphi_{j_n}^{(n)}\|, \quad \varphi_{j_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} e_k^{(n)}.$$

Тогда

$$\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n}\|\varphi_k^{(n)}\|}\right]^2 = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|\varphi_{j_n}^{(n)}\|}\right]^2 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|\varphi_{j_n}^{(n)}\|^2} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\varphi_{j_n}^{(n)}, \varphi_{j_n}^{(n)}\right)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\varphi_{j_n}^{(n)}, \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} e_k^{(n)}\right)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{j_n}^{(n)}|} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n}|c_k^{(n)}|} \leq q\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|\varphi_{j_n}^{(n)}\|} = q\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n}\|\varphi_k^{(n)}\|}.$$

Доказательство теоремы 5. Покажем, что существуют 0-ограниченные снизу матрицы из экспонент и рациональных функций.

Используя теорему Фекете–Сеге, нетрудно убедиться, что существует бесконечная треугольная матрица комплексных чисел $(\lambda_{kn})_{k\leq n} \in \Lambda(K)$, удовлетворяющая условиям $\lambda_{in} \neq \lambda_{jn}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ и

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\min_{1\leq m\leq n}\prod_{k=1,\,k\neq m}^{n}|\lambda_{kn} - \lambda_{mn}|} \geq \gamma(K). \tag{5}$$

В силу теоремы 4, q-ограниченность снизу доказывается проверкой $\frac{1}{q}$-ограниченности сверху соответствующих биортогональных систем.

а) Пусть

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{1}{\overline{B_n'(\lambda_{kn})}}\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_{mn}x}}{B_n'(\lambda_{mn})(\lambda_{mn}+\overline{\lambda_{kn}})},$$

где

$$B_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda-\lambda_{in}}{\lambda+\overline{\lambda_{in}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда системы $\left\{e^{-\lambda_{kn}x}\right\}_{k=1}^{n}$ и $\left\{\varphi_k^{(n)}(x)\right\}_{k=1}^{n}$ биортогональны при $n = 1, 2, \ldots$ (см. [7]). Имеем

$$\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q \leq Mn\left(\max_{1\leq m\leq n}\frac{1}{|B_n'(\lambda_{mn})|}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\|\cdot\|_q$ – норма пространства $L^q(0,\infty)$, $1 \leq q \leq \infty$, а M – некоторая константа, независящая от n. В силу оценки (5) получаем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{1\leq m\leq n}\sqrt[n]{|B_n'(\lambda_{mn})|} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{1\leq m\leq n}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1,\,k\neq m}^{n}|\lambda_{kn}-\lambda_{mn}|}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}|\overline{\lambda_{kn}}+\lambda_{mn}|}} \geq \frac{\gamma(K)}{d(K)},$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n}\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q} \leq \left(\frac{d(K)}{\gamma(K)}\right)^2.$$

b) Пусть

$$\varphi_k^{(n)}(z) = \frac{B_n(z)}{2\pi}\frac{1}{B_n'(\lambda_{kn})(\lambda_{kn}-z)},$$

где

$$B_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{in}-\lambda}{1-\overline{\lambda_{in}}\lambda}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда системы $\left\{\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-\lambda_{kn}z}\right\}_{k=1}^{n}$ и $\left\{\varphi_k^{(n)}(z)\right\}_{k=1}^{n}$ биортогональны при $n = 1, 2, \ldots$ (см. [9]). Имеем

$$\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q \leq M\max_{1\leq m\leq n}\frac{1}{|B_n'(\lambda_{mn})|}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\|\cdot\|_q$ – норма пространства H^q, $1 < q < \infty$, а M – константа, независящая от n. В силу оценки (5) получим

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{1\leq m\leq n}\sqrt[n]{|B_n'(\lambda_{mn})|} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{1\leq m\leq n}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1,\,k\neq m}^{n}|\lambda_{kn}-\lambda_{mn}|}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}|1-\overline{\lambda_{kn}}\lambda_{mn}|}} \geq \frac{\gamma(K)}{2},$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n}\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q} \leq \frac{2}{\gamma(K)}.$$

c) Доказательство аналогично доказательству b) с использованием результатов работы [10] и

$$B_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_{in}}{\lambda - \overline{\lambda_{in}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

d) Достаточно доказать, что если K – самоподобная фрактальная строка, то существует последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda(K)$ такая, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\min_{1\le m\le n} \prod_{k=1,\, k\neq m}^{n} |\lambda_k - \lambda_m|} > 0. \tag{6}$$

Справедливость (6) легко проверяется, когда K – отрезок. Для этого достаточно выбрать $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы при любом $m = 0, 1, 2, \ldots$ конечная последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^m+1}$ являлась множеством точек деления данного отрезка на 2^m равных частей. Общий же случай сводится к этому случаю с помощью сюръективного отображения самоподобной фрактальной строки на отрезок, удовлетворяющего условию Липшица с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Для простоты изложения докажем существование такого отображения на примере множества Кантора.

Построим сюръективное отображение $\psi : E \longmapsto [0, 1]$ аналогично построению, приведенному в [12] (пример 23, стр. 131-132). Если $x, y \in E$ и I – наименьший канторовый отрезок, содержащий обе точки x и y, то длина отрезка I равна 3^{-n} для некоторого $n \in \mathbb{N}$, а точки $\psi(x)$ и $\psi(y)$ принадлежат интервалу длины 2^{-n}. Следовательно,

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le \frac{1}{2^n} = 2\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^{\log_3 2} \le 2|x - y|^{\log_3 2}.$$

Заметим, что равномерная распределенность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ еще не является гарантом 0-ограниченности снизу соответствующей системы.

Теперь построим примеры систем из экспонент и рациональных функций с равномерно распределенной последовательностью $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, но не являющихся 0-ограниченными снизу.

a) Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 = 1)$ – последовательность различных действительных чисел, равномерно распределенная в отрезке $[1, 2]$. Пусть $\pi_n(a, b) = card\,\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cap [a, b)$, где $[a, b) \subset [1, 2)$. Тогда (см., например, [13], стр. 116)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_n(a, b)}{n} = b - a.$$

Рассмотрим новую последовательность $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, отличающуюся от $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ лишь при индексах из множества $S := \{2^m / m \in N\}$ подстановкой $\lambda_{2^m}^* = 1 + \left(\frac{1}{2^m}\right)^{2^m}$. Эта последовательность также будет равномерно распределена в отрезке $[1, 2]$.

Пусть $P_n(x)$ – следующая последовательность полиномов из экспонент : $P_n(x) = 0$ при $n \notin S$ и $P_{2^m}(x) = e^{-\lambda_1^* x} - e^{-\lambda_{2^m}^* x}$, $m = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\sqrt[n]{\|P_n\|_p} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Но так как каждый из полиномов P_{2^m} содержит коэффициент, равный единице, то система $\{e^{-\lambda_k^* x}\}_{k=1}^{\infty}$ не является 0-ограниченной снизу в пространствах $L^p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$.

Аналогичные примеры строятся в случаях b) и c).

Доказательство теоремы 6. Достаточно заметить, что согласно леммам 1 и 2 система $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является $\frac{\gamma(E)}{4}$-ограниченной снизу.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЕРНШТЕЙНА–УОЛША И ТЕОРЕМ 1, 2, 7

Доказательство теоремы Бернштейна–Уолша. Так как из теорем 3 и 6 следует, что $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ на множестве E, и $\sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, то f продолжима до целой функции.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Сразу вытекает из теоремы Бернштейна–Уолша и теоремы единственности аналитических функций.

Достаточность. В силу леммы 1 можно построить матрицу $(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n}$ точек множества E так, чтобы иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x - x_1^{(n)}\right|\left|x - x_2^{(n)}\right| \cdots \left|x - x_n^{(n)}\right|} = 0, \quad x \in E.$$

Возьмем в качестве $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} x^k$ интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in H^\infty$ с узлами интерполяции $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$. Остается заметить, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} x^k \right| \le \frac{M_n}{n!} \left| \left(x - x_1^{(n)}\right)\left(x - x_2^{(n)}\right) \cdots \left(x - x_n^{(n)}\right) \right|, \quad x \in [0, a],$$

где $a = \max\{x : x \in E\}$, а $M_n = \max_{x\in[0,a]} \left|f^{(n)}(x)\right|$ (см., например, [14], стр. 494-495).

Доказательство теоремы 2. Достаточно воспользоваться леммой 1 в доказательстве теоремы 2.1 работы [6].

Доказательство теоремы 7. Достаточно воспользоваться леммой 3 и рассуждениями, приведенными при доказательстве достаточности теоремы 1.

Автор благодарен профессорам В. Х. Мусояну и Г. Г. Геворкяну за консультации.

Abstract. The paper investigates fast approximation of functions from the Hardy and Lebesgue spaces by classical linear varieties. Some subclasses of these spaces, which may be approximated by several classical systems faster than the rate of the geometric progression, are analytically described.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. N. Kolmogorov, "Ueber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse", Ann. of Math., vol. 37, pp. 107 – 110, 1936.
2. G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz, Constructive Approximation : Advanced Problems, Springer Verlag, Berlin, 1996.
3. V. N. Temlyakov, "Nonlinear Kolmogorov's widths", Matem. Zametki, vol. 63, pp. 891 – 902, 1998.
4. L. Baratchart, V. A. Prokhorov, E. B. Saff, "On Blaschke products associated with n-widths" (submitted in J. of Approx. Theory).
5. В. Х. Мусоян, "О скорости приближения целых функций полной системой Дирихле", АН СССР, Мат. заметки, том 36, № 6, стр. 857 – 863, 1984.
6. М. С. Мартиросян, С. В. Самарчян, "О скорости аппроксимации целых функций системой экспонент с ограниченной последовательностью показателей" (в печати).
7. В. Х. Мусоян, "Экстремальные свойства полиномов Дирихле" Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 18, № 4, стр. 253 – 270, 1983.
8. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций" Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 21, № 2, стр. 163 – 186, 1986.
9. М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполной системе рациональных функций в пространствах H^p $(1 < p < \infty)$", Изв. НАН Армении, Математика, том 32, № 5, стр. 32 – 44, 1997.
10. М. С. Мартиросян "О представлении по неполной системе рациональных функций". Изв. НАН Армении, Математика, том 32, № 6, стр. 30 – 38, 1997.
11. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuysen, "Complex dimensions of self-similar fractal strings and Diophantine approximation", Experimental Math., vol. 12, no. 1, pp. 41 – 69, 2003.
12. Б. Гельбаум, Дж. Ольмстед, Контрпримеры в анализе, Мир, 1967.
13. К. Чандрасекхаран, Введение в аналитическую теорию чисел, Москва, 1974.
14. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Наука, Москва, 1974.

Поступила 19 Сентября 2004

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 39, Номер 6, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Г. Казарян и В. Н. Маргарян, Число Зайденберга–Тарского для двумерных вырождающихся многочленов 3
С. А. Акопян, Об интегральных преобразованиях с некоторыми специальными ядрами. 17
Т. Н. Арутюнян и В. В. Нерсесян, Теорема единственности в обратной задаче Штурма–Лиувилля 29
А. Р. Хачатрян, Непрерывные и Липшицевые многозначные отображения с ограничениями типа равенств и неравенств 39
Э. А. Мирзаханян и Н. Э. Мирзаханян, Модифицированные пары Борсука в гильбертовом пространстве 56
С. В. Самарчян, Быстрая аппроксимация в пространствах Харди и Лебега 77
Содержание тома 39 91

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 39, No. 6, 2004

CONTENTS

H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan, Seidenberg–Tarski number for two-dimensional degenerate polynomials 3
S. A. Hakobyan, Integral transforms by some special kernels 17
T. N. Harutyunyan and V. V. Nersesyan, A uniqueness theorem in the inverse Sturm–Liouville problem 29
A. R. Khachatryan, Continuous and Lipschitz multivalued mappings with equality or inequality type restrictions 39
E. A. Mirzakhanyan and N. E. Mirzakhanyan, Modified Borsuk pairs in a Hilbert space 56
S. V. Samarchyan, Fast approximation in Hardy and Lebesgue spaces 77
Contents of Volume 39 91

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 39 **НОМЕРА 1 — 6** **2004**

Номер

Задача Дирихле в весовых пространствах бигармонических функций
Г. М. Айрапетян 3

Об одной краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения высокого порядка с вырождением
Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян 2

Об интегральных преобразованиях с некоторыми специальными ядрами
С. А. Акопян 6

Комбинаторные валюации в пространстве прегеодезических
Р. В. Амбарцумян 4

Восстановление выпуклых тел с помощью функции радиуса кривизны проекции
Р. Г. Арамян 4

Восстановление центрально-симметричных выпуклых тел с помощью радиусов кривизны проекции
Р. Г. Арамян 5

Теорема единственности в обратной задаче Штурма–Лиувилля
Т. Н. Арутюнян, В. В. Нерсесян 6

Уравнение типа восстановления с вполне монотонным ядром
А. Г. Барсегян 3

Интеграл Коши и некоторые его применения
Дж. Е. Бренен 1

Представление пространства $L_1(R)$ функциональными рядами с абсолютно сходящимися коэффициентами
А. А. Вагаршакян 5

О поведении решений гипоэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^2$
О. Р. Габриелян 5

Неравенство Рао–Крамера для общих статистических моделей с фильтрацией
К. В. Гаспарян 2

О почти всюду расходимости одного метода суммирования для вейвлет разложений
Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян 2

Центральные предельные теоремы для теплицевых квадратичных функционалов от стационарных процессов
М. С. Гиновян, А. А. Саакян 1

О расходимости L^1-гриди алгоритма по системе Хаара
С. Гогян 5

О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе
М. Г. Григорян 5

Локальная предельная теорема для последовательностей зависимых случайных величин
Т. П. Казанчян 2

Поведение на бесконечности неэллиптических многочленов
Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян 3

Число Зайденберга–Тарского для двумерных вырождающихся полиномов
Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян 6

Оценка максимальных операторов связанных с обобщёнными лакунарными множествами
Г. А. Карагулян, М. Т. Лейси 1

Структура вырожденного множества свободной границы в теории потенциала
Л. А. Кафарели, Г. Шахголян 2

Универсальные свойства целых функций, представимых лакунарными степенными рядами
В. А. Мартиросян, А. З. Мартиросян 3

Аппроксимация полиномами Дирихле : равномерность и скорость
М. С. Мартиросян 3

Описание характеристистических функций диссипативных канонических операторов
П. Э. Мелик-Адамян 5

Модифицированные пары Борсука в гильбертовом пространстве
Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян 6

Crack STIT tessellations–existence and uniqueness of tessellations that are stable with respect to iterations
W. Nagel and V. Weiss 4

О скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингал-разностных случайных полей
Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян 2

Нерешённые задачи 2

Пиковые множества инвариантных относительно сдвига алгебр
К. Л. Панкратьева 3

Быстрая аппроксимация в пространствах Харди и Лебега
С. В. Самарчян 6

Задача Дирихле для эллиптических систем в классе функций полиномиального роста
Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян 5

Представление липшицевых многозначных отображений
А. Р. Хачатрян 3

Непрерывные и липшицевые многозначные отображения с ограничениями типа равенств и неравенств
А. Р. Хачатрян 6

Распределение длины случайной хорды для прямоугольных параллелепипедов
А. С. Хачатрян, Г. С. Сукиасян 4

Интегро-дифференциальные уравнения физической кинетики
Х. А. Хачатрян 3