

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Մ. Ս. Գինոյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ա. Ա. Սահակյան

Ա. Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

М. С. Гиновян (зам. главного редактора)

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсесян

А. А. Саакян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Настоящий выпуск представляет собой № 5 тематической серии, посвящённой близким предметам ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (в смысле Бляшке–Санта-ло–Хадвигера) и СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. Статьи в этой области, имеющие прикладную или статистическую природу, публикуются в ряде периодических изданий. Однако работы в той же области, посвящённые математическому анализу, несмотря на большой интерес к ним, не имеют определённого признанного места публикации. Настоящая тематическая серия быть может изменит эту ситуацию.

В области интегральной и стохастической геометрии журналом “Известиях Академии Наук Армении”, серия Математика опубликованы, не считая тематической серии, три специальных выпуска (4-ые номера за 1994, 1996 и 1998 годы) под общим названием “Аналитические Результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии”. Эти три выпуска заслужили самых высоких оценок (так, профессор Дитер Баум из Трирского Университета писал : “Букет блестящих, впечатляющих аналитических результатов ... очень важные, успешные и глубокие математические исследования”).

Выпуски тематической серии не имеют строгого графика. Их публикация зависит от наличия и готовности материала. Предусматривается строгая процедура рецензирования.

Редакционная коллегия надеется на положительный резонанс международного математического сообщества, включая представление статей к публикации, участие в процессе рецензирования и т.д.. Журнал готов к любому сотрудничеству, направленному на улучшение качества тематической серии.

Рубен В. Амбарцумян

Главный редактор

КОМБИНАТОРНЫЕ ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
Том 39, № 4, 2004

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является второй попыткой автора представить комбинаторную теорию прегеодезических кривых, увязав ее с Четвертой проблемой Гильберта на двумерных многообразиях. Первая попытка относится к 1996 году (см [1]). За прошедшие годы в теории комбинаторных валюаций в пространствах классической интегральной геометрии был достигнут значительный прогресс. В частности, в пространствах плоскостей в $\mathbb{R}^3$ и прямых в $\mathbb{R}^3$ был получен результат, отождествляющий достаточно гладкие трансляционно-инвариантные комбинаторные валюации в двух указанных пространствах со знакопеременными мерами [2].

Целью настоящей статьи является дальнейшее продвижение теории прегеодезических в этой последней как в плане методологии, так и в поиске новых фактов. Так, Теорема 4 (см. ниже) отождествляет непрерывные валюации в пространствах прегеодезических с комбинаторными валюациями. Теорема 10 использует условие *поточечной выпуклости*, которое вместе с условием *стабиль-*

ной аддитивности решает Четвертую проблему Гильберта для прегеодезических в т.н. классической среде. Отметим, что новое универсальное доказательство основной теоремы о разложении вместе с алгоритмом для комбинаторных коэффициентов теперь получается из общей теоремы о разбиении открытого листа Мёбиуса т.н. специальными окружностями (т.е. топологическими окружностями, которые не разбивают лист Мёбиуса на две компоненты).

Автор планирует вскоре опубликовать доказательство этой теоремы другой работе. Отметим, что книга [3] содержит четыре или пять различных *ad hoc* доказательств теоремы о разложении в различных конкретных пространствах (общая теория прегеодезических в [3] не рассматривалась). Разработка комбинаторных валюаций в данной статье вероятно даст новый толчок к их исследованию в других пространствах интегральной геометрии.

§1. ПРОСТРАНСТВО ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И КОЛЬЦА ЕГО ПОДМНОЖЕСТВ

Мы рассматриваем семейства кривых в двух измерениях, их свойства задаем аксиоматически, следуя схеме аксиом Гильберта, но для удобства последующего анализа делаем некоторые дополнительные предположения.

Пусть D – гладкое двумерное многообразие с границей ∂D , топологически эквивалентное замкнутому плоскому диску, и пусть $\mathbb{G}$ – семейство кривых на D , удовлетворяющих следующим аксиомам 1) – 4) :

1) Каждая кривая $g \in \mathbb{G}$ есть гладкая кривая без самопересечений, топологически эквивалентная замкнутому прямолинейному отрезку. Относительная внутренность g принадлежит внутренности D , и оба конца g лежат на ∂D .

2) Для любых двух различных точек в D существует единственная кривая

$g \in \mathbb{G}$, содержащая эти две точки; это свойство остается в силе, если одна или обе точки взяты на ∂D .

3) Топология на $\mathbb{G}$, индуцированная из пространства замкнутых множеств в D , совпадает с концевой топологией на $\mathbb{G}$.

4) Для данного направления, касательного к D в точке $P \in \text{int} D$, существует только одна кривая $g \in \mathbb{G}$, содержащая P и имеющая в P данное направление касательной.

Замечание. Условие 2) постулирует, в частности, существование *концевого отображения*, которое переводит каждую прегеодезическую $g \in \mathbb{G}$ в *неупорядоченную пару* (2-множество) $\{t_1, t_2\}$ ее концов. Модель пространства 2-множеств $\{t_1, t_2\}$ строится следующим образом: в произведении $\partial D \times \partial D$ границы D на себя стирается "диагональ" (т.е. все точки вида (t, t) удаляются); производится попарное склеивание точек (t_1, t_2) и (t_2, t_1) . Результат назовем *концевой моделью* $\mathbb{G}$. Концевая модель всегда имеет топологию *открытого листа Мёбиуса*. Итак, концевое отображение всегда индуцирует на $\mathbb{G}$ топологию *открытого листа Мёбиуса*. Если условия 1) – 4) удовлетворены, то $\mathbb{G}$ называется семейством *прегеодезических* кривых, а каждая $g \in \mathbb{G}$ – прегеодезической.

Пример. На любой достаточно гладкой поверхности любая точка обладает замкнутой геодезически-выпуклой окрестностью D (= топологический замкнутый диск), где семейство геодезических кривых $\mathbb{G}$ обладает свойствами 1) – 4).

Опишем некоторые основные множества и кольца подмножеств в $\mathbb{G}$.

Пучок $[P]$ = множество прегеодезических, содержащих точку $P \in \text{int} D$.

Бюффоново множество $[P_1, P_2]$ = множество прегеодезических, разделяющие две различные точки $P_1, P_2 \in \text{int} D$.

Лемма 4. Пусть $F(z)$ – аналитическая функция в D^+ и $F(z) \in C(\overline{D^+})$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ её можно представить в виде

$$F(z) = (K_n; f(t))(z) + \frac{P_n(z)}{(1-z)^n}, \quad f(t) = \mathcal{R}F(t), \quad t \in T,$$

а $P_n(z) \in T_n$ определяется через функцию $F(z)$ однозначно. Именно, $P_n(z) = (1-z)^n(F(z) - (K_n; f))(z)$.

Доказательство. Так как функция $F(z)$ удовлетворяет граничному условию (10) при $\rho(t) = |1-t|^n$, то доказательство леммы непосредственно следует из теоремы А.

Теорема 1. Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполняется условие (11). Тогда общее решение однородной задачи (1) – (3) можно представить в виде

$$u(z) = \mathcal{R} \left(\frac{P_0(z)}{(1-z)^{\gamma-1}} - \frac{(1-z\bar{z})}{2} \left(\frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{\hat{d}}{dz} \frac{P_0(z)}{(1-z)^{\gamma-1}} \right) \right), \quad (16)$$

где $P_0(z) \in T_{n-1}$, ($P_0(z) \equiv 0$, $\gamma = 0$), $P_1(z) \in T_n$.

Доказательство. Пусть $u(z)$ – произвольное решение однородной задачи (1) – (3). Как известно (см. [7]), общее решение уравнения (1) можно представить в виде :

$$u(z) = \mathcal{R}(\Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z)). \quad (17)$$

Здесь $\Phi_k(z)$, $k = 0, 1$ – произвольные аналитические функции в D^+ такие, что $\text{Im } \Phi_k(z) = 0$, $k = 0, 1$. При этом функции $\Phi_k(z)$, $k = 0, 1$ определяются через функцию $u(z)$ однозначно. Полагая $u(rt) = f_r(t)$ и $\Phi_{kr}(z) = \Phi_k(rz)$ ($k = 0, 1$), получаем

$$\mathcal{R}(\Phi_{0r}(t) + (1-r^2)\Phi_{1r}(t)) = f_r(t).$$

По лемме 4,

$$\Phi_{0r}(z) + (1-r^2)\Phi_{1r}(z) = (K : f_r)(z) + \frac{\bar{P}_{0r}(z)}{(1-z)^\gamma},$$

где $\bar{P}_{0r}(z) \in T_\gamma$. Так как $f_r(t)(1-t)^\gamma \rightarrow 0$ в L^1 при $r \rightarrow 1-0$, то переходя к пределу при $r \rightarrow 1-0$ в последнем равенстве получаем

$$\Phi_0(z) = \frac{\bar{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad P_0(z) \in T_\gamma.$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = \mathcal{R} \left(t \frac{d\Phi_0(rt)}{dz} - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t \frac{d\Phi_1(rt)}{dz} \right).$$

I. Класс множеств

$$U = \bigcup \tau\{P_i\},$$

где объединение берется по всевозможным конечным множествам $\{P_i\} \subset D$, содержит семейства эквивалентных множеств. Действительно, пусть дано $B \in \tau\{P_i\}$. В каждом $\tau\{Q_i\}$ может быть найдено множество B_1 , эквивалентное B , коль скоро множество $\{Q_i\}$ содержит $\{P_i\}$.

II. Для любых $B \in U$ существует минимальное конечное множество $\{P_i\} \subset D$, для которого $B \in \tau\{P_i\}$. По определению, минимальность означает, что эквивалентность $B_1 \in \tau\{Q_i\}$ множеству B влечет $\{P_i\} \subset \{Q_i\}$.

Каждому конкретному множеству $B \subset G$ соответствует класс эквивалентности

$$B^* = \{B_1 \subset G : B_1 \text{ эквивалентен } B\}.$$

Рассмотрим множество классов эквивалентности :

$$U^* = \{B^* : B \in U\}.$$

Для любых $A_1, A_2 \in U^*$ положим

$$A_1 \cup A_2 = (B_1 \cup B_2)^*, \quad A_1 \cap A_2 = (B_1 \cap B_2)^*, \quad (1.1)$$

коль скоро

$$B_1^* = A_1 \text{ and } B_2^* = A_2, \quad B_1, B_2 \in U. \quad (1.2)$$

(Классы $A_1 \cup A_2$ and $A_1 \cap A_2$ не зависят от выбора B_1 и B_2 , удовлетворяющих (1.2).)

Лемма 1. Множество классов эквивалентности U^* есть кольцо относительно операций (1.1).

Доказательство : Пусть для данных $A_1 \in U^*$ и $A_2 \in U^*$, множества B_1 и B_2 имеют вид (1.2). Очевидно, что $B_1, B_2 \in U$ влечет $B_1 \in \tau\{P_i\}$ и $B_2 \in \tau\{P'_i\}$ для некоторых $\{P_i\}, \{P'_i\} \in D$. Положим $\{P''_i\} = \{P_i\} \cup \{P'_i\}$. Тогда найдутся два множества $B_3 \in \tau\{P''_i\}$ и $B_4 \in \tau\{P''_i\}$, эквивалентные соответственно B_1 и (соответствующая симметричная разность принадлежит пучкам $[P''_i]$). Имеем $B_3 \cup B_4 \in \tau\{P''_i\}$ и $B_3 \cap B_4 \in \tau\{P''_i\}$, откуда следует, что $B_3 \cup B_4 \in U$ и $B_3 \cap B_4 \in U$. Остается заметить, что множество $B_3 \cup B_4$ эквивалентно $B_1 \cup B_2$, и $B_1 \cap B_2$ эквивалентно $B_3 \cap B_4$. Доказательство завершено.

§2. РАЗБИЕНИЕ ОТКРЫТОГО ЛИСТА МЁБИУСА

СПЕЦИАЛЬНЫМИ ОКРУЖНОСТЯМИ

Определенные топологические свойства разбиения пространства $\mathbb{G}$ пучками $[P_1], \dots, [P_n]$ соответствуют некоторым общим положениям о разбиении открытого листа Мёбиуса M нормальными совокупностями специальных окружностей.

Пусть многообразие M_0 есть образ $\mathbb{G}$ при гомеоморфизме $h : \mathbb{G} \rightarrow M_0$. (При h , каждая $g \in \mathbb{G}$ представлена точкой $Q \in M_0$; вместе с $\mathbb{G}$ многообразие M_0 необходимо имеет топологию открытого листа Мёбиуса.) Образ $h[P]$ пучка $[P]$, $P \in D$ является топологической окружностью. Однако $[P]$ не делит $\mathbb{G}$ на две компоненты. Следовательно, $h[P]$ также не делит M_0 на две компоненты. Это мотивирует определение, которое дадим для общего открытого листа Мёбиуса M : любая топологическая окружность $s \subset M$, которая не делит M на две компоненты, называется *специальной окружностью*.

Всякие два пучка $[P_1], [P_2]$, имеют только одну общую прегеодезическую, проходящую через P_1, P_2 . Отсюда следует, что всякие две специальные окруж-

ности $c_1 \subset \mathbb{M}_0$ и $c_2 \subset \mathbb{M}_0$ из совокупности

$$\mathcal{N}_0 = \{c = h[P] : P \in D\}$$

необходимо пересекаются в единственной точке. Дадим общее определение : совокупность $\mathcal{N}$ специальных окружностей на $\mathbb{M}$ называется *нормальным*, если всякие две $c_1, c_2 \in \mathcal{N}$ пересекаются в единственной точке на $\mathbb{M}$.

Бюффовы лунки. Всякие две специальные окружности c_1, c_2 из некоторого нормального класса $\mathcal{N}$ ($\neq \mathcal{N}_0$ вообще говоря) делят $\mathbb{M}$ на две лунки (открытых компонент), одна из которых относительно компактна, а другая – нет. Относительно компактную лунку назовем *Бюффоновой*. Мотивация : если $\mathbb{M} = \mathbb{M}_0$ и $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$, тогда $c_1 = h[P_1]$ и $c_2 = h[P_2]$ для некоторых $P_1, P_2 \in D$. Тогда относительно компактная лунка совпадает с $h[P_1, P_2]$, и таким образом связывается с Бюффоновой.

Ячейки. Пусть

$$c_1, \dots, c_n, \quad n > 1 \tag{2.1}$$

есть нормальная совокупность специальных окружностей на $\mathbb{M}$. Они делят $\mathbb{M}$ на открытые компоненты C . Компонента C называется *ячейкой*, если C имеет компактное замыкание в $\mathbb{M}$. Каждая совокупность (2.1) образует конечное число ячеек, обозначаемое через $C_{\cdot}$.

Кольцо $\tau\{c_i\}$ Рассмотрим объединения

$$\alpha = \alpha_S = \bigcup_{i \in S} C_i \tag{2.2}$$

ячеек C_i , образованных специальными окружностями (2.1) : в (2.2) индекс i принадлежит некоторому множеству S . Такие объединения образуют *кольцо*

подмножеств на $\mathbb{M}$, обозначим его $\tau\{c_i\}$. В этом кольце ячейки играют роль (попарно непересекающихся) атомов.

Далее мы будем использовать следующую терминологию :

вершина v = точка пересечения по меньшей мере двух специальных окружностей c_i ;

малая окрестность вершины v : окрестность вершины v мала, если она пересекается только с окружностями c_i -s, которые пересекаются в v ;

корнер ϵ_k = компонента малой окрестности вершины v при ее разбиении посредством c_i ,

лунка = открытая часть $\mathbb{M}$, ограниченная двумя специальными окружностями c_i и c_j ; точка $c_i \cap c_j$ называется вершиной лунки ; если лунка содержится в другой лунке, тогда обе лунки необходимо имеют общую вершину ; дополнение лунки в $\mathbb{M}$ также будет лункой с той же самой вершиной ;

минимальная лунка = лунка, которая не разделяется на подлунки кривыми c_i ; каждой вершине соответствует только одна минимальная не-Бюффонова лунка ; каждой минимальной лунке соответствуют два различных корнера ;

максимальная лунка = лунка, дополнение к которой есть минимальная лунка : каждой вершине соответствует только одна максимальная лунка ;

$MIN = \{l_k\}$ = все минимальные Бюффовы лунки и

$MAX = \{L_s\}$ = все максимальные Бюффовы лунки.

С каждой лункой $l_k \in MIN$ с вершиной v_k связываем ϵ_k^{+-} и ϵ_k^{-+} – два корнера в v_k , удовлетворяющие условиям $\epsilon_k^{+-} \subset l_k$ и $\epsilon_k^{-+} \subset l_k$.

С каждой лункой $L_s \in MAX$ с вершиной v_s связываем ϵ_s^{++} и ϵ_s^{--} – два корнера в v_s , удовлетворяющие $\epsilon_s^{++} \subset L_s^c$ и $\epsilon_s^{--} \subset L_s^c$, где $L_s^c \in MIN$ есть лунка,

дополнительная к $L_i \in MAX$.

Для любого множества $\alpha \in \tau\{c_i\}$ и корнера ϵ_k положим $J_\alpha(\epsilon_k) = 1$, если $\epsilon_k \subset \alpha$ и 0 – в противном случае. Обозначим через $I_Q(X)$, $Q \in M$ обычную индикаторную функцию множества $X \subset M$ т.е. $I_Q(X) = 1$, если $Q \in X$ и $I_Q(X) = 0$ – в противном случае.

Доказательство следующей теоремы дано в препринте [4].

Теорема 1. Пусть c_i , $i = 1, \dots, n$ – конечная нормальная совокупность специальных окружностей на открытом листе Мёбиуса M . Для любой точки $Q \in M$, не принадлежащей какой-либо специальной окружности c_i , и для любого $A \in \tau\{c_i\}$ справедливо следующее разложение по Бюффоновым лункам:

$$2I_Q(A) = \sum_{MIN} [J_A(\epsilon_k^{+-}) + J_A(\epsilon_k^{-+})] I_Q(l_k) - \sum_{MAX} [J_A(\epsilon_s^{++}) + J_A(\epsilon_s^{--})] I_Q(L_s). \quad (2.3)$$

§3. ИНТЕРПРЕТАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Предположим, что $M = hG$ при некотором гомеоморфизме h . Для данного конечного множества точек $\{P_i\} \subset D$ (как и прежде, D содержит все прегеодезические $g \in G$), предыдущая Теорема 1 может быть применена к специальным окружностям $c_i = h[P_i]$. Наша цель состоит в переводе этого результата на язык прегеодезических.

Каждая ячейка C , образованная совокупностью c_i есть образ атома из $\tau\{P_i\}$ при гомеоморфизме h и наоборот. Следовательно, образ каждого множества из $\tau\{P_i\}$ есть множество из $\tau\{c_i\}$ и наоборот, причем два кольца являются изоморфными.

Назовем **иглами** прегеодезические отрезки с концами из $\{P_i\}$. Прегеодезическая, содержащая иглу, называется ее **носителем**. При гомеоморфизме h , каждому

носителю соответствует вершина на M , т.е. точка пересечения по крайней мере двух кривых c_i .

Игла называется *пустой*, если внутренность иглы не содержит точек из $\{P_i\}$. Пустые иглы мы обозначим через δ_k . При h , каждая минимальная Бюффонова лунка $l_k \in MIN$ есть образ Бюффонова множества $[\delta_k]$, и наоборот.

Игла называется *полной*, если внутренность ее дополнения на соответствующем носителе не содержит точек из $\{P_i\}$. Полные иглы обозначим через σ_s . Каждая максимальная Бюффонова лунка $L_s \in MAX$ есть образ Бюффонова множества $[\sigma_s]$, и наоборот.

Заметим, что, если множество $\{P_i\}$ не содержит троек точек, лежащих на геодезической, то тогда всякая игла является одновременно и пустой и полной.

Обозначим :

$EMPT$ = множество всех пустых игл δ_k (соответствует MIN) и

$FULL$ = множество всех полных игл σ_s (соответствует MAX).

Корнеры ϵ_k^{+-} , ϵ_k^{-+} были определены на M как подмножества минимальной лунки $l_k \in MIN$. Пусть $l_k \in MIN$ есть образ Бюффонова множества $[\delta_k]$, $\delta_k \in EMPT$.

Определим

$$\tau_k^{+-} = h^{-1}\epsilon_k^{+-} \subset [\delta_k], \quad \tau_k^{-+} = h^{-1}\epsilon_k^{-+} \subset [\delta_k].$$

Аналогично, пусть $L_s \in MAX$ есть образ иглы $\sigma_s \in FULL$. Определим

$$\tau_s^{++} = h^{-1}\epsilon_s^{++} \subset [\sigma_s], \quad \tau_s^{--} = h^{-1}\epsilon_s^{--} \subset [\sigma_s].$$

Линии из множества τ_k^{+-} , τ_k^{-+} , τ_s^{++} , τ_s^{--} , могут быть получены из g_0 = носителя δ_k или σ_s при достаточно малых "смещениях", как показано на Рис. 1.

Для данных $B \in r\{P_i\}$, через $J_B(\tau_k^{+-})$, $J_B(\tau_k^{-+})$, $J_B(\tau_s^{++})$ и $J_B(\tau_s^{--})$ обозначим значения индикатора $I_B(g)$ на линиях из соответствующего множества

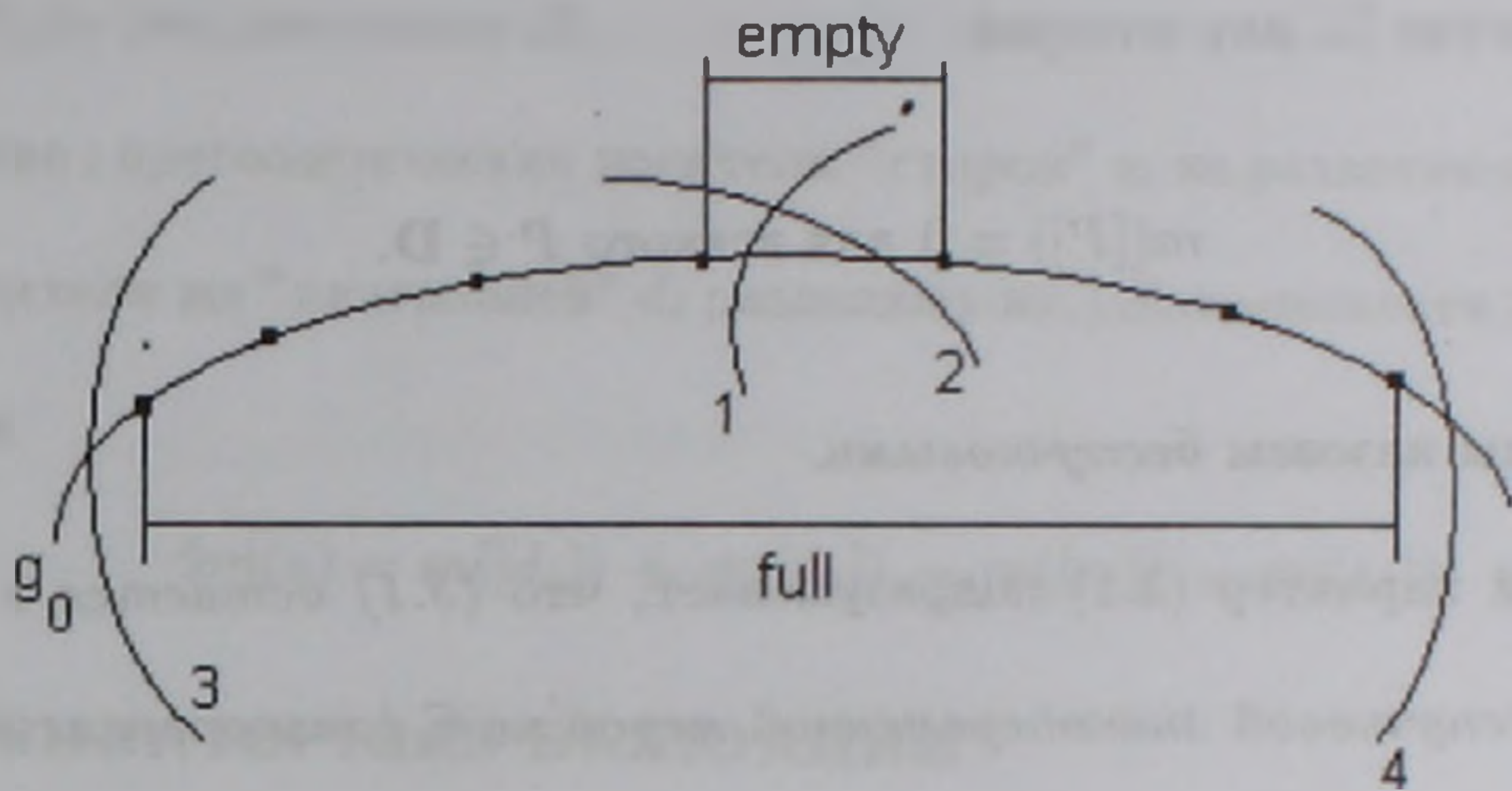


Рис. 1. 1 и 2 – прегеодезические из ϵ^{+-} и ϵ^{-+} ; 3 и 4 – прегеодезические из τ^{++} и τ^{--} .

τ . Например,

$$J_B(\tau_s^{+-}) = I_B(g) \text{ для } g \in \tau_s^{+-}.$$

У нас все готово для перевода Теоремы 1 на язык прегеодезических. Однако, сначала проинтегрируем (2.3) относительно локально конечной меры на $\mathbb{M}$. Это возможно сделать, если значение меры на каждой s_i есть нуль. Образ такой меры при h^{-1} является локально конечной мерой m on $\mathbb{G}$, для которой $m([P_i]) = 0$ при $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Пусть $\{P_i\} \subset D$ есть конечное множество точек; а m – локально конечная мера на $\mathbb{G}$, для которой $m([P_i]) = 0$ для любых P_i из данного множества. Для любого $B \in \tau\{P_i\}$ справедливо следующее разложение по значениям m на Бюффовы множества :

$$2m(B) = \sum_{EMPT} x_s(B) m([\delta_s]) - \sum_{FULL} y_s(B) m([\sigma_s]), \tag{3.1}$$

где коэффициенты $x_s(B)$ и $y_s(B)$ не зависят от меры m , причем

$$x_s(B) = J_B(\tau_s^{+-}) + J_B(\tau_s^{-+}), \quad y_s(B) = J_B(\tau_s^{++}) + J_B(\tau_s^{--}). \tag{3.2}$$

Замечание. Разложение (3.1) справедливо для каждой локально конечной меры m в пространстве $\mathbb{G}$, для которой

$$m([P]) = 0 \text{ для всякого } P \in D. \quad (3.3)$$

Такие меры мы назовем *беспучковыми*.

Линейный характер (3.1) подразумевает, что (3.1) остается в силе, если m выбрана *беспучковой знакопеременной мерой* на $\mathbb{G}$ (знакопеременная мера = разность двух локально конечных мер). Знакопеременная мера на $\mathbb{G}$ называется *беспучковой*, если она является разностью двух беспучковых мер на $\mathbb{G}$.

Примеры (см. §1, где даны названия множеств) Для *Бюффенова множества* $B = [P_1, P_2]$ обе совокупности *FULL* и *EMPT* состоят только из одной иглы, то есть $\delta_1 = \sigma_1 = P_1, P_2$, и Рис.1 подтверждает, что $x_1(B) = 2$ и $y_1(B) = 0$. Таким образом, для Бюффенова множества (3.1) сводится к тождеству $2m(B) = 2m([P_1, P_2])$.

Для *множества Паша* $\mathcal{T}$ обе совокупности *FULL* и *EMPT* состоят из трех игл : $\delta_1 = \sigma_1 = P_1, P_2$, $\delta_2 = \sigma_2 = P_1, P_3$ и $\delta_3 = \sigma_3 = P_2, P_3$. Имеем

$$x_1(B) = x_2(B) = 1, \quad y_1(B) = y_2(B) = 0, \quad x_3(B) = 0, \quad y_3(B) = 1.$$

Таким образом, для множеств Паша $\mathcal{T}$ (3.1) сводится к

$$2m(\mathcal{T}) = m([P_1, P_2]) + m([P_1, P_3]) - m([P_2, P_3]). \quad (3.4)$$

Для *множества Крофтона* $B = [a_1] \cap [a_2] = \kappa$ обе совокупности *FULL* и *EMPT* состоят из шести игл : $a_1, a_2, s_1, s_2, d_1, d_2$ где

s_1 и s_2 = две стороны D ,

D = минимальная прегеодезически выпуклая оболочка a_1, a_2 ,

d_1 и d_2 = две диагонали D .

(Объяснение : прегеодезические носители "сторон" s_i не разделяют внутренности a_1, a_2 ; носители же "диагоналей" d_i разделяют их.) Для множеств Крофтова (3.1) сводится к

$$2m(\kappa) = m([d_1]) + m([d_2]) - m([s_1]) - m([s_2]). \quad (3.5)$$

§4. КОМБИНАТОРНЫЕ ВАЛЮАЦИИ

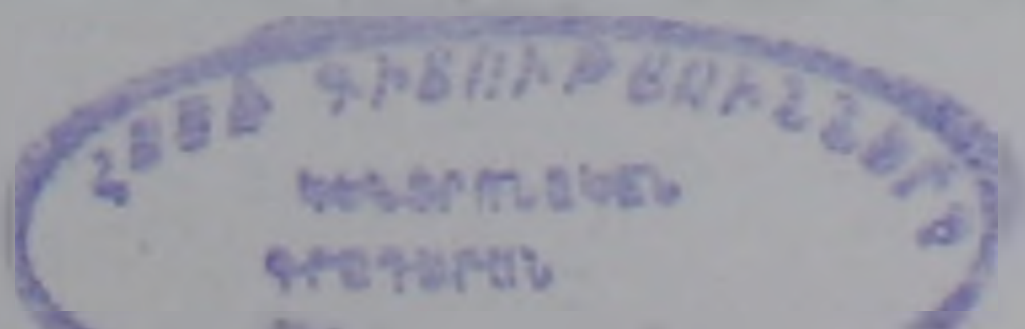
Аддитивные сегментные функции. Обозначим через S пространство прегеодезических сегментов $s \in S$. Предположим, что $F(s)$ есть сегментная функция, определенная на S , т.е. $F : S \rightarrow \mathbb{R}$. Запишем также $F(s) = F(P_1, P_2)$, где P_1, P_2 - концы $s \in S$. Функция $F(P_1, P_2)$ необходимо будет симметричной функцией на $D \times D$, т.е. $F(P_1, P_2) = F(P_2, P_1)$. Сегментная функция $F(s)$ называется непрерывной, если соответствующая $F(P_1, P_2)$ непрерывна в топологии $D \times D$. Непрерывная сегментная функция $F(s)$ называется аддитивной, если для любых $s_1, s_2 \in S$, лежащих на одной прегеодезической, имеющих один общий конец и внутренности которых не перекрываются, имеет место

$$F(s_1) + F(s_2) = F(s_1 \cup s_2). \quad (4.1)$$

То же самое условие можно выразить следующим образом : для любых точек P_1, P_2, P_3 , лежащих на прегеодезической, P_2 находится между P_1 и P_3 , выполняется

$$F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) = F(P_1, P_3). \quad (4.2)$$

Согласованные функционалы. Для заданной сегментной функции $F(s)$ заменим в (3.1) значение $m([\delta_s])$ и $m([\sigma_s])$ на $F(\delta_s)$ и $F(\sigma_s)$ соответственно. Таким



путем получим систему функционалов $\varphi(B; \{P_i\})$, каждый из которых определен на соответствующем кольце $\tau\{P_i\}$. По определению, для заданного $B \in \tau\{P_i\}$,

$$2\varphi(B; \{P_i\}) = \sum_{EMPT} x_s(B)F(\delta_s) - \sum_{FULL} y_s(B)F(\sigma_s), \quad (4.3)$$

где коэффициенты $x_s(B)$ и $y_s(B)$ определяются, как в (3.1).

Из Теоремы 2 следует, что, если $F(s)$ порождается некоторой беспучковой знакопеременной мерой m в пространстве $\mathbb{G}$ посредством $F(s) = m([s])$, то функционалы $\varphi(B; \{P_i\})$ согласованы на множестве U , в том смысле, что из эквивалентности множеств $B_1 \in \tau\{P_i\}$ и $B_2 \in \tau\{P'_i\}$ для $\{P_i\}, \{P'_i\} \subset \text{int}D$, следует $\varphi(B_1; \{P_i\}) = \varphi(B_2; \{P'_i\})$. В следующей теореме согласованность понимается в том же смысле.

Теорема 3. Пусть $F(s) = F(P_1, P_2)$ — непрерывная аддитивная сегментная функция. Тогда система функционалов $\varphi(B; \{P_i\})$, соответствующих F , согласованна на множестве U .

Доказательство : Используя аддитивность F , слегка преобразуем выражение (4.3). Для любой иглы $\sigma \in FULL$ имеем

$$F(\sigma) = \sum_{\delta \subset \sigma} F(\delta),$$

где суммирование берется по иглам $\delta \in EMPT$, принадлежащим носителю σ .

Подставляя это в (4.3), находим

$$2\varphi(B; \{P_i\}) = \sum_{\delta \in EMPT} a_\delta(B; \{P_i\}) F(\delta), \quad (4.4)$$

где, согласно обозначениям, использованным в (3.2),

$$a_\delta(B; \{P_i\}) = x_\delta(B; \{P_i\}) - y_\sigma(B; \{P_i\}),$$

$\sigma \in FULL$ имеет общий носитель с $\delta \in EMPT$.

Для множества $B \in U$ возьмем минимальное конечное множество $\{P_i\}$ такое что $B \in r\{P_i\}$. Пусть множество $\{Q_i\}$ получено путем добавления дополнительных точек к $\{P_i\}$, т.е. $\{P_i\} \subset \{Q_i\}$. Тогда необходимо получаем $B \in r\{Q_i\}$. Достаточно показать, что применение (4.4) для вычисления $\varphi(B; \{P_i\})$ и $\varphi(B; \{Q_i\})$ дает тот же результат. Для $\delta \subset \{Q_i\}$ имеются три возможности :

- а) прегеодезическая, содержащая иглу $\delta \in \{Q_i\}$, не содержит точек из $\{P_i\}$.
- б) прегеодезическая, содержащая $\delta \in \{Q_i\}$, содержит ровно одну точку из $\{P_i\}$;
- в) другие случаи.

В случае а), все четыре смещенные прегеодезические на Рис. 1 производят одинаковое разделение $\{P_i\}$, откуда следует

$$a_\delta(B; \{Q_i\}) = 0. \quad (4.5)$$

В случае б), смещенные прегеодезические на Рис. 1, производят одинаковое разделение $\{P_i\}$ попарно, и индикаторы внутри пары входят с разными знаками, следовательно, снова получаем (4.5).

Пусть кривая g – прегеодезическая, содержащая по крайней мере две точки из $\{P_i\}$. Достаточно показать, что

$$\sum_{\delta \subset g \cap \{Q_i\}} a_\delta(B; \{Q_i\}) F(\delta) = \sum_{\delta \subset g \cap \{P_i\}} a_\delta(B; \{P_i\}) F(\delta). \quad (4.6)$$

Теперь все сегменты лежат на одной прегеодезической g , и мы можем воспользоваться аддитивностью F . Так доказательство (4.6) сводится к простой проверке.

Комбинаторные валюации. Пусть $F(z)$ – аддитивная непрерывная сегментная функция. Определим отображение $V_F: U^* \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Для

$A \in U^*$ найдется точечное множество $\{P_i\} \subset D$ такое, что $B \in \tau\{P_i\}$ и $B^* = A$.

Тогда положим

$$V_F(A) = 2 \varphi(B, \{P_i\}).$$

Теорема 3 обеспечивает корректность этого определения.

Лемма 2. *Отображение V_F аддитивно на U^* , т.е. для $A_1, A_2 \in U^*$, для которых*

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, имеем

$$V_F(A_1) + V_F(A_2) = V_F(A_1 \cup A_2).$$

Доказательство : Найдутся множества $\{P_i\}$ и $B_1, B_2 \in \tau\{P_i\}$ такие, что $A_1 = B_1^*$ и $A_2 = B_2^*$. Теперь утверждение следует из аддитивности $\varphi(B; \{P_i\})$ на $\tau\{P_i\}$, которая в свою очередь следует из аддитивности функций J_B в (3.2).

Лемма 2 утверждает, что V_F есть *валюация* на кольце U^* . Назовем V_F *комбинаторной валюацией* на U^* , отвечающей функции F .

Замечание. Пусть V – любая функция, отображающая кольцо U^* на $\mathbb{R}$. Для заданного $A \in U^*$ и любого $B \in A$ (A есть класс эквивалентности) положим $V(B) = V(A)$. Таким образом, мы определяем V на U . Это позволяет в дальнейшем опускать звездочку. Однако, рассматриваемым кольцом остается U^* .

Следующий принцип верен для общих валюаций на кольце U^* ; он приводит к нижеследующей Теореме 4'. Для всякой валюации V на U^* символ *знакопеременной меры* m в (3.1) можно заменить на V :

$$2V(B) = \sum_{EMPT} x_s(B) V([\delta_s]) - \sum_{FULL} y_s(B) V([\sigma_s]), \quad (4.7)$$

Доказательство : Предполагая, что множество $B \in \tau\{P_i\}$ для некоторого множества $\{P_i\}$, построим знакопеременную меру

$$m_0 = \sum V(B_s) M_s,$$

где суммирование берется по всем атомам B_i кольца $r\{P_i\}$, в то время как каждая M_i есть дельта-мера, сконцентрированная на некоторой $g_i \in \text{int} B_i$. Далее, применим разложение (3.1) к мере $m_0(B)$. Разложение (4.7) следует из аддитивности V .

Теорема 4. Среди валюаций V на U^* , таких, что сегментная функция $V([P_1, P_2])$ непрерывна на $D \times D$ имеются только комбинаторные валюации, т.е. всегда $V = V_F$, где

$$F(P_1, P_2) = V([P_1, P_2]).$$

На множествах Паша и Крофтона выражения для V_F представляются в следующем виде. Для множества Паша (см. (3.4)) имеем

$$V_F(T) = F(P_1, P_2) + F(P_1, P_3) - F(P_2, P_3). \quad (4.8)$$

Для множества Крофтона (см. (3.5)) имеем

$$V_F(\kappa) = F(d_1) + F(d_2) - F(s_1) - F(s_2). \quad (4.9)$$

Следующее утверждение полезно проверить для дальнейшего использования в

§7. Пусть

$\kappa = [a_1] \cap [a_2]$ = множество Крофта, как было дано выше,

D = прегеодезическая выпуклая оболочка a_1, a_2 ,

P_1, P_2 - две точки из D , такие что

g_0 = прегеодезическая, содержащая обе точки P_1, P_2 , принадлежит κ .

Для любой аддитивной и непрерывной функции F

$$\lim V_F(\kappa \cap [P_1, P_2]) = 0 \quad (4.10)$$

если каждый из сегментов a_1, a_2 сжимается до точки на g_0 .

Результат (4.10) очевиден, когда V_F является беспучковой знакопеременной мерой на $\mathbb{G}$. Без этого допущения, доказательство выражения (4.10) требует детального рассмотрения разрывных коэффициентов x , и y , в (4.3).

§5. ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Этот параграф трактует соотношение между неотрицательными мерами на пространстве $\mathbb{G}$ прегеодезических кривых, валюациями на U и псевдометриками на D . В дальнейшем, звездочка над U , а также над множествами из U не будет ставиться (см. Замечание в §4). Согласно тому же замечанию, валюации, которые мы рассматриваем, определены на U .

Одним из основных свойств U является то, что минимальное сигма-кольцо подмножеств из $\mathbb{G}$, содержащее U , есть класс Борелевых множеств из $\mathbb{G}$. Таким образом, имеет смысл поставить задачу продолжения валюаций из U до Борелева класса на $\mathbb{G}$.

Вспомним, что непрерывная, симметричная функция $F(P_1, P_2)$, определенная на D , называется псевдометрикой, если $F \geq 0$ и для любой тройки $P_1, P_2, P_3 \in D$ имеем неравенство треугольника

$$F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) - F(P_1, P_3) \geq 0. \quad (5.1)$$

Теорема 5. Для любой беспучковой неотрицательной меры m , определенной на $\mathbb{G}$, функция

$$F(P_1, P_2) = m([s]) \text{ где } P_1, P_2 \text{ есть концы } s, \quad (5.2)$$

является непрерывной псевдометрикой, аддитивной вдоль прегеодезических.

Доказательство : $F \geq 0$, поскольку m предполагается неотрицательной. Для любого множества Паша $\mathcal{T}$, $m(\mathcal{T}) \geq 0$. Согласно (3.4) это в точности есть неравенство треугольника (5.1). Аддитивность $F(P_1, P_2)$ вдоль прегеодезических следует из аксиомы 2) в определении прегеодезических, утверждающей, что пара кривых из $\mathbb{G}$ может иметь самое большее одну точку пересечения. Это вместе с предположением о беспучковости меры m позволяет рассматривать множества $[P_1, P_2]$ и $[P_2, P_3]$ как непересекающиеся. Доказательство завершено.

Теорема 6. Пусть $F(P_1, P_2) = F(s)$ есть непрерывная псевдометрика на D , аддитивная вдоль прегеодезических $g \in \mathbb{G}$. Тогда комбинаторная валюация на V_F продолжается до неотрицательной беспучковой меры m_F на $\mathbb{G}$, в частности, для всякого $A \in \mathcal{U}$

$$m_F(A) = V_F(A). \quad (5.3)$$

Доказательство : Разобьем доказательство на четыре пункта I) – IV).

I) Поскольку F является псевдометрикой, для множества Паша $\mathcal{T}$ имеем, согласно (3.4) $V_F(\mathcal{T}) \geq 0$. Рассмотрим модель многообразия $M_0 = h\mathbb{G}$, описанную в §2. Используя триангуляцию кривыми $h[P]$, каждую ячейку на M_0 можно представить в виде конечного объединения относительно компактных треугольников с непересекающимися внутренностями. Такие треугольники необходимо будут h -образами множеств Паша. Следовательно, всякое множество $B \in \mathcal{U}$ может быть представлено как конечное объединение множеств Паша. Этого достаточно, чтобы заключить, что рассматриваемая комбинаторная валюация V_F неотрицательна на $\mathcal{U}$.

II) Пусть s – прегеодезический сегмент. Так как $V_F \geq 0$, для любого $B \in \mathcal{U}$

$$V_F([s] \cap B) \leq V_F([s] \cap B) + V_F([s] \cap B^c) = V_F([s]) = 2F(s),$$

(B^c обозначает дополнение B). Следовательно, для любой последовательности сегментов s_n для которых $\lim F(s_n) = 0$ (скажем, все s_n лежат на одной прегеодезической g и сходятся при $n \rightarrow \infty$ к точке $P \in g$) и для произвольной последовательности $B_n \subset U$ имеем

$$\lim V_F([s_n] \cap B_n) = 0. \quad (5.4)$$

III) Впишем " g -многоугольник" D_1 в D , помещая "вершины" на ∂D и последовательно соединяя их прегеодезическими $g_i \in \mathbb{G}$, т.е. "сторонами" D_1 . Внутренности множеств типа Крофтона $[g_i] \cap [g_j]$ не будут пересекаться и множество $[D_1]$ g -кривых, пересекающих D_1 , будет эквивалентно объединению $[D_1] = \cup_{i < j} ([g_i] \cap [g_j])$.

Зафиксируем пару $i \neq j$ и рассмотрим множества $s_1 \times s_2$, где $s_1 \in g_i$ и $s_2 \in g_j$ являются сегментами. Этот класс множеств становится полукольцом, если предположим, что сегменты s_1, s_2 могут быть открытыми, замкнутыми или полуоткрытыми (используем стандартную терминологию теории меры). Это полукольцо содержит компактный класс, который получим, выбирая оба прегеодезических отрезка s_1, s_2 компактными (т.е. замкнутыми). На этом полукольце определим функцию W , полагая

$$W(s_1 \times s_2) = V_F([s_1] \cap [s_2] \cap A), \quad A \in U, \quad A \subset [D_1].$$

Согласно свойству (5.4), значение W на любом элементе полукольца может быть аппроксимировано значениями W на элементах упомянутого компактного класса. Тогда стандартная теорема из теории меры обеспечивает существование единственной меры на множестве $g_i \times g_j$, которая совпадает с W на полукольце. Имеется взаимно-однозначное отображение, при котором каждой (l_1, l_2) , $l_1 \in g_i$,

$l_2 \in g_j$ ставится в соответствие прегеодезическая g , проходящая через l_1 и l_2 .

Соответствующую меру образа обозначим через $m_{i,j,A}$: По построению, $m_{i,j,A}$ является мерой на множестве $[g_i] \cap [g_j]$, но, в действительности, она сосредоточена на A , как следует из

$$V_F([s_1] \cap [s_2] \cap A) = 0 \text{ если } [s_1] \cap [s_2] \cap A = \emptyset.$$

Для $A = [g_i] \cap [g_j]$ меру $m_{i,j,A}$ обозначим просто через $m_{i,j}$. Если $[s_1] \cap [s_2] \subset A$, то тогда

$$V_F([s_1] \cap [s_2] \cap A) = V_F([s_1] \cap [s_2]) = V_F([s_1] \cap [s_2] \cap [g_i] \cap [g_j])$$

означающее, что $m_{i,j,A}$ — сужение меры $m_{i,j}$ на множестве A . Отсюда следует, что значение $m_{i,j}$ на A может быть представлено в виде

$$m_{i,j}(A) = m_{i,j,A}([g_i] \cap [g_j])$$

Сумма

$$m_1 = \sum_{i < j} m_{i,j}$$

есть мера на $[D_1]$ (пучки прегеодезических, проходящих через вершины D_1 , суть множества меры нуль). Суммируя предыдущий результат и используя аддитивность V_F , получаем

$$m_1(A) = \sum_{i < j} m_{i,j}(A) = \sum_{i < j} V_F([g_i] \cap [g_j] \cap A) = V_F(\cup_{i,j} ([g_i] \cap [g_j]) \cap A) = V_F(A).$$

Подчеркнем, что результат

$$m_1(A) = V_F(A) \tag{5.5}$$

имеет место для $A \in U$ с единственным ограничением $A \subset [D_1]$.

IV) Путем добавления новых вершин на ∂D , строим последовательность g -выпуклых многоугольников $D_2, D_3, \dots$ таких, что $[D_k]$ монотонно сходится к $\mathbb{G}$. Повторяя построение в III), для D_k получаем последовательность мер m_k , для которых (сравни с (5.5)) $m_k(A) = V_F(A)$ справедливо для $A \in U$ с единственным ограничением $A \subset [D_k]$. Предельную меру для последовательности m_k обозначим через m_F . Последняя определена на $\mathbb{G}$ и для нее (5.3) остается в силе для каждого $A \in U$, без дополнительных ограничений. Теорема 6 полностью доказана.

Гильбертовы псевдометрики для $\mathbb{G}$. Пусть $F(P_1, P_2)$ – непрерывная псевдометрика на D , аддитивная вдоль прегеодезических из $\mathbb{G}$, а мера m_F – как в Теореме 6. Для кривой $L \subset D$ определим ее длину $|L|_F$, полагая

$$|L|_F = \int N_L(g) m_F(dg) \quad (5.6)$$

где $N_L(g)$ есть число точек, в которых прегеодезическая g пересекает кривую L . Назовем псевдометрику $F(P_1, P_2)$ Гильбертовой для $\mathbb{G}$, если для всякого отрезка $z \in S$ и всякого гладкого пути $L \subset D$, соединяющего концы P_1, P_2 отрезка z , выполняется

$$|L|_F \geq |z|_F. \quad (5.7)$$

Следствие 1. Любая непрерывная псевдометрика, аддитивная вдоль прегеодезической из $\mathbb{G}$, является Гильбертовой для семейства $\mathbb{G}$.

Доказательство : Через $L \cup z$ обозначим замкнутый контур, состоящий из L и z . Пусть, как всегда,

$$I_{[z]}(g) = 1 \text{ если } g \text{ пересекает } z, 0 - \text{ в противном случае.}$$

Согласно конструкции замкнутого контура, $I_{[z]}(g) = 1$ влечет $N_{L \cup z}(g) \geq 2$,

следовательно,

$$\int_{\mathbb{G}} [N_{L \cup s}(g) - 2 I_{[s]}(g)] m_F(dg) \geq 0 \quad (5.8)$$

(интегрирование относительно меры m). Очевидно, что (5.6) сводится к

$$|L \cup s|_F - 2|s|_F \geq 0.$$

Поскольку $|L \cup s|_F = |L|_F + |s|_F$, то отсюда следует (5.7).

Следствие 2. Функция $F(P_1, P_2)$, непрерывная и симметричная на $D \times D$ и аддитивная вдоль прегеодезических из $\mathbb{G}$, является Гильбертовой псевдометрикой для семейства $\mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда комбинаторная валюация V_F продолжается до неотрицательной беспучковой меры m на $\mathbb{G}$.

Доказательство : Если $F(P_1, P_2)$ есть Гильбертова псевдометрика для $\mathbb{G}$, то тогда условие, что V_F – неотрицательная беспучковая мера на $\mathbb{G}$ есть просто утверждение Теоремы 5. Докажем обратное : из неотрицательности V_F на треугольниках Паша следует, что $F(P_1, P_2)$ является псевдометрикой. Тогда применима Теорема 6, откуда следует (5.7).

§6. ОСНОВНАЯ МЕРА ДЛИНЫ И ФЛАГОВЫЕ ПЛОТНОСТИ

В этом параграфе мы представим некоторые понятия (основная мера, задающая длину (мера длины), понятие классической среды, флаговая плотность, и т.д.), используемые в получении локальных условий в задаче о продолжении валюаций, определенных на U , до знакопеременных мер в $\mathbb{G}$. Заметим, что неравенство треугольника, используемое в Теореме 6, не является локальным условием.

Основная мера длины. Мы предполагаем существование меры длины dl на каждой прегеодезической $g \in \mathbb{G}$, т.е. что длина $|s|$ каждого отрезка $s \in S$ может

быть вычислена как интеграл вдоль s

$$|s| = \int_s dl. \quad (6.1)$$

Эти меры подчиняются условию непрерывности : функция $F(P_1, P_2) = |s|$, где $P_1, P_2 \in D$ есть концы s , должна быть непрерывной (см. §4).

Если D является поверхностью в трехмерном евклидовом пространстве, dl может быть мерой длины индуцированной евклидовой длиной в трехмерном евклидовом пространстве. Тройка $D, \mathbb{G}, dl$ называется *средой*.

Окружность направлений на плоскости, касательной к D в точке $P \in D$, обозначим через $T(P)$. Направление ϕ в $P \in D$ есть просто точка $\phi \in T(P)$. Предположим, мы имеем функцию $G(P)$, $P \in D$, которая может зависеть также и от других переменных. Ее производную в направлении $\phi \in T(P)$ определим как

$$\frac{\partial G(P)}{\partial_\phi P} = \lim [G(P^*) - G(P)] |P^*, P|^{-1}, \quad (6.2)$$

предполагая, что P^* меняется на прегеодезической, содержащей точку P и имеющей направление ϕ , и что предел вычисляется как только P^* приближается к P .

Иногда мы будем использовать символ $\frac{\partial G}{\partial_g P}$, определенный для ориентированной версии $g \in [P]$, означающий

$$\frac{\partial G(P)}{\partial_g P} = \frac{\partial G(P)}{\partial_\phi P},$$

где ϕ есть направление ориентированной прегеодезической g в точке $P \in g$.

Флагом называется пара $f = (P, \phi)$, где точка $P \in D$, а направление $\phi \in T(P)$. В другом обозначении, $f = (P, g)$, где кривая g есть ориентированная прегеодезическая $g \in [P]$, направление которой в точке P есть ϕ . Функции

$\rho(f) = \rho(P, \phi) = \rho(P, g)$, определенные на пространстве флагов, назовем *флаговыми функциями*. Скажем, что флаговая функция $\rho(f)$ симметрична, если выполняется $\rho(P, \phi) = \rho(P, \phi + \pi)$. Флаговые функции естественно возникают как производные от аддитивных функций, определенных на пространстве S : для заданной аддитивной сегментной функции $F(s) = F(P_1, P_2)$, производная

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_g P_2} = \rho(P_2, g), \quad (6.3)$$

где g обозначает прегеодезическую, проходящую через P_1, P_2 , ориентированную от P_1 к P_2 , не зависит от положения P_1 на g , за исключением перемены знака в $P_1 = P_2$. Сегментная функция $F(s) = F(P_1, P_2)$ обладает *флаговой плотностью* $\rho(f) = \rho(P, g)$, если для любых отрезков $s \in S$

$$F(s) = \int_s \rho(P, g) dl, \quad (6.4)$$

где $g \in \mathbb{G}$ есть прегеодезическая, содержащая s , и интегрирование производится по $P \in s$ относительно стандартной меры длины dl . Итак, по определению, флаговые плотности являются *симметричными флаговыми функциями*. Если $\rho(f)$ в (6.3) непрерывна, то тогда выполняется (6.4).

Четвертая проблема Гильберта для флаговых плотностей. Для заданной флаговой плотности $\rho(P, \phi)$, длина кривой $L \subset D$ равняется

$$|L|_\rho = \int_L \rho(P, \phi) dl,$$

где интегрирование производится вдоль L , в каждой точке $P \in L$ направление ϕ выбирается совпадающим с направлением, касательным к L в P . Соответствующая метрика или псевдометрика есть

$$F_\rho(P_1, P_2) = \min |L|_\rho,$$

где минимум берется по всем путям L соединяющим точки P_1, P_2 . Если кратчайшие пути суть прегеодезические отрезки, то тогда

$$F_p(P_1, P_2) = |s|_p = \int_s \rho(P, \phi) dl, \quad (6.5)$$

где s – прегеодезический отрезок, соединяющий P_1 и P_2 .

Для заданной среды, Четвертая проблема Гильберта ставит задачу описания флаговых плотностей $\rho(P, \phi)$, для которых сохраняется минимальное свойство (6.5). В соответствии с §5, флаговую плотность $\rho(P, \phi)$, обладающую свойством (6.5), назовем *Гильбертовой* для заданного семейства $\mathbb{G}$.

Параметризация по l_1, l_2 на множествах Крофтона. Для заданного множества Крофтона $\kappa = [a_1] \cap [a_2]$, любую прегеодезическую $g \in \kappa$ можно описать двумя параметрами l_1, l_2 :

l_i – одномерная координата на a_i точки $g \cap a_i$, $i = 1, 2$.

Тогда $dl_1 dl_2$ определяет меру на множестве κ , где dl_i обозначает основную меру длины на a_i . Выбор положительного направления на ∂D , где

D – минимальная прегеодезически выпуклая оболочка a_1, a_2 ,

индуцирует ориентацию обоих отрезков a_1 и a_2 , что необходимо при рассмотрении производных вдоль этих отрезков.

Пусть $F(s) = F(P_1, P_2)$ – непрерывная аддитивная функция, определенная на S . Определим $F_\kappa(l_1, l_2)$ – сужение $F(P_1, P_2)$ на $a_1 \times a_2$, предполагая, что $l_1 \in a_1, l_2 \in a_2$ задают точки P_1, P_2 .

Если функция $F_\kappa(l_1, l_2)$ дважды непрерывно дифференцируема, обозначим

$$f_\kappa(l_1, l_2) = - \frac{\partial^2 F_\kappa(l_1, l_2)}{\partial l_1 \partial l_2}. \quad (6.6)$$

Через m_κ обозначим знакопеременную меру на κ , которая соответствует $f_\kappa(l_1, l_2) dl_1 dl_2$. При повторном применении формулы Ньютона-Лейбница, получим результат, похожий на (3.5) :

$$m_\kappa(\kappa) = \int_\kappa f_\kappa(l_1, l_2) dl_1 dl_2 = F([d_1]) + F([d_2]) - F([s_1]) - F([s_2]) = V_F(\kappa). \quad (6.7)$$

Вообще говоря, (6.7) не может быть продолжена до

$$m_\kappa([A]) = V_F(A) \text{ для всякого } A \subset \kappa, A \in U, \quad (6.8)$$

хотя (6.8) остается в силе для любого множества Крофтона $A = [a_3] \cap [a_4]$, при условии $a_3 \subset a_1$ и $a_4 \subset a_2$.

Однако, (6.8) справедливо для подмножеств любого множества Крофтона $\kappa \subset G$, если существует знакопеременная мера m на G , такая что

$$F(s) = m([s]), \text{ в таком случае на множестве } \kappa, \quad m_\kappa = m.$$

Доказательство следует из утверждения единственности : если для двух мер m_1, m_2 , определенных на κ , имеем $m_1(A) = m_2(A)$ для любого крофтоновского $A \subset \kappa$, то тогда необходимо выполняется $m_1 = m_2$. Мы рассмотрим связанные с этим вопросы в §7.

Параметризация по l, ψ . Для заданной прегеодезической $g_0 \in G$, прегеодезические из $[g_0]$ могут быть описаны координатами l, ψ , где

l = одномерная координата на g_0 точки $g \cap g_0$,

ψ = направление $g \in [g_0]$ в точке $g \cap g_0$.

Тогда $dl d\psi$ определяет меру на множестве $[g_0]$, где $d\psi$ обозначает обычную инвариантную меру вращения на $T(l) = T(g \cap g_0)$.

Классическая среда. Рассмотрим среду, где прегеодезические окружности на D достаточно гладкие. Обозначим

$s(P, r)$ = прегеодезическая окружность с центром в $P \in D$ и прегеодезическим радиусом r .

Точка $Q \in D$ принадлежит $s(P, r)$ тогда и только тогда, когда

$$|P, Q| = \int_s dl = r, \quad s = \text{прегеодезический отрезок с концами } P \text{ и } Q.$$

Будем пользоваться полярными координатами прегеодезической, связанными с центром $P \in D$: каждую точку $Q \in D$ представим в виде $Q = (\alpha, r)$, где $\alpha \in T(P)$ — направление отрезка $s = PQ$ в точке P и $|P, Q| = r$.

Скажем, что среда удовлетворяет УЕНН (= Условие Единственности Нормального Направления) если направление $n \in T(Q)$, касательное к $s(P, r)$ в некоторой точке $Q \in s(P, r)$, не зависит от выбора точки $P \in g$, где g суть прегеодезическая, содержащая P и Q . Таким образом, при выполнении УЕНН, мы говорим о направлении n , нормальном к $g \in \mathbb{G}$ в любой точке $Q \in g$. При выполнении УЕНН, рассмотрим важную функцию $H(P_1, P_2)$, также представимую в виде $H(P_1, P_2) = H(P_1, \alpha, r)$, где α, r — полярные координаты P_2 относительно центра P_1 . Функция $H(P, \alpha, r)$ определяется как Якобиан в соотношении

$$dl = H(P, \alpha, r) d\alpha \tag{6.9}$$

между длиной меры dl на $s(P, r)$ и обычной угловой мерой $d\alpha$ на $T(P)$.

Определение. Среда $D, \mathbb{G}, dl$ называется классической, если 1) она обладает свойством УЕНН, 2) $H(P_1, P_2)$ симметрична т.е. $H(P_1, P_2) = H(P_2, P_1)$, и 3) внутри малых окружностей $s(P, r)$ (т.е. при $r \rightarrow 0$) геометрия среды асимптотически евклидова. Конкретнее, из пункта 3) мы используем только следующие

три свойства, хорошо известные в дифференциальной геометрии на плоскостях :

1) угол между g и направлением n нормальным к g в $P \in g$ есть $\frac{\pi}{2}$, для любых $g \in \mathbb{G}$ и $P \in g$;

2) для бесконечно малых треугольников применимы формулы евклидовой тригонометрии;

3) при $r \rightarrow 0$, для любого $P \in D$ и любого $\alpha \in T(P)$, $H(P, r, \alpha) = r + o(r^2)$.

Теорема 7. Для любой классической среды $D, \mathbb{G}, dl$ сегментная функция

$|s| = \int dl$ *является Гильбертовой псевдометрикой. На каждом множестве*

Крофтона $\kappa = [a_1] \cap [a_2]$, мера dg , соответствующая согласно Теореме 6 сегментной функции $|s|$, в параметризации l_1, l_2 представляется в виде

$$dg = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{H(P_1, P_2)} dl_1 dl_2,$$

где ψ_i = углы между g и a_i , $l_i \in a_i$, $i = 1, 2$,

g = прегеодезическая, содержащая $l_1 \in a_1$ и $l_2 \in a_2$.

На каждом Бюффоновом множестве, та же мера в параметризации l, ψ представляется в виде

$$dg = \sin \psi dl d\psi.$$

Доказательство : Рассмотрим две пары прегеодезических сегментов : s_1, s_2 , и s_3, s_4 . Предположим, что внутренность $[s_1] \cap [s_2] \cap [s_3] \cap [s_4]$ не пуста. Для любого $g \in [s_1] \cap [s_2] \cap [s_3] \cap [s_4]$ пусть $P_i = g \cap s_i$, ψ_i = угол пересечения g и s_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Кривая $g \in [s_1] \cap [s_2] \cap [s_3] \cap [s_4]$ может быть представлена посредством P_1, P_2 или P_3, P_4 . Найдем J в Якобиане

$$dl_1 dl_2 = J dl_3 dl_4, \quad (6.10)$$

где dl_i — мера длины на z_i . Согласно (6.9), соотношение между $d\psi_1 =$ угловой мерой на $T(P_1)$ и мерой длины dl_2 на z_2 представляется в виде

$$H(P_1, P_2) d\psi_1 = \sin \psi_2 dl_2. \quad (6.11)$$

(Согласно одной из аксиом классической среды, $\sin \psi_i dl_i$ есть длина проекции элементарного сегмента $dl_i \subset z_i$ содержащего P_i на направлении, нормальном к z_i .) Очевидно, что (6.11) влечет

$$dl_1 dl_2 = H(P_1, P_2) (\sin \psi_2)^{-1} dl_1 d\psi_1. \quad (6.12)$$

Заменяя индексы в (6.11), и подставляя, получаем

$$dl_1 dl_2 = H(P_1, P_2) (\sin \psi_2)^{-1} H^{-1}(P_1, P_3) \sin \psi_3 dl_1 dl_3.$$

После замены индексов $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$ и $3 \mapsto 4$ получаем

$$dl_1 dl_3 = H(P_3, P_1) (\sin \psi_1)^{-1} H^{-1}(P_3, P_4) \sin \psi_4 dl_3 dl_4.$$

Другая подстановка дает

$$\frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{H(P_1, P_2)} dl_1 dl_2 = \frac{H(P_3, P_1)}{H(P_3, P_2)} \frac{\sin \psi_3 \sin \psi_4}{H(P_3, P_4)} dl_3 dl_4.$$

Свойство симметрии $H(P_1, P_2)$ сводит это к (6.10) с конкретным J :

$$\frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{H(P_1, P_2)} dl_1 dl_2 = \frac{\sin \psi_3 \sin \psi_4}{H(P_3, P_4)} dl_3 dl_4. \quad (6.13)$$

Пусть D_k — возрастающая последовательность прегеодезических многоугольников, вписанных в D и стремящихся к D . Для заданной пары сторон z_i, z_j of D_k , на множестве типа Крофтона $[z_i] \cap [z_j] \subset \mathbb{G}$ определим меру как образ

$\frac{\sin \psi_i \sin \psi_j}{H(P_i, P_j)} dl_i dl_j$. Сделаем это для каждой пары сторон D_k и таким образом получим меру m_k на множестве прегеодезических хорд на D_k . Вычислим $m_k([s])$ для прегеодезического отрезка $s \subset D_k$. При суммировании по парам сторон D_k , получаем

$$\begin{aligned} m_k([s]) &= \sum_{i < j} m_k([s] \cap [s_i] \cap [s_j]) = \sum_{i < j} \int_{[s]} \frac{\sin \psi_i \sin \psi_j}{H(P_i, P_j)} dl_i dl_j = \\ &= \sum_i \int_{[s] \cap [s_i]} \frac{\sin \psi \sin \psi_i}{H(P, P_i)} dl dl_i. \end{aligned}$$

В последнем интеграле, ψ , P и dl относились к s , и для пар s, s_i мы использовали (6.13). Далее, используя (6.12) получаем

$$m_k([s]) = \sum_i \int_{[s] \cap [s_i]} \sin \psi dl d\psi = \int_s dl \int_0^\pi \sin \psi d\psi = 2|s|.$$

В пределе, когда $k \rightarrow \infty$, m_k стремится к мере m на $\mathbb{G}$, для которой $m([s]) = 2|s|$ для всякого $s \in S$. По Теореме 2, эти значения полностью определяют меру m на $\mathbb{G}$. Теперь, согласно Теореме 5, $|s|$ является псевдометрикой, и, по Следствию 1, $|s|$ есть гильбертова псевдометрика, а формулы (6.12) и (6.13) отождествляют меру m с мерой dg . Доказательство закончено.

§7. СТАБИЛЬНАЯ АДДИТИВНОСТЬ И ПОРОЖДЕНИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ МЕРЫ

Доказательство Теоремы 6 опиралось на неотрицательность валюации V_F ; последнее свойство следовало из предположения, что F – псевдометрика. Если F не является псевдометрикой, то невозможно продолжить V_F до неотрицательной меры на $\mathbb{G}$. Однако остается возможность продолжения V_F до знакопеременной меры на $\mathbb{G}$. В настоящем параграфе мы опишем класс сегментных функций $F(s)$, для которых V_F превращается в знакопеременную меру на $\mathbb{G}$, обладающую

непрерывной плотностью на множествах Крофтона относительно $dl_1 dl_2$. Вопрос неотрицательности продолжения рассматривается в заключительном параграфе.

Пусть a_1, a_2 — два отрезка из S , определяющих множество Крофтона $\kappa = [a_1] \cap [a_2]$. Каждому $g \in \kappa$ припишем направление, скажем, от a_1 к a_2 . Для точки P , фиксированной внутри $D =$ прегеодезическая выпуклая оболочка a_1, a_2 , определим множества

$$A_r = \{g \in \mathbb{G} : P \text{ лежит справа от } g\} \cap \kappa,$$

$$A_l = \{g \in \mathbb{G} : P \text{ лежит слева от } g\} \cap \kappa.$$

Отметим, что $A_r, A_l \in \mathcal{U}$. Пусть ∂D ориентирована так, что при движении вдоль ∂D в положительном направлении внутренность D остается слева.

Для данной гладкой аддитивной функции отрезков $F(s) = F(P_1, P_2)$, определенной на S , рассмотрим $f_\kappa(l_1, l_2)$ как в (6.6). Всякой паре $l_1 \in a_1, l_2 \in a_2$ соответствует треугольник l_1, P, l_2 и множество Паша

$$T(l_1, l_2) = \{g \in \mathbb{G} : g \text{ разделяет } P \text{ от } l_1, l_2\}.$$

Мы воспользуемся индикаторными функциями $I_{a_2}(l_1)$ и $I_{a_1}(l_2)$:

$I_{a_2}(l_1) = 1$, если прегеодезическая g , проходящая через l_1, P пересекает a_2 , 0 — в противном случае ; $I_{a_1}(l_2)$ определяется аналогично, а также производными

$$\frac{\partial}{\partial l_i} V_F(T(l_1, l_2)) = \frac{\partial}{\partial l_i} [F(l_1, P) + F(P, l_2) - F(l_1, l_2)], \quad i = 1, 2.$$

Предполагая, что $I_{a_2}(l_1) = 1$, обозначим $G(l_1) = \frac{\partial}{\partial l_1} V_F(T(l_1, l_2^*))$, где $l_2^* \in a_2$ определяется из условия, что l_1, P, l_2^* лежат на одной прегеодезической, $G(l_2)$ определяется аналогично для $I_{a_1}(l_2) = 1$.

Лемма 3. Пусть $F(s)$ — гладкая аддитивная функция на S . Тогда имеют место

следующие представления :

$$V_F(A_r) = \int_{A_r} f_{\kappa}(l_1, l_2) dl_1 dl_2 + \int_{a_1} I_{a_2}(l_1) G(l_1) dl_1, \quad (7.1)$$

$$V_F(A_l) = \int_{A_l} f_{\kappa}(l_1, l_2) dl_1 dl_2 + \int_{a_2} I_{a_1}(l_2) G(l_2) dl_2. \quad (7.2)$$

Доказательство : Разделим дугу a_1 на $n + 1$ дужек $a_1(i)$ одинаковой длины точками $l_1(1) < l_1(2) < \dots < l_1(n)$. Обозначим концы a_1 через $l_1(0) < l_1(n + 1)$.

Точки выхода из D g -кривой, проходящей через $l_1(i)$ и P , обозначим через $l_2(i)$.

Дужки $l_2(i), l_2(i + 1)$ на a_2 обозначим через $a_2(i)$. Сначала предположим, что

$a_2 = \bigcup_{i=1}^n a_2(i)$. Тогда для множества Крофтона $\kappa_{ij} = [a_1(i), a_2(j)]$ сохраняется

одна из трех возможностей :

- 1) κ_{ij} полностью принадлежит A_l или
- 2) κ_{ij} полностью лежит вне A_l или
- 3) κ_{ij} имеет непустое пересечение с A_l .

Согласно построению, в случае 3)

$$\{P \text{ находится слева от } g\} \cap \kappa_{ij} = T_i,$$

где T_i есть множество Паша

$$T_i = \{g \in \mathbb{G} : g \text{ разделяет } P \text{ от обеих точек } l_1(i + 1) \text{ и } l_2(i)\}.$$

Следовательно, A_l эквивалентна объединению $B_1 \cup B_2$ попарно-непересекающихся множеств :

$$B_1 = \bigcup \kappa_{ij} = \text{объединение множеств из 1), и } B_2 = \bigcup T_i.$$

Согласно конечной аддитивности V_F

$$V_F(A_l) = \sum_{1)} V_F(\kappa_{ij}) + \sum_i V_F(T_i). \quad (7.3)$$

Мы имеем асимптотические соотношения ($n \rightarrow \infty$)

$$V_F(\kappa_{ij}) \approx f(l_1(i), l_2(j)) |a_1(i)| |a_2(j)|, \quad V_F(T_i) \approx G(P, l_i) |a_i|.$$

Их подстановка в (7.3) преобразует первую сумму в Риманову сумму для первого интеграла в (7.2), а вторую сумму – в Риманову сумму второго интеграла в (7.2), где $I_{a_1}(l_2) \equiv 1$. Предположение о гладкости гарантирует, что обе Римановы суммы стремятся (при $n \rightarrow \infty$) к соответствующим интегралам в (7.2). Однако, левая сторона (7.3) не зависит от n . Это доказывает (7.2). Если концы a_2 отличны от $l_2(0), l_2(n+1)$, то тогда мы должны сузить область интегрирования во втором интеграле. Это делается введением индикаторной функции $I_{a_1}(l_2)$. Уравнение (7.1) доказывается аналогично, перестановкой ролей a_1 и a_2 . Доказательство завершено.

Определение. Аддитивная на S функция $F(s)$ называется *стабильно аддитивной*, если для любых $\phi \in T(P_i)$

$$\frac{\partial}{\partial \phi P_i} [F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) - F(P_1, P_3)] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.4)$$

как только тройка P_1, P_2, P_3 принадлежит одной прегеодезической $g \in \mathbb{G}$, причем P_2 лежит между P_1 и P_3 .

Подчеркнем, что условие стабильной аддитивности $F(s)$ существенно сильнее, чем просто аддитивность $F(s)$. Последнее условие означает только, что $F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) - F(P_1, P_3) = 0$ как только P_1, P_2, P_3 принадлежат одной $g \in \mathbb{G}$. Вообще говоря, дифференцировать последнее тождество невозможно, поскольку тройка со смещенными P_i может не находиться на прегеодезической.

Теорема 8. В классе гладких, аддитивных функций F , определенных на S , следующие два утверждения эквивалентны :

а) F стабильно аддитивна ;

б) V_F продолжима до знакопеременной меры на $\mathbb{G}$ обладающей плотностью относительно dq .

Доказательство : Пусть, как в лемме 3, a_1, a_2 – два сегмента из S определяющие множество Крофтона $\kappa = [a_1] \cap [a_2]$, и D – прегеодезическая выпуклая оболочка a_1, a_2 . Для всяких двух точек $P_1, P_2 \in \text{int} D$ вычисление $V_F([P_1, P_2] \cap \kappa)$ можно свести к суммированию формул Леммы 3. Разделим a_1 (или a_2) на непересекающиеся "малые" части b_i (или c_j). Каждое множество $[b_i] \cap [c_j] \cap [P_1, P_2]$ есть

1) либо пустое множество ;

2) либо множество Крофтона (if $[b_i, c_j] \subset [P_1, P_2]$) ;

3) либо делится на два множества такого типа, которые обсуждались в Лемме 3, для $P = P_1$ или $P = P_2$;

4) либо содержит прегеодезическую, проходящую через P_1, P_2 ; тогда обозначим $[b_i, c_j] = \theta$.

В силу конечной аддитивности V_F

$$V_F([P_1, P_2] \cap \kappa) = V_F(\theta \cap [P_1, P_2]) + \int_{[P_1, P_2] \cap \kappa} f_\kappa(l_1, l_2) dl_1 dl_2 - \int_\theta f_\kappa(l_1, l_2) dl_1 dl_2.$$

(Свойство а) предполагает, что в формулах Леммы 3, записанных для множеств типа 3) остаются только двойные интегралы.) Пусть теперь число дуг a_i возрастает до ∞ а максимальная длина a_i , стремится к нулю. Согласно (4.10)

$$\lim V_F(\theta \cap [P_1, P_2]) = 0.$$

Таким образом, получим

$$V_F([P_1, P_2] \cap \kappa) = \int_{[P_1, P_2] \cap \kappa} f_\kappa(l_1, l_2) dl_1 dl_2 = m_\kappa([P_1, P_2]). \quad (7.5)$$

Аналогичные результаты верны для трех других множеств Крофтона, связанных с сегментами a_1, a_2 , то есть для $[a_1] \cap [s_1]$, $[a_1] \cap [s_2]$ и $[s_1] \cap [s_2]$ (сегменты s_1, s_2 являются "сторонами" D , см. (3.5)). Их суммирование представляет $V_F([P_1, P_2]) = F([P_1, P_2])$ в виде интеграла по объединению произведений $a_1 \times a_2$, $a_1 \times s_1$, $a_1 \times s_2$ и $s_1 \times s_2$. Согласно §4, аналогичное интегральное представление действительно для любого $A \subset [D]$, $A \in U$. Это означает, что на множестве $[D]$ существует знакопеременная мера m_D такая, что $V_F(A) = m_D(A)$, справедливо для любого $A \subset [D]$, $A \in U$. Отсюда следует что знакопеременные меры m_D согласованы, т.е. каждая m_D есть сужение на $[D]$ некоторой знакопеременной меры m на $\mathbb{G}$. Таким образом а) влечет б).

Теперь покажем, что б) влечет а). Сжимая сегменты a_1, a_2 в разложении (4.9) для $V_F(\kappa)$ до точки, получаем, что знакопеременная мера V_F совпадает с m_κ как в (6.6). Следовательно, в обеих формулах Леммы 3, одномерные интегралы необходимо исчезнут. Поскольку в последних интегралах отрезки a_1, a_2 могут быть выбраны сколь угодно малыми, мы заключаем, что тождественно $G(l_i) = 0$. Очевидно, это есть (7.4) для $i = 1$ и $i = 3$.

Доказательство (7.4) для $i=2$: Из гладкости F следует, что знакопеременная мера $m = V_F$ имеет ограниченную плотность $f(g)$ относительно dg . Достаточно показать, что

$$\lim |P_2, P_2^*|^{-1} [F(P_1, P_2^*) + F(P_2^*, P_3) - F(P_1, P_3)] = 0, \quad (7.6)$$

предполагая, что $P_2^* \rightarrow P_2$, двигаясь вдоль прегеодезической. Соотношение в (7.6) может быть представлено в виде $|s|^{-1} m(\mathcal{T})$ где $\mathcal{T}$ есть треугольник Паша, соответствующий разделению P_2^* от P_1, P_3 , $s = |P_2, P_2^*|$. В силу Теоремы 7,

выполняется

$$m(\mathcal{T}) = \int_s dl \int_{[l] \cap \mathcal{T}} f(g) \sin \psi, \quad (7.7)$$

где $[l]$ – пучок прегеодезических, проходящих через $l \in s$, dl – основная мера длины на s . В (7.7) внутренний интеграл стремится к нулю в силу малости области интегрирования. Отсюда следует желаемое утверждение. Теорема полностью доказана.

§8. ЛОКАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

В этом параграфе условия стабильной аддитивности мы запишем в форме дифференциального тождества для флаговых плотностей, т.е. получим локальное необходимое условие порождения знакопеременной меры посредством валюации V_F . Как показано в примере в следующем параграфе, в определенных специальных средах это условие может оказаться достаточным.

Предположим что среда классическая, и, следовательно, при $r \rightarrow 0$

$$H(P, r, \alpha) = r + o(r^2) \text{ (нет члена } r^2 \text{)}. \quad (8.1)$$

Пусть сегментная функция $F(s) = F(P_1, P_2)$ порождается флаговой плотностью $\rho(f) = \rho(P, g)$ как в (6.4). Преобразуем уравнение (ср. (7.4))

$$\frac{\partial}{\partial_n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = \frac{\partial}{\partial_n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2)] = 0, \quad (8.2)$$

где точки P_1, P, P_2 принадлежат $g \in \mathbb{G}$, точка P лежит между P_1 и P_2 . Через $n \in T(P)$ обозначим направление нормальное к g в точке P .

В (8.2), переменные P_1 и P_2 разделяются, что означает, в частности, что $\frac{\partial}{\partial_n P} F(P_1, P)$ не зависит от положения P_1 на g , коль скоро P остается между P_1 и P_2 , т.е.

$$\frac{\partial F(P_1, P)}{\partial_n P} = \Lambda(P, g). \quad (8.3)$$

Пусть $\alpha \in T(P_1)$ — направление геодезической g содержащей P_1, P, P_2 в (8.2), а α, l — полярные координаты с центром в точке P_1 . Сужение $\rho(f)$ на одномерное множество флагов $\{f = (Q, g) : Q = (\alpha, l)\}$ представим в виде

$$\rho(f) = \lambda_{P_1}(\alpha; l). \quad (8.4)$$

Следовательно, обозначив $|P_1, P| = r$, получим

$$F(P_1, P) = \int_{P_1}^P \rho(l, g) dl = \int_0^r \lambda_{P_1}(\alpha; l) dl. \quad (8.5)$$

В этом обозначении

$$F(P_1, P^*) - F(P_1, P) = \int_0^r [\lambda_{P_1}(\alpha^*; l) - \lambda_{P_1}(\alpha; l)] dl + o(|P^*, P|), \quad (8.5)$$

где P^* получено из P при малом смещении в направлении n , и α^* соответствует P^* . Разделим (8.5) на $|P^*, P|$ и вычислим предел при $|P^* - P| \rightarrow 0$. Это дает, в силу (8.3)

$$\int_0^r \frac{\partial \lambda_{P_1}(\alpha; l)}{\partial \alpha} dl = H(P_1, r, \alpha) \Lambda(P, g). \quad (8.6)$$

После дифференцирования (8.6) относительно r , предполагая непрерывность $\Lambda(P, \alpha)$, получим в силу (8.1)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \lambda_{P_1}(\alpha; r)}{\partial \alpha} = \Lambda(P_1, g). \quad (8.7)$$

Аналогично, второе дифференцирование (8.6) дает

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \lambda_{P_1}(\alpha; r)}{\partial r \partial \alpha} = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \Lambda(P, \alpha)}{\partial_\alpha P} = 2 \frac{\partial \Lambda(P_1, \alpha)}{\partial_\alpha P_1}, \quad (8.8)$$

где производная предполагается непрерывной.

$$\frac{\partial \Lambda(P, \alpha)}{\partial_\alpha P} = \frac{\partial \Lambda(P, \alpha)}{\partial r}.$$

Из (8.8) и (8.7) получим желаемое необходимое локальное условие :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \lambda_{P_1}(\alpha; r)}{\partial r \partial \alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} P_1 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \lambda_{P_1}(\alpha; r)}{\partial \alpha}. \quad (8.9)$$

§9. ЕВКЛИДОВА СРЕДА

Рассмотрим уравнение (8.9) в евклидовой среде, т.е. в случае, когда

D = выпуклая область на евклидовой плоскости,

G = хорды на D , образованные евклидовыми прямыми,

основная мера длины dl = евклидова длина.

В этом случае $H(P_1, r, \alpha) = r$. Для любого $P \in D$ направление внутри каждой $T(P)$ определяется углами, измеряемыми от некоторого нулевого направления на плоскости. Цель состоит в том, чтобы записать (8.9) для флаговой плотности $\rho(P, \alpha)$.

Используя переменные P_1, P, α, r как в (8.5), легко находим

$$\frac{\partial \lambda_{P_1}(\alpha; r)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} r + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad (9.1)$$

где $\frac{\partial}{\partial_n P}$ означает дифференцирование по P в направлении, нормальном к направлению α , и

$$\frac{\partial^2 \lambda_{P_1}(r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial_\alpha P \partial \alpha} + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} + r \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial r \partial_\alpha P}. \quad (9.2)$$

Следовательно, условие необходимости (8.9) принимает вид

$$\frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial_\alpha P \partial \alpha}. \quad (9.3)$$

Теорема 9. В евклидовой среде, для дважды непрерывно дифференцируемой флаговой плотности $\rho(P, \alpha) = \rho(P, g)$ условие (9.3) является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция

$$F(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \rho(P, g) dl. \quad (9.4)$$

(интегрирование по P вдоль g , от $P_1 \in g$ до $P_2 \in g$) была стабильно аддитивной.

Доказательство : Покажем достаточность. Пусть выполняется (9.3). Тогда для любого $r > 0$

$$\frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} r + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial_\alpha P \partial \alpha} r + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha} \right).$$

Из (9.1) заключаем, что (8.6) остается в силе для всех r , с

$$H(P_1, r, \alpha) = r, \quad \Lambda(P, g) = \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Очевидно, (8.6) влечет (3.7), так как всегда

$$\frac{\partial}{\partial_n P} F(P_1, P) = - \frac{\partial}{\partial_n P} F(P, P_2).$$

Мы доказали (7.4) для $i = 2$. Аналогично доказывается для $i = 1, 3$

Следствие 3. В евклидовой среде, для дважды дифференцируемой флаговой плотности, предположение поточечной изотропии $\rho(f) = \rho(P)$ (отсутствует зависимость от ϕ), вместе со стабильной аддитивностью соответствующей $F(P_1, P_2)$ как в (3.5.4) влечет $\rho(P) = \text{const}$. Другими словами, помимо евклидового расстояния, других поточечно изотропных метрик Гильберта не существует.

Доказательство : Изотропия вместе с (9.3) влечет

$$\frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} = 0 \quad (9.5)$$

для всякого α , откуда следует утверждение.

В обычной Декартовой системе координат x, y , уравнение (9.3) читается в виде

$$-\frac{\partial \rho(P, \varphi)}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \rho(P, \varphi)}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial^2 \rho(P, \varphi)}{\partial x \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 \rho(P, \varphi)}{\partial y \partial \varphi} \sin \varphi = 0. \quad (9.6)$$

Дифференцируя это уравнение относительно φ и полагая для краткости

$\rho''(P, \varphi) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi)] = 0. \quad (9.7)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\rho(P, \varphi)$ не зависит от P , т.е. $\rho(P, \varphi) = \rho(\varphi)$. В этом случае $\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)$ имеет хорошо известную геометрическую интерпретацию. Вспомним (см. [5], стр. 31), что условие выпуклости

$$\rho(\varphi) + \rho''(\varphi) \geq 0 \quad (9.8)$$

гарантирует, что $\rho(\varphi)$ есть опорная функция некоторой ограниченной центрально-симметричной выпуклой области $X \subset \mathbb{R}^2$. Значение $\frac{1}{2}[\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]$ имеет двойную интерпретацию. С одной стороны, оно совпадает с радиусом кривизны ∂X в точке с нормальным направлением φ .

Рассмотрим инвариантную меру евклидовых движений dg в пространстве $\mathbb{G}$: она соответствует мере евклидовой длины dl в смысле Теоремы 7.

Лемма 4 (см. [5]). Пусть φ обозначает направление линии $g \in \mathbb{G}$. Для двух точек P_1, P_2 на евклидовой плоскости

$$\int_{[P_1, P_2]} [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)] dg = 2 \rho(\alpha) |P_1, P_2|, \quad (9.9)$$

где α есть направление сегмента P_1, P_2 .

Доказательство: Пусть множество Крофтона $\kappa = [a_1] \cap [a_2]$ определено двумя короткими сторонами a_1, a_2 плоского прямоугольника, чьи длинные стороны имеют единичную длину и общее направление α . По Теореме 7, при $|a_1| = |a_2| = |a| \rightarrow 0$,

$$\int_{\kappa} dg = |a|^2 + o(|a|^2).$$

Так что достаточно показать, что для $F(P_1, P_2) = 2\rho(\alpha)|P_1, P_2|$ мы имеем

$$\lim_{|a| \rightarrow 0} |a|^{-2} [F(d_1) + F(d_2) - F(s_1) - F(s_2)] = \rho(\alpha) + \rho''(\alpha). \quad (9.10)$$

Это легко следует из

$$F(d_1) = \rho(\alpha + |a|)(1 + |a|^2/2) + o(|a|^2),$$

$$F(d_2) = \rho(\alpha - |a|)(1 + |a|^2/2) + o(|a|^2), \quad F(s_1) = F(s_2) = \rho(\alpha).$$

Доказательство завершено.

Используя выражение

$$dg = |\sin(\varphi - \alpha)| d\varphi dl$$

инвариантной меры в $\mathbb{G}$ в параметризации

l = точки, где линия g пересекает сегмент P_1, P_2 ,

φ = направление g ,

мы интегрируем по dl (см. (9.9)) :

$$\int_{[P_1, P_2]} [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)] dg = |P_1, P_2| \int [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)] |\sin(\varphi - \alpha)| d\varphi,$$

и получаем замечательное интегральное тождество

$$\int_0^\pi [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)] |\sin(\varphi - \alpha)| d\varphi = 2\rho(\alpha), \quad (9.11)$$

В действительности, (9.11) означает, что $x(\varphi) = \rho(\varphi) + \rho''(\varphi)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^\pi x(\varphi) |\sin(\varphi - \alpha)| d\varphi = 2\rho(\alpha). \quad (9.12)$$

Непосредственная проверка дифференцированием интеграла в (9.12) и применением символики δ -функции дает $x(\varphi) = \rho(\varphi) + \rho''(\varphi)$. Эта проверка также доказывает единственность решения.

Вернемся к общему случаю. Из (9.7) следует, что $\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi)$ остается константой на прямой g , содержащей P и имеющей направление φ . Другими словами, $\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi)$ есть функция, зависящая только от $g \in \mathbb{G}$. Пусть m обозначает знакопеременную меру на $\mathbb{G}$, обладающую плотностью $\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi)$. Запишем (9.11) для всякого $P \in z$, где z — линейный сегмент с концами P_1, P_2 , выбирая α тождественно совпадающим с направлением отрезка z . Интегрирование этого тождества очевидно дает

$$m([P_1, P_2]) = \int_{[P_1, P_2]} [\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi)] dg = 2 \int_{P_1, P_2} \rho(P, \alpha) dl.$$

Флаговую функцию $\rho(P, \varphi)$ назовем *поточечно выпуклой*, если она выпукла по переменной φ для любой $P \in D$, т.е. удовлетворяет (9.8) для всякой P .

Таким образом, дополнительное условие поточечной выпуклости означает, что знакопеременная мера m , определенная через $\rho(P, \alpha)$ на самом деле есть (неотрицательная) мера. Мы по существу доказали следующую теорему.

Теорема 9. Пусть среда евклидова, $\rho(P, \varphi)$ — гладкая флаговая функция и $F(s) = F(P_1, P_2)$ — ее сегментная функция (9.4). Соответствующая валюация V_F продолжается до неотрицательной меры m_F на $\mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда $\rho(P, \varphi)$ удовлетворяет (9.8) и является поточечно выпуклой. Плотность меры $V_F = m_F$ относительно dg имеет вид

$$\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi),$$

причем это выражение зависит только от g — прямой, проходящей через P и имеющей направление φ .

§10. ПОТОЧЕЧНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Понятие *поточечной выпуклости* распространяется на общую среду : флаговая функция $\rho(P, \varphi)$ поточечно выпукла, если для любого $P \in D$

$$\rho(P, \varphi) + \rho''(P, \varphi) \geq 0 \text{ где } \rho''(P, \varphi) = \frac{\partial^2 \rho(P, \varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Пусть $D, \mathbb{G}, dl$ есть классическая среда, а $F(s)$ – гладкая стабильно аддитивная сегментная функция. По Теореме 8 существует (единственная) функция $f(g)$, определенная на $\mathbb{G}$, такая, что

$$F(s) = \int_{[s]} f(g) dg. \quad (10.1)$$

Вопрос : когда функция $f(g)$ оказывается неотрицательной ?

Обозначим через $f_Q(\alpha)$, $\alpha \in T(Q)$, сужение $f(g)$ на пучке прегеодезических, содержащих точку $Q \in D$. В силу Теоремы 7, (10.1) может быть переписана в виде

$$F(s) = \int_s \rho(Q, \alpha) dl, \quad (10.2)$$

где α – направление s и

$$\rho(Q, \alpha) = \int_0^\pi f_Q(\psi) \sin \psi d\psi.$$

Из замечания о единственности уравнения (9.12) следует, что

$$f_Q(\alpha) = \rho(Q, \alpha) + \rho''(Q, \alpha).$$

Следовательно, поточечная выпуклость $\rho(Q, \alpha)$ является необходимым и достаточным условием неотрицательности $f(g)$. Отсюда следует, что условие поточечной выпуклости превращает $F(s)$ в гильбертову метрику, и наоборот. Вышесказанное сводится к следующей теореме.

Теорема 10. Пусть $D, \mathbb{G}, dl$ есть классическая среда, $\rho(P, \varphi) = \rho(P, g)$ – гладкая флаговая функция и $F(s) = F(P_1, P_2)$ – ее сегментная функция :

$$F(s) = \int_s \rho(P, g) dl, \quad s \subset g.$$

$F(P_1, P_2)$ является гильбертовой псевдометрикой (эквивалентно, соответствующая валюация V_F продолжима до неотрицательной меры m_F на $\mathbb{G}$), тогда и только тогда, когда функция $\rho(P, \varphi)$ поточечно выпукла, а $F(P_1, P_2)$ – стабильно аддитивна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, “Прегеодезические кривые на 2-многообразии”, Изв. АН Армении, серия Математика, том. 31, № 4, стр. 3 – 51, 1996.
2. Р. В. Амбарцумян, “Валюации в пространствах интегральной геометрии”, Изв. АН Армении, серия Математика, том. 38, № 3, стр. 2 – 15, 2003.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. R. V. Ambartzumian, Lectures on Combinatorial Integral Geometry. Preprint, Armenian Academy of Sciences.
5. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

6 июня 2004

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail: rhambart@aua.am

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ПРОЕКЦИИ

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
Том 39, № 4, 2004

Данная статья рассматривает проблему существования и единственности выпуклого тела, для которого функция радиуса кривизны проекции совпадает с заданной функцией. Здесь предлагается необходимое и достаточное условие, которое обеспечивает положительный ответ на оба вопроса и предлагает алгоритм построения тела. Также найдено явное представление опорной функции выпуклого тела в терминах радиусов кривизны проекции.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F(\Omega)$ – функция, определенная на сфере S^2 . Проблема существования и единственности выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^3$, для которого средний радиус кривизны в точке на ∂B с направлением внешней нормали Ω , совпадает с заданной функцией $F(\Omega)$, была поставлена Кристоффелем (см. [2],[7]). Пусть $R_1(\Omega)$ и $R_2(\Omega)$ – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке с направлением нормали $\Omega \in S^2$. Проблема Кристоффеля ставит вопрос существования тела B , для которого

$$R_1(\Omega) + R_2(\Omega) = F(\Omega). \quad (1.1)$$

Соответствующая проблема для Гауссовой кривизны $R_1(\Omega)R_2(\Omega) = F(\Omega)$ была поставлена и решена Минковским. В. Бляшке привел проблему Кристоффеля

к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для опорной функции (см [7]). А. Д. Александров и А. В. Погорелов обобщили эти проблемы и доказали существование и единственность выпуклого тела для которого

$$G(R_1(\Omega), R_2(\Omega)) = F(\Omega), \quad (1.2)$$

для класса симметричных функций G (см. [2], [9]).

В данной работе мы рассмотрим аналогичную проблему, поставленную для радиусов кривизны проекции выпуклых тел (см [4]). Обозначим через $\mathcal{B}$ класс выпуклых тел $B \subset \mathbb{R}^3$. Нам понадобятся некоторые обозначения.

S^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (пространство пространственных направлений),

$S_\omega \subset S^2$ – большая окружность с полюсом в $\omega \in S^2$,

$B(\omega)$ – проекция тела $B \in \mathcal{B}$ на плоскость, содержащую начало координат в $\mathbb{R}^3$ и ортогональную к ω .

$R(\omega, \varphi)$ – радиус кривизны $\partial B(\omega)$ в точке, для которой направление внешней нормали совпадает с $\varphi \in S_\omega$, и называется радиусом кривизны проекции тела B . Пусть $F(\omega, \varphi)$ – неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на

$\{(\omega, \varphi) : \omega \in S^2, \varphi \in S_\omega\}$ (пространство "флагов" см. [1]). В этой статье мы рассмотрим :

Задача 1. Существование и единственность (с точностью трансляции) выпуклого тела, для которого

$$R(\omega, \varphi) = F(\omega, \varphi), \quad (1.3)$$

Задача 2. Построение этого выпуклого тела.

Хорошо известно (см. [10]), что выпуклое тело B определяется единственным

образом с помощью его опорной функции $H(\Omega) = \max\{\langle \Omega, y \rangle : y \in B\}$, определенной для $\Omega \in S^2$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное внутреннее произведение в $\mathbb{R}^3$. Обычно функцию $H(\Omega)$ продолжают до функции $H(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, используя однородность : $H(x) = |x| H(\Omega)$, где Ω суть направление $\overrightarrow{Ox}$ (O — начало координат в $\mathbb{R}^3$). Тогда определение выпуклости $H(\Omega)$ запишется в виде

$$H(x + y) \leq H(x) + H(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Ниже $C^k(S^2)$ обозначает пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в S^2 . Выпуклое тело B назовем k -гладким, если $H(\Omega) \in C^k(S^2)$.

Для заданной функции $H(\Omega)$, определенной для $\Omega \in S^2$, через $H_\omega(\varphi)$, $\varphi \in S_\omega$ обозначим сужение функции $H(\Omega)$ на окружность S_ω для $\omega \in S^2$, и назовем $H_\omega(\varphi)$ сужением функции $H(\Omega)$.

Ниже мы покажем, что Задача 1. эквивалентна задаче существования функции $H(\Omega)$, определенной на S^2 и удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$H_\omega(\varphi) + [H_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} = F(\omega, \varphi), \quad \varphi \in S_\omega, \quad (1.4)$$

для любого $\omega \in S^2$.

Отметим, что если сужение функции $H(\Omega)$ удовлетворяет (1.4), то тогда (продолжение) $H(\Omega)$ является выпуклым.

Определение 1.1. Если для заданной функции $F(\omega, \varphi)$ существует $H(\Omega) \in C^2(S^2)$, определенная на S^2 и удовлетворяющая (1.4), то $H(\Omega)$ называется сферическим решением уравнения (1.4).

В (1.4), $H_\omega(\varphi)$ является флаговой функцией, и мы напомним основные понятия, связанные с флагами (в интегральной геометрии понятие флага впервые

было систематически использовано Р. В. Амбарцумяном в [1]). Флагом называется пара (ω, φ) , где $\omega \in S^2$ и $\varphi \in S_\omega$. Каждому флагу (ω, φ) соответствует дуальный флаг

$$(\omega, \varphi) \leftrightarrow (\omega, \varphi)^* = (\Omega, \phi), \quad (1.5)$$

где $\Omega \in S^2$ – пространственное направление, совпадающее с $\varphi \in S_\omega$, а $\phi \in S_\Omega$ – направление, совпадающее с ω . Для заданной флаговой функции $g(\omega, \varphi)$, обозначим через g^* образ g , определенный посредством

$$g^*(\Omega, \phi) = g(\omega, \varphi). \quad (1.6)$$

Определение 1.2. Для каждого $\omega \in S^2$, (1.4) сводится к дифференциальному уравнению на окружности S_ω . Любая непрерывная функция, $G(\omega, \varphi)$, являющаяся решением уравнения (1.4) для каждого $\omega \in S^2$, называется **флаговым решением**.

Определение 1.3. Если флаговое решение $G(\omega, \varphi)$ удовлетворяет условию

$$G^*(\Omega, \phi) = G^*(\Omega) \quad (1.7)$$

(нет зависимости от переменной ϕ), то $G(\omega, \varphi)$ называется **согласованным флаговым решением**.

Существует важный принцип : *каждое согласованное флаговое решение $G(\omega, \varphi)$ уравнения (1.4) с помощью отображения*

$$G(\omega, \varphi) \rightarrow G^*(\Omega, \phi) = G^*(\Omega) = H(\Omega), \quad (1.8)$$

приводится к сферическому решению уравнения (1.4), и наоборот : функция сужения любого сферического решения уравнения (1.4) на большие окружности является согласованным флаговым решением.

Следовательно, задача нахождения сферического решения сводится к нахождению согласованных флаговых решений. Чтобы решить упомянутую задачу, здесь используется *метод согласования*, впервые использованный в [3] и [5] для интегральных уравнений.

Обозначим :

$e[\Omega, \phi]$ – плоскость, содержащую начало координат на $\mathbb{R}^3$, направление $\Omega \in S^2$ и ортогональную к $\phi \in S_\Omega$ (ϕ определяет вращение плоскости вокруг Ω),

$B[\Omega, \phi]$ – проекция тела $B \in \mathcal{B}$ на плоскость $e[\Omega, \phi]$,

$R^*(\Omega, \phi)$ – радиус кривизны $\partial B[\Omega, \phi]$ в точке, для которой направление внешней нормали совпадает с направлением Ω .

Легко увидеть, что $R^*(\Omega, \phi) = R(\omega, \varphi)$, где (Ω, ϕ) есть флаг, дуальный к (ω, φ) .

Заметим, что единственность (с точностью трансляции) в Задаче 1 следует из классического результата единственности, полученного в проблеме Кристоффеля, поскольку

$$R_1(\Omega) + R_2(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^*(\Omega, \phi) d\phi. \quad (1.9)$$

В случае, когда $F(\omega, \varphi) \geq 0$ неотрицательна, уравнение (1.4) имеет следующую геометрическую интерпретацию.

Из [4] следует, что однородная функция $H(x) = |x|H(\Omega)$, где $H(\Omega) \in C^2(S^2)$, является выпуклой тогда и только тогда, когда

$$H_\omega(\varphi) + [H_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} \geq 0, \quad \omega \in S^2, \quad \varphi \in S_\omega, \quad (1.10)$$

где $H_\omega(\varphi)$ – сужение $H(\Omega)$ на S_ω . Итак, в случае, когда $F(\omega, \varphi) \geq 0$, из (1.10) следует, что, если $H(\Omega)$ есть сферическое решение уравнения (1.4), то его однородное продолжение $H(x) = |x|H(\Omega)$ является выпуклым.

Хорошо известно из теории выпуклости, что, если функция $H(x)$ является выпуклой, то существует единственное выпуклое тело $B \subset \mathbb{R}^3$ с опорной функцией $H(x)$, и функция $F(\omega, \varphi)$ является функцией радиуса кривизны проекции тела B (см. [8]).

Опорная функция каждого параллельного переноса (трансляции) этого тела B снова будет сферическим решением уравнения (1.4). В силу единственности, любые два сферических решения уравнения (1.4) отличаются на слагаемое $\langle a, \Omega \rangle$, где $a \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть $F(\omega, \varphi) \geq 0$ – неотрицательная функция, определенная на $\{(\omega, \varphi) : \omega \in S^2, \varphi \in S_\omega\}$. Если уравнение (1.4) имеет сферическое решение $H(\Omega)$, то существует выпуклое тело B с опорной функцией $H(\Omega)$ и функцией радиуса кривизны проекции $F(\omega, \varphi)$. Каждое сферическое решение уравнения (1.4) имеет вид $H(\Omega) + \langle a, \Omega \rangle$, где $a \in \mathbb{R}^3$, каждое из которых является опорной функцией трансляции выпуклого тела B вектором $\vec{Oa}$.

Обратное утверждение тоже верно. Оно следует из теории для 2-измерения (см. [8]), что опорная функция $H(\Omega)$ 2-гладкого выпуклого тела B удовлетворяет уравнению (1.4) для функции $F(\omega, \varphi) = R(\omega, \varphi)$, где $R(\omega, \varphi)$ – функция радиуса кривизны проекции тела B .

Прежде чем изложить основной результат, сделаем некоторые замечания. Целью настоящей работы является нахождение необходимого и достаточного условия, которое обеспечит положительный ответ на обе Задачи 1,2 и предложит алгоритм построения тела B путем нахождения представления опорной функции в терминах функции радиуса кривизны проекции. Это будет сферическим решением уравнения (1.4).

В данной работе опорная функция выпуклого тела B рассматривается относительно специального выбора начала координат O^* . Оказывается, что каждое 1-гладкое выпуклое тело B имеет специальную точку O^* , которую назовем центроидом тела B (см Теорему 6.1). Центроид совпадает с центром симметрии для центрально-симметричных выпуклых тел. Для выпуклых тел B с положительной Гауссовой кривизной можно определить центроид следующим образом: для любого гладкого, выпуклого тела B существует единственная точка O^* такая, что (см. Лемму 6.1) для любого $\Omega \in S^2$

$$\int_{S_\Omega} \langle \overrightarrow{O^* P_\Omega(\tau)}, \Omega \rangle d\tau = 0,$$

где $P_\Omega(\tau)$ — точка на ∂B , для которой направление внешней нормали совпадает с $\tau \in S_\Omega$, $d\tau$ — обычная угловая мера на S_Ω). Множество точек $\{P_\Omega(\tau), \tau \in S_\Omega\}$ назовем поясом тела B с нормалью Ω .

На протяжении всей статьи (в частности, в последующей Теореме 1.2) мы используем обычные сферические координаты ν, τ для точек $\omega \in S^2$, зависящими от выбора северного полюса $N \in S^2$ и точки отсчета $\tau = 0$ на экваторе S_N . Положим $\nu = \frac{\pi}{2} - (\omega, N)$ так, что точки $(0, \tau)$ лежат на экваторе S_N . Обозначим точку с координатами ν, τ через $(\nu, \tau)_N$. На каждом S_ω для точки отсчета выберем E — восточное направление и направление против часовой стрелки, как положительное.

Теперь опишем главный результат.

Теорема 1.2. Опорная функция любого 3-гладкого выпуклого тела B относительно центроида O^ имеет представление*

$$H(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \varphi) \cos \varphi d\varphi \right] d\tau +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \varphi) ((\pi + 2\varphi) \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi) d\varphi \right] d\tau - \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \nu}{\cos^2 \nu} d\nu \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} R((\nu, \tau)_\Omega, \varphi) \sin^3 \varphi d\varphi
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $R(\omega, \varphi)$ есть функция радиуса кривизны проекции тела B на S_ω направление φ отсчитывается от восточного направления относительно Ω . (1.11)

является сферическим решением уравнения (1.4) для $F(\omega, \varphi) = R(\omega, \varphi)$.

Заметим, что порядок интегрирования в последнем интеграле (1.11) не может быть изменен.

Очевидно, Теорема 1.2 предлагает практический алгоритм восстановления выпуклых тел из функций радиуса кривизны проекции $R(\omega, \varphi)$ путем вычисления опорной функции $H(\Omega)$.

Вернемся к Задаче 1. Пусть $R(\omega, \varphi)$ – функция радиуса кривизны проекции выпуклого тела B . Тогда $F(\omega, \varphi) \equiv R(\omega, \varphi)$ необходимо удовлетворяет следующим условиям :

1. Для всякого направления $\omega \in S^2$ и любой точки отсчета на S_ω выполняется

$$\int_0^{2\pi} F(\omega, \varphi) \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} F(\omega, \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (1.12)$$

Это следует из уравнения (1.4), см. также в [8].

2. Для всякого направления $\Omega \in S^2$

$$\int_0^{2\pi} [F^*((\nu, \tau)_\Omega, N)]'_{\nu=0} d\tau = 0, \quad (1.13)$$

где функция F^* есть образ функции $F(\omega, \varphi)$ (см. (1.6)) и $N = E + \frac{\pi}{2}$ – северное направление в точке $(\nu, \tau)_\Omega$ относительно Ω (Теорема 5.1).

Пусть $F(\omega, \varphi)$ – неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на

$\{(\omega, \varphi) : \omega \in S^2, \varphi \in S_\omega\}$. Используя (1.11), построим функцию $\bar{F}(\Omega)$, определенную на S^2 :

$$\begin{aligned} \bar{F}(\Omega) = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} F((0, \tau)_\Omega, \varphi) \cos \varphi d\varphi \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F((0, \tau)_\Omega, \varphi) ((\pi + 2\varphi) \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi) d\varphi \right] d\tau - \\ & - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \nu}{\cos^2 \nu} d\nu \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} F((\nu, \tau)_\Omega, \varphi) \sin^3 \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (1.14)$$

Отметим, что последний интеграл сходится, если удовлетворяются условия (1.12) и (1.13) (см. (5.7) и (5.8)).

Теорема 1.3. *Неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция $F(\omega, \varphi)$, определенная на $\{(\omega, \varphi) : \omega \in S^2, \varphi \in S_\omega\}$, представляет функцию радиуса кривизны проекции некоторого выпуклого тела тогда и только тогда, когда $F(\omega, \varphi)$ удовлетворяет условиям (1.12), (1.13) и*

$$\bar{F}_\omega(\varphi) + [\bar{F}_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} = F(\omega, \varphi), \quad \omega \in S^2, \quad \varphi \in S_\omega, \quad (1.15)$$

где $\bar{F}_\omega(\varphi)$ — сужение функции $\bar{F}(\Omega)$ (заданной с помощью (1.14)) на S_ω .

Отметим, что, в [6] была решена та же задача для для центрально-симметричных выпуклых тел и было найдено другое необходимое и достаточное условие, обеспечивающее положительный ответ.

§2. ОБЩЕЕ ФЛАГОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.4)

Зафиксируем $\omega \in S^2$ и полюс $\mathcal{N} \in S^2$ и попробуем решить уравнение (1.4) как дифференциальное уравнение второго порядка на окружности S_ω . Начнем с двух результатов из [8].

1. Для любой гладкой, выпуклой области D , принадлежащей плоскости

$$h(\varphi) = \int_0^\varphi R(\psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi, \quad (2.1)$$

где $h(\varphi)$ – опорная функция области D относительно точки $z \in \partial D$. В (2.1) мы отсчитываем φ от направления нормали в z , $R(\psi)$ есть радиус кривизны ∂D в точке, направление нормали для которой совпадает с ψ .

2. (2.1) есть решение следующего дифференциального уравнения

$$R(\varphi) = h(\varphi) + h''(\varphi). \quad (2.2)$$

Можно легко проверить, что (это также следует из (2.2) и (2.1))

$$G(\omega, \varphi) = \int_0^\varphi F(\omega, \psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi, \quad (2.3)$$

есть флаговое решение уравнения (1.4).

Теорема 2.1. Каждое флаговое решение уравнения (1.4) имеет вид

$$g(\omega, \varphi) = \int_0^\varphi F(\omega, \psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi + C(\omega) \cos \varphi + S(\omega) \sin \varphi \quad (2.4)$$

где C_n и S_n – некоторые действительные коэффициенты.

Доказательство : Каждое непрерывное флаговое решение уравнения (1.4) есть сумма $G(\omega, \varphi) + g_0(\omega, \varphi)$, где $g_0(\omega, \varphi)$ – флаговое решение соответствующего однородного уравнения :

$$H_\omega(\varphi) + [H_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} = 0, \quad \omega \in S^2, \quad \varphi \in S_\omega. \quad (2.5)$$

Ищем общее флаговое решение уравнения (2.5) в виде ряда Фурье

$$g_0(\omega, \varphi) = \sum_{n=0,1,2,\dots} [C_n(\omega) \cos n\varphi + S_n(\omega) \sin n\varphi]. \quad (2.6)$$

После подстановки (2.6) в (2.5) получаем, что $g_0(\omega, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (2.5) тогда и только тогда, когда

$$g_0(\omega, \varphi) = C_1(\omega) \cos \varphi + S_1(\omega) \sin \varphi.$$

Теорема 2.1 доказана.

§3. УСЛОВИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ

Теперь рассмотрим $C = C(\omega)$ и $S = S(\omega)$ в (2.4) как функции от $\omega = (\nu, \tau)$ и попытаемся найти $C(\omega)$ и $S(\omega)$ из условия, что $g(\omega, \varphi)$ удовлетворяет (1.7). Представим $g(\omega, \varphi)$ в дуальных координатах, т.е. $g(\omega, \varphi) = g^*(\Omega, \phi)$ и потребуем, чтобы $g^*(\Omega, \phi)$ не зависело от ϕ для каждого $\Omega \in S^2$, т.е. для каждого $\Omega \in S^2$

$$(g^*(\Omega, \phi))'_\phi = (G(\omega, \varphi) + C(\omega) \cos \varphi + S(\omega) \sin \varphi)'_\phi = 0, \quad (3.1)$$

где $G(\omega, \varphi)$ было определено в (2.3). Здесь и далее через $(\cdot)'_\phi$ обозначим производную, соответствующую правому вращению винта вокруг Ω .

Из дифференцирования с использованием выражений (см. [5])

$$\tau'_\phi = \frac{\sin \varphi}{\cos \nu}, \quad \varphi'_\phi = -\tan \nu \sin \varphi, \quad \nu'_\phi = -\cos \varphi, \quad (3.2)$$

после естественной группировки слагаемых в (3.1), получаем ряд Фурье для $-(G(\omega, \varphi))'_\phi$ (подробный вывод содержится в [5] и [3]). В силу единственности коэффициентов Фурье, имеем

$$\begin{cases} (C(\omega))'_\nu + \frac{(S(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + \tan \nu C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(\omega, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \\ (C(\omega))'_\nu - \frac{(S(\omega))'_\tau}{\cos \nu} - \tan \nu C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\omega, \varphi) d\varphi \\ (S(\omega))'_\nu - \frac{(C(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + \tan \nu S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(\omega, \varphi) \sin 2\varphi d\varphi, \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$A(\omega, \varphi) = \int_0^\varphi [F(\omega, \psi)'_\phi \sin(\varphi - \psi) + F(\omega, \psi) \cos(\varphi - \psi) \varphi'_\phi] d\psi. \quad (3.4)$$

§4. УСРЕДНЕНИЕ

Пусть H – сферическое решение уравнения (1.4), т.е. сужение H на большие окружности является согласованным флаговым решением уравнения (1.4). В силу Теоремы 1.1 существует выпуклое тело B с функцией радиуса кривизны проекции $R(\omega, \varphi) = F(\omega, \varphi)$, опорной функцией которой является $H(\Omega)$.

Для того, чтобы вычислить $H(\Omega)$ возьмем $\Omega \in S^2$ для полюса $\Omega = \mathcal{N}$. Возвращаясь к формуле (2.4) для каждого $\omega = (0, \tau)_\Omega \in S_\Omega$, имеем

$$H(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\omega, \psi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) d\psi + S(\omega), \quad (4.1)$$

Проинтегрируем обе стороны (4.1) относительно однородной угловой меры $d\tau$ по множеству $[0, 2\pi)$, откуда получаем

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \psi) \cos \psi d\psi d\tau + \int_0^{2\pi} S((0, \tau)_\Omega) d\tau. \quad (4.2)$$

Теперь задача сводится к вычислению

$$\int_0^{2\pi} S((0, \tau)_\Omega) d\tau = \bar{S}(0). \quad (4.3)$$

Для этого проинтегрируем обе стороны (3.3) и (3.4) относительно угловой меры $d\tau$ по множеству $[0, 2\pi)$. Для $\omega = (\nu, \tau)_\Omega$, где $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$ и $\tau \in (0, 2\pi)$ (см. (3.5)) обозначим

$$\bar{S}(\nu) = \int_0^{2\pi} S((\nu, \tau)_\Omega) d\tau, \quad (4.4)$$

$$A(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\varphi [R(\omega, \psi)'_\phi \sin(\varphi - \psi) + \right. \\ \left. + R(\omega, \psi) \cos(\varphi - \psi) \varphi'_\phi] d\psi \right] \sin 2\varphi d\varphi. \quad (4.5)$$

Интегрируя обе стороны (3.3) и (3.4) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} (C(\nu, \tau)_\Omega)'_\tau d\tau = 0$$

для $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$, получим

$$\bar{S}'(\nu) + \tan \nu \bar{S}(\nu) = A(\nu), \quad (4.6)$$

т.е. дифференциальное уравнение для неизвестного коэффициента $\bar{S}(\nu)$.

§5. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (4.6)

Мы должны найти $\bar{S}(0)$, заданное с помощью (4.3). Из уравнения (4.6) следует, что

$$\left(\frac{\bar{S}(\nu)}{\cos \nu} \right)' = \frac{A(\nu)}{\cos \nu}. \quad (5.1)$$

Интегрируя обе стороны формулы (5.1) относительно $d\nu$ по множеству $[0, \frac{\pi}{2})$, получим

$$\bar{S}(0) = \frac{\bar{S}(\nu)}{\cos \nu} \Big|_{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{A(\nu)}{\cos \nu} d\nu. \quad (5.2)$$

Теперь вычислим $\frac{\bar{S}(\nu)}{\cos \nu} \Big|_{\frac{\pi}{2}}$.

Из (2.4) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{S}(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[H_\omega(\varphi) - \int_0^\varphi R(\omega, \psi) \sin(\varphi - \psi) d\psi \right] \sin \varphi d\varphi d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_\omega(\varphi) \sin \varphi d\varphi d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\omega, \psi) ((2\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) d\psi d\tau. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть $\varphi \in S_\omega$ – направление, соответствующее $\varphi \in [0, 2\pi)$, для $\omega = (\nu, \tau)_\Omega$. Рассмотрим направление φ как точку на S^2 , пусть φ имеет сферические координаты u, t относительно Ω . По теореме синусов из сферической геометрии

$$\cos \nu \sin \varphi = \sin u. \quad (5.4)$$

Из (5.4) получим

$$(u)_{\nu=\frac{\pi}{2}}' = -\sin \varphi. \quad (5.5)$$

Фиксируя τ и используя (5.5), запишем формулу Тейлора в окрестности точки

$$\nu = \frac{\pi}{2} :$$

$$H_{(\nu, \tau)\Omega}(\varphi) = H((0, \varphi + \tau)\Omega) + H'_{\nu}((0, \varphi + \tau)\Omega) \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) + o\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right). \quad (5.6)$$

Аналогично, для $\psi \in [0, 2\pi)$, получим

$$R((\nu, \tau)\Omega, \psi) = R\left(\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right)\Omega, \psi + \tau\right) + R'_{\nu}\left(\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right)\Omega, \psi + \tau\right) \sin \psi \left(\frac{\pi}{2} - \nu\right) + o\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right). \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) и (5.7) в (5.3) и учитывая легко устанавливаемые равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H((0, \varphi + \tau)\Omega) \sin \varphi \, d\varphi \, d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R\left(\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right)\Omega, \psi + \tau\right) ((2\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) \, d\psi \, d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\bar{S}(\nu)}{\cos \nu} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H'_{\nu}((0, \varphi + \tau)\Omega) \sin^2 \varphi \, d\varphi \, d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R'_{\nu}\left(\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right)\Omega, \psi + \tau\right) \sin \psi ((2\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) \, d\psi \, d\tau = \\ &= \int_0^{2\pi} H'_{\nu}((0, \tau)\Omega) \, d\tau - \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} [R^*((\nu, \tau)\Omega, N)]'_{\nu=0} \, d\tau. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теорема 5.1. Для каждого 3-гладкого, выпуклого тела B и любого направления

$\Omega \in S^2$, имеем

$$\int_0^{2\pi} [R^*((\nu, \tau)\Omega, N)]'_{\nu=0} \, d\tau = 0, \quad (5.10)$$

где ν, τ — сферические координаты относительно направления Ω , а $N = E + \frac{\pi}{2}$

— северное направление в точке $(\nu, \tau)\Omega$ относительно Ω .

Доказательство : Пользуясь сферической геометрией, можно доказать, что (см. также (1.4))

$$\begin{aligned} [R^*((\nu, \tau)\Omega, N)]'_{\nu=0} &= [H((\nu, \tau)\Omega) + H''_{\varphi\varphi}((\nu, \tau)\Omega)]'_{\nu=0} = \\ &= \left[H((\nu, \tau)\Omega) + H''_{\tau\tau} \frac{1}{\cos^2 \nu} - H'_\nu \tan \nu \right]'_{\nu=0} = [H''_{\tau\tau}]'_{\nu=0}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $H(\Omega)$ – опорная функция тела B . Интегрируя (5.11), получим

$$\int_0^{2\pi} [R^*((\nu, \tau)\Omega, N)]'_{\nu=0} d\tau = \int_0^{2\pi} [H''_{\tau\tau}]'_{\nu=0} d\tau = 0.$$

§6. ЦЕНТРОИД ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Пусть B – выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, а $Q \in \mathbb{R}^3$ – точка. Обозначим через $H_Q(\Omega)$ опорную функцию тела B относительно точки Q .

Теорема 6.1. Для заданного 1-гладкого, выпуклого тела B , существует точка $O^* \in \mathbb{R}^3$ такая, что для каждого $\Omega \in S^2$ выполняется

$$\int_0^{2\pi} [H_{O^*}((\nu, \tau)\Omega)]'_{\nu=0} d\tau = 0, \quad (6.1)$$

где ν, τ – сферические координаты относительно Ω .

Доказательство : Для заданного тела B и точки $Q \in \mathbb{R}^3$, обозначим через $K_Q(\Omega)$ следующую функцию, определенную на S^2 ,

$$K_Q(\Omega) = \int_0^{2\pi} [H_Q((\nu, \tau)\Omega)]'_{\nu=0} d\tau.$$

Очевидно, $K_Q(\Omega)$ является непрерывной, нечетной функцией с максимумом $\bar{K}(Q)$:

$$\bar{K}(Q) = \max_{\Omega \in S^2} K_Q(\Omega).$$

Легко увидеть, что $\bar{K}(Q) \rightarrow \infty$ при $|Q| \rightarrow \infty$. Поскольку $\bar{K}(Q)$ является непрерывной функцией, то существует точка O^* , для которой $\bar{K}(O^*) = \min \bar{K}(Q)$.

Пусть Ω^* – направление максимума, которое теперь предполагается единственным, т.е.

$$\overline{K}(O^*) = \max_{\Omega \in S^2} K_{O^*}(\Omega) = K_{O^*}(\Omega^*).$$

Если $\overline{K}(O^*) = 0$, то теорема доказана. Для случая $\overline{K}(O^*) = a > 0$ пусть O^{**} – точка, для которой $\overrightarrow{O^*O^{**}} = \varepsilon \Omega^*$. Легко показать, что $H_{O^{**}}(\Omega) = H_{O^*}(\Omega) - \varepsilon(\Omega, \Omega^*)$, следовательно, для малого $\varepsilon > 0$ находим, что $\overline{K}(O^{**}) = a - 2\pi\varepsilon$, вопреки определению точки O^* . Итак, $\overline{K}(O^*) = 0$. Для случая, когда существуют два или более направления максимума можно применить аналогичный аргумент.

Теорема 6.1 доказана.

Точку O^* назовем *центроидом* выпуклого тела V . Нижеследующая Теорема 6.2 дает ясную геометрическую интерпретацию этого понятия.

Пусть $P_\Omega(\tau)$ – точка на теле ∂V , направление внешней нормали для которой совпадает с направлением $\tau \in S_\Omega$.

Лемма 6.1. Для любого 2-гладкого, выпуклого тела V с положительной Гауссовой кривизной и любого направления $\Omega \in S^2$, имеем

$$\int_0^{2\pi} [H_Q((\nu, \tau)\Omega)]'_{\nu=0} d\tau = \int_{S_\Omega} \langle \overrightarrow{QP_\Omega(\tau)}, \Omega \rangle d\tau, \quad (6.2)$$

где Q есть точка пространства $\mathbb{R}^3$ и $d\tau$ – обычная угловая мера на S_Ω .

Доказательство : Пусть $B[\Omega, \tau]$ – проекция тела V на плоскость $e[\Omega, \tau]$ (= плоскость, содержащая точку Q и направления $\Omega \in S^2$ и $\tau \in S_\Omega$), а $P^*(\tau)$ – точка на границе $\partial B[\Omega, \tau]$ с внешней нормалью $(0, \tau)_\Omega$. Для опорной функции проекции $B[\Omega, \tau]$ (эквивалентно, для сужения функции $H_Q(\Omega)$ на плоскости $e[\Omega, \tau]$) имеем

$$\begin{aligned} [H_Q((\nu, \tau)\Omega)]'_{\nu=0} &= [|\overrightarrow{QP^*(\tau)}| \cos(\nu - \nu_0) + H_{P^*}(\nu)]'_{\nu=0} = \\ &= |\overrightarrow{QP^*(\tau)}| \sin \nu_0 = \langle \overrightarrow{QP^*(\tau)}, \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $H_{P^*}(\nu)$ – опорная функция проекции $B[\Omega, \tau]$ относительно точки $P^*(\tau) \in \partial B[\Omega, \tau]$ и $(\nu_0, \tau)_\Omega$ – направление $\overrightarrow{QP^*(\tau)}$. Как было доказано в [8], $[H_{P^*}(\nu)]'_{\nu=0} = 0$. Интегрируя (6.3) и учитывая, что $\langle \overrightarrow{QP^*(\tau)}, \Omega \rangle = \langle \overrightarrow{QP_\Omega(\tau)}, \Omega \rangle$, получим (6.2).

Теорема 6.1 и Лемма 6.1 влекут следующую Теорему.

Теорема 6.2. Для любого 2-гладкого выпуклого тела B с положительной Гауссовой кривизной имеем

$$\int_0^{2\pi} \langle \overrightarrow{O^*P_\Omega(\tau)}, \Omega \rangle d\tau = 0, \quad \Omega \in S^2, \quad (6.4)$$

где O^* есть центроид тела B .

Можно рассмотреть последнее утверждение как определение центроида тела B .

§7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть точка O^* есть центроид выпуклого тела B (см. §6). Теперь примем O^* за начало координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Ниже $H_{O^*}(\Omega)$ просто обозначим через $H(\Omega)$.

В силу Теоремы 6.1, Теоремы 5.1 и Леммы 6.1 имеем граничное условие (см. (5.9))

$$\left. \frac{\overline{S}(\nu)}{\cos \nu} \right|_{\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (7.1)$$

Подставляя (5.2) в (4.2), получим

$$\begin{aligned} 2\pi H(\Omega) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \psi) \cos \psi d\psi d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A(\nu)}{\cos \nu} d\nu = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \psi) \cos \psi d\psi d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\nu}{\cos \nu} \int_0^{2\pi} d\tau \times \end{aligned}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\varphi [R(\omega, \psi)'_\phi \sin(\varphi - \psi) + R(\omega, \psi) \cos(\varphi - \psi) \varphi'_\phi] d\psi \right] \sin 2\varphi d\varphi. \quad (7.2)$$

Используя выражения (3.2) и интегрируя по $d\varphi$, получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R((0, \tau)_\Omega, \psi) \cos \psi d\psi d\tau + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\nu}{\cos \nu} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} [R(\omega, \psi)'_\nu I + R(\omega, \psi) \tan \nu II] d\psi,$$

где

$$II = \int_\psi^{2\pi} \sin 2\varphi \cos(\varphi - \psi) \sin \varphi d\varphi = \\ = \left[\frac{(2\pi - \psi) \cos \psi}{4} + \frac{\sin \psi (1 + \sin^2 \psi)}{4} - \sin^3 \psi \right],$$

и

$$I = \int_\psi^{2\pi} \sin 2\varphi \sin(\varphi - \psi) \cos \varphi d\varphi = \left[\frac{(2\pi - \psi) \cos \psi}{4} + \frac{\sin \psi (1 + \sin^2 \psi)}{4} \right]. \quad (7.3)$$

Интегрируя по частям выражение (7.2), получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \psi) \cos \psi d\psi d\tau - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\nu \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} R(\omega, \psi) \frac{\sin \nu \sin^3 \psi}{\cos^2 \nu} d\psi - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau \int_0^{2\pi} R((0, \tau)_\Omega, \psi) I d\psi + \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi \cos a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau \int_0^{2\pi} R((a, \tau)_\Omega, \psi) I d\psi. \quad (7.4)$$

Используя (5.7), Теорему 5.1 и, учитывая, что $\int_0^{2\pi} I d\psi = 0$, получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0, \tau)_\Omega, \psi) \cos \psi d\psi d\tau - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\nu \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} R(\omega, \psi) \frac{\sin \nu \sin^3 \psi}{\cos^2 \nu} d\psi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau \int_0^{2\pi} R((0, \tau), \psi) I d\psi. \quad (7.5)$$

Из (7.5), с помощью (1.12) получим (1.11). Теорема 1.2 доказана.

§8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

Необходимость. Если $F(\omega, \varphi)$ – функция радиуса кривизны проекции выпуклого тела B , то тогда она удовлетворяет условиям (1.12) (см [8]), (1.13) (Теорема 5.1) и (1.14) (Теорема 1.2).

Достаточность. Пусть $F(\omega, \psi)$ – неотрицательная, непрерывная, дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (1.12), (1.13), (1.15). Посредством (1.14) построим функцию $\bar{F}(\Omega)$, определенную на S^2 , как в (1.14). Согласно (1.15), $\bar{F}(\Omega)$ является выпуклой функцией, следовательно, существует выпуклое тело B с опорной функцией $\bar{F}(\Omega)$. В силу того же (1.15) следует, что $F(\omega, \varphi)$ является функцией радиуса кривизны проекции тела B .

Выражаю свою благодарность Р. В. Амбарцумяну за его полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometrical Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
2. А. Д. Александров, "Теоремы единственности для поверхностей в целом", Вести, ЛГУ, № 19, 1956.
3. Р. Г. Арамян, "Подход к обобщенным уравнениям Функа, I", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 47 – 58, 2001.
4. Р. Г. Арамян, "Радиусы кривизны плоских проекций выпуклых тел в R^n ", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 1, стр 2 – 14, 2002.
5. Р. Г. Арамян, "Обобщенное преобразование Радона с применением в теории выпуклости", Изв. АН Армении, Математика, том 38, № 3, стр. 16 – 36, 2003.
6. Р. Г. Арамян, "Восстановление центрально-симметричных выпуклых тел с помощью радиусов кривизны проекций", Изв. НАН Армении, Математика, том 39, № 5, стр. , 2004.
7. И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, "Дифференциальная геометрия в целом", Наука, Москва, 1973.
8. W. Blaschke, Kreis und Kugel, De Gruyter, Berlin, 1956.
9. А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, Москва, 1969.
10. W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in Convexity and its Applications, Ed. P. Gruber and J. Wills, Birkhauser, Basel, 1983.

29 ноября 2003

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении
e.mail : rafik@instmath.sci.am

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СЛУЧАЙНОЙ ХОРДЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

А. С. Хачатрян и Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика
Том 39, № 4, 2004

В статье трехмерное тождество Плейеля применяется для вычисления распределения случайной хорды прямоугольного параллелепипеда. Построена компьютерная программа для численного вычисления функции распределения и ее моментов. Показано, что моменты достигают своего экстремума на правильном многограннике (кубе).

ВВЕДЕНИЕ

Двух- и трехмерные тождества Плейеля и их аналитические следствия впервые были рассмотрены в [1]. Тождество Плейеля на плоскости в сочетании с "методом δ -функций" применено в [2] для вычисления функции распределения случайной хорды выпуклого многоугольника.

В [3] трехмерное тождество Плейеля в сочетании с методом δ -функций применялось для вычисления функции распределения случайной хорды выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$. Исследуемая функция распределения является фактически четырехмерным интегралом в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$. В [3] показано, что метод сводит задачу к вычислению одномерных интегралов.

Используя результаты работы [3], в настоящей статье получены явные выражения для функции распределения случайной хорды прямоугольного параллеле-

пипеда. Построена компьютерная программа для численного вычисления функции распределения и ее моментов. Показано, что моменты достигают своего экстремума на правильном многограннике (кубе).

Авторы заинтересовались задачей после прочтения рукописи В. Гилле [4], побудительным мотивом для которой послужили задачи прикладной физики. В [4] изучена плотность распределения случайной хорды для полусферы

§1. ТРЕХМЕРНОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

Пусть D – ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂D , а γ – прямая пересекающая границу ∂D в двух точках P_1 и P_2 . Обозначим через χ длину хорды $\gamma \cap D$, а через $e(P)$ – плоскость, касательную к D в точке $P \in \partial D$. Через ψ_k обозначим угол между хордой P_1P_2 и ее ортогональной проекцией на плоскость $e(P_k)$, $k = 1, 2$. Через e_k обозначим полуплоскость, содержащую ортогональную проекцию P_1P_2 на $e(P_k)$, граница которой содержит отрезок P_1P_2 , $k = 1, 2$. Пусть ϕ_0 – плоский угол между e_1 и e_2 ($0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$), см. рис. 1.

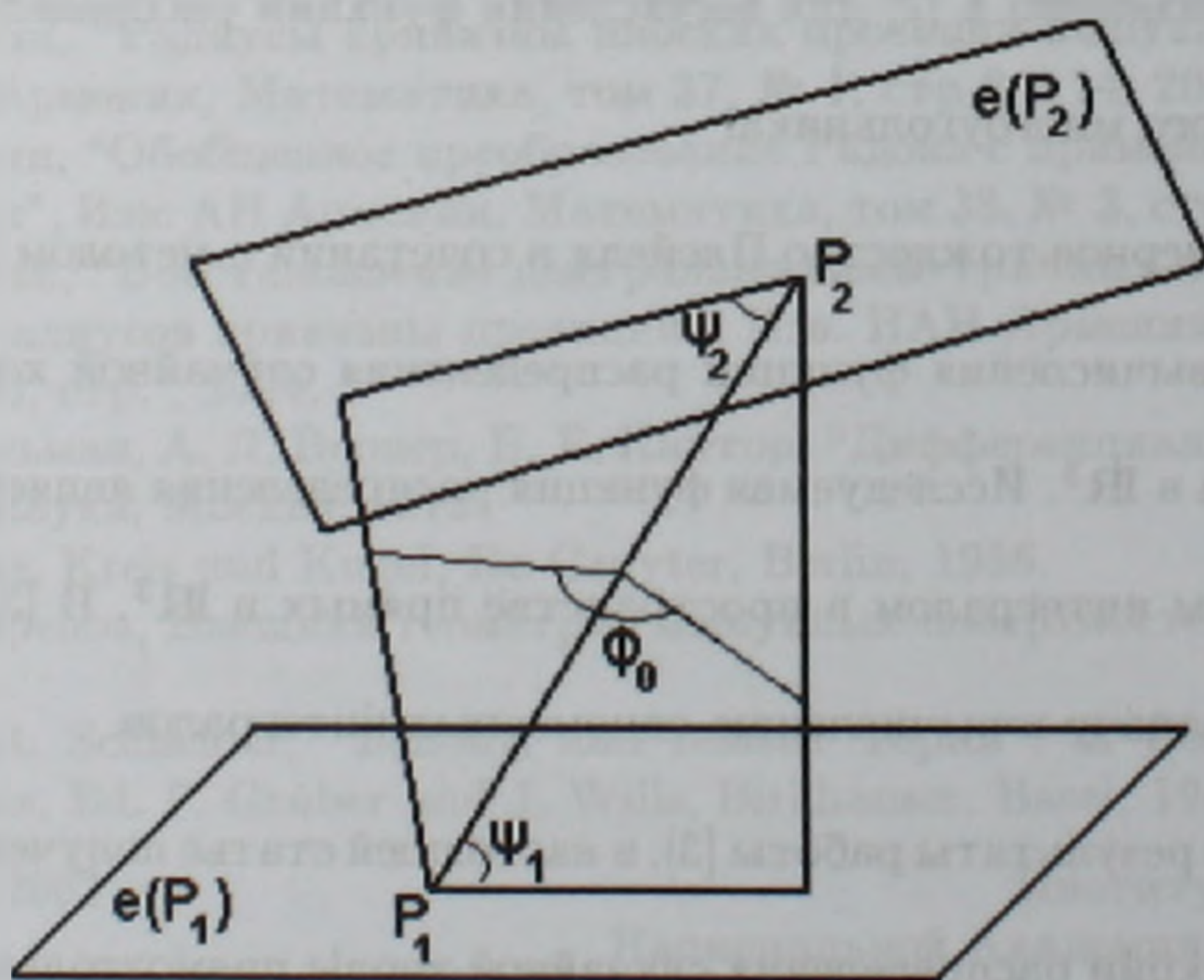


Рис. 1

Для любой непрерывно дифференцируемой функции f заданной на $[0, \infty)$ со свойством $f(0) = 0$ имеет место трехмерное тождество Плейеля (см. [1], [3]) :

$$4 \int_{[D]} f(\chi) d\gamma = \int \int_{(\partial D)^2} \frac{f'(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 dP_1 dP_2, \quad (1.1)$$

где $d\gamma$ – мера в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно группы евклидовых движений $\mathbb{R}^3$, dP – лебегова мера площади на ∂D , $[D]$ – множество прямых, пересекающих тело D .

§2. ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ ДЛЯ ОБЩИХ МНОГОГРАННИКОВ

Рассмотрим случай, когда тело D является выпуклым многогранником с гранями $\{S_i\}$. Возьмем в (1.1) следующую функцию

$$f_z(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq z, \\ 0 & \text{при } x < z, \end{cases} \quad z \in (0, \infty).$$

Тогда функцию распределения длины случайной хорды χ можно вычислить посредством

$$P(\chi < z) = 1 - \int_{[D]} f_z(\chi) d\gamma / \int_{[D]} d\gamma.$$

Из интегральной геометрии [1] известно, что

$$\int_{[D]} d\gamma = \pi |\partial D|,$$

где $|\partial D|$ – площадь поверхности границы ∂D . Следовательно,

$$P(\chi < z) = 1 - \frac{1}{\pi |\partial D|} \int_{[D]} f_z(\chi) d\gamma. \quad (2.1)$$

Производная f' является δ -функцией Дирака и можем в (1.1) провести одно интегрирование (см. [3]) :

$$\int_{[D]} f_z(\chi) d\gamma = \sum_i \left[A_i(z) + \sum_{j \neq i} B_{ij}(z) \right],$$

где

$$A_i(z) = \int_{[S_i]} (\chi - z)_+ dg, \quad (2.2)$$

$$B_{ij}(z) = \frac{1}{z^2} \iint_{S_i} \left[\int_{\{y': (x+\rho, y') \in S_j\}} \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} dy' + \right. \\ \left. + \int_{\{y': (x-\rho, y') \in S_j\}} \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} dy' \right] dx dy, \quad \beta_{ij} \neq 0. \quad (2.3)$$

В (2.2) рассматривается пространство G_i прямых, лежащих на плоскости $e(S_i)$ содержащей грань S_i , dg – мера на G_i , инвариантная относительно группы евклидовых движений плоскости, $[S_i]$ – множество прямых из G_i , пересекающих грань S_i , и $X_+ = \max(X, 0)$.

В (2.3) β_{ij} обозначает угол между плоскостями $e(S_i)$ и $e(S_j)$. На плоскостях $e(S_i)$ и $e(S_j)$ выбраны системы декартовых координат Oxy и $Ox'y'$, причем оси Ox и Ox' направлены вдоль прямой $g_{ij} = e(S_i) \cap e(S_j)$, и

$$\rho = \sqrt{z^2 - y^2 - y'^2 + 2yy' \cos \beta_{ij}}.$$

В случае $e(S_i) \parallel e(S_j)$ (т.е. $\beta_{ij} = 0$), (2.3) имеет несколько иной вид :

$$B_{ij}(z) = -\frac{1}{z^2} \iint_{S_i} \left[\int_{\{y': (x+\rho, y') \in S_j\}} \frac{(z^2 - h^2)_+}{\rho} dy' + \right. \\ \left. + \int_{\{y': (x-\rho, y') \in S_j\}} \frac{(z^2 - h^2)_+}{\rho} dy' \right] dx dy, \quad (2.3')$$

где h – расстояние между плоскостями $e(S_i)$ и $e(S_j)$,

$$\rho^2 = (z^2 - h^2)_+ - y^2 - y'^2 + 2yy' = (z^2 - h^2)_+ - (y - y')^2.$$

В (2.2) можно провести одно интегрирование. Будем определять прямую $g \in [S_i]$ посредством полярных координат (ρ, φ) ее нормали. Из интегральной геометрии

[1] известно, что $dg = dpd\varphi$ и для любой плоской выпуклой области S ,

$$\int_{\{p: (p, \varphi) \in [S]\}} \chi dp = |S|, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (2.4)$$

где $|S|$ – площадь области S . Подставляя $dg = dpd\varphi$ в (2.2) и используя (2.4), получим

$$A_i(z) = \int_0^\pi d\varphi \int_{\{p: (p, \varphi) \in [S_i]\}} (\chi - z)_+ dp = \int_0^\pi |S_i(z, \pi + \varphi) \cap S_i| d\varphi, \quad (2.5)$$

где $S(z, \varphi)$ – область, полученная из S сдвигом на вектор с полярными координатами (z, φ) .

Теперь проведем интегрирование в (2.3'). Имеем $e(S_i) \parallel e(S_j)$. Обозначая

$$r = \sqrt{(z^2 - h^2)_+}, \quad x' = x \pm \rho,$$

получаем

$$(x - x')^2 = \rho^2 = r^2 - (y - y')^2. \quad (2.6)$$

Следовательно, мы можем интерпретировать r как расстояние между точками с декартовыми координатами (x, y) и (x', y') . Переходя к полярным координатам (r, φ) с центром в точке (x, y) , получим

$$x' = x + r \cos \varphi, \quad y' = y + r \sin \varphi.$$

Отметим, что

$$\varphi \in \begin{cases} [-\pi/2, \pi/2] & \text{при } x' = x + \rho, \\ [\pi/2, \pi + \pi/2] & \text{при } x' = x - \rho. \end{cases}$$

В силу (2.6), $\rho^2 = r^2 \cos^2 \varphi$, следовательно

$$dy' = r |\cos \varphi| d\varphi = \rho d\varphi.$$

Произведя в (2.3') замену переменных, получим для случая $e(S_i) \parallel e(S_j)$

$$\begin{aligned} B_{ij}(z) &= -\frac{(z^2 - h^2)_+}{z^2} \iint_{S_i} \int_{\{\varphi: (r, \varphi) \in S_j\}} d\varphi \, dx \, dy = \\ &= -\frac{(z^2 - h^2)_+}{z^2} \int_0^{2\pi} |S_j(r, \varphi) \cap S_i| \, d\varphi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

§3. ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

Рассмотрим случай, когда тело D является прямоугольным параллелепипедом с гранями $\{S_i\}$. Пусть S_i – прямоугольник длины a и ширины b . Тогда $S_i(z, \varphi) \cap S_i$ будет прямоугольником с длинами сторон $(a - z \cos \varphi)_+$ и $(b - z \sin \varphi)_+$. Из (2.5) и соображений симметрии находим

$$A_i(z) = A(a, b, z) = 2 \int_0^{\pi/2} (a - z \cos \varphi)_+ (b - z \sin \varphi)_+ \, d\varphi. \quad (3.1)$$

Теперь рассмотрим случай $e(S_i) \parallel e(S_j)$. Пусть S_i и S_j – прямоугольники длины a и ширины b , а c – расстояние между параллельными гранями S_i и S_j . Тогда $S_j(r, \varphi) \cap S_i$ будет прямоугольником с длинами сторон $(a - r \cos \varphi)_+$ и $(b - r \sin \varphi)_+$, где $r = \sqrt{(z^2 - c^2)_+}$. Из (2.7) и соображений симметрии находим

$$\begin{aligned} B_{ij}(z) &= B_{\parallel}(a, b, c, z) = \\ &= -4 \frac{(z^2 - c^2)_+}{z^2} \int_0^{\pi/2} (a - \sqrt{z^2 - c^2} \cos \varphi)_+ (b - \sqrt{z^2 - c^2} \sin \varphi)_+ \, d\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим случай $e(S_i) \perp e(S_j)$. Пусть S_i – прямоугольник длины a и ширины b , а S_j – прямоугольник длины c и ширины b . (Их общая сторона $S_i \cap S_j$ имеет длину b .) Подставляя в (2.3) $\beta_{ij} = \pi/2$ и используя симметричность прямоугольников, получим

$$B_{ij}(z) = B(a, b, c, z) = \frac{2}{z^2} \iint_{S_i} \left[\int_{\{y': (x+\rho, y') \in S_j\}} \frac{yy'}{\rho} \, dy' \right] dx \, dy, \quad (3.3)$$

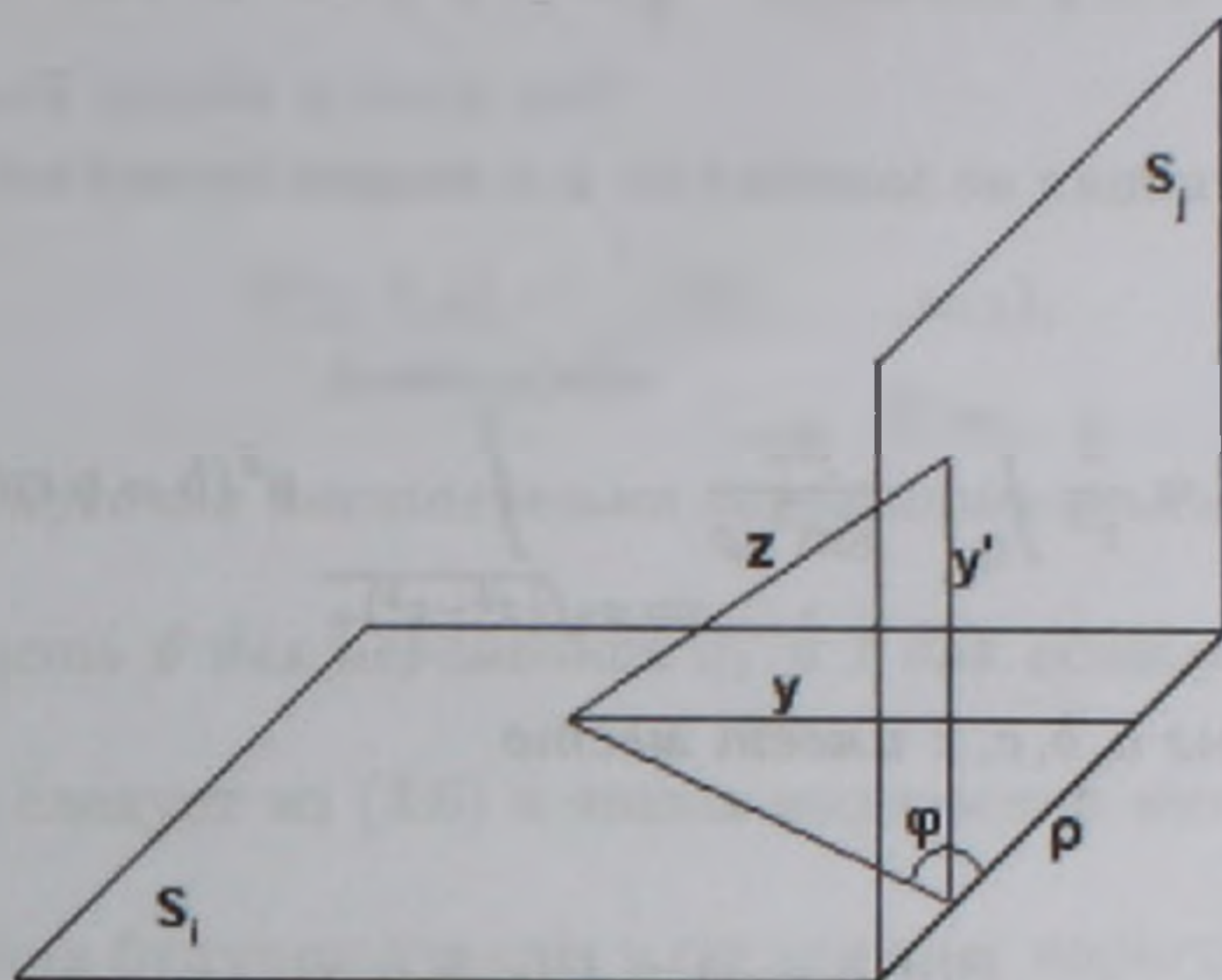


Рис. 2

где $\rho = \sqrt{z^2 - y^2 - y'^2}$. Введем новую переменную φ посредством $\rho = y \cot \varphi$ (см.

Рис. 2). Имеем

$$y'^2 = z^2 - y^2 - \rho^2 = z^2 - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi}.$$

Следовательно,

$$y' dy' = y^2 \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} d\varphi = \frac{y \rho}{\sin^2 \varphi} d\varphi \quad (3.4.)$$

Осуществив в (3.3) замену переменных (3.4), получим

$$B(a, b, c, z) = \frac{2}{z^2} \iint_{S_i} \left[\int_{\left\{ \varphi: (x+y \cot \varphi, \sqrt{z^2 - y^2 / \sin^2 \varphi}) \in S_j \right\}} \frac{y^2}{\sin^2 \varphi} d\varphi \right] dx dy.$$

Заменяя порядок интегрирования, находим

$$B(a, b, c, z) = \frac{2}{z^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int \int_{D(z, \varphi)} y^2 dx dy,$$

где область интегрирования $D(z, \varphi)$ определяется неравенствами

$$0 < x < b, \quad 0 < y < a, \quad 0 < x + y \cot \varphi < b,$$

$$0 < y < z \sin \varphi, \quad \sqrt{z^2 - y^2 / \sin^2 \varphi} < c.$$

Подынтегральная функция не зависит от x и можем провести одно интегрирование :

$$B(a, b, c, z) = \frac{2}{z^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{(z^2 - c^2)_+}}^{\min(a, z \sin \varphi)} y^2 (b - y \cot \varphi)_+ dy. \quad (3.5)$$

Лемма 3.1. Для любых a, b, c, z имеет место

$$B(a, b, c, z) = B(c, b, a, z),$$

где $B(a, b, c, z)$ определяется посредством (3.5).

Доказательство : следует из (3.3) и следующего свойства симметричности : для любой пары граней S_i и S_j ввиду (2.3) имеем $B_{ij} = B_{ji}$.

Из (2.1) и соображений симметрии получаем

$$P(\chi < z) = 1 - \frac{2A - B_{||} + 4B}{2\pi(ab + ac + bc)}, \quad (3.6)$$

где

$$A = A(a, b, z) + A(a, c, z) + A(b, c, z), \quad B_{||} = B_{||}(a, b, c, z) + B_{||}(a, c, b, z) + B_{||}(b, c, a, z),$$

$$B = B(a, b, c, z) + B(a, c, b, z) + B(b, c, a, z).$$

Рассмотрим следующий набор элементарных функций :

$$u_1 = z, \quad u_2 = \sqrt{z^2 - a^2}, \quad u_3 = \sqrt{z^2 - b^2}, \quad u_4 = \sqrt{z^2 - c^2},$$

$$u_5 = \sqrt{z^2 - a^2 - b^2}, \quad u_6 = \sqrt{z^2 - c^2 - b^2}, \quad u_7 = \sqrt{z^2 - a^2 - c^2},$$

$$u_8 = \arcsin(a/z), \quad u_9 = \arcsin(b/z), \quad u_{10} = \arcsin(c/z).$$

Теорема 3.1. Для всякого прямоугольного параллелепипеда функция распределения длины случайной хорды имеет вид

$$P(\chi < z) = \frac{1}{z^4} Q(u_1, \dots, u_{10}),$$

где Q – полином с кусочно постоянными коэффициентами. Максимальная степень полинома Q есть 6 для переменной u_1 и 1 для остальных переменных.

Доказательство : следует из (3.6) и явных выражений интегралов (3.1), (3.2) и (3.5). Эти выражения будут получены в следующем параграфе.

§4. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Так как $A(a, b, z) = A(b, a, z)$, то, не нарушая общности, можем предположить, что $a \geq b$. Из (3.1) интегрированием получаем : если $z \leq b \leq a$, то

$$A(a, b, z) = 2 \left(ab \frac{\pi}{2} + \frac{z^2}{2} - bz - az \right);$$

если $b \leq z \leq a$, то

$$A(a, b, z) = 2 \left(ab \arcsin \frac{b}{z} - a \left(z - \sqrt{z^2 - b^2} \right) - \frac{b^2}{2} \right);$$

если $a \leq z \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$A = 2 \left(ab \left(\arcsin \frac{b}{z} - \arccos \frac{a}{z} \right) + a \sqrt{z^2 - b^2} + b \sqrt{z^2 - a^2} - \frac{z^2 + a^2 + b^2}{2} \right);$$

если $z > \sqrt{a^2 + b^2}$, то $A(a, b, z) = 0$.

Сравнивая (3.1) и (3.2), получим

$$B_{\parallel}(a, b, c, z) = -2 \frac{(z^2 - c^2)_+}{z^2} A(a, b, \sqrt{z^2 - c^2}). \quad (3.3)$$

Теперь вычислим интеграл в (3.5). Сначала заметим, что, учитывая Лемму 1, не нарушая общности, можем предположить, что $a \geq c$. Вычисление (3.5) дает следующий результат.

1) Для $a, b, c > z$,

$$B(a, b, c, z) = \frac{2}{z^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{z \sin \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \frac{2bz}{3} - \frac{z^2}{4}.$$

2) Для $a, b > z > c$,

$$\begin{aligned} B(a, b, c, z) &= \frac{2}{z^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{z \sin \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{2b}{3z^2} \left(z^3 - (z^2 - c^2)^{3/2} \right) - \frac{c^2}{4z^2} (2z^2 - c^2). \end{aligned}$$

3) Для $b, \sqrt{a^2 + c^2} > z > a > c$,

$$\begin{aligned} B(a, b, c, z) &= \frac{2}{z^2} \int_0^{\arcsin(a/z)} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{z \sin \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy + \\ &+ \frac{2}{z^2} \int_{\arcsin(a/z)}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^a y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{2b}{3z^3} \left(z^3 - (z^2 - c^2)^{3/2} \right) \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) - \frac{a^2 c^2}{4z^4} (2z^2 - c^2) + \\ &+ \frac{2ba^2}{3z^2} \sqrt{z^2 - a^2} - \frac{2b}{3z^3} (z^2 - c^2)^{3/2} \sqrt{z^2 - a^2} + \frac{a^2}{4z^2} (a^2 - z^2) + \frac{1}{4z^4} (z^2 - c^2)^2 (z^2 - a^2). \end{aligned}$$

4) Для $b > z > \sqrt{a^2 + c^2}$,

$$\begin{aligned} B(a, b, c, z) &= \frac{2}{z^2} \int_0^{\arcsin(a/z)} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{z \sin \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy + \\ &+ \frac{2}{z^2} \int_{\arcsin(a/z)}^{\arcsin a / \sqrt{z^2 - c^2}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^a y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{2b}{3z^3} \left(z^3 - (z^2 - c^2)^{3/2} \right) \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) - \frac{a^2 c^2}{4z^4} (2z^2 - c^2) + \\ &+ \frac{2ba^2}{3z^2} \left(\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z^2 - a^2 - c^2} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2b}{3z^3} (z^2 - c^2)^{3/2} \left(\sqrt{z^2 - a^2 - c^2} - \sqrt{z^2 - a^2} \right) - \frac{a^2 c^2}{4z^2} + \frac{a^2 c^2}{4z^4} (z^2 - c^2).$$

5) Теперь рассмотрим случай $b < z$. Неравенство $z \cos \varphi > b$ влечет $z \sin \varphi > b \tan \varphi$. Следовательно, (3.6) можно представить в виде суммы двух интегралов

$B(a, b, c, z) = 2(I_1 + I_2)$, где

$$I_1 = \frac{1}{z^2} \int_0^{\arccos b/z} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{(z^2 - c^2)_+}}^{\min(a, b \tan \varphi)} y^2 (b - y \cot \varphi) dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{z^2} \int_{\arccos b/z}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{(z^2 - c^2)_+}}^{\min(a, z \sin \varphi)} y^2 (b - y \cot \varphi) dy.$$

5.1) Если $z < \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\arctan a/b > \arccos b/z$ и для $b, c < z < \sqrt{b^2 + c^2}$ получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{z^2} \int_0^{\arccos b/z} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{b \tan \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{b^4}{24z^2} \left(\frac{z^2}{b^2} - 1 \right) - \frac{b(z^2 - c^2)^{3/2}}{z^3} (z - b) - \frac{(z^2 - c^2)^2 (b^2 - z^2)}{8z^4} \end{aligned}$$

5.2) Если $\sqrt{b^2 + c^2} < z < \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{z^2} \int_{\arccos b/\sqrt{z^2 - c^2}}^{\arccos b/z} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{b \tan \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{b^2 c^2}{24z^2} + \frac{b^2 (z^2 - c^2)}{3z^2} \left(\frac{\sqrt{z^2 - c^2}}{z} - 1 \right) + \frac{b^2 c^2}{8z^4} (z^2 - c^2). \end{aligned}$$

5.3) Если $z > \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\arctan a/b < \arccos b/z$ и $z > a > c$. Получается

$I_1 = I_{11} + I_{12}$, где

$$I_{11} = \frac{1}{z^2} \int_0^{\arctan a/b} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{b \tan \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy,$$

$$I_{12} = \frac{1}{z^2} \int_{\arctan a/b}^{\arccos b/z} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^a y^2 (b - y \cot \varphi) dy.$$

5.3.1) Если $z < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то $\arccos \frac{b}{\sqrt{z^2 - c^2}} < \arctan \frac{a}{b}$, и для $\sqrt{a^2 + b^2} < z < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{z^2} \int_{\arccos b/\sqrt{z^2 - c^2}}^{\arctan a/b} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{b \tan \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{b^4}{24z^2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - z^2}{b^2} \right) + \frac{b^2(z^2 - c^2)}{3z^2} \left(\frac{\sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \right) - \\ &\quad - \frac{b^2(z^2 - c^2)}{8z^2} \left(\frac{z^2 - c^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

5.3.2) Если $\sqrt{a^2 + b^2} < z < \sqrt{a^2 + c^2}$, то

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{a^3 b^2}{3z^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - b^2}} \right) + \frac{b^2(z^2 - c^2)^{3/2}}{3z^2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \\ &+ \frac{a^4}{8z^2} \left(\frac{z^2}{z^2 - b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) + \frac{(z^2 - c^2)^2}{8z^2} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2} - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

5.3.3) Если $z < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то $\arcsin \frac{a}{\sqrt{z^2 - c^2}} > \arctan \frac{a}{b}$, и для $\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + c^2} < z < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, получаем

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{1}{z^2} \int_{\arctan a/b}^{\arcsin \frac{a}{\sqrt{z^2 - c^2}}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^a y^2 (b - y \cot \varphi) dy = \\ &= \frac{a^2 b}{3z^2} \left(b - \sqrt{z^2 - a^2 - c^2} \right) + \frac{b(z^2 - c^2)}{3z^2} \left(\sqrt{z^2 - a^2 - c^2} - \frac{b\sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \\ &+ \frac{a^2}{8z^2} (z^2 - c^2 - a^2 - b^2) + \frac{a^2(z^2 - c^2)}{8z^2} \left(1 - \frac{z^2 - c^2}{a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

5.4) Если $a \geq z > c$, то

$$I_2 = \frac{1}{z^2} \int_{\arccos b/z}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^{z \sin \varphi} y^2 (b - y \cot \varphi) dy =$$

$$= \frac{b^2}{3z^3} \left(z^3 - (z^2 - c^2)^{3/2} \right) - \frac{b^2}{8z^4} (z^4 - (z^2 - c^2)^2).$$

5.5) Если $z > \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\arcsin \frac{a}{z} < \arccos \frac{b}{z}$, и для $\sqrt{a^2 + b^2} < z < \sqrt{a^2 + c^2}$ получаем

$$I_2 = \frac{1}{z^2} \int_{\arccos b/z}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^a y^2 (b - y \cot \varphi) dy =$$

$$= \frac{b^2 a^3}{3z^2 \sqrt{z^2 - b^2}} - \frac{b^2 (z^2 - c^2)^{3/2}}{3z^3} + \frac{a^4 b^2}{8z^2 (b^2 - c^2)} + \frac{(z^2 - c^2)^2 b^2}{8z^4}.$$

5.6) Для $z > \sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + c^2}$,

$$I_2 = \frac{1}{z^2} \int_{\arccos b/z}^{\arcsin \frac{a}{\sqrt{z^2 - c^2}}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_{\sin \varphi \sqrt{z^2 - c^2}}^a y^2 (b - y \cot \varphi) dy =$$

$$= \frac{a^3 b}{3z^2} \left(\frac{b}{\sqrt{z^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{z^2 - a^2 - c^2}}{a} \right) + \frac{b(z^2 - c^2)}{3z^2} \left(\sqrt{z^2 - a^2 - c^2} - \frac{b\sqrt{z^2 - c^2}}{z} \right) +$$

$$+ \frac{a^4}{8z^2} \left(\frac{z^2 - c^2}{a^2} - \frac{z^2}{z^2 - b^2} \right) + \frac{z^2 - c^2}{8z^2} \left(a^2 - \frac{(z^2 - c^2)(z^2 - b^2)}{z^2} \right).$$

6) Для $z > \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ имеем $B(a, b, c, z) = 0$.

§5. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью результатов §4 была построена компьютерная программа для вычисления функции распределения длины случайной хорды для параллелепипедов. Мы также вычислили моменты μ_k этого распределения. Так как численное интегрирование предпочтительнее дифференцирования, то моменты получены, используя интегрирование по частям:

$$\mu_k = \int_0^d x^k dF(x) = d^k - k \int_0^d x^{k-1} F(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ — длина большей диагонали.

Рассмотрим три семейства параллелепипедов, каждое из которых содержит единичный куб:

F_1 = прямоугольные параллелепипеды с единичным объемом,

F_2 = прямоугольные параллелепипеды, площадь поверхности которых равна 6.

F_3 = прямоугольные параллелепипеды, сумма ребер, которых равна 12 (или функционал Минковского равен 6π).

Следующие утверждения получено из эмпирических результатов.

Эмп. Утверждение 1. Для любого $k > 0$ и для каждого семейства F_i , $i = 1, 2, 3$ значение момента μ_k достигает своего максимума на единичном кубе.

Аналогичное утверждение выполняется также для вариации $V = \mu_2 - (\mu_1)^2$.

Эмп. Утверждение 2. Для каждого семейства F_i , $i = 1, 2, 3$ значение вариации V достигает своего максимума на единичном кубе.

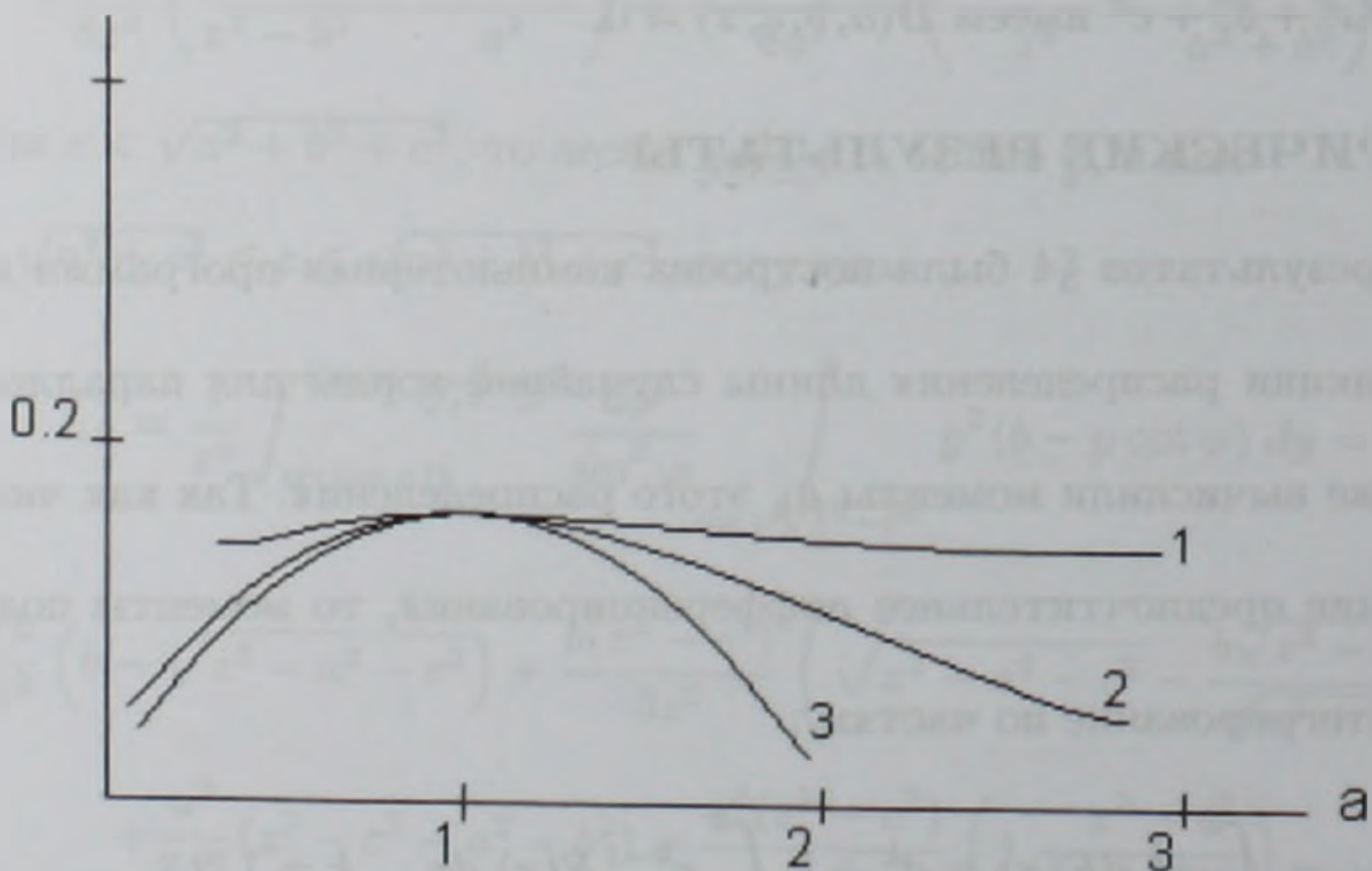


Fig. 3

Рисунок 3 показывает поведение вариации для однопараметрических семейств $F'_i \subset F_i$, $i = 1, 2, 3$ прямоугольных параллелепипедов с длинами ребер

$a, b, c :$

$$F'_1 = \left\{ b = 1, \quad c = \frac{1}{a} \right\}, \quad F'_2 = \left\{ b = 1, \quad c = \frac{3-a}{1+a} \right\},$$

$$F'_3 = \{ b = 1, \quad c = 2 - a \}.$$

ABSTRACT. The paper applies the Pleijel identity in three dimensions for calculation of the random chord length probability distribution functions for right parallelepipeds in $\mathbb{R}^3$. A computer program for numerical calculation of the distribution function and its moments is constructed and used for demonstration of some extremal properties of regular parallelepiped (cube).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, J.Wiley, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
3. Г. С. Сукиасян, "Трехмерное тождество Плейеля и его применения", Изв. НАН Армении. Математика, том 38, № 3, стр. 79 – 91, 2003.
4. W. Gille, "Chord length distributions of the hemisphere", in press.

29 апреля 2004

Ереванский Государственный Педагогический Университет,
Институт Математики НАН Армении
E-mail : haikarin@netsys.am

CRACK STIT TESSELLATIONS – EXISTENCE AND UNIQUENESS OF TESSELLATIONS THAT ARE STABLE WITH RESPECT TO ITERATIONS

W. Nagel and V. Weiss

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика
Том 39, № 4, 2004**

The paper defines the class of Crack STIT spatially homogeneous tessellations as particular models for a number of applications. A summary of essential properties is given, namely the stochastic stability with respect to iteration (nesting) of tessellations and the distribution of the interior of the typical cell, which coincides with that one of the Poisson hyperplane tessellation. The Crack STIT tessellations are the only ones which are stable with respect to iteration. Intensities and geometric features for planar Crack STIT tessellations are considered.

§1. INTRODUCTION

Random tessellations models are important in Stochastic Geometry. There are many profound results and challenging theoretical problems. Applications of this theory concern e.g. materials science (polycrystals, solid matter in foams, cracks and fractures), the arrangement of atoms in amorphous states and even telecommunication networks.

In this field, efforts are aimed to extend the range of models for tessellations, which are mathematically feasible and useful in practice. Thus, the two most important types of random tessellations – the Voronoi tessellation and the Poisson hyperplane tessellation – are varied and

modified in many different ways. Some of the methods used for finding new models are based on operations acting on tessellations. Operations that have been considered are superposition, iteration, also referred to as nesting, and also aggregation (for the latter see [21]).

The following problem concerning iteration was posed to one of the authors by R. V. Ambartzumian already in the 80-th. Let be given a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) tessellations, e.g. Poisson line tessellations in the plane. Iteration of tessellation means that each cell of a "frame" tessellation is subdivided – independently of the subdivisions of the other cells – by another tessellation. This results in a new tessellation. The question was whether there exists a limiting tessellation if iteration with an appropriate rescaling is applied repeatedly ad infinitum. A somehow related question was stated in [2].

A key notion for the investigation of limits is that of stability with respect to an operation. It was relatively easy to show (see [14]) that a stationary random tessellation can occur as such a limit of rescaled iteration if and only if it is stable with respect to iteration (STIT), i.e. if its distribution remains unchanged under the iteration with rescaling. The problem of existence and moreover of uniqueness of such stable tessellation was solved in [15] (for two dimensions) and [16] (for $d \geq 1$ dimensions) by describing constructions. These tessellations are referred to as Crack STIT tessellations since they remind of some crack structures which occur in dried soil or as craquelée on pottery surfaces, see Fig. 5.

It was already shown in an earlier paper [14], that these stable

tessellations have a Poisson typical cell, i.e. the interior of the typical cell has the same distribution as that cell of a stationary Poisson hyperplane tessellation. On the other hand, in the two-dimensional space $\mathbb{R}^2$ the Crack STIT tessellations have T -shaped nodes only. This means that any linear segment ends in the relative interior of another segment. This implies that pairs of cells are not in a face-to-face position (i.e. not “seitentreu” in the sense of [18]), and it gives rise to a classification of linear segments into several types.

After a detailed description of the model in Section 2, the whole Section 3 is devoted to iteration of tessellations and the characteristic features of our model with respect to this operation. In Section 4 the focus is on the distribution of the typical cell and related characteristics of the tessellations. The larger part of that section deals with the planar case where a series of formulas for mean values is presented.

§2. THE MODEL : STATIONARY CRACK STIT TESSELLATIONS

Let $\mathbb{R}^d$ denote the d -dimensional Euclidean space, $d \geq 1$, $\mathbb{N}$ the set of natural numbers and $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ the measurable space of all hyperplanes in $\mathbb{R}^d$ where the σ -algebra is induced by the Borel σ -algebra on a parameter space for $\mathcal{H}$. For a set $A \subset \mathbb{R}^d$ denote $[A] = \{g \in \mathcal{H} : g \cap A \neq \emptyset\}$. For a hyperplane $g \in \mathcal{H}$ denote by g^{+1} and g^{-1} the two closed half-spaces which are generated by g . Let Λ be a locally finite and translation invariant measure on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$. In order to guarantee that the construction which is described later generates tessellations with bounded cells, it is assumed that Λ is not concentrated on a set of hyperplanes that have their normal

directions concentrated on a grand circle of the unit sphere in $\mathbb{R}^d$.

In this section $W \subset \mathbb{R}^d$ is a fixed compact set, sometimes referred to as the window. For the sake of simplicity the reader may choose e.g. $W = [-l, l]^d$, $l > 0$. An essential assumption is

$$0 < \Lambda([W]) < \infty. \quad (1)$$

We introduce the construction of the tessellations in such a bounded window and depending on this window. Later a consistency property (see Subsection 2.2) yields that the distribution of the tessellations does not depend on the choice of W .

2.1. Description of the model. The intuitive idea of the construction is the following : The window W has an exponentially distributed “life time”. At the end of this time interval a random hyperplane γ_1 is thrown onto W , which divides W into two new “cells”. These two cells have independent and exponentially distributed life times until they are divided further by random hyperplanes. After any division, exponentially distributed life times of the new cells begin, and they are independent of all the other life times. Roughly speaking, the parameters of the exponential distributions are related to the size of the respective cells such that smaller cells have a stochastically longer life than larger ones. This procedure of repeated cell division is stopped at a fixed time $a > 0$ and the state at this time is interpreted as a realization of the tessellation $Y(a, W)$ which corresponds to a set $R(a, W)$ of random convex polytopes. An example of a simulation is shown in Figure 1.

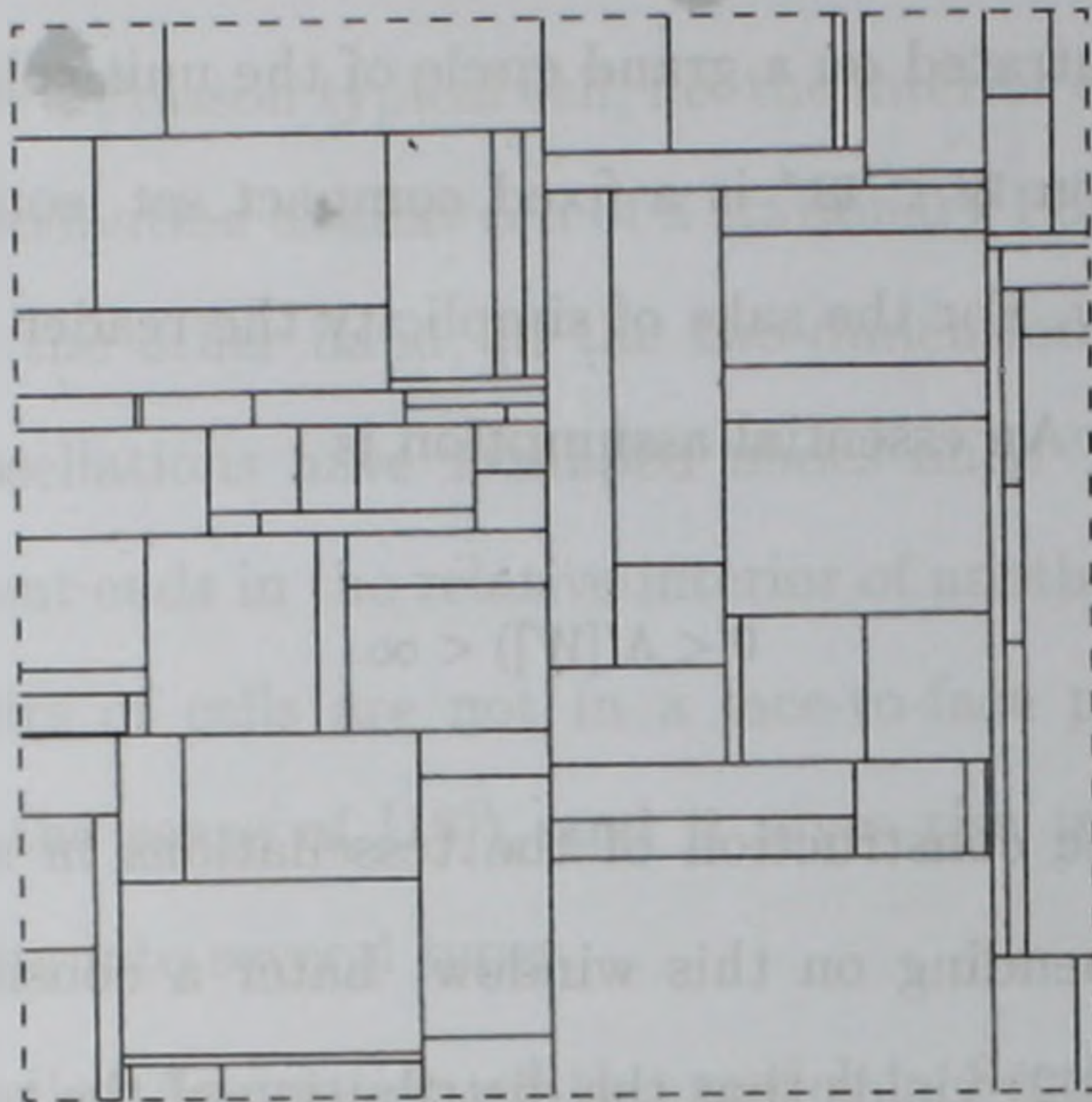


Fig. 1. Example of a realization of the planar Crack STIT tessellation where Λ is concentrated on the horizontal and vertical directions (provided by Joachim Ohser).

We start the formal description with a sequence $\{(\tau_j, \gamma_j)\}$, $j = 1, 2, \dots$, of independent identically distributed (i.i.d.) pairs of independent random variables, where τ_j is a positive random number that is exponentially distributed with parameter $\Lambda([W])$ and γ_j is a random hyperplane with the distribution $\Lambda([W])^{-1} \Lambda(\cdot \cap [W])$.

Firstly, an algorithm for the construction is given in a condensed form. There will be used an auxiliary set T of pairs (τ, W') , where τ is the time which already ran out and $W' \subseteq W$ is a set which has still to be treated, i.e. which is a candidate for further subdivision.

ALGORITHM (a, W, Λ)

0. $j = 0$, $T = \{(0, W)\}$, $R = \emptyset$

1. UNTIL $T = \emptyset$ FOR $(\tau, W') \in T$ DO

(i) $j = j + 1$

(ii) IF $\tau + \tau_j \leq a$ THEN

(a) IF $\gamma_j \in [W']$ THEN

$$T = (T \setminus \{(\tau, W')\}) \cup \{(\tau + \tau_j, W' \cap \gamma_j^{+1}), (\tau + \tau_j, W' \cap \gamma_j^{-1})\}$$

(b) ELSE $T = (T \setminus \{(\tau, W')\}) \cup \{(\tau + \tau_j, W')\}$

(iii) ELSE $T = T \setminus \{(\tau, W')\}$, $R = R \cup \{W'\}$

END

The OUTPUT of the algorithm is $R(a, W) = R$ which is a set of random convex polytopes in W if W itself is a convex polytope. Notice that the result does not depend on the order in which the elements of T are treated in step 1 of the algorithm.

The reader who is satisfied with this description may skip the next paragraphs and immediately go to formula (5).

For the purpose of proofs it is more convenient to use another description of the same random tessellation which is based on the terminology of graph theory. For definitions see e.g. [4] or [5]. Denote by B the following infinite leveled binary tree, where all nodes have two children. The set of nodes is $\{(\tau_j, \gamma_j, s(j)) : j = 1, 2, \dots\}$ with $s(j) \in \{-1, +1\}$ and the following convention : The root of B is $(\tau_1, \gamma_1, 1)$. On the next level the left child is $(\tau_2, \gamma_2, -1)$ and the right child is $(\tau_3, \gamma_3, 1)$. In this canonical way the nodes are denoted level by level and on each level from left to right. The nonrandom parameter $s(j)$ has the value -1 for all left children and $+1$ for all right children respectively.

For real $a > 0$ the random tree $B(a)$ is defined as the (almost surely) finite subtree of B with the same root $(\tau_1, \gamma_1, 1)$ and which has

We will interpret τ_{j_i} as the time interval between the throws of the random hyperplanes $\gamma_{j_{i-1}}$ and γ_{j_i} . Thus τ_1 is the time before the first hyperplane γ_1 is thrown onto the window W . The tree $B(a)$ contains all paths which characterize the course until time a . An illustrative example is given in Figure 2, where the lengths of the edges of the graph represent the τ -values. Denote

$$\beta(a) = \{(s(j_1), \dots, s(j_{k+1})) \in \{+1\} \times \{-1, +1\}^k : k \geq 0, \\ (s(j_1), \dots, s(j_{k+1})) \text{ is a path to a leaf in } B(a)\}. \quad (3)$$

We will use the abbreviated notation $\gamma_{s(j_{i+1})}$ for $\gamma_{j_i}^{s(j_{i+1})}$. Notice that these half-spaces are determined by γ_{j_i} and the parameter $s(j_{i+1})$ which occurs in the next node in a path. For $a > 0$ we define the set $R(a, W) = \{W\}$ if $\beta(a) = \{(1)\}$, i.e. if $\tau_1 > a$, and otherwise

$$R(a, W) = \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^k \gamma_{s(j_{i+1})} \right) \cap W : (s(j_1), \dots, s(j_{k+1})) \in \beta(a) \right\} \setminus \{\emptyset\}. \quad (4)$$

Notice that there can occur paths $(s(j_1), \dots, s(j_{k+1})) \in \beta(a)$ with

$$\gamma_{j_{l+1}} \in \left[\bigcap_{i=1}^l \gamma_{s(j_{i+1})} \cap W \right], \quad 1 \leq l \leq k-1,$$

and thus $\gamma_{j_{l+1}}$ does not divide the cell (as it is the case for γ_7 in the example in Figure 3). Hence $\bigcap_{i=1}^l \gamma_{s(j_{i+1})} \cap W \cap \gamma_{s(j_{l+2})}$ is either empty or the undivided previous cell $\bigcap_{i=1}^l \gamma_{s(j_{i+1})} \cap W$. That means that such a $\gamma_{j_{l+1}}$ can be rejected or ignored in the construction. This possible rejection yields non-identical life time distributions for cells of different sizes – and this adjustment of the distribution to the cell sizes is a crucial feature of our construction.

Obviously, $R(a, W)$ is a random set of convex polytopes, intersected with W . Mostly we will understand a random tessellation as the random closed set (RACS, in the sense of [10]) of the union of the boundaries of its cells but without the boundary of W . Accordingly, for $a > 0$ we introduce the notion

$$Y(a, W) = cl \left[\left(\bigcup_{W' \in R(a, W)} \partial W' \right) \setminus \partial W \right] \quad (5)$$

where $\partial W'$ denotes the boundary of the set W' and cl the topological closure of a set. An example is shown in Figure 3.

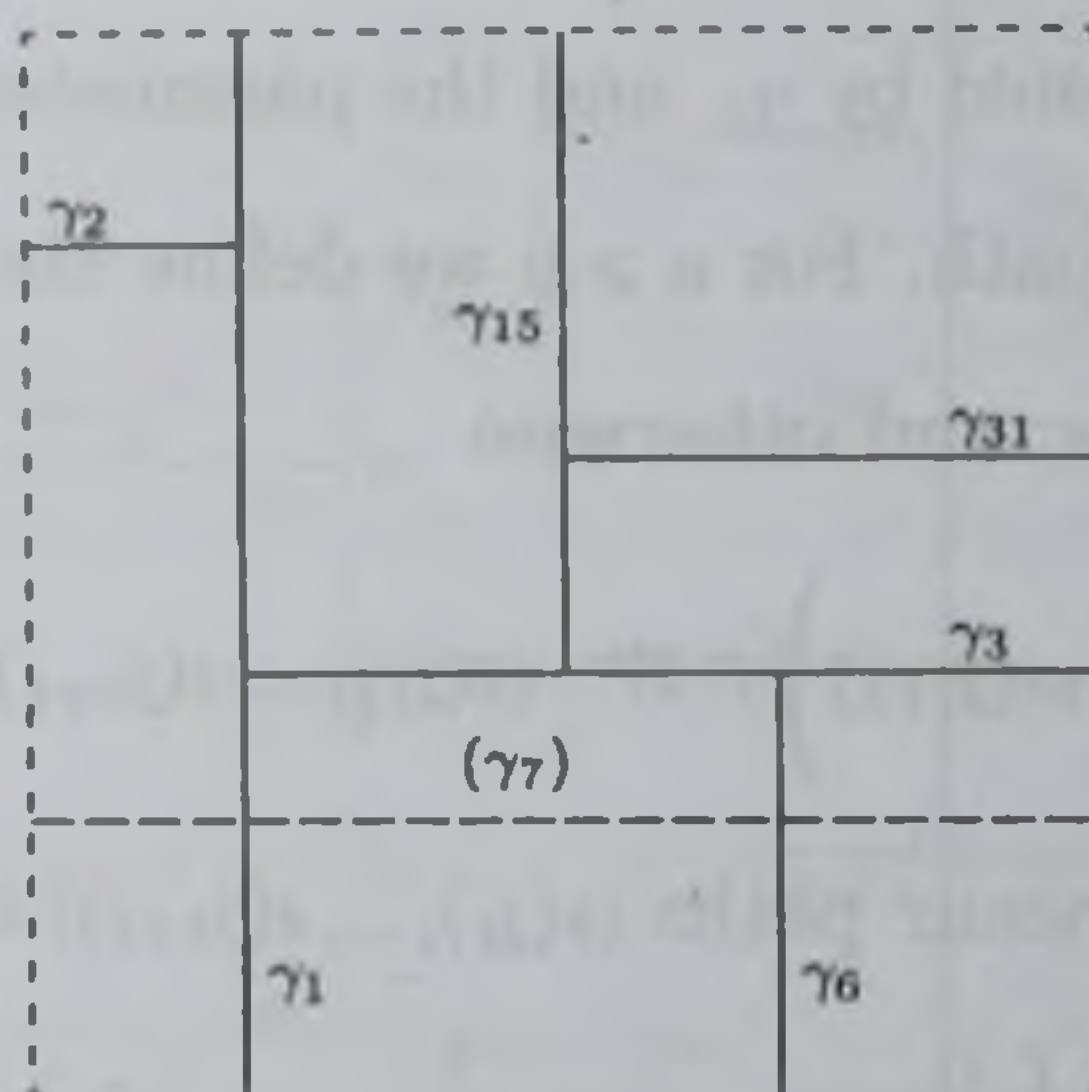


Fig. 3. A realization of $Y(a, W)$ which corresponds to the tree $B(a)$ which is shown in Figure 2. Notice that not necessarily all nodes of $B(a)$ yield an edge : γ_7 does not intersect the cell $W \cap \gamma_1^{+1} \cap \gamma_3^{+1}$, and therefore this cell is not divided at the end of τ_7 , i.e. $W \cap \gamma_1^{+1} \cap \gamma_3^{+1} \cap \gamma_7^{+1} = W \cap \gamma_1^{+1} \cap \gamma_3^{+1}$ and $W \cap \gamma_1^{+1} \cap \gamma_3^{+1} \cap \gamma_7^{-1} = \emptyset$. This corresponds to a rejection of γ_7 in the algorithm, step 1.(ii)(b).

For a standardized notion we choose $a = 1$.

Definition 1. The Crack STIT tessellation in W is defined as $Y(1, W)$.

2.2. Basic properties We summarize some assertions for this construction. The proofs are given in [16]. The union of boundaries $Y(1, W)$ or the set of polytopes $R(1, W)$ respectively represent a non-degenerate tessellation in W indeed.

Lemma 1. *If $0 < \Lambda([W]) < \infty$ then $R(1, W)$ is almost surely (a.s.) finite.*

Since the random tree $B(1)$ as it is illustrated in Figure 2 can be interpreted in terms of a birth process, this lemma is a particular case of a well-known result for birth processes.

The distribution of the RACS $Y(1, W)$ is uniquely determined by its capacity functional $T_{Y(1, W)}$ which is defined on the set $\mathcal{C}$ of compact subsets of $\mathbb{R}^d$ by

$$T_{Y(1, W)}(C) = P(Y(1, W) \cap C \neq \emptyset), \quad C \in \mathcal{C}.$$

The distribution is already uniquely defined by the values $T_{Y(1, W)}(C)$ for all polyconvex C , i.e. all finite unions of compact convex sets, also referred to as elements of the convex ring, see Lemma 11 in [15]. This allows to perform several proofs by induction over the number of connected components of C .

In particular one can show that for any window W and a polyconvex $C \in \mathcal{C}$ (i.e. an element of the convex ring) with $C \subset W$ the value of the capacity functional $T_{Y(1, W)}(C)$ does not depend on W . This allows the application of the consistency Theorem 2.3.1 in [18], which yields the existence of a corresponding tessellation Y^+ of the whole space $\mathbb{R}^d$. The symbol $\sim_d$ is used for the relation 'has the same distribution as', i.e. for identity of distributions.

Theorem 1. If the measure Λ on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ is invariant with respect to translations of $\mathbb{R}^d$ and not concentrated on a set of hyperplanes that have their normal directions concentrated on a grand circle of the unit sphere then there exists a random stationary tessellation $Y^\dagger$ of $\mathbb{R}^d$ such that

$$(Y^\dagger \cap W) \sim_d Y(1, W) \quad \text{for all compact } W \text{ with (1).}$$

Thus we can introduce

Definition 2. The stationary tessellation $Y^\dagger$ is called *the Crack STIT tessellation* for Λ .

§3. ITERATION OF TESSELLATIONS

Cowan [2] motivated the study of this operation by referring to biological cell division. In [19] and [20] there are remarks on iteration, and Ambartzumian described it in [1], 7.13. Kendall and Mecke used this procedure in [6] in a proof. Iteration is also applied in [12], [22]. It is dealt with systematically and generalized in [9], results of a simulation study are presented in [8].

3.1. Iteration. For tessellations the operation of iteration (also referred to in the literature as nesting) is defined as follows. Let $Y_1, Y_2, \dots$ be a sequence of i.i.d. stationary tessellations and denote $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots\}$. Further assume that Y_0 is a stationary tessellation which is independent of $\mathcal{Y}$. For this definition it is useful to consider the set $C(Y)$ of the cells (which are convex polytopes) of Y . Assume that these cells are numbered and that $C(Y_0) = \{p_1, p_2, \dots\}$ and $C(Y_i) = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots\}$ for $i = 1, 2, \dots$. The

iteration of the tessellation Y_0 and the sequence $\mathcal{Y}$ is defined as

$$I(Y_0, \mathcal{Y}) = \{p_i \cap p_{ik} : p_i \in C(Y_0), p_{ik} \in C(Y_i), \text{int } p_i \cap \text{int } p_{ik} \neq \emptyset; i, k = 1, 2, \dots\}. \quad (6)$$

This definition means that a cell p_i of the so called “frame” tessellation Y_0 is – independently of all other cells – subdivided by the cells p_{ik} , $k = 1, 2, \dots$ of the tessellation Y_i , which intersect the interior $\text{int } p_i$ of p_i .

With respect to $R(a, W)$ it is decisive that the iteration of these tessellations commutes with the addition of time intervals for the construction. This feature allows to give an elegant proof that the Crack tessellations are indeed STIT (see Theorem 2).

Here we denote the elements of $R(a, W)$ by W_i , $i \in \mathbb{N}$.

Lemma 2. Let $R(a, W), R_1(b, W), R_2(b, W), \dots$ be independent random sets of polytopes (intersected with W) defined according to (4), $a, b > 0$. Then

$$\bigcup_{W_i \in R(a, W)} \{W_i \cap W_{ik} : W_{ik} \in R_i(b, W), \text{int } W_i \cap \text{int } W_{ik} \neq \emptyset\} \sim_d R(a + b, W). \quad (7)$$

For independent tessellations $Y_0(a, W), Y_1(b, W), Y_2(b, W), \dots$ as defined in (5) and $\mathcal{Y}(b, W) = \{Y_1(b, W), Y_2(b, W), \dots\}$

$$I(Y_0(a, W), \mathcal{Y}(b, W)) \sim_d Y(a + b, W). \quad (8)$$

The proof of Lemma 2 is essentially based on the “lack of memory” of the exponential distributions, which implies that $(R(t, W))_{t>0}$ and $(Y(t, W))_{t>0}$ are Markov processes.

3.2. Generation of sequences of iterated tessellations and stability. For a real number $r > 0$ the tessellation rY is generated by transforming

all points $(x, y) \in Y$ into (rx, ry) . Accordingly, $r\mathcal{Y}$ means that this transformation is applied to all tessellations of the sequence $\mathcal{Y}$. Let S_V be the mean total $(d-1)$ -volume of cell boundaries per unit d -volume (surface intensity) of any of the tessellations $Y_0, Y_1, \dots$. Then $I(Y_0, \mathcal{Y})$ has the surface intensity $2S_V$, and $I(2Y_0, 2\mathcal{Y})$ has the surface intensity S_V , respectively.

Let Y_0 be a stationary tessellation and $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots$ a sequence of sequences of tessellations such that all the occurring tessellations (including Y_0) are i.i.d. Then the sequence $I_2(Y_0), I_3(Y_0), \dots$ of rescaled iterations is defined as (see [14]).

$$I_2(Y_0) = I(2Y_0, 2\mathcal{Y}_1),$$

$$I_m(Y_0) = I(mY_0, m\mathcal{Y}_1, \dots, m\mathcal{Y}_{m-1}) = I(I(mY_0, m\mathcal{Y}_1, \dots, m\mathcal{Y}_{m-2}), m\mathcal{Y}_{m-1}),$$

Here $m = 3, 4, \dots$ is the rescaling factor which is chosen to keep the parameter S_V constant during all iteration steps. We use the abbreviation $I_m(Y_0)$ since it is assumed that all the other tessellations in the sequences $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots$ are independent and have the same distribution as Y_0 .

Definition 3. A stationary tessellation Y is said to be *stable with respect to iteration (STIT)*, if $Y \sim_d I_m(Y)$ for all $m = 2, 3, \dots$, i.e. if its distribution is not changed by repeated rescaled iteration with sequences of tessellations with the same distribution.

It is a key property and even characteristic for the tessellation $Y^\pm$ that it is STIT.

Theorem 2. If the measure Λ on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$ is invariant with respect to translations of $\mathbb{R}^d$ and not concentrated on a set of hyperplanes that have their

normal directions concentrated on a grand circle of the unit sphere then the tessellation $Y^\dagger$ according to Theorem 1 is STIT.

The proof is given in [16]. It is based on Lemma 2 above and on the observation that $mY(1, W) \cap W \sim_d Y(\frac{1}{m}, W)$ for $m \geq 1$. The latter assertion is mainly due to the fact that the random variable $m\tau$ is exponentially distributed with parameter $\frac{1}{m}\lambda$ if τ is exponentially distributed with parameter λ .

3.3. Domains of attraction. A motivation for the study of distributions which are stable under a given operation comes from the consideration of limits of sequences which are generated by a repeated application of this operation. In our case one concludes that STIT tessellations can occur as weak limits of repeated rescaled iterations of i.i.d. tessellations (see Theorem 2 in [14]). The domains of attraction, i.e. those classes of stationary tessellations for which the limit of repeated iteration is a Crack STIT tessellation, are described in the next theorem.

Some additional notation is necessary. Let Y be a stationary random tessellation in $\mathbb{R}^d$ with $0 < S_V < \infty$ and $C(Y)$ the set of all its cells. Denote by F^{d-1} the set of all $(d-1)$ -dimensional (and not lower-dimensional) convex polytopes in $\mathbb{R}^d$ and F_0^{d-1} the subset of all $s \in F^{d-1}$ which have the origin o as the center of their circumscribed ball. The Dirac measure with mass 1 on s and 0 elsewhere is denoted by δ_s .

The process of all $(d-1)$ -facets of Y is defined as $\bar{\Phi}_{d-1} = \sum_{(x,s) \in K} \delta_{(x,s)}$ with

$$K = \left\{ (x, s) \in \mathbb{R}^d \times F_0^{d-1} : s + x \in \{p_i \cap p_j : p_i, p_j \in C(Y)\} \right\}. \quad (9)$$

The definition of $\bar{\Phi}_{d-1}$ requires particular attention since the cells are not necessarily “face-to-face” (“seitentreu” in the notion of [18], p. 235). If Y is a stationary tessellation then $\bar{\Phi}_{d-1}$ can be considered as a stationary marked point process on $\mathbb{R}^d$ with mark space F_0^{d-1} . The stationarity yields that its intensity measure, Θ say, can be factorized, i.e. there exist a constant N_{d-1} and a probability measure κ on F_0^{d-1} (endowed with the standard σ -algebra) such that for all measurable $f : \mathbb{R}^d \times F_0^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int \Theta(\mathrm{d}(x, s)) f(x, s) = N_{d-1} \int \mathrm{d}x \int \kappa(\mathrm{d}s) f(x, s), \quad (10)$$

where $\mathrm{d}x$ denotes the element of the d -dimensional Lebesgue measure; see [1] or [18]. We assume that $0 < N_{d-1} < \infty$. This N_{d-1} is the mean number of $(d-1)$ -facets of Y per unit volume. The *surface intensity* S_V of Y which was already mentioned can be defined as

$$S_V = \int \Theta(\mathrm{d}(x, s)) 1_{[0,1]^d}(x) V^{d-1}(s) = N_{d-1} \int \kappa(\mathrm{d}s) V^{d-1}(s), \quad (11)$$

and $V^{d-1}(s)$ is the $(d-1)$ -volume of $s \in F_0^{d-1}$. Finally, the *directional distribution* $\mathcal{R}$ on $\mathcal{S}^{d-1}$, the unit sphere in $\mathbb{R}^d$, is defined by

$$\int \mathcal{R}(\mathrm{d}u) g(u) = \left[\overline{V^{d-1}} \right]^{-1} \int \kappa(\mathrm{d}s) V^{d-1}(s) g(u(s)) \quad (12)$$

for all measurable $g : \mathcal{S}^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$, $u(s) \in \mathcal{S}^{d-1}$ the unit normal vector to $s \in F_0^{d-1}$ and $\overline{V^{d-1}} = \int \kappa(\mathrm{d}s) V^{d-1}(s)$. This yields

$$S_V = N_{d-1} \overline{V^{d-1}}. \quad (13)$$

For a set $A \subset \mathbb{R}^d$ denote

$$\langle A \rangle = \{(x, s) \in \mathbb{R}^d \times F_0^{d-1} : (s + x) \cap A \neq \emptyset\}$$

and by $\bar{\Phi}_{d-1}(\langle A \rangle)$ the number of facets of Y which hit A .

Lemma 3. (Modified version of Korolyuk's Theorem) Let Y be a stationary random tessellation of $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, with surface intensity S_V , $0 < S_V < \infty$, and directional distribution $\mathcal{R}$. Then for all $C \in \mathcal{C}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m P \left(\tilde{\Phi}_{d-1} \left(\left\langle \frac{1}{m} C \right\rangle \right) \geq 2 \right) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m P \left(Y \cap \frac{1}{m} C \neq \emptyset \right) = S_V \int \mathcal{R}(du) |\Pi(C, u)|, \quad (15)$$

where $|\Pi(C, u)|$ denotes the length of the orthogonal projection of C onto the one-dimensional linear subspace which is parallel to $u \in S^{d-1}$.

Korolyuk's Theorem (cf. [3], chapter 3) is well-known for stationary point processes on the real axis. In [14] we proved a version of it for stationary segment processes in the plane. On this base it is now easy to generalize it to the process of facets of cells of stationary tessellations in $\mathbb{R}^d$. This result, which is given in Lemma 3 is essential in our context since it describes the asymptotic effect of rescaling the tessellations.

Now let Y be a stationary random tessellation in $\mathbb{R}^d$ with $0 < S_V < \infty$ and directional distribution $\mathcal{R}$. In order to compare the limit of the capacity functional of repeated rescaled iterations $I_m(Y)$ for $m \rightarrow \infty$ with the capacity functional of the Crack STIT tessellation Y^+ the parameters of the tessellation have to be related to the measure Λ which played a role in the construction of the Crack tessellations.

Denote by $h : [0, \infty) \times S^{d-1} \mapsto \mathcal{H}$ the function which maps each pair (t, u) to the hyperplane $h(t, u)$ with distance t to the origin and normal vector u . For a given number S_V and a directional distribution $\mathcal{R}$ define

a measure $\Lambda(S_V, \mathcal{R}, \cdot)$ on $[\mathcal{H}, \mathfrak{H}]$, by

$$\int \Lambda(S_V, \mathcal{R}, dh) g(h) = S_V \int dt \int \mathcal{R}(du) g(h(t, u)) \quad (16)$$

for all measurable $g : \mathcal{H} \mapsto [0, \infty)$. In particular, this formula yields for $C \in \mathcal{C}$

$$\Lambda(S_V, \mathcal{R}, [C]) = S_V \int \mathcal{R}(du) |\Pi(C, u)|. \quad (17)$$

Theorem 3. If Y is a stationary random tessellation in $\mathbb{R}^d$ with $0 < S_V < \infty$ and directional distribution $\mathcal{R}$ then

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_{I_m(Y)}(C) = T_{Y^+}(C), \quad C \in \mathcal{C},$$

where Y^+ is the Crack STIT tessellation according to Theorem 1 with $\Lambda = \Lambda(S_V, \mathcal{R}, \cdot)$. This means the weak convergence of the sequence $I_m(Y)$ of tessellations to Y^+ .

The weak convergence of sequences of RACS was thoroughly studied in [13] and [17].

This theorem can be applied e.g. to Poisson hyperplane tessellations (and thus it provides an answer to Ambartzumian's problem mentioned in the introduction) as well as to Voronoi tessellations or any stationary "regular" tessellation, respectively.

As an immediate consequence of the theorem above we obtain the following uniqueness result and thus a characterization of all stationary STIT tessellations.

Corollary 1. A stationary random tessellation Y in $\mathbb{R}^d$ with $0 < S_V < \infty$ and directional distribution $\mathcal{R}$ is STIT if and only if $Y \sim_d Y^+$, where Y^+ is the Crack STIT tessellation according to Theorem 1 with $\Lambda = \Lambda(S_V, \mathcal{R}, \cdot)$.

This means that the tessellations which are described by the construction in Section 2 are not just examples of STIT tessellations but the only ones, if S_V and $\mathcal{R}$ are given.

§4. GEOMETRIC CHARACTERISTICS

Now we consider some details of Crack STIT tessellations. This concerns the typical cell and – for the planar case – the type of nodes, mean values and intensities as well as the directional distribution of the typical edge.

4.1. The typical cell and sections. Already in [14] we have shown the following assertion.

Lemma 4. If Y is STIT, then it is a tessellation with Poisson typical cell, i.e. the interior of the typical cell has the same distribution as the typical cell of a stationary Poisson hyperplane tessellation.

This property of the typical cell can also be transferred to the cell that contains the origin. Hence the spherical as well as the linear contact distributions of the RACS Y^+ are the same as for a corresponding Poisson hyperplane process.

Furthermore, it is obvious that the section with a k -dimensional plane of a STIT tessellation in $\mathbb{R}^d$, $0 < k < d$, yields again a STIT tessellation. Thus, in particular for $k = 1$, we obtain with Theorem 3 in [14].

Lemma 5. If the stationary tessellation Y is STIT then for all lines g the point process $Y \cap g$ is a stationary Poisson point process on g .

4.2. Planar tessellations : Comparison with the Poisson line tessellation.

Let Y be a random stationary planar tessellation – as the RACS of its

edges – with convex cells and $C(Y)$ the set of its cells. For $p \in C(Y)$ denote by $F^k(p)$ the set of all k -dimensional faces of the polygon p ; $k = 0, 1$. Then $\Phi_2 = \sum_{p \in C(Y)} \delta_p$ is a point process on the set of convex polygons. The set $F^0(Y) = \bigcup \{F^0(p) : p \in C(Y)\}$, which is the set of all vertices of cells is referred to as the set of nodes of Y . The corresponding point process is $\Phi_0 = \sum_{x \in F^0(Y)} \delta_x$.

As already emphasized in Subsection 3.3, special attention has to be paid to the definition of edges of the tessellation since the cells of Y are not necessarily in a face-to-face position, in particular in the Crack STIT tessellation. An edge of a tessellation is defined as a linear segment between two nodes with the additional condition that there is no node in its relative interior. Formally, the set of edges of a tessellation Y is, as a particular case of (9) for $d = 2$,

$$K = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 \times F_0^1 : s + x \in \{p_i \cap p_j : p_i, p_j \in C(Y)\}\}, \quad (18)$$

and F_0^1 denotes the set of all one-dimensional linear segments (with nonempty relative interior) in $\mathbb{R}^2$ with their center in the origin. According to this definition, an edge of the tessellation does not necessarily coincide with a complete facet of a polygonal cell. By $\Phi_1 = \sum_{(x, s) \in K} \delta_{s+x}$ we denote the process of edges of Y as a point process on the space of segments.

In any node at least three edges from K meet. A node is referred to as a T -node if there are exactly three emanating edges and two of them are collinear. An X -node is a node with four emanating edges with two pairs of collinear ones, i.e. it is a crossing of two linear segments.

Since Y is assumed to be stationary, also Φ_0 , Φ_1 and Φ_2 are stationary processes of points, linear segments and convex polygons, respectively. Thus the notations of intensities, typical elements and mean values, how they are used and thoroughly studied in stochastic geometry, are available, cf. [18] or [20]. The choice of the mean values which are considered in the following is based on Mecke's paper [11]. There are also the proofs of the relations between these (and further) mean values, which we will apply in the proofs in the present section.

We use the following notation for mean values.

L_A = mean total edge length per unit area, edge length intensity,

U_1 = mean length of the typical edge,

U_2, A_2 = mean perimeter and mean area, respectively, of the typical cell,

N_0 = mean number of nodes per unit area,

N_1 = mean number of edge centers per unit area,

N_2 = mean number of cell centroids per unit area, $N_{01} = N_{02}$ = mean number of edges emanating from the typical node = mean number of cells which contain the typical node,

$N_{20} = N_{21}$ = mean number of nodes = mean number of edges on the boundary of typical cell.

Regarding (10) for $d = 2$ one can interpret κ as the joint (Palm) distribution of the normal direction $\alpha(s)$ and length $\ell(s)$ of the typical edge s in Φ_1 . Thus $U_1 = \int \kappa(ds) \ell(s)$. Hence formula (12) reads as

$$\int \mathcal{R}(d\alpha) f(\alpha) = \frac{1}{U_1} \int \kappa(ds) \ell(s) f(\alpha(s)) \quad (19)$$

for all measurable $f : [0, 2\pi) \mapsto [0, \infty)$ where in the planar case $\mathcal{R}$ is considered as a probability measure on $[0, 2\pi)$ which can canonically be identified with S^1 . Here $\mathcal{R}$ is the *length weighted* distribution of the normal direction of the typical edge.

A second directional distribution $\mathcal{P}$, the distribution of the normal direction of the typical edge, also defined on $[0, 2\pi)$ is given by

$$\int \mathcal{P}(d\alpha) f(\alpha) = \int \kappa(ds) f(\alpha(s)) \quad (20)$$

for all measurable $f : [0, 2\pi) \mapsto [0, \infty)$. Now formula (16) takes the form

$$\int \Lambda(L_A, \mathcal{R}, dh) g(h) = L_A \int dt \int \mathcal{R}(d\alpha) g(h(t, \alpha)) \quad (21)$$

for all measurable $g : \mathcal{H} \mapsto [0, \infty)$ and $\mathcal{H}$ is the set of all lines in the plane.

Further denote

$$\zeta = \int_{[0, 2\pi)} \int_{[0, 2\pi)} \mathcal{R}(d\alpha) \mathcal{R}(d\beta) |\sin(\alpha - \beta)|.$$

In the isotropic case, i.e. when $\mathcal{R}$ is the uniform distribution on $[0, 2\pi)$, we have $\zeta = \frac{2}{\pi}$.

For the Crack STIT tessellations $Y^\vdash$ we describe now the geometric characteristics introduced above. There are interesting and useful relations to stationary Poisson line tessellations. We will use the upper index $\vdash$ or $\times$ to indicate whether it refers to the Crack STIT tessellation $Y^\vdash$ or to the Poisson line tessellation $Y^\times$, respectively.

Let $Y^\times$ denote the stationary Poisson line tessellation for fixed length intensity $L_A^\times = L_A$ with $0 < L_A < \infty$ and directional distribution $\mathcal{R}^\times = \mathcal{R}$ (which refers here to the normal direction), see [20] for an exact definition

and for the results for $Y^\times$ which are cited below. Assume that Y^+ is the Crack STIT tessellation for the measure $\Lambda = \Lambda(L_A, \mathcal{R}, \cdot)$ according to (21).

Here we recall results for Y^+ which have been proved in [14] and [16], and we combine them with well known results for Poisson line tessellations.

Lemma 6. (1) If $C \in \mathcal{C}$ is connected then the values of the capacity functionals of $Y^\times$ and Y^+ coincide, i.e.

$$P(Y^+ \cap C = \emptyset) = P(Y^\times \cap C = \emptyset) = e^{-\Lambda([C])}.$$

(2) Y^+ has a.s. T -nodes only, and $Y^\times$ has a.s. X -nodes only.

Assertion (1) can be interpreted as a property of the interior of that random cell of the tessellations which contains the origin. This is due to the fact that the distribution of the cell around the origin can be interpreted as the area-weighted distribution of the typical cell; and the distribution of the interior of the latter one is identical for Y^+ and $Y^\times$ respectively, see Lemma 4. In [7] and [12] there were also described stationary planar tessellations with Poisson typical cells and T -nodes only. Those differ from the Crack STIT tessellations, and this shows that there is some variety in the class of tessellations with Poisson typical cells.

In the following lemma the mean values of Y^+ are expressed by L_A and ζ and moreover they are related to the respective values for the Poisson line tessellation $Y^\times$.

Lemma 7. If Y^+ is the Crack STIT tessellation with $\Lambda = \Lambda(L_A, \mathcal{R}, \cdot)$ according to (21) and $Y^\times$ the Poisson line tessellation with L_A and $\mathcal{R}$, then

$$(1) L_A^+ = L_A,$$

$$(2) U_1^+ = \frac{2}{3L_A\zeta} = \frac{2}{3}U_1^x,$$

$$(3) U_2^+ = \frac{4}{L_A\zeta} = U_2^x,$$

$$(4) A_2^+ = \frac{2}{L_A^2\zeta} = A_2^x,$$

$$(5) N_0^+ = L_A^2\zeta = 2N_0^x,$$

$$(6) N_1^+ = \frac{3}{2}L_A^2\zeta = \frac{3}{2}N_1^x,$$

$$(7) N_2^+ = \frac{1}{2}L_A^2\zeta = N_2^x,$$

$$(8) N_{01}^+ = N_{02}^+ = 3, \quad N_{01}^x = N_{02}^x = 4,$$

$$(9) N_{20}^+ = N_{21}^+ = 6, \quad N_{20}^x = N_{21}^x = 4.$$

Proof: Equations (3), (4) and (7) are immediate consequences of Lemma 4. And so (8) is an implication of Lemma 6, (2). For stationary planar tessellations always $(1/N_{02}) + (1/N_{20}) = \frac{1}{2}$, $N_1 = \frac{1}{2}N_2N_{21}$, $N_0 - N_1 + N_2 = 0$, $U_1 = (1/N_{21})U_2$ and $L_A = N_1U_1$. With the specific value $N_{02}^+ = 3$, which is given in (8) we obtain all the other equations by simple calculation.

Lemma 8. If Y^+ is the Crack STIT tessellation with $\Lambda = \Lambda(L_A, \mathcal{R}, \cdot)$ according to (21) and Y^x the Poisson line tessellation with L_A and $\mathcal{R}$, then

$$(1) \mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^x = \mathcal{R},$$

$$(2) \mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^x.$$

Proof: (1) Let $G \subset [0, 2\pi)$ be a Borel set. Then the mean total length per unit area of those edges which have their normal direction in the set G can be written as

$$L_A^+ \mathcal{R}^+(G) = \frac{1}{2}N_2^+ U_2^+(G)$$

where $U_2(G)$ denotes the mean total length of those edges of the typical cell which have their normal direction in G . Lemma 4 yields $U_2^+(\cdot) = U_2^x(\cdot)$

and thus with (1) and (7) of Lemma 7, we obtain

$$\mathcal{R}^+(G) = \frac{N_2^\times}{2L_A} U_2^\times(G) = \mathcal{R}^\times(G).$$

(2) was already shown in [14], p. 132 – 133, as a corollary of a lemma.

4.3. Classification of linear segments. Based on the notion of edges of a tessellation Y as it is given in (18) we use a classification of the linear segments of a tessellation which was introduced in [7]. The edges, i.e. the segments belonging to K are also referred to as K -segments. Denote $\Phi_J = \sum_{p \in C(Y)} \sum_{s+z \in F^1(p)} \delta_{s+z}$. This point process on the space of segments is called the process of J -segments.

Finally, an I -segment is convex and a union of collinear edges, which ends on both sides in the relative interior of a J -segment (which has another direction than the I -segment). This means that I -segments cannot be lengthened by an additional collinear edge of the tessellation. Notice that I -segments can be unbounded, i.e. half-lines or lines. Let Φ_I denote the process of all I -segments of Y . For an illustration see Figure 4.

Thus the J - and the I -segments are allowed to have nodes of the tessellation in their relative interior, for J -segments these can be T -nodes only. If there is no node in the relative interior of an I -segment, then it is also a J - and a K -segment.

For the relative interiors of any two segments $s \neq s'$ we have $\text{relint } s \cap \text{relint } s' = \emptyset$ if s, s' are either K -segments or I -segments, respectively. This assertion does not necessarily hold for J -segments.

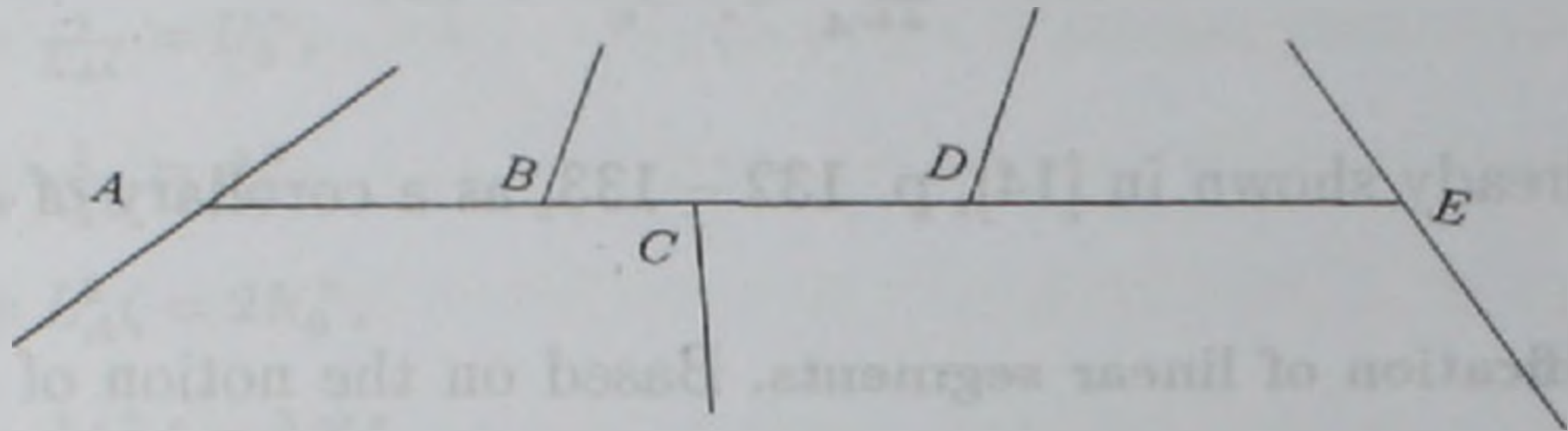


Fig. 4. Illustration of different types of segments : $\overline{AE}$ is the only I -segment. $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ are the J -segments. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ are the K -segments in this example where A, B, C, D, E are nodes of a tessellation.

Hence Φ_K and Φ_I are simple point processes, but Φ_J is not necessarily a simple point process. If a J -segment s has no nodes in its relative interior then it is a facet of both the adjacent polygonal cells and hence $\Phi_J(s) = 2$.

Further, for any K -segment s_K there exists a J -segment s_J with $s_K \subseteq s_J$. For all J -segments s_J there exists an I -segment s_I with $s_J \subseteq s_I$. For the Poisson line tessellation $Y^\times$ one obtains $\Phi_J = 2\Phi_K$ and the I -segments are the lines which generate the tessellation.

For the Crack STIT tessellation Y^+ denote by N_K^+ , N_J^+ , N_I^+ the mean number of centers of K -, J -, I -segments respectively, per unit area. By L_K^+ , L_J^+ , L_I^+ denote the mean length of the typical segments of the respective types. For the J -segments their multiplicity in Φ_J has to be taken into account, i.e. $N_J^+ = \mathbb{E}\Phi_J(\{s + x : x \in [0, 1]^2\})$ where x denotes the center of the segment $s + x$. A respective definition has to be used for L_J^+ . Assume the same parameter values for Y^+ as above.

Lemma 9.

$$(1) N_K^+ = N_I^+ = \frac{3}{2} L_A^2 \zeta,$$

$$(2) N_J^+ = 2N_1^\times = 2L_A^2 \zeta,$$

$$(3) N_I^+ = \frac{1}{2} L_A^2 \zeta,$$

$$(4) L_K^+ = U_1^+ = \frac{2}{3L_A \zeta},$$

$$(5) L_J^+ = U_1^\times = \frac{1}{L_A \zeta},$$

$$(6) L_I^+ = 2 \frac{1}{L_A \zeta}.$$

Proof : (1) and (4) are immediate consequences of the definitions of the corresponding segments. (5) is an implication of Lemma 4. Formula (2) is due to $N_J^+ L_J^+ = 2L_A$, since the sum $\sum l(s) \cdot \Phi_J(s+x)$ over the lengths of all J -segments is twice the total length of the edges. Each node of Y^+ is a.s. the endpoint of exactly one I -segment, and each I -segment has two endpoints. Hence $N_I^+ = \frac{1}{2} N_0^+$, and this yields (3). Finally, (6) follows from $N_I^+ L_I^+ = L_A$.

One can conclude from this lemma that in Y^+ the mean number of nodes in the relative interior of the typical I -segment is 2 and of the typical J -segment it is $1/2$. The mean number of J -segments on the boundary of the typical cell of Y^+ is 4 and that one of K -segments (edges) is 6. As a corollary of Lemma 4 we obtain that the distribution of the length of the typical J -segment is the exponential distribution with parameter $L_A \zeta$.

Lemma 10. For any polygonal cell of the tessellation Y^+ there is a.s. at least one J -segment (i.e. a facet of this cell) which is also an I -segment.

Proof : Let λ denote the mean number of cells of Y^+ per unit area which

do not possess a J -segment, which is also an I -segment; for short: cells without an I -segment. Obviously $0 \leq \lambda \leq N_2^+$. Further let λ^* be the mean number per unit area of cells without an I -segment in the iterated tessellation $I(2Y^+, 2\mathcal{Y}^+)$. Since Y^+ is STIT we have $\lambda = \lambda^*$.

The set of cells of $I(2Y^+, 2\mathcal{Y}^+)$ is partitioned into three disjoint classes, namely with respect to the definition and notation in (6)

$$C_1 = \left\{ 2p_i \in C(Y_0) : \bigwedge p_{ik} \in C(Y_i) : (p_{ik} \supset p_i) \vee (p_{ik} \cap p_i = \emptyset) \right\},$$

i.e. those cells of the 'frame' tessellation which are not divided in the iteration step,

$$C_2 = \{ 2p_{ik} \in C(Y_i) : p_{ik} \subset p_i; \quad i = 1, 2, \dots \},$$

i.e. those cells of the 'nested' tessellations $Y_1, Y_2, \dots$ which are completely embedded in the corresponding "frame" cell,

$$C_3 = \{ 2p_i \cap 2p_{ik} : p_i \in C(Y_0), p_{ik} \in C(Y_i), \text{int } p_i \cap \text{int } p_{ik} \neq \emptyset,$$

$$p_i \subsetneq p_{ik}, p_i \supsetneq p_{ik}; i, k = 1, 2, \dots \},$$

i.e. those cells which are newly generated in the iteration step as a proper intersection of a "frame" cell with a "nested" cell.

Denote by λ_i , $i = 1, 2, 3$, the respective intensities of cells *without an I -segment* which belong to C_i . Thus $\lambda^* = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Obviously, $\lambda_1 \leq \lambda/4$ and $\lambda_2 \leq \lambda/4$ since in $2Y^+$ the intensity of cells is $\frac{1}{4}$ of that one in Y^+ . Further, $\lambda_3 = 0$. To see this consider for an arbitrary $2p_i \cap 2p_{ik} \in C_3$ the segments of $2p_i \cap \partial(2p_{ik})$ where ∂ denotes the boundary of a set. There is

at least one sequence of such segments which starts on $\partial(2p_i)$ and ends on $\partial(2p_k)$. Simple combinatorial considerations on the sequence of T -nodes on it yield that there must be at least one I -segment in the sequence of segments which is a facet of $2p_i \cap 2p_k$. Summarizing this, the inequality $\lambda^* = \lambda \leq \lambda/2$ implies $\lambda^* = \lambda = 0$. Lemma 10 is proved.

§5. NOTES AND CONCLUDING REMARKS

In the present paper the notion of stationarity is always used in the sense of a *spatial* homogeneity, i.e. the invariance of the distribution with respect to translations of the space. Another aspect can be to consider the repeated and rescaled iteration $I_m(Y)$ of a certain tessellation Y as a random process with discrete time $m = 2, 3, \dots$. Then the STIT property of the Crack tessellation Y^+ can be interpreted as stationarity of $I_m(Y^+)$ with respect to time.

There is a huge amount of literature with the key words “crack structures” or “fracture structures” respectively, and a variety of models is studied there. For several of those models a theoretical investigation is rather hard to perform. Probably, for some types of such structures the Crack STIT tessellations can serve as reasonable approximative models, namely in such cases when the genesis of the structure can be imagined as a consecutive nesting of crack “events”, where later cracks end at earlier cracks. This yields some hierarchical structure as it can be observed on surfaces of pottery such as Raku or Majolika (referred to as the *craquelée* effect), for an image see Figure 5.

It is a general experience in statistics that the application of models

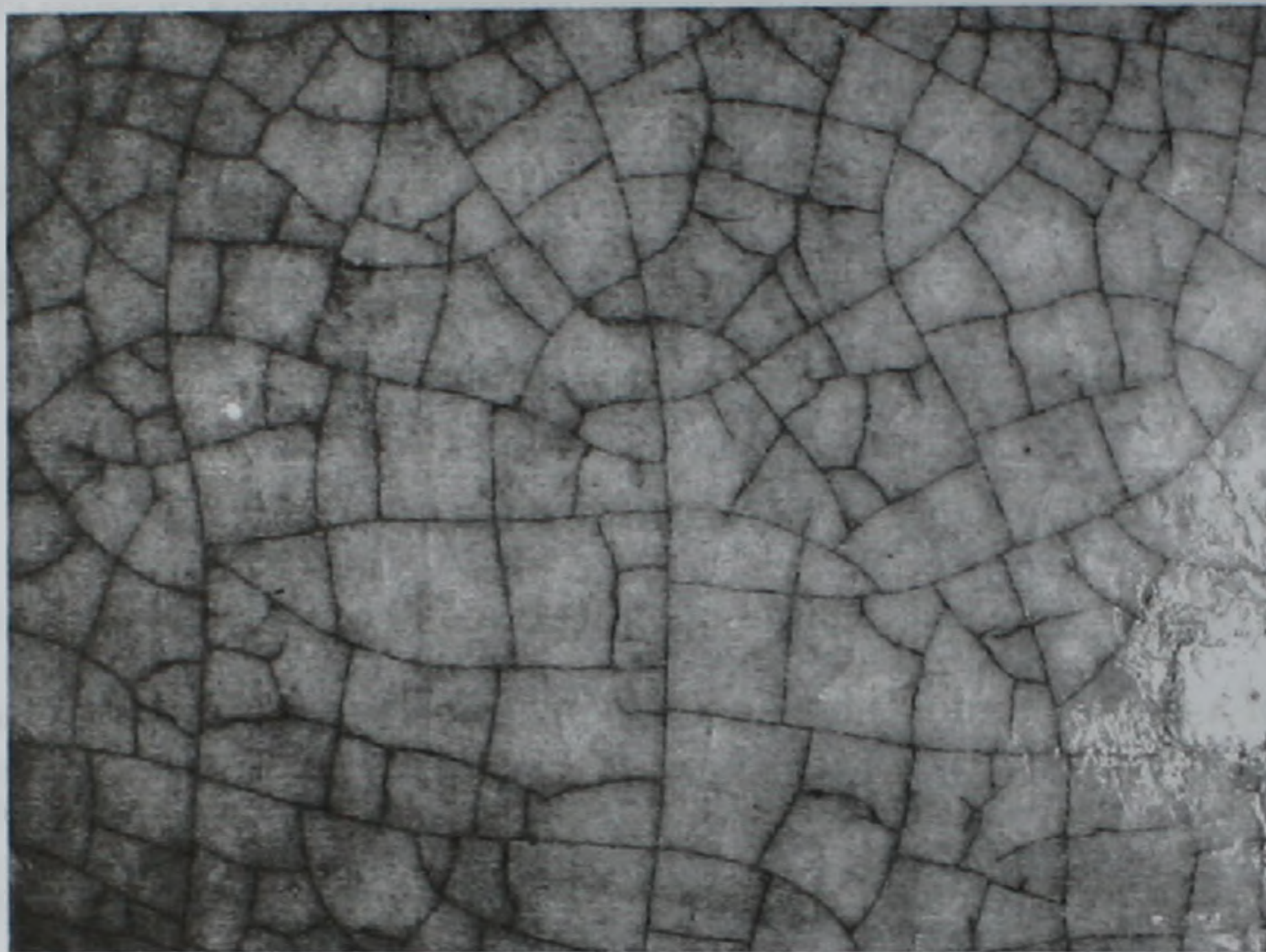


Fig. 5. Craquelée on a pottery surface. Some hierarchy of the cracks is obvious : There are long lines through the whole image and shorter ones which are 'chopped off' by the longer ones and so on. This suggests some similarity with the mathematical model which is introduced in the present paper. (Photo : Gisela Weil, Karlsruhe)

with stability properties – *as approximations* of real structures – can be rather fruitful, e.g. the normal distribution is stable w.r.t. addition of random variables, the Poisson hyperplane process is stable w.r.t. union of sets. Furthermore, stable distributions are often used as “null models” or reference models in statistical investigations, e.g. Poisson point processes in spatial statistics. This can give importance also to Crack STIT tessellations which can be handled rather good.

It is an implication of Theorem 3, that the Crack STIT tessellation can be considered as a limit of repeated and rescaled iteration of i.i.d.

tessellations. This yields a hierarchical structure in the following sense (tentatively, we call this property the "mikado principle") : In Y^+ exist I -segments without nodes in their relative interior, i.e. such I -segments which are also J - and K - segments. When these segments are deleted, then a new tessellation occurs which has again such I -segments. By a repeated deletion, where in each step only those I -segments without inner nodes are taken off, the whole system of segments of Y^+ vanishes. This is not the case for tessellations which do not have the property indicated in Lemma 10. E.g. the tessellations constructed in [12] as tessellation with Poisson typical cell and T -nodes only do not have this hierarchical structure.

The STIT property also implies some kind of a self-similarity. This is of course not the same as that one in fractal geometry but it can be expressed by the infinite divisibility w.r.t. iteration.

Acknowledgment. We are very grateful to Joseph Mecke for stimulating and helpful discussions. We thank Joachim Ohser for fruitful remarks and for simulations of the tessellations, in particular for Figure 1, and Gisela Weil (†) for providing the photo in Figure 5.

REFERENCES

1. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
2. R. Cowan, "A collection of problems in random geometry", In Stochastic geometry, geometric statistics, stereology, eds. R.V. Ambartzumian and W.Weil, pp. 64 – 68, Teubner-Verlag, Leipzig, 1984.
3. D. J. Daley, D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes, Springer Verlag, New York, 1988.
4. R. Gould, Graph Theory, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park, 1988.
5. J. L. Gross, J. Yellen, eds. Handbook of Graph Theory, CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2004.

6. W. S. Kendall, J. Mecke, "The range of the mean-value quantities of planar tessellations", J. Appl. Prob., vol. 24, pp. 411 – 421, 1987.
7. M. S. Mackisack, R. E. Miles, "Homogeneous rectangular tessellations", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 28, pp. 993 – 1013, 1996.
8. R. Maier, J. Mayer, V. Schmidt, "Distributional properties of the typical cell of stationary iterated tessellations", Preprint, University of Ulm, 2002.
9. R. Maier, V. Schmidt, "Stationary iterated tessellations", Preprint, University of Ulm, 2001.
10. G. Mathéron, Random Sets and Integral Geometry, J.Wiley, New York, London, 1975.
11. J. Mecke, "Parametric representation of mean values for stationary random mosaics", Math. Operationsf. Statist., Ser. Statistics, vol. 15, pp. 437 – 442, 1984.
12. R. E. Miles, M. S. Mackisack, "A large class of random tessellations with the classic Poisson polygon distributions", To appear in Forma, 2002.
13. I. S. Molchanov, Limit Theorems for Unions of Random Closed Sets, Springer, Berlin, 1993.
14. W. Nagel, V. Weiss, "Limits of sequences of stationary planar tessellations", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 35, pp. 123 – 138, 2003.
15. W. Nagel, V. Weiss, "A planar crack tessellation which is stable with respect to iteration", Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik 12/04, Jena, 2004.
<http://www.fh-jena.de/~weiss/doc/prepstit.pdf>
16. W. Nagel, V. Weiss, "Crack STIT tessellations – characterization of the stationary random tessellations which are stable with respect to iteration", Adv. Appl. Prob. (SGSA) submitted, 2005.
17. T. Norberg, "Convergence and existence of random set distributions", Ann. Prob. vol. 12, pp. 726 – 732, 1984.
18. R. Schneider, W. Weil, Stochastische Geometrie, B.G.Teubner, Stuttgart, Leipzig, 2000.
19. J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, London, 1982.
20. D. Stoyan, W. S. Kendall, J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, Wiley, Chichester, 1995.
21. K. Tchoumatchenko, S. Zuev, Aggregate and fractal tessellations, Probab. Theory Relat. Fields, vol. 121, pp. 198 – 218, 2001.
22. V. Weiss, W. Nagel, "Interdependencies of directional quantities of planar tessellations", Adv. Appl. Prob., vol. 31, pp. 664 – 678, 1999.

25 April 2004

Friedrich-Schiller-Universität,
 Fachhochschule Jena, Germany
 E-mail : nagel@minet.uni-jena.de

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 39, Номер 4, 2004

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тематическая серия, V

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора серии	4
Р. В. АМБАРЦУМЯН, Комбинаторные валюации в пространстве прегеодезических	5
Р. Г. АРАМЯН, Восстановление выпуклых тел с помощью функции радиуса кривизны проекции	50
А. С. ХАЧАТРИАН И Г. С. СУКИАСЯН, Распределение длины случайной хорды прямоугольного параллелепипеда	69
В. НАГЕЛЬ И В. ВАЙС, Мозаики трещин STIT – существование и единственность мозаик устойчивых при итерациях	84

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 39, No. 4, 2004

INTEGRAL AND STOCHASTIC GEOMETRY, V

CONTENTS

Editor's Message	4
R. V. AMBARTZUMIAN, Combinatorial valuations in the space of pregeodesics	5
R. H. ARAMYAN, Reconstruction of convex bodies from projection curvature radius function	50
A. S. KHACHATRIAN AND H. S. SUKIASIAN, Random chord length probability distributions for right parallelepipeds	69
W. NAGEL AND V. WEISS, Crack STIT tessellations – existence and uniqueness of tessellations that are stable with respect to iterations	84