ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 3, 2004, 3-12

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. М. Айрапетян

Армянский государственный инженерный университет
E-mail : hhairapet@seua.am

Резюме. В статье рассматривается задача типа Дирихле : найти действительную функцию $u(z)$ в $D^+ = \{z; |z| < 1\}$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\lim_{r\to 1-0} \|u(rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{3}$$

где $f_0(t)$, $f_1(t)$ – действительные функции на единичной окружности $T = \{t : |t| = 1\}$, причём $f_0'(t) \in L^1(\rho)$, а $\rho(t)$ – измеримая, неотрицательная функция, определенная на T.

В работах [1] – [5] рассмотрены краевые задачи для аналитических и гармонических функций, когда граничные условия понимаются в смысле сходимости в среднем в классах L^1 и $L^1(\rho)$.

В этой работе исследуется задача (1) – (3), когда $t = 1$ является единственной особой точкой весовой функции $\rho(t)$, причём в этой точке функция $\rho(t)$ является RO-меняющейся (определение приведено ниже). Для любых функций $f_0(t)$, $f_1(t)$ из $L^1(\rho)$ получено одно геометрическое условие, обеспечивающее разрешимость задачи (1) – (3).

Точка $t_0 \in T$ называется **особой** для функции $\rho(t)$, если для любой окрестности $T_0 \subset T$ точки t_0 выполняется хотя бы одно из двух условий $\rho(t) \notin L^\infty(T_0)$ или $(\rho(t))^{-1} \notin L^\infty(T_0)$. Вещественную и положительную функцию $g(\theta)$, измеримую на $(-\pi, \pi]$ будем называть **RO-меняющейся справа в точке** $\theta = 0$, если её можно представить в виде (см. [6])

$$g(\theta) = \exp\left(g_1(\theta) + \int_\theta^a \frac{g_2(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda \right), \quad a, \theta \in (0, \pi], \tag{4}$$

где $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ суть измеримые и ограниченные функции в $(0, \pi]$.
Аналогично определяется класс RO-меняющихся функций в точке $\theta = 0$ слева. Если функция в точке $\theta = 0$ является RO-меняющейся и слева и справа, то будем говорить, что эта функция является **RO-меняющейся в точке** $\theta = 0$.
Так как функция $\rho(t) = \rho(e^{i\theta})$, по предположению, RO-меняющаяся в точке $t = 1$, $(\theta = 0)$, то она представима в виде (4). Из этого представления следует, что

$$\alpha = \sup\left\{\beta : \rho(t)|1 - t|^{-\beta} \in L^\infty(T)\right\} < \infty, \tag{5}$$

и в дальнейшем мы будем предполагать, что $\alpha \geq 0$. Ясно, что функция

$$\rho_1(t) = \rho_1\left(e^{i\theta}\right) = \left|1 - e^{i\theta}\right|^{-\alpha} \rho\left(e^{i\theta}\right), \tag{6}$$

RO-меняющаяся в точке нуль. Функция ρ принадлежит классу R_α, если функция g_2 из представления (4) функции $\rho_1(t) = \rho_1(e^{i\theta})$ удовлетворяет соотношениям

$$\overline{\lim_{\theta\to 0}}\, g_2(\theta) < \{\alpha\} \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{\theta\to 0}}\, g_2(\theta) > \{\alpha\} - 1,$$

если α – нецелое число, а если α – целое число, то

$$\overline{\lim_{\theta\to 0}}\, g_2(\theta) < 1 \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{\theta\to 0}}\, g_2(\theta) \geq 0.$$

В дальнейшем $\gamma = [\alpha] + 1$, если α не целое, и $\gamma = \alpha$, если α целое.
Для произвольной функции $f \in L^1(\rho)$ и целого $n \geq \gamma$, положим

$$(K_n; f)(z) = \frac{1}{2\pi(1 - z)^n} \int_T \frac{f(t)(1 - t)^n(t^{n+1} + z^{n+1})}{t^n(t - z)}\, |dt|. \tag{7}$$

Множество полиномов $P(z)$, порядок которых не больше n и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям

$$a_k = (-1)^{n+1}\bar{a}_{n-k}, \tag{8}$$

обозначим через T_n. Многочлены такого вида обладают следующими свойствами. Если $P(z) \in T_n$, то $(1-z)P(z) \in T_{n+1}$; если $P(z) \in T_n$ делится на $(1-z)$, то $(1-z)^{-1}P(z) \in T_{n-1}$; если $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in T_n$, то

$$\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{P_n(z)}{(1-z)^n} = \frac{Q_n(z)}{(1-z)^{n+2}}, \quad \left(\frac{\hat{d}}{dz} = z\frac{d}{dz}\right). \tag{9}$$

Здесь $Q_n(z) \in T_{n+2}$, причём сумма коэффициентов этого многочлена равна $n(n+1)(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$.

Рассмотрим граничную задачу

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \mathcal{R}F\left(re^{i\phi}\right) - f\left(e^{i\phi}\right)\right\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{10}$$

где $F(z)$ – искомая аналитическая функция и $f \in L^1(\rho)$. Если ρ – RO-меняющаяся функция, то эта задача исследована в работе [5].

Пусть $M(f)$ – максимальная функция Харди– Литллвуда :

$$M(f)(t) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{|\tau-t|<h} |f(\tau|\,|d\tau|.$$

Теорема А, доказанная в [5], неоднократно будет использоваться.

Теорема А. *Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и $\rho_0(t) = |1-t|^{\alpha-\gamma}\rho_1(t)$. Тогда, если*

$$M(\rho_0(t)) < C\rho_0(t), \tag{11}$$

то задача (10) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$, и общее решение представимо в виде

$$F(z) = (K_\gamma; f)(z) + \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}, \tag{12}$$

где $P(z) \in T_\gamma$ – произвольный полином.

Лемма 1. *Пусть $\rho \in R_\alpha$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r^2)\|(1-rt)^{-(\gamma+1)}\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Так как $\rho(t) = |1-t|^\alpha \rho_1(t)$, то

$$\|(1-rt)^{-(\gamma+1)}\|_{L^1(\rho)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1-t|^\alpha \rho_1(t)|dt|}{(1-rt)^{(\gamma+1)}} < \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho_1(t)|dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Из определения числа α следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\rho_1(t) < C|1-t|^{-\varepsilon},$$

где C – постоянная, зависящая от ε. Если α – нецелое число, то выбирая $\varepsilon < \{\alpha\}$, получаем

$$(1-r^2)\left\|(1-rt)^{-(\gamma+1)}\right\|_{L^1(\rho)} < \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)|dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}+\varepsilon}}.$$

Последний интеграл стремиться к нулю при $r \to 1-0$, тем самым утверждение леммы доказано, когда α – нецелое число. Для целого α доказательство аналогично.

Лемма 2. *Если $\rho(t)$ удовлетворяет условию (11), то для любого $k \geq 2$*

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r^2)\left\||1-rt|^{\gamma+k}\right\|_{L^1(\rho)} > 0.$$

Доказательство. Пусть $T_k = \{t; |1-t| < (\gamma+k)^{-1}(1-r)\}$ и $t \in T_k$. Тогда

$$|\arg(1-rt)^{-(\gamma+k)}| < c_0 < \pi/2\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(1-rt)^{-(\gamma+k)} > d_0|1-rt|^{-(\gamma+k)},$$

где $d_0 = \cos c_0$. Предположим, что α – нецелое число. Из (11) следует, что $\rho_1(t) > c|1-t|^{1-\{\alpha\}}$, $c > 0$. Поэтому

$$\int_T\left|\mathcal{R}\left(\frac{1-r^2}{(1-rt)^{\gamma+k}}\right)\right|\rho(t)\,|dt| > d_0\int_{T_k}\frac{(1-r^2)\rho_1(t)|dt|}{|1-rt|^{k+1-\{\alpha\}}} >$$

$$> \frac{d_0}{2^{\gamma+k}(1-r)^{\gamma+k-1}}\int_{T_k}|1-t|^{\gamma}|dt| > \frac{c_1}{(1-r)^{k-2}}, \quad c_1 > 0.$$

Из этой оценки следует доказательство при нецелом α. Пусть теперь α – целое число. Тогда из условия (11) следует, что $\rho_1(t) > c$ для некоторого положительного c. Аналогично получаем

$$(1-r^2)\int_T\frac{\rho(t)|dt|}{|1-rt|^{\gamma+k}} > \frac{2c}{(1-r)^{k-2}}.$$

Лемма 3. *Пусть функция $\rho \in R_\alpha$ удовлетворяет условию (11) и $f \in L^1(\rho)$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)\left\|((K_\gamma;f)(rt))'_z\right\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть, сначала, $f(t) \in C^{(1,\delta)}$, $\delta > 0$. Используя свойство интеграла Коши, имеем (см. [9])

$$|((K_\gamma;f)(rt))'_z| < |1-rt|^{-\gamma-1},$$

где C – константа. Поэтому для функций из класса $C^{(1,\delta)}$ соотношение (14) следует из леммы 1. Так как $C^{(1,\delta)}$ почти всюду плотно в $L^1(\rho)$, то остаётся показать, что существует постоянная C такая, что

$$(1-r)\,\|((K_\gamma; f)(rt))'_z\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}. \tag{15}$$

Из (7) при $n=\gamma$ имеем $((K_\gamma; f)(z))'_z = I_1(rt) + I_2(rt)$, где

$$I_1(rt) = \frac{\gamma}{2\pi(1-rt)^{\gamma+1}} \int_T \frac{f(t)(1-t)^\gamma (t^{\gamma+1} + (rt)^{\gamma+1})|dt|}{t^\gamma (t-rt)},$$

$$I_2(rt) = \frac{1}{2\pi(1-rt)^\gamma} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma (\tau^{\gamma+1} + (\gamma+1)tz^\gamma - \gamma(rt)^{\gamma+1})|d\tau|}{t^\gamma(\tau-rt)^2}.$$

Далее, имеем

$$(1-r)^2 \int_T |I_1(rt)|\rho(t)|dt| <$$
$$< C\int_T |f(\tau)|\rho(\tau)\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho(\tau)} \int_T \frac{(1-r)^2|1-t|}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}|dt|\,|d\tau|.$$

Так как (см. [5]),

$$\sup \frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho(\tau)} \int_T \frac{(1-r)^2|1-t|}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}|dt|\,|d\tau| < \infty,$$

то получаем

$$(1-r)^2 \int_T |I_1(rt)|\rho(t)\,|dt| < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Аналогично, имеем

$$(1-r)^2 \int_T |I_2(rt)|\rho(t)\,|dt| < C\int_T |f(\tau)|\rho(\tau)\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho(\tau)} \int_T \frac{(1-r)^2}{|\tau-rt|^2}\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}|dt|\,|d\tau|.$$

Учитывая оценку (см. [8])

$$\int_T \frac{(1-r)^2}{|\tau-rt|^2}\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}\,|dt| < CM\left(\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}\right)$$

где M – максимальная функция Харди–Литтлвуда, и условие (11), получаем

$$(1-r)^2 \int_T |I_2(rt)|\rho(t)|dt| < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым, оценка (15) доказана. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $F(z)$ – аналитическая функция в D^+ и $F(z) \in C(\overline{D^+})$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ её можно представить в виде*

$$F(z) = (K_n; f(t))(z) + \frac{P_n(z)}{(1-z)^n}, \quad f(t) = \mathcal{R}F(t), \quad t \in T,$$

а $P_n(z) \in T_n$ определяется через функцию $F(z)$ однозначно. Именно, $P_n(z) = (1-z)^n(F(z) - (K_n; f))(z)$.

Доказательство. Так как функция $F(z)$ удовлетворяет граничному условию (10) при $\rho(t) = |1-t|^n$, то доказательство леммы непосредственно следует из теоремы A.

Теорема 1. *Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполняется условие (11). Тогда общее решение однородной задачи (1) – (3) можно представить в виде*

$$u(z) = \mathcal{R}\left(\frac{P_0(z)}{(1-z)^{\gamma-1}} - \frac{(1-z\overline{z})}{2}\left(\frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{\hat{d}}{dz}\frac{P_0(z)}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right), \tag{16}$$

где $P_0(z) \in T_{n-1}$, $(P_0(z) \equiv 0, \gamma = 0)$, $P_1(z) \in T_n$.

Доказательство. Пусть $u(z)$ - произвольное решение однородной задачи (1) – (3). Как известно (см. [7]), общее решение уравнения (1) можно представить в виде :

$$u(z) = \mathcal{R}(\Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z)). \tag{17}$$

Здесь $\Phi_k(z)$, $k = 0,1$ – произвольные аналитические функции в D^+ такие, что $\operatorname{Im}\Phi_k(z) = 0$, $k = 0,1$. При этом функции $\Phi_k(z)$, $k = 0,1$ определяются через функцию $u(z)$ однозначно. Полагая $u(rt) = f_r(t)$ и $\Phi_{kr}(z) = \Phi_k(rz)$ $(k = 0,1)$, получаем

$$\mathcal{R}(\Phi_{0r}(t) + (1-r^2)\Phi_{1r}(t)) = f_r(t).$$

По лемме 4,

$$\Phi_{0r}(z) + (1-r^2)\Phi_{1r}(z) = (K : f_r)(z) + \frac{\tilde{P}_{0r}(z)}{(1-z)^\gamma},$$

где $\tilde{P}_{0r}(z) \in T_\gamma$. Так как $f_r(t)(1-t)^\gamma \to 0$ в L^1 при $r \to 1-0$, то переходя к пределу при $r \to 1-0$ в последнем равенстве получаем

$$\Phi_0(z) = \frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad P_0(z) \in T_\gamma.$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = \mathcal{R}\left(t\frac{d\Phi_0(rt)}{dz} - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\frac{d\Phi_1(rt)}{dz}\right).$$

Аналогично получаем

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma}\right), \quad P_1(z) \in T_\gamma.$$

Подставляя $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ в (17), получим

$$u(z) = \mathcal{R}\left(\frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma} + \frac{1-z\bar{z}}{2}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma}\right)\right). \tag{18}$$

Теперь докажем, что функция (18) будет удовлетворять условиям (2) и (3) тогда и только тогда, когда функция $P_0(z)(1-z)^{-\gamma}$ представима в виде $P_0(z)(1-z)^{-(\gamma-1)}$, где $P_0(z) \in T_{\gamma-1}$. Действительно, так как согласно лемме 2

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1-r^2}{2}\left\|\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma} - \frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то функция $u(z)$ из (18) удовлетворяет условию (2) для любых функций $\tilde{P}_0$, $P_1 \in T_\gamma$. Далее,

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = (1-r^2)r^{-1}\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right) + r\mathcal{R}\left(\frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right) +$$

$$+\frac{1-r^2}{2r}\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right) + \frac{1-r^2}{2r}\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma} - \frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right)\right).$$

Так как согласно лемме 2

$$(1-r^2)\left\|\mathcal{R}\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right\| \to 0,$$

$$\frac{1-r^2}{2r}\left\|\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma} - \frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right)\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1-0,$$

а по теореме A

$$\left\|\mathcal{R}\left(\frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1-0,$$

то функция (18) удовлетворяет условию (3) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1-r^2}{2}\left\|\mathcal{R}\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right\| = 0. \tag{19}$$

В силу (9) имеем

$$\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{\bar{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}=\frac{Q(rt)}{(1-rt)^{\gamma+2}}=\frac{A_0}{(1-rt)^{\gamma+2}}+\ldots,$$

где $Q(z)\in T_{\gamma+2}$, а число A_0 равно сумме коэффициентов многочлена $Q(z)$. В силу лемм 1 и 3 имеем $A_0=0$. Используя (9) получим, что сумма коэффициентов многочлена $P_0(z)=0$ равна нулю. Это означает, что $P_0(z)$ делится на $1-z$. Теорема 1 доказана.

Учитывая условия (7), теорему 1 и разлагая коэффициенты многочленов $P_k(z)$, $k=0,1$ на действительные и мнимые части, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Однородная задача (1) – (3) имеет $2\gamma-1$ линейно независимых решений над полем натуральных чисел. Если $\gamma>0$ чётное число, то эти решения представимы в виде*

$$u_{1k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{z^k+z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{z^k+z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\quad k=0,1,\ldots,\frac{\gamma}{2}-1,$$

$$u_{2k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k-z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{i(z^k-z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\ k=1,\ldots,\frac{\gamma}{2}-1,$$

$$u_{3k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{z^k-z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\ k=0,\ldots,\frac{\gamma}{2}-1,$$

$$u_{4k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k+z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\quad k=1,\ldots,\frac{\gamma}{2}.$$

Если же $\gamma>0$ нечётное число, то решения представимы в виде

$$u_{1k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{z^k-z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{z^k-z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\quad k=0,\ldots,\frac{\gamma-1}{2}-1,$$

$$u_{2k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k+z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{i(z^k+z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\ k=1,\ldots,\frac{\gamma-1}{2},$$

$$u_{3k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{z^k+z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\quad k=0,1,\ldots,\frac{\gamma-1}{2},$$

$$u_{4k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k-z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\quad k=1,\ldots,\frac{\gamma-1}{2}.$$

Теорема 3. *Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполнено условие (11) Тогда общее решение задачи (1) – (3) представимо в виде*

$$u(z) = u_0(z) + u_1(z), \tag{20}$$

где $u_0(z)$ – общее решение однородной задачи,

$$u_1(z) = \mathcal{R}\left((K; f_0)(z) + \frac{a_0 + a_\gamma z^\gamma}{(1-z)^\gamma}\right) + \frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}((K_\gamma; tf_0')(z) - (K_\gamma; f_1)(z)), \tag{21}$$

и

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_T f_0(t)t(1-t)^{\gamma-1}d\theta, \quad a_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_T f_0(t)t^{-(\gamma-1)}(1-t)^{\gamma-1}d\theta.$$

Доказательство. Так как $a_0 = (-1)^{\gamma+1}a_\gamma$, то $a_0 + a_\gamma z^\gamma \in T_\gamma$ и поэтому функция

$$\mathcal{R}\left(\frac{a_0 + a_\gamma (rt)^\gamma}{(1-rt)^\gamma}\right)$$

согласно Теореме А, стремится к нулю в $L^1(\rho)$ при $r \to 1-0$. В силу леммы 3 функция

$$\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}((K_\gamma; tf_0'))(z) - (K_\gamma; f_1)(z))$$

также стремится к нулю в $L^1(\rho)$ при $r \to 1-0$. Применяя Теорему А убеждаемся, что $u_1(z)$ удовлетворяет условию (2). Далее, из (21) имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = I_1(r) + I_2(r),$$

где

$$I_1(r) = \frac{1-r^2}{r}\mathcal{R}(K_\gamma; tf_0')(rt) - \mathcal{R}\frac{\gamma(a_0 + a_\gamma z^\gamma)}{(1-z)^\gamma} + r\mathcal{R}(K_\gamma; f_1)(rt)),$$

$$I_2(r) = \frac{1-r^2}{2}(\mathcal{R}((K_\gamma; tf_0')(z))'_z - \mathcal{R}((K_\gamma; f_1)(z))'_z).$$

Из леммы 4 следует, что $I_2(r) \to 0$ в $L^1(\rho)$. Так как первые два слагаемых в выражении для $I_1(r)$ стремятся к нулю в $L^1(\rho)$, а последнее слагаемое по теореме А стремится к f_1, то теорема доказана.

Abstract. The paper considers a Dirichlet type problem : to find a real function $u(z)$ in $D^+ = \{z; |z| < 1\}$ satisfying the equation $\Delta^2 u = 0$ and the boundary conditions

$$\lim_{r\to 1-0}\|u(rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{r\to 1-0}\left\|\frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

where $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_1'(t) \in L^1(\rho)$ are real functions on the unit circle $T = \{t : |t| = 1\}$, $\rho(t)$ is a measurable, nonnegative function defined on T.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L^p(d\mu)$", TAM Soc., vol. 165, pp. 326 - 342, 1962.
2. R. A. Hant, B. Mackenhaupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform", TAM Soc., vol. 176, pp. 227 - 251, 1973.
3. Г. М. Айрапетян, "О граничной задаче сопряжения со сдвигом в классе L^1", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 3, 1987.
4. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia Math., vol. 86, no. 3, pp. 97 - 130, 1987.
5. Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 36, № 3, стр. 22 - 44, 2001.
6. E. Seneta, Regularly Varying Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
7. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
8. J. Garnet, Bounded Analytic Functions, Academic Press, NY, 1981.
9. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Москва, Наука, 1968.

Поступила 29 апреля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 13–20

УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ВПОЛНЕ МОНОТОННЫМ ЯДРОМ

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН Армении

Резюме. В статье рассматривается интегральное уравнение восстановления $\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt$. Доказывается, что если $V < 0$ является вполне монотонной функцией, то решение Φ вполне монотонно.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее интегральное уравнение типа восстановления

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)dt, \tag{1}$$

где $V(x)$ – (вполне монотонная) функция вида

$$V(x) = \lambda \int_a^b e^{-xs} d\sigma(s), \quad 0 \le a < b \le +\infty, \quad -\infty < \lambda < +\infty, \tag{2}$$

а $\sigma(s)$ – неубывающая функция такая, что $\sigma(a) = 0$ и

$$\int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s} = 1. \tag{3}$$

В (2), случай $0 < \lambda \le 1$ представляет большой интерес в связи с приложениями в теории переноса излучения и в кинетической теории газов. Как доказано в [1], при $0 < \lambda \le 1$ функция Φ вполне монотонна, т.е.

$$\Phi(x) = \int_0^b e^{-xp} d\omega(p), \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке МНТЦ грант ISTC-A-823.

где $\omega(t)$ – неубывающая функция на $(0,b)$ такая, что $\omega(0)=0$.

Уравнение (1) часто возникает с $\lambda<0$ (применение метода сдвига альбедо и др., см. [2]). В недавней работе Н. Б. Енгибаряна была выявлена роль уравнения (1) при $\lambda<0$ в теории фильтрации случайных процессов. В частности, представление (4) имеет важное значение для решения задачи фильтрации для обобщённого процесса Буттерворта (см. [3]).

Используя подход работы [1] и некоторые другие построения, в данной статье доказывается, что функция Φ является вполне монотонной для произвольного $\lambda<0$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2.1. Одно свойство редукции. Ниже $E^+=E(0,\infty)$ означает одно из банаховых пространств L_p^+ $(1\le p\le\infty)$ и C_0^+. Рассмотрим алгебру Ω^+ интегральных операторов свертки, действующих в E^+ :

$$(\widehat{V}f)(x)=\int_0^x V(x-t)f(t)\,dt,\quad V\in L_1^+. \tag{5}$$

Обозначим через I единичный оператор в Ω^+. Очевидно, что

$$\|\widehat{V}\|_{E^+}\le\mu=\int_0^\infty |V(x)|\,dx. \tag{6}$$

В Ω^+, ядром произведения $\widehat{V}_1\widehat{V}_2$ является свертка ядер $V_1\star V_2$. Если оператор $I-\widehat{V}$ обратим в E^+, то

$$(I-\widehat{V})^{-1}=I+\widehat{\Phi}, \tag{7}$$

где $\widehat{\Phi}\in\Omega^+$ и

$$(\widehat{\Phi}f)(x)=\int_0^x \Phi(x-t)f(t)\,dt$$

(тогда резольвентное ядро Φ удовлетворяет уравнению (1)).

Лемма 1. *Пусть оператор $I-\widehat{V}$ обратим и пусть $V_n\to V$ в L_1^+. Тогда :*

a) оператор $I-\widehat{V}_n$ обратим при достаточно большом n :

$$(I-\widehat{V}_n)^{-1}=I+\widehat{\Phi}_n,\quad n\ge n_0,$$

где

$$(\widehat{V}_nf)(x)=\int_0^x V_n(x-t)f(t)\,dt,\quad (\widehat{\Phi}_nf)(x)=\int_0^x \Phi_n(x-t)f(t)\,dt,\quad \Phi_n\in L_1^+.$$

b) $\Phi_n\to\Phi$ в L_1^+, $n\ge n_0$.

Доказательство. a) В силу (7) имеем равенства

$$I - \widehat{V}_n = I - \widehat{V} - (\widehat{V}_n - \widehat{V}) = (I - \widehat{V})\big[I - (I + \widehat{\Phi})(\widehat{V}_n - \widehat{V})\big]. \tag{8}$$

Выберем n_0 достаточно большим так, чтобы при $n \geq n_0$

$$\|\widehat{V}_n - \widehat{V}\| < \frac{1}{2(1 + \|\widehat{\Phi}\|)},$$

тогда будем иметь

$$\|(I + \widehat{\Phi})(\widehat{V}_n - \widehat{V})\| < \frac{1}{2}$$

и оператор в квадратных скобках в (8) также будет обратим. Следовательно, оператор $I - \widehat{V}_n$ обратим при $n \geq n_0$. Из (8) получаем следующую оценку :

$$\|(I - \widehat{V}_n)^{-1}\| \leq 2\|(I - \widehat{V})^{-1}\|, \quad n \geq n_0. \tag{9}$$

b) Записав уравнения для Φ_n и Φ в операторной форме $\Phi_n = V_n + \widehat{V}_n\Phi_n$, $\Phi = V + \widehat{V}\Phi$, и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$\Phi_n - \Phi = V_n - V + \widehat{V}(\Phi_n - \Phi) - (\widehat{V} - \widehat{V}_n)\Phi_n.$$

Следовательно,

$$(I - \widehat{V})(\Phi_n - \Phi) = V_n - V - (\widehat{V} - \widehat{V}_n)\Phi_n. \tag{10}$$

По условию леммы существует обратный оператор (7). Применяя этот оператор к обеим частям уравнения (10) и учитывая свойство коммутативности операции свертки, получаем

$$\Phi_n - \Phi = (I + \widehat{\Phi})(I + \widehat{\Phi}_n)(V_n - V).$$

Перейдя к норме с учётом (9), получаем

$$\|\Phi_n - \Phi\| \leq 2\|I + \widehat{\Phi}\|^2\|(V_n - V)\|, \quad n \geq n_0. \tag{10'}$$

2.2. Разрешимость уравнения (1) – (3) в L_1^+. Известно, что для произвольного $V \in L_1^{loc}$ уравнение (1) имеет единственное решение $\Phi \in L_1^{loc}$, где L_1^{loc} – класс функций, заданных на $[0, \infty)$ и интегрируемых на каждом конечном интервале $[0, r]$ $(0 < r < \infty)$.

Согласно теореме Винера-Леви, вложение $\Phi \in L_1^+ = L_1(0, \infty)$ и тем самым обратимость оператора $I - \widehat{V}$ эквивалентна следующим двум условиям :

$$I - \overline{V}(s) \neq 0 \quad (s \in \mathbb{R}), \quad \mathrm{Ind}\,\big[1 - \overline{V}(s)\big] = 0, \tag{11}$$

где
$$\overline{V}(s) = \int_0^\infty e^{isx} V(x)\,dx.$$
Поскольку $\overline{V}(s) = \lambda \int_a^b \frac{d\sigma(q)}{q - is}$, получим
$$1 - \overline{V}(s) = 1 - \lambda \int_a^b \frac{d\sigma(q)}{q - is} = 1 - \lambda \int_a^b \frac{q}{q^2 + s^2}\,d\sigma(q) - i\lambda s \int_a^b \frac{d\sigma(q)}{q^2 + s^2}.$$
Поэтому, $\mathrm{Re}\,[1 - \overline{V}(s)] \geq 1$ при $\lambda < 0$ и $s \in R$, откуда следует условие (11).

§3. СЛУЧАЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ σ И $\lambda < 0$.

Перейдем к доказательству представления (4). Как и в работе [1], сначала рассмотрим случай, когда V является конечным линейным агрегатом экспонент, т.е.
$$V(x) = \widetilde{V}(x) = -\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-s_k x}, \tag{12}$$
где $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$, а $a_k > 0$ – величины скачков функции $-\lambda\sigma$ в соответствующих точках s_k. Тогда
$$-\lambda\sigma(s) = -\lambda\,\widetilde{\sigma}(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \vartheta(s - s_k), \tag{13}$$
где ϑ – функция единичного скачка. Ищем решение уравнения (1) в виде
$$\Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) = -\sum_{m=1}^{n} b_m e^{-p_m x}, \tag{14}$$
где $b_m, p_m > 0$ $(1 \leq m \leq n)$, а все точки p_m отличны от точек s_k. Подставляя (12) и (14) в (1), для определения чисел p_k приходим к следующему характеристическому уравнению (см. также [2]) :
$$f(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k - p} = -1. \tag{15}$$
Коэффициенты b_m удовлетворяют линейной алгебраической системе
$$\sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{p_m - s_k} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$
Ясно, что уравнение (15) эквивалентно алгебраическому уравнению n-го порядка относительно p. Теперь покажем, что все n корней уравнения (15) вещественные, различные и расположены в следующем порядке :
$$0 < s_1 < p_1 < s_2 < \ldots < s_k < p_k < s_{k+1} < \cdots < s_n < p_n.$$

Функция f, определённая по (15), непрерывна и строго возрастает на каждом интервале (s_k, s_{k+1}), $k = 1, \ldots, n-1$ и $(s_n, +\infty)$, причём, $f(s_k+) = -\infty$ и $f(s_{k+1}-) = +\infty$. Поэтому, уравнение (15) имеет точно один корень p_k в каждом из указанных интервалов. Так как $f(+\infty) = 0$ и $f(s_n+) = -\infty$, то существует корень $p_n \in (s_n, +\infty)$.

Воспользуемся системой (16) с матрицей Коши $\left(\frac{1}{s_k - p_m}\right)$ $(k, m = 1, \ldots, n)$, чтобы найти $\{b_m\}$. Уравнение (16) имеет единственное решение, причём справедливы формулы :

$$b_m = \frac{\prod_{k=1}^{n}(p_m - s_k)}{\prod_{k \neq m}(p_m - p_k)}, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

В выражении каждого b_m, первые m множителей в числителе и первые $m-1$ множителей в знаменателе положительны, а все остальные $n - m$ множителей как в числителе, так и в знаменателе отрицательны. Поэтому $b_m > 0$ для всех $m = 1, \ldots, n$.

Аналогично [1], применяя преобразование Лапласа можно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{n} b_m, \tag{17}$$

которым мы воспользуемся ниже.

Итак, мы доказали, что решение уравнения (1), (12) имеет вид

$$\widetilde{\Phi}(x) = -\int e^{-xp} d\widetilde{\omega}(p), \tag{18}$$

где

$$\widetilde{\omega}(p) = \sum_{m=1}^{n} b_m \vartheta(p - p_m), \tag{19}$$

числа $\{p_m\}$ и $\{b_m\}$ определяются соответственно из (15) и (16), кроме того имеет место равенство (17).

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ (4) В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

4.1. Теперь докажем представление (4) в общем случае (2), используя как и в работе [1], аппроксимацию меры $d\sigma$ мерами $d\widetilde{\sigma}$ вида (13) и вычисляя предел в (19). Для произвольного $\lambda < 0$ имеем $\Phi \in L_1^+$ и

$$\gamma = \|\Phi\|_{L_1^+} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}.$$

Рассмотрим возрастающую последовательность $S = S_n = \{s_k\}_{k=1}^{n}$ чисел из (a, b) такую, что $a_k = \sigma(s_k) - \sigma(s_{k-1}) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Каждому такому набору S

указанного типа, поставим в соответствие функцию $\widetilde{\sigma}$ вида (13) и функцию $\widetilde{V}$ вида (12).

Заметим, что при добавлении новой точки к числам $\{s_k\}$, функция $V = \widetilde{V}$ не возрастает. Действительно, если добавить новую точку $s' \in (s_j, s_{j+1})$ к $S_n = \{s_k\}$, то слагаемые при $k \leq j$ и $k \geq j+2$ в (12) остаются без изменения, а слагаемое $-a_{j+1}e^{-xs_{j+1}}$ заменяется суммой $-(a'_{j+1}e^{-xs'} + a''_{j+1}e^{-xs_{j+1}})$, где $a'_{j+1} = \sigma(s') - \sigma(s_j)$ и $a''_{j+1} = \sigma(s_{j+1}) - \sigma(s')$. Заметим, что $a_{j+1} = \sigma(s_{j+1}) - \sigma(s_j)$ влечет $a_{j+1} = a'_{j+1} + a''_{j+1}$. Кроме того, $-e^{-xs'} < -e^{-xs_{j+1}}$. Следовательно,

$$-a_{j+1}e^{-xs_{j+1}} \geq -(a'_{j+1}e^{-xs'} + a''_{j+1}e^{-xs_{j+1}}).$$

Нетрудно показать, что $p'_i < p_i$ при $i \leq j$ и одновременно $p'_{i+1} < p_i$ при $i > j$, где $\{p'_i\}$ – корни характеристического уравнения (15), соответствующие множеству $S' = s' \cup S_n$ $(s' \in (s_j, s_{j+1}))$.

Рассмотрим расширяющуюся последовательность (S_n) множеств типа S. Пусть функции σ_n и V_n имеют вид (13) и (12) для (S_n), и пусть ω_n и Φ_n суть соответствующие функции вида (19) и (14). Согласно уже доказанному утверждению, вложение $S_n \subset S_{n+1}$ влечет $V_{n+1} \leq V_n$, т.е. $V_n \downarrow$ по n. Теперь допустим, что последовательность S_n такая, что интегральные суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k}[\sigma(s_k) - \sigma(s_{k-1})]$$

стремятся к $\int_a^b s^{-1} d\sigma(s)$. Тогда $V_n \to V$ в L_1^+. Далее, функции Φ_n удовлетворяют уравнениям :

$$\Phi_n(x) = V_n(x) + \int_0^x V_n(x-t)\Phi_n(t)\,dt, \quad \lambda < 0. \tag{20}$$

В отличие от случая $0 < \lambda \leq 1$ (см. [1]), Φ_n не обязательно является монотонной от n : согласно Лемме 1 имеем $\Phi_n \to \Phi$ в L_1^+. Рассмотрим теперь вопрос существования предела последовательности ω_n. Пусть $\sigma(b) < +\infty$. Тогда из (17) вытекает $\omega_n(b) = \sigma_n(b) \leq \sigma(b) < +\infty$ при $n \geq 1$. Следовательно, последовательность монотонных функций ω_n ограничена в совокупности. Согласно второй теореме Хелли, из ω_n можно выделить подпоследовательность ω_{n_k}, которая сходится в любой точке интервала (a, b) к некоторой функции ω, причем $\omega(0) = 0$, $\omega(b) = \sigma(b)$ и $\omega(s) \uparrow$ по s. Согласно первой теореме Хелли, в представлении (18) для Φ_{n_k} можно совершить предельный переход при $k \to \infty$:

$$\Phi_{n_k}(x) \to \widetilde{\Phi}(x), \quad x \in (0, +\infty). \tag{21}$$

С другой стороны, согласно Лемме 1, $\Phi_{n_k}(x) \to \Phi(x)$ в L_1^+. Следовательно, эта сходимость имеет место также по мере. Поэтому, из Φ_{n_k} можно выбрать подпоследовательность $\Phi_{n_{k_s}}$ такую, что $\Phi_{n_{k_s}} \to \Phi$ почти всюду. Итак, $\Phi = \widetilde{\Phi}$ почти всюду.

4.2. Сходимость последовательности Φ_n. Следуя работе [4] покажем, что последовательность $\omega_n(p_0)$ сходится к $\omega(p_0)$ в любой точке p_0 непрерывности функции ω.

Действительно, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_{n_k}(p_0) = \omega(p_0)$. Если $\omega_n(p_0)$ не сходится к $\omega(p_0)$, то из $\omega_n(p_0)$ можно выбрать другую подпоследовательность ω_{m_i} такую, что

$$\lim_{i\to\infty} \omega_{m_i}(p_0) = A \neq \omega(p_0). \tag{22}$$

Последовательность ω_{m_i} удовлетворяет условиям второй теоремы Хелли, и поэтому можно выбрать подпоследовательность $\omega_{m_{i_j}}$ такую, что

$$\lim_{j\to\infty} \omega_{m_{i_j}}(p) = \widetilde{\omega}(p).$$

Из (22) следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} \omega_{m_{i_j}}(p_0) = A = \widetilde{\omega}(p_0)$. Таким образом, $\omega(p_0) \neq \widetilde{\omega}(p_0)$. Согласно первой теореме Хелли можно совершить предельный переход $j \to \infty$ в представлениях функций $\Phi_{m_{i_j}}(x)$ вида (18). С другой стороны, $\Phi_{m_{i_j}}(x) \to \Phi(x)$ почти всюду. Поэтому,

$$\Phi(x) = \int_a^b e^{-xp} d\widetilde{\omega}(p),$$

причем $\widetilde{\omega}(p_0) \neq \omega(p_0)$. Это противоречит тому факту, что мера $d\omega$ в представлении (4) вполне монотонной функции Φ определяется единственным образом (теорема Бернштейна, см. [5]). Итак, мы доказали, что при $\sigma(b) < \infty$ последовательность ω_n точечно сходится к функции ω.

4.3. Случай $\sigma(b) = +\infty$. Наряду с $d\omega_n$, рассмотрим некоторые меры dg_n, где

$$g_n(p) = \int_0^p \frac{d\omega_n(p')}{p'}.$$

Очевидно

$$\lim_{p\to\infty} g_n(p) = \gamma_n = \int_0^\infty \Phi_n(x)\, dx.$$

Следовательно, последовательность функций $\{g_n\}$ ограничена. Используя вторую теорему Хелли, из $\{g_n\}$ выберем подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$, которая сходится в каждой точке $p \in [0, \infty)$: $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(p) = g(p)$. Тогда имеем

$$\Phi_{n_k}(x) = \int_0^\infty e^{-xp} p\, dg_{n_k}(p).$$

При любом $x > 0$, функция $e^{-xp}p$ интегрируема по p на $(0, \infty)$. По первой теореме Хелли, из (20) вытекает

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xp} p dg(p).$$

Поэтому, обозначив $\omega(p) = \int_0^p p' dg(p')$ получим представление (4) при $\sigma(b) = +\infty$. Аналогично случаю $\sigma(b) < +\infty$, можно показать, что Φ является пределом последовательности Φ_n. Таким образом, доказана следующая основная теорема.

Теорема. *Пусть $\lambda < 0$ и пусть в уравнении (1) функция V представима в виде (2). Тогда решение Φ уравнения (1) имеет вид (4). При этом, функция Φ является пределом в L_1^+ решений Φ_n усеченных уравнений (20).*

4.4. Оценка близости Φ_n и Φ. С учетом (20) и неравенства $\Phi_n \leq 0$, получим

$$\|I + \widehat{\Phi}_n\| = 1 - \frac{\lambda \mu_n}{1 - \lambda \mu_n} \leq 1 - \frac{\lambda}{1 - \lambda},$$

где $\mu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k} \leq 1$. Следовательно, из (10')

$$\|\Phi - \Phi_n\| \leq -\lambda(1 - \mu_n) \left(\frac{1 - 2\lambda}{1 - \lambda} \right)^2 \leq -4\lambda(1 - \mu_n).$$

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за поддержку и руководство работой.

Abstract. The paper considers the renewal integral equation $\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x - t)\Phi(t)\, dt$. It is proved that if $V < 0$ is a completely monotonic function, then the solution Φ is completely monotonic.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, “Об одном классе интегральных уравнений восстановления”, Мат. Заметки, том 47, № 6, стр. 23 – 30, 1990.
2. Н. Б. Енгибарян, “О многократной факторизации интегральных операторов”, Ж. Выч. мат. и мат. физики, том 37, № 4, стр. 447 – 758, 1997.
3. J. Casti, R. Kalaba, Imbedding Methods in Applied Mathematics, Addison-Wesley, 1973.
4. Г. Р. Назарян, “Об уравнении восстановления с вполне монотонным ядром”, Изв. НАН Армении, серия Математика, том 32, № 1, 1997.
5. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, Проблема Моментов Маркова и Экстремальные Задачи, Наука, Москва, 1973.

Поступила 27 мая 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 21-38

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ НЕЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян

Ереванский государственный университет

Резюме. Изучается поведение на бесконечности многочленов двух переменных. В терминах кратностей нулей однородных подмногочленов P_j $(j = 0, 1, 2)$, изучаемого многочлена $P(\xi_1, \xi_2) = P_0(\xi_1, \xi_2) + P_1(\xi_1, \xi_2) + P_2(\xi_1, \xi_2)$ получены необходимые и достаточные условия при которых $|P(\xi_1, \xi_2)| \to \infty$ при $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \to \infty$.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ. СЛУЧАЙ $\sum_4 = \emptyset$

Многие свойства общих линейных дифференциальных операторов с частными производными (такие как эллиптичность, гипоэллиптичность, гиперболичность, характеристическая простота и другие) определяются поведением на бесконечности, отвечающих этим операторам характеристических многочленов (полных символов). В многомерном случае, на поведение многочлена от n переменных $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ решающую роль могут играть младшие члены. Для иллюстрации рассмотрим следующие многочлены, где $n = 2$ и $a, b \in R^1$.

Пример 1. $P^1(\xi) = (\xi_1 + \xi_2)^2 \xi_1^2 + a\xi_2^2$. Очевидно, при $a > 0$, $P^1(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \to \infty$. В тоже время, P^1 не обладает этим свойством при $a \le 0$.

Пример 2. $P^2(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2b(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + (\xi_1^2 + \xi_2^2)$. Представив этот многочлен в виде $P^2(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)\left[(\xi_1 - \xi_2)^2 + 2b(\xi_1 - \xi_2) + 1\right]$, легко убедиться, что $|P^2(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, когда $|b| < 1$, в то время как $P^2(\xi^s) = 0$ на последовательности $\xi^s = ((s - b) + \sqrt{b^2 - 1}, s)$ $(s = 1, 2, \dots)$, когда $|b| \ge 1$.

Другие примеры приведены в конце заметки. На примеры 5 и 6 наше внимание обратил профессор Н. Е. Товмасян. Авторы выражают ему свою глубокую

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS грант № 99-01080.

признательность за полезное обсуждение работы в целом.

В приведённых примерах 1 и 2, на поведение многочлена на бесконечности определяющую роль играют младшие члены. Эта ситуация характерна для многочленов "сильно отличающихся" от эллиптических. В. П. Михайлов (см. [1], [2]) ввёл класс полных невырождающихся многочленов, которые бесконечно растут при бесконечном возрастании модуля аргумента. Этот класс содержит не только эллиптические и полуэллиптические многочлены, но и определённый класс (регулярных) гипоэллиптических многочленов. При этом было показано, что порядок роста таких многочленов зависит только от старших членов.

В работах многих авторов, где рассматриваются неэллиптические (вырождающиеся) дифференциальные операторы, либо на характеристический многочлен ставится условие о стремлении к бесконечности при неограниченном возрастании модуля аргумента, либо это свойство многочлена следует из таких более сложных свойств как гипоэллиптичность, характеристическая простота и др. (см., например, [3 - 9]). Однако, детальный анализ показывает, что многие алгебраические свойства, вытекают из бесконечного возрастания этих многочленов на бесконечности. Поэтому естественным образом возникает вопрос о нахождении критериев при которых $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ для многочленов многих переменных. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Мы будем рассматривать многочлены двух переменных с вещественными коэффициентами следующего вида :

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + P_2(\xi), \tag{1.1}$$

где P_i - однородный многочлен порядка m_i $(i = 0, 1, 2)$, $m_0 > m_1 > m_2 \geq 0$. Для многочленов с действительными коэффициентами свойство $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ равносильно утверждению, что либо $P(\xi) \to +\infty$, либо $P(\xi) \to -\infty$ для всех последовательностей $\{\xi\}$ таких, что $|\xi| \to \infty$. Обозначим через I_2 множество многочленов вида (1.1), таких, что $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$.

Для многочлена P вида (1.1), положим $\Sigma(P_j) = \{0 \neq \eta \in R^2,\ P_j(\eta) = 0\}$ $(j = 0, 1, 2)$ и обозначим через $\ell_j(\eta)$ кратность корня $\eta \in \Sigma(P_j)$. По определению будем считать, что если $\eta \notin \Sigma(P_j)$ $(0 \leq j \leq 2)$, то $\ell_j(\eta) = 0$.

Если $P_2(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma^0 \equiv \Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1)$ или $\Sigma^0 \neq \emptyset$ и $m_2 = 0$, т.е. $P_2(\xi) \equiv \mathrm{const}$, то очевидно $P \notin I_2$. Поэтому всюду далее будем считать, что $m_2 > 0$ и $P_2(\eta) \neq 0$ $(\ell(\eta) = 0)$ для всех $\eta \in \Sigma^0$.

Для полноты изложения приведём следующее предложение, являющееся частным случаем леммы 1.2 работы [7].

Лемма 1.1. *1) Пусть $P \in I_2$. Тогда : 1) $P_0(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in R^2$, 2) если $\Sigma(P_0) = \emptyset$, то $P \in I_2$, 3) если $\Sigma(P_0) \neq \emptyset$ и $\Sigma^0 = \emptyset$, то $P \in I_2$ тогда и только тогда, когда $P_1(\eta) > 0$ для всех $\eta \in \Sigma(P_0)$.*

Таким образом дело сводится к изучению поведения на бесконечности многочленов вида (1.1) для которых $\Sigma^0 \neq \emptyset$, $m_2 > 0$ и $\ell_2(\eta) = 0$ для всех $\eta \in \Sigma^0$. Для точки $\eta \in \Sigma^0$, положим

$$\chi_0(P_j,\eta,\delta) = m_j - \ell_j(\eta)\delta \quad (j = 0,1,2), \qquad \chi(P,\eta,\delta) = \max_{j\leq j\leq 2} \chi_0(P_j,\eta,\delta),$$

$$\delta_{0,1}(\eta) = \frac{m_0 - m_1}{\ell_0(\eta) - \ell_1(\eta)}, \qquad \delta_{1,2}(\eta) = \frac{m_1 - m_2}{\ell_1(\eta) - \ell_2(\eta)} = \frac{m_1 - m_2}{\ell_1(\eta)}.$$

Таким образом, $\delta_{1,2}(\eta) > 0$ для всех точек $\eta \in \Sigma^0$ и $\delta_{0,1}(\eta) > 0$, если $\ell_0(\eta) > \ell_1(\eta)$ Исходя из этого, положим $\Sigma_0 = \Sigma(P_0) \setminus \Sigma(P_1)$ и разобьём множество Σ^0 на следующие подмножества

$$\Sigma_1 = \{\eta \in \Sigma^0,\ \ell_0(\eta) \leq \ell_1(\eta)\}, \quad \Sigma_2 = \{\eta \in \Sigma^0,\ \ell_0(\eta) > \ell_1(\eta),\ \delta_{0,1}(\eta) > \delta_{1,2}(\eta)\},$$
$$\Sigma_3 = \{\eta \in \Sigma^0, \quad \ell_0(\eta) > \ell_1(\eta), \quad \delta_{0,1}(\eta) < \delta_{1,2}(\eta)\},$$
$$\Sigma_4 = \{\eta \in \Sigma^0, \quad \ell_0(\eta) > \ell_1(\eta), \quad \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta)\}.$$

Тогда $\Sigma(P_0) = \Sigma_0 \cup \Sigma^0 = \cup_{j=0}^4 \Sigma_j$. Очевидно, что $\chi_0(P_2,\eta,\delta) = m_2$ для всех $\eta \in \Sigma^0$ и всех $\delta \geq 0$. Следовательно, легко показать, что при $j = 2,3,4$ множества Σ_j эквивалентным образом можно определить так :

$$\Sigma_2 = \{\eta \in \Sigma^0, \quad \chi_0(P_1,\eta,\delta) < \chi(P - P_1,\eta,\delta), \quad \text{для всех } \delta \geq 0\},$$
$$\Sigma_4 = \{\eta \in \Sigma^0, \quad \chi_0(P_0,\eta,\delta_0(\eta)) < \chi_0(P_1,\eta,\delta_0(\eta)) = m_2,\},$$

где $\delta_0(\eta) = \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta)$. Что же касается множества Σ_3, то для точек $\eta \in \Sigma_3$ имеем $\chi_0(P_1,\eta,\delta) \leq \chi(P - P_1,\eta,\delta)$, если $\delta \in [0, \delta_{0,1}(\eta)]$ и $\chi(P - P_1,\eta,\delta) < \chi_0(P_1,\eta,\delta)$, если $\delta \in (\delta_{0,1}(\eta), \delta_{1,2}(\eta))$.

Замечание 1.1. Пусть $R(\xi) = R(\xi_1,\xi_2)$ – однородный многочлен, $\eta \in \Sigma(R)$ и $\ell = \ell(\eta)$ – порядок нуля η. Далее, пусть $N = N(\eta) = (N_1, N_2)$ – произвольный вектор, линейно независимый от η. Легко убедиться, что $D_N^\ell R(\eta) \neq 0$, где D_N – производная по направлению N :

$$D_N^\ell R(\eta) = \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{N^\alpha}{\alpha!} D^\alpha R(\eta).$$

Также имеем $D_N^\ell R(\eta) > 0$ если $R(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in R^2$ из некоторой окрестности точки η. Всюду далее будем считать, что $(N,\eta) = 0$ и $|N| = 1$.

Теорема 1.1. *Пусть $\Sigma_4 = \emptyset$. Тогда каждое из следующих условий необходимо и их одновременное выполнение достаточно для включения $P \in I_2$:*

1) $P_1(\eta) > 0$ для всех $\eta \in \Sigma_0$,

2) $P_2(\eta) > 0$ для всех $\eta \in \Sigma^0$,

3) Пусть $\eta \in \Sigma_3$ и однородный многочлен P_1 представлен в виде

$$P_1(\xi) = (\eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2)^{\ell_1} r_1(\xi) \tag{1.2}$$

(см. [13] или [14]), где r_1 – однородный многочлен порядка $m_1 - \ell_1$ и $r_1(\eta) \neq 0$. Тогда ℓ_1 число чётное и $r_1(\eta) > 0$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1.2 работы [7]. Для доказательства достаточности сделаем обратное предположение : при выполнении условий теоремы, существуют последовательность $\{\tau^s\}$ и число $C \geq 0$ такие, что $|\tau^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\tau^s)| \leq C \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

Положим $\eta^s = \tau^s/|\tau^s|$. Тогда $|\eta^s| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и выбирая подпоследовательность можно считать, что $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$.

Если $P_0(\eta) \neq 0$ или $\eta \in \Sigma_0$, то противоречие очевидно. Пусть $\eta \in \Sigma^0$, $0 \neq N \in R^2$ и $(N, \eta) = 0$. Представляя τ^s по ортогональному базису $\{\eta, N\}$, получаем

$$\tau^s = \varphi_s\eta + \psi_s N \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Очевидно, $\varphi_s^2 + \psi_s^2 \to \infty$ и $\psi_s/\varphi_s \to 0$, при этом, не умаляя общности, можно считать, что $\varphi_s \geq 1$, $\psi_s > 0$ $(s \to \infty)$. Положим $\rho_s = 1 - \ln\psi_s/\ln\varphi_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Если $\rho_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то применяя формулу Тейлора, получаем противоречие с (1.3). Пусть $0 \leq \rho_s \leq \rho < \infty$ $(s = 1, 2, \ldots)$. За счёт выбора подпоследовательности можно считать, что $\rho_s \to \delta_1$ при $s \to \infty$. Пусть сначала $\delta_1 = 0$. Выбирая число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $m_0 - \varepsilon\ell_0 > \max\{m_1 + \varepsilon\ell_1, m_2\}$ и применяя формулу Тейлора получаем

$$|P(\tau^s)| \geq |P_0(\tau^s)| - |P_1(\tau^s)| - |P_2(\tau^s)| \geq \frac{1}{2} D_N^{\ell_0} P_0(\eta)\varphi_s^{m_0 - \varepsilon\ell_0} \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Так как $D_N^{\ell_0} P_0(\eta) > 0$, то это противоречит (1.3). Наконец, пусть $\delta_1 > 0$. Если $\eta \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, то $\chi_0(P_1, \eta, \delta_1) < \chi(P - P_1, \eta, \delta_1)$. Выберем число $\varepsilon \in (0, \delta_1)$ так, чтобы $\chi_0(P_1, \eta, \delta_1 - \varepsilon) < \chi(P - P_1, \eta, \delta_1 + \varepsilon)$, и воспользуемся тем, что $D_N^{\ell_0} P_0(\eta) > 0$, $P_2(\eta) > 0$. Тогда применяя формулу Тейлора, получим противоречие. В случае $\eta \in \Sigma_3$, противоречие очевидно, а так как $\Sigma_4 = \emptyset$, то теорема полностью доказана.

§2. СЛУЧАЙ $\sum_4 \neq \emptyset$. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ОДНОМЕРНОМУ СЛУЧАЮ

Пусть $\Sigma_4 = \Sigma_4(P) \neq \emptyset$ и $\eta \in \Sigma_4$. Предположим, что $N = N(\eta) \in R^2$, $|N| = 1$, $(N, \eta) = 0$ и

$$A(\eta) = \left[\left|\frac{D_N^{\ell_1} P_1(\eta)}{D_N^{\ell_0} P_0(\eta)}\right| \frac{\ell_0!}{\ell_1!}\right]^{\frac{1}{\ell_0-\ell_1}} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть многочлен (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 1.1 при $\eta \in \Sigma(P_0) \setminus \Sigma_4$ и $t_s \to \infty$. Тогда $P \in I_2$ в том и только в том случае, когда $P(\xi^s) \to +\infty$ при $s \to \infty$, где*

$$\xi^s = t_s(\eta + t_s^{-\delta_0(\eta)} x_s N) \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

$\eta \in \Sigma_4$, $|x_s| \le A(\eta)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *и* $\delta_0(\eta) = \delta_{0,1}(\eta) = \delta_{1,2}(\eta)$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть, наоборот, P удовлетворяет условиям теоремы 1.1 при $\eta \in \Sigma(P_0) \setminus \Sigma_4$, $P(\xi^s) \to +\infty$ при $s \to \infty$ на последовательностях вида (2.2), и $P \notin I_2$, т.е. пусть существуют последовательность $\{\tau^s\}$ и число $C \ge 0$, удовлетворяющие неравенству (1.3). Представляя точки $\{\tau^s\}$ по ортогональному базису $\{\eta, N\}$ в виде (1.4) и повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы 1.1, придём к противоречию, когда при $s \to \infty$

$$\rho_s = 1 - \frac{\ln \psi_s}{\ln \varphi_s} \to \delta_0 \neq \delta_0(\eta), \quad \eta \in \Sigma_4.$$

Следовательно, достаточно изучить случай, когда $\delta_0 = \delta_0(\eta)$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma_4$. В этом случае, применяя формулу Тейлора, получаем

$$\begin{gathered} P(\tau^s) = \varphi_s^{m_2} \left[\frac{D_N^{\ell_0} P_0(\eta)}{\ell_0!} x_s^{\ell_0} + \frac{D_N^{\ell_1} P_1(\eta)}{\ell_1!} x_s^{\ell_1} + P_2(\eta)\right] + \\ + \sum_{i \ge 1} \varphi_s^{m_2 - i\delta_0} \left[\frac{D_N^{\ell_0+i} P_0(\eta)}{(\ell_0+i)!} x_s^{\ell_0+i} + \frac{D_N^{\ell_1+i} P_1(\eta)}{(\ell_1+i)!} x_s^{\ell_1+i} + \frac{D_N^i P_2(\eta)}{i!} x_s^i\right], \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$x_s = \frac{\psi_s}{\varphi_s^{1-\delta_0}} \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Если (для некоторой подпоследовательности) $x_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то так как $\ell_0(\eta) > \ell_1(\eta)$ при $\eta \in \Sigma_4$ и $D_N^{\ell_0} P_0(\eta) \neq 0$ (см. Замечание 1.1), из (2.3) получаем

$$|P(\tau^s)| = \varphi_s^{m_2} x_s^{\ell_0} \left[\frac{D_N^{\ell_0} P_0(\eta)}{\ell_0!} + o(1)\right] \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

что противоречит (1.3).

Пусть теперь множество $\{x_s\}$ ограничено. Тогда за счёт выбора подпоследовательности, можно считать, что $\{x_s\}$ сходится. Пусть $x_s \to \overline{x}$ при $s \to \infty$. Если $|\overline{x}| \geq A(\eta)$ (см. (2.1)), то для достаточно больших s имеем

$$|Q_0(x_s,\eta)| \equiv \left| \frac{D_N^{\ell_0} P_0(\eta)}{\ell_0!} x_s^{\ell_0} + \frac{D_N^{\ell_1} P_1(\eta)}{\ell_1!} x_s^{\ell_1} + P_2(\eta) \right| \geq \frac{1}{2} P_2(\eta) > 0.$$

Следовательно, $|P(\tau^s)| \geq \left(\frac{1}{2}P_2(\eta) + o(1)\right)\varphi_s^{m_2} \to \infty$ при $s \to \infty$, что противоречит (1.3).

Если же $|\overline{x}| < A(\eta)$, то для достаточно больших s, получаем $|x_s| \leq A(\eta)$. Представим в этом случае $\{\tau^s\}$ в виде

$$\tau^s = \varphi_s\left(\eta + \frac{\psi_s}{\varphi_s} N\right) = \varphi_s\left[\eta + \varphi^{-\delta_0}\frac{\psi_s}{\varphi_s^{1-\delta_0}} N\right] = \varphi_s[\eta + \varphi_s^{-\delta_0} x_s N], \quad s = 1, 2, \ldots$$

Эта последовательность вида (2.2), где $t_s = \varphi_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и $|x_s| \leq A(\eta)$ для достаточно больших s. По условию леммы, $P(\tau^s) \to +\infty$ при $s \to \infty$, что противоречит (1.3). Лемма доказана.

Итак, при $\Sigma_4 \neq \emptyset$ изучение поведения многочлена (1.1) на бесконечности сводится к изучению его поведения на последовательностях вида (2.2), для всех $\eta \in \Sigma_4$, что (см. (2.3)) в свою очередь сводится к исследованию многочленов вида

$$Q_i(x) = Q_i(x,\eta) = \left[\frac{D_N^{\ell_0+i} P_0(\eta)}{(\ell_0+i)!} x_s^{\ell_0} + \frac{D_N^{\ell_1+i} P_1(\eta)}{(\ell_1+i)!} x_s^{\ell_1} + \frac{D_N^{i} P_2(\eta)}{i!}\right] x^i, \tag{2.5}$$

где $i = 0, 1, \ldots, r$, $r = r(\eta) = \max\{m_0 - \ell_0(\eta), m_1 - \ell_1(\eta), m_2\}$, при этом мы считаем, что $D_N^{\ell_j+i} P_j(\eta) = 0$ при $\ell_j + i > m_j$ $(j = 0, 1, 2)$.

Лемма 2.2. *Пусть $P \in I_2$. Тогда $Q_0(x,\eta) \geq 0$ для всех $\eta \in \Sigma_4$ и $x \in R^1$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, $Q_0(x_0,\eta^0) < 0$ для некоторой пары (x_0,η^0) $(x \in R^1, \eta^0 \in \Sigma_4)$. Тогда, аналогично (2.3), получаем $P(\xi^s) = s^{m_2} Q_0(x_0,\eta^0) + o(s^{m_2}) \to -\infty$ при $s \to \infty$, где $\{\xi^s\} = \left\{s\left(\eta^0 + x_0 N s^{-\delta_0(\eta_0)}\right)\right\}$, что противоречит условию $P \in I_2$.

Лемма 2.3. *Пусть многочлен (1.1) удовлетворяет условиям леммы 2.1. Если для каждой точки $\eta \in \Sigma_4$ существует число $C = C(\eta) > 0$ такое, что $Q_0(x,\eta) \geq C$ при $|x| \leq A(\eta)$ (см. (2.1)), то $P \in I_2$.*

Доказательство. По лемме 2.1, нам достаточно доказать, что $P(\xi^s) \to +\infty$ на последовательностях вида (2.2), для каждой точки $\eta \in \Sigma_4$. Рассуждая как при доказательстве леммы 2.1, придём к представлению (2.3), откуда следует, что при $s \to \infty$ имеем $P(\tau^s) \geq C\varphi_s^{m_2}[1 + o(1)] \to +\infty$, что и доказывает лемму.

Лемма 2.4. *Пусть $P \in I_2$ многочлен вида (1.1) и $\eta \in \Sigma_4$. Тогда*

$$Q(x,\eta) \equiv \sum_{j:m_2 - j\delta_0(\eta)>0} |Q_j(x,\eta)|^2 \not\equiv 0, \quad x \in R^1.$$

Доказательство. Пусть, наоборот, $Q(x,\eta) = 0$ для некоторого $x_0 \in R^1$. Тогда, из представления (3.3) получаем

$$|P(\tau^s)| = \left|P\left[s\left(\eta + x_0 s^{-\delta_0(\eta)} N\right)\right]\right| \le \sum_{m_2 - j\delta_0(\eta)>0} \left|s^{m_2 - j\delta_0(\eta)} Q_j(x_0)\right| +$$
$$+ \sum_{m_2 - j\delta_0(\eta)\le 0} \left|s^{m_2 - j\delta_0(\eta)} Q_j(x_0)\right| \le C < \infty, \qquad s = 1, 2, \dots$$

Это противоречит условию $P \in I_2$, так как $|\tau^s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Лемма 2.4 доказана. Таким образом, нам остаётся рассмотреть случай, когда $Q_0(x_0, \eta^0) = 0$ для некоторой пары (η^0, x_0) $(\eta^0 \in \Sigma_4, x_0 \in [-A(\eta), A(\eta)])$, при этом $Q_0(x_0, \eta^0) \not\equiv 0$. Далее, при исследовании многочленов (2.5) будем считать, что

A) $Q_0(x,\eta) \ge 0$ для $\eta \in \Sigma_4$ и $x \in [-A(\eta), A(\eta)]$ (см. лемму 2.2),

B) $Q(x,\eta) \not\equiv 0$ для $\eta \in \Sigma_4$ и $x \in [-A(\eta), A(\eta)]$ (см. лемму 2.4).

Для точки $\eta \in \Sigma_4$, обозначим через $X_0(\eta) = X_0(\eta, Q_0)$ множество корней многочлена $Q_0(x) = Q_0(x,\eta)$ из $[-A(\eta), A(\eta)]$. Легко убедиться, что многочлен $Q_0(x) \ge 0$ не может иметь более двух различных вещественных корней, притом каждый корень двухкратный. Так как $P_2(\eta) \ne 0$, то $x_0 \ne 0$ при $x_0 \in X_0(\eta)$. Следовательно, далее будем предполагать, что

C) для каждой точки $x_0 \in X_0(\eta)$, многочлен Q_0 представляется в виде

$$Q_0(x,\eta) = (x - x_0)^2 q_0(x,\eta), \qquad \eta \in \Sigma_4, \quad x_0 \in X_0(\eta), \tag{2.6}$$

где $q_0(x_0) = q_0(x_0, \eta) > 0$.

Итак, при $\Sigma_4 \ne \emptyset$ задача сводится к исследованию поведения многочлена P на последовательностях вида (2.2), где $t_s = \varphi_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Эта задача в свою очередь сводится к исследованию многочленов $\{Q_i(x,\eta)\}$, удовлетворяющих условиям A) – C), а в итоге к исследованию функций (см. (2.3))

$$f_0(t,x) = f_0(t,x,\eta,\delta) = \sum_{i=0}^{r} t^{m - i\delta} Q_i(x), \tag{2.7}$$

где $\delta > 0$, $t \in R^1$, $x \in [-A(\eta), A(\eta)]$, а многочлены $Q_i(x) = Q_i(x,\eta)$ имеют вид

$$Q_i(x) = (a_i x^{l_0} + b_i x^{l_1} + c_i) x^i \quad (i = 0, 1, \dots, r), \tag{2.8}$$

при этом $a_0 b_0 c_0 \ne 0$ и $m - r\delta > 0$. Этой задаче посвящён следующий параграф. Ниже мы будем опускать в обозначениях букву η, при этом мы будем исследовать только значения $\delta = \delta_0(\eta)$ для точек $\eta \in \Sigma_4$.

§3. ФУНКЦИИ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В этом параграфе мы изучим поведение при $t \to \infty$ функций вида (2.7), где для каждой точки $\eta \in \Sigma_4$ многочлены (2.8) удовлетворяют условиям A) – C) предыдущего параграфа. В частности, из условия B) следует, что для $\eta \in \Sigma_4$ и $x_0 \in X_0(\eta)$ существует натуральное число $k \leq r$ такое, что $m - \delta k > 0$ и $Q_0(x_0, \eta) = Q_1(x_0, \eta) = \ldots = Q_{k-1}(x_0, \eta) = 0$, $Q_k(x_0, \eta) \neq 0$. Таким образом, каждой паре (η, x_0) $(\eta \in \Sigma_4,\ x_0 \in X_0(\eta))$ сопоставляется натуральное число $k = k(f_0, \eta, x_0)$. Запись $f_0 \in I_2$ означает, что для всех $x \in [-A(\eta), A(\eta)]$ имеем $f_0(t, x) = f_0(t, x, \eta) \to +\infty$ при $t \to \infty$.

Теорема 3.1. *Пусть многочлены (2.8) удовлетворяют условиям A) - C) и число $k = k(\eta, x_0)$ – нечётное для всех $\eta \in \Sigma_4$ и $x \in X_0(\eta)$. Тогда $f_0 \in I_2$ в том и только в том случае, когда для всех $\eta \in \Sigma_4$ и $x \in X_0(\eta)$:*

1) $Q_k(x_0) = Q_k(x_0, \eta) > 0$,

2) число x_0 – двухкратный корень многочленов Q_i при $i = 1, 2, \ldots, [k/2]$ ($[a]$ – целая часть числа a).

Доказательство. Необходимость условия 1), независимо от чётности k, следует из соотношения

$$f_0(t, x_0) = \sum_{i=k}^{r} t^{m-i\delta} Q_i(x_0) = t^{m-k\delta} Q_k(x_0)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad (Q_k(x_0) \neq 0).$$

Необходимость условия 2). Сначала заметим, что число $x_0 \neq 0$ не может быть корнем многочлена Q_i $(0 \leq i \leq r)$ более второго порядка, при этом x_0 – двукратный корень многочлена Q_0. Поэтому отрицание утверждения 2) означает существование точек $\eta \in \Sigma_4$, $x_0 \in X_0(\eta)$ и числа i_0 $(1 \leq i_0 \leq [k/2])$ таких, что

$$Q_i(x) = (x - x_0)^2 q_i(x), \quad q_0(x_0) > 0, \quad q_i(x_0) \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, i_0 - 1), \tag{3.1}$$

$$Q_{i_0}(x) = (x - x_0) q_{i_0}(x), \quad q_{i_0}(x_0) \neq 0, \tag{3.2}$$

$$Q_i(x) = (x - x_0) q_i(x), \quad (i = i_0 + 1, \ldots, k - 1). \tag{3.3}$$

Положим $t_s = s$ и $x_s = x_0 - [\text{sign } q_{i_0}(x_0)] s^{-k\delta/2}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Предполагая для определённости $q_{i_0}(x_0) > 0$, из представлений (3.1) – (3.3) для $s = 1, 2, \ldots$ имеем

$$f_0(t_s, x_s) = \sum_{i=0}^{r} t_s^{m-i\delta} Q_i(x_s) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i_0-1} s^{m-i\delta} (x_s - x_0)^2 q_i(x_s) + s^{m-i_0\delta} (x_s - x_0) q_{i_0}(x_s) +$$

$$+\sum_{i=i_0+1}^{k-1} s^{m-i\delta}(x_s-x_0)q_i(x_s)+\sum_{i=k}^{r} s^{m-i\delta}Q_i(x_s)=\sum_{i=0}^{i_0-1} s^{m-(i+k)\delta}q_i(x_s)-$$

$$-s^{m-(i_0+k/2)\delta}q_{i_0}(x_s)-\sum_{i=i_0+1}^{k-1} s^{m-(i+k/2)\delta}q_i(x_s)+\sum_{i=k}^{r} s^{m-i\delta}Q_i(x_s). \quad (3.4)$$

Теперь заметим, что $m-(i+k)\delta \le m-k\delta$, $0 \le i \le i_0-1$,

$$m-\left(i+\frac{k}{2}\right)\delta < m-\left(i_0+\frac{k}{2}\right)\delta \quad (i_0+1 \le i \le k-1).$$

Так как k – нечётное и $i_0 \le [k/2]$, то $i_0 < k/2$ и

$$m-\left(i_0+\frac{k}{2}\right)\delta > m-k\delta. \quad (3.5)$$

С другой стороны, так как $x_s \to x_0$ при $s \to \infty$, то $q_i(x_s) \to q_i(x_0)$ $(i=0,1,2,\ldots)$, при этом по предположению $q_{i_0}(x) > 0$. Следовательно, принимая во внимание ограниченность $q_i(x)$ $(i_0+1 \le i \le k-1)$ и $Q_i(x)$ $(k \le i \le r)$ в $[-A,A]$, из (3.4) – (3.5) получаем $f_0(t_s,x_s) = -t^{m-(i_0+k/2)\delta}[q_{i_0}(x_0)+o(1)] \to -\infty$ при $s \to \infty$, что доказывает необходимость условия 2).

Достаточность. Пусть существуют точка $\eta \in \Sigma_4$ и последовательность пар $\{t_s,x_s\}$ такие, что $x_s \in [-A(\eta),A(\eta)]$ $(s=1,2,\ldots)$, и пусть $t_s \to \infty$, $x_s \to x_0$ при $s \to \infty$ (хотя бы для некоторой подпоследовательности) и

$$|f_0(t_s,x_s)| = |f_0(t_s,x_s,\eta)| \le C < \infty, \quad s=1,2,\ldots \quad (3.6)$$

Если $Q_0(x_0) = Q_0(x_0,\eta) \ne 0$, то противоречие с (3.6) вытекает из того, что $Q_0(x_0) > 0$ и $f_0(t_s,x_s) = t_s^m[Q_0(x_0)+o(1)] \to +\infty$ при $s \to \infty$.

Пусть $Q_0(x_0) = Q_0(x_0,\eta) = 0$, т.е. $x_0 \in X_0(\eta)$. Тогда по условию С) многочлен Q_0 представляется в виде (2.6), при этом для некоторого нечётного числа κ, $0 < k \le r$, $Q_k(x_0) > 0$ и $Q_0(x_0) = Q_1(x_0) = \ldots = Q_{k-1}(x_0) = 0$. Тогда для достаточно больших s

$$f_0(t_s,x_s) = \sum_{i=0}^{[k/2]} t_s^{m-i\delta}(x_s-x_0)^2 q_i(x_s)+$$

$$+\sum_{i=[k/2]+1}^{k-1} t_s^{m-i\delta}(x_s-x_0)q_i(x_s)+t_s^{m-k\delta}[Q_k(x_0)+o(1)].$$

Полагая $\sigma_s = t_s^{\delta k/2}(x_s-x_0)$ $(s=1,2,\ldots)$ и обозначая

$$B_s = \frac{\left[\sum_{i=1}^{[k/2]} t_s^{m-(i+k)\delta}q_i(x_s)\right]\sigma_s^2+\left[\sum_{i=[k/2]+1}^{k-1} t_s^{m-(i+k/2)\delta}q_i(x_s)\right]\sigma_s}{t_s^{m-k\delta}[q_0(x_s)\sigma_s^2+Q_k(x_0)+o(1)]},$$

для достаточно больших s получаем

$$
\begin{aligned}
f_0(t_s, x_s) &= t_s^{m-k\delta} q_0(x_s)\sigma_s^2 + \sigma_s^2 \sum_{i=1}^{[k/2]} t_s^{m-(i+k)\delta} q_i(x_s) + \\
&+ \sigma_s \sum_{i=[k/2]+1}^{k-1} t_s^{m-(i+k/2)\delta} q_i(x_s) + t_s^{m-k\delta}[Q_k(x_0) + o(1)] = \\
&= t_s^{m-k\delta}[q_i(x_s)\sigma_s^2 + Q_k(x_0) + o(1)](1 + B_s).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Заметим, что $q_i(x_s) \to q_i(x_0)$ $(i = 0, 1, \ldots, [k/2])$ при $s \to \infty$, где $q_i(x_0) > 0$ и $\{q_i(x_s)\}$ – равномерно ограничены при $i = [k/2]+1, \ldots, k-1$. Кроме того, имеем

$$
\begin{aligned}
&m - (i+k)\delta \le m - k\delta \quad (1 \le i \le [k/2]), \\
&m - \left(i + \frac{k}{2}\right)\delta < m - k\delta \quad ([k/2] + 1 \le i \le k-1).
\end{aligned}
$$

Тогда рассматривая три возможных случая, когда 1) $|\sigma_s| \to \infty$ при $s \to \infty$, 2) $|\sigma_s| \to 0$ при $s \to \infty$, 3) $\varepsilon_1 \le |\sigma_s| \le \varepsilon_2$ $(s = 1, 2, \ldots)$ для некоторых чисел $\varepsilon_2 \ge \varepsilon_1 > 0$ убеждаемся, что $B_s \to 0$ при $s \to \infty$. Далее, $Q_k(x_0) > 0$, $q_0(x_0) > 0$ и $m - k\delta > 0$. Поэтому, из (3.7) получаем $f_0(t_s, x_s) \to \infty$ при $s \to \infty$. Это противоречит (3.6) и доказывает теорему.

Теперь остаётся рассмотреть случай, когда число $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – чётное для некоторой пары (η, x_0) $(\eta \in \Sigma_4,\ x_0 \in X_0(\eta))$.

Следующее утверждение доказывается повторением рассуждений, проводимых при доказательстве необходимости теоремы 3.1. Надо только заметить, что неравенство (3.5) выполняется также и при чётном k и $i_0 \le [k/2] - 1 = k/2 - 1$.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f_0 \in I_2$ вида (2.7) удовлетворяет условиям A) - C) и пусть число $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – чётное. Тогда $Q_k(x_0) > 0$ и x_0 – двукратный корень многочленов $\{Q_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k/2 - 1)$.*

Предполагая, что $\eta \in \Sigma_4$, $x_0 \in X_0(\eta)$ и $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – чётное число, обозначим

$$
q_i(x) = \frac{Q_i(x)}{(x - x_0)^2}, \quad q_{k/2+i}(x) = \frac{Q_{k/2+i}(x)}{(x - x_0)}, \quad i = 0, 1, \ldots, \frac{k}{2} - 1. \tag{3.8}
$$

Далее, на многочлены $\{Q_i\}$ наложим следующие условия (необходимые для включения $f_0 \in I_2$) :

D) Если число $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – нечётное для некоторой пары (η, x_0), $(\eta \in \Sigma_4$, $x_0 \in X_0(\eta))$, то x_0 – двукратный корень многочленов Q_i $(i = 0, 1, \ldots, [k/2])$ (см. теорему 3.1). Если k – чётное, то x_0 – двухкратный корень многочленов Q_i $(i = 0, 1, \ldots, k/2 - 1)$ (см. лемму 3.1) и $q_0(x_0, \eta) > 0$, $Q_k(x_0, \eta) > 0$ (см. теорему 3.1 и лемму 3.1).

Полагая, что $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – чётное, $i = 0, 1, \ldots, k/2-1$ и $j = 0, 1, \ldots$, обозначим

$$Q_{i,j}(x) = Q_{i,j}(x, \eta, x_0) = \left[q_i^{(j)}(x_0)x^2 + q_{k/2+i}^{(j)}(x_0)x + Q_{k+i}^{(j)}(x_0)\right]\frac{x^j}{j!} \tag{3.9}$$

Определим число $\bar{r}$ из условий $m - (k+\bar{r})\delta > 0$, $m - (k+\bar{r}+1)\delta \leq 0$ и многочлены $Q_p^1(x) = Q_p^1(x, \eta, x_0)$ $(p = 0, 1, \ldots, \bar{r})$ формулами

$$\begin{aligned} Q_0^1(x) &= Q_{0,0}(x) = q_0(x_0)x^2 + q_{k/2}(x_0)x + Q_k(x_0), \\ Q_p^1 &= Q_{p-\frac{k}{2}[\frac{2p}{k}],[\frac{2p}{k}]}(x) + \sum_{\ell+q=[\frac{2p}{k}]-1} \frac{x^q}{q} Q_{p+\frac{3}{2}k+\left(\ell-[\frac{2p}{k}]\right)\frac{k}{2}}(x). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Введём, наконец, функцию

$$f_1(t, x) = f_1(t, x, \eta, x_0) = \sum_{i=0}^{\bar{r}} t^{m-(k+i)\delta} Q_i^1(x). \tag{3.11}$$

Пусть $X_1(\eta) = X_1(\eta, x_0) = \{x \in R^1, Q_0^1(x) = Q_0^1(x, \eta, x_0) = 0\}$. Так как множество пар (η, x_0) $(\eta \in \Sigma_4,\ x_0 \in X_0(\eta))$ конечно для двумерных многочленов $P(\xi_1, \xi_2)$, существует $\kappa \geq 0$ такое, что $X_1(\eta, x_0) \in [-\kappa, \kappa]$ и $Q_0^1(\pm\kappa) \neq 0$ для всех таких пар. Далее для простоты записи будем считать, что $\kappa = 1$.

Отметим, что запись $f_1 \in I_2$ означает, что $f_1(t, x, \eta, x_0) \to \infty$ при $t \to \infty$ для всех пар (η, x_0) и для всех $x \in [-1, 1]$.

Следующее утверждение доказывается аналогично леммам 2.2 и 2.3.

Лемма 3.2. *Если $Q_0^1(x, \eta, x_0) \geq C > 0$ для всех $x \in [-1, 1]$ и всех пар (η, x_0), причём $\eta \in \Sigma_4$ и $x_0 \in X_0(\eta)$, то $f_1 \in I_2$. Если $f_1 \in I_2$, то для всех $x \in R^1$ и всех таких пар (η, x_0) имеем $Q_0^1(x, \eta, x_0) \geq 0$.*

Теорема 3.2. *Пусть $\eta \in \Sigma_4$, $x_0 \in X_0(\eta)$ и многочлены $Q_i(x) = Q_i(x, \eta)$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ удовлетворяют условиям A) - D). Тогда следующие условия равносильны :*

1) $f_0 \in I_2$,
2) $f_0(t_s, x_s, \eta) = f_0(t_s, x_0 + t_s^{-k\delta/2}\sigma_s, \eta) \to +\infty$ *и* $t_s \to \infty$ *при* $s \to \infty$ *для всех* $\sigma_s \in [-1, 1]$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *и для всех пар* (η, x_0) $(\eta \in \Sigma_4,\ x_0 \in X_0(\eta))$ *для которых* $k = k(\eta, x_0)$ *– чётное число,*
3) $f_1 \in I_2$.

Замечание 3.1. Для $\eta \in \Sigma_4$, $x_0 \in X_0(\eta)$ и чётного $k = k(\eta, x_0)$, исследование функции $f_0(t, x, \eta)$ "порядка" m по t сводится к исследованию функции $f_1(t, x, \eta, x_0)$ вида (3.11), которая имеет "порядок" $m - k$ по t. Не более двух функций вида (3.11) соответствуют каждой функции $f_0(t, x, \eta)$, так как для любого $\eta \in \Sigma_4$ множество $X_0(\eta)$ состоит из не более двух элементов.

Доказательство Теоремы 3.2 : Утверждение 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно. Для того, чтобы доказать 2) $\Rightarrow$ 1), предположим, что выполнено противоположное утверждение, т.е. условие 2) выполнено, но существуют точка $\eta \in \Sigma_4$, последовательность $\{(t_s, x_s)\}$ и число $C \geq 0$ такие, что $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ $(x_s \in [-A(\eta), A(\eta)])$, для которых имеет место соотношение (3.6). Если $Q_0(x_0, \eta) \neq 0$ или числа $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – нечётные для всех $x_0 \in X_0(\eta)$, то как и при доказательстве теоремы 3.1, получаем противоречие с (3.6). Если $k = k(f_0, \eta, x_0)$ – чётное число, то из представлений (3.8) и условия D) для достаточно больших s, получаем

$$f_0(t_s, x_s) = \sum_{i=0}^{k/2-1} t_s^{m-i\delta}(x_s - x_0)^2 q_i(x_s) +$$

$$+ \sum_{i=k/2}^{k-1} t_s^{m-i\delta}(x_s - x_0) q_i(x_s) + t_s^{m-k\delta}[Q_k(x_0) + o(1)].$$

Полагая $\sigma_s = t_s^{k\delta/2}(x_s - x_0)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, для достаточно больших s, имеем

$$\begin{aligned} f_0(t_s, x_s) = \sigma_s^2 \sum_{i=0}^{k/2-1} t_s^{m-(i+k)\delta} q_i(x_s) + \\ + \sigma_s t^{m-k\delta} q_{k/2}(x_s) + \sigma_s \sum_{i=k/2+1}^{k-1} t_s^{m-(i+k/2)\delta} q_i(x_s) + \\ + t_s^{m-k\delta}[Q_k(x_0) + o(1)] = t_s^{m-k\delta}\left[q_0(x_s)\sigma_s^2 + q_{k/2}(x_s)\sigma_s + Q_k(x_s)\right] + \\ + \sigma_s^2 \sum_{i=1}^{k/2-1} t_s^{m-(i+k)\delta} q_i(x_s) + \sigma_s \sum_{i=k/2+1}^{k-1} t_s^{m-(i+k/2)\delta} q_i(x_s) + o(t_s^{m-k\delta}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Если последовательность $\{|\sigma_s|\}$ не ограничена, то за счёт выбора подпоследовательности можно считать, что $|\sigma_s| \to \infty$ при $s \to \infty$. С другой стороны, $q_0(x_0) > 0$, так как $x_s \to x_0 \in X_0(\eta)$ при $s \to \infty$. Тогда из (3.12) получаем

$$f_0(t_s, x_s) \geq \frac{1}{2} q_0(x_0) t_s^{m-k\delta} \sigma_s^2 \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

что противоречит (3.6). Если $\sigma_s \to 0$ при $s \to \infty$, то противоречие следует из $Q_k(x_0) > 0$. Если последовательность $\{\sigma_s\}$ ограничена, то за счёт выбора подпоследовательности можно считать, что $\sigma_s \to \sigma_0$ (при $s \to \infty$). Если в этом случае $|\sigma_0| \geq 1$, то $Q_0^1(x_s, \eta, x_0) = q_0(x_s)\sigma_s^2 + q_{k/2}(x_s)\sigma_s + Q_k(x_s) \geq \varepsilon > 0$ при достаточно больших s, что является противоречием. Наконец, если $\sigma_0 \in (-1, 1)$, то $\sigma_s \in [-1, 1]$ для достаточно больших s, и $f_0(t_s, x_s) \to \infty$ при $s \to \infty$ по условию 2), что противоречит (3.6). Следовательно, утверждение 2) $\Rightarrow$ 1) доказано.

Что касается утверждения 2) $\Leftrightarrow$ 3), то мы докажем более сильное утверждение : для всех $\eta \in \Sigma_4$, $t \in R^1$, $x_0 \in X_0(\eta)$ и $x \in [-1,1]$ имеем

$$f_0(t, x_0 t^{-k\delta/2} x\eta) = f_1(t, x, \eta, x_0) + g(t, x, \eta, x_0), \tag{3.13}$$

где $|g(t, x, \eta, x_0)| \leq C$ $(|x| \leq 1,\ t \geq 1)$ для некоторой постоянной $C > 0$. Полагая $y = x_0 + t^{-k\delta/2}x$ и используя (3.8), получаем

$$f_0(t,y) = \sum_{i=0}^{r} t^{m-i\delta} Q_i(y) = x^2 \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta} q_i(y) + x \sum_{i=k/2}^{k-1} t^{m-(i+k/2)\delta} q_i(y) +$$
$$+ \sum_{i=k}^{k+k/2-1} t^{m-i\delta} Q_i(y) + x^2 \sum_{i=k+k/2}^{r} t^{m-i\delta} Q_i(y) = x^2 \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta} q_i(y) +$$
$$+ x \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta} q_{k/2+i}(y) + \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta} Q_{k+i}(y) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{r-(3/2)k} t^{m-(i+3k/2)\delta} Q_{3k/2+i}(y) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta} \left[x^2 q_i(y) + x q_{k/2+i}(y) + Q_{k+i}(y)\right] + \sum_{i=0}^{r-3k/2} t^{m-(i+3k/2)\delta} Q_{3k/2+i}(y).$$

Обозначим через Φ_1 первую, а через Φ_2 вторую сумму в правой части и применим формулу Тейлора, получим

$$\Phi_1 = \sum_{i=0}^{k/2-1} \sum_{j=0}^{r_1} t^{m-(i+k)\delta} t^{-kj\delta/2} \left[x^2 q_i^{(j)}(x_0) + x q_{k/2+i}^{(j)}(x_0) + Q_{k+i}^{(j)}(x_0)\right] \frac{x^j}{j!},$$

где $r_1 = \max\limits_{0 \leq i \leq k/2-1} \{\mathrm{ord}\ q_i, \mathrm{ord}\ q_{k/2+i}, \mathrm{ord}\ Q_{k+1}\}$, при этом считаем, что $q_i^{(j)}(x_0) = 0$ при $j > \mathrm{ord} q_i$, $q_{k/2+i}^{(j)}(x_0) = 0$ при $j > \mathrm{ord}\ q_{k/2+i}$ и $Q_{k+i}^{(j)}(x_0) = 0$ при $j > \mathrm{ord}\ Q_{k+i}$ $(0 \leq i \leq k/2 - 1)$. Аналогично, для второго слагаемого имеем

$$\Phi_2 = \sum_{i=0}^{r-3k/2} \sum_{j=0}^{r_2} t^{m-(i+3k/2)\delta}\, t^{-kj\delta/2}\, Q_{3k/2+i}^{(j)}(x_0) \frac{x^j}{j!} =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{r_3} \sum_{i=k\ell/2}^{k(\ell+1)/2-1} \sum_{j=0}^{r_2} t^{m-(i+3k/2+kj/2)\delta}\, Q_{3k/2+i}^{(j)}(x_0) \frac{x^j}{j!},$$

где $r_2 = \max\limits_{3k/2\le i\le r}\{\operatorname{ord} Q_i\}$, $r_3 = \left(r - \frac{3}{2}k\right)\frac{k}{2}$. Совершая подходящую перегруппировку, получаем

$$\Phi_1 = \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta}\left[q_i(x_0)x^2 + q_{k/2+i}(x_0)x + Q_{k+i}(x_0)\right]+$$

$$+\sum_{i=0}^{k/2-1}\sum_{j=1}^{r_1} t^{m-(i+k+jk/2)\delta}\left[q_i^{(j)}(x_0)x^2 + q_{k/2+i}^{(j)}(x_0)x + Q_{k+i}^{(j)}(x_0)\right]\frac{x^j}{j!},$$

$$\Phi_2 = \sum_{\ell=0}^{r_3}\sum_{i=0}^{k/2-1}\sum_{j=0}^{r_2} t^{m-[i+3k/2+(\ell+j)k/2]\delta}\, Q_{i+3k/2+\ell k/2}^{(j)}(x_0)\frac{x^j}{j!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k/2-1}\sum_{p=0}^{r_2+r_3} t^{m-(i+3k/2+pk/2)\delta}\left[\sum_{\ell+j=p} Q_{i+3k/2+\ell k/2}^{(j)}(x_0)\frac{x^j}{j!}\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k/2-1}\sum_{p=1}^{r_2+r_3+1} t^{m-(i+k+pk/2)\delta}\left[\sum_{\ell+j=p-1} Q_{i+3k/2+\ell k/2}^{(j)}(x_0)\frac{x^j}{j!}\right].$$

Используя (3.9), получаем

$$f_0(t,y) = \sum_{i=0}^{k/2-1} t^{m-(i+k)\delta}Q_{i,0}(x)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k/2-1}\sum_{j=1}^{r_4} t^{m-(i+k+jk/2)\delta}\left[Q_{i,j}(x) + \sum_{\ell+p=j-1} Q_{i+3k/2+\ell k/2}^{(p)}(x_0)\frac{x^p}{p!}\right],$$

где $r_4 = \max\{r_2+r_3+1, r_1\}$. Пусть $p\in N$. Обозначим $j(p) = [2p/k]$ и заметим, что $j(p) = p$ при $k = 2$. После некоторой перегруппировки слагаемых, и используя последнее представление для f_0 и (3.9)–(3.11), получаем

$$f_0(t,y) = f_0(t, x_0 + t^{-k\delta/2}x, \eta) = \sum_{p=0}^{k/2-1} t^{m-(p+k)\delta}Q_{p,0}(x)+$$

$$+\sum_{p=k/2}^{r_5} t^{m-(p+k)\delta}\left[Q_{p-j(p)k/2,j(p)}(x) + \sum_{\ell+q=j(p)-1} Q_{p+3k/2+(\ell-j(p))k/2}(x_0)\frac{x^q}{q!}\right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{r_5} t^{m-(p+k)\delta}Q_p^1(x) = f_1(t,x,\eta,x_0) + \sum_{p\ge\overline{r}+1} t^{m-(p+k)\delta}Q_p^{(1)}(x) \equiv$$

$$\equiv f_1(t,x,\eta,x_0) + g(t,x,\eta,x_0),\quad r_5 = (1+r_4)k/2 - 1. \tag{3.14}$$

Очевидно, в силу определения числа $\overline{r}$ имеем

$$|g(t,x,\eta,x_0)| \le \sum_{p\ge\overline{r}+1}|Q_p^1(x)| \le C < \infty,\quad |x|\le 1,\quad t\ge 1.$$

Этим соотношение (3.13) и тем самым теорема 3.2 доказаны.

Итак, поведение (при $t \to \infty$) функции $f_0(t, x, \eta, x_0)$ вида (2.7) зависит от поведения функции $f_1(t, x, \eta, x_0)$ вида (3.11) в случае, когда $\Sigma_4 \neq \emptyset$ и k – чётное число для некоторых точек $\eta \in \Sigma_4$ и $x_0 \in X_0(\eta)$. При этом "порядок" по t функции f_1 на $k\delta$ меньше "порядка" по t функции f_0, и функции f_0 и f_1 имеют одинаковую структуру. Совершенно аналогично, как это делалось выше (см. леммы 2.2 – 2.4, теорему 3.1 и лемму 3.1) доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть $f_1 \in I_2$. Тогда*

1) $Q_0^1(x) = Q_0^1(x, \eta, x_0) \geq 0$ для всех $x \in R^1$, $\eta \in \Sigma_4$ и $x_0 \in X_0(\eta)$,

2) для каждой пары точек (η, x_1) $(\eta \in \Sigma_4,\ x_1 \in X_1(\eta))$, существует натуральное число $k_1 = k_1(f_1, \eta, x_1) \leq r_1$ такое, что $Q_0^1(x_1, \eta) = \ldots = Q_{k_1-1}^1(x_1, \eta) = 0$ и $Q_{k_1}^1(x_1, \eta) > 0$. При этом x_1 – двухкратный корень многочленов Q_i^1 при $i = 0, 1, \ldots, [k_1/2]$), если k_1 – нечётное и $i = 0, 1, \ldots, k_1/2 - 1$, если k_1 – чётное.

Исходя из этого, наложим на многочлены $\{Q_i^1\}$ следующее условие :

E) Для каждой пары точек (η, x_1) $(\eta \in \Sigma_4, x_1 \in X_1(\eta))$, x_1 – двухкратный корень многочленов Q_i^1, при $i = 0, 1, \ldots, [k_1/2]$, если $k_1 = k_1(f_1, \eta, x - 1)$ – нечётное и $i = 0, 1, \ldots, k_1/2 - 1$, если k_1 – чётное. Кроме того, имеем $Q_{k_1}^1(x, \eta) > 0$.

Полагая, что многочлены $\{Q_i\}$ и $\{Q_i^1\}$ удовлетворяют условиям А) - Е), можно доказать, что $f_1 \in I_2$, если $k_1 = k_1(f_1, \eta, x_1)$ – нечётное для всех пар (η, x_1) или k_1 – чётное, но $Q_0^1(x) \geq C > 0$ для всех $x \in R^1$. Следовательно, задача сводится к исследованию функции $f_2(t, x) = f_2(t, x, \eta, x_1)$ в случае, когда k_1 – чётное для некоторой пары (η, x_1) $(\eta \in \Sigma_4(P_0),\ x_1 \in X_1(\eta) \neq \emptyset)$. При этом функция f_2 имеет одинаковую с функцией f_1 структуру, причём $\operatorname{ord} f_2 \leq m - (k + k_1)\delta$.

Продолжая этот процесс, на каком-то шагу s либо придём к случаю, когда $k_s = k_s(\eta, x_s)$ – нечётное для всех соответствующих пар, либо к случаю, когда все $\{k_s\}$ – чётные и $Q_0^s(x) \geq C > 0$ для всех $x \in R^1$, либо к смешанному случаю, и тогда вопрос решается комбинированием аналогов теоремы 3.1 и леммы 2.3, либо к случаю, когда $m - (k + k_1 + \ldots + k_s)\delta \leq 0$ и тогда $P \notin I_2$.

Приведём примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

1. Рассмотрим многочлен $P^1(\xi, a)$ из §1. При $a \neq 0$, множество $\Sigma(P_0^1)$ состоит из точек $\eta^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\eta^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\eta^3 = (0, 1)$, $\eta^4 = (0, -1)$. При $a \neq 0$, имеем $\Sigma(P_0^1) = \Sigma_0$. По теореме 2.1, $P^1 \in I_2$ для $a > 0$ и $P^1 \notin I_2$ для $a \leq 0$.

2. Рассмотрим многочлен $P^2(\xi, b)$ из §1 вида (1.1), и $\Sigma(P_0^2) = \{\eta^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$ $\eta^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\}$, $m_0 = 4$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $\ell_0(\eta^j) = 2$, $\ell_1(\eta^j) = 1$, $\ell_2(\eta^j) = 0$ $(j = 1, 2)$. Кроме того, при $\delta_0 = 1$ имеем $\chi_0(P_i^2, \eta^j, \delta_0) = 2$ $(i = 0, 1, 2,\ j = 1, 2)$.

Следовательно, $\Sigma(P_0^2) = \Sigma_4$. Вычисления по (2.5) дают

$$Q_0(x, \eta^j, b) = 2x^2 - 2\sqrt{2}bx + 1 = (\sqrt{2}x - b)^2 + (1 - b^2) \quad (j = 1, 2).$$

Если $|b| < 1$, то $Q_0(x, \eta^j, b) \geq 1 - b^2 > 0$ $(j = 1, 2)$ для всех $x \in R^1$, и по лемме 2.3, $P^2 \in I_2$ для $|b| < 1$. Если $|b| > 1$, то по лемме 2.2 $Q_0(x, \eta^j, b) < 0$ $(j = 1, 2)$ при $x \in \left(\frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - 1}), \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 1})\right)$, и $P^2 \notin I_2$. Если $b = \pm 1$, то многочлен $Q_0(x, \eta^1, \pm 1) = (\sqrt{2}x \mp 1)^2$ имеет единственный двухкратный корень $x_0^\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Дальнейшие выкладки показывают, что $Q_1(x, \eta^1, \pm 1) \equiv 0$,

$$Q_2(x, \eta^1, \pm 1) = x^2 Q_0(x, \eta^1, \pm 1), \quad Q_k(x, \eta^1, \pm 1) \equiv 0 \quad (k = 3, 4, \ldots).$$

Следовательно, $Q_j(x_0^\pm, \eta^1, \pm 1) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ и по лемме 2.4 $P^2 \notin I_2$.

3. Пусть $P^3(\xi, b) = (\xi_1 - \xi_2)^4 + 2b(\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1 + \xi_2) + \xi_1^2 + \xi_2^2$. Имеем $\Sigma(P_0^3) = \Sigma(P_0^2)$, $m_0 = 4$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $\ell_0(\eta^j) = 4$, $\ell_1(\eta^j) = 2$, $\ell_2(\eta^j) = 0$ $(j = 1, 2)$. При $\delta_0 = \frac{1}{2}$ получаем $\chi_0(P_i^3, \eta^j, \delta_0) = 2$ $(i = 0, 1, 2,\ j = 1, 2)$, т.е. $\Sigma(P_0^3) = \Sigma_4$. Выкладки показывают, что ($\tau = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ для обеих точек η^1 и η^2)

$$Q_0(x, \eta^1, b) = 4x^4 + 4\sqrt{2}bx^2 + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}b\right)^2 + (1 - 2b^2),$$
$$Q_0(x, \eta^2, b) = 4\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}b\right)^2 + (1 - 2b^2).$$

Таким образом, при $|b| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и всех $x \in R^1$ имеем $Q_0(x, \eta^j, b) \geq 1 - 2b^2 > 0$ $(j = 1, 2)$ и по лемме 2.3 $P^3 \in I_2$ при $|b| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. С другой стороны, $P^3 \notin I_2$ при $|b| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (лемма 2.2). Если $|b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, b_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}})$, то получаем

$$Q_0(x, \eta^1, b_1) = Q_0(x, \eta^2, b_2) = 4\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$
$$Q_0(x, \eta^1, b_2) = Q_0(x, \eta^2, b_1) = 4\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 2.$$

Таким образом, нам достаточно рассмотреть многочлен $Q_0(x) = 4\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ (опуская символы b и η в обозначениях), который имеет два кратных корня : $x_0^\pm = \pm 1/\sqrt{2}$. Дальнейшие выкладки показывают, что $Q_1(x) \equiv 0$, $Q_2(x) = x^2$, т.е. $Q_2(x_0^\pm) > 0$ и, следовательно, $k(x_0^\pm) = 2$ – чётное число. Используя формулу (3.10), получаем $Q_0^1(x) = Q_0^1(x, \eta^j, x_0^\pm) = 8\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x \in R^1$, и по лемме 3.2, $P^3 \in I_2$ также при $|b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Аналогичные выкладки показывают, что при $|b| < 1$ многочлен $P^4(\xi, b) = P_0^3(\xi, b) + P_1^3(\xi, b) + (\xi_1 + \xi_2)^2$ принадлежит I_2 и $P^4(\xi, b) \notin I_2$ при $|b| \geq 1$.

5. Пусть $P^5(\xi) = P_0^5(\xi) + P_1^5(\xi) + P_2^5(\xi) = (\xi_1^{d_0-\ell_0} + \xi_2^{d_0-\ell_0})\xi_2^{\ell_0} + a\xi_1^{d_1-\ell_1}\xi_2^{\ell_1} + b\xi_1^{d_2}$, где $a, b \in R^1$, d_i, ℓ_j $i = 0,1,2$, $j = 0,1$ – натуральные числа и $d_0 > d_1 > d_2 > 0$, $d_0 > \ell_0$, $d_1 \geq \ell_1$, $\ell_0 > \ell_1$; d_0, ℓ_0, d_2 – чётные числа, и $\delta \equiv (d_0 - d_1)/(\ell_0 - \ell_1) = (d_1 - d_2)\ell_1$. По теореме 1.1, $P^5 \notin I_2$ при $b \leq 0$. С другой стороны, $P^5 \in I_2$ когда $b > 0$ и $a = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $b > 0$, $a \neq 0$. В этом случае $\Sigma(P_0^5) = \Sigma^0(P^5) = \Sigma_4(P^5) = \{\eta^\pm = (\pm 1, 0)\}$. Пусть $N = N(\eta^\pm) = (0,1)$ и $x \in R^1$. Тогда (см. (2.5)) $Q_0^\pm(x) = Q_0^\pm(x, \eta^\pm) = x^{\ell_0} + (\pm 1)^{d_1-\ell_1}ax^{\ell_1} + b$, $Q_1^\pm(x) \equiv \cdots \equiv Q_{d_0-\ell_0-1}(x) \equiv 0$ и $Q_{d_0-\ell_0}^\pm(x) = x^{d_0}$. Рассмотрим следующие возможные случаи : 1) число $d_1 - \ell_1$ – нечётное; 2) $d_1 - \ell_1$ – чётное, а ℓ_1 – нечётное; 3) оба числа $d_1 - \ell_1$ и ℓ_1 – чётные. Выкладки показывают, что : в случаях 1) и 2) $Q_0^\pm(x) \geq C > 0$ для всех $x \in R^1$ и, следовательно, по лемме 2.3, $P^5 \in I_2$ при $|a| < A = \ell_0 b^{1-\ell_1/\ell_0}/\ell_1^{\ell_1/\ell_0}(\ell_0 - \ell_1)^{\ell_0/\ell_1 - 1}$, независимо от знака числа $\Delta = d_2 - (d_0 - \ell_0)\delta$. В случае 3), имеем $P^5 \in I_2$ при $a > -A$, независимо от знака Δ, и при $a \geq -A$, если $\delta > 0$. Следовательно, в случаях 1) и 2), имеем $P^5 \notin I_2$ при $|a| > A$, а также при $|a| = A$, если $\Delta \leq 0$. В случае 3), имеем $P^5 \notin I_2$ при $a < -A$, а также при $a = -A$, если $\Delta \leq 0$.

6. Пусть $P^6(\xi) = \xi_2^{d_0} + a\xi_1^{d_1-\ell_1}\xi_2^{\ell_1} + b\xi_1^{d_2} + c\xi_1^{d_2-\ell_2}\xi_2^{\ell_2}$, где $a, b, c \in R^1$, $d_0 > d_1 > d_2 > 0$, $0 < \ell_1 < d_1$, $0 < \ell_1 < d_2$, d_0, d_2 – чётные числа, $\Sigma(P_0^6) = \Sigma(P_0^5)$, $\Sigma^0(P^6) = \Sigma_4(P^6)$, $\ell_0 = d_0$, а число δ то же, что и в предыдущем примере. По теореме 1.1, $P^6 \notin I_2$ при $b \leq 0$. С другой стороны, из условия $d_2 < d_0$ следует, что $P^6 \in I_2$, если $b > 0$ и $a = 0$. Поэтому будем считать, что $a \neq 0$, $b > 0$, причём многочлены $Q_0^\pm$ те же, что и в предыдущем примере и $Q_{d_2-\ell_2}^\pm(x) = (\pm 1)^{d_2-\ell_2}cx^{d_2}$. Возможны следующие случаи :

1) оба числа $d_1 - \ell_1$ и ℓ_1 – нечётные, 2) число $d_1 - \ell_1$ – нечётное, а ℓ_1 – чётное,

3) $d_1 - \ell_1$ – чётное, а ℓ_1 –нечётное, 4) оба числа $d_1 - \ell_1$ и ℓ_1 – чётные.

Выкладки показывают, что в случаях 1), 2) и 3) имеем $P^6 \in I_2$ при $|a| < A$, где число A определяется как и в предыдущем примере. В случае 1) имеем $P^6 \in I_2$ также при $a = A$, если либо $c > 0$ и ℓ_2 – чётное, либо $c < 0$ и ℓ_2 – нечётное. В случае 1) мы имеем $P^6 \in I_2$ также для $a = -A$, если $c > 0$, ℓ_2 – чётное и $m_2 - \ell_2\delta > 0$. В случаях 2) и 3) имеем $P^6 \in I_2$ также при $a = \pm A$, если $c > 0$, ℓ_2 – чётное и $m_2 - \ell_2\delta > 0$. В случае 4) имеем $P^6 \in I_2$ при $a > -A$ а также при $A = -A$, если $c > 0$, ℓ_2 – чётное и $m_2 - \ell_2\delta > 0$. В остальных случаях $P^6 \notin I_2$.

Abstract. The paper investigates the behavior of polynomials depending on two variables at infinity. Some necessary and sufficient conditions for $|P(\xi_1, \xi_2)| \to \infty$ as $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \to \infty$ are obtained in terms of multiplicities of zeros of the

homogeneous sub-polynomials P_j $(j = 0, 1, 2)$, $P(\xi_1, \xi_2) = P_0(\xi_1, \xi_2) + P_1(\xi_1, \xi_2) + P_2(\xi_1, \xi_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности некоторых классов многочленов", ДАН СССР, том. 164, № 3, стр. 499 – 502, 1965.
2. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности некоторых классов многочленов", Труды МИАН СССР, том. 91, стр. 59 – 81, 1967.
3. Hörmander L. The analysis of PDO. I-II, Springer Verlag, Berlin, 1983.
4. Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", Труды МИАН СССР, том. 77, стр. 45 – 64, 1965.
5. В. И. Буренков, "О связи между поведением решения уравнения на бесконечности и его дифференциальным свойствам", Труды МИАН СССР, том. 89, стр. 56 – 68, 1967.
6. Г. Г. Казарян, "Характеризация гипоэллиптичности оценками снизу", Труды МИАН СССР, том. 140, стр. 162 – 168, 1976.
7. Г. Г. Казарян, "Об оценках производных многочленов многих переменных", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 34, № 3, стр. 47 – 66, 1999.
8. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических полиномов", Мат. Сборник, том 75, стр. 400 – 416, 1968.
9. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы многочленов", Труды МИАН СССР, том. 150, стр. 128 – 142, 1979.
10. В. И. Арнольд, "Критические точки гладких функций и их нормальные формы", УМН, том 30, вып. 5, стр. 3 – 65, 1975.
11. В. А. Васильев, "Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума", Фукц. Анализ, том 11, вып. 3, стр. 1 – 11, 1977.
12. О. В. Геворгян, "Об условиях экстремума для полиномов многих переменных", Деп. в ВИНИТИ, № 68, стр. 20 – 83, 1983.
13. B. Pini, "Osservazoni sulla hypoelliptica", Bol. Un. Mat. Ital., (3), vol. 18, pp. 420 – 432, 1963.
14. Г. Г. Казарян, "Об одном свойстве гипоэллиптических полиномов", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 9, № 3, стр. 189 – 211, 1974.
15. А. М. Дементьева, В. М. Красносельский, М. А. Красносельский, "Об исследовании на экстремум функций многих переменных", Прибл. Методы Исслед. Диф. Уравнений и их Приложения, Куйбышев, № 5, стр. 3 – 15, 1979.

Поступила 14 апреля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 39–46

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

В. А. Мартиросян, А. З. Мартиросян

Институт математики НАН Армении
Ереванский государственный университет
E-mail : mart@instmath.sci.am

Резюме. В статье описывается класс целых функций, представимых лакунарными степенными рядами и многократно универсальные относительно последовательности простых операций, сохраняющих исходные лакуны.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В 1929г. Г. Биркгоф [1] доказал существование целой функции φ, обладающей замечательным свойством : **для любой целой функции f существует неограниченная последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел такая, что**

$$\varphi(z + z_n) \to f(z) \quad \text{локально–равномерно в комплексной плоскости} \quad \mathbb{C}.$$

В настоящее время существует обширная литература по вариантам и усилениям этого результата. Более того, были исследованы многие другие универсальные свойства. Подробности можно найти в статье К. Гроссе–Эрдмана [2], где даны обзор разных видов универсальности и полная библиография вплоть до 1999. Исследование универсальных свойств голоморфных функций, представимых лакунарными степенными рядами, было начато в недавних работах [3 - 9] и настоящая статья связана с этими работами. Теперь изучается возможность многократной универсальности (в том или ином смысле) целых функций, представимых лакунарными степенными рядами, относительно подходящей простой последовательности операций, сохраняющей исходную лакунарность. Аналогичные вопросы были исследованы в работе В. Лу [10] без учёта свойства лакунарности.

Начнем с некоторых обозначений, используемых при формулировке основных результатов данной статьи. Для компактного множества K из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $A(K)$ банахово пространство всех комплекснозначных непрерывных на K и голоморфных на его внутренности K° функций с конечной нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in K\}$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим семейство всех компактов $K \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением. Как обычно, через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ будем обозначать множества всех натуральных и целых чисел, соответственно. Для подпоследовательности $Q = \{q_n\}$ из $\mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, определим плотность и верхнюю плотность :

$$d(Q) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_n} \quad \text{и} \quad \overline{d}(Q) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{n}{q_n}.$$

Предполагая, что функция f голоморфна в односвязной области G $(0 \in G)$, рассмотрим следующие операции :

$$L^0 f = f, \quad L^1 f(z) = \frac{d}{dz}(zf(z)), \quad L^j f = L^1(L^{j-1} f) \quad (j = 2, 3, \ldots)$$

и

$$L^{-j} f(z) = z^{-1} \int_0^z L^{-j+1} f(t)dt \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

где интеграл берётся по произвольной спрямляемой дуге из G, соединяющей точки 0 и $z \in G$.

Следующие теоремы являются основными результатами данной статьи.

Теорема 1. *Пусть $\{z_n\}$ – неограниченная последовательность комплексных чисел и пусть Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$ с верхней плотностью $\overline{d}(Q) = 1$. Тогда существует целая функция φ, представимая степенным рядом*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n, \quad \text{где} \quad \varphi_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q, \tag{1}$$

и имеющая следующие свойства :

(A) для любого фиксированного $j \in \mathbb{Z}$ и при всех $K \in \mathfrak{M}$, последовательность $\{L^j \varphi(z + z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ "аддитивных сдвигов" плотна в $A(K)$,

(B) для любого фиксированного $j \in \mathbb{Z}$ и при всех $K \in \mathfrak{M}$ $(0 \notin K)$, последовательность $\{L^j \varphi(z \cdot z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ "мультипликативных сдвигов" плотна в $A(K)$.

Теорема 2. *Пусть $\{z_n\}$ – неограниченная последовательность комплексных чисел и пусть Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$ с верхней плотностью $\overline{d}(Q) = 1$. Тогда существует целая функция φ, представимая степенным рядом (1) и такая, что при всех $K \in \mathfrak{M}$ $(0 \notin K)$ последовательность $\{L^{\|z_n\|} \varphi(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ плотна в $A(K)$.*

Отметим, что Теорема 1 усиливает соответствующие результаты из работ [3], [5], а Теорема 2 является лакунарным аналогом хорошо известного результата Мак-Лейна [11].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 (см. [10]). *Существует последовательность множеств $\{K_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{M}$ таких, что $0 \notin K_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и при любом $K \in \mathfrak{M}$ $(0 \notin K)$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $K \subset K_{n_0}$.*

Лемма 2 (см. [5]). *Пусть K – компактное множество из $\mathfrak{M}$ такое, что $0 \in K^\circ$ и компонента K, содержашая точку 0, является звездой относительно нуля. Далее, пусть Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$ с верхней плотностью $\overline{d}(Q) = 1$. Если функция f голоморфна на K и представляется степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \qquad \text{где} \quad f_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q,$$

в окрестности нуля, тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует лакунарный многочлен

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu z^\nu, \qquad \text{где} \quad p_\nu = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q, \tag{2}$$

такой, что $\max\limits_K |f(z) - p(z)| < \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть g – произвольная целая функция, удовлетворяющая $g(0) = 0$. Тогда $L^{-j} g(z) \to 0$ локально равномерно на $\mathbb{C}$ при $j \to \infty$.*

Доказательство. Представим функцию g рядом Тейлора : $g(z) = \sum_{\nu=1}^\infty g_\nu z^\nu$ и положим $M(R) = \sum_{\nu=1}^\infty |g_\nu| R^\nu$, $R > 0$. Тогда

$$\max_{|z| \le R} |L^{-j} g(z)| \le 2^{-j} M(R),$$

откуда следует утверждение леммы.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1. 1. Пусть $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность компактов из Леммы 1 и пусть $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность всех многочленов, коэффициенты которых имеют рациональные вещественные и мнимые части. Далее, пусть $\mathcal{L}$ – счетное множество пар вида (K_ν, Ω_μ), $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, и пусть каждая пара встречается в $\mathcal{L}$ бесконечное число раз. Тогда положим $\mathcal{L} = \{(K_\nu^*, \Omega_\mu^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Пусть $\rho = \{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – строго возрастающая последовательность чисел, удовлетворяющая $\rho_0 = 1$ и $\rho_n \ge n + 1$. Рассмотрим множество $S = \{z = z_n : n \in \mathbb{N}\}$ и её подмножества

$$A = \{z = a_{n,j} : j = -n, -n+1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset S \quad \text{и} \quad B = \{z = b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S.$$

Далее, определим

$$D_n = \{z : |z| \le \rho_n\}, \qquad D_n^* = \{z : |z| \le 1 + \rho_n\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$B_n = \{z : |z - b_n| \le n\}, \qquad B_n^* = \{z : |z - b_n| \le 1 + n\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

и выберем ρ, A, B так, чтобы при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнялись следующие три условия :

1) $$n < |a_{n,-n}| < |a_{n,-n+1}| < \ldots < |a_{n,n}| < |b_n| < |a_{n+1,-n-1}| < \ldots; \tag{3}$$

2) для $n \in \mathbb{N}$ и $j = -n, \ldots, n$ имеем $A_{n,j} = a_{n,j}K_n^* \subset \Gamma_{n,j}$, где $\Gamma_{n,j}$ – жордановы области со спрямляемыми границами $\partial\Gamma_{n,j}$, удовлетворяющие $\operatorname{dist}(A_{n,j}, \partial\Gamma_{n,j}) \ge 1$ и

$$\overline{\Gamma_{n,j_1}} \cap \overline{\Gamma_{n,j_2}} = \emptyset \qquad \text{при} \qquad -n \le j_1 < j_2 \le n; \tag{4}$$

3) если

$$\Gamma_n = \bigcup_{j=-n}^{n} \overline{\Gamma_{n,j}}, \quad \text{то} \quad B_n^* \cap \Gamma_n = \emptyset \quad \text{и} \quad B_n^* \cap \Gamma_n \subseteq D_n \bigcap \left(D_{n-1}^*\right)^c. \tag{5}$$

Очевидно, при указанном выборе, множества D_{n-1}^*, B_n^* и Γ_n попарно не пересекаются.

3. Для индуктивного построения подходящих последовательностей многочленов $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ вида (2) предположим, что многочлены $R_0 \equiv 0$, $R_1, \ldots, R_{n-1}$ уже определены, и при $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$ зададим многочлены $P_\mu^j(z)$, $j \in \mathbb{Z}$ следующим образом :

$$P_\mu(z) = L^\mu(R_\mu(z)), \qquad P_\mu^j(z) = L^{\mu+j}(R_\mu(z)).$$

Пусть G_n и F_n – некоторые функции такие, что

$$L^n G_n(z) = \Omega_n(z - b_n) \quad \text{при} \quad z \in B_n^*,$$
$$L^{n+j} F_n(z) = \Omega_n^*\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right) \quad \text{при} \quad z \in \overline{\Gamma_{n,j}}, \quad j = -n, \ldots, n.$$

Согласно Лемме 2, существует многочлен R_n вида (2), удовлетворяющий условиям

$$\max_{D_{n-1}^*}\left|R_n(z) - L^{-1}R_{n-1}(z)\right| < \varepsilon_n = \frac{1}{n^2(4n-2)!(2n-1)\rho_{n-1}^{2n-1}(1+\rho_{n-1})}, \tag{6}$$

$$\max_{B_n^*}\left|R_n(z) - G_n(z)\right| < \varepsilon_n' = \frac{1}{n(n+1)(2n)!\rho_n^n(1+\rho_n)}, \tag{7}$$

$$\max_{\Gamma_n}\left|R_n(z) - F_n(z)\right| < \varepsilon_n'' = \frac{1}{2n^2(4n-2)!\rho_n^{2n-1}\max_{0\le j\le n}\operatorname{length}(\partial\Gamma_{n,j})}. \tag{8}$$

Определим теперь многочлен P_n вида (2) и ассоциированные с ним многочлены P_n^j следующим образом :

$$P_n(z) = L^n(R_n(z)), \qquad P_n^j(z) = L^{n+j}(R_n(z)), \quad j \in \mathbb{Z},$$

при каждом $j \in \mathbb{Z}$ получим индукцией последовательность $\{P_n^j(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ вида (2).

4. Отметим, что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ со спрямляемой границей $\partial\Omega$, справедлива формула :

$$L^m(R_n(z)) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{m} C_{s,m} z^s \int_{\partial\Omega} \frac{R_n(t)dt}{(t-z)^{s+1}}, \qquad z \in \Omega, \quad m = 0, 1, \dots,$$

где коэффициенты $C_{s,m}$ удовлетворяют оценкам $0 < C_{s,m} \le (2m)!$, $s = 0, 1, \dots, m$.

Изучим некоторые свойства многочленов P_n.

(a) Пусть фиксировано $j \in \mathbb{N}$. Тогда учитывая, что $\operatorname{dist}(D_{n-1}, \partial D^*_{n-1}) = 1$, из (6) для всех $n > |j|$ получим

$$\max_{D_{n-1}}\left|P_n^j(z) - P_{n-1}^j(z)\right| = \max_{D_{n-1}}\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{n+j} C_{s,n+j} z^s \int_{\partial D^*_{n-1}} \frac{R_n(t) - L^{-1}R_{n-1}(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt\right| \le$$

$$\le (2n-1)(4n-2)!\rho_{n-1}^{2n-1}(1+\rho_{n-1})\varepsilon_n \le \frac{1}{n^2}. \tag{9}$$

Определим требуемую функцию $\varphi(z)$ и ассоциированные с нею функции $L^j\varphi(z)$ следующим образом :

$$L^j\varphi(z) = P_0^j(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\{P_\mu^j(z) - P_{\mu-1}^j(z)\}, \quad \varphi(z) = L^0\varphi(z).$$

Тогда из (9) следует, что $L^j\varphi(z)$ $(j \in \mathbb{Z})$ являются целыми функциями, представимыми лакунарными степенными рядами вида (1).

(b) Очевидно, что $B_n \subset D_n \subseteq D_{\mu-1}$ при всех $\mu \ge n+1$. Следовательно, из (9) вытекает

$$\max_{B_n}\left|P_\mu(z) - P_{\mu-1}(z)\right| < \frac{1}{\mu^2}.$$

Учитывая, что $\operatorname{dist}(B_n, \partial B_n^*) = 1$, из (7) получим

$$\max_{B_n}\left|P_n(z) - \Omega_n(z - b_n)\right| = \max_{B_n}\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{n} C_{s,n} z^s \int_{\partial B_n^*} \frac{R_n(t) - \dot{G}_n(t)}{(t-z)^{s+1}}dt\right|$$

$$\le (2n)!(n+1)\rho_n^n(1+\rho_n)\varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, получаем

$$\max_{|z|\le n}|\varphi(z+b_n)-\Omega_n(z)| = \max_{B_n}|\varphi(z)-\Omega_n(z-b_n)| \le \sum_{\mu=n+1}^{\infty}\max_{B_n}|P_\mu(z)-P_{\mu-1}(z)|$$
$$+\max_{B_n}|P_n(z)-\Omega_(z-b_n)| < \sum_{\mu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{n}<\frac{2}{n}. \tag{10}$$

(c) Зафиксируем $j\in\mathbb{Z}$, $|j|<n$. Тогда $A_{n,j}\subset D_n\subseteq D_{\mu-1}$ при всех $\mu\ge n+1$. Следовательно, из (9) вытекает

$$\max_{A_{n,j}}|P^j_\mu(z)-P^j_{\mu-1}(z)|<\frac{1}{\mu^2}.$$

Так как $\operatorname{dist}(A_{n,j},\partial\Gamma_{n,j})\ge 1$, то из (8) получаем

$$\max_{A_{n,j}}\left|P^j_n(z)-\Omega^*_n\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right)\right| = \max_{A_{n,j}}\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{n+j}C_{s,n+j}z^s\int_{\partial\Gamma_{n,j}}\frac{R_n(t)-F_n(t)}{(t-z)^{s+1}}dt\right|$$
$$\le 2n(4n-2)!\rho_n^{2n-1}\max_{0\le j\le n}\operatorname{length}(\partial\Gamma_{n,j})\varepsilon''_n=\frac{1}{n}.$$

Следовательно, имеем

$$\max_{K^*_n}|L^j\varphi(a_{n,j}z)-\Omega^*_n(z)| = \max_{A_{n,j}}\left|L^j\varphi(z)-\Omega^*_n\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right)\right| \le$$
$$\le\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\max_{A_{n,j}}|P^j_\mu(z)-P^j_{\mu-1}(z)|+\max_{A_{n,j}}\left|P^j_n(z)-\Omega^*_n\left(\frac{z}{a_{n,j}}\right)\right|<\frac{2}{n}. \tag{11}$$

5. Предположим теперь, что заданы произвольные компакт $K\in\mathfrak{M}$ и функция $f\in A(K)$. Тогда согласно теореме С. Н. Мергеляна [12], существует возрастающая последовательность $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел такая, что

$$\max_K|f(z)-\Omega_{k_s}|<\frac{1}{s}\quad\text{при}\quad s\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

(a) Существует s_1 такое, что $K\subset\{z:|z|\le k_s\}$ при всех $s>s_1$, поэтому из (10) и (12), для $s>s_1$, получаем

$$\max_K|\varphi(z+b_{k_s})-f(z)|\le\max_{|z|\le k_s}|\varphi(z+b_{k_s})-\Omega_{k_s}(z)|+\max_K|\Omega_{k_s}(z)-f(z)|<\frac{2}{k_s}+\frac{1}{s}.$$

Итак, последовательность $\{\varphi(z+z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ плотна в $A(K)$. Этим доказывается утверждение (A) Теоремы 1 для случая $j=0$.

Согласно доказанному выше, для любых $j \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$ существует подпоследовательность $\{z_m^{(j,k)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ для $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\{\varphi(z + z_m^{(j,k)})\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к многочлену $L^{-j}\Omega_k(z)$ равномерно на круге $\{z : |z| \le 2k\}$. Отсюда легко следует существование подпоследовательности $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, для которой

$$\max_{|z|\le k} \left|L^j\varphi(z + z_{m_k}^{(j,k)}) - \Omega_k(z)\right| < \frac{1}{k}.$$

Далее, рассуждая как и выше получаем, что для всех $K \in \mathfrak{M}$ и $j \in \mathbb{Z}$ последовательность $\{L^j\varphi(z + z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ плотна в $A(K)$. Итак, утверждение (A) полностью доказано.

(b) Предположим теперь, что $0 \notin K$ и задано $j \in \mathbb{Z}$. Тогда, по Лемме 1 существует n_0 такое, что $K \subset K_{n_0}$. Кроме того, по определению $\mathcal{L}$ существует подпоследовательность $\{n_l^{(s)}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, для которой $(K_{n_0}, \Omega_{k_s}) = (K^*_{n_l^{(s)}}, \Omega^*_{n_l^{(s)}})$ при всех $l \in \mathbb{N}$. Из оценки (11) вытекает, что для любого $s \in \mathbb{N}$ существует $r_s = n_{l_s}^{(s)}$ такое, что $\max_{K_{n_0}} \left|L^j\varphi(za_{r_s,j}) - \Omega_{k_s}(z)\right| < \frac{1}{s}$. Следовательно, с учетом (12) получим $\max_K \left|L^j\varphi(za_{r_s,j}) - f(z)\right| < \frac{2}{s}$. Итак, при всех $j \in \mathbb{Z}$ и $K \in \mathfrak{M}$, $0 \notin K$, последовательность $\{L^j\varphi(zz_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ плотна в $A(K)$. Утверждение (B) доказано.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $\{\Omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ – последовательность всех многочленов вида (2) таких, что $\Omega_\nu(0) = 0$ и коэффициенты которых имеют рациональные вещественные и мнимые части. Тогда, в силу Леммы 3, для любого $\nu \in \mathbb{N}$ существует число $r_\nu \in \mathbb{N}$ такое, что $\max_{|z|\le\nu} \left|L^{-j}\Omega_\nu(z)\right| < \frac{1}{\nu^2}$ для всех $j \ge r_\nu$. Для заданной $\{[|z_n|]\}$ построим подходящую подпоследовательность $\{n_k\}$. Допустим, что $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ $(k \ge 2)$ уже выбраны и выберем $n_k > n_{k-1}$ настолько большим, что $n_k > \max\{r_\nu \colon 1 \le \nu \le k\} + n_{k-1}$. Индукцией получаем всю последовательность $\{n_k\}$. Теперь положим

$$\varphi(z) = L^{-n_1}\Omega_1(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(L^{n_k - n_{\nu+1}}\Omega_{\nu+1}(z) - L^{n_k - n_\nu}\Omega_\nu(z)\right).$$

Для $\nu \ge 2$ имеем $n_\nu > r_\nu$. Следовательно, $\max_{|z|\le\nu} \left|L^{-n_\nu}\Omega_\nu(z)\right| < 1/\nu^2$. Поэтому φ есть целая функция, представимая степенным рядом вида (1). Далее,

$$L^{n_k}\varphi(z) = \Omega_k(z) + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \left(L^{n_k - n_{\nu+1}}\Omega_{\nu+1}(z) - L^{n_k - n_\nu}\Omega_\nu(z)\right).$$

Учитывая, что $n_\nu - n_k \ge r_\nu$ при $\nu \ge k+1$, приходим к оценкам

$$\max_{|z|\le k} \left|L^{n_k}\varphi(z) - \Omega_k(z)\right| \le \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \max_{|z|\le\nu} \left|L^{n_k - n_{\nu+1}}\Omega_{\nu+1}(z) - L^{n_k - n_\nu}\Omega_\nu(z)\right| \le \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{2}{\nu^2} < \frac{2}{k}. \tag{13}$$

Для произвольного компакта $K \in \mathfrak{M}$, $0 \notin K$, пусть $f \in A(K)$. По Лемме 4 существует возрастающая последовательность $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел, для которой выполняется (12). Следовательно, наше утверждение вытекает из (13).

Abstract. The paper describes a class of entire functions representable by lacunary power series that are multiply universal in relation to some operations preserving the initial lacunas.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. D. Birkhoff, "Demonstration d'un theoreme elementaire sur les functions entires", C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 189, pp. 473 - 475, 1929.
2. K. G. Grosse-Erdmann, "Universal functions and hyperciclic operators", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp. 345 - 381, 1999.
3. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Universal entire functions with gap power series", Indications Mathem., N.S., vol. 9, pp. 529 - 536, 1998.
4. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "T-universal functions with lacunary power series", Acta Sci. Math. (Szeged), vol. 64, pp. 67 - 79, 1998.
5. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Restricted T-universal functions", J. of Approx. Theory, vol. 114, 201 - 213, 2002.
6. T. Gharibyan, W. Luh, J. Müller, "Approximation by lacunary polynomials and applications to universal functions", Analysis, vol. 23, pp. 199 - 214, 2003.
7. T. Gharibyan, W. Luh, "Lacunary power series with various universal properties", Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. vol. 22, pp. 113 - 126, 2003.
8. T. Gharibyan, W. Luh, "Universal power series with Poisson gaps", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 38, № 4, стр. 51 - 64, 2003.
9. B. Schildings, "Approximation by overconvergent power series", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 38, № 4, стр. 85 - 94, 2003.
10. W. Luh, "Entire functions with various universal properties", Complex Variables, vol. 31, pp. 87 - 96, 1996.
11. G. R. MacLane, "Sequences of derivatives and normal families", J. An. Math., vol. 2, pp. 72 - 87, 1952.
12. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", УМН, том 7, № 2, стр. 31 - 122, 1952.
13. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Мат. Сборник, том 120, № 4, стр. 451 - 472, 1983.
14. L. Biberbach, Analytische fortsetzung, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Hidelberg, 1955.

Поступила 26 августа 2004

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № *3, 2004, 47-54*

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ ДИРИХЛЕ : РАВНОМЕРНОСТЬ И СКОРОСТЬ

М. С. Мартиросян

Ереванский государственный университет
E-mail : mhersm@yahoo.com

Резюме. В статье доказано, что если функция $f \in L^2(0,\infty)$ аппроксимируется со скоростью геометрической прогрессии полиномами Дирихле с показателями из $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \delta > 0,\, |\arg\lambda| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\}$, то f допускает аналитическое продолжение во внутренность некоторого угла с вершиной в начале координат. В случае, когда показатели экспонент имеют предельные точки на отрезке мнимой оси, предложен метод L^p-суммирования биортогонального разложения по неполной системе экспонент и доказана равномерность этого суммирования внутри угловой области.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим полиномы из так-называемой системы Дирихле

$$\{e^{-\lambda_k x}, xe^{-\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1}e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}. \tag{1}$$

Если функция $f \in L^2(0,\infty)$ аппроксимируется полиномами Дирихле с неограниченной $\lambda_k > c > 0$ со скоростью геометрической прогрессии, то f имеет аналитическое продолжение внутри некоторого угла с вершиной в начале координат (см. [1] и [2]).

Метод, предложенный в работе [1] позволяет обобщить этот результат, рассматривая точки λ_k из области $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \delta > 0, |\arg\lambda| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\}$. Это обобщение представлено в первом параграфе настоящей работы. Пусть неограниченная последовательность λ_k удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{m_k \mathrm{Re}\,\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} < \infty$, которое эквивалентно (см. [3], [4]) условию неполноты системы (1) в $L^2(0,\infty)$. В этом случае, В. Х. Мусоян доказал (см. [5]), что при дополнительном условии $\limsup\limits_{|\lambda_k|\to\infty}|\arg\lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ (т.е. показатели λ_k лежат в "обобщённом угле" правой полуплоскости) верна следующая теорема : **если последовательность конечных линейных комбинаций функций из системы (1) сходится по норме**

пространства $L^p(0,\infty)$, $1 \le p \le 2$, то она равномерно сходится на любом компактном подмножестве угла $\Delta_{\varphi_0} = \{z : |\arg z| < \varphi_0\}$.

Поставим следующую задачу : **пусть Ω_p – замыкание линейной оболочки системы (1) в $L^p(0,\infty)$. Указать для каждой функции $f \in \Omega_p$ последовательность полиномов Дирихле, порождённых системой (1), равномерно аппроксимирующую аналитическое продолжение функции f внутри угла Δ_{φ_0}.**

Эта задача сводится к суммированию биортогонального разложения функции $f \in \Omega_p$ по системе (1) методом В. Х. Мусояна, предложенным для случая $p = 2$ в работе [6]. Там использована гильбертова структура пространства $L^2(0,\infty)$ и для каждой функции $f \in \Omega_2$ (см. [6]) построена последовательность полиномов Дирихле $S_n(f)(x)$, порождённая системой (1) такая, что $S_n(f)(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ в пространстве $L^2(0,\infty)$. Во втором параграфе настоящей работы доказано, что для любой функции $f \in \Omega_p$, $1 < p \le 2$, существует последовательность $S_n(f)(x)$, которая сходится к $f(x)$ по нормам любого из пространств $L^r(\eta,\infty)$, $2 \le r < \infty$, для каждого положительного η. Это оказывается достаточным для решения поставленной задачи.

§1. РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРИХЛЕ

Пусть $a \in (0,\infty)$, $\vartheta \in [0,\frac{\pi}{2})$, $n \in N$, а $H_n(a,\vartheta)$ – множество всевозможных полиномов Дирихле

$$\sum_k \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} z^s e^{-\lambda_k z}, \quad a_{ks} \in \mathbb{C}, \quad m_k \in N$$

таких, что

$$\sum_k m_k = n, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_k \ge a, \quad |\arg \lambda_k| \le \vartheta. \tag{1.1}$$

Далее, пусть $f \in L^2(0,\infty)$ и $E_n(f) = \inf\limits_{P \in H_n(a,\vartheta)} \|f - P\|_{L^2(0,\infty)}$.

Следующая теорема совпадает с результатом В. Х. Мусояна работы [1], в частном случае $\vartheta = 0$.

Теорема 1.1. *Если* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f)} = b < 1$, *то* f *имеет аналитическое продолжение во внутренность угла*

$$\left\{z : |\arg z| < \min\left[\frac{\pi}{2} - \vartheta, \arcsin\frac{1-b}{1+b}\right]\right\}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Пусть

$$P(z) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} z^s e^{-\lambda_k z} \in H_n(a,\vartheta) \quad \text{и} \quad W(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \overline{\lambda}_k}\right)^{m_k}.$$

Введём функцию (см. [1])

$$K(z,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda z}\,d\lambda}{W(\lambda)}\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\zeta z}d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\overline{\lambda})}\right\}},\quad z\in\mathbb{C}, \tag{1.3}$$

где Γ – замкнутый контур, лежащий в открытой правой полуплоскости и охватывающий внутри себя все нули произведения Бляшке $W(\lambda)$. Тогда справедлива следующая оценка (см. [7]) :

$$|P(z)| \le \sqrt{K(z,z)}\cdot\|P\|,\ \ z\in\mathbb{C}, \tag{1.4}$$

где $\|P\|$ – норма пространства $L^2(0,\infty)$.

В качестве контура Γ выберем контур $\Gamma = \Gamma(\gamma,\varphi,r)$ с положительным направлением обхода, состоящий из прямолинейных отрезков $[re^{i\varphi}, \gamma a\cos^{-1}\varphi e^{i\varphi}]$ $[\gamma a\cos^{-1}\varphi e^{i\varphi}, \gamma a\cos^{-1}\varphi e^{-i\varphi}]$, $[\gamma a\cos^{-1}\varphi e^{-i\varphi}, re^{-i\varphi}]$ и из дуги окружности $|\lambda| = r$, идущий из точки $re^{-i\varphi}$ до точки $re^{i\varphi}$, где $\gamma\in(0,1)$, $\varphi\in(\vartheta,\frac{\pi}{2})$, а r выбран настолько большим, чтобы $\Gamma(\gamma,\varphi,r)$ охватывал все нули функции $W(\lambda)$.

Выберем последовательность полиномов $P_n\in H_n(a,\vartheta)$ таких, что $\|P_n - f\|\le 2E_n(f)$, $n = 1,2,\ldots$. Поскольку $E_n(f)\to 0$ $(n\to\infty)$, то ряд $P_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(P_{k+1} - P_k)$ сходится в пространстве $L^2(0,\infty)$ к функции f. Пусть K – компактное подмножество угла $\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi\}$. Тогда из (1.3) и (1.4) получается оценка (см. [1]) $|P_{k+1}(z) - P_k(z)| \le M\cot^{2k}\frac{\varphi}{2}E_k(f)$ $(z\in K)$, для некоторого постоянного $M = M(a,\gamma,\varphi,K)$.

Заметим, что $\tan^2\frac{\vartheta}{2} < \tan^2\frac{\varphi}{2} < 1$ при $\varphi\in(\vartheta,\frac{\pi}{2})$. Поэтому для произвольного числа $\varepsilon\in(\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b, 1-b)$ существует $\varphi\in(\vartheta,\frac{\pi}{2})$ такое, что $\tan^2\frac{\varphi}{2} = b+\varepsilon$. С другой стороны, имеет место неравенство $E_k(f) < (b+\frac{\varepsilon}{2})^k$ для $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k. Следовательно, выбрав $\max\{0,\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b\} < \varepsilon < 1-b$, получим $|P_{k+1}(z) - P_k(z)| < M_1 q^k$, $k > k_0$, $z\in K$, где $q = (b+\frac{\varepsilon}{2})(b+\varepsilon)^{-1}$. Это означает, что ряд $P_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(P_{k+1} - P_k)$ равномерно сходится на компакте K, и, следовательно, равномерно сходится внутри угла

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1-(b+\varepsilon)}{1+(b+\varepsilon)} = \arcsin\frac{1-(b+\varepsilon)}{1+(b+\varepsilon)}.$$

Поскольку функция $\arcsin\frac{1-t}{1+t}$ убывает на положительной полуоси, то устремив $\varepsilon\to\max\{0,\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b\}$, получим, что при $\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b\le 0$ ряд равномерно сходится внутри угла $\{z : |\arg z| < \arcsin\frac{1-b}{1+b}\}$, а при $\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b \ge 0$ наш ряд равномерно сходится внутри угла $\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \vartheta\}$. Остаётся проверить, что неравенство $\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b\le 0$ эквивалентно неравенству $\arcsin\frac{1-b}{1+b}\le\frac{\pi}{2} - \vartheta$. Теорема доказана.

§2. СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ ДИРИХЛЕ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКСПОНЕНТ

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ – последовательность различных комплексных чисел в открытой правой полуплоскости такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k \mathrm{Re}\, \lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда (см. например, [8], [9]) система (1) неполна относительно любого из пространств $L^q(0,\infty)$, $2 \le q < \infty$. Условие (2.1) гарантирует сходимость в правой полуплоскости произведения Бляшке

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \overline{\lambda}_k} \cdot \frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2} \right\}^{m_k},$$

n-ое частное произведение которого будем обозначать через $W_n(\lambda)$.

Предположим, что $f \in L^p(0,\infty)$, $1 < p \le 2$. Тогда функция (см. [10], стр. 21) $\hat{f}(\xi) = \int\limits_0^\infty \overline{f(t)} e^{-\zeta t} dt$, $\mathrm{Re}\, \zeta > 0$ принадлежит классу Харди H^q $(q = p(p-1)^{-1})$ в правой полуплоскости, и, поэтому, почти везде на мнимой оси имеет угловые граничные значения $\hat{f}(i\tau) \in L^q(-\infty,\infty)$. Введём функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\hat{f}(i\tau)}\, d\tau}{\overline{W(i\tau)}(i\tau - \lambda)}, \quad \mathrm{Re}\, \lambda > 0,$$

где $W(i\tau) = \lim\limits_{\lambda \to i\tau} W(\lambda)$ – функция угловых пределов, существующая для почти всех $\tau \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $\psi_{ks}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, \ldots, m_k - 1$ – биортогональная система функций, порождённая системой (1) в пространствах $L^q(0,\infty)$, $2 \le q < \infty$. Коэффициенты биортогонального разложения функции $f \in L^p(0,\infty)$ можно представить в виде (см. [6], [11])

$$a_{ks}(f) = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_k} \frac{F(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^s}{W(\lambda)} d\lambda, \tag{2.2}$$

где c_k – окружность с центром в точке λ_k, целиком лежащая в открытой правой полуплоскости и неохватывающая других точек λ_j, $j \ne k$.

Пусть теперь последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ неограничена и удовлетворяет не только условию (2.1), но и условию

$$\limsup_{|\lambda_k| \to \infty} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\Omega_p^{(\eta)}$ замкнутую линейную оболочку системы (1) в пространстве $L^p(\eta,\infty)$, $1 < p < \infty$, $\eta \geq 0$. Тогда биортогональное разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) x^s e^{-\lambda_k x} \tag{2.4}$$

суммируемо в следующем смысле.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < p \leq 2$. *Тогда для любых чисел* $\eta \in (0,\infty)$ *и* $r \in [2,\infty)$ *выполняется* $\Omega_p^{(0)} \subseteq \Omega_r^{(\eta)}$. *Более того, если* $f \in \Omega_p^{(0)}$, *то*

$$\|S_n - f\|_{L^r(\eta,\infty)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2.5}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)(-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s}\{e^{-\lambda x} r_n(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_k} \quad \text{и} \quad r_n(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{W_n(\lambda)}.$$

Для доказательства Теоремы 2.1 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты. Выберем произвольное число $\varphi : \varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и пусть γ – положительно направленный контур, состоящий из лучей $\gamma_1 = (\infty e^{i\varphi}, a + i\sigma)$, $\gamma_5 = (a - i\sigma, \infty e^{-i\varphi})$ и из отрезков $\gamma_2 = [a + i\sigma, i\sigma]$, $\gamma_3 = [i\sigma, -i\sigma]$, $\gamma_4 = [-i\sigma, a - i\sigma]$. Числа $a > 0$ и $\sigma > 0$ выберем так, чтобы внутренняя область контура γ содержала все точки λ_k, а отрезки γ_2, γ_4 находились бы на положительном расстоянии от множества $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Тогда (см. [6])

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\lambda)}{W_n(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. *Для любых* $\eta \in (0,\infty)$ *и* $r \in [2,\infty)$ *выполняется соотношение*

$$\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda \tag{2.7}$$

по норме пространства $L^r(\eta,\infty)$.

Доказательство. Если K – компактное множество внутри угла $|\arg\xi| < \frac{\pi}{2} - \varphi$, то существуют (см. [12]) некоторые положительные постоянные μ и R_1 такие, что

$$|e^{-\lambda x} W^{-1}(\lambda)| \leq e^{-\mu R} \tag{2.8}$$

при $x \in K$ и $\lambda = Re^{i\varphi}$ $(R > R_1)$. Имеем $F(\lambda) \in H^q$ $(\operatorname{Re}\lambda > 0)$, $q = p(p-1)^{-1}$. Следовательно, функция $F(\lambda)$ равномерно стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, оставаясь внутри любой фиксированной полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geq h > 0$. Поэтому, для данного $\varepsilon > 0$ можно выбрать R_2 достаточно большим так, чтобы имело место неравенство

$$|F(\lambda)| < \frac{\mu}{2}\varepsilon, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad |\lambda| > R_2. \tag{2.9}$$

Рассмотрим интегралы

$$J_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\{W_n^{-1}(\lambda) - W^{-1}(\lambda)\}F(\lambda)e^{-\lambda x}d\lambda, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Используя оценки (2.8) и (2.9) можно доказать, что $\|J_n^{(k)}\|_{L^r(\eta,\infty)} \to 0$ $(n \to \infty)$, $k = 1, 5$. Кроме того, при $k = 2, 4$ $\max\limits_{\gamma_k}|F(\lambda)| < \infty$ и $\max\limits_{\gamma_k}|W_n^{-1}(\lambda) - W^{-1}(\lambda)| \to 0$ $(n \to \infty)$ (отрезки γ_2 и γ_4 расположены на положительном расстоянии от множества нулей функции $W(\lambda)$). Следовательно, $\|J_n^{(k)}\|_{L^r(\eta,\infty)} \to 0$ $(n \to \infty)$, $k = 2, 4$. Теперь представим $J_n^{(3)}(x)$ в виде

$$J_n^{(3)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma}^{\sigma} F(i\tau)\{W_n^{-1}(i\tau) - W^{-1}(i\tau)\}d\tau.$$

Поскольку $F(i\tau) \in L^q(-\infty, \infty)$, $q = p(p-1)^{-1}$, то $F(i\tau) \in L^s(-\sigma, \sigma)$ для любого $s \in (1, 2]$. Поэтому $\|J_n^{(3)}\|_{L^r(0,\infty)} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Доказательство Теоремы 2.1. Пусть $f \in \Omega_p^{(0)}$, $1 < p \leq 2$. Обозначим

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F_n(\lambda)}{W_n(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda, \qquad F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\hat{f}(i\tau)}d\tau}{W_n(i\tau)(i\tau - \lambda)}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

Подставив второе выражение в первое и применив теорему Фубини, получим (см. [5]) $C_n(x) = \int\limits_0^\infty f(t)K_n(x,t)dt, \quad x > 0$, и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x) = \int_0^\infty f(t)K(x,t)dt, \; x > 0. \tag{2.10}$$

С другой стороны имеем (см. [7])

$$f(x) = \int_0^\infty f(t)K(x,t)dt, \quad x > 0. \tag{2.11}$$

Методом доказательства Леммы 2.1 можно установить, что

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\; C_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(\lambda)}{W(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda \tag{2.12}$$

по норме пространства $L^r(\eta,\infty)$, $\eta>0$, $2\le r<\infty$. Следовательно, утверждение теоремы 2.1 следует из (2.10), (2.11), (2.12) и (2.7).

Замечание. Методом доказательства леммы 2.1 можно убедиться, что для "оторванных" от мнимой оси показателей справедливо следующее утверждение : если последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям

$$|\arg\lambda_k|\le\varphi_0,\ 0\le\varphi_0<\frac{\pi}{2},\ |\lambda_k|\ge\delta>0, \tag{2.3'}$$

то соотношение (2.5) верно для всех $r\in(1,\infty)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия (2.1) и (2.3). Тогда для каждой функции $f\in\Omega_p^{(0)}$ $(1<p\le 2)$ последовательность*

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1}a_{ks}(f)(-1)^s\frac{d^s}{d\lambda^s}\{e^{-\lambda z}r_n(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_k}$$

равномерно сходится на компактных подмножествах угла $\{z:|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_0\}$ к некоторой функции $\Phi(z)$ такой, что $\Phi\big|_{(0,\infty)}=f$.

Доказательство. Перепишем (2.5) в виде $\int\limits_0^\infty|S_n(x+\eta)-f(x+\eta)|^r dx\to 0$, $n\to\infty$, $2\le r<\infty$, $\eta>0$, и положим

$$P_n^{(\eta)}(z)=S_n(z+\eta),\quad f^{(\eta)}(z)=f(z+\eta). \tag{2.13}$$

Поскольку члены последовательности $\{P_n^{(\eta)}(x)\}_{n=1}^\infty$ являются конечными линейными комбинациями функций из системы (1), то её сходимость в пространстве $L^2(0,\infty)$ приводит (см. [12]) к равномерной сходимости

$$P_n^{(\eta)}(z)\to\Phi^{(\eta)}(z)\quad(n\to\infty) \tag{2.14}$$

на любом компактном подмножестве угла $\Delta_{\varphi_0}=\{z:|\arg z|<\varphi_0\}$. Пусть множество $K\subset\Delta_{\varphi_0}$ компактно. Тогда $d:=dist\{K,\partial\Delta\varphi_0\}>0$, где $\partial\Delta\varphi_0=\{z:|\arg z|<\varphi_0\}$. Теперь положим $K^{(\delta)}=\{z-\delta:z\in K\}$, $\delta\in(0,d)$. Тогда $K^{(\delta)}$ содержится в $\Delta\varphi_0$, и согласно (2.13) и (2.14) получим $S_n(z+\delta)\to\Phi^{(\delta)}(z)$ $(n\to\infty)$ равномерно при $z\in K^{(\delta)}$. Итак, последовательность $S_n(z)$ равномерно сходится на K, т.е. она равномерно сходится внутри $\Delta\varphi_0$ и её пределом является функция $\Phi(z)$, $z\in\Delta\varphi_0$, совпадающая с $f(x)$ на $(0,\infty)$. Теорема доказана.

Abstract. The paper proves that if a function $f\in L^2(0,\infty)$ is approximated at the speed of geometrical progression by Dirichlet polynomials with exponents belonging to $\{\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda\ge\delta>0,\ |\arg\lambda|\le\vartheta<\frac{\pi}{2}\}$, then f admits analytic continuation into some angular domain with vertex at the origin. For the case where the exponents have limit points in a segment of the imaginary axis, an L^p-summation method of biorthogonal expansion by incomplete system of exponential functions is shown to be uniform inside an angular domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Х. Мусоян, "Аналитическое продолжение функций, аппроксимируемых полной системой Дирихле", ДАН Арм.ССР, том 72, № 3, стр. 135 – 140, 1981.
2. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, "Интегральные представления и наилучшие приближения обобщенными полиномами по системам типа Миттаг–Леффлера", Изв. АН СССР, серия Математика, том 47, № 6, стр. 1182 – 1207, 1983.
3. М. М. Джрбашян, "О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^{\infty}$", Докл. АН СССР, том 141, № 3, стр. 539 – 542, 1961.
4. М. М. Джрбашян, "Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций", Мат. Сборник, том 114 (156), № 1, стр. 3 – 84, 1981.
5. V. Kh. Musoyan, "Analytic continuation of functions permitting approximation by incomplete system of exponents in L^p", Theory of functions and applications, Collection of Works Dedicated to the memory of Mkhitar M. Djrbashian, pp. 129 – 132, "Louys", Yerevan, 1995.
6. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 2, стр. 163 – 186, 1986.
7. В. Х. Мусоян, "Экстремальные свойства полиномов Дирихле", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 18, № 4, стр. 253 – 270, 1983.
8. M. Grum, "On the theorems of Muntz and Szasz", J. London Math. Soc., vol. 31, pp. 433 - 437, 1956.
9. M. Grum, "On the theorems of Muntz and Szasz. Corrigendum and addendum", J. London Math. Soc., vol. 32, p. 512, 1957.
10. L. Schwartz, Etude des sommes d'exponentielles, 1-ere ed., Hermann, Paris, 1943, 2-eme ed., 1959.
11. М. С. Мартиросян, "Равномерная суммируемость биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций", Деп. в Арм. НИИНТИ, 15.07.98, № 93 – Ар98.
12. В. Х. Мусоян, "Аналитическое продолжение и экстремальные свойства функций, аппроксимируемых неполной системой компонент", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 6, стр. 530 – 556, 1986.

Поступила 22 марта 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 55-60

ПИКОВЫЕ МНОЖЕСТВА ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА АЛГЕБР

К. Л. Панкратьева

Казанский государственный университет

Резюме. В статье устанавливается связь между полугруппами и пиковыми множествами для равномерных алгебр.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – компактная абелева группа с двойственной группой $\widehat{G}$, изометричной аддитивной группе Γ. Для любого $\alpha \in \Gamma$ через χ^α обозначим соответствующий характер в $\widehat{G}$. Каждая функция $f \in L^1(G, d\sigma)$, где σ – нормированная мера Хаара на G, обладает формальным рядом Фурье, т.е.

$$f \sim \sum_{\alpha\in\Gamma} c_\alpha^f \chi^\alpha,$$

с коэффициентами Фурье

$$c_\alpha^f = \int_G f\chi^{-\alpha} d\sigma.$$

Множество $\mathrm{Sp} f$ всех $\alpha \in \Gamma$, для которых $c_\alpha^f \neq 0$, называется спектром функции f. Функции, непрерывные на G, формируют коммутативную Банахову алгебру $C(G)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup|f|$.

Напомним, что подалгебра A банаховой алгебры $C(G)$ разделяет точки G, если для каждой пары $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in G$ существует функция $f \in A$ такая, что $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Алгебра $A \subset C(G)$ называется равномерной алгеброй на G, если A содержит постоянную, разделяет точки G и замкнута в равномерной норме G. Пусть S – под-полугруппа группы Γ и пусть $A_S = \{f \in C(G) : \mathrm{Sp}\, f \subset S\}$. Как хорошо известно, A_S является равномерной алгеброй, тогда и только тогда, когда $0 \in S$ (т.е. 0 является единицей группы Γ) и $S + (-S) = \Gamma$.

Имеется связь между свойствами S и A_S. Например, $S = \Gamma$ по теореме Шоуна-Вейерштрасса. Кроме того, $A_S = C(G)$, и, по теореме Аренса–Зингера, множество максимальных идеалов A_S совпадает с множеством полухарактеров S, т.е. полугрупповым гомоморфизмом, переводящим S в единичный круг $D = \{|z| \leq 1\}$.

Данная статья посвящена исследованию p-множеств A_S по полугруппам подполугруппы S.

Автор благодарен профессору Сурену Григоряну за многочисленные полезные обсуждения.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Единичный круг $D = \{|z| \leq 1\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$ является полугруппой по отношению к естественному произведению комплексных чисел. Функция $m : S \to D$ называется **полухарактером**, если

$$m(a+b) = m(a) \cdot m(b) \quad \text{и} \quad m(0) = 1.$$

Пусть M_S – множество полухарактеров в S. Тогда, согласно теореме Аренса-Зингера (см. [1]), M_S является также пространством максимальных идеалов алгебры A_S. Кроме того, множество M_S является полугруппой с поточечной операцией

$$(m_1 m_2)(a) = m_1(a) \cdot m_2(a), \quad m_1, m_2 \in M_S.$$

Единицей в M_s является элемент $e \in M_s$ такой, что $e(a) = 1$ для всех $a \in S$. Множество

$$G_S = \{a \in S : a + b = 0 \quad \text{при некотором} \quad b \in S\}$$

является максимальной группой в S, а $J_S = S \setminus G_S$ – идеалом в S. Нулевой элемент в M_S есть функция

$$\theta(a) = \begin{cases} 1, & a \in G_S \\ 0, & a \in J_S \end{cases} \qquad (\theta : S \to \{0, 1\}). \tag{1}$$

Под-полугруппа H полугруппы S называется **алгебраически замкнутой** в S, если $A \in H$ для $na \in H$ при некоторых $a \in S$ и $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$.

Пусть $N(H)$ – алгебраическое замыкание H в S. Тогда, легко видеть, что $N(H)$ является полугруппой в S. Обозначим через Γ_H группу, порождённую H, т.е. $\Gamma_H = H + (-H)$.

Полугруппа $H \subset S$ называется полной в S, если $H = \Gamma_H \cup S$. Любое $H \subset S$ может быть **дополнено** в S до $H^* = \Gamma_H \cup S$.

Множество $E \subset G$ называется **пиковым** для A_S, если существует $f \in A$ такая, что $f(a) = 1$ при любом $\alpha \in E$ и $|f(a)| < 1$ при любом $\alpha \in G \setminus E$. Множество

$E \subset G$ называется **p-множеством** (см. [2]), если оно является пересечением пиковых множеств. Например,

$$G_a = \{\alpha \in G : \chi^a(\alpha) = 1\}, \quad a \in S$$

суть пиковые множества для A_S, и в этом случае можно брать $f = (1 + \chi^a)/2$.

§2. ИДЕМПОТЕНТЫ В M_S

Элемент $m \in M_S$ называется **идемпотентом**, если $m^2 = m$. Множество Id_S всех идемпотентов в M_S является под-полугруппой полугруппы M_S, а функция (1) является полухарактером из M_S.

Лемма 2.1. *Для любого идемпотента $m \in M_S$, полугруппа $S_0^m = \{a \in S : m(a) = 1\}$ полна в S.*

Доказательство. Пусть $b \in \Gamma_{S_0^m} \cup S$. Тогда существуют $a, c \in S_0^m$ такие, что $b = a - c$, и тем самым $a = b + c$. Следовательно, $1 = m(a) = m(b+c) = m(b) \cdot m(c) = m(b)$. Последнее означает, что $b \in S_0^m$. Лемма 2.1 доказана.

Положим $S_1^m = \{a \in S : m(a) = 0\}$ и напомним, что полугруппа H называется **идеалом**, если $a + b \in H$, для любых $a \in S$ и $b \in H$.

Теорема 2.1. *Если H – алгебраически замкнутый идеал в S, то в Id_S имеется множество идемпотентов $\{m\}$ таких, что*

$$H = \bigcap_{m \in \{m\}} S_1^m.$$

Доказательство. Пусть $a \in S \setminus H$ и $K_a = \{b \in S : \exists c \in S$ такое, что $b + c \in \mathbf{Z}_+ a\}$ является под-полугруппой полугруппы S. Тогда, очевидно, $a \in K_a$. Покажем, что $K_a \cap H = \emptyset$. Если $b \in K_a \cap H$, то $b + c \in H$ для любого $c \in S$, поскольку H – идеал в S. Следовательно, $\mathbf{Z} \subset H$, т.е. $a \in H$. Пришли к противоречию, поскольку $J_a = S \setminus S_a$ содержится в S и $a \neq J_a$. Определим теперь идемпотент в $m_a \in Id_S$ следующим образом :

$$m_a(b) = \begin{cases} 1, & b \in K_a, \\ 0, & b \in J_a. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $H = \bigcup_{a \in S \setminus H} J_a$. Теорема 2.1 доказана.

§3. p–МНОЖЕСТВА

Если $H \subset S$ – полугруппа, то группа $H^\perp = \{\alpha \in G : \chi^a(\alpha) = 1$ для всех $a \in H\}$ является компактной подгруппой G. Далее, если $H_1 \subset H_2$ – какие-либо под-полугруппы в S, то $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$, и $H^\perp$ является p-множеством для A_S, поскольку $H^\perp = \bigcap_{a \in H} G_a$, где $G_a = \{\alpha \in G : \chi^a = 1\}$ – пиковое множество для A_S.

Полагая, что G_0 – подгруппа группы G, определим

$$G_0^{\perp} = \{a \in S : \chi^a(\alpha) = 1, \ \alpha \in G_0\}$$

и отметим, что $G_0^{\perp}$, очевидно, является под-полугруппой в S и из $G_0 \subset G_1$ вытекает $G_1^{\perp} \subset G_0^{\perp}$.

Лемма 3.1. *Следующие два условия эквивалентны :*

a) H – полная полугруппа,

b) $(H^{\perp})^{\perp} = H$.

Доказательство. Для доказательства импликации $a) \Longrightarrow b)$, предположим, что $G_0 = \Gamma_H^{\perp} = \{\alpha \in G : \chi^b(\alpha) = 1 \quad \text{для всех} \quad b \in \Gamma_H\}$. Далее заметим, что $G_0^{\perp} = \Gamma_H$, поскольку группа Γ_H различает классы смежности G по G_0. Кроме того, для любого $b \in \Gamma_H$ существуют некоторые $a, c \in H$ такие, что $b = a - c$. Тем самым, $G_0 = H^{\perp}$. Пусть теперь $a \in (H^{\perp})^{\perp} = G_0$. Тогда $a \in \Gamma_H$ и $a \in H$ ввиду a). Следовательно, $(H^{\perp})^{\perp} \subset H$, и $(H^{\perp})^{\perp} = H$ ввиду тривиального включения $(H^{\perp})^{\perp} \supset H$.

Для доказательства импликации $b) \Longrightarrow a)$ заметим, что если $b \in \Gamma_H \cap S$, то $b \in (\Gamma_H^{\perp})^{\perp}$, и $b \in (H^{\perp})^{\perp}$, поскольку $\Gamma_H^{\perp} = H^{\perp}$. Следовательно, H – полная полугруппа. Лемма 3.1 доказана.

По лемме 3.1, $(H^{\perp})^{\perp} = \Gamma_H \cap S$, т.е. $(H^{\perp})^{\perp}$ – дополнение H до S.

Лемма 3.2. *Следующие два условия эквивалентны :*

a) G_0 является p-множеством для алгебры A_S,

b) $(G_0^{\perp})^{\perp} = G_0$.

Доказательство. Для доказательства импликации a)$\Longrightarrow$b) покажем, что для каждого $\alpha \notin G_0$ существует χ^{a_0} $(a_0 \in G_0^{\perp})$ такое, что $\chi^{a_0} \neq 1$. Так как G_0 является p-множеством, то существует функция $f \in A_S$ такая, что $\|f\|_\infty = 1$, $f(\alpha) = 0$ и $f(\beta) = 1$ при любом $\beta \in G_0$. К тому же A_s – алгебра, инвариантная относительно сдвига. Следовательно, функция

$$g(\beta) = \int_{G_0} f(\beta_\gamma) d\tau(\gamma),$$

где τ – нормированная мера Хаара на G_0, принадлежит A_S. Легко видеть, что $g \equiv 1$ в G_0 и $|g| < 1$ в αG. Кроме того, функция g постоянна на смежных множествах G по G_0 и $\mathrm{Sp}\, g \subset G_0^{\perp}$, т.е.

$$g \sim \sum_{a \in G_0^{\perp}} c_a^f \chi^a.$$

Поскольку $|g(\alpha)| < g(e) = 1$, то существует $a_0 \in G_0^\perp$ такое, что $\chi^{a_0}(\alpha) \neq 1$. Следовательно, $(G_0^\perp)^\perp = G_0$.

Теперь докажем импликацию b)$\Longrightarrow$a). Если $H \subset S$ – полугруппа, тогда, очевидно, $H^\perp$ является p-множеством для A_S. Следовательно, из $(G_0^\perp)^\perp = G_0$ вытекает, что G_0 является p-множеством для A_S. Лемма 3.2 доказана.

Пусть P_S – множество всех полугрупп группы G, являющихся p-множествами для A_S, и пусть K_S – множество всех полных под-полугрупп в S. В силу лемм 3.1 и 3.2, операция "$\perp$" порождает взаимнооднозначное соответствие между K_S и P_S. Итак, верна следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существует взаимнооднозначное соответствие между всеми замкнутыми под-полугруппами полугруппы S и всеми подгруппами G, являющимися p-множествами алгебры A_S.*

Сужения характеров из G в $G_0 \subset G$ – характеры в G_0. Следовательно, операция сужения порождает полугрупповой гомоморфизм между полугруппой S и аддитивной под-полугруппой S_{G_0} аддитивной группы, изоморфной $\widehat{G}_0$. Компактная подгруппа G_0 группы G называется **антисимметричной** (по отношению к S), если полугруппа S_{G_0} не имеет тривиальной полугруппы. Иначе говоря, G_0 антисимметрично, если $\chi^a|_{G_0} = 1$ и $\chi^b|_{G_0} = 1$ для всех $a, b \in S$ таких, что $\chi^{a+b}|_{G_0} \equiv 1$. Пусть $P_S^0 = \{G \in P_S : G_0 -$ – антисимметричная группа$\}$ и пусть $K_S^0 = \{S_0^m : m \in \mathrm{Id}_S\}$.

Теорема 3.2. *Операция "$\perp$" порождает взаимнооднозначное соответствие между K_S^0 и P_S^0.*

Доказательство. Для доказательства включения $G_0 = (S_0^m)^\perp \in P_S^0$ предположим, что a и b суть элементы S такие, что $\chi^{a+b}|_{G_0} \equiv 1$. Тогда $a + b \in S_0^m$, и $a, b \in S_0^m$, поскольку $S = S_0^m \cup S_1^m$ и S_1^m – идеал в S. Тем самым $G_0 \in P_S^0$.

Обратно, пусть G_0 – какая-либо группа в P_S^0. Тогда $S_0 = G_0^\perp$ – замкнутая под-полугруппа в S и $S_1 = S \setminus S_0$ – полугруппа. Действительно, если $a, b \in S_1$, то $\chi^a|_G \not\equiv 1$, и тем самым $a+b \in S_1$. Если же $a \in S_0$ и $b \in S_1$, то $\chi^{a+b}|_{G_0} = \chi^b|_{G_0} \not\equiv 1$. Следовательно, S_1 – идеал в S. Введём теперь идемпотент $m \in \mathrm{Id}_S$ следующим образом :

$$m(a) = \begin{cases} 1, & a \in S_0, \\ 0, & a \in S_1. \end{cases}$$

и заключаем, что $S_0 = S_0^m$.

Abstract. The paper establishes a connection between semigroups and peak sets of associated uniform algebras.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, pp. 379 – 393, 1953.
2. T. Gamelin, Uniform algebras. Prentice-Hall, 1969.
3. T. Tonev, Big-Planes, boundaries and function algebras. North Holland, 1992.

Поступила 3 апреля 2004

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 61–71

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Р. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматриваются некоторые параметризованные задачи выпуклого программирования. Показано, что при довольно естественных предположениях, множества оптимальных решений являются липшицевыми многозначными выпуклыми отображениями. Доказано, что липшицевые многозначные отображения с выпуклыми замкнутыми значениями на компактных множествах можно представить через функции однозначных липшицевых селекций этих отображений.

§1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Многозначные отображения интенсивно применяются для исследования устойчивости и стабильности в параметризованных экстремальных задачах (см. [5], [6], [8]) и в теории дифференциальных включений (см. [4], [5]). В настоящей статье рассматриваются некоторые параметризованные задачи выпуклого программирования. Показано, что при довольно естественных предположениях, множество $\mathcal{E}$ оптимальных решений являются липшицевыми многозначными выпуклыми отображениями. Доказано, что если значения многозначного липшицева отображения выпуклы и замкнуты на компактных множествах, то его можно представить через функции одномерных липшицевых селекций этих отображений (см. [2]], [7], [10]).

Пусть X и Y – банаховы пространства, $B_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x. Обозначим через clM замыкание множества M, а через ∂M – его границу. Отображение a из X в Y называется **многозначным отображением** (в дальнейшем м.о.), если каждому $x \in X$ оно сопоставляет множество $a(x) \subseteq Y$, т.е. $a : X \longmapsto 2^Y$. Селекция для a определяется как однозначное отображение $y(\cdot) : X \longmapsto Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 1. Будем говорить, что м.о. a **H-полунепрерывно снизу (сн.пн)** в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x_0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0)$, $x \in U(x_0)$.

Определение 2. Будем говорить, что м.о. a **H-полунепрерывно сверху (св.пн.)** в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \subseteq a(x_0) + B_\varepsilon(0)$, $x \in U(x_0)$.

М.о. a называется **H-непрерывным** в точке x_0, если в точке x_0 оно одновременно и H-сн.пн. и H-св.пн.

Определение 3. М.о. a называется **K-сн.пн.** в точке x_0, если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и любой последовательности $\{x_j\}$, $x_j \to x_0$, существует $y_j \in a(x_j)$ такое, что $y_j \to y_0$.

Определение 4. Будем говорить, что м.о. a удовлетворяет **условию Липшица на множестве** $E \subseteq X$, если существует число $L > 0$ такое, что

$$a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\| B_1(0), \quad x_1, x_2 \in E.$$

Лемма 1.1. *Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть $a : X \to 2^Y$ – H-сн.пн. многозначное отображение с выпуклыми, замкнутыми значениями. Далее, пусть $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такие, что $y_0 + B_\varepsilon(0) \in a(x)$, $x \in V(x_0)$.*

Доказательство. Так как $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$, то существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$y_0 + 2B_\varepsilon(0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0), \quad x \in V(x_0). \tag{1.1}$$

Для того, чтобы доказать $y_0 + B_\varepsilon(0) \subseteq a(x)$, заметим, что если выполнено включение (1.1), то для любого $u_0 \in Y$ имеет место неравенство

$$\rho(u_0, y_0 + 2B_\varepsilon(0)) \geq \rho(u_0, a(x) + B\varepsilon(0)). \tag{1.2}$$

Известно (см. [3]) представление

$$\rho(u_0, M) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \{< y^*, u_0 > -sM(y^*)\}, \quad sM(y^*) = \sup_{y \in M} \langle y^*, y \rangle.$$

Следовательно,

$$\rho(u_0, y_0 + 2B_\varepsilon(0)) = \|u_0 - y_0\| - 2\varepsilon \geq \rho(u_0, a(x)) - \varepsilon.$$

Из (1.2) получаем $\|u_0 - y_0\| - 2\varepsilon \geq \rho(u_0, a(x)) - \varepsilon$ и поэтому $\|u_0 - y_0\| - \varepsilon \geq \rho(u_0, a(x))$. Следовательно,

$$\rho(u_0, y_0 + B_\varepsilon(0)) \geq \rho(u_0, a(x)). \tag{1.3}$$

Если существует $\overline{y} \in y_0 + B_\varepsilon(0)$ такое, что $\overline{y} \notin a(x)$, то $\rho(\overline{y}, a(x)) > 0$ и $\rho(\overline{y}, y_0 + B_\varepsilon(0)) = 0$, но это противоречит условию (1.3). Лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.1. *Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть a – H-сн.пн. многозначное отображение на компактном множестве $E \subset X$. Далее, пусть $M \subset Y$ – выпуклое, замкнутое множество, и пусть $\operatorname{int} a(x) \cap M \neq \emptyset$ для любого $x \in E$. Тогда $c(x) \equiv a(x) \cap M$ является многозначным K-сн.пн. отображением.*

Доказательство. Сначала, покажем, что существует непрерывное отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$, $\overline{x} \in V(x)$. Пусть $u_x \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$. Тогда из леммы 1.1 следует, что существует окрестность $V(x)$ точки x такая, что $u_x \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$, $\overline{x} \in V(x)$. Семейство $\{V_x\}_{x\in E}$ открытых окрестностей покрывают компактное множество E. Следовательно, существует конечное множество открытых окрестностей $\{V_i\}_{i=1}^n$, также покрывающих E. Пусть точки u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $u_i \in \operatorname{int} a(x) \cap M$, $\overline{x} \in V_i$. Определим функции следующим образом :

$$\vartheta_i(x) = \min\{1, d(x, E \setminus V_i)\}, \quad \vartheta(x) = \sum_{i=1}^n \vartheta_i(x), \quad \lambda_i(x) = \vartheta_i(x)/\vartheta(x).$$

Эти функции непрерывны, поскольку функции расстояния $d(x, E \setminus V_i)$ удовлетворяют условию Липшица по x. Следовательно, функция $D(x) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i(x) u_i$ $(x \in E)$ непрерывна и $\lambda_i(x) = 0$, если $x \notin V_i$. Так как, $u_i \in \operatorname{int} a(x) \cap M$, если $x \in V_i$, то $D(x) \in \operatorname{int} a(x) \cap M$, для любого $x \in E$.

Теперь покажем, что многозначное отображение $c(x)$ является сн.пн. Пусть $y_0 \in c(x_0)$ и $x_j \to x_0$. Положим

$$T_j \equiv \{t \in [0,1]/y_j \equiv ty_0 + (1-t)D(x_j) \in c(x_j)\}.$$

Поскольку $0 \in T_j$, то $T_j \neq \emptyset$. Если t_j является максимальным элементом множества T_j, то последовательность $\{t_j\}$ можно считать сходящейся. Так как $D(x_j) \to D(x_0)$, то $y_j \to y_0$, при $t_j \to 1$. Следовательно, $\{y_j\}$ – искомая последовательность. Если $t_j \to t < 1$, то начиная с некоторого номера, все $t_j < 1$. Покажем, что $y_j \in \partial a(x_j)$. Допустим, что $y_j \in \operatorname{int} a(x_j)$ и $t'_j = t_j + \delta < 1$, и рассмотрим точки

$$y'_j = t'_j y_0 + (1 - t'_j) D(x_j) = y_j + \delta(y_0 - D(x_j)).$$

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что $y'_j \in \operatorname{int} a(x_j)$, и тем самым получим противоречие с максимальностью t_j. Если $y_j \in \partial a(x_j)$, то согласно лемме 1.1, имеем

$$\overline{y} \equiv ty_0 + (1-t)D(y_0) \in \partial a(x_0). \tag{1.4}$$

Если $y_0 \in \partial a(x_0)$ и $D(x_0) \in \operatorname{int} a(x_0)$, то $\overline{y} \in \operatorname{int}\,(x_0)$, а это противоречит условию (1.4). Следовательно, существует последовательность $y_j \in a(x_j) \cap M$ такая, что $y_j \to y_0$.

Если $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$, то согласно лемме 1.1, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $y_0 \in a(x)$ для любой точки $x \in V(x)$, и $y \equiv y_0$ будет искомой последовательностью. Таким образом, $c(x)$ является K-сн. пн.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, и пространство Y - сепарабельно. Тогда существуют счётное множество липшицевых отображений $\{y_j(x)\}$ таких, что*

$$y_j(x) \in c(x) \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad c(x) = cl\{y_1(x), y_2(x), \ldots\}, \quad x \in E.$$

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.1, построим функцию $D(x) = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i(x) u_i$, где I – конечное множество индексов. Покажем, что D удовлетворяет условию Липшица на компакте E. Для этого достаточно показать, что функция $\lambda_i(x) = \vartheta_i(x)/\vartheta(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Так как функция расстояния $d(x, E \setminus V_i)$ удовлетворяет условию Липшица (с константой 1), то и функции $\vartheta_i(x) = \min\{1, d(x, E \setminus V_i)\}$ и $\vartheta(x) = \sum\limits_{i \in I} \vartheta_i(x)$ также удовлетворяют условию Липшица. Так как E компакт, и $\vartheta(x) > 0$ для любого $x \in E$, то $m = \min_{x \in E} \vartheta(x) > 0$. Имеем

$$|\lambda_i(x_1) - \lambda_i(x_2)| = \left| \frac{\vartheta_i(x_1)}{\vartheta(x_1)} - \frac{\vartheta_i(x_2)}{\vartheta(x_2)} \right| = \left| \frac{\vartheta_i(x_1)\vartheta(x_2) - \vartheta_i(x_2)\vartheta(x_1)}{\vartheta(x_1)\vartheta(x_2)} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{m^2} \left(|\vartheta(x_2)||\vartheta_i(x_1) - \vartheta_i(x_2)| + |\vartheta_i(x_2)||\vartheta(x_1) - \vartheta(x_2)| \right) \le \frac{M_2 + M_1}{m^2} \|x_1 - x_2\|,$$

где $M_1 = \max_{x \in E} \theta(x)$, $M_2 = |I|$.

Таким образом, отображение D удовлетворяет условию Липшица на E. Пусть теперь $\overline{u} \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$. Тогда согласно лемме 1.1, существует $\delta > 0$ такое, что $\overline{u} \in \operatorname{int} a(x)$, $x \in B_\delta(\overline{x})$. Положим

$$\lambda(x) \equiv d(x, E \setminus B_\delta(\overline{x})) \,/\, \left[d(x, E \setminus B_\delta(\overline{x})) + d(x, B_{\delta/2}(\overline{x})) \right].$$

Можно показать, что функция $\lambda(x)$ также удовлетворяет условию Липшица на E. Далее, очевидно, $\lambda(x) = 1$ для $x \in B_{\delta/2}(\overline{x})$ и $\lambda(x) = 0$ для $x \notin B_\delta(\overline{x})$ и $0 \le \lambda(x) \le 1$. Отсюда следует, что функция $y(x) \equiv \lambda(x)\overline{u} + (1 - \lambda(x))D(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $y(x) \in c(x)$, $y(\overline{x}) = \overline{u}$. Обозначим через $\Im$ множество всех липшицевых селекций отображения $c(x)$. Так как $\overline{x}$ и $\overline{u}$ – произвольные точки множеств E и $\operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$ соответственно, то

$$\operatorname{int} a(x) \cap M \subseteq \{y(x)/y \in \Im\} \subseteq a(x) \cap M, \quad x \in E.$$

Поэтому для всех $x \in E$ множество $\{y(x)/y \in \Im\}$ всюду плотно в $a(x) \cap M$. Известно (см. [5]), что подмножество $\Im \subseteq C(E,Y)$ содержит счётное, всюду плотное подмножество $\{y_1, y_2, \ldots\}$. Для $x \in E$ множество $\{y(x)/y \in \Im\}$ всюду плотно в $c(x)$. Поэтому, для всех $x \in E$ множество $\{y_1(x), y_2(x), \ldots\}$ также всюду плотно в $c(x)$. Теорема 1.2 доказана.

§2. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 2.1. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ – липшицевы многозначные отображения на множестве E и существует число $\tau > 0$ такое, что $\tau B_1(0) \subseteq a(x) - b(x)$, $x \in E$. Если существует $\overline{x} \in E$ такое, что множество $b(\overline{x})$ ограничено, то м.о. $c(x) \equiv a(x) \cap b(x)$ удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Так как м.о. a и b удовлетворяют условию Липшица, то существуют постоянные L_1 и L_2 такие, что для любых $x_1, x_2 \in X$ имеют место включения

$$a(x_1) \subseteq a(x_2) + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0), \tag{2.1}$$

$$b(x_1) \subseteq b(x_2) + L_2\|x_1 - x_2\|B_2(0). \tag{2.2}$$

Пусть $y_1 \in a(x_1) \cap b(x_1)$. Тогда из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что существуют элементы $y_2' \in a(x_2)$ и $y_2'' \in b(x_2)$ такие, что

$$y_1 \in y_2' + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0), \tag{2.3}$$

$$y_1 \in y_2'' + L_2\|x_1 - x_2\|B_1(0). \tag{2.4}$$

Следовательно, $y_1 = y_2'' + z$, где $z \in L_2\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, и из (2.3) получим $y_2'' + z \in y_2' + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, т.е. $y_2'' \in y_2' + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0) + L_2\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, и

$$y_2'' \in y_2' + (L_1 + L_2)\|x_1 - x_2\|B_1(0). \tag{2.5}$$

Положим $\vartheta = \tau/(\tau + \alpha) < 1$, где $\alpha = (L_1 + L_2)\|x_1 - x_2\|$. Из (2.5) получим

$$\vartheta y_2'' \in \vartheta \alpha(x) + \alpha\vartheta B_1(0). \tag{2.6}$$

Теперь заметим, что

$$\alpha\vartheta = \frac{\alpha\tau}{\tau+\alpha} = (1-\vartheta)\tau. \tag{2.7}$$

Отсюда и из соотношений (2.6) и (2.7), получаем

$$\vartheta y_2'' \in \vartheta a(x_2) + (1-\vartheta)\tau B_1(0) \subseteq \vartheta a(x_2) + (1-\vartheta)\big(a(x_2) - b(x_2)\big) = a(x_2) - (1-\vartheta)b(x_2). \tag{2.8}$$

Следовательно, существует $\widetilde{y} \in b(x_2)$ такое, что $\vartheta y_2'' + (1-\vartheta)\widetilde{y} \in a(x_2)$. Так как множества $a(x_2)$ и $b(x_2)$ выпуклы, то

$$\vartheta y_2'' + (1-\vartheta)\widetilde{y} \in a(x_2) \cap b(x_2) \equiv c(x_2).$$

Легко проверить следующие оценки :

$$\|y_1 - (\vartheta y_2'' + (1-\vartheta)\widetilde{y})\| \le \vartheta\|y_1 - y_2''\| + (1-\vartheta)\|y_1 - \widetilde{y}\| \le$$

$$\le L_2\|x_1 - x_2\| + \frac{\alpha}{\alpha+\tau}\|y_1 - \widetilde{y}\| \le L_2\|x_1 - x_2\| + \frac{\alpha}{\tau}M,$$

где $M = 2C$ и $C = \sup_{y\in b(x),\, x\in E}\|y\|$. Отсюда получаем

$$\|y_1 - \widetilde{y}\| \le \left[L_2 + \frac{M}{\tau}(L_1 + L_2)\right]\|x_1 - x_2\| \equiv L\|x_1 - x_2\|.$$

Следовательно, $c(x_1) \subseteq c(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, т.е. м.о. $c(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь следующую параметрическую задачу оптимизации

$$f_0(x,y) \to \min, \quad f_i(x,y) \le 0, \quad j = 1,2,\ldots,p,$$

где $y \in Y$, а $x \in E$ – параметр. Положим

$$V(x) = \inf\{f_0(x,y)/f_j(x,y) \le 0, \quad j = 1,2,\ldots,p, \quad y \in F\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены следующие три условия :*

1) *множество $E \subset \mathbb{R}^m$ – компакт и $F \in \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт ;*
2) *функции $y \to f_j(x,y)$ $(j = 1,\ldots,p)$ выпуклы по y, а по x удовлетворяют условию Липшица равномерно относительно $y \in F$, т.е. существуют числа $L_j > 0$ такие, что для любых $x_1, x_2 \in E$ и $y \in F$ имеют место неравенства*

$$|f_j(x_1,y) - f_j(x_2,y)| \le L_j\|x_1 - x_2\|, \quad j = 1,2,\ldots,p;$$

3) *для любого $x \in E$ существует $y \in F$ такое, что $f_j(x,y) < 0$, $j = 1,2,\ldots,p$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ м.о.

$$a_\varepsilon(x) = \{y \in F : f_j(x,y) \le 0, \quad j = 1,\ldots m, \quad f_0(x,y) \le V(x) + \varepsilon\}$$

удовлетворяет условию Липшица на множестве E.

Доказательство. Пусть $\delta, \epsilon > 0$. Положим

$$
\begin{aligned}
&B(x) = \{y \in F + B_\delta(0) : f_0(x,y) \le V(x) + \varepsilon\},\\
&A(x) = \{y \in F : f_j(x,y) \le 0, \quad j = 1,\dots,p\},\\
&a(x) = \{y \in A(x) : f_0(x,y) \le V(x)\},\\
&a_\varepsilon(x) = \{y \in A(x) : f_0(x,y) \le V(x) + \varepsilon\},\\
&\psi(x,y) \equiv \max_{j=1,\dots,p} f_j(x,y).
\end{aligned}
$$

Тогда очевидно, $A(x) = \{y \in F : \psi(x,y) \le 0\}$ и $a_\varepsilon(x) = A(x) \cap B(x)$. В силу теоремы 2 из [1], оба м.о. $A(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют условию Липшица, и очевидно, существует $\tau \in (0,\delta)$ такое, что $\tau B_1(0) \subseteq B(x) - a(x)$, т.е. $\tau B_1(0) \subseteq A(x) - B(x)$. Отсюда и из теоремы 2.1 получим, что м.о. $a_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Теорема 2.2 доказана.

Следствие. Если $f_0(x,y) \equiv f_0(y)$, $f_j(x,y) \equiv f_j(y) - x_j$ и существует $\widetilde{y} \in F$ такая, что $f_j(\widetilde{y}) < 0$ $(j = 1,\dots,p)$, то многозначное отображение $a_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности начала координат.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 3.1. *Пусть $a : X \longmapsto 2^Y$ – липшицево м.о. (с константой $L > 0$) на компактном множестве $E \subset X$, с выпуклыми, замкнутыми значениями и непустой внутренностью. Далее, пусть Y – сепарабельное гильбертово пространство. Пусть для некоторого $\overline{x} \in E$ множество $a(\overline{x})$ – ограничено. Тогда существуют число $L_1 > 0$ и отображения $\{y_j(x)\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что для всех i имеют место неравенства*

$$
\|y_i(x_1) - y_i(x_2)\| \le L_1\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E,
$$

$$
y_i(x) \in a(x), \quad a(x) = cl\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots\}, \quad x \in E.
$$

Доказательство. Выше мы показали, что существует однозначное липшицево отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \operatorname{int} a(x)$, $x \in E$. Рассмотрим м.о. $b(x) \equiv a(x) - D(x)$. Так как множество E компактно, то из леммы 1.1 непосредственно следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $B_\delta(0) \subseteq b(x)$ для любого $x \in E$.

Теперь рассмотрим функцию Минковского для множества $b(x)$, т.е. $r(x,y) \equiv \inf_\alpha\{\alpha > 0 : y/\alpha \in b(x)\}$. Известно (см. [3]), что при любом фиксированном x функция $r(x,y)$ выпукла, однородна и непрерывна по y. Имеем

$$
r(x,y) < 1 \Longleftrightarrow y \in \operatorname{int} b(x) \quad \text{и} \quad r(x,y) = 1 \Longleftrightarrow y \in \partial b(x).
$$

Пусть число $\Delta > 0$ такое, что $b(x) \subseteq B_\Delta(0)$ для любого $x \in E$. Очевидно, что для любого $y \neq 0$ имеет место включение $z_1 \equiv y[r(x_1, y)]^{-1} \in \partial b(x_1)$. Пусть $z_1 \notin b(x_2)$ и точка z такая, что $\|z_1 - z\| = d(z_1, b(x_2))$ (см. Рис. 1). Проведём двумерную плоскость, проходящую через три точки z, z_1 и 0. Пусть отрезок $[y_1, y_2]$ перпендикулярен отрезку $[z_1, 0]$ и $|\overline{0, y_1}| = |\overline{0, y_2}| = \delta$. Тогда хотя бы один из отрезков $[z, y_1]$ и $[z, y_2]$ пересекает отрезок $[z_1, 0]$ в некоторой точке y_3. Поскольку $y_2 \in b(x_2)$ и $z \in b(x_2)$, то $y_3 \in b(x_2)$.

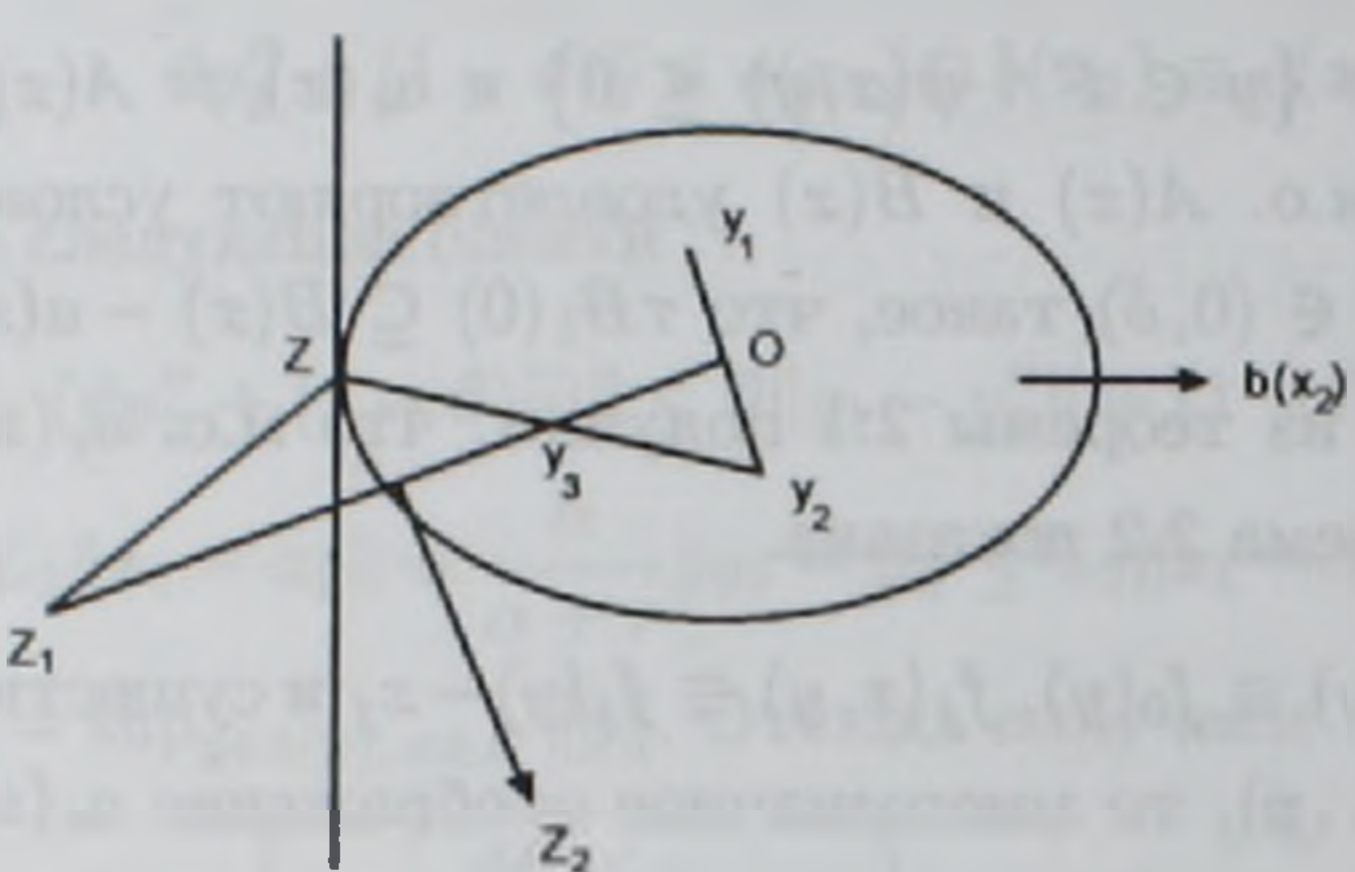

Рис. 1

Если $y_3 \neq z$, имеет место следующее неравенство для углов :

$$\angle(zy_3z_1) \geq \angle(0y_3y_2) \geq \arctan\frac{\delta}{\Delta}.$$

Далее, из треугольника zy_3z_1 имеем

$$\|z_1 - y_3\| = \frac{\sin\angle(y_3zz_1)}{\sin\angle(zy_3z_1)}\|z_1 - z\| \leq \frac{L}{\sin\alpha_0}\|x_1 - x_2\|.$$

Но поскольку $z_2 = y[r(x_2, y)]^{-1}$, то имеем

$$\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - y_3\| \leq \frac{L}{\sin\alpha_0}\|x_1 - x_2\|.$$

Отметим, что это неравенство тривиально выполняется и в исключённом выше случае $z = y_3$. Таким образом, показано

$$\left\|\frac{y}{r(x_1, y)} - \frac{y}{r(x_2, y)}\right\| \leq \frac{L}{\sin\alpha_0}\|x_1 - x_2\|. \tag{3.1}$$

Пусть теперь $\overline{y} \in b(\overline{x})$. Положим $y(x) \equiv \overline{y}r(\overline{x}, \overline{y})/r(x, \overline{y})$. Тогда очевидно, что $y(\overline{x}) = \overline{y}$ и

$$r(x, y(x)) = r(x, \overline{y})r(\overline{x}, \overline{y})/r(x, \overline{y}) = r(\overline{x}, \overline{y}) \leq 1.$$

Поэтому для любого $x \in E$ имеем $y(x) \in b(x)$. Имея ввиду неравенства (3.1), получаем

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \le r(\overline{x}, \overline{y}) \frac{L}{\sin \alpha_0} \|x_1 - x_2\| \equiv L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E.$$

Поэтому отображение $y(x)$ есть селектор отображения $b(x)$, проходящего через точку $(\overline{x}, \overline{y})$ $(\overline{y} \in b(\overline{x}))$.

Пусть $\Im$ – множество всех липшицевых (с константой L_1) селекторов отображения $b(x)$. Так как $\overline{x}$ и $\overline{y}$ произвольные точки множеств E и $b(\overline{x})$, соответственно, то $b(x) = \{y(x) : y \in \Im\}$ для любого $x \in E$. Так как пространство $C(E, Y)$ сепарабельно, то множество $\Im \subseteq C(E, Y)$ содержит счётное, всюду плотное подмножество $\{y'_1, y'_2, \ldots\}$. Таким образом, имеем $b(x) = cl\{y'_1(x), y'_2(x), \ldots\}$. Положим $y_i(x) \equiv y'_i(x) + D(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что $y_i(x) \in a(x)$ и $a(x) = cl\{y'_1(x), y'_2(x), \ldots\}$.

Следствие 1. Пусть a многозначное отображение с выпуклыми, замкнутыми значениями и непустой внутренностью, причём a удовлетворяет условию Липшица на компактном множестве E. Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf} a \equiv \{(x, y) : y \in a(x)\}$ проходит липшицева селекция этого отображения.

Доказательство. Пусть $y_0 \in a(x_0)$, $\delta > 0$ и

$$b_\delta(x) = \{y \in Y : \|y - y_0\| \le d(y_0, a(x)) + \delta\}.$$

Положим $c(x) = a(x) \cap b_\delta(x)$. Тогда $b_\delta(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $B_\delta(0) \subseteq a(x) - b_\delta(x)$. Следовательно, в силу теоремы 2.1 м.о. c удовлетворяет условию Липшица на компактном множестве E, а множество $c(x)$ ограничено для любого $x \in E$. Далее, для любого $x \in E$ имеем $\operatorname{int} c(x) \ne \emptyset$. Следовательно, существуют число $L > 0$ и отображение $y(x)$ такие, что $y(x) \in c(x)$ и

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad (x_1, x_2 \in E), \quad y(x_0) = y_0.$$

Следствие 2. Пусть выполнены все условия Теоремы 3.1 и H–подпространство такое, что $\operatorname{int} a(x) \cap H \ne \emptyset$ для любого $x \in E$. Тогда липшицева селекция отображения $c(x) \equiv a(x) \cap H$ проходит через любую точку $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf} c$, и константа в условии Липшица не зависит от выбора точки (x_0, y_0).

Доказательство. В доказательстве Теоремы 1.1 показано, что существует липшицево отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \operatorname{int} a(x) \cap H$. Пусть $b(x) \equiv a(x) - D(x)$. Так как H – подмножество, то легко проверить, что $b(x) \cap H =$

$a(x) \cap H - D(x)$. Поэтому достаточно показать, что через точки $(\overline{x}, \overline{y})$ и $\overline{y} \in b(\overline{x}) \cap H$ проходят липшицевы селекции отображения $b(\overline{x}) \cap H$ (с одной и той же константой Липшица). Легко проверить, что такими будут отображения $y(\overline{x}, \overline{y}, x) = \overline{y}r(\overline{x}, \overline{y}) / r(x, \overline{y})$, построенные при доказательстве теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть a – многозначное отображение с выпуклыми, замкнутыми значениями, H-непрерывно на компактном множестве $E \subset X$, а Y – гильбертово пространство. Если $G \subseteq a(x_0)$ – компактное множество, то некоторые селекторы отображения a проходят через точки (x_0, z), где $z \in G$, и семейство этих селекторов является компактным множеством в пространстве $C(E, Y)$.*

Доказательство. Полагая, что $z \in G$, положим

$$M_i(z, x) = \{y \in Y : \|y - z\| \leq d(z, a(x)) + 1/i\}, \; F_i(z, x) = a(x) \cap M_i(z, x), i = 1, 2, \ldots$$

Многозначные отображения $M_i(z, x)$ очевидно H-непрерывны. Кроме того, существует число $\Delta > 0$ такое, что $M_i(z, x) \subseteq B_\Delta(0)$. Имеем $B_{1/i}(0) \subseteq a(x) - M_i$ $(x \in E)$. Следовательно, по Теореме 16 из [5] (стр. 121), отображения $F_i(z, x)$ также непрерывны по $(z, x) \in G \times E$. Значит, по теореме Майкла [7] существуют непрерывные отображения $y_i(z, x) \in F_i(z, x)$. Пусть $y(z, x)$ – проекция точки z на выпуклое, замкнутое множество $a(x)$, т.е. $\|z - y(z, x)\| = d(z, a(x))$. Тогда из Теоремы 2.1.2 в [9] следует, что

$$\|y(z, x) - y_i(z, x)\| \leq \frac{4}{i} \left(\frac{1}{i} + 2d(z, a(x)) \right). \tag{3.2}$$

Функция $f(z, x) \equiv d(z, a(x))$ непрерывна и поэтому ограничена на компактном множестве $G \times E$. Следовательно, ввиду (3.2) последовательность функций равномерно сходится к $y(z, x)$. Значит, $y(z, x)$ непрерывна на компактном множестве $G \times E$, и $y(z, x_0) = z$, $y(z, x) \in a(x)$ $(x \in E)$. Следовательно, $y(z, x)$ равномерно непрерывна и ограничена на $G \times E$, т.е. $y(z, x)$ компактна. Теорема 3.2 доказана.

Abstract. The paper considers several parametrized problems of convex programming and shows that under some natural assumptions the sets of optimal solutions are Lipschitz multivalued, convex mappings. It is proved that Lipschitz multivalued mappings that have convex closed values on compact sets are representable by the functions of the Lipschitz selections of these mappings.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Р. Хачатрян, Р. А. Хачатрян, "О непрерывности многозначных отображений", Уч. записки, ЕГУ, № 3, стр. 3 – 13, 2003.

2. Р. А. Хачатрян, "О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 37, № 2, стр. 30 – 40, 2002.
3. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Наука, Москва, 1979.
4. Дж. Варга, Оптимальное Управление Дифференциальными и Функциональными Уравнениями, Москва, Наука, 1977.
5. Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
6. T. R. Rockafellar, R. J-B. Wets, Variational Analysis, Springer Verlag, Berlin, 1998.
7. E. Michael, "Continuous selections", Ann. Math. vol. 63, no. 2, pp. 361 – 382, 1956.
8. В. В. Арутюнян, "О дифференциальных свойствах однозначных ветвей функций минималей в гладких параметризованных экстремальных задачах", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 2, стр. 180 – 192, 1987.
9. П.-Ж. Лоран, Аппроксимация и Оптимизация, Москва, Мир, 1975.

Поступила 18 ноября 2003

Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 3, *2004*, *72–80*

ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Х. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет
E-mail : khachatur@ hotbox.ru

Резюме. В работе рассматриваются два интегро-дифференциальных уравнения типа свертки на положительной полуоси, возникающие в физической кинетике. Решения должны удовлетворять условиям в $+\infty$ и 0. Получено точное решение одного из этих уравнений, а структура решения другого уравнения описывается.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим два интегро–дифференциальных уравнения, возникающих в некоторых задачах физической кинетики [1], [2]. Первое уравнение вида

$$\frac{df}{dx} + c\int_0^\infty K(x-t)f(t)dt = 0 \tag{1}$$

с граничным условием

$$f(+\infty) = 0, \tag{2}$$

где $c > 0$ – постоянное и

$$K(x) = \int_1^\infty e^{-|x|s}s^{-2}ds, \tag{3}$$

а второе уравнение вида

$$\frac{df}{dx} = \int_0^\infty K_1(x-t)\frac{df}{dt}dt + \int_0^\infty K_2(x-t)f(t)dt \tag{4}$$

с граничным условием

$$f(0) = \alpha > 0, \tag{5}$$

где

$$K_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} e^{-|x|s} d\sigma_1(s), \quad K_2(x) = \int_{a_2}^{b_2} e^{-|x|s} d\sigma_2(s), \tag{6}$$

$\sigma_1(s)$ и $\sigma_2(s)$ – некоторые неубывающие функции, заданные на $[a_1, b_1)$ и $[a_2, b_2)$ $(0 < a_1 < b_1 \leq \infty,\ 0 < a_2 < b_2 \leq \infty)$ соответственно и такие, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{d\sigma_1(s)}{s} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\sigma_2(s)}{s} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

В статье доказано, что уравнение (1)–(2) обладает решением вида $f(x) = e^{-\lambda(c)x} S(x)$, где $\lambda = \lambda(c) \in (0, 1)$, а $S(x)$ в зависимости от c либо ограничена, либо $S(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$. Для уравнения (4)–(6) доказывается, что при некоторых дополнительных условиях на $\sigma_1(s)$ и $\sigma_2(s)$, оно имеет решение вида

$$f(x) = \alpha + \int_0^x e^{pt}(f_1(t) + f_2(t))dt,$$

где $p \in (0, \min\{a_1, a_2\})$, функция $f_1(x)$ суммируема на $[0, \infty)$, а функция $f_2(x)$ непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$.

§2. УРАВНЕНИЕ (1)–(2)

2.1. О консервативном уравнении Винера–Хопфа. Подход, используемый в данной статье, опирается на преобразование уравнений (1) и (4) в консервативное уравнение Винера–Хопфа

$$S(x) = \int_0^\infty T(x - t)S(t)dt, \quad S(x) > 0, \quad S(0) = 1. \tag{8}$$

Условие консервативности означает, что ядро T удовлетворяет следующим условиям :

$$0 \leq T \in L_1(-\infty, +\infty), \quad \gamma \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)dx = 1. \tag{9}$$

Заметим, что уравнение (8) – (9) изучено в теории переноса излучения (проблема Милна), в кинетической теории газов, в теории вероятностей и др. (см. [3 – 11]). Первый момент ν_1 ядра T определяется абсолютно сходящимся интегралом

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xT(x)dx. \tag{10}$$

Он играет важную роль :

A) Если $\nu_1 < 0$, то уравнение (8) – (9) обладает ограниченным, абсолютно непрерывным и монотонно возрастающим решением.

B) Если $\nu_1 = 0$, то уравнение (8) – (9) обладает абсолютно непрерывным, монотонным и неограниченным решением таким, что (см. [4], [5], [8]) $S(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.

C) Если $\nu_1 > 0$ и функция T экспоненциально убывает в $+\infty$, то уравнение (8) – (9) не имеет решения в классе локально интегрируемых функций медленного (степенного) роста (см. [4], [11]).

2.2. Сведение уравнения (1)–(2) к виду (8). Интегрируя обе части (1) от $\tau > 0$ до $+\infty$, и учитывая условие (2), получим

$$f(\tau) = \int_0^\infty T_0(\tau - t)f(t)dt, \quad \text{где} \quad T_0(\tau) = c\int_\tau^\infty K(x)dx, \quad -\infty < \tau < +\infty. \tag{11}$$

Для произвольного $\lambda > 0$ функция

$$T(x) = T_\lambda(x) = e^{\lambda x}T_0(x) > 0 \tag{12}$$

интегрируема на $(-\infty, 0)$, она интегрируема также на $(0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lambda < 1$ (легко следует из представления (3) функции K). Итак,

$$T_\lambda(x) \in L_1(-\infty, +\infty), \quad 0 < \lambda < 1. \tag{13}$$

Пусть условие (13) выполняется. Умножая обе части (11) на $e^{\lambda x}$, приходим к уравнению (8) относительно функции $S(x) = e^{\lambda x}f(x)$. Если наложим на ядро условие консервативности (9), то простые вычисления приводят к следующему уравнению для определения λ :

$$\lambda^3[-\ln(1 - \lambda^2)]^{-1} = c. \tag{14}$$

2.3. Уравнение (14). Функция

$$c(\lambda) = \lambda^3[-\ln(1 - \lambda^2)]^{-1}, \quad \lambda \in (0, 1),$$

непрерывна на $(0, 1)$, $c(\lambda) > 0$ $(0 < \lambda < 1)$ и $c(+0) = c(1-) = 0$. Далее, $c(\lambda)$ строго возрастает на $(0, \lambda_0)$ и строго убывает на $(\lambda_0, 1)$, а точка максимума λ_0 определяется из уравнения

$$\frac{2\lambda^2}{3(1 - \lambda^2)} = -\ln(1 - \lambda^2). \tag{15}$$

Через $\lambda_1(c)$ и $\lambda_2(c)$ обозначим обратные функции к $c(\lambda)$ на $(0, \lambda_0]$ и на $[\lambda_0, 1)$, соответственно. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем считать, что число c из (1) удовлетворяет условию

$$c \le c_0 = c(\lambda_0). \tag{16}$$

2.4. Первый момент ядра T. Вычислим первый момент ядра T, заданного посредством (12)

$$\nu_1 = \nu_1(\lambda) = \frac{3c}{\lambda^4}\left(\frac{2\lambda^2}{3(1-\lambda^2)} + \ln(1-\lambda^2)\right).$$

Используя (15) и (16), можно доказать следующее утверждение.

Лемма. *a) $\nu_1 < 0$, при $\lambda = \lambda_1(c)$, $\quad c < c_0$,*

b) $\nu_1 > 0$, при $\lambda = \lambda_2(c)$, $\quad c < c_0$,

c) $\nu_1 = 0$, при $\lambda = \lambda_0$, $\quad c = c_0$.

Это означает, что для произвольного c $(0 < c \leq c_0)$ число $\lambda = \lambda_1(c)$ является единственным значением λ, при котором одновременно выполняются условия

$$\gamma = 1 \quad \text{и} \quad \nu_1 \leq 0. \tag{17}$$

Используя свойства решения однородного уравнения (8), изложенного в 2.1, и условие (2), приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если $0 < c \leq c_0$, то уравнение (1)–(2) обладает решением вида*

$$f(x) = e^{-\lambda_1(c)x} S(x),$$

где $S(x)$ – монотонно возрастающая, абсолютно непрерывная функция такая, что $S(0) = 1$. Если $c < c_0$, то $S(x)$ ограничена. Если $c = c_0$, то $S(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.

Вопрос единственности построенного решения обсудим ниже на эвристическом уровне. Если число λ отлично от λ_1, то очевидно уравнение (8) не имеет решения умеренного роста. В частности, при $c < c_0$ и $\lambda = \lambda_2$, из пункта b) Леммы следует, что нарушается условие (17). Следовательно, уравнение (8) не имеет решения медленного (степенного) роста. Для построения экспоненциально растущих решений, будут рассмотрены некоторые другие значения λ.

§3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ $S(x)$

3.1. Представление ядра T через экспоненты. Для построения функции S, должны использовать обобщенные уравнения В. Амбарцумяна (ОУА). Из формул (12) и (3) вытекают следующие выражения, где $x > 0$, а T задается формулой (12) :

$$T_\pm(x) = T(\pm x) = \int_0^\infty e^{-xs} G_\pm(s) ds. \tag{18}$$

Здесь $G_+(s) = c\vartheta(s-1+\lambda)(s+\lambda)^{-3}$ и $G_-(s) = c\delta(s-\lambda) - c\vartheta(s-\lambda-1)\,(s-\lambda)^{-3}$, а ϑ и δ - функции Хевисайда и Дирака. Можно записать интегралы в (18) в форме интегралов Стилтьеса.

Условие консервативности уравнения (18) имеет вид

$$\int s^{-1}G_+(s)ds + \int s^{-1}G_-(s)ds = 1.$$

Отличительной особенностью уравнения (8) с ядерной функцией (12) является тот факт, что хотя T_- – положительная функция, но $G_-(s)ds$ – знакопеременная мера. Вопрос применения уравнения Амбарцумяна к решению таких уравнений впервые разобран в [12]. Ниже будем использовать основной результат работы [12] в указанном направлении.

3.2. Уравнение Амбарцумяна. Перепишем (8) в операторной форме $(I-\widehat{T})S = 0$, где

$$(\widehat{T}f)(x) = \int_0^\infty T(x-t)f(t)dt$$

– оператор Винера–Хопфа с ядром (12), а I – единичный оператор. Пусть

$$V_\pm(x) = \int_0^\infty e^{-xs}\varphi_\pm(s)G_\pm(s)ds, \tag{19}$$

где функции φ_+ and φ_- удовлетворяют уравнению Амбарцумяна

$$\varphi_+(s) = 1 + \varphi_+(s)\int_0^\infty \frac{\varphi_-(p)}{s+p}G_-(p)dp, \tag{20}$$

$$\varphi_-(s) = 1 + \varphi_-(s)\int_0^\infty \frac{\varphi_+(p)}{s+p}G_+(p)dp, \tag{21}$$

и условиям

$$\int_0^\infty s^{-1}|\varphi_\pm(s)|G_\pm(s)ds < +\infty. \tag{22}$$

Тогда имеет место вольтерровая факторизация (см. [4], [6 – 9]) :

$$I - \widehat{T} = (I - \widehat{V}_-)(I - \widehat{V}_+),$$

где $V_\pm$ суть операторы вида

$$(\widehat{V}_+f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)\,f(t)\,dt, \quad (\widehat{V}_-f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)\,f(t)\,dt,$$

ядра которых были получены Н. Б. Енгибаряном [4], [6 – 9] :

$$V_\pm(x) = T(\pm x) + \int_0^\infty V_\pm(t)V_\pm(x+t)dt.$$

Рассмотрим следующие итерации для (20) и (21)' :

$$\varphi_{n+1}^{+}(s) = 1 + \varphi_{n+1}^{+}(s) \int_0^\infty \frac{\varphi_n^{-}(p)}{s+p} G_{-}(p)dp,$$

$$\varphi_{n+1}^{-}(s) = 1 + \varphi_{n+1}^{-}(s) \int_0^\infty \frac{\varphi_n^{+}(p)}{s+p} G_{+}(p)dp, \quad \varphi_0^{\pm}(s) = 0.$$

Из результатов [12] следует, что возрастающие последовательности $\varphi_n^{\pm}$ стремятся к функциям $\varphi^{\pm}$, которые удовлетворяют уравнению Амбарцумяна (20), (21) и условиям (22). Причем, $\gamma_+ < 1$, $\gamma_- = 1$, где

$$\gamma_{\pm} = \int_0^\infty V_{\pm}(x)dx.$$

Функции $V_{\pm}$, определяемые по (19), положительны, причем решение уравнения (8) имеет вид

$$S(\tau) = 1 + \int_0^\tau \Phi_+(t)dt,$$

где Φ_+ – резольвентная функция оператора $I - \widehat{V}_+$, определяемая из уравнения Вольтерра

$$\Phi_+(\tau) = V_+(\tau) + \int_0^\tau V_+(\tau - t)\Phi_+(t)dt. \tag{23}$$

Из (23) и (19) следует (см. [13]), что функция Φ_+ представима в виде

$$\Phi_+(\tau) = \int_\alpha^\beta e^{-\tau p}\, d\omega(p), \quad 0 \le \alpha < \beta \le +\infty, \tag{24}$$

где ω – неубывающая функция на (α, β) и $\omega(\alpha) = 0$. Метод приближённого построения представления (24) изложен в [14], и на нём мы не будем останавливаться.

§4. ЗАДАЧА (4) – (6)

В данном параграфе обсуждается вопрос существования и структуры решений уравнения (4) – (6).

Теорема 2. *Если уравнение*

$$2\int_{a_1}^{b_1} \frac{s d\sigma_1(s)}{s^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega} + 2\int_{a_2}^{b_2} \frac{\omega \cdot d\sigma_2(s)}{s^2 - \omega^2} = 1 \tag{25}$$

имеет комплексный корень ω, где $\mathrm{Re}\ \omega \equiv p \in (0, \min\{a_1, a_2\})$, то

$$f(x) = \alpha + \int_0^x e^{pt}[f_1(t) + f_2(t)]dt$$

является решением уравнения (4) – (6), где функция $f_1(x)$ суммируема, $f_2(x)$ ограничена на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Обозначим

$$\frac{af}{dx} \equiv F(x). \tag{26}$$

Учитывая (5) и изменяя порядок интегрирования в (4), получим

$$F(x) = g(x) + \int_0^\infty K_1(x-t)F(t)dt + \int_0^\infty W_2(x-t)F(t)dt, \tag{27}$$

где

$$W_2(x) = \int_{-\infty}^{x} K_2(t)dt \quad \text{и} \quad g(x) = \alpha W_2(x). \tag{28}$$

Нетрудно заметить, что

$$W_2(x) = \begin{cases} 1 - \int_{a_2}^{b_2} e^{-xs}s^{-1}d\sigma_2(s), & x \geq 0, \\ \int_{a_2}^{b_2} e^{xs}s^{-1}d\sigma_2(s), & x \leq 0. \end{cases}$$

С другой стороны,

$$0 \leq W(x) \equiv K_1(x)e^{-px} + W_2(x)e^{-px} \in L_1(-\infty, +\infty)$$

для $p \in (0, \min\{a_1, a_2\})$. Кроме того, (7) и неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x)dx > \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px}K_1(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{2s}{s^2-p^2}d\sigma_1(s) > 2\int_{a_1}^{b_1} s^{-1}d\sigma_1(s) = 1$$

влекут

$$\mu \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)dx > 1.$$

Умножая обе части уравнения (27) на e^{-px}, будем иметь

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{g}(x) + \int_0^\infty W(x-t)\widetilde{F}(t)dt, \tag{29}$$

где

$$\widetilde{F}(x) = e^{-px}F(x) \quad \text{and} \quad \widetilde{g}(x) = e^{-px}g(x). \tag{30}$$

В силу (28) и (30) получаем

$$\widetilde{g} \in L_1(0, +\infty). \tag{31}$$

Итак, пришли к неоднородному интегральному уравнению с суперкритическим ядром $W(x)$ (т.е. $\mu > 1$) и свободным членом $\widetilde{g}(x)$, суммируемым на $(0, +\infty)$. В работе [15] доказано, что при условиях

A) $\mu > 1$,

B) $\widetilde{g} \in L_1(0, +\infty)$,

C) уравнение $1 - \widehat{W}(\lambda) = 0$ с $\widehat{W}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} W(x)dx$ имеет действительное решение λ,

то решение уравнения (29) представимо в виде

$$\widetilde{F}(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{32}$$

где $f_1 \in L_1(0, +\infty)$, а f_2 – непрерывная и ограниченная функция на $[0, +\infty)$. Из формул (31), (32) и (26) вытекает (25).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за ценные замечания.

Abstract. The paper considers two convolution type integro-differential equations on the positive half-axis, that arise in physical kinetics. Solutions should satisfy conditions at $+\infty$ and at 0. The exact solution of one of these equations is obtained, and the structure of the solution of the other equation is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Физическая Кинетика, том X, Наука, Москва, 1979.
2. А. В. Латышев, А. А. Юшканов, "Точное решение задачи о происхождении тока через границу раздела кристаллитов в металле", ФТТ, том 43, вып. 10, стр. 1744 – 1750, 2001.
3. В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва, 1985.
4. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Тех., том 22, Мат. Ан., стр. 175 – 242, 1984.
5. Р. Беллман, К. Л. Кук, Дифференциально-разностные Уравнения, Мир, Москва, 1967.
6. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сб., том 97, стр. 35 – 58, 1975.
7. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свёртки в кинетической теории", Ж. Выч. мат. и мат. физики, том 38, № 3, стр. 466 – 482, 1998.
8. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа и нелинейные уравнения факторизации", Мат. сб., том 124, № 6, стр. 189 – 216, 1984.
9. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Об уравнениях Винера–Хопфа", Докл. АН СССР, том 209, № 2, стр. 275 – 278, 1973.
10. F. Spitzer, "The Wiener - Hopf equation whose kernel is probability density" Duke Math. J., vol. 24, no. 3, pp. 363 - 372, 1957.

11. D. V. Lindley, "The theory of queue with a single sever", Proc. Cambridge Phil. Soc., no. 48, pp. 277 - 289, 1952.
12. Н. Б. Енгибарян, "Уравнение Винера–Хопфа с положительным ядром", Изв. НАН Армении, серия Математика (представлена к печати).
13. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, "Об одном классе интегральных уравнений", Мат. зам., том 47, № 6, стр. 23 – 30, 1990.
14. Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, "О методе дискретных ординат", Докл. АН СССР, том 292, № 2, стр. 322 – 326, 1987.
15. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром", Мат. сб., том 187, № 10, стр. 53 – 72, 1996.

Поступила 9 декабря 2003

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 39, Номер 3, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 39, No. 3, 2004

CONTENTS