ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ISSN 0002-3043

ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան
Մ. Ս. Գինովյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Գ. Գ. Գևորգյան
Վ. Ս. Զաքարյան
Ա. Ա. Թալալյան
Ն. Ե. Թովմասյան
Վ. Ա. Մարտիրոսյան
Ս. Ն. Մերգելյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Ա. Բ. Ներսիսյան
Ա. Ա. Սահակյան
Ա. Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян
Г. Г. Геворкян
М. С. Гиновян (зам. главного редактора)
В. С. Закарян
А. Г. Камалян
В. А. Мартиросян
С. Н. Мергелян
Б. С. Нагапетян
А. Б. Нерсесян
А.А. Саакян
А. А. Талалян
Н. Е. Товмасян

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Настоящий номер журнала заканчивает публикацию оригинальных статей, представленных на международной конференции "МАТЕМАТИКА в АРМЕНИИ: Достижения и перспективы" сентябрь 30 - октябрь 7, 2003, Цахкадзор, Армения (начало в № № 4 – 6 за 2003 и № 1 за 2004). Основной целью конференции, посвящённой 60 летию Армянской Национальной Академии Наук, было обсуждение текущей работы и перспективы математики в Армении. Конференция привлекла внимание многих участников из-за границы, включая многих математиков из армянской диаспоры.

Научная программа конференции охватила следующие направления современной математики: комплексный анализ, вещественный анализ, теория аппроксимации, теория вероятностей и математическая статистика, дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика, алгебра, геометрия, топология.

Организаторами конференции были:

Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный комитет:

Н. Аракелян (сопредседатель, Армения), А. Аджян (сопредседатель, США), С. Адян (Россия), С. Айвазян (Россия), Р. Амбарцумян (Армения), Л. Кафарелли (США), Л. Фаддеев (Россия), П. Готье (Канада), А. Гончар (Россия), И. Ибрагимов (Россия), В. Лу (Германия), С. Мергелян (США), А. Нерсесян (Армения), Н. Никольский (Франция), Ю. Прохоров (Россия), Г. Шахголян (Швеция), Я. Синай (США), А. Талалян (Армения), Дж. Тимурян (Канада), П. Ульянов (Россия), В. Владимиров (Россия), В. Закарян (Армения).

Организационный комитет:

Г. Геворкян, М. Гиновян, А. Саакян, Б. Нахапетян, А. Акопян.

Около 120 математиков из 15 стран участвовали в работе конференции. Пленарные доклады прочитаны следующими математиками:

С. Адян (Россия), С. Айвазян (Россия), Р. Амбарцумян (Армения), Н. Аракелян (Армения), О. Бесов (Россия), Дж. Брекен (США), З. Чисельски (Польша), П. Готье (Канада), И. Ибрагимов (Россия), Б. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), В. Михайлов (Россия), Н. Никольский (Франция), А. Олевский (Израиль), Г. Шахголян (Швеция), А. Талалян (Армения), В. Темляков (США).

Г. Г. Геворкян, М. С. Гиновян, А. А. Саакян — Ереван, октябрь 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 5- 12

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян

Ереванский государственный университет
E-mails : gurgenh@ysu.am, tepoyan@yahoo.com

Резюме. В статье рассматриваются нелинейные вырождающиеся на обоих концах конечного интервала обыкновенные дифференциальные уравнения высокого порядка. Используя теорию монотонных операторов, доказывается существование и единственность обобщённого решения соответствующей задачи в весовом пространстве Соболева $W^m_{p,\alpha,\beta}$ для любых правых частей из пространства $(W^m_{p,\alpha,\beta})^*$.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются нелинейные вырождающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$L(u) \equiv \sum_{k=0}^{m} (-1)^k D^k(a_k(t, u, Du, D^2u, \dots, D^k u)) = f, \tag{1}$$

где $t \in (0, b)$, $D^k \equiv d^k/dt^k$, а функции $a_k(t, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$, $k = 0, 1, \dots, m$ зависят от t и $\xi^k \equiv (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$, $D_k u \equiv (u, Du, \dots, D^k u)$, $k = 0, 1, \dots, m$, непрерывны по t и ξ^k, дифференцируемы по ξ^k и удовлетворяют следующим условиям :

$$|a_k(t, \xi^k)| \le c_1 t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p} \sum_{i=0}^{k} |\xi_i|^{p-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$|a_{kj}(t, \xi^k)| \le c_2 t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p} \sum_{i=0}^{k} |\xi_i|^{p-2}, \quad k, j = 0, 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(t, \xi^k)\eta_k \overline{\eta}_j \ge c_3 \left(\sum_{k=0}^{m} t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p} |\xi_k|^{p-2} \right) |\eta|^2, \tag{4}$$

при любых ξ^k и η_k, $k=0,1,\ldots,m$, где $|\eta|^2=\sum_{k=0}^m|\eta_k|^2$, $a_{kj}(t,\xi^k)=\frac{\partial a_k(t,\xi^k)}{\partial\xi_j}$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\alpha\neq p-1,2p-1,\ldots,mp-1$, $\beta\neq p-1,2p-1,\ldots,mp-1$, а c_1, c_2, c_3 – положительные постоянные.

Соответствующие краевые условия зависят от α и β и имеют следующий вид :

$u^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots,m-1$ ($u^{(k)}(b)=0$, $k=0,1,\ldots,m-1$) при $\alpha<p-1$ ($\beta<p-1$);

$u^{(l)}(0)=0$, $l=0,1,\ldots,m-k-1$ ($u^{(i)}(b)=0$, $i=0,1,\ldots,m-j-1$) при $kp-1<\alpha<(k+1)p-1$, $1\leq k\leq m-1$ ($jp-1<\beta<(j+1)p-1$, $1\leq j\leq m-1$);

при $\alpha>mp-1$ ($\beta>mp-1$) никаких условий в точках $t=0$ или $t=b$ не задаются.

Данная работа является непосредственным продолжением работы [2], которая была посвящена изучению нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением на обоих концах конечного интервала. В линейном случае выше приведённая задача с вырождением на одном конце конечного интервала, была рассмотрена в [1].

§2. ПРОСТРАНСТВА $W^m_{p,\alpha,\beta}$

Пусть $\dot{C}^m$ – множество m-раз непрерывно дифференцируемых на конечном отрезке $[0,b]$ функций, удовлетворяющих условиям

$$u^{(k)}(t)\Big|_{t=0}=u^{(k)}(t)\Big|_{t=b}=0,\quad k=0,1,\ldots,m-1. \tag{5}$$

Обозначим через $W^m_{p,\alpha,\beta}$, $1<p<+\infty$ пополнение $\dot{C}^m$ по норме

$$|u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^p=\int_0^b\left(\sum_{k=0}^m t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|u^{(k)}(t)|^p\right)dt.$$

Предложение 1. *Для функций $u(t)\in W^m_{p,\alpha,\beta}$ и их производных имеют место следующие неравенства*

$$|u^{(m-k)}(t)|^p\leq ct^{kp-1-\alpha}(b-t)^{kp-1-\beta}|u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^p,\quad k=1,2,\ldots,m. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку $\dot{C}^m$ плотно в $W^m_{p,\alpha,\beta}$, достаточно доказать неравенство (6) при $u\in\dot{C}^m$. Отметим, что для любого $u\in W^m_{p,\alpha,\beta}$ существуют постоянные c_1 и $c_2>0$ такие, что

$$c_1|u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^p\leq|u,W^m_{p,\alpha,0}(0,b/2)|^p+|u,W^m_{p,0,\beta}(b/2,b)|^p\leq c_2|u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^p. \tag{7}$$

Сперва докажем неравенство (6) при $k=1$. Для этого оценим $|u^{(m-1)}(t)|^p$ для $t\in(0,b/2)$. Пусть $\alpha<p-1$ (т.е. имеем слабое вырождение) и $1/p+1/q=1$.

Тогда можем записать

$$|u^{(m-1)}(t)|^p = \left|\int_0^t \tau^{-\alpha/p}\tau^{\alpha/p}u^{(m)}(\tau)\,d\tau\right|^p \le$$

$$\le \left(\int_0^t \tau^{-q\alpha/p}\,d\tau\right)^{p/q}\int_0^t \tau^\alpha|u^{(m)}(\tau)|^p\,d\tau \le$$

$$\le ct^{p-1-\alpha}|u, W^m_{p,\alpha,0}(0,b/2)|^p \le ct^{p-1-\alpha}(b-t)^{p-1-\beta}|W^m_{p,\alpha,\beta}|^p.$$

Пусть теперь $\alpha > p-1$ (сильное вырождение). Имеем

$$u^{(m-1)}(t) = u^{(m-1)}(b/2) - \int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Из (8) следует, что

$$|u^{(m-1)}(b/2)|^p \le 2^{p-1}\left(|u^{(m-1)}(t)|^p + \left|\int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau)\,d\tau\right|^p\right).$$

Умножая обе части последнего неравенства на $t^{\alpha-p}$ и используя неравенства Харди

$$\int_0^b t^{\alpha-p}\left|\int_t^b f(\tau)\,d\tau\right|^p dt \le (\alpha/p-1/q)^{-p}\int_0^b t^\alpha|f(t)|^p\,dt, \quad \alpha > p-1, \tag{9}$$

$$\int_0^b t^{\alpha-p}\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right|^p dt \le (1/q-\alpha/p)^{-p}\int_0^b t^\alpha|f(t)|^p\,dt, \quad \alpha < p-1, \tag{10}$$

где $(\alpha/p-1/q)^{-p}$ и $(1/q-\alpha/p)^{-p}$, $1/p+1/q=1$ являются наилучшими допустимыми постоянными (см. [3], [4]), получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^{b/2} t^{\alpha-p}|u^{(m-1)}(b/2)|^p\,dt \le \\
&\le 2^{p-1}\int_0^{b/2}\left(t^{\alpha-p}|u^{(m-1)}(t)|^p + t^{\alpha-p}\left|\int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau)\,d\tau\right|^p\right)dt \le \\
&\le 2^{p-1}\int_0^{b/2}\left(t^{\alpha-p}|u^{(m-1)}(t)|^p + (\alpha/p-1/q)^{-p}t^\alpha|u^{(m)}(t)|^p\right)dt \le \\
&\le c|u, W^m_{p,\alpha,0}(0,b/2)|^p.
\end{aligned} \tag{10'}$$

Отсюда следует $|u^{(m-1)}(b/2)|^p \le c|u, W^m_{p,\alpha,\beta}|^p$.

Теперь оценим второе слагаемое в правой части равенства (8). Имеем

$$\begin{aligned}
&\left|\int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau)\,d\tau\right|^p \le c|u, W^m_{p,\alpha,0}(0,b/2)|^p\left|\int_t^{b/2}\tau^{-q\alpha/p}\,d\tau\right|^{p/q} \le \\
&\le (c_1+c_2t^{p-1-\alpha})|u, W^m_{p,\alpha,\beta}|^p.
\end{aligned} \tag{10''}$$

Используя (10′), (10″) и учитывая условие $\alpha > p-1$, из (8) получаем

$$|u^{(m-1)}(t)|^p \le 2^{p-1}\left(|u^{(m-1)}(b/2)|^p + \left|\int_t^{b/2} u^{(m)}(\tau)\,d\tau\right|^p\right) \le$$

$$\le (c_1 + c_2 t^{p-1-\alpha})|u, W^m_{p,\alpha,0}(0,b/2)|^p \le ct^{p-1-\alpha}(b-t)^{p-1-\beta}|u, W^m_{p,\alpha,\beta}|^p.$$

Аналогично, при $t \in (b/2, b)$ и $\beta > p-1$ имеем

$$|u(t)|^p \le (c_1 + c_2(b-t)^{p-1-\beta})|u, W^m_{p,0,\beta}(b/2,b)|^p \le ct^{p-1-\alpha}(b-t)^{p-1-\beta}|u, W^m_{p,\alpha,\beta}|^p.$$

Суммируя полученные неравенства при $t \in (0, b/2)$, $t \in (b/2, b)$, из неравенства (7) получаем неравенство (6) при $k = 1$.

При $k = 2, 3, \dots, m$, неравенство (6) можно доказать аналогичными рассуждениями, индукцией по k с использованием неравенств Харди (9) и (10). Доказательство Предложения 1 завершено.

Из Предложения 1 следует, что при $\alpha < p-1$ ($\beta < p-1$) условия $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ ($u^{(i)}(b) = 0, i = 0, 1, \dots, m-1$) сохраняются, а при $kp-1 < \alpha < (k+1)p-1$, $1 \le k \le m-1$ ($jp-1 < \beta < (j+1)p-1$, $1 \le j \le m-1$) остаются лишь условия $u^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \dots, m-k-1$ ($u^{(i)}(b) = 0, i = 0, 1, \dots, m-j-1$). При $\alpha > mp-1$ ($\beta > mp-1$) все значения функций $u^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ при $t = 0$ (при $t = b$), вообще говоря, могут обращаться в бесконечность.

Заметим, что при $\alpha < p-1$ (или $\beta < p-1$) пространство $W^m_{p,\alpha,\beta}$ не содержит многочленов степени не выше $m-1$, отличных от нулевой функции. Действительно, пусть $u(t)$ – многочлен степени $m-1$. Тогда из Предложения 1 $u^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ (или $u^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$). Поэтому $u(t) \equiv 0$. Однако, например, в случае $\alpha > mp-1$ и $\beta > mp-1$ легко проверить, что многочлены степени не выше $m-1$ принадлежат пространству $W^m_{p,\alpha,\beta}$ (см. [2]).

Из определения пространства $W^m_{p,\alpha,\beta}$ следует непрерывность, но не компактность (см. [1], [5]) вложения

$$W^m_{p,\alpha,\beta} \subset L_{p,\alpha-mp,\beta-mp}, \tag{11}$$

где $L_{p,\alpha,\beta} = \{f, ||f||^p = \int_0^b t^\alpha(b-t)^\beta|f(t)|^p\,dt < +\infty\}$. Ясно, что $L_{p,\alpha_1,\beta_1} \subset L_{p,\alpha,\beta}$, при $\alpha_1 \le \alpha$ и $\beta_1 \le \beta$.

Предложение 2. *Вложение*

$$W^m_{p,\alpha,\beta} \subset L_{p,\alpha,\beta} \tag{12}$$

является компактным.

Доказательство. Сначала заметим, что вложение (12) непосредственно следует из неравенства (6) при $k = m$. Пусть $m = 1$ и $M = \{u \in W^1_{p,\alpha,\beta},\ |u, W^1_{p,\alpha,\beta}| \le 1\}$. Из (12) следует, что множество $K = \{t^{\alpha/p}(b-t)^{\beta/p}u(t),\ u \in M\}$ равномерно ограничено в $L_p(0,b)$. Теперь докажем, что K также является равномерно непрерывным в $L_p(0,b)$. Тогда Предложение 2 будет следовать из критерия предкомпактности в $L_p(0,b)$. В силу неравенства Коши имеем

$$|(t+h)^{\alpha/p}(b-(t+h))^{\beta/p}u(t+h) - t^{\alpha/p}(b-t)^{\beta/p}u(t), L_p(0,b)| =$$

$$= \left|\int_t^{t+h} \left(\tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p}u(\tau)\right)' d\tau, L_p(0,b)\right| \le c\left|\int_t^{t+h} (\tau^{\alpha/p-1}(b-\tau)^{\beta/p}|u(\tau)| + \right.$$

$$\left. +\tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p-1}|u(\tau)| + \tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p}|u'(\tau)|)\, d\tau, L_p(0,b)\right| \le ch^{1/q}|u, W^1_{p,\alpha,\beta}|.$$

Доказательство Предложения 2 для любого m проводится аналогично, используя (6) при $k = m-1$ и неравенство Коши для оценки нормы $\left|\int_t^{t+h}(\tau^{\alpha/p}(b-\tau)^{\beta/p}u(\tau))'\, d\tau, L_p(0,b)\right|$. Предложение 2 доказано.

§3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ УРАВНЕНИЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь нелинейное вырождающееся уравнение (1). Введём некоторые определения. Определим оператор $L : W^m_{p,\alpha,\beta} \to (W^m_{p,\alpha,\beta})^*$:

$$\langle L(u), v\rangle = \int_0^b \sum_{k=0}^m a_k(t, D_k u)\overline{D^k v}\, dt, \quad u, v \in W^m_{p,\alpha,\beta}. \tag{13}$$

Определение 1. Пусть X – рефлексивное, сепарабельное банахово пространство. Оператор $B : X \to X^*$ называется сильно монотонным, если

$$\langle B(u) - B(v), u - v\rangle \ge m||u - v||^p,\ m > 0,$$

и коэрцитивным, если существует вещественнозначная функция $\gamma(s)$, определённая на $[0,\infty)$ такая, что $\langle B(u), u\rangle \ge \gamma(||u||)||u||$, $\lim\limits_{s\to+\infty} \gamma(s) = +\infty$. Нетрудно доказать, что каждый сильно монотонный оператор является коэрцитивным относительно функции $\gamma(s) = sm - |B(0), (W^m_{p,\alpha,\beta})^*|$ (см. [6]).

Определение 2. Оператор $B : X \to X^*$ называется полунепрерывным, если из $x_n \to x$ следует $B(x_n) \rightharpoonup Bx$ (слабая сходимость).

Теорема 1. *Если выполняются условия (2)– (4) и $p \ge 2$, то оператор $L : W^m_{p,\alpha,\beta} \to (W^m_{p,\alpha,\beta})^*$ является сильно монотонным и полунепрерывным.*

Доказательство. Сперва докажем, что оператор L определён корректно. Из условия (2) и неравенства Коши получаем $|\langle L(u), v\rangle| =$

$$= \left|\int_0^b \sum_{k=0}^m a_k(t, D_k u)\overline{D^k v)}\, dt\right| \le \sum_{k=0}^m \left|\int_0^b t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|D^k v|^p\, dt\right|^{1/p} \times$$

$$\times \left|\int_0^b t^{-q(\alpha-(m-k)p)/p}(b-t)^{-q(\beta-(m-k)p)/p}|a_k(t, D_k u)|^q\, dt\right|^{1/q} \le$$

$$\le c|v, W^m_{p,\alpha,\beta}| \left|\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \int_0^b t^{-q(\alpha-(m-k)p/p}(b-t)^{-q(\beta-(m-k)p/p}t^{q\alpha-(m-k)} \times\right.$$

$$\left.\times (b-t)^{q\beta-(m-k)}|D^l u|^{q(p-1)}\, dt\right|^{1/q} =$$

$$= c_1|v, W^m_{p,\alpha,\beta}| \left|\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k \int_0^b t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|D^l u|^p\, dt\right|^{1/q} \le$$

$$\le c_2|v, W^m_{p,\alpha,\beta}||u, W^m_{p,\alpha,\beta}|^{p/q},$$

поскольку $t^{\alpha-(m-k)} \le b^{k-l}t^{\alpha-(m-l)}$ и $(b-t)^{\alpha-(m-k)} \le b^{k-l}(b-t)^{\alpha-(m-l)}$ при $t \in (0, b)$ и $l = 0, 1, \ldots, k$.

Теперь докажем, что оператор L является сильно монотонным. Для любых двух комплексных чисел $c, d \in \mathbb{C}$ и $p \ge 2$ имеем $\int_0^1 |c + d\tau|^{p-2}\, d\tau \ge c_2|d|^{p-2}$. По формуле Лагранжа о среднем значении и условия (4), для любых $u, v \in W^m_{p,\alpha,\beta}$ получаем

$$\langle L(u) - L(v), u - v\rangle = \langle L(u), u - v\rangle - \langle L(v), u - v\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^m \int_0^b (a_k(t, D_k u) - a_k(t, D_k v))\,\overline{D^k(u-v)}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^k \int_0^b \int_0^1 \frac{\partial a_k(t, D_k v + \tau D_k(u-v))}{\partial \xi_j} D^j(u-v)\overline{D^k(u-v)}\, d\tau\, dt \ge$$

$$\ge c\sum_{k=0}^m \int_0^b \int_0^1 t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|D^k v + \tau D^k(u-v)|^{p-2}|D^k(u-v)|^2\, d\tau\, dt \ge$$

$$\ge c_1 \sum_{k=0}^m \int_0^b t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}|D^k(u-v)|^p\, dt = c_1\,|u - v, W^m_{p,\alpha,\beta}|^p.$$

Этим доказывается сильная монотонность оператора L.

Теперь докажем полунепрерывность оператора L. Пусть $u_n \to u$ в $W^m_{p,\alpha,\beta}$. Используя теорему Лагранжа о среднем значении, условие (3) и неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|\langle L(u_n) - L(u), v\rangle| = \left|\int_0^b \sum_{k=0}^m (a_k(t, D_k u_n) - a_k(t, D_k u))\,\overline{D^k v(t)}\, dt\right| \le$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\int_0^b\int_0^1\left|\frac{\partial a_k(t,D_k u+\tau D_k(u_n-u))}{\partial\xi_j}\right||D^j(u_n-u)||D^k v|\,d\tau\,dt\leq$$

$$\leq c\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}\int_0^b\int_0^1 t^{\alpha-(m-k)p}(b-t)^{\beta-(m-k)p}\left|D^l u+\tau D^l(u_n-u))\right|^{p-2}\times$$

$$\times|D^j(u_n-u)||D^k v|\,d\tau\,dt\leq$$

$$\leq c_1\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}(|v,W^m_{p,\alpha,\beta}||u_n-u,W^m_{p,\alpha,\beta}||u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^{(p-q)/q}+$$

$$+|v,W^m_{p,\alpha,\beta}||u_n-u,W^m_{p,\alpha,\beta}||u_n-u|^{(p-q)/q})\leq c_2|v,W^m_{p,\alpha,\beta}||u_n-u,W^m_{p,\alpha,\beta}|\times$$

$$\times\left(|u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^{(p-q)/q}+|u_n-u,W^m_{p,\alpha,\beta}|^{p-2}\right),$$

которое стремится к нулю при $n\to+\infty$. Теорема 1 доказана.

Определение 3. Функция $u\in W^m_{p,\alpha,\beta}$ называется обобщённым решением уравнения (1) для $f\in(W^m_{p,\alpha,\beta})^*$, если для любого $v\in W^m_{p,\alpha,\beta}$ выполняется следующее равенство $\langle L(u),v\rangle=\langle f,v\rangle$.

Заметим, что правую часть уравнения (1) f можно взять из $L_{q,-\alpha,-\beta}\subset(W^m_{p,\alpha,\beta})^*$, поскольку в силу вложения (12) и неравенства Коши–Буняковского имеет место неравенство

$$|\langle f,v\rangle|=\left|\int_0^b f(t)\overline{v(t)}\,dt\right|\leq|f,L_{q,-\alpha,-\beta}||u,L_{p,\alpha,\beta}|\leq c|f,L_{q,-\alpha,-\beta}||u,W^m_{p,\alpha,\beta}|.$$

Теорема 2. *Обобщённое решение уравнения (1) при $p\geq 2$ существует и единственно для любого $f\in(W_{p,\alpha,\beta})^*$.*

Доказательство. Существование обобщённого решения следует из Теоремы 1 и основной теоремы теории монотонных операторов (см., [6], [7]). Теперь докажем единственность обобщённого решения. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ из $W^m_{p,\alpha,\beta}$ являются обобщёнными решениями уравнения (1), т.е. для любого $v\in W^m_{p,\alpha,\beta}$ имеем $\langle L(u_1),v\rangle=\langle f,v\rangle$ и $\langle L(u_2),v\rangle=\langle f,v\rangle$. Полагая $v(t)=u_1(t)-u_2(t)$ и учитывая сильную монотонность оператора L, получим $0=\langle L(u_1)-L(u_2),u_1-u_2\rangle\geq c|u_1-u_2|^p$, откуда вытекает $u_1(t)\equiv u_2(t)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 сохраняют силу, если условия (2) – (4) заменить следующими условиями

$$|a_k(t,\xi^m)|\leq c_1 t^\alpha(b-t)^\beta\sum_{k=0}^{m}|\xi_i|^{p-1},\quad k=0,1,\ldots,m, \tag{2'}$$

$$|a_{k_j}(t,\xi^m)| \le c_2 t^\alpha (b-t)^\beta \sum_{k=0}^{m} |\xi_i|^{p-2}, \quad j=0,1,\ldots,m, \tag{3'}$$

$$\sum_{k,j=0}^{m} a_{kj}(t,\xi^m)\eta_k\bar{\eta}_j \ge c_3 t^\alpha (b-t)^\beta \left(\sum_{k=0}^{m} |\xi_k|^{p-2}\right) |\eta|^2, \tag{4'}$$

причём функции $a_k(t,\xi^m)$, $k=0,1,\ldots,m$ уже зависят от ξ_k для всех $k=0,1,\ldots,m$. Теперь рассмотрим следующее квазилинейное вырождающееся уравнение для случая $p=2$ (см. [2])

$$L(u) \equiv (-1)^m D^m(t^\alpha (b-t)^\beta D^m u) + a(t,u,u',\ldots,u^{(m)}) = f, \tag{14}$$

где $a_m(t,\xi^m) = t^\alpha (b-t)^\beta \xi_m$ и $a_0(t,\xi^m) = a(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_m)$. Очевидно, что $a_m(t,\xi^m)$ удовлетворяет условиям (2′) и (3′). Допустим, что $a(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ удовлетворяет условиям (2′) – (4′). Тогда используя Замечание 1 получим достаточные условия на $a(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_m)$, при которых уравнение (14) будет иметь единственное обобщённое решение $u \in W^m_{p,\alpha,\beta}$ при любых $f \in (W^m_{p,\alpha,\beta})^*$.

Abstract. The paper considers higher order nonlinear ordinary differential equations that degenerate on the both endpoints of a finite interval. The theory of monotone operators is applied to prove that the generalized solution exists and is unique in the weighted Sobolev spaces $W^m_{p,\alpha,\beta}$ for every right-hand sides from the dual $(W^m_{p,\alpha,\beta})^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Тепоян, “Об одном вырождающемся дифференциально-операторном уравнении высокого порядка”, Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 48 – 56, 1999.
2. Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян, “Единственность обобщённого решения для нелинейного дифференциального уравнения с вырождением”, Изв. НАН Армении, Математика, том 35, № 2, стр. 74 – 79, 2000.
3. Л. Д. Кудрявцев, “Об эквивалентных нормах в весовых пространствах”, Труды МИАН, том 170, стр. 161 – 190, 1984.
4. Г. Х. Харди, Дж. И. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, Москва, ИЛ, 1948.
5. П. А. Жаров, "Компактные вложения пространств функций одной переменной со степенным весом", Изв. ВУЗ-ов, Математика, том 8, стр. 82 – 85, 1988.
6. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, Мир, Москва, 1978.
7. Ю. А. Дубинский, “Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения высокого порядка”, УМН, том XXVIII, № 1(139), 1968.

Поступила 22 марта 2004

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 13–26

НЕРАВЕНСТВО РАО–КРАМЕРА ДЛЯ ОБЩИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

К. В. Гаспарян

Ереванский государственный университет

Резюме. В работе получено неравенство типа Рао–Крамера для общих параметрических статистических моделей с фильтрацией, обобщающее результаты Ж. Жакода (1990) и А. Гущина (1990) для стандартных пространств с фильтрацией.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \left(\mathbb{P}^\theta\right)_{\theta \in \Theta}\right)$ – статистическая модель с фильтрацией, где $\mathbb{F}$ – семейство неубывающих σ-подполей σ-поля $\mathcal{F}$, а $\left(\mathbb{P}^\theta\right)_{\theta \in \Theta}$ – семейство вероятностных мер, зависящих от параметра $\theta \in \Theta$ (Θ – открытое подмножество из $\mathbb{R}$ содержащее точку 0). Предполагается также, что все меры $\mathbb{P}^\theta$ ($\theta \in \Theta$) совпадают на $\mathcal{F}_0$.

Пусть $X = \left(X_t^i\right)_{t \geq 0}$ $(i \leq d)$ – наблюдаемый d-мерный $\mathcal{O}$ (опциональный) - семимартингал относительно $\mathbb{P}^\theta$ $(\theta \in \Theta)$, а оценка $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ предполагается одномерным локально–квадратично интегрируемым O - семимартингалом относительно $\mathbb{P}^\theta$. Имеем

$$Y = Y_0 + A^\theta + M^\theta,$$

где $A^\theta \in \mathcal{P}_s \cap V$ – сильно предсказуемый процесс с конечной вариацией на любом интервале $[0, t]$ $(t > 0)$ и $M^\theta \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}\left(\mathbb{P}^\theta\right)$ – локально–квадратично интегрируемый $\mathcal{O}$- мартингал.

В частном случае, когда $\theta = 0$ в обозначениях θ будет опущена : например, $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$, $A = A^0$, $E = E^{\mathbb{P}^0}$ (математическое ожидание относительно $\mathbb{P}^0$), $\langle M, M \rangle =$

$\mathbb{P}^0\langle M^0, M^0\rangle$ (предсказуемая квадратическая вариация M^0 относительно $\mathbb{P}^0$), и так далее.

Целью статьи является нахождение условий, при выполнении которых будет справедливо следующее неравенство типа Рао–Крамера (ср. [1], [2]) :

$$\langle M, M\rangle_t \geq \frac{(A'_t)^2}{\langle V, V\rangle_t},$$

где $V = (V_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{P})$ – так называемый маркированный процесс, а $A' = (A'_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{P}_S \cap V$ – в некотором смысле производная процесса A^θ в точке $\theta = 0$.

§2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы будем использовать следующие обозначения (см. [3], [4]) :

$F_+ = (\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$, где $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$;

$\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ обозначают предсказуемые множества и $\mathbb{F}$ -опциональные σ–алгебры и процессы, а $\mathcal{P}_s$ – множество сильно предсказуемых процессов : процесс $A = (A_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{P}_s$, если $A \in \mathcal{P}$ и $A_+ = (A_{t+})_{t\geq 0} \in \mathcal{O}(\mathbb{F})$;

$\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$ и $\mathcal{T}_+$ обозначают множества F– моментов остановки (м. о.), F– предсказуемые м. о. и F_+– м. о. соответственно ;

$\mathcal{M}(\mathbb{P})$ ($\mathcal{M}^2(\mathbb{P})$) – множество всех $\mathcal{O}$ -мартингалов (квадратично–интегрируемых $\mathcal{O}$-мартингалов) $M = (M_t)_{t\geq 0}$ относительно $\mathbb{P}$, для которых существует интегрируемая (квадратично–интегрируемая) случайная величина $\bar{M}$ такая, что $E(\bar{M}\,|\mathcal{F}_T)\mathbf{1}_{T<\infty} = M_T\mathbf{1}_{T<\infty}$ для всех $T \in \mathcal{T}_+$;

$\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{P})$ ($\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{P})$) – множество всех локальных (локально квадратично–интегрируемых) $\mathcal{O}$- мартингалов M, для которых существует локализирующая последовательность $(R_n, M_n)_{n\geq 1}$, где $R_n \in \mathcal{T}_+$, $M_n \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ ($M_n \in M^2(\mathbb{P})$) такая, что $M = M_n$ на стохастическом интервале $[0, R_n] = \{(\omega, t) : 0 \leq t \leq R_n(\omega)\}$ для всех $n \geq 1$;

$S(\mathbb{P})$ обозначает класс d - мерных $\mathcal{O}$- семимартингалов $X = (X^i)_{i\leq d}$ относительно $\mathbb{P}$;

A^+_{loc} обозначает множество всех локально-интегрируемых возрастающих процессов ;

V – множество всех процессов с конечной вариацией на каждом конечном интервале $[0, t]$.

Пусть $X = (X^i)_{i\leq d}$ – d- мерный $\mathcal{O}$ - семимартингал относительно $\mathbb{P}$ (т.е. $X \in S(\mathbb{P})$), имеющий характеристики (B, C, ν^1, ν^2) с некоторой функцией урезания $h = (h^i(x))_{i\leq d}$, $(h^i(x) = x^i\mathbf{1}_{|x|\leq b})$. Здесь $B = (B^i)_{i\leq d} \in \mathcal{P}_s \cap V$ и $C =$

$= \| < X^{ic}, X^{jc} > \|_{i,j \le d}$, где $< X^{ic}, X^{jc} >$ обозначает предсказуемую квадратическую ковариацию непрерывных мартингальных составляющих X^{ic} и X^{jc} для X^i, случайная мера $\nu^1 \in \mathcal{P}(\nu^2 \in \mathcal{O})$ является предсказуемым (опциональным) компенсатором меры скачков $\mu^1(\mu^2)$ процесса X, порождённой скачками $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ ($\Delta^+ X_t = X_{t+} - X_t$) для всех $t \ge 0$.

Известно (см. [3]), что для матричнозначного процесса $C = \|C_t^{ij}\|_{i,j \le d}$, $C_t^{ij} =< X^{ic}, X^{jc} >_t$ существует предсказуемый процесс c^{ij} со значениями в множестве всех неотрицательных симметричных $d \times d$ матриц и непрерывный согласованный возрастающий процесс F такой, что

$$C_t^{ij} = c^{ij} \circ F_t = \int\limits_{[0,t]} c_s^{ij} dF_s \qquad \text{(интеграл Стилтьеса)}. \tag{1}$$

Для процесса $H = \left(H^i\right)_{i \le d} \in \mathcal{P}$ положим $H^T \cdot c \cdot H = \sum\limits_{i,j \le d} c^{ij} H^i H^j$ (все вектора являются матрицами-столбцами, а H^T является транспонированным вектором вектора H). При условии если возрастающий процесс $\left(H^T \cdot c \cdot H\right) \circ A$ является локально–интегрируемым $\left(\in A_{\text{loc}}^+\right)$, то можно определить стохастический интеграл (см. [3])

$$H \cdot X^c = \int\limits_{[0,t]} H_s dX_s^c.$$

Рассмотрим σ-поля $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ и $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ на множестве $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ и определим меры $M_{\mu^i}^{\mathbb{P}}$ $(i = 1, 2)$ в пространстве $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}\right)$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+\right) \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ следующими соотношениями :

$$M_{\mu^1}^{\mathbb{P}}\left(W^1\right) = E \sum_{s \in D_1} W^1(s, \Delta X_s), \quad M_{\mu^2}^{\mathbb{P}}\left(W^2\right) = E \sum_{s \in D_2} W^2(s, \Delta^+ X_s),$$

где W^i $(i = 1, 2)$ – неотрицательные $\tilde{\mathcal{F}}$- измеримые функции $\left(W^i \in \tilde{\mathcal{F}}^+, i = 1, 2\right)$, $D_1 = \{s : \Delta X_s \neq 0\}$ и $D_2 = \{s : \Delta^+ X_s \neq 0\}$. Рассмотрим функции

$$\hat{W}_t^i = \int\limits_{\mathbb{R}^d} W^i(t, x) \nu^i(\{t\} \times dx), \quad a_t^i = \nu^i(\{t\} \times \mathbb{R}^d), \quad i = 1, 2,$$

$$W^1 * \nu^1_t = \int\limits_{]0,t]\times\mathbb{R}^d} W^1(s,x)\nu^1(ds,dx), \quad W^2 * \nu^2_t = \int\limits_{[0,t[\times\mathbb{R}^d} W^2(s,x)\nu^2(ds,dx).$$

Если W^1 (W^2) являются неотрицательными $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\mathcal{O}})$- измеримыми функциями $(W^1 \in \tilde{\mathcal{P}}^+(W^2 \in \tilde{\mathcal{O}}^+))$ такими, что возрастающие процессы $\left[\sum_{s\leq \cdot}\left(\tilde{W}^i_s\right)^2\right]^{1/2} \in$ $\in A^+_{\mathrm{loc}}$ локально-интегрируемы $(i = 1,2)$, где $\tilde{W}^i_t = W^i(t,x)\mathbf{1}_{D_i}(t) - \hat{W}^i_t$, то стохастические интегралы

$$W^1 * (\mu^1 - \nu^1)_t = \int\limits_{]0,t]\times\mathbb{R}^d} W^1(s,x)(\mu^1 - \nu^1)(ds,dx),$$

$$W^2 * (\mu^2 - \nu^2)_t = \int\limits_{[0,t[\times\mathbb{R}^d} W^2(s,x)(\mu^2 - \nu^2)(ds,dx),$$

существуют и являются соответственно непрерывными справа или слева "чисто разрывными" локальными $\mathcal{O}$-мартингалами (см. [4]).

§3. ПРОЦЕССЫ ПРАВДОПОДОБИЯ И ЧАСТИЧНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}'$ – две вероятностные меры на $(\Omega,\mathcal{F})$ такие, что $\mathbb{P}' \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}'$ локально абсолютно непрерывна относительно $\mathbb{P}$), т.е. $\mathbb{P}'_t \ll \mathbb{P}_t$, где $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}\,|_{\mathcal{F}_t}$, $\mathbb{P}'_t = \mathbb{P}'\,|_{\mathcal{F}_t}$ для всех $t \geq 0$ и $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}'_0$.

Существует единственный (с точностью до $\mathbb{P}'$- и $\mathbb{P}$- неотличимости) неотрицательный процесс $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}^+_{\mathrm{loc}}(\mathbb{P})$ (называемый процесс правдоподобия или плотность меры $\mathbb{P}'$ относительно $\mathbb{P}$) такой, что (см. [5])

$$\mathbb{Z}_T = \frac{d\mathbb{P}'_T}{d\mathbb{P}_T}, \quad \mathbb{Z}_{S-} = \frac{d\mathbb{P}'_{S-}}{d\mathbb{P}_{S-}}, \quad \mathbb{Z}_{U+} = \frac{d\mathbb{P}'_{U+}}{d\mathbb{P}_{U+}}$$

для всех $T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{T}_p$ и $U \in \mathcal{T}_+$, где $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}\,|_{\mathcal{F}_T}$, $\mathbb{P}_{S-} = \mathbb{P}\,|_{\mathcal{F}_{S-}}$, $\mathbb{P}_{U+} = \mathbb{P}\,|_{\mathcal{F}_{U+}}$.

Процесс $\mathbb{Z} \in Sup^+(\mathbb{P})$ является неотрицательным $\mathcal{O}$-супермартингалом (относительно $\mathbb{P}$) и согласно известному принципу минимума (см. [5]) имеем $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ = 0$ $\mathbb{P}$- п.н. на $]\mathbb{R},\infty[$, где

$$\mathbb{R} = \inf(t : \mathbb{Z}_{t-} = 0 \text{ или } \mathbb{Z}_t = 0 \text{ или } \mathbb{Z}_{t+} = 0) \in \mathcal{T}_+$$

есть момент первого касания процессом $\mathbb{Z}$ действительной оси. Полагая

$$\mathbb{R}_n = \inf(t : \mathbb{Z}_t < 1/n \text{ или } \mathbb{Z}_{t+} < 1/n) \in \mathcal{T}_+,$$

получаем $\mathbb{R}_n \uparrow \mathbb{R}$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $X = (X^i)_{i \le d} \in S(\mathbb{P}) \cap S(\mathbb{P}')$ – d -мерный $\mathcal{O}$-семимартингал (относительно $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}'$) с характеристиками (B, C, ν^1, ν^2) и $(B', C', \nu^{1'}, \nu^{2'})$ относительно заданной функции урезания $h = h(x)$. Согласно теореме Гирсанова (ср. [3]) существуют функции $Y_1 \in \tilde{\mathcal{P}}^+, Y_2 \in \tilde{\mathcal{O}}^+$ и процесс $\beta = (\beta^i)_{i \le d} \in \mathcal{P}$ такие, что $\mathbb{P}'$-п.н. имеет место представление

$$B' = B + (c \cdot \beta) \circ F + \sum_{i=1,2} (Y_i - 1)h * \nu^i, \tag{2}$$

$$C' = C, \ \nu^{i'} = Y_i \cdot \nu^i, \ a^{i'}_t = \nu^{i'}(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \le 1 \qquad (a^i_t \le 1),$$

где

$$|(Y_i - 1)h| * \nu^i < \infty, \ |c \cdot \beta| \circ F < \infty, \ (\beta^T \cdot c \cdot \beta) \circ F < \infty \qquad (\mathbb{P}' - \text{п.н.}),$$

$$Y_1 \mathbb{Z}_- = M^{\mathbb{P}}_{\mu^1}(\mathbb{Z}|\tilde{\mathcal{P}}), \ Y_2 \mathbb{Z} = M^{\mathbb{P}}_{\mu^2}(\mathbb{Z}_+|\tilde{\mathcal{O}}), \ < \mathbb{Z}^c, X^c > = \mathbb{Z}_-(c \cdot \beta) \circ F$$

и $M^{\mathbb{P}}_{\mu^1}(\cdot|\tilde{\mathcal{P}})$, $M^{\mathbb{P}}_{\mu^2}(\cdot|\tilde{\mathcal{O}})$ суть условные математические ожидания относительно $M^{\mathbb{P}}_{\mu^i}$ по σ- полям $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$.

Согласно принципу минимума имеем $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\mathbf{1}_{[0, \mathbb{R}]}$ и

$$\mathbf{G} = \bigcup_n [0, \mathbb{R}_n], \ \{\mathbb{Z}_+ > 0\} = [0, \mathbb{R}[,$$

где $\mathbf{G}_1 = \{\mathbb{Z}_- > 0\}, \mathbf{G}_2 = \{\mathbb{Z} > 0\}$ и $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2$.

Имеет место следующее представление на множестве $\mathbf{G}$ (ср. [3])

$$\mathbb{Z} = 1 + (\mathbb{Z}_- \beta) \cdot X^c + (\mathbb{Z}_- V^1) * (\mu^1 - \nu^1) + (\mathbb{Z} V^2) * (\mu^2 - \nu^2) + \mathbb{Z}', \tag{3}$$

где

$$V^i = Y_i - 1 + \frac{a^{i'} - a^i}{1 - a^i} \mathbf{1}_{a^i < 1} \ (i = 1, 2),$$

$\mathbb{Z}' \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{P})$, $\mathbb{Z}'_0 = 0$, $< \mathbb{Z}'^c, X^{jc} > = 0$ $(j \le d)$ и

$$M^{\mathbb{P}}_{\mu^1}\left(\Delta \mathbb{Z}'|\tilde{\mathcal{P}}\right) = 0, \ M^{\mathbb{P}}_{\mu^2}\left(\Delta^+ \mathbb{Z}'|\tilde{\mathcal{O}}\right) = 0$$

ՀՀ ԳԱԱ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

(процесс $\mathbb{Z}'$ ортогонален случайным мерам μ^1 и μ^2).

Если $\mathbb{Z}' = 0$ (например, если все $\mathbb{P}$-локальные $\mathcal{O}$ - мартингалы имеют свойство представимости относительно семимартингала X), то из (3) непосредственно следует, что процесс плотности $\mathbb{Z}$ удовлетворяет уравнению Долеан на множестве $\mathbf{G}$ (см. [4]) :

$$\mathbb{Z}_t = 1 + \mathbb{Z}_- \cdot N^r_t + \mathbb{Z} \cdot N^g_t, \ (\mathbb{Z}_t = 1 + \int_{]0,t]} \mathbb{Z}_{s-} dN^r_s + \int_{[0,t[} \mathbb{Z}_s N^g_{s+}),$$

где $N^r = \beta \cdot X^c + V^1 * (\mu^1 - \nu^1)$, $N^g = V^2 * (\mu^2 - \nu^2)$, $N = N^r + N^g \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{P})$. Процесс $\mathbb{Z}$ представляется в виде экспоненты Долеан $\mathbb{Z}_t = \varepsilon(N)_t =$

$$= \exp\left\{N_t - \frac{1}{2}(\beta^T \cdot c \cdot \beta) \circ F_t\right\} \prod_{s \leq t}(1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s} \cdot \prod_{s<t}\left(1 + \Delta^+ N_s\right) \cdot e^{-\Delta^+ N_s}.$$

Всякий неотрицательный процесс $\bar{\mathbb{Z}}$, удовлетворяющий условию (ср. [1])

$$\bar{\mathbb{Z}} = \varepsilon(N) \text{ на множестве } \mathbf{G}$$

называется процессом частичного правдоподобия (*ПЧП*) меры $\mathbb{P}$ по мере $\mathbb{P}'$ (относительно X). Очевидно, что

$$\bar{\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}^+_{\text{loc}}(\mathbb{P}) \subset Sup^+(\mathbb{P}).$$

С точностью до $\mathbb{P}$-пренебрежимого множества, *ПЧП* удовлетворяет условиям

$$\{\mathbb{Z} > 0\} \subset \{\bar{\mathbb{Z}} > 0\} \ \text{ и } \ \{\mathbb{Z}_+ > 0\} \subset \{\bar{\mathbb{Z}}_+ > 0\}.$$

Пусть теперь $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}'$ и $\mathbf{Q}$ суть вероятностные меры на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ такие, что $\mathbb{P} \overset{\text{loc}}{\ll} Q$ и $\mathbb{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} Q$ (например, $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbb{P} + \mathbb{P}')$). Назовём обобщённым процессом плотности меры $\mathbb{P}'$ по мере $\mathbb{P}$ следующий процесс

$$\mathbb{Z} = \frac{z'}{z} \in Sup^+(\mathbb{P}),$$

где процессы z и z' суть плотности, соответственно, мер $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}'$ по мере Q (заметим, что $\inf_t z_t > 0$ $\mathbb{P}$-п.н. (см. [3])). Для процесса z_t обозначим

$$\tau_n = \inf(t : z_t < 1/n \text{ или } z_{t+} < 1/n) \in \mathcal{T}_+, \ \tau = \lim_n \tau_n,$$

$$\mathbf{G}_1 = \{z_- > 0\}, \; \mathbf{G}_2 = \{z > 0\}, \; \mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2 = \bigcup_n [0, r_n], \; (\{z_+ > 0\} = [0, r[)$$

и аналогично величины $(r'_n, r', \mathbf{G}'_1, \mathbf{G}'_2, \mathbf{G}')$ для процесса z'. Положим далее

$$\mathbf{G}'' = \mathbf{G} \cap \mathbf{G}'.$$

Имеем $\mathbf{Q}$-п.н.

$$\{z > 0\} \subset \{\bar{z} > 0\}, \; \{z_+ > 0\} \subset \{\bar{z}_+ > 0\}.$$

Аналогичные включения имеют место также и для z' и $\bar{z}'$.
Пусть теперь $X = (X^i)_{i \le d} \in S(Q)$ есть $\mathcal{O}$–семимартингал с характеристиками $(\bar{B}, \bar{C}, \bar{\nu}^1, \bar{\nu}^2)$. Очевидно, $X \in S(\mathbb{P}) \cap S(\mathbb{P}')$ и соответствующие характеристики мы обозначим через (B, C, ν^1, ν^2) и $(B', C', \nu^{1\prime}, \nu^{2\prime})$ соответственно. Положим $\bar{C} = \bar{c} \circ F$, $C = c \circ F$, $C' = c' \circ F$ Q-п.н. (см. (1)).
Тогда существуют $\tilde{\mathcal{P}}^+$-измеримые функции Y_1, Y'_1 и $\tilde{\mathcal{O}}^+$-измеримые функции Y_2, Y'_2 и предсказуемые процессы $\beta = (\beta^i)_{i \le d}$, $\beta' = (\beta^{i\prime})_{i \le d}$ такие, что на множестве $\mathbf{G}''$ (см. (2)) имеем

$$B = \bar{B} + (\bar{c} \cdot \beta) \circ F + \sum_{i=1,2.} (Y_i - 1) h * \bar{\nu}^i,$$

$$B' = \bar{B} + (\bar{c} \cdot \beta') \circ F + \sum_{i=1,2} (Y'_i - 1) h * \bar{\nu}^i,$$

$$C = C' = \bar{C}, \; \nu^i = Y_i \cdot \bar{\nu}^i, \; \nu^{i\prime} = Y'_i \cdot \bar{\nu}^i.$$

Определим на множестве $\mathbf{G}''$ следующие процессы

$$\bar{N} = \beta^T \cdot X^{c,Q} + \sum_{i=1,2} \left(Y_i - 1 + \frac{a^i - \bar{a}^i}{1 - \bar{a}^i} \right) * (\mu^i - \bar{\nu}^i) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(Q),$$

$$\bar{N}' = (\beta')^T \cdot X^{c,Q} + \sum_{i=1,2} \left(Y'_i - 1 + \frac{a^{i\prime} - \bar{a}^i}{1 - \bar{a}^i} \right) * (\mu^i - \bar{\nu}^i) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(Q).$$

Обозначим через $\bar{z} = \varepsilon(\bar{N})$ и $\bar{z}' = \varepsilon(\bar{N}')$, определённые на множестве $\mathbf{G}''$, процессы частичного правдоподобия мер $\mathbb{P}'$ и $\mathbb{P}$ по мере Q (относительно X). Процесс

$$\mathbb{Z} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$$

назовём процессом частичного правдоподобия меры $\mathbb{P}'$ по мере $\mathbb{P}$ (относительно X).

Пусть на множестве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ имеются случайные меры $\lambda^1 \in \mathcal{P}$ и $\lambda^2 \in \mathcal{O}$ такие, что $\nu^i \ll \lambda^i$ и $\nu^{i\prime} \ll \lambda^i$ (например, можно взять $\lambda^i = \nu^i + \nu^{i\prime}$), $i = 1, 2$. Имеем $M^Q_{\nu^i} \ll M^Q_{\lambda^i}$ на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ и существуют функции $U_1 \in \bar{\mathcal{P}}^+$ и $U_2 \in \bar{\mathcal{O}}^+$ такие, что

$U_1 = \frac{dM^Q_{\nu^1}}{dM^Q_{\lambda^1}}$ на сужении $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{P}})$, а $U_2 = \frac{dM^Q_{\nu^2}}{dM^Q_{\lambda^2}}$ на сужении $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{O}})$. Следовательно,

$$\nu^i = U_i \cdot \lambda^i, \; \nu^{i\prime} = U_i' \cdot \lambda^i \quad Q - п.н. \tag{4}$$

Определим теперь случайные множества $\Sigma_1 \in \mathcal{P}, \Sigma_2 \in \mathcal{O}$ и предсказуемый процесс $\bar{B} = (\bar{B}^i)_{i \le d}$ на $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Имеем (ср. [3])

$$\Sigma_j = \Big\{(\omega, t) : |h \cdot (U_j - U_j')| * \lambda^j_t(\omega) < \infty\Big\}, \; j = 1, 2$$

$$\bar{B}_t = B_t - B_t' - \sum_{j=1,2} h \cdot (U_j - U_j') * \lambda^j_t \quad \text{для всех} \quad t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2. \tag{5}$$

Полагая

$$\sigma^j_n = \inf\Big(t : |h \cdot (U_j - U_j')| * \lambda^j_t \ge n\Big)$$

имеем $\Sigma_j = \bigcup_n [0, \sigma^j_n]$ $(\mathbb{P} + \mathbb{P}')$-п.н., где $\sigma^1_n \in \mathcal{T}_p$, $\sigma^2_n \in \mathcal{T}$. Кроме того, процесс

$\bar{B}$ непрерывен на множестве $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ с точностью до $(\mathbb{P} + \mathbb{P}')$-пренебрежимого множества и на этом множестве имеет место единственное представление

$$\bar{B} = (c \cdot \bar{\beta}) \circ F + \bar{b} \circ F + \bar{B}', \tag{6}$$

где

1) $\bar{\beta} = (\bar{\beta}^i)_{i \le d}$ и $\bar{b} = (\bar{b}^i)_{i \le d}$ суть предсказуемые функции, причём $\bar{B}' \in V$ является непрерывным процессом ;

2) меры $d\bar{B}_t'$ и dF_t $(\mathbb{P} + \mathbb{P}')$-п.н. покомпонентно взаимно сингулярны на множестве $\sum_1 \cap \sum_2$;

3) для всех $(\omega, t) \in \sum_1 \cap \sum_2$ функция $\bar{b}_t$ ортогональна образу в $\mathbb{R}^d$, полученному с помощью линейного отображения, порождённого матрицей c_t.

Определим следующий момент остановки

$$\tau = \inf\left(t : t \notin \sum_1 \cap \sum_2 \text{ или } C_t \ne C_t' \text{ или } t \in \sum_1 \cap \sum_2 \text{ и } \bar{b} \circ F_t + \bar{B}_t' \ne 0\right).$$

Имеем $\mathbf{G}'' \subset \sum_1 \cap \sum_2 \cap [0,\tau[$ с точностью до Q-пренебрежимого множества, и $\tilde{\beta} = \beta - \beta'$ на множестве $\mathbf{G}''$ (ср. [3]).

Теорема (ср. [6], Лемма 2.12). *Процесс ПЧП $\bar{\mathbb{Z}}$ (относительно X) может быть определён следующим образом $\bar{\mathbb{Z}} = \varepsilon(\bar{L})$ на множестве $\mathbf{G}''$, где $\bar{L} \in Sup^+(\mathbb{P})$ является $\mathcal{O}$- супермартингалом (по мере $\mathbb{P}$) с разложением Дуба–Мейера (см. [7]) $\bar{L} = \bar{M} - \bar{A}$, причём*

$$\bar{M} = \tilde{\beta}^T \cdot X^c + \sum_{i=1,2} V^i * (\mu^i - \nu^i) \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}),$$

где V^i определён по формуле (3) с функцией $Y_i = \frac{U_i'}{U_i} 1_{U_i>0}$ $(i = 1,2)$,

$$\bar{A} = \bar{A}^1 + \bar{A}^2,\ \bar{A}^i = U_i' 1_{U_i=0} * \lambda^i + \sum_{s\le \cdot} (1 - a_s^{i\prime}) 1_{a_s^i=1} \in \mathcal{P}_s \cap V^+$$

и $\Delta \bar{L} \geq -1$, $\Delta^+ \bar{L} \geq -1$ на множестве $\mathbf{G}''$.

§4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $(B^\theta, C^\theta, \nu^{1\theta}, \nu^{2\theta})$ характеристики заданного d-мерного $\mathcal{O}$-семимартингала $X = (X^i)_{i\le d} \in S(\mathbb{P}^\theta)$ относительно некоторой функции урезания $h = (h^i(x))_{i\le d}$. Через (B, C, ν^1, ν^2) обозначается четвёрка характеристик семимартингала X по мере $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$.

Пусть $Q^\theta = \frac{1}{2}(\mathbb{P}^\theta + \mathbb{P})$, z'^θ и z^θ суть процессы плотностей мер $\mathbb{P}^\theta$ и $\mathbb{P}$ по мере Q^θ соответственно. Обозначим далее через $\mathbb{Z}^\theta = \frac{z'^\theta}{z^\theta}$ обобщённый процесс плотности мер $\mathbb{P}^\theta$ по мере $\mathbb{P}$. Так как процесс $\mathbb{Z}^\theta \in Sup^+(\mathbb{P})$ является $\mathcal{O}$-супермартингалом относительно меры $\mathbb{P}$, то этот процесс имеет разложение Дуба–Мейера (см. [7])

$$\mathbb{Z}^\theta = 1 + \mathbb{N}^\theta - \mathbb{H}^\theta,$$

где $\mathbb{N}^\theta \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$, $\mathbb{H}^\theta \in \mathcal{P}_s \cap V^+$ и $\mathbb{N}_0^\theta = H_0^\theta = 0$. Аналогично, имеем разложение Дуба–Мейера для *ПЧП* $\bar{\mathbb{Z}}^\theta \in Sup^+(\mathbb{P})$ мер $\mathbb{P}^\theta$ по мере $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$

$$\bar{\mathbb{Z}}^\theta = 1 + \bar{\mathbb{N}}^\theta - \bar{\mathbb{H}}^\theta,$$

где $\bar{\mathbb{N}}^\theta \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$, $\bar{\mathbb{H}}^\theta \in \mathcal{P}_s \cap V^+$ и $\bar{N}_0^\theta = \bar{H}_0^\theta = 0$.

Определим теперь локализующее семейство $(T_p, T(n,p))$, $n \geq 1$, $p \geq 1$ $\mathbb{F}_+$ -м.о., удовлетворяющее условию (см. [1]) $T_p \uparrow \infty$ $\mathbb{P}$ - п.н., $T(n,p) \leq T_p$ для всех $n, p \geq 1$ и

$$\mathbb{P}(T(n,p) < T_p) \to 0 \quad \text{для всех} \quad p \geq 1, \text{ когда } n \to \infty,$$

и так называемое условие локальной дифференцируемости семейства $(\mathbb{P}^\theta)$, $\theta \in \Theta$ в точке $\theta = 0$.

Условие $(\mathbb{Z})$. Существует процесс $V = (V^i)_{i \le d} \in \mathcal{O}(\mathbb{F})$ и локализующее семейство $(T_p, T(n,p))$ такое, что для любой последовательности $\{\theta_n\}_{n\ge 1} \subset \Theta$, $\theta_n \to 0$ и для любых чисел $p \ge 1$, $t \ge 0$ имеем

$$E\left(1 - \mathbb{Z}^{\theta_n}_{T(n,p)}\right) = E\mathbb{H}^{\theta_n}_{T(n,p)} = o(\theta_n^2) \text{ при } n \to \infty,$$

$$\frac{\left(\mathbb{Z}^{\theta_n}_{t\wedge T(n,p)}\right)^{1/2} - 1}{\theta_n} \xrightarrow{L^2(\mathbb{P})} \frac{1}{2} V_{t\wedge T_p}.$$

Определим также условия частичной локальной дифференцируемости в точке $\theta = 0$.

Условие $(\bar{\mathbb{Z}})$. Это условие получается из Условия $(\mathbb{Z})$ заменой процесса $\mathbb{Z}$ на $\bar{\mathbb{Z}}$ и процесса V на $\bar{V}$.

Отметим, что (ср. [1], Теорема 2.28) процессы V и $\bar{V}$ принадлежат $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{P})$.

Положим $C = c \circ F$ и

$$Y_i^\theta = \frac{U_i^\theta}{U_i} \cdot \mathbf{1}_{U_i \ne 0}, \quad Y_1^\theta \in \tilde{\mathcal{P}}^+, \quad Y_2^\theta \in \tilde{\mathcal{O}}^+, \quad i = 1, 2,$$

(см. (4)), где

$$\nu^{i\theta} \ll \lambda^i \left(\nu^{i\theta} = U_i^\theta \cdot \lambda^i\right), \nu^i \ll \lambda^i \left(\nu^i = U_i \cdot \lambda^i\right), \ \lambda^i = \nu^{i\theta} + \nu^i.$$

Для мер $\nu^{i\theta}$ $(i = 1, 2)$ имеет место единственное разложение :

$$\nu^{i\theta} = Y_i^\theta \cdot \nu^i + (\nu^{i\theta})', \quad \nu^i \perp (\nu^{i\theta})', \tag{7}$$

где $(\nu^{i\theta})' = U_i^\theta \mathbf{1}_{U_i = 0} \cdot \lambda^i$. Согласно (5)- (7) имеем единственное разложение на множестве $\mathbf{G}''$ (ср. [3] и (6))

$$B^\theta = B + (c\bar{\beta}^\theta) \circ F + \sum_{i=1,2} \left[(Y_i^\theta - 1)h * \nu^i + h * (\nu^{i\theta})'\right] + \bar{b}^\theta \circ F + \bar{B}^{\theta\prime}.$$

Теперь мы дадим для процесса $X \in S(\mathbb{P}^\theta)$ условие дифференцируемости её характеристик $(B^\theta, C^\theta, \nu^{1\theta}, \nu^{2\theta})$.

Условие (**ID**). Существуют предсказуемый процесс $\gamma = (\gamma_i)_{i \leq d} \in \mathcal{P}$, функции $W^1 \in \tilde{\mathcal{P}}$ и $W^2 \in \tilde{\mathcal{O}}$, удовлетворяющие условиям $(\gamma^T \cdot c \cdot \gamma) \circ F_t < \infty$ и $|W^i|^2 * \nu_t^i < \infty$, $i = 1, 2$ для всех $t \geq 0$ такие, что при $\theta \to 0$

$$1^0. \quad \frac{1}{\theta^2} \cdot (\bar{\beta}^\theta - \theta\gamma)^T \cdot c \cdot (\bar{\beta}^\theta - \theta\gamma) \circ F_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

$$2^0. \quad \frac{1}{\theta^2} \cdot \left[\mathbf{1} * (\nu^{i\theta})_t' + \sum_{s \leq t} (1 - a_s^{i\theta}) \mathbf{1}_{a_s^i = 1} \right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

$$3^0. \quad \left(\frac{\sqrt{Y_i^\theta} - 1}{\theta} - \frac{1}{2} W^i \right)^2 * \nu_t^i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

$$4^0. \quad \sum_{s \leq t} \left(\frac{\sqrt{1 - a_s^{i\theta}} - \sqrt{1 - a_s^i}}{\theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{W}_s^i}{\sqrt{1 - a_s^i}} \right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \ (i = 1, 2).$$

Легко проверить, что при выполнении условия (**ID**) процесс B^θ на множестве G'' имеет производную в точке $\theta = 0$ в следующем смысле (ср. [1], Предложение 2.21)

$$\mathrm{Var} \left(\frac{B^\theta - B}{\theta} - (c\gamma) \circ F - \sum_{i=1,2} (hW^i) * \nu^i \right)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ когда } \theta \to 0 \qquad (8)$$

(процесс $\mathrm{Var}\, B_t$ является вариацией процесса B на интервале $[0, t]$).

Теорема 1. *Условия* (**ZZ**) *и* (**ID**) *эквивалентны и процесс* $\bar{V} \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{P})$ *имеет представление*

$$\bar{V} = \gamma^T \cdot X^c + \sum_{i=1,2} \left(W^i + \frac{\hat{W}^i}{1 - a^i} \right) * (\mu^i - \nu^i) \left(\{a^i = 1\} \subset \{\hat{W}^i = 0\} \right). \qquad (9)$$

Кроме того, процесс частичной информации $\bar{\Lambda} = < \bar{V}, \bar{V} >$ *в точке* $\theta = 0$ *задаётся следующим образом*

$$\bar{\Lambda} = (\gamma^T \cdot c \cdot \gamma) \circ F + \sum_{i=1,2} \left[(W^i)^2 * \nu^i + \sum_{s \leq \cdot} \frac{(\hat{W}_s^i)^2}{1 - a_s^i} \right].$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.28 из [1].

Теорема 2. *Из выполнения условия* ($\mathbb{Z}$) *следует справедливость условия* ($\mathbb{D}$) *с функциями* $\gamma = (\gamma_i)_{i\le d} \in \mathcal{P}$, $W^1 \in \tilde{\mathcal{P}}$ *и* $W^2 \in \tilde{\mathcal{O}}$ *определяемыми из формул*

$$\langle V^c, X^c\rangle = (\gamma^T \cdot c) \circ F \text{ и } W^1 = M^{\mathbb{P}}_{\mu^1}(\Delta V|\tilde{\mathcal{P}}),\ W^2 = M^{\mathbb{P}}_{\mu^2}(\Delta^+ V|\tilde{\mathcal{O}}).$$

Кроме того, процесс информации $\Lambda = < V, V >$ *удовлетворяет условию* $\Lambda \ge \bar{\Lambda}$.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.31 из [1].

Основными результатами работы являются следующие варианты неравенств Рао–Крамера (ср. [1], Теоремы 3.5 и 3.9).

Теорема 3. *Пусть* $Y = (Y^i)_{i\le d}$ *– локально квадратично-интегрируемый* $\mathcal{O}$-*семимартингал относительно* $\mathbb{P}^\theta$. *Поэтому процесс являясь* Y *– специальным* $\mathcal{O}$-*семимартингалом имеет представление* $Y = Y_0 + M^\theta + A^\theta$, где $M^\theta \in \mathcal{M}^2_{\rm loc}(\mathbb{P}^\theta)$, $A^\theta \in \mathcal{P}_s \cap V$. *Если выполнено Условие* ($\bar{\mathbb{Z}}$), $Y = f(x)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *и* $|\Delta Y| \le k$, $|\Delta^+ Y| \le k$ *для некоторой постоянной* k, *тогда существует процесс* $A' \in \mathcal{P}_s \cap V$ *такой, что*

$$\operatorname{Var}\left(\frac{A^\theta - A}{\theta} - A'\right)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ при } \theta \to 0 \text{ для всех } \quad t \ge 0 \tag{10}$$

и на множестве $\{\bar{\Lambda}_t > 0\}$ справедливо неравенство

$$\langle M, M\rangle_t \ge \frac{(A'_t)^2}{\bar{\Lambda}_t}. \tag{11}$$

Следствие. Если условие ($\mathbb{Z}$) выполнено и процесс $Y \in S(\mathbb{P}^\theta)$ имеет ограниченные скачки ($|\Delta Y| \le k$, $|\Delta^+ Y| \le k$), то имеет место (10) и на множестве $\{\Lambda_t > 0\}$ справедливо неравенство

$$\langle M, M\rangle_t \ge \frac{(A'_t)^2}{\Lambda_t}.$$

Доказательство Теоремы 3. Условие ($\bar{\mathbb{Z}}$) (или ($\mathbb{D}$)) имеет место также и для процесса $Y \in S(\mathbb{P}^\theta)$ с соответствующим процессом частичной информации $\bar{\Lambda}^Y$. Кроме того справедливо неравенство $\bar{\Lambda} \ge \bar{\Lambda}^Y$ (ср. [1], Теорема 2.35). Обозначим через $(B^{Y\theta}, C^{Y\theta}, \nu^{Y1\theta}, \nu^{Y2\theta})$ характеристики процесса $Y \in S(\mathbb{P}^\theta)$ относительно функции урезания $h^Y(x) = x\mathbf{1}_{|x|\le k}$. Поэтому обозначая $C^Y = c^Y \circ F$ и используя (8) для всех $t \ge 0$, получаем

$$\mathrm{Var}\left(\frac{A^\theta - A}{\theta} - (c^Y \cdot \gamma^Y)\circ F - \sum_{i=1,2} (h^Y \cdot W^{Yi}) * \nu^{Yi}\right)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

Следовательно,

$$A' = (c^Y \cdot \gamma^Y)\circ F + \sum_{i=1,2} (h^Y \cdot W^{Yi}) * \nu^{Yi}.$$

С другой стороны из представлений

$$M = Y^c + \sum_{i=1,2} h^Y * (\mu^{Yi} - \nu^{Yi})$$

и (см. Теорему 1)

$$\bar V^Y = (\gamma^Y)^T \cdot Y^c + \sum_{i=1,2}\left[W^{Yi} + (1-a^{Yi})^{-1}\cdot \hat W^{Yi} * (\mu^{Yi} - \nu^{Yi})\right]$$

следует, что

$$\langle M, \bar V^Y\rangle = (\gamma^Y \cdot c^Y)\circ F + \sum_{i=1,2}\left[(h^Y - \hat h^Y)\cdot W^{Yi} * \nu^{Yi} + \sum_{s\le \cdot} \hat h^{Yi}_s \cdot \hat W^{Yi}_s\right] = A'.$$

Используя далее неравенство Куниты–Ватанабе для квадратично–интегрируемых $\mathcal{O}$- мартингалов M и $\bar V^Y$ (см. [8], Теорема 6.2) $\langle M, \bar V^Y\rangle \le \langle M, M\rangle \cdot \langle \bar V^Y, \bar V^Y\rangle$ и неравенство $\bar\Lambda \ge \bar\Lambda^Y$, получим (11). Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия. По Теореме 2, из условий ($\mathbb{Z}$) следуют условия ($\bar{\mathbb{Z}}$) (или $\mathbb{D}$) для процесса Y. Затем, используя Теорему 3, получим условие (10) и неравенство (11). Поэтому неравенство $\Lambda > \bar\Lambda$ завершает доказательство.

Abstract. Rao-Cramér type inequalities for a general parametric statistical models with filtration are obtained, extending the results of Jacod (1990) and Gushchin (1990) for standard filtered spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Jacod, "Regularity, partial regularity, partial information process for a filtered statistical model", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 86, no. 3, pp. 305 – 335, 1990.
2. A. A. Gushchin, "Improvement and generalization of the Cramér-Rao inequality for a filtered space". In : Probab. Theory and Math. Statist., vol. 1, Utrecht/Vilnius : VSP/Mokslas, pp. 480 – 489, 1990.
3. J. Jacod, A. N. Shiryaev, "Limit Theorems for Stochastic Processes", Springer, Berlin- Heidelberg etc., 600 p., 1987.
4. Л. И. Гальчук, "Стохастические интегралы по опциональным семимартингалам и случайным мерам", Теория Вероятностей и её приложения, том 29, № 1, стр. 93 – 107, 1984.
5. J. Horowitz, "Optional supermartingales and the Andersen-Jessen theorem", Z. Wahrsh. verw. Geb., vol. 43, pp. 263 – 272, 1978.
6. J. Jacod, "Sur le processus de vraisemblance partielle", Ann. Inst. H. Poincaré, vol. 26, no. 2, pp. 299 – 329, 1990.
7. Л. И. Гальчук, "Разложение опциональных супермартингалов", Мат. Сборник, том 115(157), № 2(6), стр 163 – 178, 1981.
8. Л. И. Гальчук, "Опциональные мартингалы", Мат. Сборник, том 112(154), № 4(8), стр. 483 – 521, 1980.

Поступила 12 октября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 27–32

О ПОЧТИ ВСЮДУ РАСХОДИМОСТИ ОДНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЕЙВЛЕТ РАЗЛОЖЕНИЙ

Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян

Ереванский государственный университет

Резюме. Для одного нелинейного метода суммирования доказано существование функций, разложения которых по вейвлет системам или по системе Франклина почти всюду расходятся.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть ψ – 0-регулярный вейвлет, т.е. ψ – ограниченная и достаточно быстроубывающая функция такая, что $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0$ и система $\widetilde{\psi}_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$ образуют ортонормальный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим оператор ([1])

$$\widetilde{T}_\lambda(f)(x) = \sum_{|a_{jk}|>\lambda} \widetilde{a}_{jk}\,\widetilde{\psi}_{jk}(x),$$

где $\widetilde{a}_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widetilde{\psi}_{jk}(x)\,dx$. В [1] доказано, что если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0} \widetilde{T}_\lambda(f)(x) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Примером 0-регулярного вейвлета является функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0;\frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2};1\right), \\ 0, & x \notin [0;1), \end{cases}$$

а порождённая ею ортонормальная система, есть система Хаара $\{\widetilde{\chi}_{jk}\}$ на $\mathbb{R}$.

Т. Тао в [1] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Для фиксированного $\alpha > 0$ рассмотрим оператор, определённый на $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$*

$$T_\lambda^\alpha(f)(x) = \sum_{|a_{jk}|>\alpha^j\lambda} \widetilde{a}_{jk}\,\widetilde{\chi}_{jk}(x),$$

где $\widetilde{a}_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widetilde{\chi}_{jk}(x)\, dx$. *Тогда имеют место следующие утверждения :*

1) *если* $\alpha \neq 2^{-1/2}$, *то для всех* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *имеем* $\lim_{\lambda\to 0} T^{\alpha}_{\lambda}(f)(x) = f(x)$ *в каждой точке Лебега функции* f.

2) *если* $\alpha = 2^{-1/2}$, *то существует* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *такая, что* $\limsup\limits_{\lambda\to 0} |T^{\alpha}_{\lambda}(f)(x)| = +\infty$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе мы докажем, что пункт 2) имеет место для любого 0-регулярного вейвлета.

Заметим, что если $\alpha = 2^{-1/2}$, то $\sum_{|\widetilde{a}_{jk}|>\alpha^j\lambda} \widetilde{a}_{jk}\, \widetilde{\psi}_{jk}(x) = \sum_{|a_{jk}|>\lambda} a_{jk}\, \psi_{jk}(x)$, где $a_{jk} = 2^{j/2}\widetilde{a}_{jk}$, а $\psi_{jk}(x) = \psi(2^j x - k)$, $j,k \in \mathbb{Z}$.

Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $\sum_{j,k} a_{jk}\, \psi_{jk}(x)$ – её разложение Фурье по системе ψ_{jk} (полной, но не нормированной), то для $\lambda > 0$ положим

$$T_{\lambda}(f)(x) = \sum_{|a_{jk}|>\lambda} a_{jk}\, \psi_{jk}(x).$$

В этих обозначениях верна следующая теорема.

Теорема 1. *Существует* $F \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(\mathbb{R})$ *такая, что* $T_{\lambda}(F)(x)$ *расходится почти всюду при* $\lambda \to 0$.

Обычно от 0-регулярного вейвлета требуют, чтобы он стремился к нулю на бесконечности быстрее любой степени. Здесь только полагаем, что выполняется следующее неравенство

$$|\psi(x)| < \frac{C_1}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}} \tag{1}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и постоянного C_1.

(Здесь и в дальнейшем $C_1, C_2, \ldots$, означают постоянные, зависящие только от ψ). При доказательстве Теоремы 1 используется метод работы [2], где для ортонормированной в $L^2(0;1)$ системы Франклина $\{f_n(x)\}$ доказана следующая теорема.

Теорема B. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *безусловно сходится почти всюду на множестве* E *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(x)| < +\infty$ *п.в. на* E.

Пусть $\{\widetilde{f}_n(x)\}$ – ортогональная система Франклина, нормированная в $C[0;1]$, т.е. $\widetilde{f}_n(x) = b_n f_n(x)$ и $\|\widetilde{f}_n\|_{\infty} = 1$. Для $\lambda > 0$ рассмотрим оператор $T^F_{\lambda}(f)(x) = \sum_{|a_n|>\lambda} a_n\, \widetilde{f}_n(x)$, определенный на $L^p[0;1]$ где $a_n = b_n^{-1}\int_0^1 f(x)\, f_n(x)\, dx$.

Теорема 2. *Существует* $f \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p[0;1]$ *такая, что* $T^F_{\lambda}(f)(x)$ *почти всюду расходится при* $\lambda \to 0$.

Для доказательства Теорем 1, 2 понадобятся две вспомогательные леммы.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Для вейвлета ψ существуют $\xi \in \mathbb{R}$, $c_2 > 0$ и $\delta > \xi$ такие, что при всех $x > \delta$*

$$\varepsilon \cdot \int_{\xi}^{x} f(t)\,dt > c_2, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и не зависит от x.

Доказательство. Для абсолютно непрерывной функции $\Psi(x) = \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt$ имеем $\Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0$. Следовательно

$$\xi := \sup\{x : |\Psi(x)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\Psi(t)|\} < +\infty.$$

Положим $d = |\Psi(\xi)|$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}\Psi(\xi)$, $c_2 = d/2$ и выберем $\delta > \xi$ так, чтобы $\int_\delta^{+\infty} |\psi(t)|\,dt < \dfrac{d}{2}$. Тогда для любого $x > \delta$ имеем

$$\varepsilon \cdot \int_{\xi}^{x} \psi(t)\,dt = \varepsilon \left(\int_{\xi}^{+\infty} \psi(t)\,dt - \int_{x}^{+\infty} \psi(t)\,dt \right) \geq d - \int_{x}^{+\infty} |\psi(d)|\,dt > \frac{d}{2},$$

откуда следует (2). Лемма 1 доказана.

Без ограничения общности можно считать, что $\xi \in [0;1]$ и $\varepsilon = 1$. В противном случае, в качестве ψ должны рассмотреть вейвлет $\varepsilon\psi(x + [\xi])$, производящий перенумерацию функций в системе $\{\psi_{jk}\}$ и умножение на ε, а оператор $T_\lambda(f)$ не изменится.

Положим $\xi_{jk} = \dfrac{\xi + k}{2^j}$, $\delta_{jk} = \dfrac{\delta + k}{2^j}$ и $\Delta_{jk} = [\xi_{jk}; \delta_{jk}]$. Тогда для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ и $x > \delta_{jk}$

$$\int_{\xi_{jk}}^{x} \psi_{jk}(t)\,dt > c_2 \cdot 2^{-j}. \tag{3}$$

Пусть l – наименьшее натуральное число, для которого $[\xi; \delta] \subset [0; 2^l]$. Заметим, что l зависит только от ψ.

Лемма 2. *Для любого интервала $\Delta = \left[\dfrac{\alpha}{2^\beta}; \dfrac{\alpha+1}{2^\beta}\right]$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$ и натурального числа m существует полином $P(x) = \sum_{j,k} a_{jk}\psi_{jk}(x)$ такой, что*

1. *$\|P\|_p \leq c_3 m^{-1/p}$ для $2 \leq p < +\infty$ и $\|P\|_1 \leq c_3 m^{-1/2}$;*
2. *$a_{jk} = 0$, если $\Delta_{jk} \not\subseteq \Delta$ или $j \notin [\beta + l + 1; \beta + l + m]$;*
3. *если $a_{jk} \neq 0$, то $a_{jk} = \dfrac{1}{m}$;*
4. *существует перестановка элементов полинома P такая, что $\operatorname{mes}\{x \in \Delta : P_\sigma(x) > c_4\} > c_5 |\Delta|$, где $P_\sigma(x)$ – колебание частичных сумм переставленного полинома, а c_4, c_5 – положительные постоянные, зависящие только от ψ.*

Доказательство. Рассмотрим полином $P(x) = \sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+l+m} \sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta} \frac{1}{m}\psi_{jk}(x)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_\infty \le \frac{1}{m}\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+l+m} \sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta} |\psi_{jk}(x)| \le c_6. \tag{4}$$

Легко проверить, что

$$2^i \le \operatorname{card}\{k:\Delta_{jk}\subset\Delta \text{ и } j=\beta+l+1\} \le 2^{i+l}. \tag{5}$$

Следовательно, ввиду ортогональности системы $\{\psi_{jk}\}$

$$\int_{\mathbb{R}} |P(x)|^2\,dx = \frac{1}{m^2}\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+l+m} \sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta} 2^{-j} \le \frac{1}{m2^\beta}. \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует, что

$$\int_\Delta |P(x)|\,dx \le \sqrt{|\Delta|}\frac{1}{\sqrt{m2^\beta}} = \frac{1}{\sqrt{m}}, \tag{7}$$

а для $p\ge 2$

$$\int_\Delta |P(x)|^p\,dx \le \|P\|_\infty^{p-2}\int_\Delta |P(x)|^{p-2}\,dx \le c_6^{p-2}\frac{1}{m2^\beta}. \tag{8}$$

С другой стороны, из (1) для любого $j>\beta+l$ получаем $\sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta}|\psi_{jk}(x)| \le \dfrac{c_7}{(1+2^j\operatorname{dist}(x,\Delta))^{1+\varepsilon}}$. Следовательно,

$$\int_{R\setminus\Delta} |P(x)|^p\,dx \le \int_{R\setminus\Delta}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{m^q}\right)^{p/q}\left(\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+m}|\psi_{jk}(x)|\right)^p dx \le \frac{c_8}{m}. \tag{9}$$

Из (7) – (9) следует первое утверждение леммы.

Слагаемые $m^{-1}\psi_{jk}(x)$ в полиноме P переставим (перенумеруем одним индексом) так, чтобы ξ_{jk}, $j=\beta+l+i,\dots,\beta+l+m$, $\Delta_{jk}\subset\Delta$, в новой нумерации следовали в порядке возрастания. Полученный полином обозначим через $\widetilde{P}$ и оценим колебание частичных сумм этого полинома на Δ. Обозначая колебание частичных сумм полинома $\widetilde{P}$ в точке x через $P_\sigma(x)$, из (3) и (5) получаем

$$\int_\Delta P_\sigma(x)\,dx \ge \int_\Delta \sum_{\xi_{jk}<x}\frac{1}{m}\psi_{jk}(x)\,dx = \frac{1}{m}\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+m}\sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta}\int_{\xi_{jk}}^{\alpha/2^\beta}\psi_{jk}(x)\,dx >$$

$$> \frac{c_2}{m}\sum_{j=\beta+l+1}^{\beta+m}\sum_{k:\Delta_{jk}\subset\Delta}2^{-j} \ge \frac{c_2}{m}\sum_{l=1}^{m}2^{-\beta-l} = c_9\,|\Delta|. \tag{10}$$

Ввиду (4) имеем

$$|P_\sigma(x)| \le c_6. \tag{11}$$

Легко заметить, что из (10) и (11) следует существование положительных постоянных c_4 и c_5 таких, что $\mathrm{mes}\{x \in \Delta\colon P_\sigma(x) > c_4\} > c_5\,|\Delta|$. Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1. Пусть p_ν – монотонная последовательность, стремящаяся к $+\infty$. Выберем натуральные m_ν, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot 2^{n_\nu}}{m_\nu^{1/(2p_\nu)}} < +\infty, \tag{12}$$

где $n_1 = 1$ и $n_\nu = \sum_{j=1}^{\nu-1} m_j$, $\nu \ge 2$. Разделим отрезок $[-\nu, \nu]$ на отрезки $\Delta_\alpha^\nu = \left[\frac{\alpha}{2^{n_\nu}}; \frac{\alpha+1}{2^{n_\nu}}\right]$, $\alpha = -\nu 2^{n_\nu}, -\nu 2^{n_\nu}+1, ..., \nu 2n_{\nu 0} - 1$ и для каждого Δ_α^ν применим Лемму 2 с $\Delta = \Delta_\alpha^\nu$ и $m = m_\nu$. Получим полиномы

$$f_{\nu\,\alpha}(x) = \frac{1}{m_\nu} \sum_{j=n_\nu+l+1}^{n_\nu+l+m_\nu} \sum_{k:\,\Delta_{jk}\subset\Delta} \psi_{jk}(x),$$

удовлетворяющие пунктам 1 - 4 Леммы 2. Положим $F_\nu(x) = \sum f_{\nu\,\alpha}(x)$. Поскольку $\|f_{\nu\,\alpha}(x)\|_p < c_3\, m^{-1/p}$ для $2 \le p < +\infty$ и $\|f_{\nu\,\alpha}(x)\|_1 < c_3\, m^{-1/2}$, имеем

$$\|F_\nu\|_p < c_3\, \frac{2\,\nu\, 2^{n_\nu}}{m_\nu^{1/(2p)}}, \qquad 1 \le p < +\infty. \tag{13}$$

Заметим, что все ненулевые коэффициенты Фурье функции F_ν равны $1/m_\nu$. Очевидно, что введя малые изменения коэффициентов Фурье, можно получить функцию $\widetilde{F}_\nu = \sum_{jk} a_{jk}\,\psi_{jk}$, удовлетворяющую следующим условиям :

A) $\|\widetilde{F}_\nu\|_p < c_3\, \dfrac{3\,\nu\, 2^{n_\nu}}{m_\nu^{1/(2p)}}$, $1 \le p < +\infty$;

B) для ненулевых коэффициентов a_{jk} имеем $(m_\nu+1)^{-1} < a_{jk} < (m_\nu-1)^{-1}$;

C) $a_{jk} = 0$, если $j > n_\nu = m_\nu + l$ или $j \le n_\nu + l$, или $\Delta_{jk} \not\subset [-\nu; \nu]$;

D) если члены полинома $\widetilde{F}_\nu$ перенумеровать так, чтобы в новой нумерации ξ_{jk} следовали слева направо, то в этой нумерации коэффициенты $\widetilde{F}_\nu$ убывают.

Из D) следует, что любой частичной сумме переставленного полинома $\widetilde{F}_\nu$ соответствует $\lambda \in \left[\frac{1}{m_\nu+1}; \frac{1}{m_\nu-1}\right]$ такое, что $T_\lambda(\widetilde{F}_\nu)$ равна этой сумме.

Очевидно, что изменение коэффициентов можно сделать настолько малым, что

$$\sum_{j=n_\nu+l+1}^{n_\nu+m_\nu+1} \sum_{\Delta_{jk}\subset[-\nu;\nu]} \left|a_{jk} - \frac{1}{m_\nu}\right| |\psi_{jk}| < \frac{c_3}{2}. \tag{14}$$

Следовательно, для любого α, выполняется

$$\operatorname{mes}\left\{x \in \Delta_\alpha^\nu : \max_{\lambda_1,\lambda_2 \in [1/(m_\nu+1);1/(m_{n_\nu}-1)]} |T_{\lambda_1}(\widetilde{F}_\nu)(x) - T_{\lambda_2}(\widetilde{F}_\nu)(x)| > \frac{c_4}{2}\right\} > c_5\,|\Delta_\alpha^\nu|. \tag{15}$$

Полагая $F = \sum_{\nu=1}^{\infty} \widetilde{F}_\nu$ и используя (15) и B) для любого ν и любого $\alpha = -\nu\, 2^{n_\nu}$, $-\nu\, 2^{n_\nu}+1,\ldots, \nu\, 2^{n_\nu}-1$ имеем

$$\operatorname{mes}\left\{x \in \Delta_\alpha^\nu : \max_{\lambda_1,\lambda_2} |T_{\lambda_1}(F)(x) - T_{\lambda_2}(F)(x)| > \frac{c_4}{2}\right\} > c_5\,|\Delta_\alpha^\nu|. \tag{16}$$

Из A) и (12) следует, что $F \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(R)$.

Теперь покажем, что $T_\lambda(F)(x)$ расходится п.в. при $\lambda \to 0$. Допустим обратное, т.е. что $T_\lambda(F)(x)$ сходится на множестве положительной меры. Тогда $T_\lambda(F)(x)$ сходится равномерно на некотором множестве E с $\operatorname{mes}(E) > 0$. Пусть x_0 является точкой плотности множества E. Тогда для некоторого $\lambda_0 > 0$ и достаточно больших ν существуют α_ν такие, что $x_0 \in \Delta_{\alpha_\nu}^\nu$ и

$$\operatorname{mes}\left\{E \bigcap \Delta_{\alpha_\nu}^\nu\right\} > (1-c_5)\,|\Delta_{\alpha_\nu}^\nu| \tag{17}$$

$$\sup_{\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2} |T_{\lambda_1}(F)(x) - T_{\lambda_2}(F)(x)| < \frac{c_4}{2} \qquad \text{когда} \qquad x \in E \bigcap \Delta_{\alpha_\nu}^\nu \tag{18}$$

Неравенства (17) и (18) вместе противоречат (16). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. аналогично доказательству Теоремы 1. Разница в том, что вместо неравенства (3) нужно применять неравенство (3) из [2].

Следующий результат непосредственно следует из доказательства Теоремы 1.

Следствие 3. *Существует* $F \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(R)$ *такая, что* $\limsup_{\lambda\to 0} |T_\lambda(F)(x)| = +\infty$ *почти всюду на* $\mathbb{R}$.

Abstract. For a nonlinear summation method, the paper points at existence of functions whose expansions by wavelet system or by Franklin system diverge almost everywhere.

ЛИТЕРАТУРА

1. Terence Tao, "On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods", Applied and Computational Harmonic Analysis, pp. 384 – 387, 1996.
2. Г. Г. Геворкян, "Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 45, № 3, стр. 30 – 42, 1989.

Поступила 8 марта 2004

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 33–42

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Т. П. Казанчян

Ереванский государственный университет

Резюме. В настоящей работе рассматривается задача справедливости локальной предельной теоремы для некоторых классов стационарных последовательностей зависимых случайных величин, включая последовательности условно зависимых и слабо зависимых величин, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания или обладающих мартингально–разностным эргодическим свойством.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача справедливости локальной предельной теоремы (ЛПТ) для некоторых классов стационарных последовательностей с компонентами, принимающими целые значения. Вопрос об асимптотическом поведении функций распределения сумм S_n компонент последовательности

$$F_n(x) = \sum_{k:\, k<x} P_n(k), \quad \text{где} \quad P_n(k) = P(S_n = k),$$

связан с центральной (интегральной) предельной теоремой (ЦПТ). Отметим, что используя стандартную технику, ЦПТ можно вывести из ЛПТ (в некоторых случаях обратное утверждение также имеет место).

Известно (см. [1]), что последовательность независимых и одинаково распределённых (НОР) решётчатых случайных величин с максимальным шагом равным единице удовлетворяет ЛПТ. Достаточные условия для выполнимости ЛПТ в случае независимых (но не обязательно одинаково распределённых) величин можно найти в [2], [3]).

Отметим, что условие независимости случайных величин не есть необходимое условие для выполнимости ЛПТ. Существуют последовательности зависимых случайных величин, для которых ЛПТ также имеет место. ЛПТ играет важную роль в аналитическом аппарате статистической физики (см. [4] – [7]).

В отличие от ЦПТ для зависимых случайных величин, для которой имеется развитая теория (см. [3] – [8]), по ЛПТ нет столь широкого спектра результатов. Повидимому, для справедливости ЛПТ требуются более сильные ограничения на тип зависимости компонент последовательности, чем те которые используются при доказательстве ЦПТ, см. [9] – [11], содержащие результаты по ЛПТ для цепей Маркова и [12] – [14], где аналогичные результаты доказаны для гиббсовских случайных полей.

Целью настоящей работы является доказательство ЛПТ для некоторых классов стационарных последовательностей зависимых величин, включая последовательности условно независимых и слабо зависимых случайных величин, удовлетворяющих равномерно сильному условию перемешивания или обладающих эргодическим мартингал–разностным свойством.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведём некоторые необходимые определения.

Определение 1. Случайная величина ξ имеет **решётчатое распределение**, если с вероятностью 1 ξ принимает значения вида $a + kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $a, h \in \mathbb{R}$, $a > 0$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, а $\mathbb{R}$ – пространство действительных чисел. Число h называется **шагом** решётчатого распределения. Шаг решётчатого распределения называется максимальным, если наибольший общий делитель попарных разностей всевозможных значений ξ равен 1.

Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – последовательность случайных величин. Не умаляя общности, предположим, что число значений случайной величины ξ_t конечно и $a = 0$, $h = 1$, т.е. ξ_t принимает только конечное число целых значений $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Определение 2. Будем говорить, что для последовательности решётчато-распределённых случайных величин **выполнена ЛПТ**, если равномерно по k имеет место соотношение

$$\sqrt{DS_n}\, P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z_k^n)^2/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $z_k^n = \dfrac{k - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$, $k \in \mathbb{Z}$, а E и D символы математического ожидания и дисперсии, соответственно.

Определение 3. Будем говорить, что для последовательности случайных величин **выполнена ЦПТ**, если для любого $x \in \mathbb{R}$, выполнено соотношение

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для множества $V \subset \mathbb{Z}$ положим

$$\partial V = \{t \in \mathbb{Z} : 1 \le d(t,V) \le r\}, \quad d(I,V) = \inf_{t \in I, s \in V} d(t,s),$$

$$I \subset \mathbb{Z}, \quad d(t,s) = |t-s|, \quad t,s \in \mathbb{Z}, \quad r \ge 0.$$

Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность случайных величин. Для любого $V \subset \mathbb{Z}$ через $\mathcal{F}_V = \sigma(\xi_t, t \in V)$ обозначим σ-алгебру, порождённую случайными величинами ξ_t, $t \in V$.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ является **условно независимой с радиусом взаимозависимости** $r > 0$, если для любых конечных $V_1, V_2 \subset \mathbb{Z}$ и любых случайных величин X и Y (имеющих второй момент), измеримых относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_{V_1}$ и $\mathcal{F}_{V_2}$ соответственно, с вероятностью 1 имеет место соотношение

$$E\left(XY/\mathcal{F}_{\partial V_1^r \cup \partial V_2^r}\right) = E\left(X/\mathcal{F}_{\partial V_1^r}\right) E\left(Y/\mathcal{F}_{\partial V_2^r}\right).$$

Определение 5. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию **равномерного сильного перемешивания**, если для неё выполнено следующее условие

$$\sup_{\substack{A \in \sigma(\xi_k,\, k \ge n) \\ B \in \sigma(\xi_k,\, k \le 0),\, P(B) > 0}} |P(A/B) - P(A)| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 6. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ является **мартингал–разностью**, если для любого $t \in \mathbb{Z}$, $E|\xi_t| < \infty$ и с вероятностью 1

$$E(\xi_t/\ldots,\xi_0,\ldots,\xi_{t-1}) = 0.$$

Выпишем также следующие условия :

A) $DS_n \sim \sigma_0^2 n$, при $n \to \infty$, где $\sigma_0^2 > 0$ и S_n – сумма случайных слагаемых,

B) Существует такая положительная постоянная α такая, что для любого $t \in \mathbb{Z}$ и любого $b \in B = \{b_1, \ldots, b_N\}$, имеет место соотношение

$$P\left(\xi_t = b / \xi_k,\ k \in \partial\{t\}^k\right) \geq \alpha.$$

C) для любых конечных $I, V \subset \mathbb{Z}$,

$$|D_{\mathcal{F}_V} S_I - DS_I| \leq \varphi(d(I,V)), \quad \text{где} \quad \varphi(d) \to 0 \quad \text{при} \quad d \to \infty,$$

и $D_{\mathcal{F}_V} S_I$ – условная дисперсия S_I относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_V$.

Теорема 1. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность условно независимых случайных величин и $E\xi_0^2 < \infty$. Пусть кроме того, выполнены условия A) и B). Тогда из выполнимости ЦПТ следует выполнимость ЛПТ.*

Теорема 2. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность условно независимых случайных величин, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания и $E\xi_0^2 < \infty$. Если выполнено условие A), то для ξ_t справедлива ЛПТ.*

Теорема 3. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная последовательность условно независимых случайных величин и $E\xi_0^2 < \infty$. Если выполнены условия A), B) и C), то для неё выполнена ЛПТ.*

Теорема 4. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}$ – стационарная эргодическая мартингал-разностная последовательность условно независимых случайных величин и $E\xi_0^2 < \infty$. Если выполнено условие B), то для неё справедлива ЛПТ.*

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Начнём с некоторых обозначений. Не умаляя общности радиус взаимозависимости можно считать натуральным числом. Для любого натурального n положим

$$m_n = \left[\frac{n}{2r+1}\right], \text{ где } [\cdot] \text{ – целая часть числа,}$$

$$d = n - m_n(2r+1) \text{ и } I_n \text{ – интервал длины } n \in \mathbb{Z}.$$

Для любого натурального n рассмотрим семейство $I_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, m_n$ непересекающихся интервалов длины $2r+1$ (содержащих $2r+1$ точек), представляющих собой разбиение интервала длины $m_n(2r+1)$. Обозначим через $t_j^{(n)}$ центр интервала $I_j^{(n)}$ и положим

$$\zeta_j = \xi_{t_j^{(n)}}, \quad \bar{I}_n = I_n \setminus \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^{(n)}, \quad \eta_s = \xi_s, \quad s \in I_n, \quad \mathcal{F}_{I_n} = \sigma\left(\eta_s, s \in I_n\right),$$

$$\bar{S}_n = \bar{S}'_n + \bar{S}''_n, \quad \bar{S}'_n = \sum_{j=1}^{m_n} \frac{\zeta_j - E\zeta_j}{\sqrt{DS_n}}, \quad \bar{S}''_n = \sum_{t \in \bar{I}_n} \frac{\eta_t - E\eta_t}{\sqrt{DS_n}},$$

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство Теоремы 1. Основной идеей доказательства является переход к условным математическим ожиданиям при оценке характеристической функции нормированных сумм (см. [7]). Используя формулу обращения, получаем

$$2\pi P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{DS_n}} \int_{-\pi\sqrt{DS_n}}^{\pi\sqrt{DS_n}} E\left(e^{it\bar{S}_n}\right) e^{-itz_k^n}\, dt$$

$$2\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_k^n)^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz_k^n - \frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Поэтому при некоторых положительных константах T и δ имеем

$$\sup_k 2\pi \left| \sqrt{DS_n}\, P_n(k) - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z_k^n)^2}{2}} \right| \le K_1 + K_2 + K_3 + K_4,$$

где

$$K_1 = \int_{-T}^{T} \left| Ee^{it\bar{S}_n} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt, \qquad K_2 = \int_{|t| \ge T} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

$$K_3 = \int_{T \le |t| < \pi\delta\sqrt{DS_n}} \left| Ee^{it\bar{S}_n} \right| dt, \qquad K_4 = \int_{\pi\delta\sqrt{DS_n} \le |t| \le \pi\sqrt{DS_n}} \left| Ee^{it\bar{S}_n} \right| dt.$$

Теперь мы по отдельности оценим K_i, $i = 1, \ldots, 4$. Для фиксированного T и любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное n_ε такое, что $K_1 < \varepsilon/4$ при $n > n_\varepsilon$. Это следует из того, что последовательность ξ_t подчиняется ЦПТ. Далее T можно выбрать настолько большим, чтобы $K_2 \le \varepsilon/4$. Так как $\bar{S}''_n$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{I_n}$, получаем

$$Ee^{it\bar{S}_n} = E\left(E\left(e^{it\bar{S}_n} \big/ \mathcal{F}_{I_n}\right)\right) = E\left(e^{it\bar{S}''_n} E\left(e^{it\bar{S}'_n} \big/ \mathcal{F}_{I_n}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$Ee^{it\bar{S}_n} \leq E\left|e^{it\bar{S}''_n}\left|E\left(e^{it\bar{S}'_n}\Big/\mathcal{F}_{\bar{I}_n}\right)\right|\right| \leq E\left(\left|E\left(e^{it\bar{S}'_n}\Big/\mathcal{F}_{\bar{I}_n}\right)\right|\right).$$

Для оценки K_3 и K_4, нам нужны некоторые обозначения. Положим

$$\gamma_j = \gamma_j^n = \left(\eta_s, s \in I_j^{(n)} \setminus t_j^{(n)}\right), \quad j = 1, \ldots, m_n, \quad \gamma_n^* = \left(\eta_s, s \in I_n \setminus \bigcup_{j=1}^{m_n} I_j^{(n)}\right),$$

и пусть $P\left(\zeta_j = b/\,\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right) = P_{\bar{\gamma}_j}(b)$, где $\bar{\gamma}_j$ есть возможное значение случайного вектора γ_j. Обозначим

$$A_{\bar{\gamma}_j}(t) = \sum_{b\in B} e^{itb} P_{\bar{\gamma}_j}(b), \quad B = \{b_1, \ldots, b_N\}, \tag{1}$$

$$E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j = \sum_{b\in B} b \cdot P_{\bar{\gamma}_j}(b), \quad D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j = \sum_{b\in B}\left(b - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j\right)^2 P_{\bar{\gamma}_j}(b).$$

Для того, чтобы оценить K_3 будем использовать, что ξ_ℓ является последовательностью условно независимых случайных величин. Имеем

$$\left|Ee^{it\bar{S}_n}\right| \leq E\left(\prod_{j=1}^{m_n}\left|E\left(e^{it\frac{\zeta_j - E\zeta_j}{\sqrt{DS_n}}}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right|\right) \leq$$

$$\leq \max_{\bar{\gamma}_1,\ldots,\bar{\gamma}_{m_n}} \prod_{j=1}^{m_n}\left|E\left(e^{it\frac{\zeta_j - E\zeta_j}{\sqrt{DS_n}}}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right|.$$

Следовательно, получаем

$$\left|E\left(e^{it\frac{(\zeta_j - E\zeta_j)}{\sqrt{DS_n}}}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right| = \left|E\left(e^{\frac{it}{\sqrt{DS_n}}(\zeta_j - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j)}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right)\right| = \left|A_{\bar{\gamma}_j}\left(\frac{t}{\sqrt{DS_n}}\right)\right|.$$

Разлагая характеристическую функцию в ряд по t, получаем

$$E\left(e^{\frac{it}{\sqrt{DS_n}}(\zeta_j - E_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j)}\Big/\gamma_j = \bar{\gamma}_j\right) = 1 - \frac{t^2}{2DS_n}D_{\bar{\gamma}_j}\zeta_j + o\left(\frac{t^2}{DS_n}\right).$$

С другой стороны,

$$D_{\bar\eta_j}\zeta_j = \sum_{b\in B} P_{\bar\eta_j}(b)\left(b - E_{\bar\eta_j}\zeta_j\right)^2 \geq \alpha \sum_{b\in B}\left(c - E_{\bar\eta_j}\zeta_j\right)^2 \geq \sigma_0^2\,\alpha.$$

Таким образом, $D_{\bar\eta_j}\zeta_j$ равномерно по j ограничена положительной постоянной. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что для $|t| \leq \pi\delta\sqrt{DS_n}$, имеет место соотношение

$$\left|A_{\bar\eta_j}\left(\frac{t}{\sqrt{DS_n}}\right)\right| \leq e^{-\frac{t^2}{DS_n}D_{\bar\eta_j}\zeta_j} \leq e^{-\frac{t^2}{DS_n}\alpha\sigma_0^2}, \quad j = 1,\ldots,m_n.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|Ee^{it\tilde S_n}\right| \leq e^{-\frac{t^2}{DS_n}\alpha\sigma_0^2 m_n}, \quad |t| \leq \pi\delta\sqrt{DS_n}.$$

Используя нижнюю оценку для дисперсии DS_n, для достаточно малых δ и для достаточно больших T и n, получаем

$$K_3 = \int\limits_{T\leq|t|<\pi\delta\sqrt{DS_n}} \left|Ee^{it\tilde S_n}\right| dt \leq \int\limits_T^\infty e^{-ct^2}\,dt \leq \varepsilon/4, \quad c > 0.$$

Для завершения доказательства теоремы, осталось оценить интеграл K_4. Аналогично тому как это делалось при оценке интеграла K_3, получаем

$$K_4 \leq \int\limits_{\pi\delta\sqrt{DS_n}\leq t\leq\pi\sqrt{DS_n}} \max_{\bar\eta_1,\ldots,\bar\eta_{m_n}} \prod_{j=1}^{m_n}\left|A_{\bar\eta_j}(t)\right| dt \leq \sqrt{DS_n}\int\limits_\delta^T \max_{\bar\eta_1,\ldots,\bar\eta_{m_n}} \prod_{j=1}^{m_n}\left|A_{\bar\eta_j}(t)\right| dt \leq$$

$$\leq \sqrt{DS_n}\int\limits_\delta^T \max_{\bar\eta_1,\ldots,\bar\eta_{m_n}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_n}\left(\left|A_{\bar\eta_j}(t)\right|^2 - 1\right)\right] dt.$$

Согласно (1), имеем

$$\left|A_{\bar\eta_j}(t)\right|^2 - 1 = \sum_{b,c\in B} P_{\bar\eta_j}(b)P_{\bar\eta_j}(c)\cos t(b-c) - 1 =$$

$$= -2 \sum_{b,c \in B} P_{\xi_j}(b) P_{\xi_j}(c) \sin^2 \frac{t}{2}(b-c) \leq -2\alpha^2 \sum_{b,c \in B} \sin^2 (b-c) \frac{t}{2}.$$

Окончательно, получаем

$$K_4 \leq \sqrt{DS_n}(\pi - \delta) \exp\left[-\alpha^2 m_n \sum_{b,c \in B} \sin^2 \frac{\delta}{2}(b-c)\right] \sim$$

$$\sim \sqrt{\sigma^2(2n+1)}\,(\pi-\delta) \exp\left[-\alpha^2 \left(\frac{2n+1}{2r+1} f(\delta)\right)\right],$$

где $f(\delta)$ – некоторая положительная функция. Выбирая n достаточно большим, для любого фиксированного $\delta > 0$, получаем, что $K_4 < \varepsilon/4$. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Известно (см. [13]), что для стационарной случайной последовательности, удовлетворяющей условию равномерного сильного перемешивания и условию А), справедлива ЦПТ. Остаётся применить Теорему 1.

Доказательство Теоремы 3. Согласно Теореме 1, достаточно проверить, что при выполнении условий теоремы, для последовательности ξ_t выполнена ЦПТ. Пусть $p = p(n)$, $n \in \mathbb{N}$ – некоторая функция, принимающая натуральные значения и кроме того, $p \to \infty$, $p = o(n)$ при $n \to \infty$. Положим $k = \left[\frac{n}{p+r}\right]$, где r радиус взаимозависимости, и

$$I_p^j = \{t :\ jr + jp \leq t \leq jr + (j+1)p\}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$I_r^j = \{t :\ jr + (j+1)p \leq t \leq (j+1)r + (j+1)p\}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$I_r = \bigcup_{j=0}^{k-1} I_r^j, \quad I_p^k = \{t :\ k(p+r) \leq t \leq n\},$$

$$S_{pj} = \sum_{t \in I_p^j} \xi_t, \quad S_{rj} = \sum_{t \in I_r^j} \xi_t, \quad j = 0, 1, \ldots, k-, 1$$

$$S_{pk} = \sum_{t \in I_p^k} \xi_t, \quad S'_n = \sum_{j=0}^{k} S_{pj}, \quad S''_n = \sum_{j=0}^{k-1} S_{rj}.$$

Обозначим также

$$\bar{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}, \quad \bar{S}'_n = \frac{S'_n - ES'_n}{\sqrt{DS_n}}, \quad \bar{S}''_n = \frac{S''_n - ES''_n}{\sqrt{DS_n}}.$$

Далее имеем

$$Ee^{it\bar{S}_n} = Ee^{it\left(\bar{S}'_n + \bar{S}''_n\right)} = Ee^{it\bar{S}''_n}\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) = E\left(e^{it\bar{S}''_n} - 1\right)\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) +$$

$$+EE\left(\prod_{j=0}^{k} e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) = E\left(e^{it\bar{S}''_n} - 1\right)\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right) + E\prod_{j=0}^{k} \dot{E}\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \mathcal{F}_{I_r^j}\right),$$

где

$$\bar{S}_{pj} = \frac{S_{pj} - ES_{pj}}{\sqrt{DS_n}}.$$

Отсюда получаем

$$\left|E\left(e^{it\bar{S}''_n} - 1\right)\left(e^{it\bar{S}'_n} \Big/ \mathcal{F}_{I_r}\right)\right| \le E\left|e^{it\bar{S}''_n} - 1\right| \le c\frac{k \cdot r}{n} \sim \frac{cr}{n} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Пусть $\gamma_r^j = \{\xi_t, t \in I_r^j\}$ и пусть $\bar{\gamma}_r^j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ – реализации вектора γ_r^j. Имеем

$$E\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \bar{\gamma}_r^j\right) = 1 - \frac{t^2}{2}\frac{D_{\bar{\gamma}_r^j} S_{pj}}{DS_n} + o\left(\frac{t^2}{DS_n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2}\frac{DS_{pj}}{DS_n} - \frac{t^2}{2}\frac{\left(D_{\bar{\gamma}_r^j} S_{pj} - DS_{pj}\right)}{DS_n} + o\left(\frac{t^2}{DS_n}\right),$$

где $D_{\bar{\gamma}_r^j} S_{pj}$ – условная дисперсия S_{pj} при условии $\bar{\gamma}_r^j$. Из условия С) следует, что

$$E\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \bar{\gamma}_r^j\right) \sim 1 - \frac{t^2}{2}\frac{DS_{pj}}{DS_n}, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Откуда получаем

$$\prod_{j=0}^{k} E\left(e^{it\bar{S}_{pj}} \Big/ \bar{\gamma}_r^j\right) \sim 1 - \frac{t^2}{2}, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4. В условиях Теоремы 4. ЦПТ следует из известного результата об асимптотической нормальности эргодических мартингал-разностей (см. [8], [14]).

Abstract. The paper establishes local limit theorem for some classes of stationary sequences of dependent variables, including sequences of conditionally independent and weakly dependent variables satisfying the uniformly strong mixing condition or possessing ergodic martingale-difference property.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные Распределения для Сумм Независимых Случайных Величин, ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1949.
2. В. В. Петров, Суммы Независимых Случайных Величин, Наука, Москва, 1972.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и Стационарные Связанные Величины, Наука, Москва, 1965.
4. А. Я. Хинчин, Математические Основания Статистической Механики, Гостехиздат, Москва, 1943.
5. А. Я. Хинчин, Математические Основания Квантовой Статистики, Гостехиздат, Москва, 1951.
6. Р. А. Минлос, "Лекции по статистической механики", УМН, том 23, № 1, стр. 133 – 190, 1968.
7. R. I. Dobrushin, B. Tirozzi, "The central limit theorem and the problem of equivalence of ensembles", CMP, vol. 54, pp. 173 – 192, 1977.
8. П. Биллингсли, Сходимость Вероятностных Мер, Наука, Москва, 1977.
9. А. Н. Колмогоров, "Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова", Изв. АН СССР, серия Математика, том 13, стр. 281 – 300, 1949.
10. Ю. В. Линник, Н. А. Сапогов, "Многомерные интегральные и локальные законы для цепей Маркова", Изв. АН СССР, серия Математика, том 13, стр. 533 – 566, 1949.
11. А. К. Алешкявичене, "Локальная предельная теорема для сумм случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова", Литов. Матем. Сборник, том 1, стр. 1 – 2, 1961.
12. А. М. Халфина, "Предельная эквивалентность малого и большого канонических ансамблей (случай малой плотности)", Матем. Сборник, том 80, № 1, стр. 3 – 51, 1969.
13. В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян, "Локальная предельная теорема для числа частиц в спиновых решётчатых системах", Теорет. и Матем. Физика, том 80, № 2, стр. 178 – 189, 1991.
14. B. S. Nahapetyan, "Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C.R.Acad. Sci. Paris, vol. 320, no. I, pp. 1539 – 1544, 1995.

Поступила 29 ноября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 43-58

THE STRUCTURE OF THE SINGULAR SET OF A FREE BOUNDARY IN POTENTIAL THEORY

L. A. Caffarelli and H. Shahgholian

University of Texas at Austin, Department of Mathematics, Austin
Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Sweden
E-mails : caffarel@math.utexas.edu, henriks@math.kth.se

Abstract. In this paper we characterize the structure of the singular set in the following free boundary problem $(\Delta u - f)u = 0$ in $B = B(0,1)$, where f is Lipschitz, and $u \in W^{2,p}(B)$, $p > n$. The free boundary $\partial\Omega$, represented by $\partial\{\Delta u = f\}$, appears in certain problems in geophysics and inverse problems in potential theory.

§1. INTRODUCTION

Let Ω be a domain in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), and f a Lipschitz function in $B = B(0,1)$ with $f(0) > 0$. Suppose there exists a function $u \in W^{2,p}(B)$ such that

$$\Delta u = f\chi_\Omega \quad \text{in } B, \qquad u = 0 \quad \text{in } B \setminus \Omega, \qquad 0 \in \partial\Omega. \tag{1.1}$$

We are interested in the regularity of the free boundary $\partial\Omega$. In a recent work [6] the authors and L. Karp proved that there exists a modulus of continuity $\sigma(r)$ ($\sigma(0^+) = 0$ and it depends on the supremum-norm of u) such that if for some $r < 1$ the set $\{u = |\nabla u| = 0\}$ (after suitable rotation) has points outside the strip $\{-r\sigma(r) < x_1 < r\sigma(r)\}$ then, locally near the origin, the free boundary in (1.1) (with $f \equiv 1$) is the graph of a C^1-function. From this the real analyticity of the free boundary, near the origin, follows by classical results ([8], [9]).

The free boundary obviously develops singularity at points where this condition fails. For convenience we refer to these points as singular points, and hence the singular set.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 35R35, 35J60. L. Caffarelli was supported by NSF. H. Shahgholian was supported by the Swedish Research Council.

here denoted by S_u, is the union of all such points. It is our objective here to study the singular set S_u in (1.1), at least in the half ball $B_{1/2}(0)$; this is tacitly understood throughout the paper. Before presenting our main result we give an example of free boundaries where cusp points are developed.

Example. ([8], [12], [10] ; cf. also [11]) Without deepening into details we recall from [8], pp. 387 – 390, that in two space dimensions one can give examples of the free boundary in (1.1), where cusps appear. These cusps are represented by the curves

$$x_2 = \pm x_1^{\mu/2}, \qquad 0 \leq x_1 \leq 1,$$

where $\mu = 4k+1$, $(k = 1, 2, \cdots)$ gives non-negative solutions and $\mu = 4k+3$, $(k = 0, 1, \cdots)$ gives solutions that become negative on the negative x_1-axis and near the origin. The solution is defined locally by

$$u(x) = x_2^2 - \frac{2}{1+\mu/2}\rho^{1+\mu/2}\sin(1+\mu/2)\theta + \cdots, \qquad x \in \Omega,\ |x| < \epsilon,$$

for ϵ small. Here we've used both real and complex notation

$$x = (x_1, x_2), \qquad z = \rho e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Also the domain Ω is the image of the set $\{z : |z| < 1,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ under the conformal mapping $f(z) = z^2 + iz^\mu$. Let us now introduce some definitions.

Minimal diameter. The minimum diameter of a bounded set D, denoted $M\,D(D)$, is the infimum of distances between pairs of parallel planes such that D is contained in the strip determined by the planes. We also define the density function

$$\delta_r(u) = \frac{M\,D(\Lambda \cap B(0,r))}{r},$$

where $\Lambda := \{u = |\nabla u| = 0\}$.

Let now f be a Lipschitz function in $B(z,r)$ with Lipschitz norm $|f(x) - f(y)| \leq C_1|x-y|$ in $B(z,r)$. In the sequel we'll assume $C_1 = 1$.

Local Solutions. We say a function u belongs to the class $P_r(z, C_0)$ if u satisfies (in the sense of distributions) :

$$\Delta u = f\chi_\Omega \text{ in } B(z,r), \qquad (\|f\|_{Lip,B(z,r)} \leq 1 \quad \text{and} \quad f(z) = 1),$$
$$u = |\nabla u| = 0 \text{ in } B(z,r) \setminus \Omega,$$
$$\|u\|_{\infty,B(z,r)} \leq C_0, \qquad z \in \partial\Omega.$$

Since the class $P_r(z, C_0)$ is translation invariant (only r changes), (1.1) may be considered in a neighborhood of any given point of the free boundary, and the results of [6], discussed earlier, can then be applied to every boundary point.

The following definition will be useful in declaring our main result.

Definition 1.1. We define the class of $n \times n$ matrices $\mathbb{M}$ as

$$\mathbb{M} = \{M_{n\times n} = (a_{ij});\ \text{trace}(M) = 1,\ M = M^t\}.$$

In order to study the singular points we need to distinguish between singular points with different blow-ups. In other words if x^0 is a singular point of $\partial\Omega(u)$, then (as it will be clear later) any blow up of u at x^0 will be a polynomial $Q(x) = (x^t Mx)/2$ with $M \in \mathbb{M}$. Now we want to classify the singular points in terms of the matrix M we obtain ; more exactly in terms of the kernel of M. We give an exact definition of the singular points S_u introduced earlier.

Definition 1.2. For $u \in P_1(0, C_0)$, we say $x^0 \in S_u(a,k)$ if $x^0 \in \partial\Omega$, and there is a sequence $\{r_j\}$ such that functions $\{u_j\}$, where

$$u_j(x) = \frac{u(r_j x + x^0)}{r_j^2},$$

have a convergence subsequence to a polynomial $Q(x) = x^t Ax$ with

$$A \in \mathbb{M} \qquad \dim(\text{Ker}(A)) \leq k,$$

where we also assume that the eigenvalues are arranged as

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-k}| \geq a, \qquad \text{and} \qquad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

As the definition goes x^0 may belong to different classes of singular sets, depending on different blow-ups. However, we'll show that this is not the case. Indeed, we prove that if $x^0 \in S_u(a_i, k_i)$ for $i = 1, 2$, then necessarily $k_1 = k_2$ and we may take $a_1 = a_2$.

Remark. The set $D := \{u = 0\} \setminus \{|\nabla u| = 0\}$, where u is a solution to (1.1), may be excluded from our analysis. Indeed, this set can be shown to lie (locally) in a C^1-manifold, as follows. First from the non-degeneracy (see [6]) it follows that $\partial\Omega$ has Lebesgue measure zero. A consequence of this is that $\Delta u = f$ in a neighborhood of D, so that u is $C^{2+\alpha}$. Therefore in considering the free boundary $\partial\Omega$, we may only look at points where also the gradient is zero, i.e., we need to consider only the set $\partial\Omega \cap \partial\overline{\Omega}$, since the set $\partial\Omega \setminus \partial\overline{\Omega}$ lies now in a C^2-manifold.
The reader may consider, as an example, the function $u = x_1^2 - x_2^2/2$ in $\mathbb{R}^3$, which solves (1.1). Here one can consider $\Omega = \mathbb{R}^3$ and $\partial\Omega = \emptyset$, or $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$ and $\partial\Omega$ is the x_3-axis. Also the function takes both positive and negative values near the free boundary.
Before stating our main result we'll recall two recent results in this filed that are very much pertinent to our analysis in this paper. The first result is about the regularity of the free boundary in (1.1).

Theorem 1.3 ([6]). *Let u solve (1.1) with $|u| \leq C_0$, and $f \equiv 1$. Then $u \in C^{1,1}(B(0,1/2))$ and there exists a modulus of continuity σ ($\sigma(0^+) = 0$ and it depends on C_0) such that if $\delta_{r_0} > \sigma(r_0)$ for some $r_0 < 1/2$, then $\partial\Omega$ is the graph of a C^1 function in $B(0, c_0 r_0^2)$, where c_0 is some universal constant.*

The second result is about singular points of the free boundary in (1.1), with the extra condition that $u \geq 0$. This is due to the first author. We also refer to [5] for some results in this direction.

Theorem 1.4 ([3]). *Let $u \geq 0$ be a solution to (1.1) with $f \equiv 1$. Suppose $x^0 \in S_u \cap B(0,1/2)$ and $|u| \leq C_0$. Then the following hold :*

a) *There exists a unique quadratic polynomial (and a unique matrix $M^{x^0} \in \mathbb{M}$)*

$$Q_u^{x^0} = \frac{1}{2}(x - x^0)^t M^{x^0}(x - x^0)$$

such that in some neighborhood of x^0

$$\sup_{B(x^0,r)} |u - Q_u^{x^0}| \leq r^2\sigma(r).$$

Here σ is a universal modulus of continuity, depending on n, and C_0 only.

b) *M^{x^0} is continuous in x^0, and the kernel of M^{x^0} changes continuously in x^0. Moreover, the modulus of continuity of M^{x^0} is $\sigma(r)$, which appears in part a).*

c) *If $\dim(Ker(M^{x^0})) = k$, then there exists a k-dimensional C^1-manifold $\Gamma_{x^0,u}$ such that*

$$S_u \cap B(x^0, r) \subset \Gamma_{x^0,u},$$

for some $r > 0$, depending on the singular point, and the smallest eigenvalue of M^{x^0}.

The dependence of the neighborhood on the smallest eigenvalue can be given by the following simple example in 3-dimensions

$$u(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + (x_3 - \cos(1/x_2))^2\, x_2^4.$$

Here, the singular set with kernel of dimension one, meanders into the singular set with kernel of dimension two, as the smallest eigenvalue degenerates to zero.

Most of the proof of Theorem 1.4 works perfectly in our case. There is only one, and a very crucial, point where it breaks, and we could not amend it ; see [3], proof of Lemma 14. We will prove a slightly different and weaker version of this theorem.

Theorem 1.5. (**MAIN**) *For $u \in P_1(0, C_0)$ the following hold.*

(1) Theorem 1.3 above holds true with Lipschitz f. The quantities, in general, depend also on the Lipschitz norm of f.

(II) For $x^0 \in S_u$ there exists a $(n-1)$-dimensional C^1-manifold $\Gamma_{x^0,u}$ such that

$$S_u \cap B(x^0, r) \subset \Gamma_{x^0,u},$$

for some $r > 0$, depending on the constants n, C_0.

(III) For $x^0 \in S_u(a,k)$ there exists a k-dimensional C^1-manifold $\Gamma_{x^0,u}$ such that

$$S_u(a/2, k) \cap B(x^0, r) \subset \Gamma_{x^0,u},$$

for some $r > 0$, depending on the constants a, k, n, C_0.

(IV) If $x^0 \in S_u$ and Q_1, Q_2 are two different blow-ups of u at x^0 then necessarily $Q_1 = Q_2$.

(V) In $B_{1/2}$, $\lim_{\Omega \ni x \to \partial\Omega} D_{ij}u$ exists for regular points of the free boundary, and it exists non-tangentially for singular points of the free boundary.

It should be remarked that part (V) in Theorem 1.5 is the best result when $n \geq 3$. Indeed, it can be easily seen that if the origin is a singular point such that u_0 is a polynomial of at least two variables, and if $n \geq 3$ then the second derivatives of u are not necessarily continuous up to the origin. To see this, heuristically, let us consider a free boundary solutions where for any $r > 0$, the set $B_r \setminus \Omega$ has interior. Since the free boundary has zero Lebesgue measure we may assume that for any $r > 0$, the set $B_r \setminus \Omega$ contains a ball. This implies, in particular, that the part of free boundaries that can be touched by this balls, from $B_r \setminus \Omega$, are regular. Now take a sequence of such regular free boundary points $x^j \in \Omega$. Let us also for simplicity assume that the free boundary lies along the third coordinate axis x_3, so that the blow-up is $u_0(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$ and $\{u_0 = |\nabla u_0| = 0\}$ is the x_3-axis. Now it is easy to see that the normal vector ν_j and the tangent vector τ_j at x^j to $\partial\Omega$ will converge to ν_0 and τ_0, which are independent of x_3.

Now the point x^j being regular gives that $D_{\nu_j\nu_j}u = 1$ and $D_{\tau_j\tau_j}u = 0$. Next, having the blow-up $u_0(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$ and (supposedly) tangential continuity of the second derivatives we must have

$$0 = \lim_{x \to 0} D_{\tau_0\tau_0}u(x) = 2a_1\tau_0^1 + 2a_2\tau_0^2 = 2|\tau_0|^2, \qquad \text{(tangentially)},$$

where $\tau_0 = (\tau_0^1, \tau_0^2)$.

Next by choosing different points x on the regular part of the free boundary, e.g. by going around the x_3-axis we may choose any vector τ_0 in the plain which comes from τ_j (this depends on the point). In particular choosing $\tau_0 = (a_1, a_2)$ we arrive at a contradiction with the above $0 = 2a_1\tau_0^1 + 2a_2\tau_0^2$.

A basic tool in this paper will be the following monotonicity lemma.

Lemma 1.6. *Let h_1, h_2 be two non-negative continuous sub-solutions of $\Delta u = 0$ in $B(x^0, R)$ $(R > 0)$. Assume further that $h_1 h_2 = 0$ and that $h_1(x^0) = h_2(x^0) = 0$. Then the following function is monotone in r $(0 < r < R)$*

$$\varphi(r) = \varphi(r, h_1, h_2, x^0) := \frac{1}{r^4}\left(\int_{B(x^0,r)} \frac{|\nabla h_1|^2}{|x - x^0|^{n-2}}\right)\left(\int_{B(x^0,r)} \frac{|\nabla h_2|^2}{|x - x^0|^{n-2}}\right).$$

The problem with Lemma 1.3 is that it does not apply when Δh_i is bounded from below. We intend to apply this lemma to the directional derivatives $D_e u$ of solutions to (1.1). Since $\Delta (D_e u)^\pm \geq -C$ we need a different version of Lemma 1.3.

The next lemma is a new type of monotonicity lemma. The advantage of it is that it relaxes the subharmonicity condition and allows the solutions to have bounded Laplacian only.

Lemma 1.7. ([4], Theorem 1.3). *Recall the assumptions in Lemma 1.3, and replace the subharmonicity assumption by the boundedness of the Laplacian of h_i, i.e., assume $\Delta h_i \geq -1$. Suppose moreover $|h_i(x)| \leq C|x|^\beta$ for some $\beta > 0$. Then*

$$\varphi(s_1) \leq (1 + s_2^\beta)\varphi(s_2) + C s_2^\beta, \tag{1.2}$$

where $0 < s_1 \leq s_2 \leq R$.

In Lemma 1.7 if we have $\Delta h_i \geq -C_i$ then we can replace h_i by h_i / C_i and change the constant C in (1.2). The reader may easily verify that any function verifying (1.2) must have a limit as $r \to 0^+$, i.e.,

$$\lim_{r \to 0^+} \varphi(r) = \text{exists} . \tag{1.3}$$

We refer to Lemma 1.6 as the monotonicity lemma and to Lemma 1.7 as the almost monotonicity lemma.

In the sequel, while applying the monotonicity formulas, we'll use the notation $\varphi(r, D_e u)$ with $u \in P_1(M)$ and h_1, h_2 replaced by $(D_e u)^\pm$. Here, e is a unit vector and

$$(D_e u)^+ = \max(D_e u, 0) \qquad (D_e u)^- = \max(-D_e u, 0).$$

Observe also that $(D_e u)^+$ are subsolutions.

Before continuing with our results we need to recall several facts about blow-up techniques. This will especially be helpful for non-specialists. We gather these in the below remark.

General Remarks. We will need several concepts as well as several facts that the non-specialist reader may be unfamiliar with. However, all these can be penetrated in literature and research papers; see e.g. [1] – [3] and [6].

1)Scaling : For u a solution to (1.1) we set

$$u_r(x) = \frac{u(rx + x^0)}{r^2},$$

which is the so called "correct" scaling of u at $x^0 \in \partial\Omega$; since one expects u to behave quadratically near the free boundary.

2)Global Solution : A solution to $(\Delta u - 1)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $(p > n)$with quadratic growth, is called a global solution.

3)Blow-ups : Let now Ω_r denote the set $\{x : rx \in \Omega\}$, and u_r be the scaling of u. If u is $C^{1,1}$ or even if $\sup_{B(0,r)} |u| \le Cr^2$ then we see that u_r is bounded and defined in $B(0, R)$ for any R, provided r is small enough. Hence by standard compactness methods in elliptic theory, since $\Delta u_r = \chi_{\Omega_r}$, we may let r tend to zero and obtain (for a subsequence) a global solution. This process is referred to as blowing up, and the global solution thus obtained is called a blow-up of u.

4)Non-degeneracy : The reader may have wondered what happens if the function u_r under the blow-up process converges (degenerates) identically to zero. Indeed, this can not happen due to the very simple fact that

$$\sup_{B(0,r)} u \ge \frac{r^2}{2n}.$$

The proof of this is standard and can be found in [1]; observe that the assumption $u \ge 0$ in [1] is superfluous (cf. [6]; (4.1)). Therefore

$$\sup_{B(0,R)} u_r(x) \ge \frac{R^2}{2n},$$

and thus the obvious non-degeneracy.

5)Hausdorff measure of $\partial\Omega$: It can be proven using techniques of [3], that "locally" the free boundary $\partial\Omega$, has finite $(n-1)$-Hausdorff measure. See [3]; Corollary 4 and [6]; General Remarks.

6)Polynomial solution : Next, consider a solution u to (1.1) which is also $C^{1,1}$ (by [6]). Then any blow-up sequence u_{r_j} of u that converges to a global solution has the obvious property that the blow-up limit u_0 has a quadratic growth near the infinity point. Now suppose the set $\{u = 0\}$ has empty interior. Then by the above $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ has zero Lebesgue measure. Hence $\Delta u_0 = 1$ almost everywhere. In particular, Liouville's theorem applies to conclude that u_0 is a homogeneous polynomial of degree two.

7) $W^{2,p}$**-convergence of blow-ups** : Suppose u is a solution and u_0 is a blow up of u through some sequence u_j. Then one may show that the convergence of u_j is not only in $C^{1,\alpha}$ but also in $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. This fact follows very easily by using certain properties of the solutions, such as non-degeneracy and that the set $\partial\Omega_0$ has zero Lebesgue measure. One may even show that the free boundary $\partial\Omega_j$ converges to $\partial\Omega_0$ in the usual Hausdorff metric. As a simple exercise from this it follows that the convergence of u_j to u_0 is in $W^{2,2}$; see [6] ; General Remarks.
This fact is used in the case of blowing up the solution in the monotonicity formula (Lemma 1.2), since here we need the convergence in $W^{2,2}$.
8) $\varphi(0^+, D_e u)$: The limit value of the function $\varphi(r, D_e u)$, as r tends to zero, will play a crucial role in the analysis of singular points. In this part we will discuss some facts about $\varphi(0^+, D_e u)$. So suppose $0 \in S_u(a, k)$. Then there exists a blow-up of u at the origin giving rise to a polynomial solution

$$u_0(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i x_i^2 = \frac{1}{2} x^t A x,$$

in a rotated system. Here A is the symmetric diagonal matrix with entries $a_{ii} = \lambda_i$. For convenience we'll also assume $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-k}|$, with $|\lambda_{n-k}| \geq a$, and $\sum \lambda_i = 1$. From here it follows that

$$D_e u_0 = 2\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i e_i x_i, \qquad e = (e_1, \cdots, e_n).$$

Now if $e \in \mathrm{Ker}(A)$, then $D_e u_0 = 0$. When $e \notin \mathrm{Ker}(A)$ interesting things happen. Indeed, let e_λ be an eigenvector for A with eigenvalue λ. Define

$$K_\epsilon(A, e_\lambda) := \{x : \ |x \cdot e_\lambda| > \epsilon |x|\}, \tag{1.4}$$

then for $e = x/|x| \in K_\epsilon(A, e_\lambda)$ we'll have

$$|\nabla D_e u_0|^2 = 4\sum_{i=1}^{n-k} (\lambda_i e_i)^2 \geq \frac{4}{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n-k} |\lambda_i e_i|\right)^2 \geq \frac{4}{n-k}\lambda^2 \epsilon^2.$$

In particular for φ as in the next lemma we obtain $\varphi(0^+, D_e u_0) = C\lambda^4\epsilon^4$. In a similar fashion, we may take a (lower dimensional) plane

$$\Pi_m = \{x_1 = \cdots x_m = 0\}, \qquad m \leq n-k,$$

to obtain for $e \notin \Pi_m$ the estimate

$$|\nabla D_e u_0|^2 = 4\sum_{i=1}^{n-k}(\lambda_i e_i)^2 \geq \frac{4}{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n-k}|\lambda_i e_i|\right)^2 \geq \frac{4}{n-k}(\lambda_{(m-1)})^2\epsilon^2,$$

where ϵ is the angle between e and the projection of e on the (lower dimensional) plane Π_m.
A crucial fact that can be deduced, at this moment, is the simple fact that

$$|\lambda_1| \geq \max_i \lambda_i \geq \frac{1}{n}, \tag{1.5}$$

which in conjunction with the above analysis shows that (in a rotated system)

$$|\nabla D_{x_1} u_0|^2 \geq C\epsilon^2,$$

independently of the function u. In particular for all other singular points near the origin (which itself is assumed to be singular) we must have this estimate.
9)Semi-continuity of $||A^x e||$: From the monotonicity formulas it follows that

$$\lim_{x\to 0} ||A^x e|| \leq ||A^0 e||.$$

For a detailed proof one may apply [3] ; Corollary 10 in an obvious manner. This in particular implies, at least heuristically at this moment, that

$$\mathrm{Ker}(A^0) \subset \mathrm{Ker}(\lim_{x\to 0} A^x).$$

Observe that at this moment we don't know whether the limit $\lim_{x\to 0} A^x$ exists.

§2. TECHNICAL LEMMAS

From General Remarks above, it follows that any blow-up of a solution to (1.1) at some singular point must be a polynomial solution. We show next that the matrices, representing two different polynomial blow-ups of the same function at a given singular point must have the same kernel.

Lemma 2.1. *Let $0 \in S_u$, with u and Ω as in (1.1), and Q_1, Q_2 be two different polynomial blow-ups of u, with corresponding matrices A and B. Then for any vector e*

$$||Ae|| = ||Be||, \qquad \text{and} \qquad A^2 = B^2.$$

In particular $KerA = KerB$.

Proof. Let $r_j \searrow 0$ be an arbitrary sequence, and set $u_{r_j} = u(r_j x)/r_j^2$. Suppose u_{r_j} converges, for a subsequence and in $C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, to a global solution Q_1. Since $0 \in S_u$ we'll have Q_1 is a polynomial in $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$Q_1 = \frac{1}{2} x^t A x = \frac{1}{2} \sum a_{ij} x_i x_j.$$

Here $A \in \mathbb{M}$ is a symmetric matrix with entries a_{ij}. Now let $t_j \searrow 0$ be another arbitrary sequence, and define accordingly u_{t_j}. Then a similar argument gives a limiting polynomial

$$Q_2 = \frac{1}{2} x^t B x = \frac{1}{2} \sum b_{ij} x_i x_j.$$

Here $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}$ is a symmetric matrix. We will show that $A^2 = B^2$. Let e be any arbitrary directional vector (unit length). and consider the monotonicity function for $D_e u$, by setting

$$\varphi(r, D_e u) = \frac{1}{r^4} \left(\int_{B(0,r)} \frac{|\nabla (D_e u)^+|^2}{|x|^{n-2}} \right) \left(\int_{B(0,r)} \frac{|\nabla (D_e u)^-|^2}{|x|^{n-2}} \right).$$

Then by Lemma 1.7, $\varphi(r, D_e u)$ is a almost monotone non-decreasing function of r. By scaling

$$\varphi(r, D_e u) = \varphi(1, D_e u_r). \tag{2.1}$$

Since φ is almost monotone the limit, as r tends to zero, exists and

$$\lim_{r \to 0} \varphi(r, D_e u) = C_e,$$

for some $C_e \geq 0$. Also the convergence of the functions u_{r_j} and u_{t_j} takes place in $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (see General Remarks). Therefore we'll have (by (2.1))

$$C_e = \lim_{r \to 0} \varphi(r, D_e u) = \lim_{r \to 0} \varphi(1, D_e u_r).$$

Replacing r by r_j and then by t_j we obtain

$$C_e = \lim_{r_j \to 0} \varphi(1, D_e u_{r_j}) = \varphi(1, D_e Q_1),$$

and

$$C_e = \lim_{t_j \to 0} \varphi(1, D_e u_{t_j}) = \varphi(1, D_e Q_2).$$

Hence

$$\varphi(1, D_e Q_1) = \varphi(1, D_e Q_2). \tag{2.2}$$

Now inserting the polynomial representations of Q_1 and Q_2 in (2.2) we obtain for all directional vectors e

$$\|Ae\| = \|Be\|, \tag{2.3}$$

where $\|\cdot\|$ denotes the usual vector norm. From here we show that $A^2 = B^2$. Indeed, (2.3) and the symmetry of the matrices imply $(A^2e, e) = (B^2e, e)$ for all e. Using this we'll end up with

$$\begin{aligned}(A^2x, y) &= \frac{1}{2}\left((A^2(x+y), (x+y)) - (A^2x, x) - (A^2y, y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((B^2(x-y), (x-y)) - (B^2x, x) - (B^2y, y)\right) = (B^2x, y),\end{aligned}$$

for all vectors x and y. Hence $A^2 = B^2$. Lemma 2.1 is proved.

From the above lemma it follows, using a contradictory argument, that if the origin is a singular point then the free boundary lies, locally, in a cusp like region, where the direction of the cusp is parallel to the kernel of the matrix A, in the representation of the blow-up of u. Obviously this implies that the free boundary is rectifiable. This, however, is not enough for proving a C^1 regularity ; see Lemma 2.3 – 2.4 below.

Remark. We want to point out a crucial fact about the matrices that appear in Lemma 2.1. A simple argument in matrix theory will reveal that the number of possible matrices in Lemma 2.1 is less than 2^{n-1}. This fact will be used in the proof of part (IV) of Theorem 1.5.

Now to see this fact let us take all possible matrices B that may appear in the proof of Lemma 2.1, i.e., all matrices $B \in \mathbb{M}$ such that $B^2 = A^2$ for a fixed matrix $A \in \mathbb{M}$. By rotation we may assume that A is diagonal. The problem is that A is allowed to have negative eigenvalues. Since by Lemma 2.1, A and B have the same kernel we may rearrange the coordinate system so that we only consider $m \times m$-matrices with nonzero eigenvalues. Also $m \leq n$. Let us also assume that A is diagonal with diagonal elements λ_j. Now $B^2 = A^2$ gives that B^2 has eigenvalues λ_j^2. Now let U_B be the orthogonal matrix which diagonalizes B. Then one can see that U_B also diagonalizes B^2. But $B^2 = A^2$ is fixed. Hence U_B is unique (up to 2^{n-1}-permutations of the column vectors) and independent of B. Therefore the maximal number of matrices B above must be smaller than or equal to 2^{n-1}.

For the next lemma recall the notation $\Lambda = \{u = |\nabla u|\}$.

Lemma 2.2. *Given $\delta > 0$ there exists R_δ such that if $u \in P_\infty(0, C_0)$ and $0, x^0 \in \Lambda(u)$ with $|x^0| = R \geq R_\delta$, then for $e_0 = x^0/|x^0|$ we have*

$$\|(D_{e_0}u)^+\|_{W^{1,2}_{B_1}} < \delta.$$

Proof. The lemma follows trivially if u is a polynomial. So suppose u is not a polynomial. Then, by [6] (Theorem II) we may only consider the subclass $\tilde{P}_\infty(0,C_0)$ of $P_\infty(0,C_0)$ that consists of convex solutions. Now suppose the statement of the lemma fails, then there exists a sequence $R_j \to \infty$, $u_j \in \tilde{P}_\infty(0,C_0)$, 0, $x^j \in \Lambda(u_j)$, with $|x^j| = R_j$ and such that

$$\|(D_{e_j}u_j)^+\|_{W^{-1,2}_{B_1}} \geq \delta, \tag{2.4}$$

where $e_j = x^j/|x^j|$. Then, by convexity, the segment $l_j = [0,x^j] \subset \Lambda(u_j)$. Now (as usual) let us take a convergent subsequence of u_j, with the limit $u_0 \in \tilde{P}_\infty(0,C_0)$. Using the fact that (see [6] ; General Remarks)

$$\overline{\lim}\Lambda(u_j) \subset \Lambda(u_0),$$

we'll have that the limit function u_0 contains the ray $l_0 = \overline{\lim} l_j$ in $\Lambda(u_0)$. Now by the proof of Theorem II in [6] ; p. 285 we have $D_{e_0}u_0 \leq 0$, where $e_0 = \lim_j x^j/|x^j|$ is the direction of the ray l_0. This contradicts (2.4). Lemma 2.2 is proved.

Let us recall the definition of $K_\epsilon(A)$ in (1.4). Now according to Lemma 2.1, all blow-ups of u at the origin have the same kernel. Using this fact in the definition of $K_\epsilon(A)$ we see that $K_\epsilon(A) = K_\epsilon(B)$ if A and B are matrices that come from different blow-ups of u. This suggests to define the cones, using the function u itself, i.e., we define $K_\epsilon(u) = K_\epsilon(A)$, where A is any of the matrices arising in the blow-up of u.

Lemma 2.3. *Let $0 \in S_u$ with the corresponding blow-up matrix A. Fix $a > 0$ and suppose e_λ is an eigenvector corresponding to the eigenvalue λ with $|\lambda| \geq a$. Then given $\epsilon > 0$, there exists $r_\epsilon = r_\epsilon(|\lambda|, C_0) > 0$ (independent of u) such that*

$$K_\epsilon(u, e_\lambda) \cap B(0, r_\epsilon) \subset \Omega.$$

Proof. If the conclusion of the lemma fails, then there exists $u_j \in P_1(0,C_0)$, with blow-up matrix A_j and its eigenvalue λ_j, $x^j \in \Lambda(u_j) \cap K_\epsilon(u_j, e_{\lambda_j})$, $r_j = |x^j| \searrow 0$, and $|\lambda_j| > a$. Consider a scaling of u_j at the origin, in the following way. For $s > 0$ (s is large and will be chosen later) set

$$\tilde{u}_j(x) = u_j(sr_jx)/(sr_j)^2, \qquad sr_j < 1.$$

By usual compactness argument a subsequence (again labeled $\tilde{u}_j$) will converge to a global solution u_0 (since $r_j \to 0$), and $\tilde{x}^j = x^j/(sr_j) \in \Lambda(\tilde{u}_j) \cap K_\epsilon(\tilde{u}_j)$ will converge to $x^0 \in \Lambda(\tilde{u}_0) \cap K_\epsilon(\tilde{u}_0, e_{\lambda_0})$. Finally, using that $a < |\lambda_j| \leq C_0$ we'll have that λ_j should converge (up to a subsequence) to some limit value λ_0 with $|\lambda_0| \geq a$. Also $|\bar{x}^j| = 1/s$ implies $|x^0| = 1/s$.

Next fix j. Then $0 \in S_{u_j}$. This in conjunction with fact 8) in General Remarks implies

$$C(a\epsilon)^4 \leq C(\lambda_j\epsilon)^4 = \lim_{r\to 0} \varphi(r, D_{e_j}u_j),$$

where $e_j = x^j/|x^j|$. Hence by Lemma 1.7

$$C(a\epsilon)^4 - O(sr_j)^\beta \leq \varphi(sr_j, D_{e_j}u_j) = \varphi(1, D_{e_j}\bar{u}_j).$$

As j tends to infinity we obtain $C(a\epsilon)^4 \leq \varphi(1, D_{e_0}\bar{u}_0)$, where $e_0 = x^0/|x^0|$. Since $x^0 \in \partial\Omega(u_0)$ and since $|x^0| = 1/s$, we can apply Lemma 2.2 in the following way. For small δ we can choose large s so as to arrive at

$$\|(D_{e_0}u_0)^+\|_{W^{1,2}_{B_1}} < \delta.$$

Hence we end up with $C(a\epsilon)^4 \leq \varphi(1, D_{e_0}u_0) \leq C\delta^2$. Choosing $\delta^2 = C(a\epsilon)^4\epsilon_0$ with ϵ_0 small enough we'll have a contradiction. Lemma 2.3 is proved.

Let A^{x^0} be the matrix corresponding to the blow-up of u at x^0. In the next lemma using similar ideas as that of the proof in Lemma 2.3 we can prove that the kernel of A^{x^0} is continuous in x^0 for $x^0 \in S_u(a,k)$. Unfortunately the continuity depends strongly on the constant a. For this purpose we need a definition of distance of the matrices. For two $n \times n$-matrices A_1 and A_2 we define

$$\mathrm{dist}(A_1, A_2) := \mathcal{H} - \mathrm{dist}(\mathrm{Ker}(A_1) \cap B_1, \mathrm{Ker}(A_2) \cap B_1),$$

where $\mathcal{H}-$dist denotes the Hausdorff distance between sets. Here we have considered the linear space $\mathrm{Ker}(A_i)$ as set of points. Observe that by this definition $\mathrm{dist}(A_1, A_2) = 0$ if and only if $\mathrm{Ker}(A_1) = \mathrm{Ker}(A_2)$. In particular we may have two different matrices having zero distance.

Lemma 2.4. *Given $\epsilon > 0$, there exists $r_\epsilon = r_\epsilon(a, k, C_0) > 0$ such that if $x^0, x^1 \in S_u(a,k)$ and $|x^0 - x^1| < r_\epsilon$, then $\mathrm{dist}(A^{x^0}, A^{x^1}) < \epsilon$.*

Proof. The proof follows from Lemma 2.3.

§3. PROOF OF THEOREM 1.5

Proof of (I). The first statement in Theorem 1.5 follows the same steps as that of [6], with minor changes. Indeed everywhere in Theorems I, and III in [6] when the monotonicity formula is used one needs to add a correction term r^β, which corresponds to the almost monotonicity lemma. It is not hard to check that at all other points of the proofs given in [6] for $f = 1$ works with small modifications for Lipschitz f.

The proof of Theorem II in [6] is unchanged since one only classifies global solutions with $f \equiv 1$. This depends on the fact that when we scale the functions in the proof of Theorem III in [6], the limit functions, are global solutions with $f \equiv 1$.

Proof of (II) - (III). These parts are easy (but probably not obvious) consequences of Lemmas 2.3 – 2.4 and Withney-type extension theorem (see [13] ; Chapter 6). We only treat case (III), since by (1.5) $S_u \subset S_u(1/n, n-1)$ part (II) will follow by part (III). Let $x^0 \in S_u(a,k)$. If x^0 is an isolated point of $S_u(a/2,k)$ then we are done. Let us assume x^0 is non-isolated in $S_u(a/2,k)$. Assume also $x^0 = 0$ (the origin). Denote by M^z the kernel of the matrix in the representation of the corresponding blow-up solution at the point $z \in S_u(a/2,k)$. Let also e_0 be any unit vector orthogonal to the kernel of M^0 (the matrix representation at the origin), and define

$$\Pi = \{x : \ x \cdot e_0 = 0\}.$$

By rotation we assume $\Pi = \{x_1 = 0\}$ and e_0 is directed in the positive x_1-axis. Define the closed truncated cone

$$K(z,r) := \{x : \ 2|x_1 - z_1| \geq |x - z|\} \cap B(z,r),$$

with vertex at the point $z \in S_u(a/2,k)$, and for small r. By Lemma 2.3 for r small enough the cone $K(0,r)$ intersects the free boundary only at the origin.
Now choose $z_0 \in S_u(a/2,k) \cap B(0,r/2)$. Then, by taking r even smaller if necessary, we can apply Lemma 2.3 – 2.4 to conclude that $K(z_0,r) \cap \partial\Omega = \{z_0\}$. Here the continuity of the kernel of M^{z_0} in $z_0 \in S_u(a/2,k)$ plays an essential role. It also follows that the projection

$$P: \ S_u(a/2,k) \cap B(0,r/2) \quad \to \quad \Pi,$$

is one-to-one. Let $S_u^*(a/2,k)$ denote the image of $S_u(a/2,k)$ under P. Then the inverse mapping

$$P^* : S_u^*(a/2,k) \quad \to \quad \mathbf{R},$$

is well defined and it is C^1-function over the set $S_u^*(a/2,k)$; since the tangent space on $S_u(a/2,k)$ exists and varies continuously (Lemma 2.4). Moreover the C^1-norm is uniform for the class, as Lemma 2.2 suggests.
Now by Withney's extension theorem we can extend P^* as a C^1-function (keeping the same uniform C^1-norm) into the entire Π. Also the graph of the extended function, denoted by Γ_{e_0}, is (uniformly) C^1 and it contains the set $S_u(a/2,k)$, locally near the origin, i.e. $S_u(a/2,k) \cap B(0,r) \subset \Gamma_{e_0}$, for r small enough. Since for every direction e, orthogonal to $\mathrm{Ker}(M^0)$, we can repeat this argument to find Γ_e with the above properties, and since there are $(n-k)$ such independent directions e_j $(j = 1, \cdots, n-k)$, we will have

$$S_u(a/2,k) \cap B(0,r) \subset \Gamma := \bigcap_{j=1}^{n-k} \Gamma_{e_j}$$

and that $\dim(\Gamma) = k$.

Proof of (IV). Let us suppose that there are two different blow-ups u^1 and u^2 of the same solution u with singularity at the origin. Let also $\{r_j\}$ and $\{t_j\}$ be the corresponding blow-up sequences, so that

$$u_{r_j} \to u^1, \qquad u_{t_j} \to u^2 \qquad \text{in } W^{2,p}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Assume moreover $r_{j+1} < t_{j+1} < r_j < t_j$, and that

$$c_1 := u^1(x^0) < u^2(x^0) =: c_2 \tag{3.2}$$

for some $x^0 \in \partial B_1$. We will prove that for all values $c \in (c_1, c_2)$ there are blow-ups u^c such that $u^c(x^0) = c$. In particular we will have an infinite number of different blow-ups with the corresponding matrix A_c. Hence we will have an infinite number of matrices A_c satisfying the conditions of the remark preceding Lemma 2.2. But then according to the same remark, we must have a finite number of such matrices. Hence we should reach a contradiction. Now to complete the proof we will show that we have a blow-up u^c for each $c \in (c_1, c_2)$. So let us take $\epsilon > 0$ small such that $c \in (c_1 + 2\epsilon, c_2 - 2\epsilon)$. Then we may choose t_j and r_j small enough such that $u_{r_j}(x^0) < c_1 + \epsilon$ and $u_{t_j}(x^0) > c_2 - \epsilon$. Next we observe that the function

$$t \to \frac{u(tx^0)}{t^2},$$

is continuous for $t > 0$. Hence for each interval (r_j, t_j) this function takes all intermediate values between $c_1+\epsilon$, and $c_2-\epsilon$, provided j is large enough. In particular there exists $\tau_j \in (r_j, t_j)$ such that

$$c = u_{\tau_j}(x^0) = \frac{u(\tau_j x^0)}{\tau_j^2}.$$

Therefore the limit function $u^c(x)$ (after subtracting a convergence subsequence) will satisfy $c = u^c(x^0)$. This completes the proof of part (IV).

Proof of (V). The last assertion can be proven easily by scaling. The continuity of $D_{ij}u$ up to the regular boundary points are classical ; see e.g. [7] ; p. 175.
Next, let $x^j \to 0 \in S_u$ non-tangentially, i.e., $\mathrm{dist}(x^j, \partial\Omega(u)) \geq C|x^j|$ for some $C > 0$. Define

$$u_j(x) = \frac{u(|x^j|x)}{|x^j|^2}; \qquad \bar{x}^j = \frac{x^j}{|x^j|} \in \partial B_1.$$

Obviously $\mathrm{dist}(\bar{x}^j, \partial\Omega(u_j)) \geq C$. Consequently $B(\bar{x}^j, C) \subset \Omega(\bar{u}_j)$. Hence for some limit function in $C^2(B(\bar{x}^j, C/2))$, $u_j \to u_0$. In particular

$$D^2 u_j(\bar{x}^j) = D^2 u(x^j) \to D^2 u_0(x^0), \tag{3.3}$$

where $x^0 \in \partial B_1$ is the limit of $\bar{x}^j$. Now by part (IV) of this theorem, any blow-ups at the origin converge to the same limit function. Hence $u_0 = (x^t Ax)/2$ for some symmetric matrix A. Moreover A is independent of the blow-up, i.e., independent of the choice of x^j. This together with (3.3) gives that $D^2u(x^j) \to D^2((x^t Ax)/2)$ =fixed. The theorem is proved.

Резюме. В настоящей работе исследуется структура вырожденного множества в задаче со свободной границей $(\Delta u - f)u = 0$ в $B = B(0,1)$, где f липшицева, а $u \in W^{2,p}(B)$, $p > n$. Свободная граница $\partial\Omega$, представленная через $\partial\{\Delta u = f\}$, возникает в некоторых задачах в геофизике и обратных задачах теории потенциала.

REFERENCES

1. L. A. Caffarelli, "The regularity of free boundaries in higher dimension", Acta Math., vol. 139, pp. 155 – 184, 1977.
2. L. A. Caffarelli, "Compactness methods in free boundary problems", Comm. P.D.E., vol. 5, pp. 427 – 448, 1980.
3. L. A. Caffarelli, "The obstacle problem revisited", J. Fourier Anal. Appl., vol. 4, no. 4 - 5, pp. 383 – 402, 1998.
4. L.A. Caffarelli, D. Jerison, C. E. Kenig, "Some new monotonicity theorems with applications to free boundary problems", Ann. of Math. (2), vol. 155, no. 2, pp. 369 – 404, 2002.
5. L. A. Caffarelli, N. Riviére, Smoothness and analyticity of free boundaries", Ann. Scula Norm. Sup. Pisa, vol. 3, pp. 131 – 152, 1976.
6. L. A. Caffarelli, L. Karp, H. Shahgholian, "Regularity of a free boundary with application to the Pompeiu problem", Ann. Math. (2), vol. 151, pp. 269 – 292, 2000.
7. A. Friedman, Variational Principles and Free Boundary Problems, Wiley, 1982.
8. D. Kinderlehrer and L. Nirenberg, "Regularity in free boundary value problems", Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, vol. 4, pp. 373 – 391, 1977.
9. V. Isakov, "Inverse theorems on the smoothness of potentials" [in Russian], Differential Equations, vol. 11, pp. 50 – 57, 1976.
10. M. Sakai, "Regularity of a free boundary in two dimensions", Ann. Scula Norm. Sup. Pisa, ser. 4, vol. 20, pp. 323 – 339, 1993.
11. M. Sakai, "Regularity of a boundary having a Schwarz function", Acta Mat., vol. 166, pp. 263 – 297, 1991.
12. D. G. Schaeffer, "Some examples of singularities in a free boundary", Ann. Scula Norm. Sup. Pisa, vol. 4, pp. 133 – 144, 1977.
13. E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability of Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

Поступила 12 ноября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 59-68

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян

Институт Математики НАН Армении
E-mails : nahapet@instmath.sci.am, arpet@instmath.sci.am

Резюме. В статье изучаются случайные поля на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, допускающие мартингал-разностное свойство и оценивается скорость сходимости в центральной предельной теореме для таких полей.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Основными направлениями теории предельных теорем для мартингалов являются законы больших чисел, центральные и функциональные предельные теоремы, а также закон повторного логарифма (см., например, [1], [2]). Большой интерес привлекают также вопросы скорости сходимости в предельных теоремах (см. [3] – [5]). Следует отметить, что в особенности развита теория для классических одномерных мартингалов. Что касается многомерных мартингалов, то теории предельных теорем сравнимой с одномерной пока не построено, хотя имеется значительный задел ([6] – [16]). Главная трудность заключается в том, что при переходе в пространство теряется свойство полной упорядоченности.

В [17] авторы ввели понятие мартингал-разностных случайных полей и доказали ряд предельных теорем. Для таких полей в работе [18] был получен многомерный аналог известной предельной теоремы Биллингсли–Ибрагимова.

В данной работе рассматриваем задачу оценки скорости сходимости в полученных предельных теоремах. Результаты получены в рамках классических мартингальных условий, т.е. ограничения на моменты и на скорость сближения условных дисперсий компонент случайного поля с их безусловными дисперсиями.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^d$ - d-мерная ($d \geq 1$) целочисленная решётка и W - множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$: $W = \left\{V : V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\right\}$. Здесь и далее $|\cdot|$ означает число точек в конечном множестве.

Определение 1. Скажем, что семейство случайных величин S_V, $V \in W$ образует мартингал, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности возрастающих множеств $V_n \in W$, $V_n \subset V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$E\left(S_{V_n} / S_{V_1}, S_{V_2}, \ldots, S_{V_{n-1}}\right) = S_{V_{n-1}} \quad \text{п. н..} \tag{2.1}$$

Определение 2. Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ называется мартингал-разностным, если для любого $t \in \mathbb{Z}^d$, $E|\xi_t| < \infty$ и $V \in W$ выполнено равенство

$$E\left(\xi_t / \xi_s,\ s \in V\right) = 0 \quad \text{п.н. при} \quad t \notin V.$$

Нетрудно видеть, что если ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ является мартингал-разностным полем, то совокупность $S_V = \sum\limits_{t \in V} \xi_t$, $V \in W$ образует мартингал.

Пусть $\mathcal{F}_V = \sigma\left(\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^d \setminus V\right)$ - σ-алгебра, порождённая семейством случайных величин ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d \setminus V$ и I_n - последовательность вложенных d-мерных кубов с длиной стороны n :

$$I_n = \{\beta_1 n, \beta_2 n, \ldots, \beta_d n\}, \quad \beta_i \in \{-1, 1\}, \ i = 1, 2, \ldots, d, \ n = 1, 2, \ldots$$

Обозначим $\Delta_n = I_n \setminus I_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $I_0 = \emptyset$ и пусть $\theta(x) = exp\, ix - 1 - ix$, $x \in R^1$, где i - мнимая единица.

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ - мартингал-разностное случайное поле. Из условий*

a) $\sup\limits_t E\xi_t^4 < \infty$ *и* $\inf\limits_t E\xi_t^2 > 0$,

b) $\sup\limits_n \sup\limits_{s \in \Delta_n} n^{3/2} \left\|E\left(\xi_s^2 / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2\right\|_1 < \infty$,

c) $\sup\limits_n \sup\limits_{s \in \Delta_n} n^{5/2} \left\|E\left(\theta(\xi_s) / \mathcal{F}_s\right) - E\theta(\xi_s)\right\|_4 < \infty$

вытекает

$$\sup_n n^{1/2} \sup_{x \in R^1} \left| P\left(D^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{s \in I_n} \xi_s\right) \sum_{s \in I_n} \xi_s < x\right) - \Phi(x)\right| < \infty,$$

где D – символ дисперсии, Φ – стандартная нормальная функция распределения, а $\|\cdot\|_p$ означает L_p-норму.

Теорема 2. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ – мартингал-разностное случайное поле такое, что $\inf_t E\xi_t^2 > 0$ и $E|\xi_t|^q < \infty$ для $q > \frac{6d+1}{3d-1}$. Пусть числа $\beta = \beta(d)$, $\alpha = \alpha(d)$ и целое число p удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{6} \le \beta \le \frac{(q-2)d+1}{2(q+4)}, \quad \alpha = \beta(p+4) - \left(\frac{p}{2} - 1\right)d - \frac{1}{2}, \quad 1 < p < q.$$

Тогда если при всех p

$$\sup_n \sup_{s\in\Delta_n} n^\alpha \left\| E\left(\xi_s^p / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^p \right\|_4 < \infty, \tag{2.2}$$

то

$$\sup_n n^\beta \sup_{x\in R^1} \left| P\left(D^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s\in I_n} \xi_s\right) \sum_{s\in I_n} \xi_s < x\right) - \Phi(x) \right| < \infty.$$

Данная теорема носит весьма общий характер и имеет многочисленные следствия. В качестве примера приведём следующий результат.

Теорема 3. *Пусть ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ – мартингал-разностное случайное поле такое, что $\inf_t E\xi_t^2 > 0$ и $E\xi_t^4 < \infty$. Если выполнены условия*

$$\sup_n \sup_{s\in\Delta_n} n^{0,4d+0,1} \left\| E\left(\xi_s^2 / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2 \right\|_4 < \infty, \tag{2.3}$$

$$\sup_n \sup_{s\in\Delta_n} n^{-\frac{d}{30}+0,2} \left\| E\left(\xi_s^3 / \mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^3 \right\|_4 < \infty, \tag{2.4}$$

то

$$\sup_n n^{\frac{1}{15}d+0,1} \sup_{x\in R^1} \left| P\left(D^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s\in I_n} \xi_s\right) \sum_{s\in I_n} \xi_s < x\right) - \Phi(x) \right| < \infty.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство Теоремы 1. Для фиксированного n обозначим $\eta_{\Delta_j} = n^{-\frac{d}{2}} \sum_{s\in\Delta_j} \xi_s$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $(\eta_{\Delta_0 = 0})$ и

$$X_m^{(n)} = E \prod_{s\in I_m} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{s\in I_m} E\,exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что

$$X_m^{(n)} = E \prod_{j=1}^m \prod_{s\in\Delta_j} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{j=1}^m \prod_{s\in\Delta_j} E\,exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Полагая

$$Y_m^{(n)} = E\prod_{j=1}^{m} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) - \prod_{j=1}^{m} E\,exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Z_m^{(n)} = \prod_{j=1}^{m} E\prod_{s\in\Delta_j} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{j=1}^{m}\prod_{s\in\Delta_j} E\,exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right); \quad m = 1, 2, \ldots, n,$$

и учитывая $E\left(\eta_{\Delta_m}\prod\limits_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right) = E\left(E\left(\eta_{\Delta_m}/\mathcal{F}_{\Delta_m}\right)\prod\limits_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right) = 0,$
получим $Y_m^{(n)} =$

$$= E\left[\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] - E\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1\right)\prod_{j=1}^{m-1} E\,exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) +$$

$$+Y_{m-1}^{(n)} = E\left[\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] -$$

$$-E\left(e^{it\eta_{\Delta_m}} - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} E\,e^{it\eta_{\Delta_j}} - \frac{t^2}{2}2E\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} e^{it\eta_{\Delta_j}} +$$

$$+\frac{t^2}{2}E\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) + Y_{m-1}^{(n)}.$$

Обозначая

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left[\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] -$$

$$-E\left(exp\left(it\eta_{\Delta_m}\right) - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)\prod_{j=1}^{m-1} E\,exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right),$$

и полагая

$$\Omega_m^{(n)} = -\frac{t^2}{2}\left(E\left[\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right] - E\eta_{\Delta_m}^2\prod_{j=1}^{m-1} E\,exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right)\right),$$

получаем $Y_m^{(n)} = \Lambda_m^{(n)} + \Omega_m^{(n)} + Y_{m-1}^{(n)}\left(1 - \frac{t^2 E\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)$. Отсюда следует, что

$$Y_n^{(n)} = \sum_{m=1}^{n}\left(\Lambda_m^{(n)} + \Omega_m^{(n)}\right)\left(1 - \frac{t^2 E\eta_{\Delta_m}^2}{2}\right)^{n-m}.$$

Так как для больших n $E\eta^2_{\Delta_m} \le \frac{C}{n}$, то для всех t, удовлетворяющих условию $0 < t < n^{1/2}$, имеем $\left(1 - \frac{t^2}{2} E\eta^2_{\Delta_m}\right)^{n-m} < 1$. Следовательно,

$$\left|Y_n^{(n)}\right| \le \left|\sum_{m=1}^{n} \Lambda_m^{(n)}\right| + \left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right|.$$

Далее, имеем

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right| = \frac{t^2}{2}\left|\sum_{m=1}^{n} E\left\{\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) - \left(\eta^2_{\Delta_m} - E\eta^2_{\Delta_m}\right)\right\}\right| =$$

$$= \frac{t^2}{2n^d}\left|\sum_{m=1}^{n} E\left\{\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \sum_{t,s\in\Delta_m} \left(\xi_t\xi_s - E\xi_t\xi_s\right)\right\}\right| =$$

$$= \frac{t^2}{2n^d}\left|\sum_{m=1}^{n} E\left\{\prod_{j=1}^{m-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \sum_{s\in\Delta_m} \left(E\left(\xi_s^2/\,\mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2\right)\right\}\right| \le$$

$$\le \frac{t^2}{2n^d}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s\in\Delta_m} E\left|E\left(\xi_s^2/\,\mathcal{F}_s\right) - E\xi_s^2\right|,$$

откуда следует

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right| \le \frac{C_1 t^2}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.1}$$

Для оценки $\left|\sum\limits_{m=1}^{n} \Lambda_m^{(n)}\right|$ положим $Y_m^{(n)} = e^{it\eta_{\Delta_m}} - 1 - it\eta_{\Delta_m} + \frac{t^2\eta^2_{\Delta_m}}{2}$, $\mathcal{E}_j^{(n)} = exp^{it\eta_{\Delta_m}}$. Тогда получаем

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-1}\mathcal{E}_j^{(n)} - \prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)} E\,\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\} +$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)} E\,\mathcal{E}_{m-1}^{(n)} - \prod_{j=1}^{m-1}\mathcal{E}_j^{(n)}\right]\right\} =$$

$$= E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-1}^{(n)} - E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\} +$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)} - \prod_{j=1}^{m-2}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right\} =$$

$$= E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-3}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\prod_{j=1}^{m-3}\mathcal{E}_j^{(n)}-\prod_{j=1}^{m-3}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right\}.$$

Следовательно,

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-2}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right]\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-3}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}\right\}+$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{m-4}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_{m-3}^{(n)}-E\mathcal{E}_{m-3}^{(n)}\right]E\mathcal{E}_{m-1}^{(n)}E\mathcal{E}_{m-2}^{(n)}\right\}+\cdots+ \tag{3.2}$$

$$+E\left\{\gamma_m^{(n)}\mathcal{E}_1^{(n)}\left[\mathcal{E}_2^{(n)}-E\mathcal{E}_2^{(n)}\right]\prod_{j=3}^{m-1}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right\}+E\left\{\gamma_m^{(n)}\left[\mathcal{E}_1^{(n)}-E\mathcal{E}_1^{(n)}\right]\prod_{j=2}^{m-1}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}E\left\{\gamma_m^{(n)}\prod_{j=1}^{k-1}\mathcal{E}_j^{(n)}\left[\mathcal{E}_k^{(n)}-E\mathcal{E}_k^{(n)}\right]\prod_{j=k+1}^{m-1}E\mathcal{E}_j^{(n)}\right\}.$$

Полагая $\Delta_k = \left\{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \ldots, s_{|\Delta_k|}^{(k)}\right\}$ и обозначая $\mathcal{E}_i^{(n,k)} = exp\left(\frac{it\xi_{s_i^{(k)}}}{\sqrt{n^d}}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, |\Delta_k|$, получаем

$$e^{it\eta_{\Delta_k}} - Ee^{it\eta_{\Delta_k}} = \prod_{i=1}^{|\Delta_k|}\mathcal{E}_i^{(n,k)} - \prod_{i=1}^{|\Delta_k|}E\mathcal{E}_i^{(n,k)} - E\left(\prod_{i=1}^{|\Delta_k|}\mathcal{E}_i^{(n,k)} - \prod_{i=1}^{|\Delta_k|}E\mathcal{E}_i^{(n,k)}\right). \tag{3.3}$$

Используя тождество $\prod\limits_{j=1}^{n} a_i - \prod\limits_{j=1}^{n} b_j = \sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{l=1}^{j-1} b_l \prod\limits_{l=j+1}^{n} a_l(a_j - b_j)$; $a_j, b_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, представим (3.3) в виде

$$exp\,(it\eta_{\Delta_k}) - Eexp\,(it\eta_{\Delta_k}) = \sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\prod_{i=1}^{l-1}E\mathcal{E}_i^{(n,k)}\left[\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|}\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right) -\right.$$

$$\left. - E\left\{\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|}E\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right\}\right].$$

Подставляя последнее выражение в (3.2), получаем

$$\Lambda_m^{(n)} = E\left\{\gamma_m^{(n)} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \prod_{j=1}^{k-1} exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \prod_{j=k+1}^{m-1} E exp\left(it\eta_{\Delta_j}\right) \prod_{i=1}^{l-1} E\mathcal{E}_i^{(n,k)} \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|} E\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right) - E\left[\prod_{j=l+1}^{|\Delta_k|} E\mathcal{E}_j^{(n,k)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right]\right\}\right\}.$$

Отсюда следует

$$\left|\Lambda_m^{(n)}\right| \le \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} E\left|\gamma_m^{(n)}\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left|\gamma_m^{(n)}\right| \left|E\left(\mathcal{E}_l^{(n,k)} - E\mathcal{E}_l^{(n,k)}\right)\right| = T_1 + T_2. \tag{3.4}$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части (3.4), воспользуемся неравенством $\left|\gamma_m^{(n)}\right| \le \frac{t^3}{6}\left|\eta_{\Delta_m}\right|^3$ и неравенством Гёлдера. Имеем

$$T_1 \le \frac{t^3}{6} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left(E\left|\eta_{\Delta_m}\right|^4\right)^{\frac{3}{4}} \left\|E\left(\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}} \middle/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \frac{t^2}{2n^d} \le$$

$$\le \frac{C_1 t^5}{n^{\frac{5}{2}} d} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left(\sum_{i,j=1}^{|\Delta_k|} E\xi^2_{s_i^{(m)}}\xi^2_{s_j^{(m)}}\right)^{\frac{3}{4}} \left\|E\left(\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}} \middle/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \le$$

$$\le \frac{C_1 t^5}{n^{\frac{5}{2}} d} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} \left(|\Delta_m|\,|\Delta_m|\right)^{\frac{3}{4}} \left\|E\left(\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}} \middle/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta^{(2)}\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \le$$

$$\le \frac{C_1 t^5}{n^{\frac{5}{2}} d} m^{\frac{3}{2}(d-1)} \sum_{k=1}^{m-1} |\Delta_k|\, k^{-\frac{5}{2}} \le C_2 t^5 \frac{m^{\frac{5d}{2}-4}}{n^{\frac{5d}{2}}} \tag{3.5}$$

Теперь оценим T_2. Оно не превосходит T_1 и оценивается посредством величины правой части (3.5). Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{n} \left|\Lambda_m^{(n)}\right| \le \frac{C_3 t^5}{n^3}. \tag{3.6}$$

Из (3.1) и (3.6) следует, что

$$|Y_n^n| \le \frac{C_1 t^2}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_3 t^5}{n^3}. \tag{3.7}$$

Далее, представим $Z_m^{(n)}$ в виде

$$Z_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \left(E \prod_{s\in\Delta_k} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{s\in\Delta_k} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right)\right) \times$$

$$\times \prod_{l=k+1}^{m} E\left[\prod_{s\in\Delta_l} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right)\right] \prod_{l=1}^{k-1} \prod_{s\in\Delta_l} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right).$$

Отсюда имеем

$$\left|Z_n^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{m} E\left|\prod_{s\in\Delta_k} exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right) - \prod_{s\in\Delta_k} E\, exp\left(\frac{it\xi_s}{\sqrt{n^d}}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{|\Delta_k|} (|\Delta_m| |\Delta_m|)^{\frac{3}{4}} \left\| E\left(\theta\xi^2_{s_l^{(k)}} \Big/ \mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right) - E\theta\xi^2_{s_l^{(k)}}\right\|_4 \le \frac{C_4 t^2}{n^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$\left|X_n^{(n)}\right| \le \frac{C_5 t^2}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_3 t^5}{n^3}.$$

В заключение, применяя неравенство Бэрри-Эссена, для всех $N > 0$ имеем

$$\sup_x \left| P\left\{ \left[D\left(\sum_{s\in I_n} \xi_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{s\in I_n} \xi_s < x \right\} - \Phi(x)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\int_0^N \left|\frac{X_n^{(n)}(t)}{t}\right| dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\, N} \le \frac{C_6 N^2}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{C_7 N^5}{n^3} + \frac{C_8}{N}.$$

Полагая $N = n^{\frac{1}{2}}$, получим

$$\sup_x \left| P\left\{ \left[D\left(\sum_{s\in I_n} \xi_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{s\in I_n} \xi_s < x \right\} - \Phi(x)\right| \le \frac{C_9}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Аналогично доказательству Теоремы 1. Нужно только воспользоваться условием (2.2) вместо оценки (3.1). Тогда получим

$$\left|\sum_{m=1}^{n} \Omega_m^{(n)}\right| \le \frac{C_1 t^2}{n^{\alpha_2(d)}} = \frac{C_1 t^2}{n^{6\beta(d)-\frac{1}{2}}}.$$

Теперь, если воспользоваться (3.6) будем иметь $\sum\limits_{m=1}^{n}\left|\Lambda_m^{(n)}\right| \le$

$$\le \frac{t^3}{3}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\sum_{p=2}^{q-1}\left(E|\eta_{\Delta_m}|^4\right)^{\frac{3}{4}}\left\|E\left(\xi^p\xi^p_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\xi^p\xi^p_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_pt^p}{n^{\frac{pd}{4}}}+$$

$$+\frac{t^3}{3}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\left(E|\eta_{\Delta_m}|^4\right)^{\frac{3}{4}}\left\|E\left(\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_qt^q}{n^{\frac{qd}{2}}}\le$$

$$\le\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^{p+3}}{n^{\alpha_p(d)+\left(\frac{p}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}+\frac{C_qt^{q+3}}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}=\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^{p+3}}{n^{\beta(d)(p+4)}}+\frac{C_qt^{q+3}}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно,

$$|Y_n^n|\le\frac{C_1t^2}{n^{6\beta(d)-\frac{1}{2}}}+\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^{p+3}}{n^{\beta(d)(p+4)}}+\frac{C_qt^{q+3}}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}},\tag{3.9}$$

где $C_1,\dots,C_q$ – постоянные. Повторяя рассуждения доказательства Теоремы 1, получим

$$|Z_n^n|\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\sum_{p=2}^{q-1}\left\|E\left(\xi^p_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\xi^p_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_pt^p}{n^{\frac{pd}{2}}}+$$

$$+\frac{t^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{|\Delta_k|}\left\|E\left(\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\Big/\mathcal{F}_{s_l^{(k)}}\right)-E\theta\xi^q_{s_l^{(k)}}\right\|_4\frac{C_qt^q}{n^{\frac{qd}{2}}}\le$$

$$\le\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^p}{n^{\alpha_p(d)+\left(\frac{p}{2}-1\right)d}}+\frac{C_qt^q}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d}}=\sum_{p=2}^{q-1}\frac{C_pt^p}{n^{\beta(d)(p+4)-\frac{1}{2}}}+\frac{C_qt^q}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d}}.\tag{3.10}$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$|X_n^n|\le C_1\left[\frac{t^2}{n^{6\beta(d)-\frac{1}{2}}}+\sum_{p=2}^{q-1}\frac{t^p}{n^{\beta(d)(p+4)}}\left(t^3+n^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{t^q}{n^{\left(\frac{q}{2}-1\right)d+\frac{1}{2}}}\left(t^3+n^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Применив неравенство Бэрри-Эссена при $N=n^{\beta(d)}$ и учитывая выражения для β и α, получаем

$$\sup_x\left|P\left\{\left[D\left(\sum_{s\in I_n}\xi_s\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{s\in I_n}\xi_s<x\right\}-\Phi(x)\right|\le C_2n^{-\beta(d)}$$

Этим завершается доказательство Теоремы 2.

Доказательство Теоремы 3 следует из Теоремы 2 при $q=4$.

Abstract. The paper studies random fields on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d\ge 1$ that possess martingale-difference property and estimates convergence rate in the central limit theorem for such fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Hall, C. C. Heyde, "Martingale limit theory and its applications", NY, Academic Press, 1980.
2. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория Мартингалов, Москва, Наука, 1986.
3. A. A. Ibragimov, "A central limit theorem for a class of dependent random variables", Theory Probab. Appl., vol. 8, pp. 83 – 89, 1963.
4. Y. Kato, "Convergence rates in central limit theorem for martingale-differences", Bulletin of Math. Statist., vol. 18, pp. 1 – 9, 1979.
5. E. Bolthansen, "Exact convergence rates in some martingale central limit theorems", Annal. of Prob., vol. 10, no. 3, pp. 672 – 688, 1982.
6. K. Krikeberg, "Convergence of martjngales with directed index set", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 83, pp. 313 – 337, 1956.
7. Y. S. Chow, "Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, pp. 254 – 286, 1960.
8. R. Cairoly, J. Walsh, "Stochastic integrals in the plane", Acta Math., vol. 134, pp. 111 – 183, 1975.
9. F. Comets, M. Janzura, "A central limit theorem for conditionally centered random fields with an application to markov fields", J. Qppl. Prob., vol. 35, pp. 608 – 621, 1998.
10. X. Guyon, H. R. Künsch, "Asymptotic comparison of estimators in the Ising model", Lecture Notes in Statistics, vol. 74, Springer, Berlin, pp. 177 – 198, 1992.
11. M. Yunzury, P. Lachout, "A central limit theorem for stationary random fields", Math. Meth. Statist., vol. 4, pp. 463 – 472, 1995.
12. J. L. Jensen, H. R.Künsch, "On asymptotic normality of pseudo likelihood estimates for pairwise interaction processes", Ann. Inst. Statist. Math., vol. 46, pp. 475 – 486, 1994.
13. A. Dvoretsky, "Asymptotic normality for sums of dependent random variables", Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist., Probability - Berkeley : Univ. of California Press., pp. 513 – 535, 1972.
14. T. C. Brown, "Martingale central limit theorems", Ann. Math. Statist., vol. 42, no. 1, pp. 59 – 66, 1971.
15. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Limit theorems for martingale-difference random fields", Jour. Contemp. Math. Analysis, vol. 30, no. 6, pp. 2–17, 1995.
16. Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Центральная предельная теорема для мартингалов, ассоциированных с последовательностями возрастающих множеств", ДАН АН Арм.ССР, том 85, № 1, стр. 12 – 15, 1987.
17. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-Difference Gibbs Random Fields and Central Limit Theorem", Ann. Acad., Sci., Fennicae, Ser. A. I. Math., vol. 97, pp. 105 – 110, 1992.
18. B. S. Nahapetian, "Billingsley - Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, ser. I, pp. 1539 – 1544, 1995.

Поступила 12 декабря 2003

Известия НАН Армении. Математика, 39, № 2, 2004, 69–82

НЕРЕШЁННЫЕ ЗАДАЧИ

С 30 сентября по 7 октября 2003 года в Цахкадзоре (Армения) состоялась международная конференция "МАТЕМАТИКА в АРМЕНИИ : Достижения и перспективы". Конференция завершилась круглым столом, посвящённым обсуждением нерешённых проблем. Ниже представлены некоторые из нерешённых проблем, обсуждённых за круглым столом.

1. A QUESTION ON ERGODIC MEASURE PRESERVING TRANSFORMATIONS DEFINED ON THE INFINITE MEASURE SPACE

by A. Hajian (Boston, USA)

Since ergodic theory was not among the topics covered at this conference, allow me to present a few definitions needed for my question, references will not be mentioned. Let $(X, \mathcal{B}, m)$ be a σ-finite Lebesgue measure space. By a *measurable transformation* T on $(X, \mathcal{B}, m)$ I mean a 1-1 map of X onto itself, such that $A \in \mathcal{B} \iff TA \in \mathcal{B}$. A measurable transformation T on $(X, \mathcal{B}, m)$ is *ergodic* if $TA = A \implies m(A) = 0$ or $m(X - A) = 0$, and it is *measure preserving*, or *MP* for short, if $m(TA) = m(A)$ for all $A \in \mathcal{B}$. If one prefers, whenever I mention a finite or infinite measure space $(X, \mathcal{B}, m)$ one may think of the Lebesgue measure space of the unit interval with $m(X) = 1$ or the Lebesgue measure space of the whole real line with $m(X) = \infty$, respectively.

There are many examples of ergodic MP transformations defined on a finite measure space in the literature, and the classification of such transformations is well developed. Examples of ergodic MP transformations defined on an infinite measure space also exist. However, they are more complicated to construct, and the techniques used in their classification are quite different from the ones used in a finite measure space.

Birkhoff's Pointwise Ergodic Theorem : Let T be a MP transformation defined on the measure space $(X, \mathcal{B}, m)$ and let $f \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$. Then,

$$f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

exists a.e., $f^* \in L^1(X, \mathcal{B}, m)$, $f^*(Tx) = f^*(x)$ a.e., and in case $m(X) = 1$,

$$\int_X f^*(x)\, dm(x) = \int_X f(x)\, dm(x).$$

Consider the MP transformation T defined on the infinite measure space $(X, \mathcal{B}, m)$. Let us define a sequence of integers $\{n_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ to be a *dissipative sequence* for the transformation T if $m(A) < \infty$ implies for almost all $x \in X$, $T^{n_i}x \in A$ for finitely many i only. The following property is true :

(D) *Every ergodic MP transformation defined on an infinite measure space admits dissipative sequences.*

The existence of dissipative sequences for ergodic MP transformations defined on an infinite measure space was not suspected until recently by mathematicians working in the field. I mention another property yet, which follows from the Pointwise Ergodic Theorem.

(B) *Let T be an ergodic MP transformation defined on the infinite measure space $(X, \mathcal{B}, m)$. Let $m(A) < \infty$, $m(B) < \infty$ and $\epsilon > 0$. Then there exists an integer $n > 0$ such that $m(T^n A \cap B) < \epsilon$.*

It is possible to prove (D) using the property (B). Both appear to be basic properties shared by all ergodic MP transformations defined on an infinite measure space, yet they eluded mathematicians working in the field for more than thirty years following the origins of ergodic theory in the early 1930's.

I would like to see a direct proof of either property (D) or property (B) from the definitions ; one that does not invoke the full force of the Pointwise Ergodic Theorem.

I feel that this may shed some light on our understanding the nature of ergodic MP transformations defined on an infinite measure space. It seems to me that the mathematicians who have been working in ergodic theory of finite measure spaces, when they consider ergodic MP transformations defined on an infinite measure space, somehow get influenced not to accept property (B) as natural. In this regard I mention the beautifully written book by Eberhard Hopf ; Ergodentheorie, Berlin, 1937.

2. DIVISIBILITY PROBLEM FOR ONE RELATOR MONOIDS

by S. I. Adian (Moscow, Russia)

We consider monoids presented by one defining relation in 2 generators :

$$M = \langle a, b;\ aU = bV \rangle . \tag{1}$$

Let $A_1 = aU$ and $A_2 = bV$. We say that a word X is *left side divisible* by Y in M if there exists a word Z such that $X = YZ$ in M.

The left side *divisibility problem* for M : to find an algorithm that tells for any two words X and Y, if X is left side divisible by Y in M or not ?

The following theorem was proved in [1] - [3].

Theorem 1. The word problem for any 1-relation monoid can be reduced to the left side divisibility problem for monoids M presented in 2 generators by 1 defining relation of the form $aU = bV$. For the solution of this problem it suffices to find an algorithm that for any word aW (or for any word bW) tells if the word is left side divisible in M by b (accordingly by a) or not.

The algorithm A was introduced in [2] for more general case of monoids presented by any cycle-free system of relations. Here we shall apply this algorithm to the case of monoids M. The algorithm A was used in several papers for solution of the left side divisibility problem for monoids M under some additional conditions.

To apply this algorithm one should find another algorithm B that decides for any word aW does the algorithm A terminate or not when we apply it to aW. For a given word aW the algorithm A finds a uniquely defined *prefix decomposition* which either is of the form

$$aW = P_1 P_2 \dots P_k P_{k+1}, \tag{2}$$

where each P_i is the maximal nonempty, proper common prefix of the word $P_i P_{i+1} \dots P_{k+1}$ and the appropriate relator aU or bV, or of the form

$$aW = P_1 P_2 \dots P_k A_{j_k} W_{k+1}, \tag{3}$$

where the prefixes P_i are defined in a similar way, but the segment A_{j_k} is one of the relators of the monoid M. We call the segment A_{j_k} *the head* of the decomposition (3).

Let us describe in detail how our algorithm A works. Suppose we have an initial word aW. Consider the Maximal Common Prefix of two words aW and A_1 and denote it by

$$P_1 = MCP(aW, A_1). \tag{4}$$

We have $aW = P_1 W_1$ and $aU = P_1 U_1$ for some W_1 and U_1. Clearly P_1 is not empty. We consider the following two cases.

Case 1. If U_1 is empty, then $aW = aUW_1$. So we have a prefix decomposition of the form (3) for $k = 0$.

In this case the algorithm A replaces in aW the segment aU by bV. So we obtain $aW = bVW_1$ in M. Hence aW is left side divisible by b in M.

Case 2. Let U_1 be nonempty. Then P_1 is a proper prefix of aU.

If W_1 is empty then aW is a proper segment of the relator aU. It is easy to prove that the proper segment P_1 of aU is not divisible by b in M. Hence we can assume

that U_1 and W_1 both are nonempty. It follows from (4) that in this case they have different initial letters a and b.
In this case to prolong the prefix P_1 of aU in $P_1 W_1$ to the right side we should divide W_1 by b, if it starts by a or divide W_1`by a, if it starts by b. So the situation is similar to the initial one.
In a similar way we consider the nonempty word $P_2 = MCP(W_1, A_j)$, where A_{j_1} is the relator of M, which has an initial letter in common with W_1. Suppose $W_1 = P_2 W_2$ and $A_j = P_2 U_2$. Then again we consider two cases.
Case 2.1. If U_2 is empty, then $W_1 = A_j W_1$.
In this case we have the following prefix decomposition of the word aW :

$$aW = P_1 A_{j_1} W_2, \tag{5}$$

where A_{j_1} is called *the head* of (5).
Case 2.2. Let U_2 be nonempty. In this case if W_2 is empty then $aW = P_1 P_2$, where P_2 is a proper segment of the relator A_{j_1}. Hence for aW we obtain a prefix decomposition of the form (2). It is easy to prove that the word $P_1 P_2$ is not divisible by b in M.
Hence we can assume that both U_2 and W_2 are nonempty. It follows from (4) that in this case they have different initial letters a and b. To prolong the prefix P_2 of A_{j_1} in $P_1 P_2 W_2$ in this case we should divide W_2 by b, if it starts by a, or divide W_2 by a, if it starts by b. So the situation again is similar to the initial one.
Hence we can consider the nonempty word $P_3 = MCP(W_2, A_{j_2})$, where A_{j_2} is one of the relators of M, which has a common initial letter with the word W_2, and so on. The length of the word W_i decreases, so after a finite number of steps we either find some prefix decomposition of the form (3) with the head A_{j_k}, or stop on some decomposition of the form (2).
It is easy to prove that if the decomposition of aW is of the form (2), then the word aW in M is not left side divisible by b.
If the decomposition is of the form (3) then the algorithm A replaces the head A_i in aW by another relator in (1) : aU should be replaced by bV or bV - by Ua. Hence we get one of the following elementary transformations in the monoid M :

$$aW = P_1 P_2 \dots P_k aU W_{k+1} \longmapsto P_1 P_2 \dots P_k bV W_{k+1} = W'$$

or

$$aW = P_1 P_2 \dots P_k bV W_{k+1} \longmapsto P_1 P_2 \dots P_k aU W_{k+1} = W'.$$

Clearly the result W' of this transformation is equal to aW in M. If the resulting word W' starts by the letter b (happens only if $k = 0$), then the algorithm A terminates by a positive answer. Otherwise the algorithm A repeats the same procedure with the word W'.

Theorem 2. ([2]) If the word aW is left side divisible by b in M, then the algorithm A(aW) terminates with positive result, and in this case we obtain the shortest proof of the left side divisibility of the word aW by b in M.

Conjecture 1. There exists an algorithm B that decides for any word aW, if the algorithm A(aW) terminates or not.

REFERENCES

1. S. I. Adian, "Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups" (in Russian), Proc. Steklov Inst. Math., vol. 85, 1966 [English version : American Mathematical Society, 1967].
2. S. I. Adian, "Word transformations in a semigroup that is given by a system of defining relations" (in Russian), Algebra i Logika, vol. 15, pp. 611 – 621, 1976 [English transl. : Algebra and Logic vol. 15, 1976].
3. S. I. Adian, G. U. Oganesian, "On the word and divisibility problems in semigroups with one defining relation" (in Russian), Mat. Zametki, vol. 41, pp. 412 – 421, 1987 [English transl. : Math. Notes, vol. 41, 1987].
4. S. I. Adian, V. G. Durnev, "Decision problems for groups and semigroups" (in Russian), Uspechi Mat. Nauk, vol. 55, no. 2, pp. 207 – 296, 2000.

3. SPHERICAL SYMMETRY FOR EXTREMAL SOLUTIONS OF FREE BOUNDARY PROBLEMS

by H. Shahgholian (Stockholm, Sweden)

Two well-known free boundary problems we present from an "extremal" point of view. Let $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ be a bounded domain of unit volume say, and $\lambda > 0$ to be a fixed constant.

The first problem we consider is the so-called Bernoulli free boundary problem, which prescribes a flow inside the region D,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{on} \quad \{u > 0\} \cap D, \\ u = 1 & \text{on} \quad \partial D, \\ |\nabla u| = \lambda & \text{on} \quad \Gamma, \end{cases}$$

where $\Gamma = \partial\{u > 0\} \cap D$ (see [1], [2].)

The second problem is the obstacle problem, describing the equilibrium position of a stretched membrane subject to a constant force and the zero obstacle $u \geq 0$,

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda \chi_{\{u>0\}} & \text{in} \quad D, \\ u = 1 & \text{on} \quad \partial D, \end{cases}$$

where χ stands for the characteristic function (see [4]).

For both problems one can show the existence of solution for larger values of λ. In the first problem the solution is not necessarily unique. For the second problem the solution is always unique.

Now for each domain D exists the smallest value for $\lambda > 0$ such that the free boundary $\Gamma_\lambda := \partial\{u_\lambda > 0\} \cap D$ is non-void. Here u_λ refers to solution for the parameter λ, in both problems.

Conjecture : Let $\lambda^* = \min\{\lambda : \Gamma_\lambda \neq \emptyset, |D| = 1\}$. *We conjecture that the extremal domain D^* must be a ball of appropriate radius.*

This conjecture for the first problem appeared for the first time in [3]. The conjecture for the second problem has not been considered earlier.

REFERENCES

1. A. Acker, "Uniqueness and monotonicity of solutions for the interior Bernoulli free boundary problem in the convex, n-dimensional case", Nonlinear Anal., vol. 13, no. 12, pp. 1409 – 1425, 1989.
2. H. W. Alt, L. A. Caffarelli, "Existence and regularity for a minimum problem with free boundary", J. Reine Angew. Math., vol. 325, pp. 105 – 144, 1981.
3. M. Flucher, M. Rumpf, "Bernoulli's free-boundary problem, qualitative theory and numerical approximation", J. Reine Angew. Math., vol. 486, pp. 165 – 204, 1997.
4. A. Friedman, Variational Principles and Free Boundary Problems, Wiley, New York, 1982.

4. A LIST OF PROBLEMS RELATED TO CONVERGENCE OF FOURIER SERIES

by M. Lacey (Atlanta, USA)

4.1. Almost everywhere convergence of Fourier series

The famous result of Carleson concerning the convergence of Fourier series has received a recent proof by Lacey and Thiele [8].

Theorem 1. For all $f \in L^2(\mathbb{T})$ one has

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|<N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{a.e.}$$

I would hesitate to say that the proof is easier, but many would agree that it is more conceptual. A recent survey [4] of the proof is far more leisurely than the condensed original reference [8], and comes with exercises.

The questions in the area of the pointwise convergence of Fourier series are rather challenging. In two and higher dimensions, one of the most outstanding problem in the convergence of Fourier series is :

Question 1. Is it the case that the maximal operator

$$\sup_{r>0}\left|\int_{|\xi|<r}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi\right|$$

maps $L^2(\mathbb{R}^2)$ into weak $L^2(\mathbb{R}^2)$?

In the known proofs of Carleson's theorem, the truncations of singular integrals play a distinguished role.

Question 2. Is it the case that the maximal operator

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\int_{|\xi|<1+2^{-k}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi\right|$$

maps $L^2(\mathbb{R}^2)$ into weak $L^2(\mathbb{R}^2)$?

It is conceivable that a positive answer here could lead to a proof of spherical convergence of Fourier series.

It is of course natural to consider the summation by a polygon, namely one replaces the unit ball above by the interior of a polygon. If the polygon has finitely many sides, a brief argument of C. Fefferman shows that the situation can be reduced to the one dimensional situation, and so there is a positive answer for all L^p, $1<p<\infty$.

It is of interest to find a positive result for an infinite-sided polygon. The natural first choice is the polygon, which has slope -2^j in the angle from $\pi 2^{-j-1}$ to $\pi 2^{-j}$. It is a fact due to Cordoba and R. Fefferman that the lacunary-sided polygon is a bounded L^p multiplier, for all $1<p<\infty$. That is the operator T_{lac} maps L^p into itself for $1<p<\infty$:

$$T_{\mathrm{lac}}f(x)=\int_{P_{\mathrm{lac}}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi.$$

This fact is in turn linked to the boundedness of the maximal function in a lacunary set of directions :

$$M_{\mathrm{lac}}f(x)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t>0}(2t)^{-1}\int_{-t}^{t}|f(x-u(1,2^{-k}))|\,du.$$

Note that this is an one-dimensional maximal function computed in a set of directions in the plane that, in a strong sense, is zero dimensional.

Conjecture 1. For $2\le p<\infty$, the maximal function

$$\sup_{t>0}\left|\int_{tP_{\mathrm{lac}}}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot x}\,d\xi\right|$$

maps $L^p(\mathbb{R}^2)$ into itself. Even a restricted version of this conjecture remains quite challenging.

Conjecture 2. For $2 \le p < \infty$, the maximal function

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \int_{(1+2^{-k})P_{lac}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi \right|$$

maps $L^p(\mathbb{R}^2)$ into itself.

Another question considers regular polygons with N sides : to find norm bounds on these two maximal operators, on L^2 say, that grow logarithmically in N.

Conjecture 3. For integers N, let P_N be the centrally symmetric polygon with N sides of equal length. Then for $4/3 \le p < 4$ there is a constant $k(p)$ such that

$$\sup_{t>0} \left| \int_{tP_N} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi \right|$$

maps $L^p(\mathbb{R}^2)$ into itself, with norm bounded by $\sim (\log N)^{k(p)}$.

The method of Fefferman applied to this polygon would give the norm bound of N for all $1 < p < \infty$. One would expect that at L^2, the bound would be much smaller of course. The logarithmic growth would be expected for the range of p's indicated above. The operator of Fourier restriction to the regular N polygon has a L^p norm that is dominated by logarithmic factors only for $4/3 < p < 4$.

Consider the partial summation operator given by

$$S_N f(x) = \int\int_{(-\infty,N)\times(-\infty,N^2)} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

One could replace N^2 by some other reasonably nice increasing function φ on $\mathbb{R}_+$. The argument by C. Fefferman proving pointwise convergence for finite-sided polygons also implies that $S_N f$ converges pointwise to f for $f \in L^2$, but not L^p, for $p \neq 2$. To carry out Fefferman's argument one must preform the Fourier projection on the region $\{(\xi_1,\xi_2) : |\xi_1| < \xi_2^2\}$, and by C. Fefferman's disc multiplier example, this is a bounded operator on L^p only if $p = 2$.

But this observation does not prevent the pointwise convergence result from being true for $p \neq 2$. Thus,

Conjecture 4 (see [8]). For $1 < p \neq 2 < \infty$ the maximal function $\sup_N |S_N f|$ maps L^p into itself.

4.2. Bilinear Hilbert transform

The canonical instance of the bilinear Hilbert transform is

$$H(f,g)(x) = \text{p.v.} \int f(x+y) g(x-y)\, \frac{dy}{y}$$

The analysis of this transform requires the techniques of Carleson theorem. See [9] – [12] for a proof of this theorem.

Theorem 2 (see [13]). For $1 < p, q \leq \infty$, if $0 < 1/r = 1/p + 1/q < 3/2$, then

$$\|H(f,g)\|_r \sim \|f\|_p \|g\|_q.$$

There are some puzzling aspects of the theory that have not as of yet been resolved. For instance, what happens for $0 < r < 2/3$ in Theorem 2?

Conjecture 5. The bilinear Hilbert transform is unbounded on $L^p \times L^p$ for $1 < p < 4/3$.

The method developed with Thiele fails in this range. The point is that in the positive direction, we expand the bilinear Hilbert transform as an unconditionally convergent series. If the target space is L^r with $0 < r < 2/3$, we can show that the series is no longer unconditional. The relevant example is published in [5].

The case of the trilinear Hilbert transform is equally puzzling. Consider now

$$H_\alpha(f,g,h)(x) = \text{p.v.} \int f(x+y)g(x-y)h(x-\alpha y)\,\frac{dy}{y}.$$

We have inserted a shift parameter α into this formula. We are mostly interested in $\alpha \neq \{\pm 1\}$. We can show that the series that is suggested by the bilinear Hilbert transform is *not* unconditionally convergent.

Conjecture 6. For some irrational α, $H_\alpha(f,g,h)$ is unbounded on $L^3 \times L^3 \times L^3$.

This would still be interesting if one replaced the Hilbert transform by some other nice singular integral of one's choosing.

Theorem 3 (C. Thiele). Consider the elementary integral operator

$$I_\alpha(f,g,h)(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y)g(x-y)h(x-\alpha y)\,dy.$$

There is an irrational α so that this operator is unbounded on $L^p \times L^p \times L^p$ for $1 < p < 3/2$.

The bilinear version of this integral operator is very well behaved, so that I_α will have the correct behavior as soon as the target space is L^r for $r > 1$, where one can use Holder's inequality. This kind of counterexample cannot arise if α is rational (C. Thiele).

REFERENCES

1. S-Y. A. Chang, "Carleson measure on the bi-disc", Ann. of Math. (2), vol. 109, no. 3, pp. 613 – 620, 1979.

2. S-Y. A. Chang, R. Fefferman, "Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains", Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), vol. 12, no. 1, pp. 1 – 43, 1985.
3. S-Y. A. Chang, R. Fefferman, "A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc", Ann. of Math. (2), vol. 112, no. 1, pp. 179 – 201, 1980.
4. M. T. Lacey, "Carleson's Theorem : Proof, Complements, Variations", 2003.
5. M. T. Lacey, "The bilinear maximal functions map into L^p for $2/3 < p \leq 1$", Annals of Mathematics, Series 2, vol. 151, no. 1, pp. 35 – 57, 2000.
6. M. T. Lacey, X. Li, "Maximal theorems for directional Hilbert transform on the plane", Preprint.
7. M. T. Lacey, X. Li, "Hilbert transform on $C^{1+\epsilon}$ families of lines", Preprint.
8. M. T. Lacey, Ch. Thiele, "A proof of boundedness of the Carleson operator", Math. Res. Lett., vol. 7, no. 4, pp. 361 – 370, 2000.
9. M. T. Lacey, Ch. Thiele, "L^p estimates for the bilinear Hilbert transform", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 94, no. 1, pp. 33 – 35, 1997.
10. M. T. Lacey, Ch. Thiele, "L^p estimates on the bilinear Hilbert transform for $2 < p < \infty$", Ann. of Math. (2), vol. 146, no. 3, pp. 693 – 724, 1997.
11. M. T. Lacey, Ch. Thiele, "On Calderón's conjecture for the bilinear Hilbert transform", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 95, no. 9, pp. 4828 – 4830, 1998.
12. M. T. Lacey, Ch. Thiele, "On Calderón's conjecture", Ann. of Math. (2), vol. 149, no. 2, pp. 475 – 496, 1999.
13. Ch. Thiele, "Singular integrals meet modulation invariance", Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II (Beijing, 2002), pp. 721 – 732, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
14. Ch. Thiele, "The quartile operator and pointwise convergence of Walsh series", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 352, no. 12, pp. 5745 – 5766, 2000.

5. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПО РЯДАМ ФРАНКЛИНА

Г. Г. Геворкян (Ереван, Армения)

Классическая система Франклина, введённая им в 1928 году [1], как первый пример ортонормированного базиса в пространстве $C([0,1])$, является полной ортонормированной системой непрерывных, кусочно-линейных функций с двоичными узлами. Её свойства изучались многими авторами с различной точки зрения. В частности, известно, что система Франклина образует базис в пространстве $C[0,1]$. В 1975 году, С. В. Бочкарёв [2] доказал, что система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$ а П. Войтащик [3] доказал, что система Франклина является безусловным базисом в пространстве $H^1[0,1]$. Дополнительную информацию о рядах Франклина можно найти в [4]. Пусть $\sigma_N = \{s_i : 0 \leq i \leq N\}$ – разбиение отрезка $[0,1]$ точками s_i кратность которых не превосходит 2, т.е.

$$0 < s_0 < s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{N-1} < s_N = 1, \tag{1}$$

$$s_i < s_{i+2}, \quad 0 \leq i \leq N-2. \tag{2}$$

Обозначим через $S(\sigma)$ пространство кусочно-линейных функций на $[0,1]$, ассоциированное с последовательностью узлов σ, т.е. $S(\sigma)$ есть пространство функций, которые линейны на каждом интервале (s_i, s_{i+1}), непрерывны слева в точках s_i (непрерывны справа в точке s_0) и непрерывны во всех точках s_i, удовлетворяющих как $s_{i-1} < s_i$ так и $s_i < s_{i+1}$. Отметим, что $S(\sigma)$ является линейным пространством размерности $N+1$. Теперь пусть $\sigma_N = \{s_i : 0 \le i \le N\}$ и $\sigma^*_{N+1} = \{s^*_i : 0 \le i \le N+1\}$ суть два разбиения интервала $[0,1]$, удовлетворяющие (1), (2) и такие, что σ^*_{N+1} получается из σ_N добавлением единственного узла s^*. Отметим, что s^* может быть отличной от всех точек из σ_N (в этом случае, для некоторого i имеем $s^* = s^*_i$ и $s^*_{i-1} < s^*_i < s^*_{i+1}$), или для некоторого i, $s^* = s_i$ (в этом случае, $s^*_{i-1} < s^*_i = s^* = s^*_{i+1} < s^*_{i+2}$). Известно, что существует единственная функция $\varphi \in S(\sigma^*_{N+1})$, ортогональная к $S(\sigma_N)$ в пространстве $L^2[0,1]$, $||\varphi||_2 = 1$ и $\varphi(s^*) > 0$. Эта функция φ называется **общей функцией Франклина, соответствующей паре разбиений** $(\sigma_N, \sigma^*_{N+1})$.

Определение 1. Пусть $T = \{t_n : n \ge 0\}$ – последовательность точек из интервала $[0.1]$. Последовательность T называется **допустимой**, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0,1)$ для всех $n > 1$, и для каждого $t \in (0,1)$ существуют не более двух различных индексов $n_1 > n_2 > 1$ таких, что $t = t_{n_1} = t_{n_2}$, и T плотно в $[0,1]$.

Для допустимой последовательности точек $T = \{t_n : n \ge 0\}$ и $n > 1$, пусть $\sigma_n = \{t_{n,i} : 0 \le i \le n\}$ – разбиение интервала $[0,1]$, полученное из точек последовательности T перенумерованных в неубывающем порядке, считая кратности точек. Ясно, что каждое σ_n удовлетворяет условиям (1), (2), и σ_n образуется из σ_{n-1} добавлением одного узла t_n.

Определение 2. Пусть T – допустимая последовательность точек. **Общей системой Франклина**, соответствующей последовательности узлов T, называется последовательность функций $\{f_n : n \ge 0\}$, задаваемых по формулам $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1)$, а для $n \ge 2$, f_n – общая функция Франклина, соответствующая паре разбиений (σ_{n-1}, σ_n).

Определение 3. Последовательность $T = \{t_n : n \ge 0\}$ точек из $[0,1]$, удовлетворяющая условиям

1) $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 \in (0,1)$,

2) $t_{2^k+1} < t_{2^k+2} < \dots < t_{2^{k+1}}$, $k = 1, 2, \dots$,

3) между двумя соседними точками из $\{t_i : 0 \le i \le 2^k\}$, существует одна точка из $\{t_i : 2^k + 1 \le i \le 2^{k+1}\}$,

называется **квази–двоичным разбиением** $[0.1]$, а соответствующая общая система Франклина называется **квази-двоичной системой Франклина**.
Если разбиение $T = \{t_n : n \geq 0\}$ – двоичное, т.е. $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, и

$$t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}, \quad n = 2^k + m, \quad 1 \leq m \leq 2^k, \quad k = 0, 1, ...,$$

то мы получаем классическую систему Франклина.

Проблема 1. Пусть $\{f_n : n \geq 0\}$ – классическая система Франклина. Из условия $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t) = 0$ при любом $t \in [0,1]$ вытекает ли $a_n = 0$ для $n = 0, 1, ...$?

Известно (см. [5], [6]), что

$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n(0) f_n(t)\right| < CNq^{nt}, \quad 0 < q < 1,$$

где C и q – некоторые абсолютные постоянные. Следовательно, существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$, сходящийся к нулю для любого $t \in (0,1]$ и $a_0 \neq 0$. Отметим, что (см. [5], [6])

$$|f_n(0)| < C\sqrt{n}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{f_n(0)}{\sqrt{n}} > 0.$$

Проблема 2. Пусть $\{f_n : n \geq 0\}$ – классическая система Франклина. Из условий $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t) = 0$ для любого $t \in (0,1]$ и $a_n = o(\sqrt{n})$ вытекает ли $a_n = 0$ для $n = 0, 1, ...$?

Проблема 3. Пусть $\{f_n : n \geq 0\}$ – классическая система Франклина и E некоторе конечное или счётное множество. Из условий $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t) = 0$ для любого $t \in [0,1] \setminus E$ и $a_n = o(\sqrt{n})$ вытекает ли $a_n = 0$ для $n = 0, 1, ...$?

Используя классическую систему Франклина $\{f_n : n \geq 0\}$, С. В. Бочкарёв [7] построил базис в пространстве A комплекснозначных функций, аналитических внутри единичного круга и непрерывных в замкнутом единичном круге. Для формулировки этого результата рассмотрим функции (см. [7])

$$F_n(x) = \begin{cases} f_n(x/\pi) & \text{для} \quad x \in [0,\pi], \\ f_n(-x/\pi) & \text{для} \quad x \in [-\pi, 0], \end{cases} \tag{3}$$

$$G_0 = \frac{1+i}{2\sqrt{\pi}}, \quad G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[F_n(x) + i\widetilde{F}_n(x)\right], \tag{4}$$

где

$$\widetilde{F}_n(x) = -\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{F_n(x+t) - F_n(x-t)}{2\tan t/2}\, dt. \tag{5}$$

Теорема (С. В. Бочкарёв). Пусть $P(r, x)$ – ядро Пуассона. Система функций

$$G_n(z) = G_n(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_n(t) P(r, x - t); dt. \tag{6}$$

образует базис в пространстве A

Проблема 4. Пусть $T = \{t_n : n \geq 0\}$ – последовательность простых узлов, т.е. $t_i \neq t_j$ для $i \neq j$ и пусть $\{f_n : n \geq 0\}$ – общая система Франклина, соответствующая T. Образует ли система функций $G_n(z)$, определённых по (3) – (6) базис в пространстве A?

Проблема 5. Если ответ на Проблему 4 отрицателен, то найти необходимые и достаточные условия в терминах T, при которых система функций $G_n(z)$ образует базис в пространстве A.

Теперь рассмотрим периодические, общие системы Франклина с простыми узлами. Пусть $T = \{t_n : n \geq 0\}$ – последовательность точек из $(0, 1]$ такая, что $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$. Обозначим через $S_n(t)$ пространство кусочно–линейных и непрерывных 1-периодических функций на $[0, 1]$ с узлами $t_1, ..., t_n$.

Определение 4. Общая периодическая система Франклина, соответствующая последовательности узлов T есть последовательность функций $\{f_n : n \geq 0\}$, определённых по формулам $f_0(t) = 1$ а при $n \geq 2$

$$f_n \in S_n(T), \quad f_n \perp S_{n-1}(T), \quad \|f_n\|_2 = 1, \quad f_n(t_n) > 0.$$

В [8] было доказано, что всякая общая система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Проблема 6. Является ли периодическая общая система Франклина безусловным базисом в пространстве $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$?

В [9] были найдены необходимые и достаточные условия на допустимую последовательность точек T, при которых соответствующая общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в пространстве $H^1[0, 1]$.

Проблема 7. Пусть $\{f_n : n \geq 1\}$ – периодическая общая система Франклина, соответствующая узлам $T = \{t_n : n \geq 1\}$. Найти необходимые и достаточные условия на последовательность точек T, при которых система функций $F_n(x) = f_n\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ образует базис или безусловный базис в $H^1(D)$, где D – единичная окружность.

В 1985 С. В. Бочкарёв [10] доказал, что если $\{f_n : n \geq 1\}$ является периодической классической системой Франклина на $[0, 2\pi]$, то система функций $\frac{1}{2\pi}, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}, ...$

образует базис в пространстве непрерывных и 2π-периодических функций, где $\widetilde{f}$ – гармонически сопряжённая к f.

Проблема 8. Пусть $\{f_n : n \geq 1\}$ – периодическая общая система Франклина на $[0, 2\pi]$. Образует ли система функций $\frac{1}{2\pi}$, $\widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3, \ldots$ базис в пространстве непрерывных и 2π-периодических функций ?

Проблема 9. Если ответ на Проблему 8 отрицателен, то найти необходимое и достаточное условие на последовательность $T = \{t_n : n \geq 1\}$, при котором система функций $\frac{1}{2\pi}$, $\widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3, \ldots$ образует базис в пространстве непрерывных и 2π-периодических функций.

REFERENCES

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., vol. 100, pp. 522 – 528, 1928.
2. S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math., vol. 1, pp. 249 – 257, 1975.
3. P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is unconditional basis in H^1", Ark. Mat., vol. 10, pp. 293 – 300, 1982.
4. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Survey on the orthonormal Franklin system", In : Approximation Theory, pp. 84 – 132, Darba, Sofia, 2002.
5. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.
6. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.
7. С. В. Бочкарёв, "Существование базиса в пространстве аналитических в круге функций, и некоторые свойства системы Франклина", Мат. Сборник, том 95 (137), 1974.
8. G. G. Gevorkian, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math., to appear.
9. G. G. Gevorkian, A. Kamont, "General Franklin systems as bases in H^1", Studia Math., to appear.
10. С. В. Бочкарёв, "Сопряжённая система Франклина являющаяся базисом в пространстве непрерывных функций", ДАН СССР, том 285, стр. 521 – 526, 1985.

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМА

Том 39, Номер 2, 2004

МАТЕМАТИКА В АРМЕНИИ:

Достижения и Перспективы

Сборник статей

Содержание

Предисловие редакторов серии 4

Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян, Об одной краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения высокого порядка с вырождением 5

К. В. Гаспарян, Неравенство Рао–Крамера для общих статистических моделей с фильтрацией 13

Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян, О почти всюду расходимости одного метода суммирования для вейвлет разложений 27

Т. П. Казанчян, Локальная предельная теорема для последовательностей зависимых случайных величин 33

Л. А. Кафарели, Г. Шахголян, Структура вырожденного множества свободной границы в теории потенциала 43

Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, О скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингал–разностных случайных полей 59

Нерешённые задачи 69

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 39, No. 2, 2004

MATHEMATICS IN ARMENIA:

Advances and Perspectives

Collection of Papers

Contents

Editors' Preface 4

G. Hakobyan, L. Tepoyan, A boundary value problem for higher order nonlinear degenerate differential equations 5

K. V. Gasparian, Rao-Cramér inequality for general filtered statistical models 13

G. G. Gevorkian, A. A. Stepanian, Almost everywhere divergence of a summation method for wavelet expansions 27

T. P. Kazanchian, Local limit theorem for sequences of dependent random variables 33

L. A. Caffarelli, H. Shahgholian, The structure of the singular set of a free boundary in potential theory 43

B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, Convergence rate in the central limit theorem for martingale-difference random fields 59

Open problems 69