

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինովյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсисян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ПРОЕКЦИИ

Р. Г. Арамян

Институт Математики НАН Армении

E-mail : rafik@instmath.sci.am

Резюме. Данная статья рассматривает проблему существования и единственности центрально-симметричного выпуклого тела, для которого функция радиуса кривизны проекции совпадает с заданной флаговой функцией. Найдено необходимое и достаточное условие, которое обеспечивает положительный ответ. А также предложен алгоритм построения рассматриваемого тела.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F(\omega)$ – функция, определенная на сфере S^2 . Проблема существования и единственности выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^3$, для которого средний радиус кривизны в точке на ∂B с направлением нормали ω совпадает с заданной функцией $F(\omega)$, была поставлена Кристоффелем (см. [4]). Пусть $R_1(\omega)$ и $R_2(\omega)$ – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке с направлением нормали $\omega \in S^2$. По существу, проблема Кристоффеля ставит вопрос о существовании тела B , для которого $R_1(\omega) + R_2(\omega) = F(\omega)$. Аналогичная проблема для Гауссовой кривизны $R_1(\omega)R_2(\omega) = F(\omega)$ была поставлена и решена Минковским. В. Бляшке свел проблему Кристоффеля к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для опорной функции (см. [4]). Александров и Погорелов обобщили эти проблемы, доказав существование и единственность выпуклого тела, для которого

$$G(R_1(\omega), R_2(\omega)) = F(\omega), \quad (1.1)$$

для класса симметричных функций G (см. [4], [6]).

В данной работе мы рассмотрим аналогичную проблему, поставленную для радиусов кривизны проекции центрально-симметричных выпуклых тел (см. [2]). Обозначим через $\mathcal{B}_o$ класс выпуклых тел $B \subset \mathbb{R}^3$, с центром симметрии в начале координат $O \in \mathbb{R}^3$. Нам понадобятся некоторые обозначения :

S^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (пространство пространственных направлений),

$S_\omega \subset S^2$ – большая окружность с полюсом в $\omega \in S^2$,

$e(\omega, \psi)$ – плоскость, содержащая начало координат в $\mathbb{R}^3$ и направления $\omega \in S^2$ и $\psi \in S_\omega$,

$B(\omega, \psi)$ – проекция тела $B \in \mathcal{B}_o$ на $e(\omega, \psi)$,

$R(\omega, \psi)$ – радиус кривизны $\partial B(\omega, \psi)$ в точке, для которой направление внешней нормали совпадает с ω .

Пусть $F(\omega, \psi)$ – симметричная функция, определенная на пространстве "флагов" $\{(\omega, \psi) : \omega \in S^2, \psi \in S_\omega\}$ (см. [1]). Мы ставим задачу существования и единственности выпуклого тела, для которого

$$R(\omega, \psi) = F(\omega, \psi), \quad (1.2)$$

и собираемся найти необходимое и достаточное условие для функции $F(\omega, \psi)$, которое обеспечит положительный ответ. Заметим, что единственность (с точностью до параллельных переносов) следует

из классического результата единственности проблемы Кристоффеля.

Теперь мы опишем основной результат. Пусть $F(\omega, \psi)$ – функция, определенная на $\{(\omega, \psi) : \omega \in S^2, \psi \in S_\omega\}$. Скажем, что функция $F(\omega, \psi)$ симметрична, если $F(\omega, \psi) = F(\omega, \pi + \psi) = F(-\omega, \psi)$. Определим

$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega, \psi) d\psi. \quad (1.3)$$

Ниже мы используем обычные сферические координаты ν, ϕ на S^2 , основанные на выборе ω для северного полюса и точки отсчета $\phi = 0$ на экваторе S_ω (так точки $(0, \phi)$ лежат на экваторе S_ω). Точки с координатами ν, ϕ в этой системе координат обозначим через $(\nu, \phi)_\omega$.

Теорема 1.1. Неотрицательная, симметричная, непрерывно-дифференцируемая функция $F(\omega, \psi)$, определенная на пространстве $\{(\omega, \psi) : \omega \in S^2, \psi \in S_\omega\}$ представляет собой радиус кривизны проекции некоторого выпуклого тела тогда и только тогда, когда

$$F(\omega, \psi) = \frac{\bar{F}(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{F}((\nu, \phi)_\omega) \cos 2(\phi - \psi)}{\cos \nu} d\phi d\nu \quad (1.4)$$

для всех $\omega \in S^2$ и всех $\psi \in S_\omega$ (порядок интегрирования важен).

Наше доказательство Теоремы 1.1 предлагает алгоритм построения выпуклого тела B для заданной функции $F(\omega, \psi)$. Нам понадобятся следующие положения из теории выпуклости.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Хорошо известно (см. [8]), что опорная функция всякого достаточно гладкого тела $B \in B_0$ имеет единственное представление

$$H(\xi) = \int_{S^2} |(\xi, \Omega)| h(\Omega) d\Omega, \quad (2.1)$$

где $d\Omega$ – обычная мера площади на S^2 , $h(\Omega)$ – четная, непрерывная функция (не обязательно неотрицательная), называемая порождающей плотностью тела B .

Для заданной функции $h(\Omega)$, определенной для $\Omega \in S^2$, обозначим через $h_\omega(\varphi)$, $\varphi \in S_\omega$ сужение $h(\Omega)$ на окружность S_ω для $\omega \in S^2$, и назовем $h_\omega(\varphi)$ функцией сужения $h(\Omega)$.

Ниже мы воспользуемся следующим результатом, полученным Н. Ф. Линдквистом, см. [8].

Четная, непрерывная функция $h(\Omega)$, определенная на S^2 является порождающей плотностью тела $B \in B_0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) h_\omega(\varphi) d\varphi \geq 0 \quad (2.2)$$

для всех $\omega \in S^2$ и $\psi \in S_\omega$, где $h_\omega(\varphi)$ – функция сужения функции $h(\Omega)$.

Примечательно, что интеграл (2.2) имеет ясную геометрическую интерпретацию.

В [2] было доказано, что для любого достаточно гладкого $B \in B_0$ и $\psi \in S_\omega$ радиус кривизны проекции может быть вычислен как

$$R(\omega, \psi) = 2 \int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) h_\omega(\varphi) d\varphi, \quad (2.3)$$

где $(\widehat{\psi, \varphi})$ – угол между ψ и φ , $h(\Omega)$ – порождающая плотность тела B , тогда как $h_\omega(\varphi)$ – функция сужения $h(\Omega)$ на S_ω .

В книге Бляшке [5] можно найти следующее представление для порождающей плотности. Для любого $\Omega \in S^2$

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} (R_1 + R_2) d\tau -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R_1((u, \tau)_\Omega) + R_2((u, \tau)_\Omega))'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du d\tau, \quad (2.4)$$

где $R_i((u, \tau)_\Omega)$, $i = 1, 2$ – главные радиусы кривизны тела B в точке, для которой направление нормали совпадает с $(u, \tau)_\Omega$ (направление со сферическими координатами u, τ относительно Ω).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1 И ПОСТРОЕНИЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Необходимость. Пусть $R(\omega, \psi)$ – радиус кривизны проекции некоторого выпуклого тела $B \in B_o$. Мы должны доказать, что $R(\omega, \psi)$ удовлетворяет условию (1.4). Из [5] следует, что

$$\bar{R}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(\omega, \psi) d\psi = R_1(\omega) + R_2(\omega) \quad (3.1)$$

и, используя теорему Фубини, можно переписать выражение (2.4) в форме

$$8\pi^2 h(\Omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin a} \int_0^{2\pi} \bar{R}((a, \tau)_\Omega) d\tau - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}((u, \tau)_\Omega) \frac{\cos u}{\sin^2 u} d\tau du \right], \quad (3.2)$$

где $(u, \tau)_\Omega$ – точка на S^2 с обычными сферическими координатами u, τ относительно Ω . Принимая некоторое $\psi \in S_\omega$ за точку отсчета на S_ω , и, подставляя новое выражение для порождающей плотности из (3.2) в (2.3), получим

$$\begin{aligned} R(\omega, \psi) &= 2 \int_{S_\omega} \cos^2 \varphi h_\omega(\varphi) d\varphi = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \left[\frac{1}{\sin a} \int_0^{2\pi} \bar{R}((a, \tau)_\Omega) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}((u, \tau)_\Omega) \frac{\cos u}{\sin^2 u} d\tau du \right] d\varphi, \quad \Omega = (0, \varphi)_\omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\varphi \in S_\omega$ обозначим через $S(u, \varphi)$ окружность с центром в $\varphi \in S_\omega$ и радиусом $\sin u$. Меридиан, проходящий через точку ω и $(0, \varphi)_\omega$ разделяет $S(u, \varphi)$ на две полуокружности. Когда φ меняется на S_ω , каждая полуокружность $S(u, \varphi)$ покрывает множество $[0, 2\pi) \times [-u, u] \subset S^2$. Таким образом, на последнем множестве имеем две параметризации (ν, ϕ) и (τ, φ) . Нетрудно убедиться, что Якобиан имеет вид

$$d\tau d\varphi = \frac{\cos \nu}{\sqrt{\cos^2 u - \sin^2 \nu}} d\nu d\phi. \quad (3.4)$$

Представляя (3.3) в виде суммы членов, соответствующих полуокружностям $S(u, \varphi)$ и, делая замену переменных (3.4), получим

$$R(\omega, \psi) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\sin a} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+a}^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) w(\phi) \frac{\cos \nu}{\sqrt{\cos^2 a - \sin^2 \nu}} d\nu d\phi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+a}^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) \left[\int_a^{\frac{\pi}{2}-\nu} w(\phi) \frac{\cos \nu}{\sqrt{\cos^2 u - \sin^2 \nu}} \frac{\cos u}{\sin^2 u} du \right] d\nu d\phi \right], \quad (3.5)$$

где $w(\phi) = [\cos^2(\phi - \beta) + \cos^2(\phi + \beta)]$, $\beta = \phi - \varphi$. Имеем

$$\cos \beta = \frac{\sin u}{\cos \nu}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{\cos^2 \nu - \sin^2 u}}{\cos \nu}.$$

После некоторых стандартных интегральных вычислений (см. [7]), используя симметрию, находим

$$R(\omega, \psi) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) \cos^2 \phi \frac{\sin a}{\cos \nu \sqrt{\cos^2 a - \sin^2 \nu}} d\nu d\phi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) \frac{\cos 2\phi}{\cos \nu} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sin a}{\cos \nu} \right] d\nu d\phi \right]. \quad (3.6)$$

Вычисление предела требует разложения интегралов в ряды a . Отрицательные ряды аннулируются, и мы получим (1.4).

Достаточность. Пусть $F(\omega, \psi)$ – неотрицательная, симметричная, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (1.4). Рассмотрим $\bar{F}(\omega)$ (см. (1.3)) и посредством (2.4) построим функцию $f(\Omega)$ определенную на S^2 :

$$f(\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \bar{F}((0, \tau)_\Omega) d\tau - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{F}((u, \tau)_\Omega)'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du d\tau. \quad (3.7)$$

Согласно Н. Ф. Линдкуисту, $f(\Omega)$ должна удовлетворять условию (2.2), чтобы быть порождающей плотностью тела В. Подставляя (3.7) в (2.2) и применяя ту же процедуру как выше, с помощью (1.4) получаем $F(\omega, \psi)$, которая является неотрицательной по определению. Следовательно, $h(\Omega)$ суть порождающая функция тела В и, согласно (2.3), $F(\omega, \psi)$ есть радиус кривизны проекции В.

В работе [9] автор решил такую же проблему, которая не зависела от предположения центральной симметрии выпуклого тела В.

Автор хотел бы выразить свою благодарность профессору Р. В. Амбарцумяну за полезные обсуждения.

Abstract. The article considers the problem of existence and uniqueness of centrally symmetrical convex body for which the projection curvature radius function coincides with a given flag function. A necessary and sufficient condition is found that ensures a positive answer. An algorithm for construction of the body in question is proposed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometrical Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
2. Р. Г. Арамян. "Радиусы кривизны плоских проекций выпуклых тел в R^n " Изв. АН Армении. Математика, Том 37, № 1, стр. 2 – 14, 2002.
3. Р.Г. Арамян. "Обобщенное преобразование Радона с применением в теории выпуклости" Изв. АН Армении. Математика, Том 38, № 3, стр. 16 – 36, 2003.
4. И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор. Дифференциальная геометрия в целом. Наука, Москва, 1973.
5. W. Blaschke, Kreis und Kugel, De Gruyter, Berlin, 1956.
6. А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, Москва, 1969.
7. А. П. Прудников, Ю. А. Бричов, О. Н. Маричев, Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1981.
8. W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in Convexity and its Applications, Ed. P. Gruber and J. Wills, Birkhauser, Basel, 1983.
9. Р. Г. Арамян, "Восстановление выпуклых тел с помощью функции радиуса кривизны проекции", Изв. АН Армении, Математика, Том 39, № 4, стр. 36 – 49, 2004.

Поступила 29 июня 2004

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^2$

О. Р. Габриелян

Ереванский государственный университет

E-mail : ogabrielyan@web.de

Резюме. Скажем, что многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ превалирует над многочленом $Q(\xi)$, если $R_{Q,P}(\xi) = |Q(\xi)|/(1+|P(\xi)|) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Данная работа предлагает описание множества $\mathfrak{M}(P, Q) = \{\beta \in \mathbb{R}_+^2 : |\xi^\beta| R_{Q,P}(\xi) < \infty, \xi \in \mathbb{R}^2\}$, названного нами мерой превалирования P над Q . Вводится понятие меры гипоэллиптичности дифференциального оператора $P(D)$. Мера превалирования при $n = 2$ используется для описания наилучших классов Жевре, содержащих решения гипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Многие свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных определяются (см. [1]) поведением на бесконечности характеристических полиномов (символов), отвечающих этим уравнениям. Многочисленные работы (см., например, [1] – [7]) посвящены изучению гладкости решений некоторых классов гипоэллиптических уравнений и классификации этих решений. Для некоторых классов гипоэллиптических операторов, были найдены точные пространства Жевре, содержащие решения соответствующих уравнений (см., например, [8] – [13]). Эти результаты стали стимулом для поиска легко проверяемых алгебраических критериев гипоэллиптичности дифференциальных операторов.

Первые попытки в этом направлении были предприняты Л. Хёрмандером, Б. Малгранжем, Ф. Тревом, Б. Пини и другими (см., например, [1] – [4], [9], [10]). В. П. Михайлов в [14] ввел класс невырождающихся многочленов, стремящихся к бесконечности при бесконечном росте модуля аргумента. Далее, Л. Р.

Волевич, С. Г. Гиндикин, Пееконен и другие в терминах устойчивости многочленов показали гипозеллиптичность введенных В. П. Михайловым многочленов (см. [15]). Г. Г. Казарян и В. Н. Маргарян получили алгебраические условия гипозеллиптичности для некоторого класса вырождающихся полиномов, при этом, в [16] было введено понятие меры гипозеллиптичности, являющееся обобщением понятия числа гипозеллиптичности.

В работе [17] получены некоторые необходимые и достаточные условия, при которых двумерный вырождающийся многочлен бесконечно растет при бесконечном росте модуля его аргумента. В работе [18] нами введено понятие числа превалирования одного многочлена над другим и построен алгоритм их вычисления в $\mathbb{R}^2$, кроме того, представлен "алгебраический" метод проверки гипозеллиптичности любого многочлена в $\mathbb{R}^2$.

В настоящей работе, являющейся непосредственным продолжением работы [18], мы показываем, что :

- а) множество $\mathcal{M} = \mathcal{M}(P)$, описывающее меру гипозеллиптичности данного гипозеллиптического оператора P , является вполне правильным многоугольником (см. определение в [14] или [16]);
- б) $N(P) \equiv \{u \in \mathcal{D}' \mid P(D)u = 0\} \subset \Gamma^{\mathcal{M}}$, где $\Gamma^{\mathcal{M}}$ — пространство Жевре, порожденное многоугольником $\mathcal{M}$ (точные определения даны ниже);
- в) вышеупомянутое вложение не улучшаемо. Например, если $N(P) \subset \Gamma^A$ для некоторого многоугольника A , то A принадлежит $\mathcal{M}(P)$.

Наша работа продолжает и развивает работы ряда авторов (см., например, [19], [20]), где аналогичные результаты получены в терминах числа гипозеллиптичности данного оператора.

Введем некоторые обозначения. Пусть многочлены $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ с действительными коэффициентами $\{\gamma_\alpha^P\}$ и $\{\gamma_\alpha^Q\}$, представлены в виде

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^{M_P} \sum_{|\alpha|=d_i^P} \gamma_\alpha^P \xi^\alpha \equiv \sum_{i=0}^{M_P} P_i(\xi), \quad Q(\xi) = \sum_{i=0}^{M_Q} \sum_{|\alpha|=d_i^Q} \gamma_\alpha^Q \xi^\alpha \equiv \sum_{i=0}^{M_Q} Q_i(\xi), \quad (1.1)$$

где

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad d_0^P > d_1^P > \dots > d_{M_P}^P \geq 0, \quad d_0^Q > d_1^Q > \dots > d_{M_Q}^Q \geq 0,$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Определение 1.1. Скажем, что многочлен P превалирует над многочленом Q и напишем $Q \ll P$, если

$$R_{Q,P}(\xi) \equiv \frac{|Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Определение 1.2. Пусть $Q \ll P$. Число $a = a(P, Q) > 0$ назовем числом превалирования P над Q , если

- 1) $R_{Q,P}(\xi) \leq C|\xi|^{-a}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ и некоторой постоянной $C > 0$, и
- 2) существует последовательность $\{\xi^s\}_{s \in \mathbb{N}}$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $R_{Q,P}(\xi^s) \geq C_1|\xi^s|^{-a}$ ($s \in \mathbb{N}$).

Пусть $\mathbb{R}_+^2 = \{\beta \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0\}$. Назовем множество

$$\mathfrak{M}(P, Q) \equiv \left\{ \beta \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} (|\xi^\beta| R_{Q,P}(\xi)) < \infty \right\}.$$

мерой превалирования P над Q .

Легко проверить, что $Q \ll P$ тогда и только тогда, когда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\{\beta \in \mathbb{R}_+^2, \beta_1 + \beta_2 < \varepsilon\} \subset \mathfrak{M}(P, Q).$$

В работе [1] (Теорема 11.1.3) доказано, что многочлен P гипозэллиптичен тогда и только тогда, когда $D^\alpha P \ll P$ для всех $\alpha \neq 0$.

В соответствии с определением меры превалирования, мерой гипозэллиптичности многочлена P назовем множество

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P) \equiv \left\{ \beta \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^2 \\ |\alpha| > 0}} \left(|\xi^\beta| \left[\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \right]^{\frac{1}{|\alpha|}} \right) < \infty \right\},$$

где $|\xi^\beta| = |\xi_1|^{\beta_1} |\xi_2|^{\beta_2}$. Очевидно, что для гипозэллиптичного многочлена P

$$\mathfrak{M}(P) = \bigcap_{0 < |\alpha| \leq d_0^P} \frac{1}{|\alpha|} \mathfrak{M}(P, D^\alpha P) \neq \emptyset.$$

Многоугольник A с вершинами в $\mathbb{R}_+^2$ назовем вполне правильным (ВП) (см. [16]) если

- а) начало координат является вершиной A , и на каждой координатной оси $\mathbb{R}^2$ многоугольник A имеет вершины, отличные от начала координат,
- б) внешние нормали сторон многоугольника A , не лежащих на координатных осях, имеют положительные координаты.

Для ВП-многоугольника A обозначим через $\Lambda(P)$ множество внешних нормалей $\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)\}$ сторон A , не лежащих на координатных осях; предположим, что $\min\{\lambda_1, \lambda_2\} = 1$. ВП-многоугольник $A \subset \mathbb{R}_+^2$ называется управляемым, если $(\lambda, \nu) = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 \leq 1$ для всех $\nu \in A$, $\lambda \in \Lambda(A)$. В §2 мы покажем,

что мера гипозэллиптичности $\mathfrak{M}(P)$ гипозэллиптического многочлена P , является управляемым многоугольником в $\mathbb{R}_+^2$. Функцию

$$h(\xi) = h_P(\xi) = \sum_{\beta \in \mathfrak{M}^0(P)} |\xi^\beta|, \quad (1.3)$$

где $\mathfrak{M}^0(P)$ есть множество вершин $\mathfrak{M}(P)$, назовем функцией гипозэллиптичности многочлена P . Далее, предполагая что многочлен P представлен в форме (1.1), определим множества

$$\begin{aligned} \Sigma_0(P) &= \Sigma(P_0) = \{\eta; \eta \in \mathbb{R}^2, |\eta| = 1, P_0(\eta) = 0\}, \\ \Sigma_j(P) &= \{\eta \in \Sigma_{j-1}(P); P_j(\eta) = 0\}, \quad j = 1, \dots, M_P, \\ Cr &= \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}, \\ Cr_1 &= \{(1, 0), (-1, 0)\} \text{ и } Cr_2 = \{(0, 1), (0, -1)\}. \end{aligned}$$

Для точки $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^2$ обозначим через $\ell_i^P = \ell_i^P(\eta)$ кратность корня η многочлена P_i , если $\eta \in \Sigma_i(P)$ и предположим, что $\ell_i^P(\eta) = 0$, если $\eta \notin \Sigma_i(P)$ ($0 \leq i \leq M_P$). Определим характеристическую функцию $\chi(\delta) = \chi(P, \eta, \delta)$ многочлена P следующим образом:

$$\chi(P, \eta, \delta) = \max_{0 \leq i \leq M_P} \{d_i^P - \ell_i^P(\eta)\delta\}, \quad \delta \in [0, \infty). \quad (1.4)$$

Для одночлена ξ^β ($\beta \in \mathbb{R}_+^2$) положим $\ell^\beta(\eta) = 0$, если $\eta \notin Cr$, $\ell^\beta(\eta) = \beta_2$, если $\beta \in Cr_1$ и $\ell^\beta(\eta) = \beta_1$, если $\beta \in Cr_2$. Кроме того, обозначим (см. [18])

$$\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \equiv \begin{cases} |\beta| = \beta_1 + \beta_2 & \text{при } \eta \notin Cr, \\ |\beta| - \delta\beta_2 & \text{при } \eta \in Cr_1, \\ |\beta| - \delta\beta_1 & \text{при } \eta \in Cr_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Каждой точке $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^2$ мы сопоставим множества $A(\eta) = A(P, \eta) = \{\delta > 0 : \exists i, j, i \neq j, 0 \leq i, j \leq M_P, d_i^P - \ell_i^P(\eta)\delta = d_j^P - \ell_j^P(\eta)\delta = \chi(P, \eta, \delta) \geq 0\}$ и $J(P, \eta, \delta) = \{i : 0 \leq i \leq M_P, d_i^P - \ell_i^P(\eta)\delta = \chi(P, \eta, \delta)\}$ и обозначим $c(P, \eta, \delta) = \text{card } J(P, \eta, \delta)$. Очевидно, что $\Sigma_0(P)$, $A(P, \eta)$ и $J(P, \eta, \delta)$ являются конечными множествами для любого многочлена P с двумя переменными. Следовательно, $c(P, \eta, \delta) < \infty$ для любой пары $(\eta, \delta) : \eta \in \Sigma_0(P), \delta \in A(P, \eta)$.

Пусть $k(P, \eta)$ – наименьшее из целых чисел i ($0 \leq i \leq M_P$), для которых $\eta \notin \Sigma_i(P)$ и пусть $k(P, \eta) = M_P + 1$, если $\eta \in \Sigma_{M_P}$. Кроме того, пусть $\sigma(\eta) = \sigma(P, \eta)$ является наименьшим решением уравнения $\chi(P, \eta, \sigma) = 0$ (если это уравнение имеет решение) и $\sigma(P, \eta) = \infty$ в противном случае. Тогда (см. (1.5))

$$\sigma(\xi^\beta, \eta) \equiv \begin{cases} \infty & \text{при } \eta \notin Cr, \\ & \text{или } (\eta \in Cr_1 \text{ и } \beta_2 = 0), \\ & \text{или } (\eta \in Cr_2 \text{ и } \beta_1 = 0), \\ 1 + \beta_1/\beta_2, & \text{при } \eta \in Cr_1 \text{ и } \beta_2 > 0, \\ 1 + \beta_2/\beta_1, & \text{при } \eta \in Cr_2 \text{ и } \beta_1 > 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

В дальнейшем, каждой точке $\eta \in \Sigma_0(P)$ будет сопоставляться точка $\tau = \tau(\eta) \in \mathbb{R}^2$, $|\tau| = 1$ такая, что $(\tau, \eta) = 0$. Тогда для $0 \leq i \leq M_P$ (см. [17])

$$D_{\tau}^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) = \frac{1}{\ell_i^P(\eta)!} \sum_{|\alpha|=\ell_i^P(\eta)} \frac{D^{\alpha} P_i(\eta)}{\alpha!} \tau^{\alpha} \neq 0. \quad (1.7)$$

Наконец, для пары $(\eta, \delta) : \eta \in \Sigma_0(P)$, $\delta \geq 0$, введем многочлен

$$r(x, P) = r(x, P, \eta, \delta) = \sum_{i \in J(P, \eta, \delta)} D_{\tau}^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) x^{\ell_i^P(\eta)}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (1.8)$$

множество

$$\{\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta, \delta) = t(\eta + t^{-\delta} x \tau), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1\} \quad (1.9)$$

и обозначим $X_{\tau} = X(\tau, \eta, \delta) = \{0 \neq x \in \mathbb{R}^1, r(x) = 0\}$,

$$\theta_0^P = \frac{1}{2} \min \{|x|, x \neq 0, x \in X(\tau, \eta, \delta), \eta \in \Sigma_0(P), \delta \geq 0\}, \quad (1.10)$$

$$\theta_1^P = 2 \min \{|x|, x \neq 0, x \in X(\tau, \eta, \delta), \eta \in \Sigma_0(P), \delta \geq 0\}. \quad (1.11)$$

Соответственно, будем считать, что $\theta_0^P = \frac{1}{2}$ и $\theta_1^P = 2$, если $X(\tau, \eta, \delta) = \emptyset$ для всех пар $(\eta, \delta) : \eta \in \Sigma_0(P)$, $\delta \geq 0$.

Пусть P и Q – многочлены, представленные в виде (1.1). Введем для Q обозначения, аналогичные (1.8) – (1.11), и положим $\theta_0 = \min \{\theta_0^Q, \theta_0^P\}$, $\theta_1 = \max \{\theta_1^Q, \theta_1^P\}$. Далее, определим $b = b(P, \eta)$ как наибольшее положительное число такое, что $U(\eta, 2b) \cap \Sigma_0(P) = \{\eta\}$, где $U(\eta, 2b)$ – круг с центром η и радиусом $2b$. Заметим, что такое число $b = b(P, \eta)$ существует, так как в случае многочлена с двумя переменными точки множества $\Sigma_0(P)$ изолированы.

Определение 1.3. Пусть точка $\tau(\eta)$ определена по точке $\eta \in \Sigma_0(P)$ как выше, $\mathcal{D}_{\epsilon}(\eta) = \{\xi \in \mathbb{R}^2, |(\tau, \xi)| \leq \epsilon |(\eta, \xi)|\}$. Скажем, что многочлен P превалирует над многочленом Q относительно точки η , и запишем это в виде $Q \ll_{\eta} P$, если для каждого $\epsilon \in (0, b(P, \eta)]$ существует число $M(\epsilon) > 0$ такое, что

$$R_{Q,P}(\xi) < \epsilon \quad \text{при} \quad \xi \in \mathcal{D}_{\epsilon}(\eta), \quad |\xi| \geq M(\epsilon). \quad (1.12)$$

Для полноты изложения приведем без доказательств некоторые известные предложения.

Лемма 1.1 ([17]). Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ – однородный многочлен порядка $d > 0$, $\eta \in \Sigma(R) = \{\eta \in \mathbb{R}^2, |\xi| = 1, R(\xi) = 0\}$ и $\ell = \ell(\eta)$ – кратность η . Тогда существует число $\epsilon_0 = \epsilon_0(\eta, R) > 0$ такое, что

$$\frac{1}{2} |D_{\tau}^{\ell} R(\eta)| |(\eta, \xi)|^{d-\ell} |(\tau, \xi)|^{\ell} \leq |R(\xi)| \leq \frac{3}{2} |D_{\tau}^{\ell} R(\eta)| |(\eta, \xi)|^{d-\ell} |(\tau, \xi)|^{\ell}$$

для всех $\xi \in \mathcal{D}_\varepsilon(\eta)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Лемма 1.2 (Лемма 2.1 в [8]). Пусть P и Q — многочлены, представленные в виде (1.1). Если $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_\eta P$, тогда $\chi(Q, \eta, \delta) < \chi(P, \eta, \delta)$ для всех $\delta \in [0, \sigma(P, \eta)]$.

Для $\varepsilon \in (0, b(P, \eta))$ обозначим меру превалирования P над Q относительно η через

$$\mathfrak{M}(P, Q, \eta, \varepsilon) \equiv \left\{ \beta \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sup_{\xi \in \mathcal{D}_\varepsilon(\eta)} (|\xi^\beta| R_{Q,P}(\xi)) < \infty \right\}.$$

Ясно, что существует $\varepsilon_0 \in (0, b(P, \eta))$ такое что $\mathfrak{M}(P, Q, \eta, \varepsilon_0) \equiv \mathfrak{M}(P, Q, \eta, \varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Следовательно, меру превалирования P над Q относительно η можно определить как множество $\mathfrak{M}(P, Q, \eta) \equiv \mathfrak{M}(P, Q, \eta, \varepsilon_0)$, где число ε_0 выбрано соответствующим образом. Очевидно, что

- 1) $\mathfrak{M}(P, Q) = \{ \beta \in \mathbb{R}_+^2 \mid |\beta| \leq d_0^P - d_0^Q \}$ при $\Sigma_0(P) = \emptyset$,
- 2) $\mathfrak{M}(P, Q) = \bigcap_{\eta \in \Sigma_0(P)} \mathfrak{M}(P, Q, \eta)$ при $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ПРЕВАЛИРОВАНИЯ

В этом параграфе предлагается метод описания меры превалирования P над Q при $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$.

Лемма 2.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$, $Q \ll_\eta P$ и $\beta \in \mathfrak{M}(P, Q, \eta)$. Тогда для всех $\delta \in [0, \sigma(P, \eta))$

$$\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq \chi(P, Q, \eta, \delta) \equiv \chi(P, \eta, \delta) - \chi(Q, \eta, \delta).$$

Доказательство : Заметим, что из Леммы 1.2 следует $\chi(P, Q, \eta, \delta) > 0$ для всех $\delta \in [0, \sigma(P, \eta))$. Предположим, что $\delta \in [0, \sigma(P, \eta))$ и неравенство (1.12) справедливо для $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(P, \eta) > 0$. Пусть числа $\{\varepsilon_j = \varepsilon_j(P_j, \eta)\}$ и $\{\varepsilon'_k = \varepsilon'_k(Q_k, \eta)\}$ выбраны по однородным многочленам P_j и Q_j согласно Лемме 1.1, и $0 < \varepsilon \leq \min \{\bar{\varepsilon}, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{M_P}, \varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_{Q_P}\}$. Далее, выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $r(\varepsilon, Q, \eta, \delta) \neq 0$ (для этого достаточно, чтобы $\varepsilon \leq \theta_0$) и положим $\xi(t) = t(\eta + \varepsilon t^{-\delta} \tau)$, $t > 0$. Ясно, что $\xi(t) \in \mathcal{D}_\varepsilon(\eta)$ для достаточно больших t . Следовательно, по Лемме 1.1

$$|P(\xi(t))| \leq \frac{3}{2} \sum_{i=0}^{M_P} \left| D_\tau^{\ell_i^P} P_i(\eta) \right| t^{d_i^P - \ell_i^P \delta} \varepsilon^{\ell_i^P} \leq C_1 t^{\chi(P, \eta, \delta)}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} |Q(\xi(t))| &\geq \left| \sum_{i \in J(Q, \eta, \delta)} D_\tau^{\ell_i^Q} Q_i(\eta) t^{d_i^Q - \ell_i^Q \delta} \varepsilon^{\ell_i^Q} \right| - o(t^{\chi(Q, \eta, \delta)}) = \\ &= t^{\chi(Q, \eta, \delta)} [|r(\varepsilon, Q, \eta, \delta)| + o(1)] \geq C_2 t^{\chi(Q, \eta, \delta)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

для достаточно больших t и некоторых постоянных $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$. Из (2.1) и (2.2) получаем

$$R_{Q,P}(\xi(t)) \geq C_3 t^{-\chi(P,Q,\eta,\delta)} \quad (2.3)$$

для достаточно больших t и постоянной $C_3 > 0$. С другой стороны, очевидно, что $|\xi(t)^\beta| \geq C_4 e^{t^\beta(\eta)} t^{\chi(\xi^\beta,\eta,\delta)}$ ($C_4 > 0$). Это вместе с (2.3) завершает доказательство.

Теорема 2.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$, $Q \ll_\eta P$ и $\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta, \delta) = t(\eta + t^{-\delta} x \tau)$. Тогда $\beta \in \mathfrak{M}(P, Q, \eta)$ в том и только в том случае, когда одновременно

$$\begin{aligned} 1) \quad & \chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq \chi(P, Q, \eta, \delta), \quad \forall \delta \in [0, \sigma(P, \eta)), \\ 2) \quad & \sup_{\substack{x \in P_{\sigma(P,\eta)}, \\ t > 0}} \{ |\xi(x, t)^\beta| R_{Q,P}[\xi(t, x)] \} < C < \infty, \quad \forall \delta \in A(P, \eta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство : Необходимость условия 1) следует из Леммы 2.1. Необходимость условия 2) легко доказать, если заметить, что $|(\xi(t, x), \eta)| \rightarrow \infty$ и $|(\xi(t, x), \tau)| / |(\xi(t, x), \eta)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Чтобы доказать достаточность условий 1) и 2), предположим что при выполнении 1) и 2) существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s \rightarrow \infty$ имеем $|\xi^s| \rightarrow \infty$ и

$$(\xi^s, \tau) / (\xi^s, \eta) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad |(\xi^s)^\beta| R_{Q,P}(\xi^s) \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Тогда из $Q \ll_\eta P$ следует

$$R_{Q,P}(\xi^s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Представляя точки ξ^s в ортогональном базисе $\{\eta, \tau\}$,

$$\xi^s = \varphi_s \eta + \psi_s \tau, \quad \varphi_s = (\xi^s, \eta), \quad \psi_s = (\xi^s, \tau) \quad (s \in N), \quad (2.7)$$

отметим, что $|\xi^s|^2 = \varphi_s^2 + \psi_s^2 \rightarrow \infty$ и $|\psi_s| / |\varphi_s| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Следовательно, $|\varphi_s| \rightarrow \infty$ и $|\xi^s| / |\varphi_s| \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$. С другой стороны, точки η и τ можно заменить точками $(-\eta)$ и $(-\tau)$ соответственно. Таким образом, за счет выбора подпоследовательности, можно считать, что $\varphi_s > 1$ и $\psi_s \geq 0$ для всех $s \in N$. Если $\psi_s = 0$ для бесконечного множества $\{s\}$, то можно считать, что $\psi_s = 0$ для всех $s \in N$. Если $\sigma(\xi^\beta, \eta) < \infty$ (см. (1.6)), то $\eta \in C_r$ и $|(\xi^s)^\beta| = \varphi_s^{|\beta|} \eta^\beta = 0$ ($s \in N$), что противоречит (2.5). Если $\sigma(\xi^\beta, \eta) = \infty$, т.е. $|\eta^\beta| \neq 0$, то (см. Лемму 3.1 работы [18])

$$|(\xi^s)^\beta| = \varphi_s^{|\beta|} [\eta^\beta + o(1)], \quad R_{Q,P}(\xi^s) \leq C \varphi_s^{-\chi(P,Q,\eta,\sigma(P,\eta))}.$$

Эти соотношения вместе с условием 1) противоречат (2.5). Итак, можно считать, что $\varphi_s > 1$ и $\psi_s > 0$ для всех $s \in N$. Обозначим $\rho_s = 1 - \frac{\ln \psi_s}{\ln \varphi_s}$. Имеем

$\psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s}$ ($s \in N$), и очевидно, что $\rho_s \geq 0$ для достаточно больших s . Покажем, что последовательность $\{\rho_s\}$ ограничена. Пусть наоборот, для некоторой последовательности $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Рассмотрим следующие возможные случаи: $\sigma(\xi^\beta, \eta) < \infty$ и $\sigma(\xi^\beta, \eta) = \infty$.

В первом случае $\eta \in Cr$, т.е. $\eta_1 \eta_2 = 0$ и (см. (1.5)) $\chi(\xi^\beta, \eta, \rho_s) < 0$ для достаточно больших s . Следовательно, для таких s имеем $|(\xi^s)^\beta| \leq C \varphi_s^{\chi(\xi^\beta, \eta, \rho_s)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, что вместе с (2.6) противоречит (2.5). Во втором случае $k = k(P, \eta) \leq M_P$ и $d_k^P > 0$ согласно условию 1) теоремы. Следовательно, применяя Лемму 1.1 для $i = 0, 1, \dots, k(P, \eta) - 1$, получаем

$$\begin{aligned} |P_i(\xi^s)| &\leq \frac{3}{2} |D_\tau^{\ell_i^P} P(\eta)| \varphi_s^{d_i^P - \ell_i^P} \psi_s^{\ell_i^P} = \frac{3}{2} |D_\tau^{\ell_i^P} P(\eta)| \varphi_s^{d_i^P - \ell_i^P} \varphi_s^{\ell_i^P (1-\rho_s)} \\ &= \frac{3}{2} |D_\tau^{\ell_i^P} P_{k(P, \eta)}(\eta)| \varphi_s^{d_i^P - \rho_s \ell_i^P}, \end{aligned}$$

т.е. $|P_i(\xi^s)| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ ($i = 0, 1, \dots, k(P, \eta) - 1$). Для $i = k(P, \eta)$ получаем

$$|P_{k(P, \eta)}(\xi^s)| = \varphi_s^{d_{k(P, \eta)}^P} |P_{k(P, \eta)}(\eta + \frac{\psi_s}{\varphi_s} \tau)| \geq C_3 \varphi_s^{d_{k(P, \eta)}^P}$$

для достаточно больших s и постоянной $C_3 > 0$, а для $i = k(P, \eta) + 1, \dots, M_P$, очевидно, $|P_i(\xi^s)| = o(\varphi_s^{d_k^P})$ при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, для достаточно больших s

$$|P(\xi^s)| \geq \frac{1}{2} C_3 \varphi_s^{d_{k(P, \eta)}^P} = \frac{1}{2} C_3 \varphi_s^{\chi(P, \eta, \Delta)}, \quad (2.8)$$

где Δ — наименьшее положительное число, для которого $\chi(P, \eta, \Delta) = d_k^P$. Применяя формулу Тейлора, для многочлена Q получаем

$$|Q(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M_Q} \sum_{i \geq 0} \varphi_s^{d_j^Q - (\ell_j^Q(\eta) + i)\rho_s} D_\tau^{\ell_j^Q(\eta) + i} Q_j(\eta) \leq C_4 \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \rho_s)}, \quad C_4 \geq 0 \quad (s \in N). \quad (2.9)$$

Так как $\rho_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то $\chi(Q, \eta, \rho_s) \leq 0$ для достаточно больших s , если $\eta \in \Sigma_{M_Q}(Q)$ и $\chi(Q, \eta, \rho_s) = d_{k(Q, \eta)}^Q = \chi(Q, \eta, \Delta_1)$, если $\eta \notin \Sigma_{M_Q}(Q)$, где числа $k(Q, \eta)$ и $\Delta_1 = \Delta_1(Q)$ определены аналогично числам $k(P, \eta)$ и $\Delta = \Delta(P)$. Кроме того, так как $Q \ll_\eta P$, то по Лемме 1.2 $\chi(Q, \eta, \Delta_1) < \chi(P, \eta, \Delta)$. С другой стороны, во втором случае имеем $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) = |\beta|$ для всех $\delta \geq 0$ и, в частности, $\chi(\xi^\beta, \eta, \Delta) = |\beta|$. Следовательно,

$$|(\xi^s)^\beta| \leq C_5 \varphi_s^{\chi(\xi^\beta, \eta, \Delta)}, \quad C_5 > 0 \quad (s \in N). \quad (2.10)$$

Соотношения (2.8) - (2.10) и условие 1) теоремы противоречат (2.5).

Итак, множество $\{\rho_s\}$ ограничено, и за счет выбора подпоследовательности можем считать, что $\rho_s \rightarrow \delta_0$ при $s \rightarrow \infty$ для некоторого числа $\delta_0 \geq 0$. Если $\sigma(P, \eta) < \infty$ и $\delta_0 > \sigma(P, \eta)$, то $\rho_s > \sigma(P, \eta)$ для достаточно больших s , и по условию 1) имеем

$$\chi(\xi^\beta, \eta, \rho_s) + \chi(Q, \eta, \rho_s) \leq \chi(\xi^\beta, \eta, \sigma(P, \eta)) + \chi(Q, \eta, \sigma(P, \eta)) \leq \chi(P, \eta, \sigma(P, \eta)) = 0.$$

Поэтому, рассуждая как выше, получим

$$|Q(\xi^s)| \leq C_6 \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \rho_s)}, \quad |(\xi^s)^\beta| \leq C_6 \varphi_s^{\chi(\xi^\beta, \eta, \rho_s)}, \quad (2.11)$$

для некоторой постоянной $C_6 > 0$.

Следовательно, для достаточно больших s ,

$$|(\xi^s)^\beta| R_{Q,P}(\xi^s) \leq |Q(\xi^s)| |(\xi^s)^\beta| \leq C_6 \varphi_s^{\chi(\xi^\beta, \eta, \rho_s) + \chi(Q, \eta, \rho_s)} \leq C_6^2,$$

что противоречит (2.5).

Пусть теперь $\delta_0 \leq \sigma(P, \eta)$ для $\sigma(P, \eta) < \infty$ и $\delta_0 < \infty$ для $\sigma(P, \eta) = \infty$. Предположим сначала, что $\delta_0 < \sigma(P, \eta) < \infty$ и $\delta_0 \notin A(P, \eta)$ (случай, когда $\sigma(P, \eta) = \infty$ и $\delta_0 \notin A(P, \eta)$ рассматривается аналогично). Тогда для некоторого (единственного) индекса $m : 0 \leq m \leq M_P$ выполняется

$$d_i^P - \ell_i^P(\eta)\delta < d_m^P - \ell_m^P(\eta)\delta = \chi(P, \eta, \delta) > 0, \quad i \neq m, \quad 0 \leq i \leq M_P.$$

По Лемме 1.1 для достаточно больших s имеем

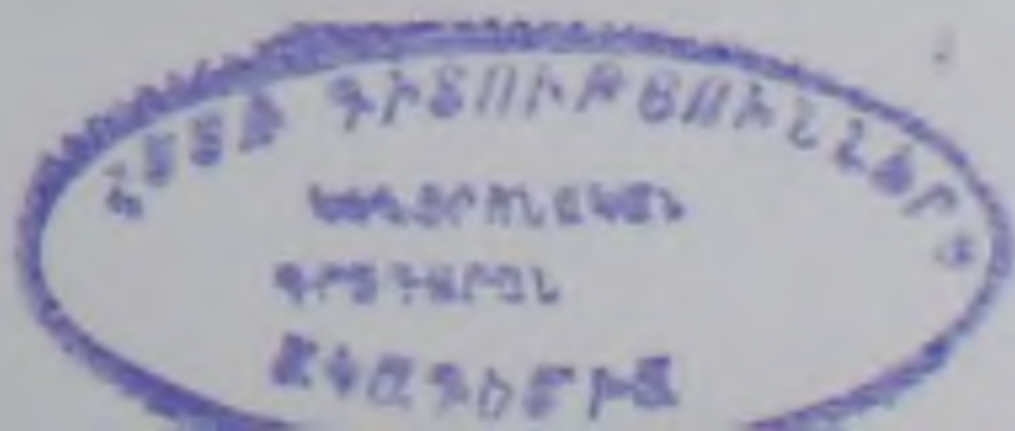
$$|P_i(\xi^s)| \leq \frac{3}{2} \left| D_{\tau}^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) \right| \varphi_s^{d_i^P - \ell_i^P(\eta)\rho_s}, \quad i \neq m, \quad 0 \leq i \leq M_P, \\ |P_m(\xi^s)| \geq \frac{1}{2} \left| D_{\tau}^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \right| \varphi_s^{d_m^P - \ell_m^P(\eta)\rho_s}.$$

Поэтому

$$|P(\xi^s)| \geq |P_m(\xi^s)| - \sum_{i \neq m} |P_i(\xi^s)| \geq \frac{1}{4} \left| D_{\tau}^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \right| \varphi_s^{\chi(P, \eta, \rho_s)}$$

для достаточно больших s . Вместе с (2.11), это противоречит (2.5). Рассмотрим теперь случай $\delta_0 = \sigma(P, \eta)$ (независимо от принадлежности $\delta_0 \in A(P, \eta)$) и случай $\delta_0 \in A(P, \eta) \cap [0, \sigma(P, \eta))$. В этих случаях положим $x_s = \psi_s \varphi_s^{-(1-\delta_0)} = \varphi_s^{\delta_0 - \rho_s}$. Тогда $\xi^s = \varphi_s(\eta + x_s \varphi_s^{-\delta} \tau)$ ($s \in N$) и

$$|x_s|^m \varphi_s^{-\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty, \quad m > 0, \quad \epsilon > 0. \quad (2.12)$$



Поэтому, обозначая $J = J(P, \eta, \delta_0)$ и применяя формулу Тейлора, имеем при $s \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{i \in J} P_i(\xi^s) \right| = \varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta)} [|r(x_s, P, \eta, \delta_0)| + o(1)], \quad \sum_{i \notin J} |P_i(\xi^s)| = o\left(\varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta_0)}\right).$$

Поэтому

$$|P(\xi^s)| \geq \frac{1}{2} \varphi_s^{\chi(P, \eta, \delta_0)} [|r(x_s, P, \eta, \delta_0)| + o(1)]. \quad (2.13)$$

Для многочлена Q и одночлена ξ^β имеем

$$|Q(\xi^s)| \leq \frac{3}{2} \varphi_s^{\chi(Q, \eta, \delta_0)} [|r(x_s, Q, \eta, \delta_0)| + o(1)], \quad (2.14)$$

$$|(\xi^s)^\beta| \leq C \varphi_s^{\chi(\xi^\beta, \eta, \delta)} |x_s|^{\ell^\beta(\eta)}. \quad (2.15)$$

Пусть сначала $\delta_0 \in A(P, \eta) \cap [0, \sigma(P, \eta))$. Если для бесконечного множества $\{s\}$ $|x_s| \notin [\theta_0, \theta_1]$ (см. (1.10), (1.11)), то будем считать, что $|x_s| \notin [\theta_0, \theta_1]$ для всех $s \in N$, и $r(x_s, P, \eta, \delta_0) \geq C_7 > 0$, $s \in N$. Если, к тому же, $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0) < \chi(P, Q, \eta, \delta_0)$, то (2.13) - (2.15) и (2.12) противоречат (2.5). Если $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0) = \chi(P, Q, \eta, \delta_0)$, то в силу простых геометрических соображений из условия 1) теоремы следует

$$\ell_{i_c}^P(\eta) - \ell_{j_c}^Q(\eta) \leq \ell^\beta(\eta) \leq \ell_{i_0}^P(\eta) - \ell_{j_0}^Q(\eta), \quad (2.16)$$

где $i_0 = \min\{i : i \in J(P, \eta, \delta)\}$, $i_c = \max\{i : i \in J(P, \eta, \delta)\}$, $j_0 = \min\{j : j \in J(Q, \eta, \delta)\}$, $j_c = \max\{j : j \in J(Q, \eta, \delta)\}$. Тогда, для достаточно больших s и некоторой постоянной $C_8 \in (0, 1)$ имеем

$$C_8 |x_s|^{-\ell_{i_0}^P(\eta) + \ell_{j_0}^Q(\eta) - \ell^\beta(\eta)} \leq |(\xi^s)^\beta| R_{Q,P}(\xi^s) \leq C_8^{-1} |x_s|^{-\ell_{i_0}^P(\eta) + \ell_{j_0}^Q(\eta) - \ell^\beta(\eta)}$$

для $|x_s| \geq \theta_1$ и

$$C_8 |x_s|^{-\ell_{i_c}^P(\eta) + \ell_{j_c}^Q(\eta) - \ell^\beta(\eta)} \leq |(\xi^s)^\beta| R_{Q,P}(\xi^s) \leq C_8^{-1} |x_s|^{-\ell_{i_c}^P(\eta) + \ell_{j_c}^Q(\eta) - \ell^\beta(\eta)}$$

при $|x_s| \leq \theta_0$. Эти соотношения и (2.16) противоречат (2.5). Если $|x_s| \in [\theta_0, \theta_1]$ ($s \in N$), то противоречие (2.5) непосредственно следует из условия 2) теоремы. Таким образом, остается рассмотреть случай $\delta_0 = \sigma(P, \eta) < \infty$. Если в этом случае множество $\{x_s\}$ ограничено, то по условию 1) теоремы $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0) + \chi(Q, \eta, \delta_0) \leq \chi(P, \eta, \delta_0) = 0$, и, применяя неравенства (2.14) - (2.15) при $\delta_0 = \sigma(P, \eta)$, получаем для достаточно больших s и некоторой постоянной $C_9 > 0$

$$|(\xi^s)^\beta| R_{Q,P}(\xi^s) \leq C_9 [|r(x_s, Q, \eta, \delta_0)| + o(1)] |x_s|^{\ell^\beta(\eta)} \leq C_9,$$

что противоречит (2.5). Если $|x_s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ (за счет выбора подпоследовательности), то, поступая как и в случае $\delta_0 \in A(P, \eta) \cap [0, \sigma(P, \eta))$, получаем

$$\begin{aligned} R_{Q,P}(\xi^s) &\leq C_{10} \varphi_s^{-\chi(P,Q,\eta,\delta_0)} \left[\left| \frac{r(x_s, Q, \eta, \delta)}{r(x_s, P, \eta, \delta)} \right| + o(1) \right] \\ &\leq C_{11} \varphi_s^{-\chi(P,Q,\eta,\delta_0)} \left[|x_s|^{\ell_{j_0}^Q(\eta) - \ell_{i_0}^P(\eta)} + o(1) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$|(\xi^s)^\beta| \leq C |x_s|^{\ell^\beta(\eta)} \varphi_s^{\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0)}. \quad (2.18)$$

Если $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0) < \chi(P, Q, \eta, \delta_0)$ или $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0) < 0$, то (2.17) - (2.18) (или (2.18) и (2.6)) и (2.12) противоречат (2.5). Если $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta_0) = \chi(P, Q, \eta, \delta_0) \geq 0$, то, применяя условие 1), в силу простых геометрических соображений получим $\ell_{j_0}^Q(\eta) - \ell_{i_0}^P(\eta) + \ell^\beta(\eta) \leq 0$. Это и (2.17) - (2.18) противоречат (2.5). Доказательство завершено.

В работе [18] было показано, что для каждой пары $(\eta, \delta) : \eta \in \Sigma_0(P), \delta \in A(P, \eta)$ и любой пары многочленов $\{P, Q\}$, $Q \ll_\eta P$, существуют числа $0 < a(\eta, \delta) = a(P, Q, \eta, \delta) \leq \chi(P, Q, \eta, \delta)$ и $C > 0$, такие, что

$$C^{-1} t^{-a(\eta, \delta)} \leq \min_{|x| \in [\theta_0, \theta_1]} R_{Q,P}(\xi(t, x)) \leq C t^{-a(\eta, \delta)} \quad (2.19)$$

при $\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta, \delta) = t(\eta + t^{-\delta} x \tau)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, в работе [18] приведен алгоритм вычисления $a(\eta, \delta)$ и показано, что это число можно выбрать "лучшим образом" в том смысле, что, если для достаточно большого t и некоторого $C_0 > 0$ $C_0^{-1} t^{-a(\eta, \delta)} \leq |(\xi(t, x))^\beta| \leq C_0 t^{-a(\eta, \delta)}$, $|x| \in [\theta_0, \theta_1]$, то условие (2.4) эквивалентно

$$\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq a(\eta, \delta). \quad (2.20)$$

Таким образом, для каждой точки $\eta \in \Sigma_0(P)$ множество $\mathfrak{M}(P, Q, \eta) \subset \mathbb{R}_+^2$ описывается следующей системой линейных неравенств :

$$\begin{cases} \beta \in \mathbb{R}_+^2 \\ \chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq \chi(P, Q, \eta, \delta), \quad \forall \delta \in [0, \sigma(P, \eta)], \\ \chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq a(\eta, \delta), \quad \forall \delta \in A(P, \eta) \end{cases} \quad (2.21)$$

Лемма 2.2. Пусть P - гипозэллиптический многочлен в $\mathbb{R}^2$, $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$ и $\eta \in \Sigma_0(P)$. Тогда

- 1) $\sigma(P, \eta) = \infty$ и $A(P, \eta) \neq \emptyset$,
- 2) $k = k(P, \eta) \leq M_P$ и $d_k^P > 0$,
- 3) $k \in J(P, \eta, \delta_m)$, где $\delta_m = \max \{\delta; \delta \in A(P, \eta)\}$,

$$4) \ d_i^P - \ell_i^P(\eta) < d_k^P \ (i = 0, 1, \dots, k-1),$$

$$5) \ \delta_m < 1,$$

$$6) \ \chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq 1 - \delta \text{ для всех } \beta \in \mathfrak{M}(P) \text{ и } \delta \in A(P, \eta).$$

Доказательство : Свойства 1), 2) непосредственно следуют из того, что $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ ($P \in I_2$) (см. [21]). Свойство 3) следует из 1) путем простых геометрических соображений. Свойство 4) доказано в [21]. Свойство 5) является непосредственным следствием 4).

Чтобы доказать свойство 6), предположим, что $\delta \in A(P, \eta)$ и $i_0 = \min\{i : i \in J(P, \eta, \delta)\}$. Тогда $\delta \leq \delta_m < 1$ в силу 5). При этом легко убедиться, что либо $\text{ord } D_1 P_{i_0} = d_{i_0} - 1$ и $\ell_i^{D_1 P}(\eta) = \ell_i^P(\eta) - 1$, либо $\text{ord } D_2 P_{i_0} = d_{i_0} - 1$ и $\ell_i^{D_2 P}(\eta) = \ell_i^P(\eta) - 1$. Поэтому, либо $\chi(P, D_1 P, \eta, \delta) = 1 - \delta$, либо $\chi(P, D_2 P, \eta, \delta) = 1 - \delta$, и согласно (2.21) имеем для любой пары $(\beta, \delta) : \beta \in \mathfrak{M}(P), \delta \in A(P, \eta)$

$$\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq \min\{\chi(P, D_1 P, \eta, \delta), \chi(P, D_2 P, \eta, \delta)\} \leq 1 - \delta.$$

Лемма доказана.

Таким образом, из определения множества $\mathfrak{M}(P)$ и соотношений (2.20) - (2.21) следует, что множество $\mathfrak{M}(P)$ состоит из тех точек $\beta \in \mathbb{R}_+^2$ для которых $\beta_1 + \beta_2 \leq 1$ и

$$\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq \min_{|\alpha| > 0} \frac{1}{|\alpha|} a(P, D^\alpha P, \eta, \delta), \quad \eta \in \Sigma_0(P), \quad \delta \in A(P, \eta). \quad (2.22)$$

При этом, отсюда следует, что множество $\mathfrak{M}(P)$ является вполне правильным многоугольником в $\mathbb{R}_+^2$. Таким образом, согласно (2.22), внешние нормали некоординатных сторон $\mathfrak{M}(P)$ имеют координаты (1,1) при $\eta \notin \text{Ст}$, координаты $(1 - \delta, 1)$ при $\delta \in A(P, \eta)$ и $\eta \in \text{Ст}_2$, координаты $(1, 1 - \delta)$ при $\delta \in A(P, \eta)$ и $\eta \in \text{Ст}_1$. Согласно Лемме 2.2 $\chi(\xi^\beta, \eta, \delta) \leq 1 - \delta$ для любой пары $(\beta, \delta) : \beta \in \mathfrak{M}(P), \delta \in A(P, \eta), 0 < \delta < 1$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2. Мера гипоэллиптичности $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$ гипоэллиптического многочлена P является вполне правильным, управляемым многоугольником в $\mathbb{R}_+^2$.

§3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе, используя полученные свойства меры гипоэллиптичности, мы получим неулучшаемые оценки роста решений гипоэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^2$. Пусть A – произвольный многоугольник в $\mathbb{R}_+^2$ и $n \in N$, обозначим через nA множество точек $\beta \in \mathbb{R}_+^2$, для которых $\beta/n \in A$. Следующее предложение, с некоторыми модификациями, доказывается аналогично Теореме 11.4.1 книги [1].

Теорема 3.1. Пусть P – гипозэллиптический оператор в $\mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – произвольная область и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$ – мера гипозэллиптичности оператора P . Тогда

$$N(P) \equiv \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid P(D)u = 0\} \subset \Gamma^{\mathfrak{M}}(\Omega), \quad (3.1)$$

где $\Gamma^{\mathfrak{M}}(\Omega)$ – множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует число $C = C(K, f) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in j\mathfrak{M}.$$

Пусть $h(\xi) = h_P(\xi)$ суть функция гипозэллиптичности, определяемая формулой (1.3) и $d(\xi) = d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^2$ до множества $\{z \in \mathbb{C}^2, P(z) = 0\}$ комплексных корней многочлена P .

Лемма 3.1. Пусть P – гипозэллиптический многочлен в $\mathbb{R}^2$, тогда существуют положительные числа C и M_0 такие, что

$$\sup_{|\xi|=M} \left\{ \frac{h(\xi)}{1 + d_P(\xi)} \right\} \geq C, \quad M \geq M_0.$$

Доказательство : Согласно Лемме 11.4.1 книги [1], существует число $C_1 > 0$ такое, что

$$C_1^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{|\alpha| > 0} [R_{P, D \circ P}(\xi)]^{1/|\alpha|} \leq C_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (3.2)$$

При этом, из (2.19) и (2.21) следует

$$\sup_{|\xi|=M} \sum_{\beta \in \mathfrak{M}^0} \sum_{|\alpha| > 0} |\xi^\beta| [R_{P, D \circ P}(\xi_s)]^{1/|\alpha|} \geq C_2 > 0$$

для достаточно больших M (пусть $M \geq M_0$). Принимая во внимание (3.2), доказательство завершено.

Следующие предложения показывают, что Теорема 3.1 не может быть улучшена.

Теорема 3.2. Пусть P – гипозэллиптический оператор в $\mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $x^0 \in \Omega$ – положительные числа и пусть $\{M_j, j \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяют условиям $|D^\alpha u(x^0)| \leq C^{j+1} M_j$, $\alpha \in j\mathfrak{M}$, для всех $u \in N(P)$ и постоянной $C = C(u, x^0) > 0$. Тогда существует число $a > 0$ такое, что $M_j > a^j j^j$ ($j \in \mathbb{N}$).

Доказательство : Топология $N(P)$, индуцированная из $C^\infty(\Omega)$ совпадает с топологией, индуцированной из $L_2^{loc}(\Omega)$ (см. [1], Теорему 10.1.26). Тогда $E_k = \{u : u \in N(P), |D^\alpha u(x^0)| \leq k^j M_j, \forall \alpha \in j\mathfrak{M}(P), j \in \mathbb{N}\}$ – замкнутое множество

для любого $k \in N$, и $N(P) = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_k$ по условию теоремы. С другой стороны, поскольку $N(P)$ является пространством Фреше, то, согласно теореме Бера о категориях, E_{k_0} имеет внутреннюю точку для некоторого $k_0 \in N$. В частности, из выпуклости и симметричности E_{k_0} следует, что начало координат суть внутренняя точка E_{k_0} . Следовательно, E_{k_0} содержит все функции $u \in N(P)$, $L_2(K)$ -нормы которых не превосходят некоторого числа $\delta > 0$ для некоторого компакта $K \subset \Omega$, содержащего x^0 . Для таких $u \in N(P)$ имеем

$$|D^\alpha u(x^0)| \leq \frac{1}{\delta} k_0^j M_j \delta^{-1} \left(\int_K |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \alpha \in j\mathfrak{M}, \quad j \in N. \quad (3.3)$$

Так как неравенство (3.3) однородно относительно u , то оно справедливо для всех $u \in N(P)$. Пусть $z \in \mathbb{C}^2$, $P(z) = 0$ и $u(x) = e^{i\langle x - x^0, z \rangle}$, тогда $u \in N(P)$ и согласно (3.3)

$$|(\operatorname{Re} z)^\alpha| \leq |z^\alpha| = |D^\alpha u(x^0)| \leq C k_0^j M_j e^{\gamma |\operatorname{Im} z|}, \quad (3.4)$$

где $C = C(\delta) > 0$ и $\gamma = \sup_{x \in K} |x - x_0|$. Для $\tau \in N$ обозначим

$$\mu(\tau) = \sup \{ h(\operatorname{Re} z) : P(z) = 0, |\operatorname{Im} z| \leq \tau \}.$$

По Лемме 11.1.4 книги [1], $h(\xi) \leq C(d(\xi) + 1)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ и некоторой постоянной $C > 0$. Тогда, $h(\operatorname{Re} z) \leq C_1(d(\operatorname{Re} z) + 1) = C_1(|\operatorname{Im} z| + 1)$, $z \in \mathbb{C}^2$, $P(z) = 0$, $C_1 > 0$.

С другой стороны, очевидно, что для $0 \leq \nu < \sqrt{2}$, существует число $C_2 > 0$ такое, что

$$\sup_{\alpha \in j\mathfrak{M}} |\xi^\alpha| \geq C_2^j h^{j-\nu}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

где α – мультииндекс. Следовательно, из (3.4) получаем $[\mu(\xi)]^{j-\nu} \leq C_3^j k_0^j M_j e^{\gamma \tau}$ ($j \in N$) для постоянной $C_3 > 0$. Отсюда по Лемме 3.1 получаем для некоторой постоянной $C_4 > 0$

$$\tau^{j-\nu} \leq C_4^j k_0^j M_j e^{\gamma \tau}, \quad \text{т.е.} \quad M_j \geq \left(\frac{\tau}{C_4 k_0} \right)^j \tau^{-\nu} e^{-\gamma \tau} \quad (j \in N). \quad (3.5).$$

Пусть число $\varepsilon \in (0, 1)$ и номер j_0 выбраны так, что $j^{-\nu} \geq \varepsilon^j$ для всех $j \geq j_0$. Тогда из (3.5) следует, что для $j \geq j_0$

$$M_j \geq \left(\frac{j}{C_4 k_0 e^\gamma} \right)^j j^{-\nu} \geq \left(\frac{\varepsilon}{C_4 k_0 e^\gamma} \right)^j j^j \equiv a^j j^j.$$

Теорема 3.3. Пусть P - гипозеллиптический оператор в $\mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ - управляемый многоугольник и $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Если для некоторой точки $x^0 \in \Omega$ и каждой функции $u \in N(P)$ существует постоянная $C = C(u, x^0) > 0$ такая, что $|D^\alpha u(x^0)| \leq C^{j+1} j^j$, $\forall \alpha \in jA$ ($j \in N$), то $A \subset \mathcal{M}(P)$.

Доказательство : Также как при доказательстве Теоремы 3.2, получаем

$$h_A(\operatorname{Re} z) \leq C_1(|\operatorname{Im} z| + 1), \quad z \in \mathbb{C}^2, \quad P(z) = 0, \quad C_1 > 0. \quad (3.6)$$

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^2$ и пусть точка $z = z(\xi) \in \mathbb{C}^2$ выбрана так, что $P(z) = 0$, $d_P(\xi) = |\xi - z|$, тогда $|\operatorname{Im} z| \leq d_P(\xi)$. В [20] доказано, что $h_A(\xi + \eta) \leq C_2(h_A(\xi) + |\eta|)$, $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ ($C_2 > 0$) для управляемого многоугольника A . Отсюда, из (3.6) и определения функции $h_A(\xi)$ следует

$$\begin{aligned} h_A(\xi) &\leq h_A(|\operatorname{Re} z_1| + |\xi_1 - z_1|, |\operatorname{Re} z_2| + |\xi_2 - z_2|) \leq \\ &\leq C_2(h_A(|\operatorname{Re} z|) + |\xi - z|) \leq C_2(C_1(|\operatorname{Im} z| + C) + d_P(\xi)) \\ &\leq C_3(d_P(\xi) + 1) \quad (C_3 > 0) \end{aligned}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$. Доказательство завершено.

Abstract. A polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ is said to prevail over a polynomial $Q(\xi)$ if $R_{Q,P}(\xi) = |Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \rightarrow 0$ as $|\xi| \rightarrow \infty$. The paper suggests a new description for the set $\mathcal{M}(P, Q) = \{\beta \in \mathbb{R}_+^2 : |\xi^\beta| R_{Q,P}(\xi) < \infty, \xi \in \mathbb{R}^2\}$ by means of the prevalence measure of P over Q , leading to the concept of hypoellipticity measure of a differential operator $P(D)$. For $n = 2$ the hypoellipticity measure is used for description of the best Gevrey classes, which contain the solutions of the hypoelliptic equation $P(D)u = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators, II. Springer Verlag, Berlin, New-York, 1983.
2. B. Malgrange, "Sur un class d'opérateurs diff. hypoelliptiques". Bull. De la Soc. Math. Frans., vol. 85, no. 3, pp. 283 - 306, 1957.
3. F. Treves, "Analytic-hypoelliptic PDE of principal type", Comm. Puer and Appl. Math., vol. 24, no. 4, pp. 537 - 570, 1971.
4. C. Zuily, "Sur hypoellipticite des operateurs differetiels d'ordre 2 a coefficients reels", Compts Rend. Acad. Sci. Paris, vol. 277, no. 12, pp. 529 - 531, 1973.
5. B. Helffer, "Une classe operateurs hypoelliptic", Compts Rend. Acad. Sci. Paris, vol. 277, no. 12, pp. 531 - 533, 1973.
6. E. Newberger, Z. Zielezny, "The growth of hypoelliptic polynomials and Gevrey classes", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 39, no. 3, pp. 547 - 552, 1973.
7. A. Gilioli, F. Treves, "An example in the solvability theory of linear PDE's", Amer. J. Math., vol. 96, no. 2, pp. 367 - 385, 1974.

8. T. Kawai, "On the global existence of real analytic solutions of LDE's", I . J. Math. Soc. Japan, vol. 24, no. 3, pp. 481 – 517, 1972.
9. B. Pini, "Osservazioni sulla ipoellitticità", Boll. Unione Mat. Ital., ser. III, vol. 18, no. 4, pp. 420 – 433, 1963.
10. L. Cattabriga, "Su una classe di polinomi ippoelliptici", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 36, pp. 285 – 309, 1966.
11. M. S. Baouendi, G. Metivier, "Analytic vectors of hypoelliptic operators of principal type", Amer. J. Math., vol. 104, no. 2, pp. 287 – 319, 1982.
12. М. Г. Каратопраскиева, "О локальной разрешимости и гипоеллиптичности одного класса дифференциальных операторов с двукратными характеристиками", Сердика, Българ. Мат. Списание, том 8, № 4, стр. 367 – 377, 1982.
13. В. М. Филиппов, "О вариационном принципе для гипоеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами", Д.У., том 22, № 2, стр. 338 – 343, 1986.
14. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
15. S. G. Gindikin, L. R. Volevich, The method of Newton's Polyhedron in the theory of PDE's. Kluwer Ac. Publ., Boston, 1992.
16. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоеллиптичности", Мат. Сборник, том 11, стр. 339 – 359, 1986.
17. G. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior of degenerating polynomials at infinity", Complex Analysis, Dif. Equ. and Related Topics, Proc. of the ISAAC Conf., Yerevan. 2004, pp. 52 – 69.
18. О. Р. Габриелян, "О степени превалирования вырождающихся многочленов и об их гипоеллиптичности", Изв. НАН Армении, Математика (в печати).
19. T. Gramchev, L. Rodio, "Gevrey solvability for semilinear PDE's", Ann. Univ. Ferrara, ser. VII, vol. 25, pp. 147 – 154, 1989.
20. Г. А. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решении гипоеллиптических уравнений типа Жевре", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.
21. Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоеллиптических многочленов", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 9, № 3, стр. 189 – 211, 1974.
22. О. Р. Gabrielyan, G. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Reducing the comparison of polynomials of two variables to comparison of functions of one variable", Complex Analysis, Dif. Equ. and Related Topics, Proc. of the ISAAC Conf., Yerevan. 2004, pp. 51 – 51.

Поступила 30 сентября 2004

О РАСХОДИМОСТИ L^1 -ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМЕ ХААРА

С. Гогян

Институт Математики НАН Армении

E-mail : smbatino@freenet.am

Резюме. В работе изучается L^1 -гриди алгоритм по системе Хаара. Доказано существование L^1 -гриди алгоритма для всех функций из L^1 . Построена функция, L^1 -гриди алгоритм которой не сходится к ней.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная, минимальная система в банаховом пространстве X и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ее сопряженная система. Предположим, что для каждого элемента $x \in X$ существуют числа $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$, для которых выполняются следующие равенства :

$$\inf_{\alpha, k} \|x - \alpha \varphi_k\|_X = \|x - \hat{\alpha} \varphi_{\hat{k}}\|_X, \quad (1)$$

$$\inf_p \|x - \langle x, \psi_p \rangle \varphi_p\|_X = \|x - \langle x, \psi_{\hat{p}} \rangle \varphi_{\hat{p}}\|_X. \quad (2)$$

Тогда $G_1(x, \varphi) = \hat{\alpha} \varphi_{\hat{k}}$ есть одночленный наилучший аппроксимант, а $\bar{G}_1(x, \varphi) = \langle x, \psi_{\hat{p}} \rangle \varphi_{\hat{p}}$ самое близкое к x слагаемое в разложении элемента x по системе φ . Отметим, что (1) и (2) могут удовлетворяться при многих значениях $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$. Для любого $x \in X$ определим последовательности $\{G_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\bar{G}_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ индукцией по k . Для натурального k определим

$$G_{k+1}(x, \varphi) = G_k(x, \varphi) + G_1(x - G_k(x, \varphi), \varphi),$$

$$\bar{G}_{k+1}(x, \varphi) = \bar{G}_k(x, \varphi) + \bar{G}_1(x - \bar{G}_k(x, \varphi), \varphi).$$

Далее, обозначим $R_k(x, \varphi) = x - G_k(x, \varphi)$ и $\bar{R}_k(x, \varphi) = x - \bar{G}_k(x, \varphi)$. Легко видеть, что

$$R_{k+1}(x, \varphi) = x - G_{k+1}(x, \varphi) =$$

$$= x - G_k(x, \varphi) - G_1(x - G_k(x, \varphi), \varphi) = R_1(x - G_k(x, \varphi), \varphi),$$

т.е. $R_{k+1}(x, \varphi) = R_1(R_k(x, \varphi), \varphi)$.

Аналогично, $\bar{R}_{k+1}(x, \varphi) = \bar{R}_1(\bar{R}_k(x, \varphi), \varphi)$. Заметим, что $R_1(x, \varphi)$ получается из элемента x вычитанием одночленного наилучшего аппроксиманта. Итак, последовательность $\{R_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ строится так, что каждый ее член является остатком наилучшего одночленного приближения предыдущего члена. Последовательность $\{G_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ называется *X-гриди алгоритмом* элемента x по системе φ (см. [1]). Построенную последовательность $\{\bar{G}_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *X-гриди по разложению алгоритмом* x по системе φ . Гриди алгоритмы разных типов изучены Р. ДеВором и В. Н. Темляковым [1], [2].

Последовательности $\{G_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\bar{G}_k(x, \varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ могут определяться неоднозначно (из-за неоднозначности выбора $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ из (1) и $\hat{p}$ из (2)), поэтому для каждого $x \in X$ могут оказаться много X-гриди и X-гриди по разложению алгоритмов по системе φ .

Легко заметить, что когда $X = L^2$, а φ является ортогональной системой, то L^2 -гриди и L^2 -гриди по разложению алгоритмы совпадают и $G_m(x, \varphi)$ есть m -членный лучший аппроксимант функции x по системе φ .

В. Н. Темляковым был поставлен вопрос: *сходятся ли все L^p -гриди алгоритмы всех функций $x \in L^p(0, 1)$ при $p > 1$ к x по системе Хаара?* (См. [1], стр. 7 и 20). Напомним определение ортонормированной системы Хаара: $\chi_1 = 1$ и

$$\chi_{2^{k-1}+m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}} & \text{для } \frac{m-1}{2^{k-1}} < x \leq \frac{m}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots \\ -2^{\frac{k-1}{2}} & \text{для } \frac{m}{2^{k-1}} < x < \frac{m+1}{2^{k-1}}, \quad m = 1, 2, \dots, 2^{k-1} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Нам будет удобно пользоваться также двоичной нумерацией функций системы Хаара:

$$\chi_0^{(1)} = \chi_1, \quad \chi_k^{(m)} = \chi_{2^{k-1}+m}, \quad k \geq 1, \quad m = 1, 2, \dots, 2^{k-1}.$$

Назовем $\{\chi_k^{(m)}\}_{m=1}^{2^{k-1}}$ k -ой пачкой системы Хаара. Нижний индекс функции $\chi_k^{(m)}$ назовем ее *рангом*. Хорошо известно, что система Хаара является безусловным базисом в $L^p(0, 1)$ при $p > 1$ и базисом в $L^1(0, 1)$ (см., например, [3]).

В параграфе §2 настоящей работы доказывается следующая теорема, устанавливающая, что любая функция $f \in L^1(0, 1)$ обладает L^1 -гриди алгоритмом в системе Хаара.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существуют числа $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$, для которых выполняется равенство

$$\inf_{\alpha, k} \|f - \alpha \chi_k\|_1 = \|f - \hat{\alpha} \chi_{\hat{k}}\|_1. \quad (3)$$

Следует отметить, что не все ортогональные системы обладают этим свойством. В частности, для полной, ортонормированной системы $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенной М. Г. Григоряном [4],

$$\inf_{\alpha, k} \|f - \alpha \omega_k\|_1 = 0 \quad \text{для любой функции } f \in L^1(0, 1).$$

Вопрос, аналогичный поставленному В. Н. Темляковым, имеет отрицательный ответ для $p = 1$ по следующим соображениям. Имеем

$$\inf_{\alpha, k} \|f - \alpha \chi_k\|_{L^1(0, 1)} = \|f\|_{L^1(0, 1)}, \quad f = \chi_1 + \chi_2.$$

Следовательно, можем выбрать $G_1(f, \chi) = 0$. Далее, выбирая $G_m(f, \chi) = 0$ для $m = 2, 3, \dots$, получим L^1 -гриди алгоритм функции f , который не сходится к f по норме L^1 . С другой стороны, мы можем выбрать $G_1(f, \chi) = \chi_1$ и тогда получится, что $G_2(f, \chi) = \chi_1 + \chi_2 = f$. В этом случае получается последовательность $G_m(f, \chi) = f$, $m = 2, 3, \dots$, сходящаяся к f .

Возникает естественный вопрос: можно ли для любой функции $f \in L^1(0, 1)$, выбрать L^1 -гриди алгоритм по системе Хаара, сходящийся к f по норме $L^1(0, 1)$? В §3 доказывается следующая теорема, утверждающая, что этот вопрос имеет отрицательный ответ.

Теорема 2. Существует функция $f \in L^1(0, 1)$, для которой ни один L^1 -гриди алгоритм по системе Хаара не сходится к f .

Теорема 3. Существует функция $f \in L^1(0, 1)$, для которой ни один L^1 -гриди по разложению алгоритм по системе Хаара не сходится к f .

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$, определим множества

$$M_\alpha = M_\alpha(f, t_1, t_2) = \{x \in (t_1, t_2) : f(x) \geq \alpha\}, \quad (4)$$

$$N_\alpha = N_\alpha(f, t_1, t_2) = \{x \in (t_1, t_2) : f(x) < \alpha\}.$$

Определим также

$$B = B(f, t_1, t_2) = \left\{ \alpha \in R : m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) > \alpha\} > \frac{t_2 - t_1}{2} \right\}, \quad (5)$$

$$D = D(f, t_1, t_2) = \left\{ \alpha \in R : m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) < \alpha\} > \frac{t_2 - t_1}{2} \right\},$$

где $m(A)$ – мера Лебега множества A . Легко видеть, что справедливо

Утверждение 1. Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ имеет место

- 1) M_α является дополнением N_α на интервале (t_1, t_2) ,
- 2) $B \neq \emptyset$ и $D \neq \emptyset$,
- 3) $B \cap D = \emptyset$,
- 4) B и D суть полусоси,
- 5) $\alpha_1 \in B, \alpha_2 \in D \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$.

Обозначим $\alpha_* = \alpha_*(f, t_1, t_2) = \sup B(f, t_1, t_2)$ и $\alpha^* = \alpha^*(f, t_1, t_2) = \inf D(f, t_1, t_2)$.

Из утверждения 1 следует, что α_* и α^* конечны и

$$\alpha_* \leq \alpha^*. \quad (6)$$

Определим функцию

$$F(\alpha) = F_{(f, t_1, t_2)}(\alpha) = \|f - \alpha\|_{L^1(t_1, t_2)}. \quad (7)$$

Лемма 1. Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$, функция $F(\alpha)$ удовлетворяет условиям :

- 1) $F(\alpha) \in C(-\infty, \infty)$,
- 2) $F(\alpha)$ строго убывает на $(-\infty, \alpha_*]$ и строго возрастает на $[\alpha^*, +\infty)$,
- 3) если $\alpha_* < \alpha^*$ (см. (6)), то $F(\alpha)$ постоянна на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$.

Доказательство : 1) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} |F(\alpha_2) - F(\alpha_1)| &= \left| \|f(x) - \alpha_1\|_{L^1(t_1, t_2)} - \|f(x) - \alpha_2\|_{L^1(t_1, t_2)} \right| \leq \\ &\leq \|\alpha_2 - \alpha_1\|_{L^1(t_1, t_2)} = (t_2 - t_1) |\alpha_2 - \alpha_1|. \end{aligned}$$

Откуда и следует непрерывность $F(\alpha)$.

2) Пусть $\alpha_2 < \alpha_1$. Положим $M_1 = M_{\alpha_1}$, $N_1 = N_{\alpha_1}$, $M_2 = M_{\alpha_2}$, $N_2 = N_{\alpha_2}$. Согласно (4)

$$M_1 \subseteq M_2, \quad N_2 \subseteq N_1. \quad (8)$$

Следовательно, в силу пункта 1) (утверждения 1),

$$M_2 \setminus M_1 = N_1 \setminus N_2. \quad (9)$$

Из (7) и (8) имеем, что

$$F(\alpha_1) = \int_{t_1}^{t_2} |f(x) - \alpha_1| dx = \int_{M_1} (f(x) - \alpha_1) dx + \int_{N_1} (\alpha_1 - f(x)) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{M_2} (f(x) - \alpha_1) dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1) dx + \\
 &+ \int_{N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx + \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx = \\
 &= \int_{M_2} (f(x) - \alpha_2) dx + \int_{M_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1) dx + \\
 &+ \int_{N_2} (\alpha_2 - f(x)) dx + \int_{N_2} (\alpha_1 - \alpha_2) dx + \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx = \\
 &= F(\alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)[m(M_2) - m(N_2)] + \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1) dx.
 \end{aligned}$$

Откуда, с учетом (9), получим

$$F(\alpha_1) = F(\alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)[m(M_2) - m(N_2)] + 2 \int_{N_1 \setminus N_2} [\alpha_1 - f(x)] dx. \quad (10)$$

Теперь пусть $\alpha_2 \in D$. Тогда $m(N_2) > \frac{t_2 - t_1}{2}$ согласно (4) и (5). Отсюда и в силу пункта 1) утверждения 1 следует, что $m(M_2) < \frac{t_2 - t_1}{2}$. Следовательно,

$$m(M_2) - m(N_2) < 0. \quad (11)$$

Заметим, что $f(x) < \alpha_1$ на множестве N_1 . Поэтому,

$$\int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x)) dx \geq 0. \quad (12)$$

Учитывая (10) – (12), получим $F(\alpha_1) > F(\alpha_2)$. Итак, на полуоси D F строго возрастает. Учитывая также, что F является непрерывной функцией, получим первую часть утверждения 2) леммы. Аналогично можно доказать, что $F(\alpha)$ строго убывает на $(-\infty, \alpha_*)$.

3) Пусть $\alpha \in (\alpha_*, \alpha^*)$. Тогда $\alpha \notin B$, $\alpha \notin D$ и согласно (5)

$$\begin{aligned}
 m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) > \alpha\} &\leq \frac{t_2 - t_1}{2}, \\
 m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) < \alpha\} &\leq \frac{t_2 - t_1}{2}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что существует $\bar{\alpha} \in (\alpha_*, \alpha^*)$, для которой во втором выражении (13) выполняется строгое неравенство. Тогда

$$m\left\{x \in (t_1, t_2) : f(x) > \frac{\bar{\alpha} + \alpha_*}{2}\right\} \geq m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) \geq \bar{\alpha}\} > \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{\bar{\alpha} + \alpha_*}{2} \in B$, что противоречит тому, что $\frac{\bar{\alpha} + \alpha_*}{2} > \alpha_* = \sup B$.
Значит,

$$m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) < \alpha\} = \frac{t_2 - t_1}{2}, \quad \alpha \in (\alpha_*, \alpha^*).$$

Итак, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha_*, \alpha^*)$, $\alpha_2 < \alpha_1$, имеем $m(N_2) = m(M_2) = \frac{t_2 - t_1}{2}$ и $m(N_1 \setminus N_2) = 0$ (так как $N_2 \subseteq N_1$ и $m(N_1) = m(N_2)$). Отсюда и из (10) заключаем, что $F(\alpha_1) = F(\alpha_2)$. Следовательно, функция $F(\alpha)$ постоянна на (α_*, α^*) и, значит, $F(\alpha)$ постоянна на $[\alpha_*, \alpha^*]$ в силу непрерывности. Доказательство завершено.

Следствие 1. Для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$, функция $F_{(f, t_1, t_2)}$ принимает свое минимальное значение только на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$.

Определим функцию

$$\chi_{(t_1, t_2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } t_1 < x \leq \frac{t_1 + t_2}{2}, \\ -1 & \text{для } \frac{t_1 + t_2}{2} < x < t_2 \end{cases}$$

и множество $f_{(t_1, t_2)} = f \cdot \chi_{(t_1, t_2)}$. Тогда

$$\|f - \alpha \chi_{(t_1, t_2)}\|_{L^1(t_1, t_2)} = \|f_{(t_1, t_2)} - \alpha\|_{L^1(t_1, t_2)} = F_{(f_{(t_1, t_2)}, t_1, t_2)}(\alpha). \quad (14)$$

Из леммы 1 и (4) вытекает

Утверждение 2. Для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ равенство

$$\inf_{\alpha} \|f - \alpha \chi_{(t_1, t_2)}\|_{L^1(t_1, t_2)} = \|f - \hat{\alpha} \chi_{(t_1, t_2)}\|_{L^1(t_1, t_2)},$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\hat{\alpha} \in [\alpha_*(f_{(t_1, t_2)}, t_1, t_2), \alpha^*(f_{(t_1, t_2)}, t_1, t_2)].$$

Определение. Пусть $f, g \in L^1(t_1, t_2)$ и

$$M = \|f\|_{L^1(t_1, t_2)} - \inf_{\alpha} \|f - \alpha g\|_{L^1(t_1, t_2)}.$$

Если $M > 0$, то скажем, что функция g *понижает* норму f на M . Если $M = 0$, то скажем, что g *не может понизить* норму f .

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\inf_{\alpha, k} \|f - \alpha \chi_k\|_{L^1(0,1)} = \Delta.$$

Если $\Delta = \|f\|_{L^1(0,1)}$, то (3) имеет место при $\hat{\alpha} = 0$. Допустим $\Delta < \|f\|_{L^1(0,1)}$. Тогда

$$\|f - \alpha_1 \chi_{k_1}\|_{L^1(0,1)} < \Delta + \frac{\|f\|_{L^1(0,1)} - \Delta}{2}$$

при некоторых α_1 и k_1 . В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\int_e |f(x)| dx < \frac{\|f\|_{L^1(0,1)} - \Delta}{2} \quad \text{для } e \subset [0, 1], \quad m(e) < \delta_0.$$

Обозначим $r_0 = 1 + [-\log_2 \delta_0]$. Тогда для любой функции χ_n ранга $r > r_0$ будем иметь

$$m(\text{supp}(\chi_n)) = 2^{1-r} \leq 2^{-r_0} < \delta_0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f - \alpha \chi_n\|_{L^1(0,1)} &\geq \|f - \alpha \chi_n\|_{L^1((0,1) \setminus \text{supp}(\chi_n))} = \|f\|_{L^1(0,1)} - \|f\|_{L^1(\text{supp}(\chi_n))} > \\ &> \|f\|_{L^1(0,1)} - \frac{\|f\|_{L^1(0,1)} - \Delta}{2} > \|f - \alpha_1 \chi_{k_1}\|_{L^1(0,1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, функции системы Хаара рангом больше r_0 понижают норму f меньше, чем функция χ_{k_1} . Следовательно, лишь конечное число функций могут понизить норму f больше, чем функция χ_{k_1} . Используя утверждение 2 (следствие 1 для χ_1), убеждаемся в справедливости теоремы 1 для этих функций.

Лемма 2. Пусть для функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ справедливы соотношения $0 \notin B(f, t_1, t_2)$ и $0 \notin D(f, t_1, t_2)$. Тогда функция $\Psi \equiv 1$ не может понизить норму f .

Доказательство : Учитывая (7) и следствие 1, можем утверждать, что

$$\inf_{\alpha} \|f - \alpha \Psi\|_{L^1(t_1, t_2)} = \inf_{\alpha} \|f - \alpha\|_{L^1(t_1, t_2)} = \inf_{\alpha} F_{(f, t_1, t_2)}(\alpha) = F(0) = \|f\|_{L^1(t_1, t_2)}.$$

Лемма 3. Пусть функция $f \in L^1(t_1, t_2)$ не меняет свой знак на интервале (t_1, t_2) . Тогда функция $\chi_{(t_1, t_2)}$ не может понизить норму f .

Доказательство : Для определенности положим $f \geq 0$. Тогда $0 \notin B(f_{(t_1, t_2)}, t_1, t_2)$ так как

$$m\{x \in (t_1, t_2) : f_{(t_1, t_2)}(x) > 0\} = m\left\{x \in \left(t_1, \frac{t_1 + t_2}{2}\right] : f(x) > 0\right\} +$$

$$+m \left\{ x \in \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, t_2 \right) : f(x) < 0 \right\} \leq m \left(t_1, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) = \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Аналогично, $0 \notin D(f_{(t_1, t_2)}, t_1, t_2)$, так как

$$m\{x \in (t_1, t_2) : f_{(t_1, t_2)}(x) < 0\} = m \left\{ x \in \left(t_1, \frac{t_1 + t_2}{2} \right] : f(x) < 0 \right\} + \\ + m \left\{ x \in \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, t_2 \right) : f(x) > 0 \right\} \leq m \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, t_2 \right) = \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Согласно (14) и лемме 2 убеждаемся в справедливости леммы 3.

§3. СХОДИМОСТЬ L^1 -ГРИДИ И L^1 -ГРИДИ ПО РАЗЛОЖЕНИЮ АЛГОРИТМОВ

Пусть

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } 0 \leq x < \frac{5}{8} \text{ или } \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8} \\ -1, & \text{для } \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4} \text{ или } \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Для каждого натурального числа $r \in N$, обозначим через Φ_r совокупность всех функций вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} P(2^{k+1}x - 1), & \text{для } 2^{-1-k} \leq x < 2^{-k}, \quad k = r, r+1, \dots \\ 0, & \text{для } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ g(x), & \text{для } x \in \left[\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2} \right], \end{cases}$$

где g — неотрицательная, интегрируемая функция на $\left[\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2} \right]$ с

$$m \left\{ x \in \left(\frac{1}{2^{1+p}}, \frac{1}{2^p} \right) : g(x) = 0 \right\} \geq \frac{3}{2^{p+3}}, \quad p = 1, 2, \dots, r-1.$$

Очевидно, что $\Phi_r \subset L^1(0, 1)$ для всех натуральных чисел r .

Лемма 4. Пусть $\varphi \in \Phi_r$ при некотором натуральном r . Тогда

1) ни одна функция Хаара $\chi_k^{(1)}$ не может понизить норму φ ,

2) ни одна функция Хаара рангом меньше $(r+2)$ не может понизить норму φ .

Доказательство : 1) Докажем, что при любом натуральном числе k функция $\chi_k^{(1)}$ не может понизить норму φ . Когда $k < r+1$, то

$$m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0, 2^{1-k})}(x) > 0\} = \\ = m\{x \in (0, 2^{-k}) : \varphi(x) > 0\} + m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) < 0\} =$$

$$= m\{x \in (0, 2^{-k}] : \varphi(x) > 0\} \leq 2^{-k} = \frac{m(0, 2^{1-k})}{2},$$

т.е. $0 \notin B(\varphi_{(0, 2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Аналогично,

$$\begin{aligned} m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0, 2^{1-k})}(x) < 0\} &= \\ &= m\{x \in (0, 2^{-k}] : \varphi(x) < 0\} + m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) > 0\} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2^r} + m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) > 0\} \leq \frac{1}{4 \cdot 2^r} + \frac{1}{4 \cdot 2^k} \leq \frac{m(0, 2^{1-k})}{2}, \end{aligned}$$

и поэтому $0 \notin D(\varphi_{(0, 2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Учитывая (14) и лемму 2, заключаем, что функция $\chi_k^{(1)}$, где $k < r + 1$, не может понизить норму φ .

Для случая $k \geq r + 1$ имеем

$$\begin{aligned} m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0, 2^{1-k})}(x) > 0\} &= m\{x \in (0, 2^{-k}] : \varphi(x) > 0\} + \\ &+ m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) < 0\} = 2^{-k} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{m(0, 2^{1-k})}{2}, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0, 2^{1-k})}(x) < 0\} &= m\{x \in (0, 2^{-k}) : \varphi(x) < 0\} + \\ &+ m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) > 0\} = 2^{-k} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{m(0, 2^{1-k})}{2}, \end{aligned}$$

т.е. $0 \notin B(\varphi_{(0, 2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$ и $0 \notin D(\varphi_{(0, 2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Поэтому функция $\chi_k^{(1)}$, где $k \geq r + 1$, не может понизить норму φ .

2) Согласно лемме 2, функция $\chi_1 = 1$ не может понизить норму φ . Мы доказали, что функции Хаара $\chi_k^{(1)}$ также не могут понизить норму φ . Функция $\chi_k^{(p)}$ с $p > 1$ и $k < r + 2$ имеет носитель

$$\left(\frac{p-1}{2^{k-1}}, \frac{p}{2^{k-1}} \right) \subset [2^{-r}, 1],$$

где функция φ не меняет свой знак. Поэтому, $\chi_k^{(p)}$ не может понизить норму φ в силу леммы 3.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем следующую теорему.

Теорема 4. Для любого натурального числа r и каждой функции $\varphi \in \Phi_r$ существуют единственные $\hat{k}$, $\hat{p}$ и $\hat{\alpha}$, для которых

$$\min_{\alpha, k, p} \left\| \varphi - \alpha \chi_k^{(p)} \right\|_{L^1(0,1)} = \left\| \varphi - \hat{\alpha} \chi_{\hat{k}}^{(\hat{p})} \right\|_{L^1(0,1)} = \|\varphi\|_{L^1(0,1)} - 2^{-(r+2)}.$$

При этом, $R_1(\varphi, \chi) \in \Phi_{r+1}$.

Доказательство : Сначала вычислим насколько понижает норму φ функция $\chi_{r+2}^{(2)}$. Для каждой $\alpha < 1$

$$m \left\{ x \in \left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right) : \varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)}(x) > \alpha \right\} = \frac{1}{2^{r+2}} + \frac{1}{2^{r+3}} > \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right),$$

т.е. все числа меньше 1 принадлежат множеству $B \left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)$. Аналогично можно показать, что все числа больше 1 принадлежат множеству $D \left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)$. Согласно утверждению 1

$$\sup B \left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right) = \inf D \left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r} \right) = 1.$$

С учетом утверждения 2 заключаем

$$\min_{\alpha} \left\| \varphi - \alpha \chi_{r+2}^{(2)} \right\|_{L^1(0,1)} = \left\| \varphi - \chi_{\text{supp}(\chi_{r+2}^{(2)})} \right\|_{L^1(0,1)} = \left\| \varphi \right\|_{L^1(0,1)} - 2^{-(r+2)}.$$

Это означает, что функция $\chi_{r+2}^{(2)}$ понижает норму φ на $2^{-(r+2)}$.

Теперь покажем, что остальные функции $\chi_k^{(p)}$ системы Хаара понижают норму φ меньше, чем на $2^{-(r+2)}$ (или вообще не могут понизить). Пусть $k \geq r+4$. Тогда меры носителей таких функций не превосходят $2^{-(r+3)}$. Если φ не меняет свой знак, то по лемме 3 $\chi_k^{(p)}$ не может понизить норму φ . Если φ меняет свой знак, то $|\varphi| \leq 1$, и, следовательно, $\chi_k^{(p)}$ не может понизить норму φ более, чем на $2^{-(r+3)}$.

Согласно лемме 4 функции с рангом $k < r+2$ не могут понизить норму φ . Среди функций рангом $(r+2)$ или $(r+3)$ только $\chi_{r+2}^{(1)}, \chi_{r+2}^{(2)}, \chi_{r+3}^{(1)}, \chi_{r+3}^{(2)}$ и $\chi_{r+3}^{(5)}$ отличны от нуля в областях, где φ меняет свой знак, а согласно лемме 3 это является необходимым условием для понижения нормы. Функции $\chi_{r+2}^{(1)}$ и $\chi_{r+3}^{(1)}$ не могут понизить норму φ в силу леммы 4. Нетрудно убедиться, что $\chi_{r+3}^{(5)}$ не может понизить норму φ , а $\chi_{r+3}^{(2)}$ понижает ее на $\frac{1}{2^{r+3}}$. Итак,

$$R_1(\varphi, \chi) = \varphi - \chi_{\text{supp}(\chi_{r+2}^{(2)})} = \varphi - 2^{-\frac{r+1}{2}} \chi_{r+2}^{(2)}.$$

Легко увидеть, что $R_1(\varphi, \chi) \in \Phi_{r+1}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Возьмем $f \in \Phi_1$ (в Φ_1 содержится только одна функция). Тогда, согласно теореме 4,

$$R_1(f, \chi) = f - \frac{1}{4} \chi_3^{(2)} \in \Phi_2, \quad \|R_1(f, \chi)\| = \|f\| - \frac{1}{2^3}.$$

Применив теорему 4 несколько раз, заключаем, что $R_{n+1}(f, \chi) \in \Phi_{n+2}$ и

$$\|R_{n+1}(f, \chi)\| = \|R_n(f, \chi)\| - \frac{1}{2^{n+3}} = \dots = \|f\| - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Последовательность $R_n(f, \chi)$ определяется однозначно и $\|f\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2}$, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - G_n(f, \chi)\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^{-n}) = \frac{1}{4} > 0,$$

т.е. единственный L^1 -гриди алгоритм функции f по системе Хаара не сходится к f . Это завершает доказательство.

Из доказательства теоремы ясно, что L^1 -гриди алгоритм любой функции $f \in \Phi_r$ по системе Хаара определяется однозначно и не сходится к f .

Вычислив коэффициенты Фурье функции f из доказательства теоремы 2, получаем, что

$$f = \frac{1}{4} \left[\chi_0^{(1)} + \chi_1^{(1)} \right] + \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-\frac{k+1}{2}} \left[\chi_k^{(2)} + \chi_{k+2}^{(8)} + \chi_{k+2}^{(9)} \right]. \quad (15)$$

В то же время, L^1 -гриди алгоритм функции f по системе Хаара получается в виде

$$G_n(f, \chi) = \sum_{k=3}^{n+2} 2^{-\frac{k-1}{2}} \chi_k^{(2)} \quad (16)$$

Сравнивая эти выражения, заметим, что в (16) коэффициент при $\chi_k^{(2)}$ вдвое больше, чем в (15). Может быть в этом и состоит причина, по которой L^1 -гриди алгоритм f по системе Хаара не сходится к f ? Может быть условием (3) мы даем слишком большую свободу в определении L^1 -гриди алгоритма? Ответы на эти вопросы дает L^1 -гриди по разложению алгоритм. L^1 -гриди по разложению алгоритм отличается от обычного L^1 -гриди алгоритма тем, что коэффициент при φ_n в (3) не может быть произвольным, а является коэффициентом Фурье данной функции.

Лемма 5. Для $f \in \Phi_1$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы соотношения :

$$\langle \bar{R}_m(f, \chi), \chi_0^{(1)} \rangle = \frac{1}{4}, \quad \langle \bar{R}_m(f, \chi), \chi_1^{(1)} \rangle = \frac{1}{4}, \quad \bar{R}_0(f, \chi) = f. \quad (17)$$

Доказательство : Заметим, что f имеет вид (15) и для $m = 0$ соотношения (17) следуют из (15). Предположим, что (17) справедливо для некоторого $m =$

$0, 1, \dots$ и докажем, что (17) будет справедливым и для $m + 1$. Разложение Фурье функции $\bar{R}_m(f, \chi)$ по системе Хаара будет отличаться от (15) только отсутствием m слагаемых. Так как первые два слагаемых будут присутствовать, все три слагаемых в квадратных скобках выражения (15) будут присутствовать в ряде Фурье функции $\bar{R}_m(f, \chi)$ по системе Хаара при некотором натуральном $k = K_m$. Именно эти три слагаемых вместе с $\chi_0^{(1)}$ и $\chi_1^{(1)}$ определяют значения функции f на $\text{supp}(\chi_{K_m}^{(2)})$. Следовательно, на $\text{supp}(\chi_{K_m}^{(2)})$ функции f и $\bar{R}_m(f, \chi)$ совпадают. Легко заметить, что

$$\left\| f - \langle f, \chi_{K_m}^{(2)} \rangle \chi_{K_m}^{(2)} \right\|_1 = \left\| f - 2^{-\frac{K_m+1}{2}} \chi_{K_m}^{(2)} \right\|_1 < \|f\|_1.$$

Следовательно,

$$\left\| \bar{R}_m(f, \chi) - 2^{-\frac{K_m+1}{2}} \chi_{K_m}^{(2)} \right\|_1 < \|\bar{R}_m(f, \chi)\|_1.$$

Это означает, что $\|\bar{R}_{m+1}(f, \chi)\|_1 < \|\bar{R}_m(f, \chi)\|_1$. Итак, достаточно показать, что функции $\chi_0^{(1)}$ и $\chi_1^{(1)}$ не могут понизить норму $\bar{R}_m(f, \chi)$. Это следует из леммы 2 и утверждения 2, так как функция $\bar{R}_m(f, \chi)$ равняется нулю на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$.

Доказательство теоремы 3. Возьмем $f \in \Phi_1$. Хотя L^1 -гриды по разложению алгоритм для f определяется неоднозначно, лемма 5 справедлива для всех возможных последовательностей. Это означает, что ни один L^1 -гриды по разложению алгоритм по системе Хаара не сходится к f . Теорема 3 доказана.

Abstract. The existence of L^1 -greedy algorithms by Haar system is proved for any function from L^1 . A function is constructed, that can not be obtained by its L^1 -greedy algorithm.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Found. Comput. Math. vol. 3, pp. 33 – 107, 2003.
2. R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Advances in Comput. Math., № 5, pp. 173 – 187, 1996.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды. Москва, АФЦ, 1999.
4. М. Г. Григорян, "Представление функций классов $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами", ДАН Арм ССР, том 67, № 5, 1978.

Поступила 22 июня 2003

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L^p ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет

E-mail : gmarting@ysu.am

Резюме. В настоящей работе доказывается, что для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p[0, 1]$ ($p \in [1, 2]$) существует функция $g(x) \in L^1[0, 1]$, $g(x) = f(x)$ на E , такая, что гриди алгоритм функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1_{[0,1]}$, а на множестве E сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(E)$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Для $f(x) \in L^p_{[0,1]}$, $p \in [1, 2]$ положим

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi kt} dt.$$

Для каждого натурального числа m , обозначим через A_m множество m разных индексов, для которых

$$|c_{|k|}(f)| \geq |c_{|n|}(f)|, \quad \forall |k| \in A_m, \quad \forall |n| \notin A_m.$$

Положим

$$G_m(x, f) = \sum_{|k| \in A_m} c_k(f) e^{i2\pi kx}.$$

Говорят, что гриди алгоритм функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^p_{(E)}$, если существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_E |G_m(x, f) - f(x)|^p dx = 0.$$

Подробнее об этом алгоритме см. [1] – [3].

В работе [2] В. Н. Темляков доказал, что существует функция $f_0(x) \in \bigcap_{1 \leq p < 2} L^p_{[0,1]}$, гряди алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере. Естественен следующий вопрос: существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции класса $L^1_{[0,2\pi]}$ на e , гряди алгоритм по тригонометрической системе измененной функции сойдется бы к этой функции по мере?

Мы собираемся доказать, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Более того, мы докажем общее утверждение, из которого следует, в частности, следующая

Теорема 1. Для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любого $p \in [1, 2)$ и каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, $g(x) = f(x)$ на E , такую, что гряди алгоритм функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1_{[0,1]}$, а на множестве E сходится к $f(x)$ в метрике $L^p_{(E)}$.

Теорема 1 следует из утверждения:

Теорема 2. Для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любого $p \in [1, 2)$ и каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, $g(x) = f(x)$ на E , и перестановку $\{\sigma(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, ($\sigma(-k) = -\sigma(k)$) целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ такие, что

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{|k| \leq n} c_{\sigma(k)}(g) e^{i2\pi\sigma(k)x} - g(x) \right| dx = 0,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left| \sum_{|k| \leq n} c_{\sigma(k)}(g) e^{i2\pi\sigma(k)x} - f(x) \right|^p dx = 0,$$

$$3) |c_{\sigma(k)}(g)| > |c_{\sigma(k+1)}(g)|, \quad \forall k \geq 0,$$

$$4) \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \epsilon, \quad \sum_{k=1}^n |c_{\sigma(k)}(g)|^r < \infty, \quad \forall r > 2.$$

В связи с Теоремой 2 возникают следующие вопросы, ответы на которые нам неизвестны.

Вопрос 1. Можно ли в Теореме 2 исправленную функцию $g(x)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ выбрать так, чтобы в дополнение к утверждениям 1) - 4) обеспечить также сходимость почти всюду ряда $\sum_{k=1}^n c_{\sigma(k)}(g) \varphi_{\sigma(k)}(x)$?

Вопрос 2. Можно ли в Теореме 2 перестановку $\{\sigma(k)\}$ выбрать независимой от исправленной функции $f(x)$?

Необходимо отметить, что идея об исправлении функции на малых множествах с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину [5], который в 1912 доказал следующую знаменитую теорему.

Теорема (Н. Н. Лузин). Для каждой измеримой, почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и непрерывная на $[0, 1]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E .

В дальнейшем идея Н. Н. Лузина получила существенное развитие. В 1939 Д. Е. Меньшов [6] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема (Д. Е. Меньшов). Пусть $f(x)$ измеримая, почти всюду конечная функция на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\epsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E , $|E| > 2\pi - \epsilon$ и такую, что ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Далее в этом направлении интересные результаты были получены А. А. Талаляном, Ф. Г. Арутюняном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Кашиным, К. С. Казаряном, Ш. В. Хведелидзе, А. Б. Гулисашвили, Р. И. Осиповым, Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе и автором (см. [9] - [19], [28]). Представим некоторые из этих результатов.

Теорема (А. А. Талалян [5]). Члены любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{n_k}\}$ обладала следующим свойством: для любой функции $f(x) \in L^2[0, 1]$ и любого $\epsilon > 0$ можно найти функцию $g(x) \in L^2[0, 1]$ такую, что $|\{x \in [0, 1], g(x) \neq f(x)\}| < \epsilon$ и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_{n_k}\}$ сходится почти всюду.

В 1978 Ш. В. Хведелидзе [12] опубликовал следующий результат.

Теорема (Ш. В. Хведелидзе). Любую функцию $f(x) \in L^1$ изменением на некотором множестве e , зависящем от $f(x)$, можно превратить в функцию $g(x) : |g(x)| = |f(x)|$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду и в метрике L^1 .

В работе [21] автора доказано, что для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E , ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1_{[0,1]}$.

Замечание 1. Необходимо отметить, что как в теореме Д. Е. Меньшова, так и в работах [5] - [20] и [27], "исключительное" множество e , на котором происходит изменение $f(x)$, зависит от $f(x)$, тогда как в работах [21] - [27] и в теоремах,

доказанных в настоящей статье это исключительное множество не зависит от исправляемой функции $f(x)$, т.е. оно обслуживает целый функциональный класс.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Для любых чисел $\gamma \neq 0$, $N_0 > 1$, $\delta \in (0, 1)$, $\epsilon_0 \in (0, 1)$ и интервала $\Delta \subset [0, 1]$ существуют функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, измеримое множество $E \subset [0, 1]$, полином вида

$$Q(x) = \sum_{N_0 \leq |k| \leq N} a_k e^{i2\pi kx}, \quad a_{-k} = \bar{a}_k,$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{|k|=N_0}^N$ целых чисел $N_0, \dots, N$, удовлетворяющие условиям :

- 1) $g(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \quad |E| > (1 - \delta)|\Delta|,$
- 2) $\int_0^1 |g(x)| dx < 2|\gamma||\Delta|, \quad \left(\int_0^1 |Q(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon_0,$
- 3) $\sum_{|k|=N_0}^N |a_k|^{2+\delta} < \epsilon_0, \quad |a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad \forall k \in (N, M),$
- 4) $\left(\sum_{|k|=N_0}^M a_{\sigma(k)}^2 \right)^{1/2} \leq 2|\gamma| \sqrt{\frac{|\Delta|}{\delta}}, \quad \sigma(-k) = -\sigma(k).$

Доказательство : Разделим отрезок Δ на конечное число интервалов $\Delta_1, \dots, \Delta_{\nu_0}$ так, чтобы

$$\max_{1 \leq \nu \leq \nu_0} \left(|\gamma| \sqrt{\frac{|\Delta_\nu|}{\delta}} \right)^\delta < \epsilon, \quad \text{где} \quad \epsilon = \frac{\epsilon_0 \delta}{4^{\nu_0} (\gamma^2 |\Delta| + 1)}. \quad (1)$$

Положим

$$I(x) = \begin{cases} -\frac{2-\delta}{\delta} \gamma, & x \in [0, \frac{\delta}{2}], \\ \gamma, & x \in [\frac{\delta}{2}, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

Продолжим эту функцию с отрезка $[0, 1]$ на всю действительную ось с периодом 1. Нетрудно видеть, что существует натуральное число $n_1 > 2\nu_0$ такое, что

$$\left| \int_0^1 [I(2^{n_1} x) \chi_{\Delta_1}(x)] e^{-i2\pi n x} dx \right| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{N_0}}, \quad n = 1, 2, \dots, N_0. \quad (3)$$

Положим

$$g_1(x) = I(2^{n_1} x) \chi_{\Delta_1}(x), \quad E_1 = \{x \in [0, 1] : g_1(x) = \gamma_1\}. \quad (4)$$

Тогда из (2) – (4) вытекает

$$|E_1| > (1 - \delta)|\Delta_1|, \quad g_1(x) = 0, \quad x \notin \Delta_1, \quad (5)$$

$$\int_0^1 |g_1(x)| dx < 2|\gamma||\Delta_1|, \quad \int_0^1 g_1^2(x) dx < \frac{2}{\delta}\gamma^2|\Delta_1|. \quad (6)$$

Возьмем натуральное число N_1 настолько большим, чтобы

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=0}^{N_1-1} a_k^{(1)} e^{i2\pi kx} - g_1(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\epsilon}{4},$$

где

$$a_k^{(1)} = \int_0^1 g_1(x) e^{-i2\pi kx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда и из (3) и (4)

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=N_0}^{N_1-1} a_k^{(1)} e^{i2\pi kx} - g_1(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{\epsilon}{4} + \left(\sum_{|k|=0}^{N_0} [a_k^{(1)}]^2 \right)^{1/2} < \epsilon. \quad (7)$$

Предположим, что уже определены функции $g_1(x), \dots, g_{\nu-1}$, множества $E_1, \dots, E_{\nu-1}$, числа $N_1, \dots, N_{\nu-1}$ и полиномы $Q_1(x), \dots, Q_{\nu-1}(x)$. Возьмем натуральные числа s_ν и N_ν настолько большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\left| \int_0^1 [I(2^{s_\nu} x) \chi_{\Delta_\nu}(x)] e^{-i2\pi kx} dx \right| < \frac{\epsilon}{16\sqrt{N_{\nu-1}}}, \quad |k| \leq N_{\nu-1},$$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=0}^{N_{\nu-1}} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx} - g_\nu(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\epsilon}{4},$$

где

$$g_\nu(x) = I(2^{s_\nu} x) \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad a_k^{(\nu)} = \int_0^1 g_\nu(x) e^{-i2\pi kx} dx \quad (8)$$

и положим

$$E_\nu = \{x \in \Delta_\nu : g_\nu(x) = \gamma\}. \quad (9)$$

Рассуждая также, как и при получении оценок (5) – (7), мы заключаем, что функция $g_\nu(x)$, множество E_ν и полином вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx} \quad (10)$$

удовлетворяют следующим условиям :

$$g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E_\nu, \\ 0, & x \notin \Delta_\nu, \end{cases} \quad |E_\nu| > (1 - \delta)|\Delta_\nu|, \quad (11)$$

$$\int_0^1 |g_\nu(x)| dx < 2|\gamma||\Delta_\nu|, \quad \int_0^1 g_\nu^2(x) dx < \frac{2}{\delta} \gamma^2 |\Delta_\nu|, \quad (12)$$

$$\left(\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon. \quad (13)$$

Положим

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x), \quad E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \quad (14)$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{N_{\nu-1} \leq |k| \leq N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx} \right) = \sum_{N_0 \leq |k| \leq N} a_k e^{i2\pi kx}, \quad (15)$$

$$a_k = a_k^{(\nu)}, \quad |k| \in [N_{\nu-1}, N_\nu), \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \quad N = N_{\nu_0} - 1. \quad (16)$$

Утверждения 1) и 2) леммы следуют из формул (9) – (15).

Из (8), (12) и неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2 \leq \int_0^1 |g_\nu(x)|^2 dx \leq \frac{2}{\delta} |\gamma|^2 |\Delta_\nu| \quad (17)$$

для всех $\nu \in [1, \nu_0]$. Отсюда и из (1) и (16) следует

$$\begin{aligned} \sum_{|k|=N_0}^N |a_k|^{2+\delta} &< \left(\max_{N_0 \leq |k| \leq N} |a_k| \right)^\delta \sum_{|k|=N_0}^N |a_k|^2 = \\ &= \left(\max_{N_0 \leq |k| \leq N} |a_k| \right)^\delta \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left[\sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2 \right] \leq \epsilon \frac{2}{\delta} \gamma^2 |\Delta| < \epsilon_0, \end{aligned}$$

т.е. утверждения 1) – 3) леммы выполнены.

Чтобы доказать 4), переставим члены полинома $Q(x) = \sum_{|k|=N_0}^N a_k e^{i2\pi kx}$ так, чтобы выполнялось $|a_{\sigma(N_0)}| \geq \dots \geq |a_{\sigma(k)}| \geq \dots \geq |a_{\sigma(N)}|$ (здесь $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^N$ – некоторая перестановка натуральных чисел $N_0, \dots, N$ и $\sigma(-k) = -\sigma(k)$). В силу (16) и (17)

$$\left(\sum_{|k|=N_0}^N a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 2|\gamma| \sqrt{\frac{|\Delta|}{\delta}}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $|a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0$, $\forall k \in [N_0, N)$, и, следовательно, Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. Для любых $\epsilon > 0$, $f(x) \in L^2_{[0,1]}$ с $\int_0^1 |f(x)| dx > 0$ и $N > 1$, можно найти измеримое множество $E \subset [0, 1]$, функцию $g(x)$, полином вида

$$Q(x) = \sum_{|k|=N_0}^M a_k e^{i2\pi kx}, \quad a_{-k} = \bar{a}_k,$$

и перестановку $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^M$ целых чисел $N_0, \dots, M$, удовлетворяющие условиям:

$$1) |E| > 1 - \epsilon, \quad g(x) = f(x), \quad x \in E.$$

$$2) \int_0^1 |g(x)| dx \leq 3 \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \int_0^1 |Q(x) - g(x)| dx < \epsilon,$$

$$3) \sum_{|k|=N_0}^N |a_k|^{2+\epsilon} < \epsilon, \quad |a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad \forall k \in (N_0, N),$$

$$4) \max_{N \leq m \leq N} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^m a_{\sigma(k)} e^{i2\pi kx} \right| dx < 3 \int_0^1 |f(x)| dx \quad (\sigma(-k) = -\sigma(k)),$$

$$5) \max_{N \leq m \leq N} \left(\int_E \left| \sum_{|k|=N}^m a_{\sigma(k)} e^{i2\pi kx} \right|^p dx \right)^{1/p} < 2 \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \epsilon.$$

Доказательство : Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad (18)$$

с интервалами постоянства Δ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$ такую, что

$$0 < |\gamma_\nu|^2 |\Delta_\nu| < \frac{\epsilon}{16^2} \left[\int_0^1 |f(x)| dx \right]^2, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \quad (19)$$

$$\left(\int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \right) < \min \left\{ \frac{\epsilon}{4}, \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)| dx \right\}. \quad (20)$$

Последовательным применением леммы 1 определим числа $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{\nu_0-1}$, функции $g_1(x), \dots, g_{\nu_0}(x)$, множества $E_1, \dots, E_{\nu_0}$, полиномы

$$Q_\nu(x) = \sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx}, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \quad (21)$$

и перестановку $\{\sigma_\nu(k)\}_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}$ целых чисел $N_{\nu-1}+1, \dots, N_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0 = \frac{\epsilon}{4\nu_0}, \quad \alpha_\nu = \min \left\{ \frac{\epsilon}{4\nu_0} \int_0^1 |f(x)| dx, \min_{N_{\nu-1} < |k| \leq N_\nu} (|a_k^{(\nu)}|) \right\}, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \quad (22)$$

$$g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, & x \in E_\nu, \\ 0, & x \notin \Delta_\nu, \end{cases}, \quad |E_\nu| > (1 - \epsilon)|\Delta_\nu|, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \quad (23)$$

$$\int_0^1 |g_\nu(x)| dx \leq 2|\gamma_\nu||\Delta_\nu|, \quad \int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)| dx < \alpha_{\nu-1}, \quad (24)$$

$$\left(\sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} |a_k^{(\nu)}|^{2+\epsilon} \right)^{\frac{1}{2+\epsilon}} < \alpha_{\nu-1}, \quad |a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)}| > \dots > |a_{\sigma_\nu(k+1)}^{(\nu)}| > 0, \quad \forall k \in (N_{\nu-1}, N_\nu] \quad (25)$$

$$\left(\sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^m a_{\sigma_\nu(k)}^2 \right)^{1/2} \leq 2|\Delta_\nu| \sqrt{\frac{|\gamma_\nu|}{\epsilon}}, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0. \quad (26)$$

Положим

$$g(x) = \left(\sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x) \right) + f(x) - \varphi(x), \quad E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \quad (27)$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx} \right) = \sum_{|k|=N}^M a_k e^{i2\pi kx}, \quad (28)$$

где

$$M = N_{\nu_0}, \quad N_0 = N + 1, \quad a_k = a_k^{(\nu)}, \quad |k| \in (N_{\nu-1}, N_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \quad (29)$$

$$\sigma(k) = \sigma_\nu(k), \quad k \in (N_{\nu-1}, N_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0. \quad (30)$$

Из (18) – (25) вытекает

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x), \quad x \in E, \quad \int_0^1 |g(x)| dx \leq 3 \int_0^1 |f(x)| dx, \\ |E| &= \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |E_\nu| \geq (1 - \epsilon) \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\Delta_\nu| = 1 - \epsilon, \\ \left(\int_0^1 |Q(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\ &+ \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)| dx < \epsilon \sum_{|k|=N}^M |a_k|^{2+\epsilon} < \epsilon, \end{aligned}$$

доказывающие утверждения 1) и 2) Леммы 2.

Заметим, что ввиду (22) и (25) для каждого $\nu \in [1, \nu_0]$ и всех $|k| \in (N_{\nu-1}, N_\nu]$

$$|a_k^{(\nu)}| \leq |\alpha_{\nu-1}| < \min_{N_{\nu-2} < i \leq N_{\nu-1}} (|a_i^{(\nu-1)}|), \quad |k| \in (N_{\nu-1}, N_\nu].$$

Следовательно, из (25), (29) и (30) имеем

$$|a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad |k| \in [N, M).$$

Чтобы доказать утверждение 4), предположим, что $m \in [N, M]$. Тогда $N_{\nu-1} < m \leq N_\nu$ для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$. Следовательно, из (21), (28) – (30) получим

$$\sum_{|k|=N}^m a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} = \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n(x) + \sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^m a_{\sigma_\nu^{(\nu)}(k)} e^{i2\pi\sigma_\nu(k)x}.$$

Отсюда и из соотношений (19), (22), (24) и (26) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^m a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} \right| dx &\leq \sum_{n=1}^{\nu-1} \int_0^1 |Q_n(x) - g_n(x)| dx + \sum_{n=1}^{\nu_0} \int_0^1 |g_n(x)| dx + \\ &+ \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^m a_{\sigma_\nu^{(\nu)}(k)} e^{i2\pi\sigma_\nu(k)x} \right| dx \leq \\ &\leq \frac{\epsilon \int_0^1 |f(x)| dx}{4\nu_0} + 2 \int_0^1 |\varphi(x)| dx + 2|\Delta_\nu| \sqrt{\frac{|\gamma_\nu|}{\epsilon}} \leq 3 \int_0^1 |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu} g_k(x) \right| = |\varphi(x)|, \quad \forall x \in E, \quad \forall \nu \in [1, \nu_0]$$

(см. (18), (23), (27)), для любого $p \in [1, 2)$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_E \left| \sum_{|k|=N}^m a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^{\nu-1} \left(\int_E |Q_k(x) - g_k(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_E \left| \sum_{k=1}^{\nu-1} g_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^m a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^2 dx \right)^{1/2} < \\ &< 2 \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \epsilon. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Последовательное применение леммы 2 к последовательности тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами, которые обозначим через

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad (31)$$

приводит к последовательностям функций $\{\bar{g}_n(x)\}$, к множествам $\{E_k\}$ и полиномам

$$\bar{Q}_n(x) = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} e^{i2\pi\sigma_n(k)x} \quad m_0 = 1, \quad a_{-k}^{(n)} = \bar{a}_k^{(n)}, \quad (32)$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$ ($\sigma_n(-k) = -\sigma_n(k)$) — некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1} + 1, \dots, m_n - 1$ (для любого фиксированного n). При этом, выполняются следующие условия :

$$\bar{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad |E_n| > 1 - 4^{-8(n+2)}\epsilon, \quad (33)$$

$$\int_0^1 |\bar{g}_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \quad \left(\int_0^1 |\bar{Q}_n(x) - \bar{g}_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} < 4^{-8(n+2)}, \quad (34)$$

$$\max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=m_{n-1}}^N a_k^{(n)} e^{i2\pi\sigma_n(k)x} \right| \leq 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \max_{m_{n-1} \leq N < m_n} \left(\int_{E_n} \left| \sum_{|k|=m_{n-1}}^N a_k^{(n)} e^{i2\pi\sigma_n(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} &\leq \\ &\leq 3 \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p dx \right)^{1/p} + \epsilon 4^{-8(n+2)}, \quad \forall p \in [1, 2), \end{aligned} \quad (36)$$

$$|a_k^{(n)}| > |a_{k+1}^{(n)}| > |a_{m_n}^{(n+1)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n - 1], \quad (37)$$

$$\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} |a_k^{(n)}|^{2+4^{-8(n+2)}} < 4^{-8(n+2)}. \quad (38)$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad (39)$$

очевидно, что $|E| > 1 - \epsilon$ (см. (33)).

Пусть $p \in [1, 2)$ и $f(x) \in L_{[0,1]}^p$. Тогда нетрудно видеть, что из последовательности (31) можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - f(x) \right|^p dx = 0, \quad (40)$$

$$\left(\int_0^1 |f_{k_n}(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \epsilon 4^{-8(n+2)}, \quad n \geq 2, \quad (41)$$

где $f_{k_1}(x)$ имеют вид

$$f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1} b_k e^{i2\pi\bar{\sigma}(k)x}, \quad |b_k| > |b_{k+1}| > 0, \quad \forall |k| \in [1, m_{\nu_1}], \quad b_{-k} = \bar{b}_k, \quad (42)$$

и $\bar{\sigma}(|k|)$ – некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, m_{\nu_1} - 1$ и $\bar{\sigma}(-k) = -\bar{\sigma}(k)$. Очевидно, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{k_1}(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (43)$$

Положим

$$a_k = \begin{cases} b_k, & k \in [1, m_{\nu_1}), \\ a_k^{(n)}, & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq \nu_1 + 1, \end{cases} \quad (44)$$

$$\sigma(k) = \begin{cases} \bar{\sigma}(k), & k \in [1, m_{\nu_1}), \\ \sigma_n(k), & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq \nu_1 + 1, \end{cases} \quad (45)$$

$$g_1(x) \equiv Q_1(x) = f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x}. \quad (46)$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, $m_{\nu_1} - 1 = l(1) < l(2) < \dots < l(q-1)$, $\{b_{l(k)}\}_{k=1}^{q-1}$, функции $g_n(x)$, $f_{\nu_n}(x)$, $1 \leq n \leq q-1$ и полиномы

$$Q_n(x) = \sum_{|k|=M_n}^{\bar{M}_n} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x}, \quad M_n = m_{\nu_n-1}, \quad \bar{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \quad M_1 > N_1, \quad a_{-k} = \bar{a}_k,$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_{\nu_n}, \quad \int_0^1 |g_n(x)| dx < 4^{-3n}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=2}^n [(Q_k(x) + b_{l(k)} \cos(l(k)x)) - g_k(x)] \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8(n+1)}, \quad 1 \leq n \leq q-1, \quad (47)$$

$$\max_{M_n \leq N < \bar{M}_n} \left(\int_E \left| \sum_{k=M_n}^N a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-3n}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$\max_{M_n \leq N < \bar{M}_n} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_n}^N a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right| dx < 4^{-3n}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$l(n) = \min \left\{ k \in N : k \notin [1, m_{\nu_1}] \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [M_j, \bar{M}_j] \right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{n-1} \right\}, \quad l(-n) = -l(n),$$

$$|a_{\bar{M}_n}| > |b_{l(n)}| > |a_{M_{n+1}}|.$$

Возьмем натуральное число ν_q и функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (31) такие, чтобы выполнялось

$$\left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{n=2}^{q-1} [(Q_n(x) + b_{l(n)} \cos(l(n)x)) - g_n(x)] \right) \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8(q+2)}, \quad (48)$$

$$|a_{m_{\nu_q-1}}| < |b_{l(q-1)}| \quad (49)$$

(см. (38) и (44)). Тогда в силу (41) и (47)

$$\left(\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{n=2}^{q-1} [(Q_n(x) + b_{l(n)} \cos(l(n)x)) - g_n(x)] \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8q-1}.$$

Из (48) получим

$$\left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8q}. \quad (50)$$

Положим

$$Q_q(x) = \overline{Q}_{\nu_q}(x) = \sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q} c_k^{(q)} e^{i2\pi\sigma(k)x}, \quad \overline{M}_q = m_{\nu_q} - 1, \quad M_q = m_{\nu_q-1}, \quad (51)$$

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)], \quad (52)$$

$$l(q) = \min \left\{ k \in N : k \notin [1, m_{\nu_1}] \cup \left(\bigcup_{n=2}^{q-1} [M_n, \overline{M}_n] \right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{q-1} \right\}, \quad (53)$$

$$l(-q) = -l(q),$$

$$b_{l(q)} = \min \left\{ 4^{-8(q+3)} : \frac{1}{2} |a_{\overline{M}_q}| \right\}, \quad b_{-l(q)} = b_{l(q)}. \quad (54)$$

Учитывая соотношения (33), (34), (35), (44), (45) и (47) – (54), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_{\nu_q}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_q(x)| dx &\leq \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{l(j)} \cos(l(j)x)) - g_j(x)] \right) \right| dx + \\ &+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{j=2}^{q-1} [(Q_j(x) + b_{l(j)} \cos(l(j)x)) - g_j(x)] \right| dx < 4^{-3q}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=2}^q [(Q_j(x) + b_{l(j)} \cos(l(j)x)) - g_j(x)] \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{i2\pi\sigma(l(j))x} \right) - g_j(x) \right] \right) \right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ |b_{l(q)}| + \left(\int_0^1 |\bar{Q}_{\nu_q}(x) - \bar{g}_{\nu_q}(x)|^2 dx \right)^{1/2} < 4^{-8(q+1)}, \quad (57)$$

$$\max_{M_q \leq N < \bar{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^N a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right| dx \leq 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < 4^{-3q}, \quad (58)$$

$$\max_{M_q \leq N < \bar{M}_q} \left(\int_E \left| \sum_{|k|=M_q}^N a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-3q}, \quad (59)$$

$$|a_{M_q}| > \dots > |a_k| > \dots > |a_{\bar{M}_q}| > |b_{l(q)}|. \quad (60)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}$, чисел $\{l(q)\}_{q=2}^\infty$, $\{b_{l(q)}\}_{q=2}^\infty$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (53) – (60) для всех $q \geq 2$.

Учитывая выбор $\{\sigma(k)\}_{k=1}^\infty$, $\{[M_q, \bar{M}_q]\}_{q=2}^\infty$ и $\{l(q)\}_{q=2}^\infty$ (см. (32), (45), (51), (52)), получим, что последовательность натуральных чисел

$$\sigma(1) \dots \sigma(m_{\nu_1} - 1), \sigma(M_2) \dots \sigma(\bar{M}_2), l(2) \dots l(n-1),$$

$$\sigma(M_n) \dots \sigma(k) \dots \sigma(\bar{M}_n), l(n) \dots \quad (61)$$

есть некоторая перестановка последовательности $1, 2, \dots, n, \dots$. Далее, запишем последовательность (61) в виде

$$\sigma_f(1), \sigma_f(2), \dots, \sigma_f(k), \dots$$

и определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x}$ следующим образом:

$$g(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k(x), \quad g_1(x) = Q_1(x) = f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=1}^{m_{\nu_1}-1} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x}, \quad (62)$$

$$\sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x} = \sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} + \sum_{n=2}^\infty \left[\sum_{|k|=M_n}^{\bar{M}_n} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} + b_{l(n)} \cos(l(n)x) \right], \quad (63)$$

где $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ есть последовательность $a_1, \dots, a_{m_{\nu_1}-1}, a_{M_2}, \dots, a_{\bar{M}_2}, a_{M_n}, \dots, a_{\bar{M}_n}, b_{l(2)}, \dots, b_{l(n-1)}, b_{l(n)}, \dots$ и $c_{-k} = \bar{c}_k$.

Отсюда и из условий (37), (38), (43) – (46), (49), (55), (56) и (59) вытекает

$$|c_k| > |c_{k+1}|, \quad \forall k \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \quad \forall r > 2,$$

$$g(x) \in L_{[0,1]}^1, \quad g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad \int_0^1 |g(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Пусть $N > M_1$ – произвольное натуральное число. Тогда для некоторого натурального числа q имеем

$$N_q \leq N < N_{q+1}, \quad (64)$$

где

$$N_q = M_1 + 1 + \sum_{k=2}^q [\overline{M}_k - M_k + 2], \quad \forall q \geq 2. \quad (65)$$

Из соотношений (54), (56) – (65) и равенства $g(x) = f(x)$ на E , получим, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_E \left| \sum_{|k|=1}^N c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x} - f(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \left(\int_E \left| \sum_{j=2}^{q-1} \left[(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{i2\pi\sigma(l(j))x}) - g_j(x) \right] \right|^p dx \right)^{1/p} + \\ & + \sum_{s=q}^{\infty} \left(\int_E |f_{k_s}(x)|^p dx \right)^{1/p} + \max_{M_q \leq m \leq \overline{M}_q} \left(\int_E \left| \sum_{k=1}^m a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} + \\ & + |b_{l(q)}| < 2^{-q}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^N c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x} - g(x) \right| dx < 2^{-q}.$$

Следовательно,

$$c_k = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi\sigma_f(k)x} dx = c_{\sigma(k)}(g).$$

Теорема полностью доказана.

Abstract. The paper proves that for any $\epsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0, 1]$, $|E| > 1 - \epsilon$, such that for each $f(x) \in L^p[0, 1]$ ($p \in [1, 2)$) there exists a

function $g(x) \in L^1[0, 1]$, $g(x) = f(x)$ on E , such that the greedy algorithm of $g(x)$ by the trigonometric system converges to $g(x)$ in the $L^1_{[0,1]}$ norm and to $f(x)$ in the $L^p(E)$ norm.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. N. Temlyakov, "Greedy Algorithm and m -term trigonometric approximation", Constructive Approx., vol. 14, pp. 569-587, 1998.
2. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1-15, 1999.
3. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithm for general biorthogonal systems", J. of Approx. Theory, vol. 107, pp. 293-314, 2000.
4. S. A. Episkoposian, "On the systems which are not quasi-greedy basis", Isaac International Conference, 2002, Yerevan, Armenia.
5. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Мат. Сб., том 28, стр. 266 - 294, 1912.
6. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат. Сб., том 53, № 2, стр. 67- 96, 1942.
7. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды Моск. Мат. Общ., том 1, стр. 5 - 38, 1952.
8. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье непрерывных функций", Уч. Зап., том 148, № 4, стр. 108 - 132, 1951.
9. А. А. Талалаян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. Зам., том 33(5), стр. 715 - 722, 1983.
10. К. И. Осколков, "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", ДАН СССР, том 228, № 2, стр. 304 - 306, 1976.
11. А. А. Талалаян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм. ССР, том 42, № 3, стр. 134 - 140, 1966.
12. Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, Сер. мат., мех., № 1, стр. 6 - 8, 1988.
13. О. Д. Церетели, "О сходимости почти всюду рядов Фурье", Сообщ. АН Груз. ССР, том 57, № 1, стр. 21 - 24, 1970.
14. J. J. Price, "Walsh series and adjustment of functions on small sets", Ill. J. Math., vol. 13, pp. 131 - 136, 1969.
15. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм. ССР (сер. мат.), том 1, № 4, стр. 270 - 283, 1966.
16. Ш. В. Хведелидзе, "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в метрике L^1 ", Мат. сб., том 107, № 2, стр. 245 - 258, 1978.
17. К. С. Казарян, "О некоторых вопросах теории ортогональных рядов", Мат. сб., том 119, № 2, стр. 278 - 298, 1982.
18. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Мат. сб., том 99, стр. 356 - 365, 1976.
19. А. Б. Гулисашвили, "Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов", Зап. научн. сем. ЛОМИ, том 107, стр. 45 - 59, 1982.

20. Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зерекидзе, "О сопряженных функциях нескольких переменных", Сообщ. АН Груз. ССР, том 94, № 3, стр. 541 - 544, 1979.
21. M. G. Grigorian, "On convergence of Fourier series in the metric of L^1 ", Analysis Math., vol. 17(3), pp. 211 - 237, 1991.
22. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. сб., том 181, № 8, стр. 1011 - 1030, 1990.
23. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье и о коэффициентах Фурье суммируемых функций", Изв. НАН Арм. ССР. Математика, том 26, № 2, стр. 18 - 35, 1991.
24. М. Г. Григорян, "Сходимость почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. зам., том 51, № 5, стр. 35 - 43, 1992.
25. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН. сер. мат., том 57, № 5, стр. 75 - 105, 1993.
26. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia Math., vol. 134(3), pp. 207 - 216, 1999.
27. M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 352, № 8, pp. 3777 - 3799, 2000.
28. М. Г. Григорян, "Об усиленном L^p_μ -свойстве ортонормированных систем", Мат. сб., том 194, № 10, стр. 77 - 106, 2003.

Поступила 10 июня 2004

ОПИСАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДИССИПАТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

П. Э. Мелик-Адамян

Ереванский государственный университет
E-mail : perch@ysu.am

Резюме. Получены формулы, описывающие множество характеристических функций всех диссипативных расширений произвольного симметрического канонического дифференциального оператора с равными дефектными числами.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H – гильбертово пространство, $\mathcal{J} \in [H]$ – оператор такой, что $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -I$ и $V(r) \in L_1(0, \infty; [H])$ – равномерно измеримая и суммируемая операторнозначная функция со свойствами $V^*(r) = V(r)$ и $\mathcal{J}V(r) = -V(r)\mathcal{J}$. Операторы, порожденные с помощью дифференциального выражения

$$c[f] = \mathcal{J}f'(r) - V(r)f(r),$$

называются *каноническими*. В частности, в гильбертовом пространстве H -значных функций $L_2(0, \infty; H)$ минимальный симметрический оператор C_0 и его сопряженный $C = C_0^*$ задаются формулами

$$C_0 f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C_0) = \{f \in L_2(0, \infty; H), \quad c[f] \in L_2(0, \infty; H), \quad f(0) = 0\}.$$

$$C f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C) = \{f \in L_2(0, \infty; H), \quad c[f] \in L_2(0, \infty; H)\}.$$

Дефектные числа оператора C_0 определяются соотношением $d_0^\pm = \dim H_\pm$, где $H_\pm$ – собственные подпространства оператора $\mathcal{J}$, соответствующие собственным значениям $\pm i$. Очевидно, $H_\pm = P_\pm H$, где ортогональные проекторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J})$ таковы, что $P_+ + P_- = I$, $iP_+ - iP_- = \mathcal{J}$. Предполагается, что $\dim H_+ = \dim H_-$.

Введем в H индефинитное скалярное произведение $[x, y] = (-i\mathcal{J}x, y)$, $x, y \in H$. Следуя [1] (гл. 3, §4), описание множества всех диссипативных расширений оператора S_0 может быть дано с помощью множества $(-i\mathcal{J})$ -неположительных подпространств граничных значений расширений. Такое описание можно привести и в терминах угловых операторов этих подпространств (см. [2], §1).

Далее, пусть $K \in [H]$ некоторое самосопряженное сжатие, отличное от унитарного оператора и такое, что $\mathcal{J}K = -K\mathcal{J}$. Тогда $P_{\pm}K P_{\pm} = 0$, так что разложению $H = H_+ \oplus H_-$ ($x = x_+ + x_-$, $x_{\pm} = P_{\pm}x$, $x \in H$) отвечает матричное представление оператора K в виде $K = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix}$, где $K \in [H_-, H_+]$ и $\|K\| \leq 1$.

Если $I_{\pm}$ — единичные операторы в $H_{\pm}$, тогда ядром проектора $P_{IK} = \begin{bmatrix} I_+ & -K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ является $(-i\mathcal{J})$ -неположительное подпространство $\text{Ker } P_{IK} = \{x \in H : x_+ = Kx_-\}$ с угловым оператором K , т.е.

$$[x, x] = \|Kx_-\|^2 - \|x_-\|^2 \leq 0, \quad x \in \text{Ker } P_{IK}.$$

Отсюда следует, что канонический оператор

$$C_{IK}f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C_{IK}) = \{f \in \mathcal{D}(C) : P_{IK}f(0) = 0\}, \quad (0.1)$$

является диссипативным (т.е. $\text{Im}(C_{IK}f, f)_{L_2} \geq 0$, $f \in \mathcal{D}(C_{IK})$) расширением оператора S_0 . Расширения, описываемые формулой (0.1), оказываются регулярными расширениями, т.е. такими, что максимальная симметрическая часть любого из операторов C_{IK} имеет равные дефектные числа. Таким образом, к операторам C_{IK} приложима теория характеристических функций, изложенная в [3] (гл. 1, §1, гл. 2, §1 и 3).

Как и в [4], мы следуем этой теории. Получены формулы для вычисления характеристической функции произвольного регулярного диссипативного расширения C_{IK} .

§1. ДЕФЕКТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СИММЕТРИЧЕСКОГО КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть E_{λ} — спектральная функция сжатия K , так что проекторы $P_0 = E_{-1} + (I - E_{1-0})$ и $P_1 = E_{1-0} - E_{-1} \neq 0$ взаимно ортогональны. Подпространства $H_0 = P_0H$ и $H_1 = P_1H$ ($H = H_0 \oplus H_1$) приводят оператор K к унитарному и вполне неунитарному операторам $K_0 = KP_0$, $K_1 = KP_1$. Точнее, $K_0^2 = P_0$ и $h \in H_0$, если $K^2h = h$.

Предложение 1.1. Подпространства $H_{0,1}$ представимы ортогональной суммой $H_{0,1} = P_+ H_{0,1} \oplus P_- H_{0,1}$, и $\dim P_+ H_{0,1} = \dim P_- H_{0,1}$. Операторы $K_{0,1}$ таковы, что $\mathcal{J}K_{0,1} = -K_{0,1}\mathcal{J}$.

Доказательство : Из свойства $\mathcal{J}K = -K\mathcal{J}$ имеем $K^2\mathcal{J}h_0 = \mathcal{J}K^2h_0 = \mathcal{J}h_0$, $h_0 \in H_0$. Следовательно, $\mathcal{J}H_0 \subset H_0$ и $\mathcal{J}H_0 = H_0$ в силу $\mathcal{J}^2 = -I$. Из $H = \mathcal{J}H = \mathcal{J}H_0 \oplus \mathcal{J}H_1$ получаем $\mathcal{J}H_1 = H_1$. Таким образом, $P_{\pm}H_{0,1} \subset H_{0,1}$, и требуемые разложения доказаны. Так как $\mathcal{J}K = -K\mathcal{J}$, $\mathcal{J}H_{0,1} = H_{0,1}$ и $K_0H_1 = K_1H_0 = \{0\}$, то, очевидно, $\mathcal{J}K_{0,1} = -\mathcal{J}K_{0,1}$ и, значит, $P_{\pm}K_{0,1} = K_{0,1}P_{\mp}$. Поскольку оператор K_0 унитарен в подпространстве H_0 , то из равенства $K_0P_+H_0 = P_-K_0H_0 = P_-H_0$ следует, что размерности подпространств $P_{\pm}H_0$, а значит и $P_{\pm}H_1$, одинаковы. Предложение 1.1 доказано.

Обозначим $H_{\pm 0} = P_{\pm}H_0$, $H_{\pm 1} = P_{\pm}H_1$, и пусть $I_{\pm 0}$, $I_{\pm 1}$ – единичные операторы в этих подпространствах. Согласно предложению 1.1 имеем разложение пространства H в ортогональную сумму

$$H = H_+ \oplus H_- = (H_{+0} \oplus H_{+1}) \oplus (H_{-0} \oplus H_{-1}), \quad (1.1)$$

которому отвечает представление оператора K в виде блочной матрицы :

$$K = \begin{bmatrix} \bigcirc & K_0 & 0 \\ K_0^* & 0 & K_1 \\ 0 & K_1^* & \bigcirc \end{bmatrix} = K_0 + K_1,$$

где $\bigcirc$ – нулевая (2×2) блочная матрица и

$$K_0 = \begin{bmatrix} \bigcirc & K_0 & 0 \\ K_0^* & 0 & \bigcirc \\ 0 & 0 & \bigcirc \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} \bigcirc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 \\ 0 & K_1^* & \bigcirc \end{bmatrix}.$$

Здесь $K_0K_0^* = I_{-0}$, $K_0^*K_0 = I_{+0}$. Очевидны матричные представления проекторов P_0 , P_1 в представлении (1.1).

Рассмотрим ортогональные проекторы

$$P_{K_0} = \frac{1}{2}(P_0 - K_0) + P_1, \quad P_{*K_0} = \frac{1}{2}(P_0 - K_0^*), \quad (1.2)$$

для которых непосредственно проверяется свойство

$$P_{K_0}\mathcal{J} + \mathcal{J}P_{*K_0} = \mathcal{J} = P_{*K_0}\mathcal{J} + \mathcal{J}P_{K_0}. \quad (1.3)$$

Очевидно, $\text{Ker } P_{K_0} = \{x \in H : x = K_0x_{-0} + x_{-0}, x_{-0} \in H_{-0}\}$ и для любого вектора $x \in \text{Ker } P_{K_0}$ имеем

$$[x, x] = (-i\mathcal{J}x, x) = (K_0x_{-0} - x_{-0}, K_0x_{-0} + x_{-0}) = \|K_0x_{-0}\|^2 - \|x_{-0}\|^2 = 0.$$

Таким образом, подпространство $\text{Ker } P_{K_0}$ является $(-i\mathcal{J})$ -нейтральным, следовательно, оператор

$$C_{K_0}f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C_{K_0}) = \{f \in \mathcal{D}(C) : P_{K_0}f(0) = 0\},$$

является симметрическим расширением оператора C_0 .

Предложение 1.2. Оператор $C_{K_0}^$ определяется формулой*

$$C_{K_0}^*g = c[g], \quad g \in \mathcal{D}(C_{K_0}^*) = \{g \in \mathcal{D}(C) : P_{K_0}g(0) = 0\}.$$

Доказательство : Для любых $f \in \mathcal{D}(C_{K_0})$ и $g \in \mathcal{D}(C)$, интегрированием по частям получим

$$(C_{K_0}f, g)_{L_2} = (f, Cg)_{L_2} - (\mathcal{J}f(0), g(0)).$$

Покажем, что $(\mathcal{J}f(0), g(0)) = 0$ тогда и только тогда, когда $(I - P_{K_0})g(0) = g(0)$. Из формулы (1.3) имеем соотношения $P_{K_0}\mathcal{J}P_{K_0} = 0$ и $(I - P_{K_0})\mathcal{J}(I - P_{K_0}) = 0$. Пусть $g(0) = (I - P_{K_0})g(0)$. Тогда из $(I - P_{K_0})f(0) = f(0)$ получим

$$(\mathcal{J}f(0), g(0)) = ((I - P_{K_0})\mathcal{J}(I - P_{K_0})f(0), g(0)) = 0.$$

Если $(\mathcal{J}f(0), g(0)) = 0$ для любого вектора $f(0) \in (I - P_{K_0})H$, то $\mathcal{J}g(0) \perp (I - P_{K_0})H$ и, следовательно, $\mathcal{J}g(0) = P_{K_0}h$ для некоторого $h \in H$. Таким образом, $g(0) = -\mathcal{J}P_{K_0}h$, следовательно, $P_{K_0}g(0) = -P_{K_0}\mathcal{J}P_{K_0}h = 0$, и предложение 1.2 доказано.

Заметим, что случай унитарного оператора K ($K_1 = 0$) мы исключили, так как тогда $P_{K_0} = P_K$ и оператор C_K является самосопряженным расширением оператора C_0 .

Обозначим через $\Lambda^\pm$ соответственно открытые верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости Λ . Найдем дефектные подпространства оператора C_{K_0} , т.е. подпространства $\mathcal{N}_{K_0}^\pm(\lambda)$ решений уравнений $C_{K_0}^*g = \lambda g$ при $\lambda \in \Lambda^\pm$. Для любого $\lambda \in \Lambda$ операторное каноническое уравнение

$$\mathcal{J}X'(r, \lambda) - V(r, \lambda)X(r, \lambda) = \lambda X(r, \lambda) \quad (1.4)$$

имеет целое решение $\mathcal{E}(r, \lambda)$, удовлетворяющее условию $\mathcal{E}(0, \lambda) = I$. Для вещественных $\mu \in \mathbb{R}$ решение $\mathcal{U}(r, \mu)$, удовлетворяющее асимптотическому условию $\mathcal{U}(r, \mu) \rightarrow e^{\mathcal{J}\mu r} = e^{-i\mu r}P_+ + e^{i\mu r}P_-$ при $r \rightarrow \infty$ существует и оно представимо формулой (см. [5])

$$\mathcal{U}(r, \mu) = e^{-\mathcal{J}\mu r} + \int_r^\infty \Gamma(r, t)e^{-\mathcal{J}\mu t}dt, \quad \Gamma(r, t) \in L_1(r, \infty : [H]). \quad (1.5)$$

Очевидно, что $\mathcal{U}(r, \mu) = \mathcal{E}(r, \mu)\mathcal{U}(0, \mu)$ в силу единственности решения задачи Коши. Из представления (1.5) следует, что решения $\mathcal{U}^\pm(r, \mu) = \mathcal{U}(r, \mu)P_\pm$ имеют аналитические продолжения соответственно в $\Lambda^\pm$:

$$\mathcal{U}^\pm(r, \lambda) = e^{\pm i\lambda r} P_\mp + \int_r^\infty e^{\pm i\lambda t} \Gamma(r, t) P_\mp dt, \quad \lambda \in \Lambda^\pm. \quad (1.6)$$

Обозначая $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{U}(0, \mu)$, аналогичным образом определим функции

$$\mathcal{A}^\pm(\lambda) = P_\mp + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} \Gamma(t) P_\mp dt, \quad \Gamma(t) = \Gamma(0, t) \in L_1(0, \infty; [H]), \quad \lambda \in \Lambda^\pm. \quad (1.7)$$

Из аналитичности решения $\mathcal{E}(r, \lambda)$, теоремы об аналитической зависимости решения дифференциального уравнения от параметра и теоремы единственности аналитических функций имеем, что $\mathcal{U}^\pm(r, \lambda) = \mathcal{E}(r, \lambda)\mathcal{A}^\pm(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^\pm$. Отсюда и из формул (1.6) следует важное свойство функций $\mathcal{U}^\pm(r, \lambda)$: они являются решениями уравнения (1.4) такими, что

$$\mathcal{U}^\pm(r, \lambda) \in L_2(0, \infty; [H]) \quad \text{для} \quad \lambda \in \Lambda^\pm.$$

В представлении $H = H_+ \oplus H_-$ имеем

$$\mathcal{A}^+(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda) \\ 0 & A_{+1}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda^+ \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^-(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{-1}(\lambda) & 0 \\ A_{-2}(\lambda) & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda^-. \quad (1.8)$$

Для произвольных сжимающих операторов $L_\pm \in [H_\pm, H_\mp]$, $\|L_\pm\| \leq 1$, рассмотрим операторные функции

$$A_\pm(L_\pm, \lambda) = A_{\pm 1}(\lambda) + L_\pm A_{\pm 2}(\lambda) \in [H_\mp],$$

определенные соответственно в замкнутых верхней и нижней полуплоскостях $\pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Из формул (1.7) следует, что

$$A_\pm(L_\pm, \lambda) = I_\mp + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} F_\pm dt, \quad F_\pm(t) \in L_1(0, \infty; [H_\mp]), \quad \pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0. \quad (1.9)$$

Предложение 1.3. Операторные функции $A_\pm(L_\pm, \lambda)$ ограничено обратимы соответственно при $\pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0$, и операторные функции $A_\pm^{-1}(L_\pm, \lambda)$ допускают представления вида (1.9). В частности, аналитичны операторные функции $A_{\pm 1}^{-1}(\lambda) \in [H_\mp]$.

В работе [6] (п. 1.2) Предложение 1.3 доказано в случае, когда операторы $L_\pm$ являются произвольными изометриями, т.е. $L_\pm^* L_\pm = I_\pm$ и $L_\pm L_\pm^* = I_\mp$. Для случая сжимающих операторов доказательство аналогично.

В представлениях $H_{\mp} = H_{\mp 0} \oplus H_{\mp 1}$ операторные функции $A_{\pm 1}(\lambda) \in [H_{\mp}]$ и $A_{\pm 2}(\lambda) \in [H_{\mp}, H_{\mp}]$ в формулах (1.8) принимают матричную форму. Пусть

$$A_{\pm 1}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{\pm 1}^{11}(\lambda) & A_{\pm 1}^{12}(\lambda) \\ A_{\pm 1}^{21}(\lambda) & A_{\pm 1}^{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad A_{\pm 2}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{\pm 2}^{11}(\lambda) & A_{\pm 2}^{12}(\lambda) \\ A_{\pm 2}^{21}(\lambda) & A_{\pm 2}^{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Всюду в дальнейшем мы используем матричные представления операторов только в первом или во втором из разложений формулы (1.1), так что порядок матрицы указывает в каком именно разложении.

Теорема 1.1. Дефектные подпространства $\mathcal{N}_{K_0}^{\pm}(\lambda)$ оператора C_{K_0} определяются формулами

$$\mathcal{N}_{K_0}^{\pm}(\lambda) \left\{ \mathcal{U}^{\pm}(r, \lambda)x_{\mp}(\lambda) : x_{\mp}(\lambda) = \begin{bmatrix} M^{\pm}(\lambda)x_{\mp 1} \\ x_{\mp 1} \end{bmatrix}, \quad x_{\mp 1} \in H_{\mp 1} \right\}, \quad (1.11)$$

где

$$M^{+}(\lambda) = -[A_{+1}^{11}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{11}(\lambda)]^{-1}[A_{+1}^{12}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{12}(\lambda)], \quad \lambda \in \Lambda^{+},$$

$$M^{-}(\lambda) = -[A_{-1}^{11}(\lambda) - K_0A_{-2}^{11}(\lambda)]^{-1}[A_{-1}^{12}(\lambda) - K_0A_{-2}^{12}(\lambda)], \quad \lambda \in \Lambda^{-}.$$

Доказательство : Пусть $\lambda \in \Lambda^{+}$. Для любого вектора $x_{-} \in H_{-}$ функция $g(r, \lambda) = \mathcal{U}^{+}(r, \lambda)x_{-}$ такова, что $s[g] = \lambda g$ и $g(r, \lambda) \in L_2(0, \infty; H)$. Из предложения 1.2 следует, что $g \in \mathcal{D}(C_{K_0}^{*})$ тогда и только тогда, когда

$$P_{*K_0}g(0) = P_{*K_0}\mathcal{A}^{+}(\lambda)x_{-} = 0.$$

Учитывая обозначения (1.10), из формул (1.2) и (1.8) следует, что верхнее условие представляется в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_0[A_{+1}^{11}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{11}(\lambda)] & -K_0[A_{+1}^{12}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{12}(\lambda)] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{+1}^{11}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{11}(\lambda) & A_{+1}^{12}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{-0} \\ x_{-1} \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем

$$[A_{+1}^{11}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{11}(\lambda)]x_{-0} + [A_{+1}^{12}(\lambda) - K_0^{*}A_{+2}^{12}(\lambda)]x_{-1} = 0. \quad (1.12)$$

Оператор $[A_{+1}^{11}(\lambda) - K_0^* A_{+2}^{11}(\lambda)] \in [H_{-0}]$ имеет обратный для каждого $\lambda \in \Lambda^+$. Действительно, если $[A_{+1}^{11}(\lambda_0) - K_0^* A_{+2}^{11}(\lambda_0)] x_{-0} = 0$, $x_{-0} \neq 0$ для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda^+$, то из формулы (1.2) имеем $P_{K_0} A^+(\lambda_0) x_{-0} = 0$ и функция $U^+(r, \lambda_0) x_{-0}$ является собственной функцией оператора S_{K_0} , отвечающей не вещественному собственному значению λ_0 , что противоречит симметричности оператора S_{K_0} . Ограниченность обратного оператора следует из предложения 1.3 (при $L_+ = K^*$). Таким образом, согласно (1.12), окончательно получим

$$x_{-0} = -[A_{+1}^{11}(\lambda) - K_0^* A_{+2}^{11}(\lambda)]^{-1} [A_{+1}^{12}(\lambda) - K_0^* A_{+2}^{12}(\lambda)] x_{-1} = M^+(\lambda) x_{-1}.$$

Для $\lambda \in \Lambda^-$ доказательство аналогично.

Из теоремы 1.1 и предложения 1.1 следует, что симметрический оператор S_{K_0} имеет равные дефектные числа $d_{K_0}^\pm = \dim H_{\mp 1}$. Очевидно, что для дефектных подпространств оператора S_0 имеем

$$N_0^\pm(\lambda) = \{U^\pm(r, \lambda) x_\mp : x_\mp \in H_\mp\}, \quad \lambda \in \Lambda^\pm. \quad (1.13)$$

§2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДИССИПАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ

Рассмотрим диссипативный оператор S_{IK} , заданный формулой (0.1). Подпространство граничных значений этого оператора запишется в виде

$$\text{Ker } P_{IK} = \{x \in H : x = Kx_- + x_- = (K_0 x_{-0} + K_1 x_{-1}) + (x_{-0} + x_{-1}), x_{-0,1} \in H_{0,1}\}.$$

Учитывая унитарность оператора K_0 в H_0 , имеем

$$[x, x] = (-i\mathcal{J}x, x) = \|K_1 x_{-1}\|^2 - \|x_{-1}\|^2 \leq 0, \quad x \in \text{Ker } P_{IK}.$$

Поскольку в H_1 сжатие K_1 является вполне неунитарным, то условие $x_{-1} = 0$ является необходимым для $(-i\mathcal{J})$ -нейтральности вектора $x \in \text{Ker } P_{IK}$. Отсюда следует, что максимальное $(-i\mathcal{J})$ -нейтральное подпространство в $\text{Ker } P_{IK}$ совпадает с подпространством $\text{Ker } P_{K_0}$. Следовательно, оператор S_{IK} является диссипативным расширением своей максимальной симметрической части, т.е. оператора S_{K_0} с равными дефектными числами.

Приведенные выше рассуждения можно обратить. Действительно, если $\bar{S}$ - симметрический оператор с равными дефектными числами, тогда $(-i\mathcal{J})$ -нейтральное подпространство граничных значений этого оператора задается угловым оператором $\bar{K}_0 \in [\bar{H}_{-0}, \bar{H}_{+0}]$ таким, что $\bar{K}_0^* \bar{K}_0 = \bar{I}_{-0}$, $\bar{K}_0 \bar{K}_0^* = \bar{I}_{+0}$, где $\bar{H}_{\pm 0} \subset H_\pm$ и $\dim \bar{H}_{-0} = \dim \bar{H}_{+0}$. Если $\bar{H}_{\pm 1} = H_\pm \ominus \bar{H}_{\pm 0}$, то

$$H = (\bar{H}_{+0} \oplus \bar{H}_{+1}) \oplus (\bar{H}_{-0} \oplus \bar{H}_{-1}) = H_+ \oplus H_- =$$

$$= (\tilde{H}_{+0} \oplus \tilde{H}_{-0}) + (\tilde{H}_{+1} \oplus \tilde{H}_{-1}) = \tilde{H}_0 \oplus \tilde{H}_-.$$

Выберем произвольный вполне неунитарный сжимающий самосопряженный оператор $\tilde{K}_1 \in [\tilde{H}_1]$, и образуем оператор $\tilde{K} = \tilde{K}_0 \oplus \tilde{K}_1$, где $\tilde{K}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{K}_0 \\ \tilde{K}_0^* & 0 \end{bmatrix}$ — унитарный оператор в $\tilde{H}_0$. Из рассуждений §1 следует, что $\tilde{C}_* = C_{\tilde{K}_0}$ и диссипативный оператор $C_{I\tilde{K}}$ является расширением оператора $C_{\tilde{K}_0}$.

Согласно [3] (гл. 2, §3), пусть симметрический оператор S с равными дефектными числами и дефектными подпространствами $\mathcal{N}^+(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, $\mathcal{N}_-(\zeta)$, $\zeta \in \Lambda^-$ является максимальной симметрической частью диссипативного оператора Q , так что Q^* является аккумулятивным (т.е. $\operatorname{Im} (Q^* f, f) \leq 0, \forall f \in \mathcal{D}(Q^*)$) расширением оператора S . Пусть операторные функции $Y(\lambda)$ и $Y_*(\zeta)$ таковы, что

$$f_- - Y(\lambda)f_+ \in \mathcal{D}(Q^*), \quad f_+ - Y_*(\zeta)f_- \in \mathcal{D}(Q), \quad f_+ \in \mathcal{N}^+(\lambda), \quad f_- \in \mathcal{N}_-(\zeta). \quad (2.1)$$

Операторные функции $\chi(\lambda)$ и $\chi_*(\zeta)$ являются характеристическими функциями операторов Q и Q^* , если имеет место формула

$$Y(\lambda)Y_*(\zeta)G(\lambda, \zeta) = \chi_*(\zeta)G(\lambda, \zeta)\chi(\lambda), \quad (2.2)$$

где операторная функция $G(\lambda, \zeta)$ ограничено обратима. Рассмотрим проектор $P_{K \cdot I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K^* & I_- \end{bmatrix}$ связанный с проектором P_{IK} соотношением

$$P_{K \cdot I}^* J + J P_{IK} = J P_{K \cdot I} + P_{IK}^* J = J.$$

Подпространство $\operatorname{Ker} P_{K \cdot I} = \{x \in H : x_- = K^* x_+\}$ является $(-iJ)$ -неотрицательным, так как $[x, x] = \|x_+\|^2 - \|K^* x_+\|^2 \geq 0$, $x \in \operatorname{Ker} P_{K \cdot I}$. Отсюда следуя доказательству предложения 1.2, получим, что

$$C_{IK}^* g = c[g], \quad g \in \mathcal{D}(C_{IK}^*) = \{g \in \mathcal{D}(C) : P_{K \cdot I} g(0) = 0\}. \quad (2.3)$$

Очевидно, оператор $C_{IK}^* = C_{K \cdot I}$ является аккумулятивным.

Таким образом, к произвольному диссипативному каноническому оператору C_{IK} приложима теория, представленная в работе [3].

Предложение 2.1. Точечные спектры операторов C_{IK} и $C_{K \cdot I}$ совпадают соответственно с нулями операторных функций

$$A_{+2}(\lambda) - K A_{+1}(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda^+ \quad \text{и} \quad A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta), \quad \zeta \in \Lambda^-.$$

Доказательство : Очевидно, что резольвентное множество оператора C_{IK} содержит Λ^- . Покажем, что вещественное число $\mu_0 \in \mathbb{R}$ не может являться собственным значением оператора C_{IK} . Если $C_{IK} f_0 = \mu_0 f_0$, то μ_0 является собственным значением оператора C , поскольку оператор C_{IK} является его сужением. Следовательно, μ_0 является собственным значением некоторого симметрического оператора с равными дефектными числами (см. [7], §14, п. 10), а значит и собственным значением некоторого самосопряженного расширения оператора C_0 . Полученное противоречит абсолютной непрерывности спектра любого самосопряженного расширения оператора C_0 (см. [8]).

Общий вид векторных решений $f(r, \lambda) \in L_2(0, H)$ уравнения (1.4) при $\lambda \in \Lambda^+$ задается формулой $f(r, \lambda) = \mathcal{U}^+(r, \lambda)x_-$, $x_- \in H_-$. В силу свойств функции $\mathcal{U}^+(r, \lambda)$, $\lambda_0 \in \Lambda^+$ является собственным значением оператора C_{IK} тогда и только тогда, когда $P_{IK} f(0, \lambda_0) = P_{IK} \mathcal{A}^+(\lambda_0)x_- = 0$ для некоторого вектора $x_- \neq 0$, т.е.

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda_0) \\ 0 & A_{+1}(\lambda_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{+2}(\lambda_0) - K A_{+1}(\lambda_0)]x_- \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Для оператора $C_{K \cdot I}$ доказательство аналогично.

В силу предложения 1.3 операторная функция $\Theta_+(\lambda) = A_{+2}(\lambda)A_{+1}^{-1}(\lambda) \in [H_-, H_+]$ определена для всех $\text{Im } \lambda \geq 0$ и аналитична в Λ^+ . Такова же функция $\Theta_-(\zeta) = A_{-2}(\zeta)A_{-1}^{-1}(\zeta) \in [H_+, H_-]$, $\text{Im } \zeta \leq 0$. В работе [4] доказано, что эти функции обладают следующими свойствами :

- 1) $\|\Theta_+(\lambda)\| < 1$, $\text{Im } \lambda \geq 0$, $\|\Theta_-(\zeta)\| < 1$, $\text{Im } \zeta \leq 0$,
- 2) $\Theta_+(\lambda) = \Theta_-^*(\lambda)$, $\text{Im } \lambda \geq 0$, $\Theta_-(\zeta) = \Theta_+^*(\zeta)$, $\text{Im } \zeta \leq 0$,

а также, что $\Theta_+(\lambda)$ и $\Theta_-(\zeta)$ являются, соответственно, характеристическими функциями диссипативного и аккумулятивного операторов C_{I0} и C_{0I} , отвечающих случаю $K = 0$.

Рассмотрим операторные функции $\Theta_+(\lambda, K) \in [H_-, H_+]$ и $\Theta_-(\lambda, K^*) \in [H_+, H_-]$, определенные, соответственно, формулами

$$\begin{aligned} \Theta_+(\lambda, K) &= [A_{+2}(\lambda) - K A_{+1}(\lambda)] [A_{+1}(\lambda) - K^* A_{+2}(\lambda)]^{-1} = \\ &= [\Theta_+(\lambda) - K] [I_- - K^* \Theta_+(\lambda)]^{-1}, \quad \text{Im } \lambda \geq 0, \\ \Theta_-(\zeta, K^*) &= [A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta)] [A_{-1}(\zeta) - K A_{-2}(\zeta)]^{-1} = \\ &= [\Theta_-(\zeta) - K^*] [I_+ - K \Theta_-(\zeta)]^{-1}, \quad \text{Im } \zeta \leq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно предложению 1.3, эти функции аналитичны, соответственно, в $\Lambda^\pm$ и при $K = 0$ совпадают с функциями $\Theta_+(\lambda)$ и $\Theta_-(\zeta)$. Из предложения 2.1 следует, что нули операторных функций $\Theta_+(\lambda, K)$ и $\Theta_-(\zeta, K^*)$ совпадают, соответственно, с точечными спектрами операторов C_{IK} и $C_{K \cdot I}$.

Предложение 2.2. Операторные функции $\Theta_+(\lambda, K)$ и $\Theta_-(\zeta, K^*)$ таковы, что

$$\begin{aligned}\Theta_+(\lambda, K)[I_- - K^*K]\Theta_+^*(\lambda, K) &\leq I_+ - KK^*, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0, \\ \Theta_-(\zeta, K^*)[I_+ - KK^*]\Theta_-^*(\zeta, K^*) &\leq I_- - K^*K, \quad \operatorname{Im} \zeta \leq 0.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Доказательство : Для $t \in (0, 1)$ оператор $I - t^2K^2 \geq (1 - t^2)I$ ограниченно обратим. Поскольку справедливы равенства $KJ = -JK$ и $K^2J = JK^2$, то самосопряженный оператор

$$B(t) = (I - tK)(I - t^2K^2)^{-\frac{1}{2}} = (I - t^2K^2)^{-\frac{1}{2}}(I - tK)$$

является $(-iJ)$ -унитарным, т.е. $B(t)(-iJ)B(t) = -iJ$. Имеем,

$$B(t) = \begin{bmatrix} [I_+ - t^2KK^*]^{-1/2} & -[I_+ - t^2KK^*]^{-1/2}tK \\ [I_- - t^2K^*K]^{-1/2}tK^* & [I_- - t^2K^*K]^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Ассоциированные с матрицей оператора $B(t)$ дробно-линейные преобразования

$$\begin{aligned}\chi_+(t, \Theta_+(\lambda)) &= [I_+ - t^2KK^*]^{-1/2}[\Theta_+(\lambda) - tK] \times \\ &\times [I_- - tK^*\Theta_+(\lambda)]^{-1}[I_- - t^2K^*K]^{1/2} \in [H_-, H_+], \\ \chi_-(t, \Theta_-(\zeta)) &= [I_- - t^2K^*K]^{-1/2}[\Theta_-(\zeta) - tK^*] \times \\ &\times [I_+ - tK\Theta_-(\zeta)]^{-1}[I_+ - t^2KK^*]^{1/2} \in [H_+, H_-],\end{aligned}$$

являются сжимающими для любого $t \in (0, 1)$ (см. [9], §1), так что

$$\chi_+(t, \Theta_+(\lambda))\chi_+^*(t, \Theta_+(\lambda)) \leq I_+, \quad \chi_-(t, \Theta_-(\zeta))\chi_-^*(t, \Theta_-(\zeta)) \leq I_-.$$

Обозначая $\Theta_+(t, \lambda, K) = [\Theta_+(\lambda) - tK][I_- - tK^*\Theta_+(\lambda)]^{-1}$, откуда имеем

$$\Theta_+(t, \lambda, K)[I_- - t^2K^*K]\Theta_+^*(t, \lambda, K) \leq [I_+ - t^2KK^*].$$

Каждый из операторов в полученном соотношении сильно сходится к соответствующему оператору при $t \rightarrow 1$, и, значит, для $\Theta_+(\zeta, K^*)$ выполняется формула (2.5). Для функции $\Theta_-(\zeta, K^*)$ доказательство аналогично.

Замечание. Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство и оператор $T \in [\mathfrak{H}]$, $\|T\| < 1$ является произвольным сжатием. Обозначим $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ и $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ рассмотрим операторы :

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Для дробно-линейных преобразований сжимающей операторной функции $\Theta(\lambda) = \bar{\lambda}I$ ($|\lambda| < 1$) матрицей оператора $B = (I - T)(I - T^2)^{1/2}$, имеем

$$D_{T^*} \chi(\lambda) = [\bar{\lambda}I - T^*] [I - \bar{\lambda}T]^{-1} D_T, \quad D_T \chi_*(\lambda) = (\bar{\lambda}I - T) (I - \bar{\lambda}T^*)^{-1} D_{T^*}.$$

Переходя к сопряженным операторам и обозначая $\chi^*(\lambda) = \Theta_T(\lambda)$, $\chi_*(\lambda) = \Theta_{T^*}(\lambda)$, получим формулы

$$\Theta_T(\lambda) D_{T^*} = D_T [I - \lambda T^*]^{-1} [\lambda I - T], \quad \Theta_{T^*}(\lambda) D_T = D_{T^*} [I - T]^{-1} [\lambda I - T^*].$$

Согласно работе [10] (гл. 6, §1), операторные функции $\Theta_T(\lambda)$ и $\Theta_{T^*}(\lambda)$ являются, соответственно, характеристическими функциями сжатий T и T^* .

Характеристические функции операторов S_{IK} и S_{K^*I} вычислим сначала для случая, когда оператор K является вполне неунитарным ($K_0 = 0$), т.е. когда единственной симметрической частью операторов S_{IK} и S_{K^*I} является минимальный оператор S_0 .

Теорема 2.1. Если оператор K вполне неунитарен, то операторные функции $\Theta_+(\lambda, K)$ и $\Theta_-(\zeta, K^*)$, определенные формулами (2.4), являются, соответственно, характеристическими функциями операторов S_{IK} и S_{K^*I} .

Доказательство : Воспользовавшись формулами (1.13), для первого соотношения в (2.1) имеем

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K^* & I_- \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A_{-1}(\zeta) & 0 \\ A_{-2}(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Y_-(\zeta, \lambda) K^* & Y_-(\zeta, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda) \\ 0 & A_{+1}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_- \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad (2.6)$$

т.е.

$$[A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta)] x_+ = Y_-(\zeta, \lambda) [A_{+1}(\lambda) - K^* A_{+2}(\lambda)] x_-,$$

где $Y_-(\zeta, \lambda) \in [H_-]$ – искомая операторная функция. Пусть $U \in [H_-, H_+]$ – произвольный изометрический оператор ($U^*U = I_-$, $UU^* = I_+$). Тогда

$$\begin{aligned} Y_-(\zeta, \lambda) &= [A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta)] U [A_{+1}(\lambda) - K^* A_{+2}(\lambda)]^{-1} = \\ &= A_{-2}(\zeta, K^*) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*). \end{aligned}$$

Аналогично, для второго соотношения в (2.1) имеем

$$\begin{bmatrix} I_+ & -K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda) \\ 0 & A_{+1}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_+(\lambda, \zeta) & -Y_+(\lambda, \zeta) K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{-1}(\zeta) & 0 \\ A_{-2}(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = 0. \quad (2.7)$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} Y_+(\lambda, \zeta) &= [A_{+2}(\lambda) - K A_{+1}(\lambda)] U^* [A_{-1}(\zeta) - K A_{-2}(\zeta)]^{-1} = \\ &= A_{+2}(\lambda, K) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K). \end{aligned}$$

Из формул (2.4) имеем

$$A_{+2}(\lambda, K) A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) = \Theta_+(\lambda, K), \quad A_{-2}(\zeta, K^*) A_{-1}^{-1}(\zeta, K) = \Theta_-(\zeta, K^*).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Y_-(\zeta, \lambda) K^* Y_+(\lambda, \zeta) &= A_{-2}(\zeta, K^*) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) K^* A_{+2}(\lambda, K) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K) = \\ &= A_{-2}(\zeta, K^*) A_{-1}^{-1}(\zeta, K) A_{-1}(\zeta, K) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) \times \\ &\times K^* A_{+2}(\lambda, K) A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) A_{+1}(\lambda, K^*) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K) = \\ &= \Theta_-(\zeta, K^*) A_{-1}(\zeta, K) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) K^* \Theta_+(\lambda, K) A_{+1}(\lambda, K^*) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K). \end{aligned}$$

Полученное очевидным образом преобразуется к формуле :

$$Y_-(\zeta, \lambda) K^* Y_+(\lambda, \zeta) G(\zeta, \lambda) = \Theta_-(\zeta, K^*) G(\zeta, \lambda) K^* \Theta_+(\lambda, K). \quad (2.8)$$

Здесь $G(\zeta, \lambda) = A_{-1}(\zeta, K) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*)$ – ограниченно обратимая операторная функция. Формула (2.8) идентична формуле (2.2) с точностью до постоянного оператора K^* , что и доказывает теорему.

Рассмотрим случай произвольного сжатия K ($K_0 \neq 0$), т.е. когда C_{IK} является расширением своей максимальной симметрической части C_{K_0} , строго содержащей оператор C_0 .

Теорема 2.2. *Характеристические функции диссипативного и аккумулятивного расширений C_{IK} и C_{K^*I} симметрического оператора C_{K_0} определяются формулами*

$$\Theta_+(\lambda, K_1) = \Theta_{+2}(\lambda, K_1) \Theta_{+1}^{-1}(\lambda, K_1^*) \in [H_{-1}, H_{+1}],$$

$$\Theta_-(\zeta, K_1^*) = \Theta_{-2}(\zeta, K_1^*) \Theta_{-1}^{-1}(\zeta, K_1) \in [H_{+1}, H_{-1}],$$

где

$$\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*) = [A_{+1}^{21}(\lambda) - K_1^* A_{+2}^{21}(\lambda)] M^+(\lambda) + [A_{+1}^{22}(\lambda) - K_1^* A_{+2}^{22}(\lambda)],$$

$$\Theta_{+2}(\lambda, K_1) = [A_{+2}^{21}(\lambda) - K_1 A_{+1}^{21}(\lambda)] M^+(\lambda) + [A_{+2}^{22}(\lambda) - K_1 A_{+1}^{22}(\lambda)],$$

$$\Theta_{-1}(\zeta, K_1) = [A_{-1}^{21}(\zeta) - K_1 A_{-2}^{21}(\zeta)] M^{-}(\zeta) + [A_{-1}^{22}(\zeta) - K_1 A_{-2}^{22}(\zeta)] ,$$

$$\Theta_{-2}(\zeta, K_1^*) = [A_{-2}^{21}(\zeta) - K_1^* A_{-1}^{21}(\zeta)] M^{-}(\zeta) + [A_{-2}^{22}(\zeta) - K_1^* A_{-1}^{22}(\zeta)] .$$

Доказательство : Воспользовавшись формулами (1.10) и (1.11), для первого слагаемого аналога формулы (2.6) получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -K_0^*[A_{-1}^{11}-K_0 A_{-2}^{11}]_{\zeta} & -K_0^*[A_{-1}^{12}-K_0 A_{-2}^{12}]_{\zeta} & 0 \\ [A_{-2}^{21}-K_1^* A_{-1}^{21}]_{\zeta} & [A_{-2}^{22}-K_1^* A_{-1}^{22}]_{\zeta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-}(\zeta)x_{+1} \\ x_{+1} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{-2}(\zeta, K_1^*)x_{+1} \end{bmatrix} ,$$

поскольку, в силу определения $M^{-}(\zeta)$, имеем

$$[A_{-1}^{11}(\zeta)-K_0 A_{-2}^{11}(\zeta)] M^{-}(\zeta)x_{+1} + [A_{-1}^{12}(\zeta)-K_0 A_{-2}^{12}(\zeta)] x_{+1} = 0.$$

В той же формуле (2.6) полагая $Y_{-}(\zeta, \lambda) = \begin{bmatrix} I_{-0} & 0 \\ 0 & Y_{-1}(\zeta, \lambda) \end{bmatrix}$ и $Y_{-1}(\zeta, \lambda) \in [H_{-1}]$, в силу определения $M^{+}(\lambda)$, получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [A_{+1}^{11}-K_0^* A_{+2}^{11}]_{\lambda} & [A_{+1}^{12}-K_0^* A_{+2}^{12}]_{\lambda} \\ 0 & Y_{-1}[A_{+1}^{21}-K_1^* A_{+2}^{21}]_{\lambda} & Y_{-1}[A_{+1}^{22}-K_1^* A_{+2}^{22}]_{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M^{+}(\lambda)x_{-1} \\ x_{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_{-1}\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*)x_{-1} \end{bmatrix} .$$

Следовательно, для искомой функции $Y_{-1}(\zeta, \lambda) \in [H_{-1}]$ получаем соотношение

$$\Theta_{-2}(\zeta, K^*)x_{+1} = Y_{-1}(\zeta, \lambda)\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*)x_{-1}. \quad (2.9)$$

Операторная функция $\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*)$ обратима при $\text{Im } \lambda \geq 0$. Действительно, если $\Theta_{+1}(\lambda_0, K_1^*)x_{-1} = 0$, $x_{-1} \neq 0$, $\text{Im } \lambda_0 \geq 0$, то для ненулевого вектора $x_{-}(\lambda_0) = \begin{bmatrix} M^{+}(\lambda_0)x_{-} \\ x_{-} \end{bmatrix} \in H_{-}$ имеет место $P_{K \cdot I} \mathcal{U}^{+}(0, \lambda_0)x_{-}(\lambda_0) = P_{K \cdot I} \mathcal{A}^{+}(\lambda_0)x_{-}(\lambda_0) = 0$, так что функция $g(r, \lambda_0) = \mathcal{U}^{+}(r, \lambda_0)x_{-}(\lambda_0) \in \mathcal{D}(C_{K \cdot I})$ является собственной

функцией аккумулятивного оператора $S_{K \cdot I}$, отвечающей собственному значению λ_0 , что противоречит предложению 2.1.

Таким образом, если $U_1 \in [H_{-1}, H_{+1}]$ – произвольный изометрический оператор, существующий в силу предложения 1.1, то из соотношения (2.9) имеем

$$Y_{-1}(\zeta, \lambda) = \Theta_{-2}(\zeta, K_1^*) U_1 \Theta_{+1}^{-1}(\lambda, K_1^*).$$

Если $Y_+(\lambda, \zeta) = \begin{bmatrix} I_{+0} & 0 \\ 0 & Y_{+1}(\lambda, \zeta) \end{bmatrix}$ и $Y_{+1}(\lambda, \zeta) \in [H_{+1}]$, то, пользуясь аналогом формулы (2.7), получим $Y_{+1}(\lambda, \zeta) = \Theta_{+2}(\lambda, K_1) U_1^* \Theta_{-1}^{-1}(\zeta, K_1)$. Отсюда, аналогично доказательству теоремы 1.1, следует формула

$$Y_{-1}(\zeta, \lambda) K_1^* Y_{+1}(\lambda, \zeta) G_1(\zeta, \lambda) = \Theta_{-}(\zeta, K_1^*) G_1(\zeta, \lambda) K_1^* \Theta_{+}(\lambda, K_1),$$

где $G_1(\zeta, \lambda) = \Theta_{-1}(\zeta, K_1) U_1 \Theta_{+1}^{-1}(\lambda, K_1^*)$.

Abstract. The paper contains formulas describing the set of the characteristic functions of all dissipative extensions of an arbitrary symmetric, canonical differential operator with equal defect indices.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений, Наукова думка, Киев, 1984.
2. М. Г. Крейн, "Введение в геометрию индефинитных $\mathcal{J}$ -пространств и теорию операторов в этих пространствах", Вторая летняя матем. школа, I, стр. 15 – 92, Наукова думка, Киев, 1965.
3. A. Kuzhel, Characteristic Functions and Models of Nonselfadjoint Operators", Kluwer Acad. Publ., 1996.
4. П. Э. Мелик-Адамян, "О характеристической функции диссипативного расширения в спектральной теории канонических операторов", Изв. НАН Армении. Математика, том 37, № 2, стр. 47 – 64, 2002.
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Об одном классе канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм ССР, Математика, том 24, № 6, стр. 570 – 592, 1989.
6. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм ССР, Математика, том 11, № 4, стр. 291 – 313, 1976.
7. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, Москва, 1969.
8. В. М. Адамян, "К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве", ДАН СССР, том 178, № 1, стр. 9 – 12, 1968.
9. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмудьян, "О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами", Мат.исследования, том 2, № 3, стр. 64 – 96, Кишинев, 1967.
10. Б. Секефальфи-Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Мир, Москва, 1970.

Поступила 24 марта 2004

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Н. Е. Товмасян и А. О. Бабаян

Государственный Инженерный Университет Армении

E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе рассматривается задача Дирихле для эллиптических уравнений и слабо связанных систем второго порядка в полуплоскости. Решение ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых в полуплоскости и непрерывных вплоть до границы функций, имеющих конечный порядок роста на бесконечности. Получены необходимые и достаточные условия существования решения неоднородной задачи и выписываются в явном виде решения соответствующей однородной задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Pi^+ = \{(x, y) : y > 0\}$ – верхняя полуплоскость комплексной плоскости и R – ее граница. В Π^+ рассматривается уравнение

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где A_0, A_1, A_2 такие комплексные постоянные, что для корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 = 0$ выполняются соотношения $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$. На границе R решение $u(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяет условию Дирихле

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где $f(x)$ – заданная на R непрерывная функция, допускающая оценку

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|^\alpha), \quad (3)$$

где $\alpha > 0$ – фиксированное число. Здесь и далее через c обозначаем все постоянные. Решение u задачи (1), (2) ищется в классе B_α дважды непрерывно дифференцируемых Π^+ , непрерывных в $\Pi^+ \cup R$ функций, растущих на бесконечности

не быстрее r^α :

$$|u(x, y)| \leq c(1 + r^\alpha), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

В случае, когда $f(x)$ ограничена и бесконечно дифференцируема, задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в полуплоскости в классе ограниченных функций имеет единственное решение (см. [1]). В настоящей работе эти ограничения существенно ослаблены. В частности, доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $m = [\alpha]$, тогда однородная задача (1), (2) (при $f \equiv 0$) в B_α имеет m линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$P_m(x + \lambda_1 y) - P_m(x + \lambda_2 y),$$

где $P_m(z)$ - произвольный многочлен порядка не выше m .

Теорема 2. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в B_α всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется

$$\sup_{r \geq 0} \left| \int_{-r}^r \frac{f(x) dx}{i + x^{\alpha+1}} \right| \leq c.$$

Отметим, что решение неоднородной задачи (1), (2) определяется в явном виде. В §4 мы рассмотрим задачу (1), (2) в B_α для слабо связанных эллиптических систем (где A_0, A_1, A_2 - квадратные матрицы порядка n , а $u(x, y)$ - n -мерная вектор-функция), когда характеристическое уравнение этой системы

$$\det(A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2) = 0 \quad (5)$$

имеет только простые корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ такие, что $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$, $\operatorname{Im} \mu_k < 0$, $k = 1, \dots, n$. Слабая связанность эллиптической системы второго порядка определена в [2]. В последнем параграфе исследуется задача (1), (2) для уравнений и слабо связанных систем при более сильных ограничениях на рост решения в окрестности бесконечно удаленной точки.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы приведем некоторые утверждения, необходимые для исследования задачи (1), (2).

Лемма 1. Если $u(x, y)$ – решение однородной задачи (1), (2), удовлетворяющее соотношению (4), то $u(x, y)$ – полином порядка не выше $m = [\alpha]$.

Доказательство : Пусть $u(x, y)$ есть решение однородной задачи (1), (2), тогда

$$u(x, y) = \Phi(x + \lambda_1 y) - \Psi(x + \lambda_2 y), \quad (6)$$

где $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ – функции, аналитические в Π^+ и в дополнении к $\overline{\Pi^+}$ соответственно. Пусть $h > 0$ и $u_h(x, y) \equiv u(x, y + h)$. Тогда функция $u_h(x, y)$ является решением задачи (1), (2) с граничной функцией $u(x, h) = \varphi_h(x)$. Решение $u(x, y)$ эллиптического уравнения (1) имеет порядок α на бесконечности. Следовательно, используя [3], доказываем, что при $y \geq h$ частные производные решения $u(x, y)$ также имеют порядок α на бесконечности. Так как

$$\Phi'(x + \lambda_1(y + h)) = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \left(\lambda_2 \frac{\partial u_h}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u_h}{\partial y}(x, y) \right),$$

то получим, что функция $\Phi(x + \lambda_1(y + h))$ имеет порядок не выше $\alpha + 1$ на бесконечности. Аналогичная оценка выполняется для функции $\Psi(x + \lambda_2(y + h))$. Таким образом, после подстановки функции $u_h(x, y) = \Phi(x + \lambda_1(y + h)) - \Psi(x + \lambda_2(y + h))$ в условие (2), мы приходим к задаче сопряжения с граничной функцией $\varphi_h(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, в классе аналитических функций, непрерывных вплоть до границы и имеющих в бесконечности порядок не выше $\alpha + 1$. Используя результаты, полученные в [4], запишем общее решение этой задачи :

$$\Phi(x + \lambda_1(y + h)) = \frac{(x + \lambda_1 y + i)^{m+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_h(t) dt}{(t + i)^{m+1}(t - x - \lambda_1 y)} + P_h(x, y).$$

Здесь $P_h(x, y)$ – полином порядка не выше $m + 1$. Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ и используя теорему Лебега, получим, что $P_h(x, y)$ сходится к некоторому полиному $P(x, y)$ того же порядка, и, следовательно, $\Phi(x + \lambda_1 y)$ является полиномом порядка не выше $m + 1$. Аналогично рассуждая, доказываем, что $\Psi(x + \lambda_2 y)$ – полином того же порядка. Используя (6) и (4), завершаем доказательство.

Пусть $g(x)$ – финитная непрерывная функция. Тогда легко проверяется, что функция

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left(\frac{1}{t - x - \lambda_1 y} - \frac{1}{t - x - \lambda_2 y} \right) dt \quad (7)$$

является ограниченным решением задачи (1), (2). В частности, в качестве $g(x)$ можно взять финитную непрерывную функцию, совпадающую с $f(x)$ в окрестности нуля. Поэтому, не ограничивая общности, мы предположим, что граничная функция $f(x)$ обращается в нуль в окрестности нуля.

Лемма 2. Функция

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}} \left(\frac{(x + \lambda_1 y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \lambda_1 y} - \frac{(x + \lambda_2 y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \lambda_2 y} \right) dt \quad (8)$$

является решением задачи (1), (2).

Доказательство : Из (3) следует, при $y > 0$ интеграл (8) сходится и является решением уравнения (1).

Пусть $f_1(x)$ – финитная, непрерывная функция, совпадающая с $f(x)$ в окрестности некоторой точки x_0 и пусть $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. Тогда

$$w(x, y) = v_1(x, y) + w_2(x, y) + \sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{(x + \lambda_1 y)^k - (x + \lambda_2 y)^k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{t^{k+1}} dt, \quad (9)$$

где v_1 и w_2 – функции вида (7) и (8), при $g = f_1$ и $f = f_2$ соответственно. Очевидно, $w_2(x, y) \rightarrow 0$ и $v_1(x, y) \rightarrow f(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow +0$. Следовательно w удовлетворяет граничному условию (2).

Лемма 3. Пусть $d = 2 \max(1 + |\lambda_1|, 1 + |\lambda_2|)$ и

$$v_0(x, y) = \frac{(x + \lambda_1 y)^{[\alpha]} - (x + \lambda_2 y)^{[\alpha]}}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}} dt, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

Тогда для функции (8) выполняется неравенство

$$|w(x, y) - v_0(x, y)| \leq c(1 + r^\alpha). \quad (11)$$

Доказательство : Представим функцию $w(x, y)$ в виде

$$w(x, y) = v_0(x, y) + w_2(x, y) + u(x, y) + \sum_{k=1}^{[\alpha]-1} \frac{(x + \lambda_1 y)^k - (x + \lambda_2 y)^k}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{k+1}} dx, \quad (12)$$

где

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| \geq dr} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}} \left(\frac{(x + \lambda_1 y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \lambda_1 y} - \frac{(x + \lambda_2 y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \lambda_2 y} \right) dt$$

и

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} f(t) \left(\frac{1}{t - x - \lambda_1 y} - \frac{1}{t - x - \lambda_2 y} \right) dt.$$

Оценим слагаемые в (12) отдельно. Из неравенств $|x + \lambda_k y| \leq r(1 + |\lambda_k|)$ ($k = 1, 2$) следует, что при $|t| \geq dr$,

$$|t - x - \lambda_k|^{-1} \leq (|t| - |x + \lambda_k y|)^{-1} \leq 2|t|^{-1}, \quad k = 1, 2.$$

Используя эту оценку и обозначая $\epsilon = \alpha - [\alpha]$, получим при $r \rightarrow \infty$

$$r^{-\alpha} |w_2(x, y)| \leq c \sup_{|t| \geq dr} (|t|^{-\alpha} |f(t)|) \int_{|\tau| \geq d} \tau^{2-\epsilon} d\tau \leq c \sup_{|t| \geq dr} (|t|^{-\alpha} |f(t)|) \leq c.$$

Далее, при $r \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{|u(x, y)|}{r^\alpha} &\leq \left| \frac{r^{-\alpha}}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} f(t) \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)y dt}{(t - x - \lambda_1 y)(t - x - \lambda_2 y)} \right| \leq \\ &\leq c \frac{1}{r^\alpha} \sup_{|t| \leq dr} |f(t)| \int_{-dr}^{dr} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} dt \leq c \frac{1}{r^\alpha} \sup_{|t| \leq dr} |f(t)| \leq c. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей оценке, если $k = 1, \dots, [\alpha] - 1$ получим

$$\left| \frac{(x + \lambda_1 y)^k - (x + \lambda_2 y)^k}{2\pi i r^\alpha} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{k+1}} dx \right| \leq c r^{-\alpha} \sup_{|t| \leq dr} |f(t)| \leq c$$

при $r \rightarrow \infty$. Суммируя полученные соотношения, завершаем доказательство.

Лемма 4. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то выполняется $|v_0(x, y)| \leq c(1 + r^\alpha)$.

Доказательство : Из условия следует, что $0 < \epsilon < 1$ (напомним, что $\epsilon = \alpha - [\alpha]$).

Таким образом, в силу условия (3), получаем

$$\frac{|v_0(x, y)|}{r^\alpha} \leq \frac{c}{r^\epsilon} \int_\delta^{dr} \left| \frac{f(t)}{t^\alpha} \right| \frac{dt}{t^{1-\epsilon}} \leq c \sup_{|t| \geq \delta} \left| \frac{f(t)}{t^\alpha} \right| \leq c, \quad r > 1.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1. Пусть u – решение однородной задачи (1) – (2) в B_α . Тогда из леммы 1 и (4) следует, что u – полином, порядок которого не выше $m = [\alpha]$. Запишем общее решение задачи (1) в виде (6). Так как $\Phi'(x + \lambda_1 y)$ и $\Psi'(x + \lambda_2 y)$ линейно выражаются через первые производные $u(x, y)$, являющейся полиномом порядка m , то $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ также являются полиномами порядка m . Не ограничивая общности, можем предполагать, что $\Phi(0) = 0$ в представлении (6). При этом предположении функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ однозначно определяются по функции $u(x, y)$. Далее, подставляя $u(x, y)$ в однородное условие (2), получим, что $\Phi(x) = \Psi(x)$ при $-\infty < x < \infty$. Следовательно, функция $\Psi(z)$ является аналитическим продолжением $\Phi(z)$ в нижнюю полуплоскость $\mathbb{C} \setminus \overline{\Pi^+}$. Поэтому, по теореме Лиувилля $\Phi(z) = P_m(z)$ и $\Psi(z) = P_m(z)$, где $P_m(z)$ есть полином порядка m . Отметим, что $P_m(0) = 0$, так как $\Phi(0) = 0$. Подставляя полученные функции в представление (6), получим общее решение однородной задачи (1), (2). Из единственности представления (6) при $\Phi(0) = 0$ следует, что задача (1), (2) в B_α имеет m линейно независимых решений.

Доказательство Теоремы 2. Если $\alpha \neq [\alpha]$ и w есть функция (8), то $|w(x, y)| \leq c(1 + r^\alpha)$ в силу лемм 3 и 4. Из этой оценки и леммы 2 получаем, что функция w является решением неоднородной задачи (1), (2) и принадлежит B_α . Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть $\alpha = [\alpha]$. Предположим сначала, что неоднородная задача (1), (2) имеет решение u в B_α и пусть w — функция (8). Тогда из леммы 2 следует, что функция $u_0 = w - u$ является решением однородной задачи (1), (2). Оценим порядок роста этого решения. Непосредственным вычислением проверяется следующая оценка для функции (10) :

$$|v_0(x, y)| \leq cr^\alpha \ln r, \quad r \geq 1.$$

Следовательно, используя лемму 3 и оценку (4), получим

$$|u_0(x, y)| \leq cr^\alpha \ln r, \quad r \geq 1. \quad (13)$$

Таким образом, решение u_0 однородной задачи (1), (2) допускает оценку (13) и, следовательно, u_0 является полиномом относительно x, y , порядок которого не превосходит α (см. лемму 1), т.е. $u_0(x, y) = P_m(x, y)$. Итак, решение неоднородной задачи (1), (2) в B_α можно представить в виде

$$u(x, y) = w(x, y) + P_m(x, y). \quad (14)$$

Далее, из (14) имеем

$$\frac{u(x, y)}{r^\alpha} = \frac{w(x, y) - v_0(x, y)}{r^\alpha} + \frac{P_m(x, y)}{r^\alpha} + \frac{(x + \lambda_1 y)^\alpha - (x + \lambda_2 y)^\alpha}{2\pi i r^\alpha} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

где v_0 — функция (10). Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, разность $(x + \lambda_1 y)^\alpha - (x + \lambda_2 y)^\alpha$ является полиномом порядка α , следовательно, на некотором луче $x = ky$ имеем

$$r^{-\alpha} |(x + \lambda_1 y)^\alpha - (x + \lambda_2 y)^\alpha| = c \neq 0.$$

При больших r из этого соотношения, используя лемму 3, ограниченность $r^{-\alpha} P_m(x, y)$ и (4), получим

$$\left| \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right| \leq c. \quad (15)$$

Таким образом, необходимость условия теоремы 2 доказана.

Для доказательства достаточности рассмотрим функцию (8). Из леммы 2 следует, что эта функция — решение задачи (1), (2). Чтобы проверить неравенство (4), представим $w(x, y)$ в виде

$$w(x, y) = w(x, y) - v_0(x, y) + ((x + \lambda_1 y)^\alpha - (x + \lambda_2 y)^\alpha) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right).$$

Из (15) и (11) получим, что w удовлетворяет оценке (4).

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 2, решение задачи (1), (2) определяется формулой

$$u(x, y) = w(x, y) + \sum_{k=1}^m c_k ((x + \lambda_1 y)^k - (x + \lambda_2 y)^k),$$

где $w(x, y)$ – функция (8), а $c_1, \dots, c_m$ – произвольные постоянные.

§4. СЛАБО СВЯЗАННЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим случай, когда (1) слабо связанная система. Мы предполагаем, что вектор-функции f и u покомпонентно удовлетворяют соотношениям (3) и (4) соответственно. Так как система (1) – слабо связанная и корни уравнения (5) λ_k и μ_k простые, то (см. [2]) общее решение (1) допускает представление

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \varphi_k(x + \lambda_k y) - \beta_k \psi_k(x + \mu_k y)), \quad (16)$$

где φ_k и ψ_k – аналитические функции в Π^+ и $\mathbb{C} \setminus \overline{\Pi}^+$ соответственно, а α_k, β_k – n -мерные постоянные векторы такие, что матрицы $P = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ и $Q = (\beta_1 \cdots \beta_n)$ обратимы. Обозначим $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))^T$ и $\Psi(z) = (\psi_1(z), \dots, \psi_n(z))^T$. Отметим, что при условии $\varphi(0) = 0$ разложение (16) определяется единственным образом.

Лемма 5. Пусть P и Q – постоянные, обратимые матрицы. $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ и $\operatorname{Im} \mu_k < 0$ при $k = 1, \dots, n$, и

$$L_y(x, t) = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{t - x - \lambda_1 y}, \dots, \frac{1}{t - x - \lambda_n y} \right),$$

$$M_y(x, t) = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{t - x - \mu_1 y}, \dots, \frac{1}{t - x - \mu_n y} \right).$$

Тогда для любой финитной непрерывной n -мерной вектор-функции f

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [P L_y(x, t) P^{-1} - Q M_y(x, t) Q^{-1}] f(t) dt = f(x). \quad (17)$$

Доказательство : Представим интеграл в (17) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [P L_y(x, t) P^{-1} - Q M_y(x, t) Q^{-1}] f(t) dt = I_1 + I_2 - I_3,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} f(t) dt,$$

$$I_2 = P \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(L_y(x, t) - \frac{1}{t - x - iy} I \right) P^{-1} f(t) dt,$$

$$I_3 = Q \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(M_y(x, t) - \frac{1}{t - x + iy} I \right) Q^{-1} f(t) dt.$$

$I_1 \rightarrow f(x)$ при $y \rightarrow 0$, а для слагаемого I_2 , используя равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} [L_y(x, t) - (t - x - iy)^{-1} I] dt = 0,$$

получим

$$I_2 = P \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (L_y(x, t) - (t - x - iy)^{-1} I) (P^{-1} f(t) - P^{-1} f(x)) dt,$$

т.е. $I_2 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. Аналогично, $I_3 \rightarrow 0$, и лемма доказана. Перейдем к решению системы (1). Если $f(x)$ – финитная, непрерывная вектор-функция, то функция

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [P L_y(x, t) P^{-1} - Q M_y(x, t) Q^{-1}] f(t) dt \quad (18)$$

является ограниченным решением системы (1). Из леммы 5 следует, что функция $v(x, y)$ удовлетворяет граничному условию (2). Таким образом, так же как и в случае одного уравнения, мы можем предполагать, что $f(x) = 0$ в окрестности нуля. Введем обозначения

$$L_{\alpha y}(x, t) = \text{diag} \left(\frac{(x + \lambda_1 y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \lambda_1 y}, \dots, \frac{(x + \lambda_n y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \lambda_n y} \right),$$

$$M_{\alpha y}(x, t) = \text{diag} \left(\frac{(x + \mu_1 y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \mu_1 y}, \dots, \frac{(x + \mu_n y)^{[\alpha]+1}}{t - x - \mu_n y} \right).$$

Аналогично лемме 2 доказывается

Лемма 6. Вектор-функция

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [P L_{\alpha y}(x, t) P^{-1} - Q M_{\alpha y}(x, t) Q^{-1}] \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}} f(t) dt \quad (19)$$

является решением задачи (1), (2).

Следующее утверждение доказывается аналогично леммам 3 и 4 для одномерного случая.

Лемма 7. Обозначим

$$L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad A = PLP^{-1}, \quad B = QMQ^{-1}. \quad (20)$$

Пусть $d = 2 \max_{1 \leq k \leq n} (1 + |\lambda_k|, 1 + |\mu_k|)$ и

$$v_0(x, y) = \frac{(xI + yA)^{[\alpha]} - (xI + yB)^{[\alpha]}}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}} dt. \quad (21)$$

Тогда для функции (19) выполняется неравенство (11), где функция v_0 есть функция (21). Если $\alpha \neq [\alpha]$, то для v_0 выполняется неравенство леммы 4.

В случае слабо связанной системы (1) имеют место следующие теоремы о разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 3. Пусть $m = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2) в B_α имеет mt линейно независимых решений. Общее же решение имеет вид (1), причем

$$\Phi(z) = P^{-1}S_m(z), \quad \Psi(z) = Q^{-1}S_m(z).$$

Здесь $S_m(z)$ ($S_m(0) = 0$) – n -мерная вектор-функция, элементы которой произвольные многочлены от z порядка не выше m .

Доказательство : Заметим, что формула общего решения неоднородной задачи (1), (2) в B_α получается аналогично случаю одного уравнения. Используя эту формулу, а также однозначность представления (1), получим, что однородная задача (1), (2) имеет mt линейно независимых решений.

Теорема 4. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в B_α всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 2. Если $f(x) = 0$ в окрестности нуля, то функция w является частным решением задачи (1), (2).

Доказательство : При $\alpha \neq [\alpha]$ доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha = [\alpha]$. Рассмотрим матрицу

$$G(x, y) = (xI + Ay)^\alpha - (xI + By)^\alpha,$$

где A и B определены в (20). Раскрывая скобки, представим эту матрицу в виде

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^n G_k y^k x^{n-k},$$

где G_k – некоторые постоянные матрицы и $G_1 = A - B$. Из слабой связанности системы (1) следует, что матрица $A - B$ невырождена (см. [2]). Следовательно, выполняется $\det(\tau^{-\alpha} G(x, y)) \rightarrow c \neq 0$ на некотором луче $x = ky$. Используя последнее соотношение и леммы 6 и 7, завершаем доказательство теоремы 4.

§5. ЗАДАЧА (1), (2) С ДРУГИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом параграфе мы рассмотрим задачу (1), (2) в более узком классе функций. Будем предполагать, что вместо оценки (3) граничная функция $f(x)$ в бесконечности удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} f(x) = 0, \quad (22)$$

где α – фиксированное положительное число. Соответственно, решение u задачи (1), (2) ищется в классе $B_{\alpha,0}$ дважды непрерывно дифференцируемых в Π^+ , непрерывных в $\Pi^+ \cup R$ функций, растущих на бесконечности медленнее τ^α :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-\alpha} u(x, y) = 0, \quad \tau = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (23)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть $m = [\alpha]$ при $\alpha \neq [\alpha]$ и $m = [\alpha] - 1$ при $\alpha = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ имеет m линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$P_m(x + \lambda_1 y) - P_m(x + \lambda_2 y),$$

где $P_m(z)$ – произвольный полином порядка m .

Теорема 6. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ имеет решение тогда и только тогда, когда несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{i + x^{\alpha+1}}$$

сходится в смысле главного значения по Коши.

Доказательство теорем 5 и 6 проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2. При этом, если функция $f(x)$ обращается в нуль в окрестности нуля, то частное решение u^* задачи (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ при $\alpha \neq [\alpha]$ определяется по формуле (8), а при $\alpha = [\alpha]$ – соотношением

$$u^*(x, y) = w(x, y) - c_0((x + \lambda_1 y)^\alpha - (x + \lambda_2 y)^\alpha), \quad (24)$$

где $w(x, y)$ – функция (8), а постоянная c_0 определяется из равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt = c_0.$$

Для слабо связанной системы верны следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть $m = [\alpha]$ при $\alpha \neq [\alpha]$ и $m = [\alpha] - 1$ при $\alpha = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ имеет mn линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$(S_m(xI + Ay) - S_m(xI + By))D,$$

где D – произвольный постоянный вектор, S_m – произвольный полином от z порядка m , а A, B определены в (20).

Теорема 8. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда несобственный интеграл от вектор-функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{i + x^{\alpha+1}}$$

сходится в смысле главного значения по Коши. Если $f(x) = 0$ в окрестности нуля, то частное решение задачи (1), (2), (4) имеет вид

$$u^*(x, y) = w(x, y) - [(xI + Ay)^{[\alpha]} - (xI + By)^{[\alpha]}]\Omega,$$

где A и B определены в (20), а вектор Ω имеет вид

$$\Omega = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}} dt.$$

Abstract. The paper considers Dirichlet problem for the elliptic equations and second order weakly connected systems in a half-plane. The solutions are searched in the class of functions, that are twice continuously differentiable in the half-plane, continuous up to the boundary and have finite growth order at infinity. Necessary and sufficient conditions for solvability of the non-homogeneous problem are found and the solutions of the corresponding homogeneous problem are explicitly written.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. N. E. Tovmasyan, Non-regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific, Singapore 1998.
2. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Наука, Москва, 1966.
3. A. Douglis, L. Nirenberg, "Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations", Comm. on Pure and Applied Math., vol. 8, no. 4, pp. 503 – 538, 1955.
4. Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости", Изв. НАН Армении. Математика, том 36, № 6, стр. 37 - 45, 2001.

Поступила 5 августа 2003

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА $L_1(\mathbb{R})$ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ С АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ар. А. Вагаршакян

Ереванский государственный университет

E-mail : armensci@yahoo.com

Резюме. В теории всплесков проблема представления пространства функциональными рядами обычно ставится для пространства $L_2(\mathbb{R})$. В этой статье мы ставим задачу для пространства $L_1(\mathbb{R})$, что существенно меняет ситуацию. В частности, пространство $L_1(\mathbb{R})$ не обладает безусловным базисом, и, следовательно, рассматриваемые представления не обладают свойством единственности.

§1. ВВЕДЕНИЕ И НЕОБХОДИМЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье мы рассматриваем проблему представления функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$ функциональными рядами с абсолютно сходящимися коэффициентами. Сначала мы представляем некоторые классические результаты, непосредственно связанные с этой проблемой : теорема Винера о полных системах в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ и результат С. Я. Хавинсона [6], обеспечивающий условия для представления элементов из Банаховых пространств рядами с абсолютно сходящимися коэффициентами. После этого мы рассматриваем некоторые представления пространства $L_1(\mathbb{R})$ системами, порожденными сдвигами и сжатиями данной функции. Полученные результаты мы сравниваем с условиями полноты. Пусть M является подмножеством $L_1(\mathbb{R})$. Обозначим через I_M замыкание множества всех функций, допускающих представление в виде конечной суммы

$$\sum c_{k,n} f_k(x + x_{k,n}),$$

где $f_k(x)$ принадлежат M , а $c_{k,n}, x_{k,n}$ – произвольные действительные числа.

Теорема 1 (Н. Винер). Равенство $I_M = L_1(\mathbb{R})$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует точки x_0 , где преобразования Фурье всех функций из M обращаются в нуль.

Замечание 1. Если существует лишь конечное множество точек $x_1, \dots, x_n$, где преобразования Фурье семейства M обращаются в нуль, то

$$I_M = \{f(x) \in L_1(-\infty, \infty) : \mathfrak{F}f(x_k) = 0, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

где через $\mathfrak{F}$ обозначен оператор преобразования Фурье.

Замечание 2. Из теоремы Малявина (см. [1], стр. 70), можно сделать заключение, что существует некоторое закрытое множество $E \subset \mathbb{R}$ и соответствующее множество функций $M \subset L_1(\mathbb{R})$ такое, что преобразование Фурье всех функций семейства M обращается в нуль только в точках множества E , но

$$I_M \neq \{f(x) \in L_1(-\infty, \infty) : \mathfrak{F}f(x) = 0, x \in E\}.$$

Замечание 3. Если функция $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ и числовая последовательность λ_n таковы, что

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \neq 0,$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

то семейство функций $M = \{\varphi(\lambda_k \cdot x), k = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.

Определение 1. Последовательность элементов $\varphi_k \in X$ называется усиленно полной в Банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$, если для любого $f \in X$ и $\epsilon > 0$ существуют некоторые числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\| < \epsilon \quad (2)$$

и одновременно $\sum_{k=1}^n |c_k| \leq \|f\|$.

Теорема 2 (С. Я. Хавинсон). Пусть X – Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Тогда последовательность $\{\varphi_k, k = 1, 2, \dots\} \subset X$ усиленно полна тогда и только тогда, когда для произвольного функционала $l \in X^*$ из условий

$$|l(\varphi_k)| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{следует, что} \quad \|l\|_{X^*} \leq 1.$$

Лемма 1. Если последовательность $\varphi_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$ ограничена и усиленно полна, то для любого $\epsilon > 0$ и $f \in X$ существуют числа $c_1, c_2, \dots$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\| = 0 \quad (3)$$

и одновременно $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq (1 + \epsilon) \|f\|$.

Доказательство : Достаточно доказать наше предложение для случая $f \neq 0$. Согласно теореме 2 существуют числа $c_1^{(1)}, \dots, c_{m_1}^{(1)}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} \varphi_k \right\| < \frac{\epsilon}{2} \|f\|$$

и одновременно

$$\sum_{k=1}^{m_1} |c_k^{(1)}| \leq \|f\|.$$

Применяя теорему 2 к функции

$$f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} \varphi_k,$$

получаем, что существуют числа $c_1^{(2)}, \dots, c_{m_2}^{(2)}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} \varphi_k - \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} \varphi_k \right\| < \frac{\epsilon}{4} \|f\| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m_2} |c_k^{(2)}| \leq \frac{\epsilon}{2} \|f\|.$$

Продолжая этот процесс бесконечно, мы строим последовательности

$$c_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, m_j$$

такие, что для любого $N = 1, 2, \dots$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)} \varphi_k - \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)} \varphi_k - \dots - \sum_{k=1}^{m_N} c_k^{(N)} \varphi_k \right\| < \frac{\epsilon}{2^N} \|f\| \quad (4)$$

и одновременно

$$\sum_{k=1}^{m_N} |c_k^{(N)}| \leq \frac{\epsilon}{2^{N-1}} \|f\|,$$

и для удобства предположим, что $c_k^{(N)} = 0$, $k = m_N + 1, \dots$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |c_k^{(j)}| \leq \|f\| + \frac{\epsilon}{2} \|f\| + \frac{\epsilon}{4} \|f\| + \dots = (1 + \epsilon) \|f\|.$$

Значит, ряд

$$c_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_k^{(j)}$$

сходится для любых $k = 1, 2, \dots$, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |c_k^{(j)}| \leq (1 + \epsilon) \|f\|.$$

Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} \varphi_k - \dots - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(N)} \varphi_k \right\| &= \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^{(1)} + \dots + c_k^{(N)}) \varphi_k \right\| &= \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \right\| \end{aligned}$$

так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} c_k^{(j)} \right) \varphi_k \right\| \leq \sup_k \|\varphi_k\| \sum_{j=N+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(j)}|.$$

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 2. Точка $x_0 \in (-\infty, \infty)$ называется точкой Лебега функции $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |h(x) - h(x_0)| dx = 0. \quad (5)$$

Хорошо известно, что для любой функции $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ почти все точки $x \in (-\infty, \infty)$ являются точками Лебега.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$. Пусть, далее, $h(x) \in L_{\infty}(-\infty, \infty)$ и x_0 является точкой Лебега для $h(x)$. Если λ_n и x_n , $n = 1, 2, \dots$ являются действительными последовательностями такими, что

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$;
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n |x_n - x_0| < \infty$,

то из неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n (x_n - x_0)) h(x) dx \right| \leq 1$$

следует, что $|h(x_0)| \leq 1$.

Доказательство : Без потери общности, можем считать, что $x_0 = 0$. Мы можем также считать, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = C$ существует и конечен. Очевидно,

$$\begin{aligned} & \left| \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n(x - x_n))h(x)dx - \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n x - C)h(x)dx \right| \leq \\ & \leq \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| |\varphi(\lambda_n(x - x_n)) - \varphi(\lambda_n x - C)| dx \leq \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda_n(x - x_n)) - \varphi(\lambda_n x - C)| dx = \\ & = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x - \lambda_n x_n) - \varphi(x - C)| dx. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что последний интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n x - C)h(x)dx \right| \leq 1.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\begin{aligned} |h(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(0)\lambda_n \varphi(\lambda_n x - C)dx \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\lambda_n \varphi(\lambda_n x - C)dx \right| + \\ &+ \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot |\varphi(\lambda_n x - C)| dx. \end{aligned}$$

Значит, чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot |\varphi(\lambda_n x - C)| dx = 0.$$

Для данного $\epsilon > 0$ найдем число A такое, что

$$\int_{|x| > A} |\varphi(x - C)| dx < \epsilon,$$

и число N , для которого

$$\int_{E(N)} |\varphi(x - C)| dx < \epsilon,$$

где

$$E(N) = \{x : x \in [-A, A], |\varphi(x - C)| \geq N\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot |\varphi(\lambda_n x - C)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)| dx = \\
 &= \int_{|x| \geq A} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)| dx + \int_{E(N)} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)| dx + \\
 &+ \int_{[-A, A] \setminus E(N)} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)| dx \leq 2 \|h(x)\|_{\infty} \int_{|x| \geq A} |\varphi(x - C)| dx + \\
 &+ 2 \|h(x)\|_{\infty} \int_{E(N)} |\varphi(x - C)| dx + N \int_{-A}^A \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| dx \leq \\
 &\leq 4\epsilon \|h(x)\|_{\infty} + 2NA \frac{\lambda_n}{2A} \int_{-A/\lambda_n}^{A/\lambda_n} |h(x) - h(0)| dx,
 \end{aligned}$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 4. Если функция $h(x)$ непрерывна в точке x_0 , то вместо условия 2 в лемме 2 достаточно потребовать, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0$.

Замечание 5. Применяя лемму 2 к функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

получаем следующий результат, который следует также из хорошо известной теоремы Фату :

Пусть $x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$ — последовательность в верхней полуплоскости ($y_n > 0$), такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, и пусть для почти всех точек $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ можно выбрать подпоследовательность $x_{n_k} + iy_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условию $\sup_k y_{n_k}^{-1} |t_0 - x_{n_k}| < \infty$. Если функция $h(t) \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ такова, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} h(t) dt \right| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

тогда $\|h(t)\|_{\infty} \leq 1$.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = c \neq 0,$$

и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — действительные последовательности, удовлетворяющие условиям

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

2. для почти всех $x_0 \in \mathbb{R}$ существует подпоследовательность x_{n_k} , $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} |x_{n_k} - x_0| < \infty.$$

Тогда для любых $\epsilon > 0$ и функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ имеет место представление

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)),$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \frac{1+\epsilon}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Доказательство : Без потери общности мы можем предположить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Для того, чтобы проверить удовлетворяются ли условия теоремы 2, предположим, что $l \in L_1^*(-\infty, \infty)$. Тогда, по теореме Рисса существует функция $h(x) \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ такая, что для каждого $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ имеем

$$l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x) dx,$$

и $\|l\|_{L_1^*} = \sup_{\|f\|_1=1} |l(f)| = \sup_x |h(x)|$. Если для всех $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)) dx \right| = |l(\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)))| \leq 1,$$

то из условий теоремы следует, что для почти всех точек Лебега x_0 функции $h(x)$ существуют подпоследовательности λ_{n_k} и x_{n_k} такие, что

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = +\infty,$$

$$2. \limsup_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} |x_{n_k} - x_0| < \infty$$

и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \lambda_{n_k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_{n_k}(x_{n_k} - x_0)) h(x) dx \right| \leq 1.$$

Из леммы 2 мы заключаем, что $|h(x_0)| \leq 1$. Следовательно, $\|l\|_{L_1^*} = \|h(x)\|_{\infty} \leq 1$.

Замечание 6. Представление в теореме 3 не является единственным : в противном случае функциональные ряды $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, являлись бы безусловным базисом в пространстве $L_1(\mathbb{R})$, что невозможно (см. [3]). Это замечание подчеркивает существенное различие между теорией всплесков и нашим подходом к представлениям.

Замечание 7. Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ из теоремы 3 не может быть опущено. Ниже мы докажем, что для любой функции $\varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и для любых последовательностей $0 < \lambda_n < \lambda < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$ и x_n , $n = 1, 2, \dots$ семейство функций

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

не может быть усиленно полным в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. Более того, существует такая функция $f \in L_1(\mathbb{R})$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx = 0$$

влечет

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \infty.$$

Доказательство : Предположим, что верно обратное утверждение, т.е. для любой функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ существует последовательность чисел $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k - f \right\| = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Тогда ограниченный оператор $\chi \in BL(l_1, L_1(\mathbb{R}))$

$$\chi(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

является суръективным. Кроме того, заметим, что множество $\text{Ker}(\chi) = \{c \in l_1 : \chi(c) = 0\}$ замкнуто в l_1 . Следовательно, оператор χ индуцирует ограниченный, линейный и инъективный оператор

$$\chi_0 : l_1 / \text{Ker}(\chi) \rightarrow L_1(\mathbb{R}).$$

Применяя теорему Банаха об ограниченности обратного оператора для χ_0 , мы заключаем, что χ_0^{-1} ограничен. Следовательно, для любой константы $C > \|\chi_0^{-1}\|$ и для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ существует числовая последовательность $\{c_k; k = 1, 2, \dots\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\| = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq C \|f\|.$$

Поэтому, для любых $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\epsilon > 0$ существуют числа c_k , $k = 1, 2, \dots, N$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\| < \epsilon \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^N |c_k| \leq C \|f\|.$$

Согласно теореме Хавинсона, это условие эквивалентно утверждению, что для любого $l \in L_1^*$ условия $\{|l(\varphi_k)| \leq 1, k = 1, 2, \dots\}$ влекут $\|l\|_{L_1^*} \leq C$.

Покажем, что последнее утверждение не верно. Заметим, что существует функция $\delta(\epsilon)$ такая, что из $m(E) \leq \delta$ следует

$$\int_E |\varphi(x)| dx \leq \epsilon.$$

Для функционалов

$$l_n(f) = n \int_0^{\frac{1}{\lambda} \delta(\frac{1}{n})} f(t) dt,$$

действующих на пространстве $L_1(\mathbf{R})$, имеем

$$\begin{aligned} |l_n(\varphi_k)| &= \left| n \int_0^{\frac{1}{\lambda} \delta(\frac{1}{n})} \varphi_k(t) dt \right| \leq n \int_0^{\frac{1}{\lambda} \delta(\frac{1}{n})} |\varphi_k(t)| dt = \\ &= n \int_{-\lambda_k x_k}^{\frac{\lambda_k}{\lambda} \delta(\frac{1}{n}) - \lambda_k x_k} |\varphi(t)| dt \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad n, k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

так как $\frac{\lambda_k}{\lambda} \delta(\frac{1}{n}) \leq \delta(\frac{1}{n})$. Следовательно, $|l_n(\varphi_k)| \leq 1$ ($n, k = 1, 2, \dots$) хотя $\|l_n\| = n \rightarrow \infty$, т.е. получаем противоречие, что и завершает доказательство.

Теорема 4. Пусть $\varphi(x) = 1/2$ для $-1 \leq x \leq 1$ и $\varphi(x) = 0$ вне сегмента $[-1, 1]$. Далее, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ и $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны :

1. последовательность

$$\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

полна в $L_1(\mathbf{R})$,

2. последовательность $\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)), n = 1, 2, \dots$ усиленно полна в $L_1(\mathbf{R})$,

3. множество $\mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$, где

$$\Delta_n = \text{supp} (\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))) = \left[\lambda_n x_n - \frac{1}{\lambda_n}, \lambda_n x_n + \frac{1}{\lambda_n} \right],$$

имет нулевую Лебегову меру.

Доказательство : Сначала докажем, что $1 \Rightarrow 3$. Предположим, что обратное утверждение верно, т.е.

$$m \left(\mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k \right) > 0,$$

хотя последовательность (6) полна. Тогда существует $n_0 \in N$ такое, что

$$m\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k > n_0} \Delta_k\right) > 0. \quad (7)$$

Обозначим через

$$F = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k > n_0} \Delta_k \quad \text{и} \quad L_F = \{f \in L_1(\mathbb{R}) : f(x) = 0, x \notin F\}$$

и заметим, что только конечное число носителей функций $\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \dots$, пересекается с F . С другой стороны, согласно (7), подпространство L_F является бесконечномерным. Отсюда, последовательность $\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))$ не полна в L_F .

Чтобы доказать, что $3 \Rightarrow 2$, заметим, что при условии 3 последовательность $\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию теоремы Хавинсона. Действительно, предположим, что $h(x) \in L_\infty(\mathbb{R})$ такова, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)) dx \right| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Очевидно, что для каждой точки $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$ существует подпоследовательность интервалов Δ_{k_n} такая, что $x_0 \in \Delta_{k_n}$ для любого $n \in N$. Обозначая через δ_n наименьшее положительное число, для которого $\Delta_{k_n} \subset [x_0 - \delta_n; x_0 + \delta_n]$, легко заметить, что

$$\delta_n < 2 \cdot m(\Delta_{k_n}) < \frac{4}{\lambda_{k_n}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Если x_0 — Лебегова точка для $h(x)$ и $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \lambda_{k_n} \varphi(\lambda_{k_n}(x - x_{k_n})) dx - h(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{m(\Delta_{k_n})} \int_{\Delta_{k_n}} (h(x) - h(x_0)) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\delta_n} \int_{x_0 - \delta_n}^{x_0 + \delta_n} |h(x) - h(x_0)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (8), мы получаем, что если x_0 есть Лебегова точка для функции $h(x)$, то $|h(x_0)| \leq 1$. Согласно условию 3, почти все $x_0 \in \mathbb{R}$ принадлежат множеству $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$ и одновременно являются точками Лебега для $h(x)$. Следовательно, $\|h\|_\infty \leq 1$. Таким образом, последовательность $\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условиям теоремы Хавинсона. Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что $2 \Rightarrow 1$.

Замечание 8. Утверждение 3 теоремы 4 означает, что почти все точки покрываются бесконечным числом интервалов Δ_n .

Abstract. In the wavelet theory the problem of representation of a space by functional series is usually posed for $L_2(\mathbb{R})$. The paper poses the problem for the space $L_1(\mathbb{R})$, and this essentially changes the situation. In particular, the space $L_1(\mathbb{R})$ have no unconditional basis, and hence considered representations do not possess uniqueness property.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Kahane, Series de Fourier Absolument Convergentes, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
2. Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, New-York, 1968.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, 1999.
4. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимаций, Москва, 1947.
5. С. Я. Хавинсон, "Теория экстремальных функций", Успехи Мат. Наук, том 18, выпуск 2(110), стр. 25 – 98, 1963.
6. С. Я. Хавинсон, "Понятие полноты", Изв. АН СССР, том 6, по. 1, стр. 221 – 234, 1971.

Поступила 17 сентября 2004

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМ

Том 39, Номер 5, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Г. Арамян, Восстановление центрально-симметричных выпуклых тел с помощью радиусов кривизны проекции	3
О. Р. Габриелян, О поведении решений гипоеллиптических уравнений в $\mathbb{R}^2$	9
С. Гогян, О расходимости L^1 -гриди алгоритма по системе Хаара	25
М. Г. Григорян, О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе	37
П. Э. Мелик-Адамян, Описание характеристических функций диссипативных канонических операторов	53
Н. Е. Товмасян и А. О. Бабаян, Задача Дирихле для эллиптических систем в классе функций полиномиального роста	67
Ар. А. Вагаршакян, Представление пространства $L_1(\mathbb{R})$ функциональными рядами с абсолютно сходящимися коэффициентами	79

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 39, No. 5, 2004

CONTENTS

R. H. ARAMYAN, Reconstruction of centrally symmetrical convex bodies by projection curvature radii	3
O. R. GABRIELIAN, Behavior of the solutions of hypoelliptic equations in $\mathbb{R}^2$	9
S. GOGYAN, On divergence of the L^1 -greedy algorithm by Haar's system	25
M. G. GRIGORIAN, Convergence in L^p of greedy algorithm by the trigonometric system	37
P. E. MELIK-ADAMYAN, Description of characteristic functions of dissipative canonical operators	53
N. E. TOVMASYAN AND A. O. BABAYAN, Dirichlet problem for elliptic systems in a class of functions of polynomial growth	67
AR. A. VAGHARSHAKYAN, Representation of $L_1(\mathbb{R})$ by functional series with absolutely convergent coefficients	79