ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Настоящий и следующие четыре номера журнала содержат оригинальные статьи, представленные на межд народную конференцию "МАТЕМАТИКА в АРМЕНИИ: Достижения и перспективы" сентябрь 30 - октяб 7, 2003, Цахкадзор, Армения. Основной целью конференции, посвящённой 60 летию Армянской Национал ной Академии Наук, было обсуждение текущей работы и перспективы математики в Армении. Конференц привлекла внимание многих участников из-за границы, включая многих математиков из армянской диаспор Научная программа конференции охватила следующие направления современной математики: Комплексн анализ, вещественный анализ, теория аппроксимации, теория вероятностей и математическая статисти дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика, алгебра, геометрия, топология.

Организаторами конференции были:

Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университ

Програмный Комитет:

Н. Аракелян (сопредседатель, Армения), А. Аджян (сопредседатель, США), С. Адян (Россия), С. Айваз (Россия), Р. Амбарцумян (Армения), Л. Кафарелли (США), Л. Фаддеев (Россия), П. Готье (Канада), Гончар (Россия), И. Ибрагимов (Россия), В. Лу (Германия), С. Мергелян (США), А. Нерсесян (Армени Н. Никольский (Франция), Ю. Прохоров (Россия), Г. Шахголян (Швеция), Я. Синай (США), А. Талал (Армения), Дж. Тимурян (Канада), П. Ульянов (Россия), В. Владимиров (Россия), В. Закарян (Армения

Организационный Комитет:

Г. Геворкян, М. Гиновян, А. Саакян, Б. Нахапетян, А. Акопян.

Около 120 математиков из 15 стран участвовали в работе конференции. Пленарные доклады прочита следующими математиками:

С. Адян (Россия), С. Айвазян (Россия), Р. Амбарцумян (Армения), Н. Аракелян (Армения), О. Бес (Россия), Дж. Бренен (США), З. Чисельски (Польша), П. Готье (Канада), И. Ибрагимов (Россия), Б. Каш (Россия), В. Лу (Германия), В. Михайлов (Россия), Н. Никольский (Франция), А. Олевский (Израиль), Шахголян (Швеция), А. Талалян (Армения), В. Темляков (США).

Г. Г. Геворкян, М. С. Гиновян, А. А. Саакян — Ереван, октябрь 20

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 5–24

ЭФФЕКТИВНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Н. У. Аракелян

Институт математики НАН Армении
E-mail : arakelian@instmath.sci.am
URL : http ://math.sci.am/People/NorairArakelian.html

Резюме. Статья является обзором результатов, полученных автором и его коллегами в течении последних десятилетий о проблемах вейерштрассовской теории аналитических функций. Они касаются вопросов возможности аналитического продолжения степенных рядов и локализации их особенностей.

ВВЕДЕНИЕ

В течении десятилетий интерес к *теории комплексных приближений* стимулируется её разнообразными теоретическими приложениями. В частности, методы и результаты равномерных и касательных приближений целыми функциями представляют мощный инструмент для исследования некоторых внутренних задач *теории аналитических функций*. Заслуживают быть отмеченными приложения в теории распределения значений Р. Неванлинны (см. недавний обзор [5]). Другой большой цикл исследований связан с приложениями в *вейерштрассовской теории* аналитических функций.

Настоящая статья является кратким обзором результатов об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов и о локализации их особенностей, полученных в Армении. Новый интерес к этой классической области был стимулирован задачами о приближении *лакунарными* многочленами на общих множествах типа Мергеляна (см. [8]).

Основные задачи. В вейерштрассовской теории аналитических функций, понятие *аналитический элемент* (кратко - элемент) является основным конструктивным кирпичём. Элемент с центром в точке a комплексной плоскости $\mathbf{C}$ обычно определяется как степенной ряд с комплексными коэффициентами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-a)^n, \tag{1}$$

полагая его сходящимся в некотором открытом круге $D_r(a)$ с центром в точке a и радиусом $r > 0$. Для аналитического элемента с центром в $a = \infty$ надо заменить $z - a$ на z^{-1} и, соответственно, $D_r(a)$ на

$$D_r(\infty) = \overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{D_r(0)}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

Далее мы будем обозначать через H_a множество всех аналитических элементов с центром в точке $a \in \overline{\mathbf{C}}$. В параграфах 2 и 4 мы рассмотрим также аналитические элементы с векторнозначными коэффициентами. Зададим теперь множество *нормализованных* аналитических элементов как ряда вида (1), с $a = 0$ и единичным кругом $D_1(0)$ в качестве круга сходимости :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 1. \tag{1'}$$

Элемент (f_1, D_1) называется *прямым аналитическим продолжением* элемента (f_0, D_0), если $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ и $f_0 = f_1$ на $D_0 \cap D_1$. Обозначим это отношение через $(f_0, D) \sim (f_1, D_1)$. Если имеется *цепь* таких элементов (*аналитическая цепь*), т.е.

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1) \sim \cdots \sim (f_n, D_n),$$

тогда (f_n, D_n) называется *аналитическим продолжением* (вдоль цепи) элемента (f_0, D_0) и обратно. *Полная* аналитическая функция состоит из совокупности всех аналитических продолжений элемента, определяя *голоморфную* функцию на некоторой плоской римановой поверхности.

Среди первичных задач мы перечислим следующие :

(a) Критерий *возможности* аналитического продолжения элемента $f \in H_a$ в область $\Omega \subset \overline{\mathbf{C}}$, содержащую a, и более общая задача описания *области голоморфности* элемента f.

(b) *Восстановление* аналитического продолжения элемента $f \in H_a$ в область $\Omega \subset \overline{\mathbf{C}}$, содержащую a (предполагая, что продолжение возможно) ;

(c) *Локализация особенностей* элемента $f \in H_a$ на границе круга сходимости (и возможно вне этого круга).

Отмеченные задачи являются частными случаями (менее определённой) задачи : *найти методы, по которым глобальные свойства полной аналитической функции можно вывести из её элемента (1).* Отметим некоторые классические результаты в этом направлении, представленные в книгах П. Динса [19] и М. Цудзи [33] :

1) Результат Л. Кронеккера о *рациональности* функции, заданной рядом (1) (см. [19], Глава X, стр. 82).

2) Результат Ж. Адамара о возможности *мероморфного* продолжения элемента (1') в некоторый круг $D_r(0)$, $r > 1$ (см. [19], Глава X, стр. 85).

3) Необходимое условие Г. Эйзенштейна на коэффициенты ряда (1), чтобы представить *алгебраическую* функцию (см. [19], Глава X, стр. 84).

4) Теорема И. Шура об *ограниченности* нормализованного элемента (1') в единичном круге (см. [33], Теорема IV.25).

5) Решение Л. Де Бранжа предположения Бибербаха, который привёл необходимые условия на элемент (1'), чтобы представить *однолистную* функцию в $D_1(0)$ (см. [15]).

Это краткое перечисление показывает, что задачи возникающие на основе вейерштрассовского подхода, сегодня являются живыми и притягательными. Они демонстрируют богатое разнообразие методов в описании глобальных свойств аналитических функций.

Методы. Для основных проблем (a) – (c) были развиты и испытаны некоторые "универсальные" методы.

1. Метод Переразложения. Для исследования проблем (a) – (c), Вейерштрасс предложил универсальный метод *прямого* аналитического продолжения элемента с центром в a с помощью его *переразложения* вокруг нового центра $b \neq a$, с повторным применением этого процесса к вновь образованным элементам. Этот метод позволил получить несколько общих признаков об особых точках элемента, лежащих на границе круга сходимости, прямо в терминах коэффициентов элемента (Ж. Адамар, Е. Фабри, Г. Фабер, Э. Линделёф и другие ; см. [13], §1.7). Многие классические результаты об особенностях степенных рядов (1'), лежащих на границе единичного круга, в частности, теорема Адамара *о лакунах* (см. [13], теорема 1.8.V) и общую теорему Фабри (см. [13], §2) вместе с его элегантными следствиями – теоремами о *лакунах* и *аргументах*, являются применениями таких признаков.

Будучи однако полезным при изучении задачи (с), метод переразложения для задач (a) и (b) оказался менее эффективным. Концепция *эффективности* аналитического продолжения элемента была поставлена и обсуждена последователями Вейерштрасса (Ле Руа, Адамар, Миттаг-Лефлер и др.; см. [22], Глава II). В результате, были развиты разные методы для задач (a) и (b).

2. Метод Функции Коэффициентов. Для задачи (a), был испытан фактически только один, но достаточно плодотворный подход, подсказанный одним замечанием Ж. Адамара об аналитическом продолжении элементов (1'), коэффициенты которых являются *моментами* некоторой интегрируемой на [0,1] функции (см. [13], §7). Этот подход основывается на идее *интерполирования* коэффициентов $\{f_n\}$ элемента (1) некоторой функцией φ, "*функцией коэффициентов*", предположительно *голоморфной* в некоторой (обычно угловой) области, содержащей полуось $[0, +\infty)$ и удовлетворяющей условиям

$$\varphi(n) = f_n \quad \text{при} \quad n \geq n_0. \tag{2}$$

На этом пути задача о возможности аналитического продолжения элемента связывается с асимптотическим поведением φ в бесконечности.

Ряд любопытных результатов были получены Е. Ле Руа, Л. Лоо, Э. Линделёфом, С. Вигертом, Г. Фабером, Г. Полиа, Ф. Карлсоном, В. Ф. Коулингом и другими о взаимосвязи между областью голоморфности элемента f и свойствами функции φ (см. [13], §1 и §7). Они являются частными случаями однозначного аналитического продолжения элемента вне замкнутого множества E вида $E = exp(L)$, где L является *выпуклым* множеством. В результате, необходимые и достаточные условия были предоставлены только в случае *ограниченных* множеств L (Ф. Карлсон).

Для неограниченных множеств L задача полного описания оставалась открытой даже в простейшем случае $E = [1, \infty)$, изученном Ж. Адамаром и Э. Линделёфом. Новый этап усовершенствования метода Функции коэффициентов и расширения рамок его применения связан с использованием методов и результатов комплексных приближений (см. §2).

3. Метод Матричного Суммирования. Среди огромной литературы о проблемах суммирования расходящихся рядов с помощью бесконечных матричных методов, только скромная часть посвящена задачам нахождения аналитического продолжения степенных рядов (его восстановления). Для изучения задачи (b), Э. Борель применил свой экспоненциальный матричный метод суммирования, что позволило восстановить аналитическое продолжение (1') в рамках *многоугольника Бореля* элемента (1') (см. [14]).

Далее в ряде статей Миттаг–Леффлер установил существование универсальных эффективных матричных методов суммирования для *звёздообразных* относительно центра a областей (см. [31]). Позднее Е. Ле Руа, Э. Линделёф, Миттаг-Леффлер и другие предложили *конкретные* эффективные методы суммирования для таких областей (см. [23]). Э. Линделёф распространил этот результат на *спирально-звёздообразные* области (см. [27]).

4. Метод Аппроксимаций Паде. Этот метод (см. [16]) является вариантом классического метода *Непрерывных Дробей* (см. [21]). В задачах (a) – (c) он является аппаратом для представления голоморфных функций в областях, отличных от кругов для исследования их наилучших приближений рациональными функциями. Этот метод более приспособлен для изучения *мероморфных* продолжений элемента и локализации его *полюсов*. Отмеченные аспекты аппроксимаций Паде были систематически исследованы школой А. А. Гончара. Трудности этого подхода связаны с его нелинейным характером, и он не был использован в доказательствах представленных ниже.

Некоторые Обозначения и Определения. Ниже $\mathcal{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ означают соответственно множество натуральных, целых и вещественных чисел. Положим также

$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$;

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$

Для множества $E \subset \mathbf{C}$ положим

E^o – внутренность, $\overline{E}$ – замыкание и ∂E – граница множества E ;

$E^* = \{\overline{z} : z \in E\}$ сопряжённое множество ;

$E^{-1} = \{\zeta^{-1} : \zeta \in E\}$, если $0 \notin E$.

Для $E_1, E_2 \subset \mathbf{C}$ и $z \in \mathbf{C}$ положим

$E_1 + E_2 = \{\zeta + z : \zeta \in E_1, \, z \in E_2\}$;

$E_1 E_2 = \{\zeta z : \zeta \in E_1, \, z \in E_2\}$;

$E + z = E + \{z\}, \qquad zE = \{z\}E$;

$\Delta(\alpha, \beta) = \{re^{i\theta} : r \geq 0, \, \theta \in [\alpha, \beta]\}$ – угол ;

$\Pi = \Delta(-\pi/2, \pi/2) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ – правая полуплоскость ;

$\Pi_\alpha = e^{i\alpha}\Pi$ для $\alpha \in \mathbb{R}$ – замкнутая полуплоскость ;

X = комплексное банахово пространство ;

$H_X(E)$ = множество функций $f \colon E \longmapsto X$, голоморфных на E.

Отметим, что $\mathbb{R}^+ \subset \Pi_\alpha$ для $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ниже мы приводим некоторые дополнительные понятия и обозначения :

I. Для непустого множества $E \subset \mathbb{C}$, его *опорная функция* $K_E\colon \mathbb{R} \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ определяется как

$$K_E(t) = \sup_{\zeta \in E} \operatorname{Re}(\zeta e^{-it}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

II. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}$ *асимптотично* к углу $\Delta \supset E$, если $\Lambda \setminus E$ ограничено для каждого подугла $\Lambda \subset \Delta^o \cup \{0\}$.

III. *Экспоненциальным типом* функции $\varphi \in H_X(\Delta \setminus B)$, где B – ограниченное множество, является число

$$\sigma_\varphi = \limsup_{z \to \infty} \frac{\log \|\varphi(z)\|}{|z|}.$$

IV. Для $\varphi \in H_X(\Omega)$, где Ω – *область* асимптотичная к углу Δ, *внутренний* экспоненциальный тип функции φ определяется как

$$\sigma_{\varphi,\Omega} = \sup_{\Lambda \subset \Delta^o \cup \{0\}} \sigma(\Lambda).$$

Положим $\varphi \in B_X(\Omega)$, если $\sigma_{\varphi,\Omega} < +\infty$. Тогда для $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ функция h_φ :

$$h_\varphi(\theta) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \|\varphi(re^{i\theta})\|}{r} \quad \text{для } \theta \in (\alpha, \beta)$$

является *индикатором* функции φ, а множество

$$\mathbf{I}_\varphi = \bigcap_{\theta \in (\alpha,\beta)} \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}) \le h(\theta)\}$$

является *индикаторной диаграммой* функции φ.

§2. ВОЗМОЖНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Применение методов и результатов комплексных приближений позволяет усовершенствовать метод функции коэффициентов и расширить его приложения. Следующая лемма, играющая важную роль в получении результатов об аналитическом продолжении, была установлена с помощью касательных приближений целыми функциями (см. [2], [4]).

Лемма 1. *Для любой последовательности $\{g_n\}_0^\infty$ из комплексного банахова пространства X, такой что $\|g_n\|^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$, и для $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ существует X-значная целая функция φ порядка ≤ 1 и экспоненциального типа на полуплоскости Π_α такая, что*

$$\varphi(n) = \begin{cases} g_n & \text{для } n \in \mathcal{N}_0, \\ 0 & \text{для } n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}_0, \end{cases}$$

$$h_\varphi(\theta) = -\infty, \quad \text{если } |\theta - \alpha| < \pi/2.$$

В дальнейшем нам будет нужна некоторая терминология. Компактное множество $E \subset \overline{\mathbf{C}}$ называется *логарифмически выпуклым (лог-выпуклым)*, если $E \setminus \{0, \infty\} = \exp(L)$ для некоторого выпуклого и замкнутого множества $L \subset \mathbf{C}$. Если L *минимален* (т.е. L не содержит собственное подмножество с такими же свойствами), то мы называем $L = L(E)$ *логарифмической диаграммой* множества E. Отметим, что $L(E)$ не содержит вертикального отрезка длины $> 2\pi$ в общем случае, и длины 2π, если $0 \in \partial E$ или $\infty \in \partial E$. $L(E)$ ограничено, если $0 \notin E$ и $\infty \notin E$, и E неограничено в противном случае.

Отметим, что любое множество вида $L(E) + 2\pi m i$ с $m \in \mathbb{Z}$ также является логарифмической диаграммой множества E, и в случае $0 \in \partial E$ или $\infty \in \partial E$ это описание исчерпывает все возможные логарифмические диаграммы множества E. Ниже мы будем рассматривать только лог-выпуклые множества, для которых либо $\infty \notin E$ или $0 \notin E$. Отметим также, что $L(E)$ неограничена слева, если $0 \in E$, и можно определить острый угол $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ между полуосью $(-\infty, 0]$ и параллельными лучами, содержащимися в $L(E)$. Мы называем $\beta = \beta(E)$ *направлением* логарифмической диаграммы $L(E)$. Для $\infty \in E$, $0 \notin E$ полагаем $\beta = \beta(E) = \beta(E^{-1})$.

Следующая теорема является нашим основным результатом о возможности аналитического продолжения степенных рядов в терминах Функций коэффициентов (см. [3], [4], Теорема 2.1).

Теорема 1. *Пусть E лог-выпуклый компакт в $\mathbf{C}$, $0 \in E$ и $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$ связно. Пусть $L(E)$ - логарифмическая диаграмма множества E с направлением β. Формальный степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} f_n, \quad f_n \in X \quad n \in \mathcal{N}_0$$

сходится локально равномерно в окрестности ∞ *и определяет функцию* $f \in H_X(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$, *тогда и только тогда, если существует* $\varphi \in H_X(\mathbb{C})$ *порядка* ≤ 1, *и экспоненциального типа на* $\Pi_{-\beta}$ *(на* $\mathbb{C}$, *если* $0 \in E^o$*) такая, что*

$$\varphi(n) = f_n \quad \text{for } n \in \mathcal{N}_0, \tag{3}$$

и $\mathbf{I}_\varphi \subset L^*(E)$, *т.е.*

$$h_\varphi(\theta) \leq K_{L(E)}(-\theta), \quad \text{если } |\theta + \beta| < \pi/2. \tag{4}$$

Замечание 1. (i) В части достаточности Теоремы 1, ограничения на φ могут быть ослаблены, полагая лишь, что $\varphi \in B_X(\Pi_{-\beta})$ и φ удовлетворяет (3) и (4).

(ii) Чтобы переформулировать Теорему 1 для рядов с центром в $a = 0$, будем предполагать, что E лог-выпуклый компакт в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ со связным дополнением. Тогда для заключения $f \in H_X(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$ теоремы, достаточно заменить в (4) множество $L(E)$ на $-L(E) = L(E^{-1})$, что равносильно включению $\mathbf{I}_\varphi \subset (-L(E^*))$.

Рассмотрим теперь более общие чем в (1') аналитические элементы :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n, \quad f_n \in X, \quad n \in \mathcal{N}_0, \tag{5}$$

$$\limsup_{n\to\infty} ||f_n||^{1/n} = 1.$$

Если такой элемент имеет "Функцию коэффициентов" $\varphi \in B_X(\Delta)$ с угловой областью $\Delta \supset \mathbb{R}^+$, тогда из одной теоремы В. Бернштейна (см. [27], стр. 100), следует, что $0 \in I_\varphi$, или

$$h_\varphi(0) = \limsup_{n\to\infty} \log ||\varphi(n)||^{1/n} = 0. \tag{6}$$

Теорема 1 вместе с Замечанием 1 содержит следующий **критерий регулярности открытой дуги** (см. [4], Теорема 2.3 и [3] для случая $X = \mathbb{C}$).

Следствие 1. Пусть $\gamma_\sigma = \{e^{i\theta} : |\theta| \in (\sigma, \pi)\}$ для $\sigma \in (0, \pi)$. Тогда нормализованный элемент (5) может быть аналитически продолжен через дугу γ_σ, тогда и только тогда, если существует функция $\varphi \in B_X(\mathbb{C})$ (или $\varphi \in B_X(\Pi)$), удовлетворяющая (3) и условию

$$|\mathcal{D}_\pm h_\varphi(0)| \leq \sigma,$$

где $\mathcal{D}_\pm h_\varphi$ суть производные h_φ справа и слева.

Следующая теорема является следствием Теоремы 1, представляющая интерес для задачи "действительного аналитического продолжения" степенных рядов.

Теорема 2. *Нормализированный элемент (5) с X-значными коэффициентами допускает аналитическое продолжение вдоль интервала $(-\rho, -1]$ для некоторого $\rho \in (1, +\infty]$ тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi \in B_X(\Pi)$, удовлетворяющая (3) и условию*

$$\liminf_{|\theta|\to\pi/2} \frac{\pi - h_\varphi(\theta)}{\pi/2 - |\theta|} \geq \log\rho, \tag{7}$$

где полагаем $\log\rho = +\infty$ для $\rho = +\infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть элемент (5) имеет аналитическое продолжение f на $(-\rho, -1]$ так, что $f \in H_X(G)$ в области $G \supset D_1(0) \cup (-\rho, -1]$. Можно найти невозрастающую функцию $\varepsilon \in C(I)$ для $I = [1, \rho)$ с $\varepsilon(I) \subset (0, \pi)$ и $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \rho$ так, что для каждого $t \in I$ существует дуга $l_t \subset G \cap \partial D_t(0)$ длины $2\pi\varepsilon(t)$, симметричная относительно $\mathbb{R}$. Полагая $\varepsilon(t) = 0$ для $t \geq \rho$ (если $\rho < +\infty$), определим $\alpha \in C^1([1, +\infty))$ по формуле

$$\alpha(t) = \int_t^{+\infty} \varepsilon(\tau)\tau^{-2}d\tau, \quad t \geq 1.$$

Следующие свойства $\alpha(t)$ очевидны :

1) $\alpha(t)$ – невозрастающая функция на $[1, +\infty)$, $0 < \alpha < \varepsilon$ на I и $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \uparrow \rho$;

2) $t\alpha'(t) \uparrow 0$ при $t \uparrow \rho$ так, что $\alpha(t)$ является *выпуклой* функцией от $\log t$.

Рассмотрим замкнутое множество

$$E = \{z = te^{i\theta} : |\theta| \leq \pi - \alpha(t),\ t \geq 1\}, \tag{8}$$

симметричное относительно $\mathbb{R}$, т.е. $E = E^*$. Очевидно, что $E^{-1} = \exp(L)$ с

$$L = \{w = u + iv : |v| \leq \pi - \psi(u),\ u \in \mathbb{R}^-\}, \tag{9}$$

где $\psi(u) = \alpha(e^{-u})$ для $u \in \mathbb{R}^-$ так, что $\psi \in C^1(\mathbb{R}^-)$. Полагая $u_0 = -\log\rho$ и $J = (u_0, 0]$ мы видим, что $\psi(J) \subset (0, \pi)$ и $\psi(u) = 0$ для $u \leq u_0$. Кроме того, $0 \leq \psi'(u) \downarrow 0$ при $u \downarrow u_0$ так, что ψ является выпуклой функцией. Это означает, что множество L является выпуклым, откуда следует, что множества E и E^{-1} являются *log-выпуклыми*. Кроме того, L *минимален*, так что $L = L(E^{-1}) = -L(E)$ с направлением $\beta(E^{-1}) = 0$. Отметим также, что $f \in H_X(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$, поскольку в силу 1), $\overline{\mathbb{C}} \setminus E \subset G$. По Теореме 1 и Замечанию 1, для элемента (5) существует $\varphi \in B_X(\Pi)$, удовлетворяющая (3) так, что $h_\varphi(0) = 0$ в силу (6), и

$$h_\varphi(\theta) \le K(\theta) \quad \text{для } |\theta| < \pi, \tag{10}$$

где $K = K_L$ – чётная функция (в силу симметричности E). Из (9) и свойств ψ, следует, что

$$K(\theta) = \frac{\pi - \psi(u) - |u|\psi'(u)}{[1 + (\psi'(u)^2]^{1/2}} < \pi - |u|\psi'(u) + o(\psi'(u)) \quad \text{при} \quad u \to u_0,$$

где $\psi'(u) \tan|\theta| = 1$ для $u \in J$, откуда вытекает, что $|\theta| \to \pi/2$ тогда и только тогда, когда $u \to u_0$. Отсюда и из (10) следует

$$[\pi - h_\varphi(\theta)] \tan|\theta| \ge |u| + o(1) \quad \text{при } u \to u_0,$$

доказывая (7).

Достаточность. Пусть теперь $\varphi \in B_X(\Pi)$ удовлетворяет (3) и (7). Свойство тригонометрической выпуклости h_φ вместе с (6) и (7) влечёт

$$h_\varphi(\theta) \le \pi|\sin\theta|, \quad |\theta| < \pi/2.$$

Геометрически это означает, что $\mathbf{I}_\varphi$ лежит в полуполосе $S = \mathbb{R}^- \times [-\pi, \pi]$. Положим $u_0 = -\log\rho$, $J = (u_0, 0]$ и пусть $w = u \pm \pi i = |w|e^{i\gamma} \in \partial S$, $\pi/2 \le |\gamma| < \pi$. Покажем, что из $u \in J$ вытекает $w \notin \mathbf{I}_\varphi$. В противном случае, $\mathbf{I}_\varphi$ должен содержать интервал $I_0 := [w, 0]$ и тогда

$$h_\varphi(\theta) \ge K_0(\theta), \quad |\theta| < \pi, \tag{11}$$

где $K_0(\theta) = |w| \cos^+(\gamma - \theta)$ – опорная функция I_0 (положим $\cos^+ = \max\{\cos, 0\}$). В частности, для $\theta \in \operatorname{sgn}\gamma(|\gamma| - \pi/2, \pi/2)$ имеем

$$K_0(\theta) = |w| \cos(\gamma - \theta) = \pi \frac{\cos(|\gamma| - |\theta|)}{\sin\gamma}.$$

Отсюда и из (11) следует

$$\limsup_{\theta \to \pi/2 \operatorname{sgn}\gamma} \frac{\pi - h_\varphi(\theta)}{\pi/2 - |\theta|} \le -\pi \cot\gamma = |u|,$$

что противоречит условию (7).

Таким образом, доказано, что $J \pm i\pi \subset \mathbb{C} \setminus I_\varphi$. Очевидно, существует неубывающая функция $\varepsilon \in C(J)$ такая, что $\varepsilon(u) = 0$ для $u \in (-\infty, u_0]$, $\varepsilon(J) \subset (0, \pi)$ и $\mathbf{I}_\varphi \subset A$, где

$$A = \{w = u + iv : |v| \leq \pi - \varepsilon(u),\ u \in \mathbb{R}^-\}.$$

Определим неубывающую функцию $\psi \in C^1(\mathbb{R}^-)$ по формуле

$$\psi(u) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{u} \frac{\varepsilon(\xi)}{1 + \xi^2}\, d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^-.$$

Очевидно, $0 \leq \psi \leq \varepsilon$ на $\mathbb{R}^-$ и $\psi((J) \subset (0, \pi)$. Кроме того, ψ' является неубывающей функцией на $\mathbb{R}^-$, так что множество L, построенное для ψ с помощью (9), *замкнуто* и *выпукло* и $\mathbf{I}_\varphi \subset A \subset L$. Полагая теперь $\alpha(t) = \psi(-\log t)$ для $t \geq 1$ мы видим, что α удовлетворяет приведённым выше условиям 1) и 2). Имеем $E^{-1} = \exp(L)$ для множества E, определённого по (8) так, что $E = E^*$ является log-выпуклым и $L = -L(E^*)$. По свойству (ii) Замечания 1, элемент (5) допускает аналитическое продолжение в область $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, содержащую промежуток $(-\rho, -1]$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Точка -1 является регулярной точкой для нормализированного элемента (5) тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi \in B_X(\Pi)$, удовлетворяющая (3) и условию

$$\liminf_{|\theta| \to \pi/2} \frac{\pi - h_\varphi(\theta)}{\pi/2 - |\theta|} > 0. \tag{12}$$

Отметим, что Следствие 1 вместо (12) предлагает эквивалентное условие $|\mathcal{D}_\pm h_\varphi(0)| < \pi$.

Рассмотрим теперь задачу аналитического продолжения степенных рядов на некоторые римановы поверхности. Обозначим через $\mathcal{R}_\infty$ область голоморфности функции $z \to \log(z - 1)$, содержащую бесконечное число "листов", т.е. простых односвязных областей $R_k = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ для $k \in \mathbb{Z}$. Пусть D_k – открытый единичный круг в R_k, и определим риманову поверхность

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_\infty \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \overline{D}_k.$$

Нормализованный аналитический элемент (1') определяет функцию $f \in H(\mathcal{R}_0)$ тогда и только тогда, когда f имеет аналитическое продолжение вдоль каждой кривой в $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ с начальной точкой $z = 0$ не возвращающейся в единичный круг после выхода из него. Можно построить класс рядов (1'), определяющих функции $f \in H(\mathcal{R}_0)$, для которых $\mathcal{R}_0$ является *областью голоморфности*.

Пример 1. Рассмотрим строго возрастающую последовательность $\{m_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$ нулевой плотности, т.е. $k/m_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда мероморфная функция

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}(z + m_k)^{-1}$$

нулевого экспоненциального типа на $\mathbf{C}$ порождает элемент (1') с коэффициентами $f_n = \varphi(n)$, $n \in \mathcal{N}_0$, имеющий желаемое свойство.

Рассмотрим теперь вспомогательную риманову поверхность

$$\mathcal{R}^* = \{re^{i\theta} : r > 1,\ \theta \in \mathbb{R}\},$$

содержащуюся в $\mathcal{R}_0$, такую, что $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0 \setminus \overline{D}_0$. Определим линейное преобразование Λ в $H(\mathcal{R}^*)$, сопоставляющее каждой $f \in H(\mathcal{R}^*)$ функцию $f^* = \Lambda f \in H(\mathcal{R}^*)$ по формуле $f^*(z) = f(z) - f(z^*)$, где $z = re^{i\theta}$ с $r > 1, \theta \in \mathbb{R}$ и $z^* = re^{i(\theta+2\pi)}$. Скажем, что $g \in H(\mathcal{R}^*)$ имеет локально–конечную степень в $\mathcal{R}^*$, и положим $g \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$, если для $\beta \in (0, \pi)$ существует $\lambda > 0$ такое, что $|g(\zeta)| < |\zeta|^\lambda$ для $\log\zeta \in \Delta(-\beta, \beta)$, $|\zeta| > r_\lambda$. Скажем, что $f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$, если $f \in H(\mathcal{R}_0)$ и $f \mid \mathcal{R}^* \in \mathcal{B}_{loc}(R^*)$ так, что $\mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0) \subset \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$.

Теорема 3. [11] *Нормализованный аналитический элемент (1') определяет функцию $f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$ тогда и только тогда, когда существует область Ω, асимптотичная к $\Delta^o_{2\pi}$, и функция $\varphi \in B(\Omega)$ внутреннего экспоненциального типа $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$, удовлетворяющая интерполяционным условиям (2).*

Теорема 4. [11] *Нормализованный аналитический элемент (1') определяет функцию $f \in H(\mathcal{R}_0)$ с $\Lambda f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ тогда и только тогда, если существует область Ω асимптотичная к $\Delta^o_{2\pi}$, и функция $\varphi \in B(\Omega)$ с $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$, удовлетворяющая "приближённому" интерполяционному условию*

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n - \varphi(n)|^{1/n} = 0.$$

Задача полного описания элементов (1'), определяющих функцию из $H(\mathcal{R}_0)$, остаётся открытой. Теоремы 3 и 4 являются первыми результатами, содержащими необходимые и достаточные условия для аналитического продолжения на $\mathcal{R}_0$; некоторые *достаточные* условия с более строгими предположениями были получены раньше (см. [13], Теоремы 7.3.I и 7.3.X).

§3. ЭФФЕКТИВНОЕ СУММИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

После Э. Бореля, Г. Миттаг-Леффлера и Э. Линделёфа, задача *восстановления* аналитического продолжения степенных рядов с помощью матричных методов суммирования изучалась многими авторами (см. [21], [29], [30], [32], [34]). Некоторые конкретные аспекты задачи восстановления, связанные с "универсальными" (т.е. независимыми от элемента) методами матричного суммирования были исследованы в [2] и в недавней статье [7].

Определение 1. Пусть E – связное множество в $\overline{\mathbb{C}}$, $a \in E$ и $f \in H_a$. Скажем, что f допускает *голоморфное (или однозначное аналитическое) продолжение* на E, если существуют область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащая E и функция $F \in H(\Omega)$ такая, что $f = F$ в некоторой окрестности точки a. Множество элементов $f \in H_a$, допускающие голоморфное продолжение на E будем обозначать через $H_a(E)$.

Класс $H_a(E)$ можно определить также более классическим путём, используя понятие аналитического продолжения вдоль цепи

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1) \sim \cdots \sim (f_n, D_n),$$

где центр каждого круга D_j принадлежит E. Тогда мы назовём (f_n, D_n) аналитическим продолжением (f_0, D_0) *вдоль* E. Элемент $f \in H_a$ допускает голоморфное продолжение на связное множество E тогда и только тогда, если существует совокупность $\{(f_\alpha, D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ аналитических продолжений элемента f вдоль E, удовлетворяющая условиям :

(i) совокупность $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ покрывает E, т.е. $E \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} D_\alpha$;

(ii) любое условие $D_{\alpha_i} \cap D_{\alpha_j} \neq \emptyset$ для $\alpha_i, \alpha_j \in A$ влечёт $(f_{\alpha_i}, D_{\alpha_i}) \sim (f_{\alpha_j}, D_{\alpha_j})$.

Очевидно, из условий (i) – (ii) вытекает, что $\Omega = \cup_{\alpha\in A} D_\alpha$ является областью и функция $F \in H(\Omega)$, определённая по формуле

$$F(z) = f_\alpha(z) \quad \text{для } z \in D_\alpha, \quad \alpha \in A$$

удовлетворяет условиям Определения 1. Обратно, для $f \in H_a(E)$ рассмотрим функцию $F \in H(\Omega)$ Определения 1 и для каждого $\alpha \in E$ выберем открытый круг $D_\alpha \subset \Omega$ с центром α и положим $f_\alpha(z) = F(z)$ для $z \in D_\alpha$. Тогда для $A = E$ очевидно выполнены условия (i) – (ii). Утверждение, что элемент (f_α, D_α) для $\alpha \in E$ является аналитическим продолжением функции f *вдоль* E, легко следует из следующего топологического утверждения (см. [25], гл. 5, Теорема 8) :

Предложение 1. *Пусть X – связное топологическое пространство и $\{V_i\}$, $i \in I$, – открытое покрытие X. Тогда для каждой пары x', x'' точек X существуют индексы $i_1, \ldots, i_n$ из I такие, что $x' \in V_1$, $x'' \in V_n$ и $V_k \cap V_{k+1} \neq \emptyset$ при $k = 1, \ldots, n-1$.*

Пусть теперь $\mathcal{C}$ – подпоследовательность комплексных чисел

$$\mathcal{C} = \{c_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}, \tag{13}$$

зависящих от параметра $\omega \in I$, где I – бесконечное множество в некотором топологическом пространстве T с предельной точкой ω_0. Принято называть $\mathcal{C}$ бесконечной матрицей, если $I = \mathcal{N}_0$ с $\omega_0 = +\infty$. В этом случае, $\mathcal{C}$ называется треугольной, если $c_n(\omega) = 0$ для $\omega = m > n$ и $m \in \mathcal{N}$. Термин бесконечная матрица мы сохраним также для общих матриц (13). Мы полагаем, что $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} |c_n(\omega)|^{1/n} = 0, \quad \omega \in I, \tag{14}$$

так, что степенной ряд

$$\mathcal{C}_\omega(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\omega) w^n \tag{15}$$

сходится локально равномерно в $\mathbf{C}$ и определяет целую функцию. Рассмотрим $\mathcal{C}_\omega$ как преобразование аналитических элементов вида (1') в целую функцию, используя композицию Адамара рядов (1') и (15) :

$$(\mathcal{C}_\omega * f)(z) = f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\omega) f_n (z-a)^n.$$

Преобразование $\mathcal{C}_\omega$ позволяет испытывать матрицу $\mathcal{C}$ как метод суммирования для степенного ряда вне круга сходимости.

Определение 2. Пусть E – связное множество в $\mathbf{C}$ и $a \in E$. Назовьём матрицу $\mathcal{C}$ вида (13) – (14) эффективной для $H_a(E)$ и положим $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_a(E)$, если для каждого элемента $f \in H_a(E)$

$$\lim_{\omega\to\omega_0} (\mathcal{C}_\omega * f)(z) = f(z)$$

локально равномерно в некоторой окрестности E. Назовем E *множеством эффективного суммирования для* $H_a(E)$, если $\mathcal{M}_a(E) \neq \emptyset$.

Одной из основных задач, возникающих здесь, является *описание* множеств эффективного суммирования. В случае *областей* эта задача решена в [2], Теорема 2.1. Следующая теорема (см. [7], Теорема 1) является усилением этого результата. Напомним, что для $\alpha \in \mathbb{R}$ множество $S \subset \mathbb{C}$ называется *α-звездой* относительно центра $a \in S$, если $(S-a)L^- = S-a$, где $L_\alpha^- = \{t^{1+i\alpha} : t \in [0, 1]\}$.

Теорема 5. *Пусть связное множество $E \subset \mathbb{C}$ с $a \in E$ удовлетворяет одному из следующих условий :*

(a) E открыт ;

(b) E замкнут и $a \in E^o$;

(c) E – компактное множество.

Тогда E является множеством эффективного суммирования для $H_a(E)$ тогда и только тогда, когда E есть α-звезда с центром a для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Пусть $\varphi \in H(\Pi^o)$ ограничена на $\Delta \setminus \{0\}$ для каждого замкнутого угла $\Delta \subset \Pi^o \cup \{0\}$ и

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log|\varphi(t)|}{t} = -\infty, \quad \lim_{t\to+0} \varphi(t) = 1 := \varphi(0).$$

Тогда для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\omega_\alpha = (1+i\alpha)\omega$ бесконечная матрица

$$\mathcal{C}_{\varphi,\alpha} = \{\varphi(\omega_\alpha n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \omega > \omega_0 = 0$$

эффективна для $H_a(E)$, если E является α-звездой с центром в a, удовлетворяющая одному из условий (a) – (c) Теоремы 5.

Отметим, что выбор функции φ фактически не зависит от E и от параметра α. Возможность различных подборов φ важно для изучения задачи выбора методов суммирования с *оптимальной скоростью* суммирования. Более классические методы суммирования, приведённые во Введении являются частными случаями матриц $\mathcal{C}_{\varphi,\alpha}$.

Другой круг задач суммирования связан со следующим определением.

Определение 3. Пусть $a \in \mathcal{E} \subset \Omega$ и Ω есть область в $\mathbb{C}$. Скажем, что матрица $\mathcal{C}$ вида (13) – (14) эффективна для $H_a(\Omega)$ на множестве $\mathcal{E}$, если для каждого элемента $f \in H_a(\Omega)$

$$\lim_{\omega\to\omega_0} (\mathcal{C}_\omega * f)(z) = f(z)$$

локально равномерно в некоторой окрестности $\mathcal{E}$ в Ω. Для случая $\mathcal{E} = \{z\}$, $z \in \Omega$, скажем, что $\mathcal{C}$ эффективна (для $H_a(\Omega)$) в точке z.
Экспоненциальный метод суммирования Бореля вероятно был первым эффективным матричным методом суммирования, применённым к степенным рядам ; в нашей терминологии, он эффективен в полуплоскости $\mathcal{E}$: $\mathrm{Re} z < 1$ для $\Omega = \mathbf{C} \setminus [1, \infty)$.
Следующая теорема показывает (см. [7], Теорема 2) существование эффективных матриц для любой точки произвольной области Ω.

Теорема 6. *Пусть Ω – область в $\mathbf{C}$ и $a \in \Omega$. Тогда для любого $z \in \Omega$ существует бесконечная матрица $\mathcal{C}$ вида (13) – (14), эффективная для $H_a(\Omega)$ в точке z.*

§4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Цикл статей [9], [10], [12], [20] и [35] развивают некоторые из отмеченных во Введении классических результатов об особенностях степенных рядов. Для нормализованного элемента (1') положим

$$f_n = |f_n| e^{i\omega_n}, \quad n \in \mathcal{N}_0,$$

где можно предполагать, что $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \pi$, полагая $\omega_{-1} = 0$ и $\omega_{n+1} = \omega_n$, если $f_{n+1} = 0$. Такой индуктивный выбор аргументов *минимизирует среднюю вариацию* аргументов

$$V[I] = \frac{1}{|I|} \sum_{n \in I} |\omega_{n+1} - \omega_n|$$

на отрезке $I \subset \mathbb{R}^+$ длины $|I|$. Для $\tau > -1$ обозначим

$$I(\tau) = \begin{cases} [1+\tau, 1] & \text{для} \quad -1 < \tau \leq 0, \\ [1, 1+\tau] & \text{для} \quad \tau > 0. \end{cases}$$

Следующая теорема об аргументах (см. [9], Теорема 2) фактически решает задачу Е. Фабри о существовании особой точки для нормализованного элемента (1') на заданной замкнутой дуге единичного круга, обобщая результаты, полученные с помощью Общей Теоремы Фабри (см. [13], Теорема 2.1.I). Метод "Функции коэффициентов" существенно используется в доказательстве, хотя он невидим в формулировках.

Теорема 7. *Пусть для ряда (1'), строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$ такова, что*

$$\limsup_{k \to \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Обозначим $V = \min\{V_-, V_+\}$, *где*

$$V_\pm = \limsup_{\tau\to\pm0}\limsup_{k\to\infty} V[n_k I(\tau)].$$

Тогда ряд (1') имеет особую точку вида $e^{i\omega}$ *с* $|\omega| \le V$.

С коэффициентами $\{f_n\}_0^\infty$ сопоставим теперь *минимальную* неотрицательную и *вогнутую* функцию ψ на $[0, +\infty)$, удовлетворяющую

$$|f_n| \le \exp\{\psi(n)\}, \quad n \in \mathcal{N}_0.$$

Следующая теорема об аргументах (см. [10], Теорема B) расширяет результат Л. Лоша, С. Манделбройта, Г. Клауса, М. Нобль и других авторов (см. обзор [13], §2).

Теорема 8. *Пусть для ряда (1') выбраны последовательности* $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$ *и* $\{x_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}^+$ *с* $n_k \ge x_k \to +\infty$ *так, чтобы выполнялось*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|f_{n_k}| - \psi(n_k)}{x_k} = 0.$$

Обозначим $v = \min\{v_-, v_+\}$, *где*

$$v_\pm = \limsup_{\tau\to\pm0}\limsup_{k\to\infty} V[n_k I(n_k^{-1} x_k \tau)].$$

Тогда ряд (1') имеет особую точку вида $e^{i\omega}$ *с* $|\omega| \le \nu$.

Пусть теперь A – комплексная *банахова алгебра* с единицей и $G(A)$ – множество *обратимых* элементов в A. Для $a \in A$ пусть σ_a есть *спектр*, а r_a - *спектральный радиус* элемента a. Следующие две теоремы можно найти в [12].

Теорема 9. *Пусть* $\{a_n\}_1^\infty \subset A$, $a_i a_j = a_j a_i$ *для* $i, j \in \mathcal{N}$ *и* $a_n \to a$ *при* $n \to \infty$. *Если* $\|a_n - a\| < r_a$ *для* $n \in \mathcal{N}$, *то* r_a *является радиусом сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} a_1 \cdots a_n, \tag{16}$$

и каждая точка $\lambda \in \sigma_a$ *с* $|\lambda| = r_a$ *является особой точкой ряда (16).*

Теорема 10. *Пусть* $\{a_n\}_1^\infty \subset G(A)$ *и* $a_i a_j = a_j a_i$ *для* $i, j \in \mathcal{N}$. *Для подпоследовательности* $Q_1 \subset \mathcal{N}$ *плотности* Δ *положим* $Q_2 = \mathcal{N} \setminus Q_1$ *и предположим, что* $a_k \to \exp(b_i)$ *при* $k \to \infty$, $k \in Q_i$ *для* $i = 1, 2$. *Тогда* r_a *для* $a = \exp\{\Delta b_1 + (1-\Delta) b_2\}$ *является радиусом сходимости ряда (16). Если* $r_a e^{i\theta_0} \in \sigma_a$, *то ряд (16) имеет особую точку вида* $r_a e^{i\theta}$ *с*

$$|\theta - \theta_0| \le 2L\Delta(1-\Delta), \quad L = \max_{z_k \in \sigma_{b_k}} |\Im(z_1 - z_2)|.$$

Используя новые подходы, развитые в работах [8] и [9], и критерии аналитического продолжения типа вышеприведённой теоремы 1, были получены также результаты о локализации особенностей нормализованного элемента (1'), лежащих на заданном прямолинейном логарифмически спиральном угле *вне единичного круга* (см. [20] и [35]). Применение теоремы 2 может предоставить результаты о локализации особенностей степенных рядов вдоль заданного луча.

Abstract. The paper is an overview of results obtained by the author and his colleagues during last decades on the problems of the Weierstrass theory of analytic functions. They concern the questions of analytic continuation of power series, their restoration and localization of their singularities.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des fonctions analytiques", Proc. Intern. Congr. Math. (Nice 1970), Gauthier, Paris, 2, pp. 595 – 600, 1971.
2. Н.У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Матем. Сборник, том 124 (166), № 1, стр. 24 – 44, 1984.
3. N. Arakelian, "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in Approx. Theory, Springer, NY, pp. 295 – 313, 1992.
4. Н. У. Аракелян, "Эффективное аналитическое продолжение степенных рядов с векторозначными коэффициентами", Изв. НАН Армении, сер. Математика, том 30, № 4, стр. 25 – 48, 1995.
5. N. Arakelian, "Approximation and value distribution", Proc. NATO ASI Inst., Montreal, July 3-14, 2000, Cluwer, pp. 1 – 28, 2001.
6. N. Arakelian, P. M. Gauthier, "On tangential approximation by holomorphic functions", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 17, № 6, стр. 421 – 441, 1982.
7. N. Arakelian, W. Luh, "Efficient analytic continuation of power series by matrix summation methods", Comput. Methods and Function theory, vol. 2, № 1, pp. 137 – 153, 2002.
8. Н. У. Аракелян и В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения в комплексной плоскости многочленами с пропусками", Докл. АН СССР, том 235, № 2, стр. 249 – 252, 1977.

9. Н. У. Аракелян и В. А. Мартиросян,, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 22, № 1, стр. 3 – 21, 1987.
10. Н. У. Аракелян и В. А. Мартиросян,, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости II", Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, том 23, № 3, стр. 123 – 137, 1988.
11. Н. У. Аракелян и Г. Шмидер, "Аналитическое продолжение степенных рядов на плоские римановы поверхности", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 36, № 4, стр. 7 – 28, 2002.
12. Н. У. Аракелян и А. В. Яврян, "Векторнозначные варианты теоремы Фабри об отношении", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 30, № 4, 1995.
13. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, Москва, Наука, 1967.
14. E. Borel, "Memorie sur les séries divergentes", Ann. scient. Ecole norm. super., ser. 3, no. 16, pp. 9 – 136, 1899.
15. L. de Branges, "Underlying concepts in the proof of the Bieberbach conjecture", Proc. of ICM, AMS, pp. 25 – 42, 1987.
16. Дж. Бейкер, П. Грейвс–Моррис, Аппроксимации Паде, Москва, Мир, 1986.
17. L. Brown, P. M. Gauthier, W. Seidel, "Complex approximation for vector-valued functions with an application to boundary behaviour", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 191, pp. 149 – 163, 1974.
18. T. Carleman, "Sur un théorème de Weierstrass", Ark. Math., Astr. Fys., vol. 20b, no. 4, pp. 1 – 5, 1927.
19. P. Dienes, The Taylor Series, Oxford, Clarendon Pr., 1931.
20. Т. Л. Гарибян, "О локализации спиральных особенностей степенных рядов", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 8, 1999.
21. W. Gawronski, R. Trautner, "Verschärfung eines Satzes von Borel-Okada über Summierbarkeit von Potenzreihen", Period. Math. Hungar., vol. 7, no. 3-4, pp. 201 – 211, 1976.
22. J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Sqientia : Phys. Math., no. 12, Gauthier, Paris, 1901.
23. G. H. Hardy, Divergent Series, Clarendon Press, Oxford, 1949.
24. У. Джоунс, Б. Трон, Непрерывные Дроби, Москва, Мир, 1985.
25. M. V. Keldysh, "Sur l'approximation des fonctions holomorphes fonctions entires", Dokl. Ac. Sci. USSR, vol. 47, pp. 239 – 241, 1945.
26. К. Куратовский, Топология, том 2, Мир, Москва, 1969.
27. N. Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1940.
28. E. Lindelöf, "Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor", J. Math. Pures Appl. (5), vol. 9, pp. 213 – 221, 1903.
29. W. Luh, "Über die Summierbarkeit der geometrischen Reihe", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 113, pp. 1 – 70, 1974.
30. W. Luh, R. Trautner, "Summierbarkeit der geometrischen Reihe auf vorgeschriebenen Mengen", Manuscripta math., vol. 18, pp. 317 – 376, 1976.
31. G. Mittag-Leffler, "Sur la representation d'une branche uniforme d'une fonction monogene", 1-5. Acta Math. : vol. 23, pp. 43 – 62, 1900 ; vol. 24, pp. 183 – 244, 1901 ; vol. 26, pp. 353 – 391, 1902 ; vol. 29, pp. 101 – 182, 1905.

32. J. Müller, Über analytische Fortsetzung mit Matrixverfahren, Mittelungen aus dem Math. Sem. Giessen, vol. 199, Giessen 1990.
33. M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co., Tokyo, 1959.
34. Y. Okada, "Über die Annäherung analytischer Funktionen", Math. Z., vol. 23, pp. 62 – 71, 1925.
35. А. В. Явряна, "О распределении радиальных особенностей степенного ряда", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 32, № 5, стр. 62 – 75, 1997.

Поступила 28 апреля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 25–40

О СУЩЕСТВОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

С. А. Епископосян

Ереванский государственный университет
E–mail : sergoep@ysu.am

Резюме. В работе построены весовое пространство $L^1_\mu[0,1]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$ по системе Уолша, который универсален в $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mu(x)$ – измеримая на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию $0 < \mu(x) \leq 1$, и пусть $L^1_\mu[0,1]$ – пространство измеримых функций $f(x)$, $x \in [0,1]$, с конечным интегралом $\int_0^1 |f(x)|\mu(x)dx < \infty$.

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) \in L^1_\mu[0,1] \tag{1.1}$$

называется универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно перестановок, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ члены ряда (1.1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ сходился к $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} f_{\sigma(k)}(x) - f(x) \right| \cdot \mu(x)dx = 0.$$

Определение 2. Ряд (1.1) называется универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ в обычном смысле, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что последовательность частичных сумм $\sum_{s=1}^{n_k} f_s(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$.

Определение 3. Ряд (1.1) называется универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно подрядов, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ можно выделить подряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x)$ ряда (1.1), который сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$.

В этой статье рассматривается вопрос существования рядов по системе Уолша, универсальных в $L^1_\mu[0,1]$ относительно перестановок и подрядов.

Отметим, что вопросам существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду и по мере посвящено много работ (см. [1]- [7]). Первые универсальные (в смысле сходимости почти всюду) тригонометрические ряды

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k sinkx \tag{1.2}$$

были построены Д. Е. Меньшовым [1] и В. Я. Козловым [2]. Эти ряды обладают свойством, что для любой измеримой на $[0,2\pi]$ функции $f(x)$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что у ряда (1.2) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится to $f(x)$ почти всюду на $[0,2\pi]$. Если $f(x) \in L^1_{[0,2\pi]}$, нельзя заменить сходимость почти всюду сходимостью в метрике $L^1_{[0,2\pi]}$.

Этот результат был распространён А. А. Талаляном на произвольные полные ортонормированные системы (см. [3]). Им же установлено (см. [4]), что если $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированный базис пространства $L^p_{[0,1]}, p > 1$, то существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad a_k \to 0, \tag{1.3}$$

который обладает свойством : для любой измеримой функции $f(x)$, члены ряда (1.3) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы по мере на [0,1] к функции $f(x)$.

В работе [5] М. Г. Григоряном построен ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$, который универсален в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно частичных рядов, при некоторой весовой функции $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$, $x \in [0,1]$. В [6] доказан следующий результат

Теорема A. *Существует ряд по системе Уолша вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad with \quad \left|\sum_{k=1}^{m} c_k W_k(x)\right| \leq \lambda_m,\ x \in [0,1],\ \lambda_m \nearrow \infty,\ m = 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

такой, что для любого $\epsilon > 0$ можно построить весовую функцию $\mu(x)$, удовлетворяющую $0 < \mu(x) \leq 1$ и $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}| < \epsilon$ так, что ряд (1.4) был бы универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть $\omega(t)$ – непрерывная возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\omega(+0) = 0$. Тогда существует ряд по системе Уолша вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad c \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \omega(|c_k|) < \infty \tag{1.5}$$

такой, что для любого $\epsilon > 0$ можно построить такую весовую функцию $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \leq 1$, $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}| < \epsilon$, чтобы ряд (1.5) был бы универсальным в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

Если в Теореме 1 возьмём

$$\omega(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t \in (0,\infty); \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

то получим следующий результат

Теорема 2. *Существует ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad c \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty, \quad \text{для всех} \quad q > 2 \tag{1.6}$$

такой, что можно построить весовую функцию $\mu(x)$, удовлетворяющую $0 < \mu(x) \leq 1$, $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}|\, \epsilon$, $\epsilon > 0$, чтобы ряд (1.6) был бы универсальным в $L^1_\mu[0,1]$ как относительно перестановок так и подрядов.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Сначала приведём определение системы Уолша–Пэли (см. [8]) :

$$W_0(x) = 1, \quad W_n = \prod_{s=1}^{n} r_{m_s}, \quad n = \sum_{s=1}^{k} 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > \ldots > m_s, \tag{2.1}$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера :

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Лемма 1. *Пусть даны числа* $0 < \epsilon < 1$, $k_0 > 1$, $\gamma \neq 0$ *и интервал* Δ *вида* $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]$, $(1 \leq i \leq 2^m)$. *Тогда существуют измеримое множество* $E \subset \Delta$ *и многочлен*

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям :

(1)
$$P(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E; \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases}$$

(2)
$$|E| > |\Delta| \cdot (1 - \epsilon),$$

(3)
$$\left(\sum_{k=k_0}^{N} c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|}.$$

Доказательство. Положим $\nu_0 = \left[\log_{\frac{1}{2}} \epsilon\right] + 1$. Очевидно, что существует натуральное число m_0 такое, что при $m \geq m_0$, имеем

$$S_m(x, \gamma \cdot \chi_\Delta) = \sum_{j=0}^{m} a_j W_j(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x), \quad x \in [0, 1], \tag{2.2}$$

где $\chi_\Delta(x)$ – характеристическая функция множества Δ и

$$a_j = \int_0^1 [\gamma \cdot \chi_\Delta(t)] \cdot W_j(t)dt.$$

Возьмём натуральное число $m_1 > m_0$ таким, чтобы

$$W_{m_1}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_1+k}(x), \quad \text{если} \quad 0 \le k \le m_0 \tag{2.3}$$

и положим

$$b_s = \begin{cases} a_j, & \text{если} \quad s = m_1 + j, \quad j \in [0, m_0], \\ 0, & \text{если} \quad s \notin [m_1, m_1 + m_0], \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\Delta_1^{(-)} = \{x \in \Delta; \;\; W_{m_1}(x) = -1\}; \;\; \Delta_1^{(+)} = \{x \in \Delta; \;\; W_{m_1}(x) = +1\}.$$

Отсюда и из (2.2) будем иметь

$$\sum_{s=k_0}^{N_1-1} b_s W_s(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_1^{(+)}}(x) - \gamma \cdot \chi_{\Delta_1^{(-)}}(x), \quad \text{где} \quad N_1 = m_1 + m + 1.$$

Предположим, что уже определены числа $m_1 < m_2 < ... < m_{\nu-1}$ $(\nu < \nu_0)$, $m_i > N_{i-1}$, $1 \le i \le \nu - 1$, многочлены вида

$$P_i(x) = \sum_{s=N_{i-1}}^{N_i-1} b_s W_s(x), \;\; N_{i-1} < N_i, \;\; 1 \le i \le \nu - 1$$

и множества $\Delta_i^{(+)}$, $\Delta_i^{(-)}$, $(1 \le i \le \nu - 1)$, для которых выполнены условия

$$\sum_{s=N_{i-1}}^{N_i-1} b_s W_s(x) = \left(2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_i'}(x)\right) \cdot W_{m_i}(x), \;\; 1 \le i \le \nu - 1, \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \Delta_i' = \cap_{j=1}^{i} \Delta_j^{(-)}; \\ |\Delta_i'| = 2^{-i} \cdot |\Delta|; \\ \Delta_j^{(-)} = \{x \in \Delta; \;\; W_{m_j}(x) = -1\}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Очевидно, что существует натуральное число q_ν такое, что

$$\sum_{j=0}^{q_\nu} a_j^{(\nu)} \cdot W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x), \quad x \in [0,1], \tag{2.7}$$

где

$$a_j^{(\nu)} = \int_0^1 \left[2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x)\right] \cdot W_j(x)dx.$$

Возьмём натуральное число m_ν такое, чтобы (см. (2.1))

$$W_{m_\nu}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_\nu+k}(x), \quad \text{если} \quad 0 \le k \le N_{\nu-1} \tag{2.8}$$

$$m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1} + N_{\nu-1}.$$

Положим $N_\nu = m_\nu + q_\nu + 1$,

$$b_s = \begin{cases} a_j^{(\nu)}, & \text{для} \quad s = m_\nu + j, \ j \in [0, q_\nu]; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\Delta'_\nu = \Delta'_{\nu-1} \cap \Delta_\nu^{(-)}, \quad \text{где} \quad \Delta_\nu^{(-)} = \{x \in \Delta : \quad W_{m_\nu}(x) = -1\}. \tag{2.10}$$

Учитывая соотношения (2.7) - (2.9), получаем

$$\sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} b_s W_s(x) = W_{m_\nu}(x) \cdot \sum_{j=0}^{q_\nu} a_j^{(\nu)} \cdot W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot W_{m_\nu}(x) \cdot \chi_{\Delta'_{\nu-1}}(x). \tag{2.11}$$

Так как $m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1}$, то множества $\Delta_\nu^{(-)}$ и $\Delta_\nu^{(+)}$ имеют одинаковые порции на интервалах постоянства функции $W_{m_\nu-1}(x)$. Следовательно,

$$|\Delta'_\nu| = \frac{|\Delta'_{\nu-1}|}{2} = \frac{|\Delta|}{2^\nu}. \tag{2.12}$$

Таким образом, по индукции определены натуральные числа $m_1 < m_2 < .... < m_{\nu_0}$; $m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1} + N_{\nu-1}$, множества Δ'_ν, $1 \le \nu \le \nu_0$, и многочлены

$$P_\nu(x) = \sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} b_s W_s(x)$$

такие, что для каждого ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ удовлетворяются условия (2.11) и (2.12). Теперь определим множество E и многочлен $P(x)$ следующим образом :

$$E = \Delta \setminus \Delta'_{\nu_0}, \tag{2.13}$$

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} b_s W_s(x) \right), \quad N = N_{\nu_0} - 1, \tag{2.14}$$

где

$$c_s = \begin{cases} b_s, & \text{если} \quad N_{\nu-1} \le s < N_\nu, \ 1 \le \nu \le \nu_0, \\ 0, & \text{если} \quad k_0 \le s < N_1. \end{cases} \tag{2.15}$$

В силу (2.10) для любого ν, $1 \le \nu \le \nu_0$, имеем

$$\gamma \cdot \chi_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \left[2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_{i-1}}(x) \cdot W_{m_i}(x) \right] + 2^\nu \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x). \tag{2.16}$$

Используя (2.11), (2.14) и (2.16), получаем

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x) - 2^{\nu_0} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x).$$

Отсюда и из (2.12) - (2.15) вытекает

$$P(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E; \\ 0, & \notin \Delta, \end{cases} \qquad |E| > |\Delta| \cdot (1 - 2^{\nu_0}).$$

Так как $|\Delta'_{\nu_0}| = 2^{-\nu_0} \cdot |\Delta|$ (см (2.12)) из (2.17) следует

$$\int_\Delta |P(x)|^2 dx \le 2 \cdot \left(\int_\Delta \gamma^2 dx + \int_\Delta 2^{2\nu_0} \cdot \gamma^2 \cdot \chi_{\Delta'_{\nu_0}}(x) dx \right) < 2^{\nu_0+2} \cdot \gamma^2 \cdot |\Delta|. \tag{2.18}$$

Поскольку (см. (2.14))

$$\int_0^1 P(x) \cdot W_k(x) dx = \begin{cases} c_k, & \text{для} \quad k_0 \le k \le N; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то из (2.18) получаем

$$\left(\sum_{k=k_0}^{N} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 P^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{\nu_0+2}{2}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|} < \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\omega(t)$ – непрерывная, возрастающая на интервале $[0,\infty)$ функция такая, что $\omega(+0) = 0$. Для любой ступенчатой функции имеем*

$$f(x) = \sum_{s=1}^{q} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x), \tag{2.19}$$

где Δ_s – интервал вида $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]$, $1 \le i \le 2^m$. Для любого $0 < \epsilon < 1$, $N_0 > 2$, существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ и многочлен $P(x)$ вида

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k W_k(x),$$

которые удовлетворяют следующим условиям :

(1) $$P(x) = f(x) \text{ on } E,$$

(2) $$|E| > (1-\epsilon),$$

(3) $$\sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \epsilon,$$

(4) $$\max_{N_0 \le m < N} \left[\int_e \left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x)\right| dx\right] < \epsilon + \int_e |f(x)| dx,$$

для любого измеримого подмножества e из E.

Доказательство. Пусть $0 < \epsilon < 1$ произвольно. Тогда для любого η, удовлетворяющему условию

$$0 < \eta < \frac{\epsilon^2}{8} \cdot \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right]^{-1},$$

существует положительное число $\delta < \epsilon$ такое, что для любого t $(0 < t < \delta)$ имеем

$$\omega(t) < \omega(\delta) < \eta. \tag{2.20}$$

Не умаляя общности можно считать, что

$$\sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{|\Delta_s|} < \delta, \quad s = 1, 2, ..., q. \tag{2.21}$$

Последовательным применением Леммы 1, можно определить множества $E_s \in \Delta_s$ и многочлены вида

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad s = 1, 2, ..., q,$$

которые удовлетворяют условиям :

$$|E_s| > |\Delta_s| \cdot (1 - \epsilon), \quad P_s(x) = \begin{cases} \gamma_s, & x \in E_s \subset \Delta_s, \quad s = 1, 2, ..., q; \\ 0, & x \notin \Delta_s, \quad s = 1, 2, ..., q, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} |c_k^{(s)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{8}{\epsilon}} \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{|\Delta_s|}. \quad s = 1, 2, ..., q. \tag{2.23}$$

Определим множество E и многочлен $P(x)$ следующим образом :

$$E = \bigcup_{s=1}^{q} E_s, \quad P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{q} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x) \right], \tag{2.24}$$

где

$$c_k = c_k^{(s)} \quad \text{для} \quad N_{s-1} \leq k < N_s, \quad s = 1, 2, ..., q, \quad N = N_q - 1. \tag{2.25}$$

Из (2.19), (2.22) и (2.24) получаем $P(x) = f(x)$ на E и $|E| > (1-\epsilon)$. Учитывая соотношения (2.21), (2.23), (2.25), для любого $k \in [N_0, N]$ имеем

$$|c_k| \leq \max_{1\leq s\leq q}\left[\sqrt{\frac{8}{\epsilon}}\cdot|\gamma_s|\cdot\sqrt{|\Delta_s|}\right] < \delta. \tag{2.26}$$

Отсюда и из (2.20) получаем $\omega(|c_k|) < \omega(\delta) < \eta$ для всех $k \in [N_0, N]$. Следовательно, из (2.21) и (2.23) вытекает

$$\sum_{k=N_0}^{N}|c_k|^2\cdot\omega(|c_k|) < \eta\cdot\sum_{s=1}^{q}\left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1}|c_k^{(s)}|^2\right] < \eta\cdot\frac{8}{\epsilon}\cdot\left[\int_0^1 f^2(x)dx\right] < \epsilon.$$

Таким образом, утверждения 1) - 3) Леммы 2 выполнены. Теперь проверим выполнение утверждения 4). Пусть $N_0 \leq m < N$, тогда в силу (2.23) и (2.24) для некоторого s_0, $1 \leq s_0 \leq q$, $(N_{s_0} \leq m < N_{s_0+1})$ имеем

$$\sum_{k=N_0}^{m}c_kW_k(x) = \sum_{s=1}^{s_0}\left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1}c_k^{(s)}W_k(x)\right] + \sum_{k=N_{s_0}}^{m}c_k^{(s_0+1)}W_k(x). \tag{2.27}$$

Учитывая, что $P(x) = f(x)$ на E, то из (2.19) - (2.27) для любого измеримого множества $e \subset E$ получаем

$$\int_e\left|\sum_{k=N_0}^{m}c_kW_k(x)\right|dx \leq \int_e\left|\sum_{s=1}^{s_0}\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1}c_k^{(s)}W_k(x)\right)\right|dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{k=N_{s_0}}^{m}c_k^{(s_0+1)}W_k(x)\right|dx \leq \int_e|f(x)|dx+\sqrt{\frac{8}{\epsilon}}\cdot|\gamma_{s_0+1}|\cdot\sqrt{|\Delta_{s_0+1}|} < \int_e|f(x)|dx+\epsilon.$$

Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\omega(t)$ – непрерывная, возрастающая на $[0,\infty)$ функция и $\omega(+0) = 0$. Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1] \tag{3.1}$$

последовательность всех тех ступенчатых функций, у которых значения и концевые точки интервалов постоянства суть рациональные числа. Последовательно применяя Лемму 2, построим последовательность множеств $\{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и последовательность многочленов

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < ... < N_s < ...., \quad s = 1, 2, ..., \tag{3.2}$$

для любого измеримого подмножества e из E_s удовлетворяют условиям :

$$P_s(x) = f_s(x), \quad x \in E_s, \tag{3.3}$$

$$|E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0,1], \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} \left|c_k^{(s)}\right| \cdot \omega(|c_k^{(s)}|) < 2^{-2s}, \tag{3.5}$$

$$\max_{N_{s-1} \le p < N_s} \left[\int_e \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| dx \right] < 2^{-2(s+1)} + \int_e |f_s(x)| dx. \tag{3.6}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x) \right], \tag{3.7}$$

где $c_k = c_k^{(s)}$ при $N_{s-1} \le k < N_s$, $s = 1, 2, ...$

Пусть ϵ – любое положительное число. Положим

$$\Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$E = \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} E_s, \quad n_0 = [\log_{1/2} \epsilon] + 1; \tag{3.8}$$

$$B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{n_0} \bigcup \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right).$$

Очевидно, что (см. (3.4)) $|B| = 1$ и $|E| > 1 - \epsilon$. Определим функцию

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in E \cup ([0,1] \setminus B); \\ \mu_n & \text{при} \quad x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq n_0 + 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2n} \cdot \prod_{s=1}^{n} h_s \right]^{-1}, \quad h_s = ||f_s(x)||_\infty + \max_{N_{s-1} \leq p < N_s} || \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) ||_\infty + 1. \tag{3.10}$$

Из (3.5), (3.7) – (3.10) получаем

(A) $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x)$ – измеримая функция и $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}| < \epsilon$.

(B) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \infty$.

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} c_k = 0. \tag{3.11}$$

Учитывая (3.8)-(3.10), для всех $s \geq n_0$ и $p \in [N_{s-1}, N_s)$ получаем

$$\int_{[0,1]\setminus\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu_n dx \right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} 2^{-2s}. \tag{3.12}$$

В силу условий (3.3), (3.8)–(3.10), для всех $s \geq n_0$ имеем

$$\int_0^1 |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx +$$

$$+ \int_{[0,1]\setminus\Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x) dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |P_s(x) - f_s(x)| \mu_n dx \right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left(|f_s(x)| + \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \right) h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} 2^{-2s} < 2^{-2s}. \quad (3.13)$$

Учитывая (3.6), (3.8)- (3.10) и (3.12), для всех $p \in [N_{s-1}, N_s)$ и $s \geq n_0 + 1$ имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx +$$

$$+ \int_{[0,1]\setminus\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x) dx <$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| dx \right] \cdot \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} < \quad (3.14)$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left(2^{-2(s+1)} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_s(x)| dx \right) \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} =$$

$$= 2^{-2(s+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^{s} \mu_n + \int_{\Omega_s} |f_s(x)| \mu(x) dx + \frac{1}{3} 2^{-2s} < \int_0^1 |f_s(x)| \mu(x) dx + 2^{-2s}.$$

Пусть $f(x) \in L_\mu^1[0,1]$. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.1) можно выбрать функцию $f_{\nu_1}(x)$ такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2}, \quad \nu_1 > n_0 + 1. \quad (3.15)$$

Следовательно,

$$\int_0^1 |f_{\nu_1}(x)| \mu(x) dx < 2^{-2} + \int_0^1 |f(x)| \mu(x) dx. \quad (3.16)$$

Из (2.1), (A), (3.13) и (3.15) для $m_1 = 1$ получаем

$$\int_0^1 |f(x) - [P_{\nu_1}(x) + c_{m_1} W_{m_1}(x)]| \mu(x) dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)| \mu(x) dx +$$

$$+\int_0^1 |f_{\nu_1}(x)-P_{\nu_1}(x)|\,\mu(x)dx+\int_0^1 |c_{m_1}W_{m_1}(x)|\,\mu(x)dx<2\cdot 2^{-2}+|c_{m_1}|. \quad (3.17)$$

Пусть выбраны числа $\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_{q-1}$ и $m_1<m_2<\ldots<m_{q-1}$ так, что при $1\le j\le q-1$ выполняются следующие условия :

$$\int_0^1 \left| f(x)-\sum_{s=1}^{j}\left[P_{\nu_s}(x)+c_{m_s}W_{m_s}(x)\right]\right| \mu(x)dx<2\cdot 2^{-2j}+\left|c_{m_j}\right|. \quad (3.18)$$

Возьмём функцию $f_{\nu_q}(x)$ из (3.1) такую, что при $\nu_q>\nu_{q-1}$ и $\nu_q>m_{q-1}$ имеем

$$\int_0^1 \left|\left(f(x)-\sum_{s=1}^{q-1}\left[P_{\nu_s}(x)+c_{m_s}W_{m_s}(x)\right]\right)-f_{n_q}(x)\right| \mu(x)dx<2^{-2q}. \quad (3.19)$$

Отсюда и из (3.18) получаем

$$\int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x)\right|\mu(x)dx<2^{-2q}+2\cdot 2^{-2(q-1)}+\left|c_{m_{q-1}}\right|=9\cdot 2^{-2q}+\left|c_{m_{q-1}}\right|. \quad (3.20)$$

Из условий (3.13), (3.14) и (3.20) имеем

$$\int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x)-P_{\nu_q}(x)\right|\mu(x)dx<2^{-2\nu_q},\quad P_{\nu_q}(x)=\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)}W_k(x), \quad (3.21)$$

$$\max_{N_{\nu_q-1}\le p<N\nu_q}\int_{0.}^1 \left|\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{p} c_k^{(\nu_q)}W_k(x)\right|\mu(x)dx<10\cdot 2^{-2q}+\left|c_{m_{q-1}}\right|. \quad (3.22)$$

Положим

$$m_q=\min\left\{n\in N: n\notin\left\{\left\{\{k\}_{k=N_{\nu_s-1}}^{N_{\nu_s}-1}\right\}_{s=1}^{q}\cup\{m_s\}_{s=1}^{q-1}\right\}\right\}. \quad (3.23)$$

Учитывая соотношения (2.1), (A), (3.19) и (3.21) получаем

$$\int_0^1 \left| f(x)-\sum_{s=1}^{q}\left[P_{\nu_s}(x)+c_{m_s}W_{m_s}(x)\right]\right| \mu(x)dx\le$$

(3.24)

$$\le\int_0^1 \left|\left(f(x)-\sum_{s=1}^{q-1}\left[P_{\nu_s}(x)+c_{m_s}W_{m_s}(x)\right]\right)-f_{\nu_q}(x)\right| \mu(x)dx+$$

$$+\int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x)\right| \mu(x)dx + \int_0^1 \left|c_{m_q} W_{m_q}(x)\right| \mu(x)dx < 2\cdot 2^{-2q} + \left|c_{m_q}\right|.$$

Таким образом, мы можем по индукции выбрать из ряда (3.7) последовательности членов $c_{m_q} W_{m_q}(x)$, $q = 1, 2, \ldots$, и многочленов

$$P_{\nu_q}(x) = \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} W_k(x), \quad N_{n_q-1} > N_{n_{q-1}}, \quad q = 1, 2, \ldots, \tag{3.25}$$

удовлетворяющие условиям (3.22) – (3.24) для всех $q \geq 1$. Учитывая выбор $P_{\nu_q}(x)$ и $c_{m_q} W_{m_q}(x)$ (см. (3.23) и (3.25)), получаем, что ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} W_k(x) + c_{m_q} W_q(x) \right] \tag{3.26}$$

получается из ряда (3.7) перестановкой членов.
Обозначая ряд (3.36) в виде $\sum c_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x)$, из (3.11), (3.22) и (3.24) получаем, что последний ряд сходится к функции $f(x)$ в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]$, т.е. ряд (3.7) универсален относительно перестановок. Используя индукцию, легко проверить, что для любой функции $f(x) \in L^1_\nu[0,1]$, из последовательности (3.2) можно выбрать многочлены

$$P_{r_s}(x) = \sum_{k=N_{r_s-1}}^{N_{r_s}-1} c_k^{(r_s)} W_k(x), \quad r_{s-1} < r_s, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{N} P_{r_s}(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-N}, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

$$\max_{N_{r_s-1} \leq m < N r_s} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{r_s-1}}^{p} c_k^{(r_s)} W_k(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-N}, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда следует, что подряд (3.7)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[\sum_{k=N_{r_s}-1}^{N_{r_s}-1} c_k^{(r_s)} W_k(x)\right]$$

сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1]$. Это означает, что ряд (3.7) универсален в пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно подрядов. Теорема 1 доказана.

Автор выражает свою благодарность профессору М. Г. Григоряну за замечания и обсуждения.

Abstract. The paper constructs a weighted space $L^1_\mu[0,1]$ and a series $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$ by Walsh system universal in $L^1_\mu[0,1]$ with respect to rearrangements and by subseries.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "О частичных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, стр. 197 — 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. Сборник, том 26, стр. 351 — 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду последовательности частичных сумм общих ортогональных рядов", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 10, стр. 17 — 34, 1957.
4. А. А. Талалян, "О рядах универсальных относительно перестановок", Изв. АН СССР, серия Математика, том 24, стр. 567 — 604, 1960.
5. M. G. Grigorian "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia. Math., vol. 134, no. 3, pp. 211 — 237, 1999.
6. M. G. Grigorian, S. A. Episkoposian, "Representation of functions in weighted spaces $L^1_\mu[0,1]$ by trigonometric and Walsh series", Analysis Mathematica, vol. 27, pp. 261 — 277, 2001.
7. П. Л. Ульянов, "О безусловной сходимости и суммируемости", Изв. АН СССР, серия Математика, том 22, стр. 811 — 840, 1958.
8. R. Paley, "A remarkable systems of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., vol. 34, pp. 241 — 279, 1932.

Поступила 17 марта 2003

Известия НАН Армении. Математика, **38**, *№ 4, 2003, 41–50*

О РАВНОМЕРНО КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

Э. В. Габриелян, В. А. Мартиросян

Институт математики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Резюме. В статье исследуется возможность равномерно касательной аппроксимации на двух гладких кривых (лучах) с общим началом, голоморфными в круге функциями, представимыми степенными рядами с предписанными лакунами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В недавних статьях [1] - [4] исследовалась равномерно касательная аппроксимация в области $\Omega \subset \mathbf{C}$ (из конечной комплексной плоскости) голоморфными в Ω функциями, которые в окрестности некоторой фиксированной точки из Ω представляются степенными рядами с наперёд предписанными лакунами. В упомянутых статьях аппроксимация указанного типа изучалась как на разных классах кривых так и на более общих замкнутых подмножествах области Ω (так называемые множества Карлемана). В настоящей работе лакунарная аппроксимация изучается на паре гладких кривых с общим началом (в частности, на двух лучах с общей вершиной).

Для формулировки полученных результатов введём некоторые обозначения. Пусть D_R – открытый круг из плоскости $\mathbf{C}$ с центром в нуле и радиусом R $(0 < R \leq \infty)$, при этом полагаем $D_\infty = \mathbf{C}$. Для множества $e \subset \mathbf{C}$ обозначим через $\bar{e}$ и ∂e замыкание и границу множества e, соответственно.

Рассмотрим локально гладкую дугу $\Gamma \subset D_R$, соединяющую начало координат с ∂D_R и удовлетворяющую следующим условиям :

a) дуга Γ имеет с каждой окружностью $\partial D_r (0 < r < R)$ только одну точку пересечения ;

b) в каждой точке $z \in \Gamma$ угол между Γ и окружностью $\partial D_{|z|}$ больше некоторого числа $\gamma \in (0, \pi/2)$, не зависящего от $z \in \Gamma$.

Для такой дуги Γ и числа $\alpha \in [0, \pi]$ положим $E_\alpha = \Gamma \cup \Gamma_\alpha$, где $\Gamma_\alpha = \{z \in D_R : z = we^{i\alpha}, w \in \Gamma\}$. В частности, E_α может совпадать с двумя лучами имеющими общее начало в нуле и образующими угол α.

Как обычно, обозначим через $H(D_R)$ и $C(E_\alpha)$, соответственно, множества всех голоморфных в D_R и непрерывных на E_α функций. Пусть Q – заданная подпоследовательность из $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим $Q_k = \{q_n \in Q \setminus \{0\} : q_n \equiv k (\operatorname{mod} m)\}$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Будем говорить, что *возможна равномерно касательная лакунарная аппроксимация*, если для любых функций f и $e > 0$ из $C(E_\alpha)$ существует функция g, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \tag{1}$$

и такая, что $|f(z) - g(z)| < e(z)$ при $z \in E_\alpha$. Основным результатом работы является следующая теорема :

Теорема 1.

1. Пусть $\alpha/2\pi = \ell/m$, где ℓ и m – взаимно простые числа. Тогда для возможности равномерно касательной лакунарной аппроксимации необходимо и достаточно, чтобы из следующих m рядов

$$\sum_{q_n \in Q_k} q_n^{-1}, \quad k = 0, 1, ..., m-1, \tag{2}$$

расходились бы по крайней мере два ряда.

2. Пусть $\alpha/2\pi$ иррационально. Тогда условие

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{n}{q_n} > 0 \tag{3}$$

является достаточным условием для возможности равномерно касательной лакунарной аппроксимации.

Отметим любопытную особенность Теоремы 1 состоящую в том, что в её формулировке не фигурирует величина раствора α угла между кривыми Γ и Γ_α.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Ниже для r, s $(0 < r < s < R)$ полагаем $e_\alpha(r,s) = \overline{D_r} \cup \left(E_\alpha \cap \overline{D_s}\right)$. Для множества B и числа b из $\mathbf{C}$ пусть $B \cdot b = \{z : z = wb,\ w \in B\}$. Для заданного компактного множества $e \subset \mathbf{C}$ обозначим через $A(e)$ банахово пространство всех непрерывных на e и голоморфных на внутренности e функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in e\}$.

Лемма 1 (см. [1]). *Пусть Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n^{-1} = \infty$, μ – комплексная мера Бореля на $e_0(r,s)$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\int\limits_{e_0(r,s)} z^{q_n}\, d\mu(z) = 0 \quad \text{при} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Тогда мера μ сосредоточена на $\overline{D_r}$.

Отметим, что частный случай Леммы 1, когда $r = 0$, совпадает с достаточной частью комплексного аналога известной теоремы Мюнца для случая натуральных показателей (см. [5] – [9]).

Лемма 2. *Пусть $\alpha/2\pi = \ell/m$, где ℓ и m взаимно простые числа и Q – подпоследовательность для $\mathbb{N}_0$, для которой расходятся по крайней мере два ряда из m рядов (2). Тогда для любой функции $f \in A(e_\alpha(r,s))$, представимой в окрестности нуля степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \text{где} \quad f_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q, \tag{4}$$

и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k, \quad \text{где} \quad p_k = 0 \quad \text{при} \quad k \notin Q \tag{5}$$

такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in e_\alpha(r,s).$$

Доказательство. Пусть π – подпространство для $A(e_\alpha(r,s))$, являющееся равномерным замыканием множества всех многочленов вида (5). Нам нужно доказать, что для любой функции имеем $f \in \pi$. Согласно теоремам Хана–Банаха и Ф. Рисса, достаточно доказать, что для любой комплексной меры Бореля μ, удовлетворяющей соотношениям

$$\int_{e_\alpha(r,s)} z^{q_n}\, d\mu(z) = 0 \quad \text{для} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

будет выполняться также условие

$$\int_{e_\alpha(r,s)} f(z)\, d\mu(z) = 0. \tag{7}$$

Пусть ν_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ – комплексные меры Бореля на $e_0(r,s)$, определённые следующим образом : для любого борелевского подмножества $e \subseteq e_0(r,s)$ полагаем

$$\nu_k(e) = \mu\left(e \cap \overline{D_r}\right) + \mu\left(e^*\right) + \omega^{k\ell}\mu\left(e^* \cdot \omega^\ell\right),$$

где $e^* = e \setminus \overline{D_r}$ и $\omega = \exp(2\pi i/m)$. В силу (6), получаем

$$\int_{e_0(r,s)} z^{q_n}\, d\nu_k(z) = 0 \quad \text{при} \quad q_n \in Q_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{8}$$

В предположениях леммы, существуют числа k_1, $k_2 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ $(k_1 \neq k_2)$, для которых расходятся соответствующие из рядов (2). Следовательно, по Лемме 1 и из (8), при $k = k_1, k_2$ вытекает, что меры ν_k сосредоточены на $\overline{D_r}$, т.е.

$$\mu\left(e^*\right) + \omega^{k\ell}\mu\left(e^* \cdot \omega^\ell\right) = 0 \quad \text{при} \quad k = k_1, k_2.$$

Так как ℓ и m взаимно простые, то определитель полученной линейной системы отличен от нуля, и поэтому $\mu\left(e^*\right) = \mu\left(e^* \cdot \omega^\ell\right) = 0$. Следовательно, мера μ также сосредоточена на $\overline{D_r}$. Чтобы показать, что из (6) вытекает (7), осталось заметить, что для любой функции $f \in A\left(\overline{D_r}\right)$ арифметические средние частичных сумм степенного ряда функции f сходится к f равномерно на $\overline{D_r}$. Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Условие расходимости по крайней мере двух рядов из m рядов (2) необходимо для справедливости Леммы 2 в случае, когда $r = 0$ и $\Gamma \cap \overline{D_s}$ – аналитическая дуга.

В самом деле, предположим, что из рядов (2) расходится только один ряд (с некоторым индексом k_1). Существование хотя бы одного такого ряда следует из необходимой части комплексного аналога теоремы Мюнца (см. [7], [8]). Согласно этой теоремы существует комплексная мера Бореля μ на $J = \Gamma \cap \overline{D_s}$ такая, что $\mu(0) = 0$ и

$$\int\limits_J z^{q_n} d\mu(z) = 0 \quad \text{при} \quad q_n \in Q_k \quad k = 0, 1, ..., m-1, \ k \neq k_1,$$

$$\int\limits_J z^{q_n} d\mu(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad q_n \in (\mathbb{N} \setminus Q) \cup Q_{k_1}.$$

На $e_\alpha(0, s)$ определим комплексную меру Бореля ν следующим образом :

$$\nu(e) = \mu(e \cap J) - \omega^{-k_1 \ell} \mu((e \cap J_\alpha) \cdot \omega^{-\ell}), \quad J_\alpha = \Gamma_\alpha \cap \overline{D_s},$$

где e – произвольное борелевское подмножество из $e_\alpha(0, s)$. Тогда для $q_n \in Q_k$ $(k = 0, 1, ..., m-1)$ имеем

$$\int\limits_{e_\alpha(0,s)} z^{q_n} d\nu(z) = \left(1 - \omega^{(k-k_1)\ell}\right) \int\limits_J z^{q_n} d\mu(z),$$

откуда следует

$$\int\limits_{e_\alpha(0,s)} z^{q_n} d\nu(z) = 0 \quad \text{при } q_n \in Q_k \ k = 0, 1, ..., m-1,$$

$$\int\limits_{e_\alpha(0,s)} z^{q_n} d\nu(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad q_n \in \mathbb{N} \setminus Q.$$

Итак, для меры ν, из соотношений (6) условие (7) не вытекает.

Лемма 3. *Пусть $\alpha/2\pi$ иррационально и подпоследовательность Q для $\mathbb{N}_0$, удовлетворяет условию (3), тогда справедливо заключение Леммы 2.*

Доказательство. Аналогично доказательству Леммы 2, достаточно показать, что для любой комплексной меры Бореля μ на $e_\alpha(r,s)$, удовлетворяющей (6), будет выполняться также условие (7). С этой целью возьмём произвольную такую меру μ и рассмотрим её преобразование Коши

$$G(t) = \int\limits_{e_\alpha(r,s)} \frac{d\mu(z)}{t-z}, \quad t \in \mathbf{C} \setminus e_\alpha(r,s).$$

Очевидно, что $G \in H\left(\overline{\mathbf{C}} \setminus e_\alpha(r,s)\right)$, где $\overline{\mathbf{C}}$ – расширенная комплексная плоскость. В силу (6) в окрестности бесконечности, G разлагается в степенной ряд

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-p_n-1} \int\limits_{e_\alpha(r,s)} z^{p_n} d\mu(z), \quad |t| > s, \tag{9}$$

где $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность, дополнительная к Q относительно $\mathbb{N}$. Покажем, что радиус сходимости R ряда (9) удовлетворяет неравенству $R \le r$. В самом деле, очевидно, имеем $0 \le R \le s$. Предположим, что $r < R \le s$. Поскольку $G \in H\left(\overline{\mathbf{C}} \setminus e_\alpha(r,s)\right)$, то тогда из равенства (9) следует, что этот ряд на границе ∂D_R круга сходимости имеет одну или две особые точки. В первом из указанных случаев из результата Г. Полиа (см. [12], Теорема А, стр. 737, а также [10]) вытекает

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{q_n} = 0. \tag{10}$$

Во втором случае, учитывая, что $\alpha/2\pi$ иррационально, (10) вытекает из соответствующего результата А. Макинтайра и Р. Уилсона (см. [13], Теорема 3). Итак, в обеих случаях получается противоречие с условием (3). Следовательно, требуемое неравенство $R \le r$ доказано.

Обозначим через G_1 сумму ряда (9). Очевидно, что $G_1 \in H\left(\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{D_r}\right)$. Согласно (9) функции $G(t)$ и $G_1(t)$ совпадают при $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{D_s}$. Поэтому, по теореме единственности аналитических функций, они совпадают при $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus e_\alpha(r,s)$. Следовательно, по теореме единственности для преобразования Коши получим, что мера μ сосредоточена на $\overline{D_r}$. Теперь уже вывод условия (7) из (6) очевиден. Лемма 3 доказана.

Замечание 2. Существуют подпоследовательности Q из $\mathbb{N}_0$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_n} = 0 \tag{11}$$

и Лемма 3 остаётся справедливой для случая $r = 0$.

Определим сперва подходящую подпоследовательность $\{k_m\}_0^\infty$ из $\mathbb{N}_0$ ($k_0 = 0$). Обозначим через S_m ($m = 1, 2, ...$) линейную оболочку степеней $\{z^{mn}, 1 \le n \le k_m\}$. В качестве k_1 выберем наименьшее натуральное число такое, что $\operatorname{dist}(z; S_1) < 1$. Предполагая числа k_1, ..., k_{m-1} уже определёнными, выберем в качестве k_m наименьшее натуральное число, которое больше чем k_{m-1} и удовлетворяет условию $\operatorname{dist}(z, z^2, ..., z^m;\ S_m) < m^{-1}$. Существование такого k_m вытекает из Леммы 3, так как степени z, z^2, ..., z^m принадлежат замыканию линейной оболочки системы функций $\{z^{mn}, n > k_{m-1}\}$.

Зададим теперь требуемую подпоследовательность Q полагая $q_n = mn$ при $k_{m-1} < n \le k_m$, $m = 1, 2, ...$ Очевидно, что Q удовлетворяет (11). Остаётся убедиться, что замыкание S_∞ линейной оболочки системы функций $\{z^{q_n}\}_0^\infty$ совпадает с $C(e_\alpha(0, s))$. В самом деле, так как $S_m \subset S_\infty$, то $\operatorname{dist}(z^q;\ S_\infty) \le m^{-1}$ при $m \ge q$. Следовательно, $z^q \in S_\infty$ при любом $q \in \mathbb{N}_0$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем сперва достаточность части 1 и часть 2. Пусть $\{r_n\}_0^\infty$ – возрастающая последовательность действительных чисел сходящаяся к R, причём $r_0 = 0$. Выберем убывающую последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ стремящуюся к нулю и удовлетворяющую условию $\delta_n < \min\{e(z) : z \in E_\alpha, r_n \le |z| \le r_{n+1}\}$ при $n = 0, 1, ...$ Положим далее $\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2}$ при $n = 0, 1, ...$ и $\alpha_{-1} = 0$. По индукции построим подходящую последовательность многочленов вида (5). Согласно Леммам 2 и 3, при $r = 0$ найдётся многочлен p_0 вида (5) такой, что $|f(z) - p_0(z)| < \alpha_0$ при $z \in \overline{D}_{r_1} \cap E_\alpha$. Рассмотрим функцию

$$h_1(z) = \begin{cases} p_0(z) & \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_1}, \\ f(z) - \frac{z_{21}-z}{z_{21}-z_{11}}\,[f(z_{11}) - p_0(z_{11})] & \text{при} \quad z \in (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}) \cap \Gamma, \\ f(z) - \frac{z_{22}-z}{z_{22}-z_{12}}\,[f(z_{12}) - p_0(z_{12})] & \text{при} \quad z \in (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}) \cap \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Здесь и ниже $\partial D_{r_n} \cap \Gamma = \{z_{n1}\}, \partial D_{r_n} \cap \Gamma_\alpha = \{z_{n2}\}$. Так как $h_1 \in A(e_\alpha(r_1, r_2))$, то согласно Леммам 2 и 3 существует многочлен p_1 вида (5) такой, что $|h_1(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in e_\alpha(r_1, r_2)$. В частности, имеем $|p_0(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in \overline{D}_{r_1}$ и

$$|f(z) - p_1(z)| < \begin{cases} \alpha_1 & \text{при} \quad z = z_{21}, z_{22} \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \text{при} \quad z \in (\overline{D}_{r_2} \setminus D_{r_1}) \cap E_\alpha. \end{cases}$$

Предположим, что уже построен многочлен p_n вида (5) такой, что

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_n} \tag{12}$$

и

$$|f(z) - p_n(z)| < \begin{cases} \alpha_n & \text{при} \quad z = z_{n+1,1}, z_{n+1,2} \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при} \quad z \in (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}) \cap E_\alpha. \end{cases} \tag{13}$$

Теперь построим многочлен p_{n+1} вида (5) следующим образом. Рассмотрим функцию $h_{n+1}(z) =$

$$= \begin{cases} p_n(z) & \text{при} \quad z \in \overline{D}_{r_{n+1}}, \\ f(z) - \frac{z_{n+2,1} - z}{z_{n+2,1} - z_{n+1,1}} [f(z_{n+1,1}) - p_n(z_{n+1,1})] & \text{при} \quad z \in (\overline{D}_{r_{n+2}} \setminus D_{r_{n+1}}) \cap \Gamma, \\ f(z) - \frac{z_{n+2,2} - z}{z_{n+2,2} - z_{n+1,2}} [f(z_{n+1,2}) - p_n(z_{n+1,2})] & \text{при} \quad z \in (\overline{D}_{r_{n+2}} \setminus D_{r_{n+1}}) \cap \Gamma_\alpha. \end{cases}$$

Ясно, что $h_{n+1}(z) \in A(e_\alpha(r_{n+1}, r_{n+2}))$. Согласно Леммам 2 и 3 существует многочлен p_{n+1} вида (5) такой, что $|h_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| < \alpha_{n+1}$ при $z \in e_\alpha(r_{n+1}, r_{n+2})$. Отсюда следуют оценки типа (12) и (13) с заменой в них n на $n+1$. Таким образом, требуемая последовательность многочленов вида (5) построена.

Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)), \quad z \in D_R.$$

Из (12) вытекает, что полиномиальный ряд сходится абсолютно и локально равномерно на D_R. Следовательно, $g \in H(D_R)$, и в окрестности нуля g разлагается в степенной ряд вида (1). Пусть, далее $z \in E_\alpha$, т.е. $z \in (\overline{D}_{r_{n+1}} \setminus D_{r_n}) \cap E_\alpha$ при некотором $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда имеем $f(z) - g(z) = (f(z) - p_n(z)) + (p_n(z) - g(z))$, где согласно (12) и (13) получаем $|f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1}$,

$$|g(z) - p_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (p_{k+1}(z) - p_k(z)) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, получаем

$$|f(z) - g(z)| < \sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k = \delta_n.$$

С учётом выбора чисел δ_n, получим

$$|f(z) - g(z)| < e(z) \quad \text{при} \quad z \in E_\alpha.$$

Достаточность части 1 и часть 2 теоремы доказаны.

Докажем теперь необходимость части 1. Очевидно, что возможность равномерно касательной лакунарной аппроксимации влечёт возможность равномерной аппроксимации многочленами вида (5) для любой функции из $C(e_\alpha(0,s))$ на любом компакте $e_\alpha(0,s)$, где $s < R$. Следовательно, необходимость части 1 вытекает из Замечания 1. Теорема 1 доказана.

Abstract. The paper investigates the possibility of uniform tangential approximation on two smooth curves (rays) with common origin by holomorphic in a disk functions representable by power series with prescribed lacunae.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян, "О равномерно касательном приближении лакунарными степенными рядами на кривых комплексной плоскости", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 28, № 3, стр. 31 – 39, 1993.
2. В. А. Мартиросян, "О равномерно касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 59 – 67, 1995.
3. Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян, "О равномерно касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана. II", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 68 – 75, 1995.
4. L. Hoischen, "A generalization of theorems of Eidelheit and Carleman concerning approximation and interpolation", Journal of Approxim. Theory, vol. 71, pp. 154 – 174, 1992.
5. Ch. H. Müntz, "Über den Approximationssatz von Weierstrass", Mathematische Abhandlungen Hermann A. Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubileum am August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern, pp. 303 - 312, Springer Verlag, Berlin, 1914.
6. J. A. Siddiqi, "Approximation polynomiale sur un arc dans le plan complexe", Compt. rend. Acad. sci., vol. 227, pp. 731 – 733, 1973.
7. Ж. Кореваар, "Лакунарные формы теорем приближений Уолша", Труды межд. Конференции по Теории приближения функций, Москва, Наука, стр. 229 – 237, 1977.
8. P. Malliavin and J. A. Siddiqi, "Classes de fonctions monogenes et approximation par des sommes déxponentielles sur un arc rectifiable de **C**", Compt. rend. Acad. sci., vol. 282, pp. 1091 – 1094, 1976.
9. J. Korevaar, "Müntz approximation on arcs and Macintyre exponents", Lect. Notes Math., vol. 747, pp. 205 – 218, 1979.
10. L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung, Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1955.

11. G. Polya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potencreihen", Math. Z., Bd. 29, s. 549 – 640, 1929.
12. G. Polya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potencreihen", Zweite Mitt., Annals Math.(2), Bd. 34, s. 731 – 777, 1933.
13. A. J. Macintyre and R. Wilson, "Coefficient density and the distribution of singular points on the circle of convergence", Proc. London Math. Soc.(2), vol. 47, pp. 68 – 80, 1940.

Поступила 22 июля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 51-64

UNIVERSAL POWER SERIES WITH POISSON GAPS

T. Gharibyan and W. Luh

Universität Trier, Fachbereich IV, Mathematik, Trier, Germany
Institute of Mathematics, Armenian National Academy of Sciences
E-mails : gtatev@icqmail.com   luh@uni-trier.de

Abstract. Holomorphic functions on **D** and **C** that are universal with respect to both translates and derivatives are constructed. The corresponding universal functions are determined by lacunary power series with gaps of positive lower Poisson density.

§1. INTRODUCTION

For a compact set K in the complex plane $\mathbf{C}$ we denote by $A(K)$ the set of all complex valued functions, that are continuous on K and holomorphic in its interior K^0. Supplied with the uniform norm, $A(K)$ becomes a Banach space. By $\mathcal{M}$ we denote the family of all compact sets which have connected complement.
The problem of "universal approximation" of functions by so-called "universal elements" are classical and there exists an extended literature on the theory of functions which are universal in different respects. The first example (which we cite in a slightly modified form) was given by Fekete in 1914 (see Pál [20]), who proved the existence of a universal real power series $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ with the property that for every interval $[a, b]$ with $0 \notin [a, b]$ and every continuous function f on $[a, b]$ there exists a sequence $\{n_k\}$ such that $\{\sum\limits_{\nu=0}^{n_k} a_\nu x^\nu\}$ converges uniformly to $f(x)$ on $[a, b]$. Obviously this power series has radius of convergence $r = 0$.
Universal power series (with respect to overconvergence) in the complex plane with positive radii of convergence were constructed by W. Luh in 1970 [8] and

---

The research work of the first author has been supported by Forschungsfond Universität Trier.

independently by Chui and Parnes in 1971 [3].

Perhaps the best known example of a universal function was obtained by Birkhoff in 1929 [1], who proved the existence of an entire function ϕ with universal translates, meaning that for every entire function f there exists a subsequence $\{n_k\}$ of the set of natural numbers $\mathbb{N}$ such that $\{\phi(z+n_k)\}$ converges to $f(z)$ compactly on $\mathbb{C}$.

The approximation theorems of Runge and Mergelian are in general the basic tools for construction of the elements that are universal in a certain specified sense. For details we refer to the article of Grosse-Erdmann [7], where a survey of the various universalities as well as a complete bibliography of relevant contributions updated till 1998 can be found.

We mention some further results which are of interest for our investigations.

In 1953 MacLane [18] has constructed an entire function ϕ with universal derivatives, by proving that for every entire function f there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{\phi^{(n_k)}(z)\}$ converges to $f(z)$ compactly on $\mathbb{C}$.

Motivated by Birkhoff's result in a series of papers (see [9] – [14]) W. Luh has investigated holomorphic functions in more general open sets, universal under certain translations. For instance in [11] was proved that there exists a holomorphic function in the unit disk $\mathbf{D} := \{z : |z| < 1\}$ possessing the property that for every $\zeta \in \partial\mathbf{D}$, every $K \in \mathcal{M}$ and every $f \in A(K)$ there exist sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ such that $a_n \to 0$, $b_n \to \zeta$ and $\{\phi(a_n z + b_n)\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

Some recent papers fixed their attentions to functions which together with universalities possess additional properties (Schneider [23] and Tenthoff [24]). In several articles (see [15] – [17]), Luh, Martirosian and Müller have dealt with functions which have lacunary power series expansions and are universal with respect to translates.

In this note we construct holomorphic functions possessing several different universalities. In Theorems 1 and 2 we prove the existence of holomorphic functions on $\mathbf{D}$ and $\mathbf{C}$ respectively with lacunary power series, that are universal with respect to both translates and derivatives. In addition it is shown that the "paths of approximation" can be prescribed in an arbitrary way. Our basic tool is a result from [5] (Lemma 1, stated below) on the approximation by lacunary polynomials with gaps of positive lower Poisson density. Finally we show that the functions which were obtained in Theorems 1 and 2 possess additional universal properties with respect to almost everywhere approximation of Lebesgue measurable functions.

§2. REMARKS ON DENSITY PROPERTIES

For a subsequence $Q = \{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ of $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ various notions of densities have been introduced. We denote by $n(t)$ the number of elements of Q in the interval $[0, t]$.

The upper ($\overline{\Delta}(Q)$) and the lower ($\underline{\Delta}(Q)$) densities of Q are given by

$$\overline{\Delta}(Q) := \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n(t)}{t}, \qquad \underline{\Delta}(Q) := \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n(t)}{t}.$$

If $\overline{\Delta}(Q) = \underline{\Delta}(Q)$, then the common value is called the density of Q. The maximal and minimal densities of Q are defined by

$$\Delta_{\max}(Q) := \lim_{r\to 1-} \left(\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n(t)-n(tr)}{(1-r)t} \right), \qquad \Delta_{\min}(Q) := \lim_{r\to 1-} \left(\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n(t)-n(tr)}{(1-r)t} \right)$$

respectively. These notions were essentially utilized by Pólya [21].
In this article we deal with two density concepts, which were introduced by Poisson. The expressions

$$\overline{\Delta}_p(Q) := \frac{2}{\pi} \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_0^\infty \frac{n(t)}{t} \cdot \frac{s}{t^2+s^2} dt, \qquad \underline{\Delta}_p(Q) := \frac{2}{\pi} \underline{\lim_{s\to\infty}} \int_0^\infty \frac{n(t)}{t} \cdot \frac{s}{t^2+s^2} dt$$

are called the upper and the lower Poisson densities of Q respectively. The following chain of inequalities is well known :

$$\Delta_{\min}(Q) \le \underline{\Delta}(Q) \le \underline{\Delta}_p(Q) \le \overline{\Delta}_p(Q) \le \overline{\Delta}(Q) \le \Delta_{\max}(Q).$$

For further properties of the various notions of densities and their interdependences we refer to [22] (see also [2]).

§3. AUXILIARY RESULTS

In this section we state two lemmas from [13] and [5] which will be used in the proofs of our main results. We consider a subsequence $Q = \{q_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ of $\mathbb{N}_0$ and denote by $\mathcal{P}_Q$ the set of all polynomials of the form $p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu z^{q_\nu}$. The first lemma describes the possibilities of approximation of functions by polynomials from $\mathcal{P}_Q$, when Q has positive lower Poisson density.

Lemma 1 (see [5]). *Consider for $r > 0$ and $s > 0$ the disks*

$$\mathbf{D}_r := \{z : |z| < r\}, \qquad \mathbf{D}_s(a) := \{z : |z-a| < s\},$$

assume that $r + s < |a|$ *and* $\overline{\mathbf{D}_r} \cap \overline{\mathbf{D}_s(a)} = \phi$ *and define* $K := \overline{\mathbf{D}_r} \cup \overline{\mathbf{D}_s(a)}$. *Let* $Q = \{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ *be a subsequence of* $\mathbb{N}_0$ *with* $\underline{\Delta}_p(Q) > \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{s}{|a|}$, *and let* $f \in A(K)$ *be a function which in a neighborhood of the origin has a representation of the form* $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^{q_\nu}$. *Then for every* $\varepsilon > 0$ *there exists a polynomial* $p \in \mathcal{P}_Q$ *satisfying*

$$\max_K |f(z) - p(z)| < \varepsilon.$$

The next Lemma is a generalization of MacLane's result which was mentioned in the introduction.

Lemma 2 (see [13]). *Let* $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *be a prescribed subsequence of* $\mathbb{N}_0$. *Then there exists an entire function* $\varphi = \varphi_\lambda$ *with the following property : for any entire function* f *there exists a subsequence* $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *of* $\mathbb{N}$, *such that the corresponding sequence of derivatives* $\{\varphi^{(\lambda_{m_k})}(z)\}$ *converges to* $f(z)$ *compactly on* $\mathbf{C}$.

§4. UNIVERSAL ENTIRE FUNCTIONS

Let $Q = \{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ be a subsequence of $\mathbb{N}_0$. We denote by $\mathcal{E}_Q$ the set of all entire functions with a power series representation $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^{q_\nu}$. First we prove the existence of an entire function which is universal with respect to both translates and derivatives.

Theorem 1. *Let be prescribed :*

- *a subsequence* Q *of* $\mathbb{N}_0$ *with* $\underline{\Delta}_p(Q) > 0$,
- *an unbounded sequence* $\{z_n\}$ *in* $\mathbf{C}$,
- *a subsequence* $\{\lambda_n\}$ *of* $\mathbb{N}_0$.

Then there exists an entire function ϕ *with the following properties :*
For any set $K \in \mathcal{M}$ *and any function* $f \in A(K)$ *there exist subsequences* $\{p_k\}$ *and* $\{q_k\}$ *of* $\mathbb{N}$ *such that* $\{\phi(z + z_{p_k})\}$ *and* $\{\phi^{(\lambda_{q_k})}(z)\}$ *converge to* $f(z)$ *uniformly on* K.
The function ϕ *has the form* $\phi = \Psi + \varphi$ *where* $\Psi \in \mathcal{E}_Q$ *and* φ *is an entire function.*

Proof. 1. Let $d \geq 1$ satisfy

$$\underline{\Delta}_p(Q) > \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2d}.$$

We define

$$d_0 := 1, \qquad d_n := \frac{|z_n| - |z_{n-1}|}{2d}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Without loss of generality, we assume that $\{d_n\}$ is strictly increasing and $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ (otherwise we can choose a suitable subsequence of $\{z_n\}$ which has the desired property). By $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ we denote an enumeration of all polynomials whose coefficients have rational real and imaginary parts. Let φ be the entire function from Lemma 2 with respect to $\{\lambda_n\}$.

2. We construct a sequence of polynomials $P_n \in \mathcal{P}_Q$ and a sequence of numbers $m_n \in \mathbb{N}_0$ by induction. We take $P_0(z) \equiv 0$, $m_0 = 0$ and suppose that for $n \in \mathbb{N}$ $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$; $m_0, m_1, ..., m_{n-1}$ have already been determined.

According to Lemma 2 we can choose a sufficiently large natural number $m_n := \lambda_{j_n}$ to have $m_n > m_{n-1} + n$, $m_n > deg(P_{n-1})$ and

$$\max_{|z|\le|z_{n-1}|} \left|\varphi^{(m_n)}(z) - \Omega_n(z)\right| < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

By Lemma 1 we find a polynomial $P_n \in \mathcal{P}_Q$ satisfying

$$\max_{|w|\le|z_{n-1}|+d_{n-1}} \left|P_n(w) - P_{n-1}(w)\right| < \varepsilon_n := \frac{1}{(n+1)^2 \cdot m_n! \cdot (|z_{n-1}| + d_{n-1})}, \tag{2}$$

$$\max_{|w-z_n|\le d_n} \left|P_n(w) - \Omega_n(w - z_n) + \varphi(w)\right| < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

By induction we get $\{P_n(w)\}$ and $\{m_n\}$.

It follows from (2) that

$$\Psi(w) := \sum_{\nu=1}^{\infty}\{P_\nu(w) - P_{\nu-1}(w)\}$$

is an entire function which belongs to $\mathcal{E}_Q$. We show that $\phi(w) := \Psi(w) + \varphi(w)$ has the desired universal properties.

3. We obtain for all $\nu \ge n$

$$\max_{|z|\le|z_{\nu-1}|} \left|P_\nu^{(m_n)}(z) - P_{\nu-1}^{(m_n)}(z)\right| =$$

$$= \max_{|z|\le|z_{\nu-1}|} \left|\frac{m_n!}{2\pi i} \int\limits_{|w|=|z_{\nu-1}|+d_{\nu-1}} \frac{P_\nu(w) - P_{\nu-1}(w)}{(w-z)^{m_n+1}}\, dw\right| \le$$

$$\le m_n! \cdot (|z_{\nu-1}| + d_{\nu-1}) \cdot \varepsilon_\nu \cdot \frac{1}{(d_{\nu-1})^{m_n+1}} \le m_\nu! \cdot (|z_{\nu-1}| + d_{\nu-1}) \cdot \varepsilon_\nu < \frac{1}{(\nu+1)^2}.$$

It follows

$$\max_{|z|\le|z_{n-1}|}\left|\Psi^{(m_n)}(z)\right| \le \sum_{\nu=n}^{\infty} \max_{|z|\le|z_{\nu-1}|}\left|P_\nu^{(m_n)}(z)-P_{\nu-1}^{(m_n)}(z)\right| \le \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^2}<\frac{1}{n}.$$

Together with (1) this yields

$$\max_{|z|\le|z_{n-1}|}\left|\phi^{(m_n)}(z)-\Omega_n(z)\right|<\frac{2}{n}. \tag{4}$$

4. From (2) and (3) we get

$$\max_{|w-z_n|\le d_n}|\Phi(w)-\Omega_n(w-z_n)|\le$$

$$\le \max_{|w-z_n|\le d_n}|\Psi(w)-P_n(w)|+\max_{|w-z_n|\le d_n}|P_n(w)-\Omega_n(w-z_n)+\varphi(w)|\le$$

$$\le \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\max_{|w|\le|z_{\nu-1}|+d_{\nu-1}}|P_\nu(w)-P_{\nu-1}(w)|+\frac{1}{n}\le\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)^2}+\frac{1}{n}<\frac{2}{n},$$

or equivalently

$$\max_{|z|\le d_n}|\phi(z+z_n)-\Omega_n(z)|<\frac{2}{n}. \tag{5}$$

5. Given a set $K\in\mathcal{M}$ and a function $f\in A(K)$, by Mergelian's theorem [19] (see, also [4]), there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ with $\Omega_{n_k}(z)\underset{K}{\Longrightarrow}f(z)$.
There exists a k_0 such that $K\subset\{z:|z|\le|z_{n_k-1}|\}$ for all $k>k_0$, and it follows from (4) that

$$\phi^{(m_{n_k})}(z)\underset{K}{\Longrightarrow}f(z).$$

On the other hand there exists a $\bar{k}_0$ such that $K\subset\{z:|z|\le d_{n_k}\}$ for all $k\ge\bar{k}_0$, and it follows from (5) that also

$$\phi(z+z_{n_k})\underset{K}{\Longrightarrow}f(z).$$

This completes the proof of Theorem 1.

Remark 1. The proof shows that the function $\phi = \Psi + \varphi$ was constructed in such a way that

- the function $\Psi \in \mathcal{E}_Q$ has universal translates with respect to the prescribed sequence $\{z_n\}$,
- the entire function φ has universal derivatives with respect to the prescribed sequence $\{\lambda_n\}$ and ϕ has both universality properties.

§5. UNIVERSAL HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK

Let again $Q = \{q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ be a subsequence of $\mathbb{N}_0$. We now denote by $\mathcal{U}_Q$ the set of all functions f which are holomorphic in the unit disk $\mathbf{D}$ with a power series expansion $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^{q_\nu}$. For a sequence $\{w_n\}$ of complex numbers we denote by $V(\{w_n\})$ the set of all its accumulation points.

Theorem 2. *Let be prescribed :*

- *a subsequence Q of $\mathbb{N}_0$ with $\underline{\Delta}_p(Q) > 0$,*
- *a sequence $\{a_n\}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with $0 \in V(\{a_n\})$,*
- *a sequence $\{b_n\}$ in $\mathbf{D}$ with $V(\{b_n\}) = \partial\mathbf{D}$,*
- *a subsequence $\{\lambda_n\}$ of $\mathbb{N}_0$.*

Then there exists a holomorphic function ϕ in $\mathbf{D}$ with the following properties : For any set $K \in \mathcal{M}$, any function $f \in A(K)$ and any $\zeta \in \partial\mathbf{D}$, subsequences $\{p_k\}$ and $\{q_k\}$ of $\mathbb{N}$ exist such that

$$\lim_{k\to\infty} a_{p_k} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} b_{q_k} = \zeta,$$

$$a_{p_k} z + b_{q_k} \in \mathbf{D} \quad \textit{for all} \quad z \in K,$$

$$\{\phi(a_{p_k} z + b_{q_k})\} \quad \textit{converges to } f(z) \textit{ uniformly on } K.$$

If $K \subset \mathbf{D}$ then in addition there exists a subsequence $\{r_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that

$$\{\phi^{(\lambda_{r_k})}(z)\} \quad \textit{converges to} \quad f(z) \quad \textit{uniformly on} \quad K.$$

The function ϕ has the form $\phi = \Psi + \varphi$ where $\Psi \in \mathcal{U}_Q$ and φ is an entire function.

Proof. 1. We consider any sequence $\{\zeta^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ of points $\zeta^{(k)} \in \partial\mathbf{D}$ with $V(\{\zeta^{(k)}\}) = \partial\mathbf{D}$. For each $k \in \mathbb{N}_0$ we choose a subsequence $\{z_\nu^{(k)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ of $\{b_n\}$ with the properties $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu^{(k)} = \zeta^{(k)}$, $|z_\nu^{(0)}| < |z_\nu^{(1)}| < \ldots < |z_\nu^{(\nu)}|$ for each $\nu \in \mathbb{N}$ and that there exists a sequence $\{G_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ of disks $G_\nu := \{z : |z| < \varrho_\nu\}$ such that $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_\nu \to 1$ and $z_\nu^{(k)} \in G_{\nu+1} \setminus \overline{G_\nu}$ for $k = 0, 1, ..., \nu$.

Next, we choose ℓ_ν large enough, to have $s_\nu := \sqrt{|a_{\ell_\nu}|} \to 0$ for $\nu \to \infty$, as well as

$$|z_\nu^{(k)}| - |z_\nu^{(k-1)}| > 2s_\nu \quad \text{for } k = 0, ..., \nu,$$

$$\{z : |z - z_\nu^{(k)}| < s_\nu\} \subset G_{\nu+1} \setminus \overline{G_\nu} \quad \text{for } k = 1, ..., \nu,$$

$$\Delta_p(Q) > \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{s_\nu}{|z_\nu^{(k)}|} \quad \text{for } k = 1, ..., \nu; \ \nu = 1, 2, ...$$

Let again $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be an enumeration of all polynomials with coefficients whose real and imaginary parts are rational and let φ be the entire function from Lemma 2 with respect to $\{\lambda_n\}$.

2. We construct polynomials $P_{n\mu} \in \mathcal{P}_Q$ ($\mu = 0, ..., n$; $n = 1, 2, ...$) and integers m_n by induction, where in the n-th step the polynomials $P_{n1}, P_{n2}, ..., P_{nn}$ and an integer m_n are defined by an approximation process, using Lemma 1.

We start with $P_{10}(z) \equiv P_{11}(z) \equiv 0$ and $m_1 := 0$. Suppose that $n \geq 2$ and that the groups of polynomials $P_{\nu 1}, P_{\nu 2}, ..., P_{\nu\nu}$ and the numbers $m_\nu \in \mathbb{N}$ have already been determined for all $\nu = 1, ..., n-1$. Since in any case we put $P_{\nu+1,0}(z) := P_{\nu\nu}(z)$, so at the start the polynomial P_{n0} is known. According to Lemma 2 we can choose $m_n := \lambda_{j_n}$ large enough to have $m_n > m_{n-1} + n$, $m_n > deg(P_{n0})$ and

$$\max_{\overline{G_n}} |\varphi^{(m_n)}(z) - \Omega_n(z)| < \frac{1}{n}. \tag{6}$$

If now for a μ with $1 \leq \mu \leq n$ the polynomial $P_{n,\mu-1}$ has already been chosen, then we find according to Lemma 1 a polynomial $P_{n\mu} \in \mathcal{P}_Q$ satisfying

$$\max_{|w| \leq |z_n^{(\mu-1)}| + s_n} \left| P_{n\mu}(w) - P_{n,\mu-1}(w) \right| < \varepsilon_n := \frac{(s_n)^{m_n+1}}{(n+1)^3 \cdot m_n!}, \tag{7}$$

$$\max_{|w - z_n^{(\mu)}| \leq s_n} \left| P_{n\mu}(w) - \Omega_n\Big(\frac{w - z_n^{(\mu)}}{a_{\ell_n}}\Big) + \varphi(w) \right| < \frac{1}{n}. \tag{8}$$

By induction we get all polynomials $P_{n\mu}$ and all numbers m_n.

It follows easily from (7) that the function

$$\Psi(w) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \{P_{\nu\mu}(w) - P_{\nu,\mu-1}(w)\}$$

belongs to $\mathcal{U}_Q$. We will show that the function $\phi(w) := \Psi(w) + \varphi(w)$ possesses the asserted universal properties.

3. For all $\nu \geq n$ and $\mu = 1, ..., \nu$ we have

$$\max_{|z| \leq |z_\nu^{(\mu-1)}|} \left| P_{\nu\mu}^{(m_n)}(z) - P_{\nu,\mu-1}^{(m_n)}(z) \right| =$$

$$= \max_{|z| \leq |z_\nu^{(\nu-1)}|} \left| \frac{m_n!}{2\pi i} \int\limits_{|w| = |z_\nu^{(\nu-1)}| + s_\nu} \frac{P_{\nu\mu}(w) - P_{\nu,\mu-1}(w)}{(w-z)^{m_n+1}} dw \right| \leq$$

$$\leq m_n! \cdot \left(|z_\nu^{(\mu-1)}| + s_\nu \right) \cdot \varepsilon_\nu \cdot \frac{1}{(s_\nu)^{m_\nu+1}} \leq m_n! \cdot \varepsilon_\nu \cdot \frac{1}{(s_\nu)^{m_\nu+1}} = \frac{1}{(\nu+1)^3}.$$

Therefore

$$\max_{G_n} |\Psi^{(m_n)}(z)| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \max_{G_n} \left| P_{\nu\mu}^{(m_n)}(z) - P_{\nu,\mu-1}^{(m_n)}(z) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \max_{|z| \leq |z_\nu^{(\mu-1)}|} \left| P_{\nu\mu}^{(m_n)}(z) - P_{\nu,\mu-1}^{(m_n)}(z) \right| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{(\nu+1)^3} < \frac{1}{n}.$$

Together with (6) this yields

$$\max_{G_n} |\phi^{(m_n)}(z) - \Omega_n(z)| < \frac{2}{n}. \tag{9}$$

4. For $n \in \mathbb{N}$ and $\mu = 1, ..., n$, (7) implies

$$\max_{|w - z_n^{(\mu)}| \leq s_n} |\Psi(w) - P_{n\mu}(w)| \leq \sum_{\nu=\mu+1}^{n} \max_{|w| \leq |z_n^{(\nu-1)}| + s_n} |P_{n\nu}(w) - P_{n,\nu-1}(w)| +$$

$$+ \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m} \max_{|w| \leq |z_m^{(\nu-1)}| + s_m} |P_{m\nu}(w) - P_{m,\nu-1}(w)| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{1}{(n+1)^3} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{(m+1)^3} < \frac{2}{n}.$$

We have

$$\phi(w) - \Omega_n\Big(\frac{w - z_n^{(\mu)}}{a_{\ell_n}}\Big) = \{\Psi(w) - P_{n\mu}(w)\} + \Big\{P_{n\mu}(w) - \Omega\Big(\frac{w - z_n^{(\mu)}}{a_{\ell_n}}\Big) + \varphi(w)\Big\}$$

and therefore we obtain by (8) for $n \in \mathbb{N}$ and $\mu = 1, ..., n$

$$\max_{|w - z_n^{(\mu)}| \le s_n} \Big|\phi(w) - \Omega_n\Big(\frac{w - z_n^{(\mu)}}{a_{\ell_n}}\Big)\Big| < \frac{3}{n},$$

or equivalently

$$\max_{|z| \le \frac{1}{s_n}} |\phi(a_{\ell_n} z + z_n^{(\mu)}) - \Omega_n(z)| < \frac{3}{n}. \tag{10}$$

5. Given a set $K \in \mathcal{M}$ and a function $f \in A(K)$, by Mergelian's theorem [19] (see also [4]), there exists a subsequence $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ with $\Omega_{n_k}(z) \underset{K}{\rightrightarrows} f(z)$.
a) If $K \subset \mathbf{D}$ then there exists a k_0 such that $K \subset G_{n_k}$ for all $k > k_0$, and (9) implies that $\{\phi^{(m_{n_k})}(z)\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K.
b) For any $K \in \mathcal{M}$ there exists a $\bar{k}_0$ such that $K \subset \{z : |z| \le \frac{1}{s_{n_k}}\}$ for all $k > \bar{k}_0$. If any $\zeta \in \partial\mathbf{D}$ is given, then ζ is an accumulation point of the set $\{z_{n_k}^{(\mu)} : \mu = 1, ..., n_k\,;\ k > \bar{k}_0\}$ and there exists $\mu_k, 1 \le \mu_k \le n_k$ such that $z_{n_k}^{(\mu_k)} \to \zeta$ for $k \to \infty$. Hence it follows from [11] that $\{\phi(a_{\ell_{n_k}} z + z_{n_k}^{(\mu_k)})\}$ converges to $f(z)$ uniformly on K. This completes the proof of Theorem 2.

Remark 2. The proof shows that the function $\phi = \Psi + \varphi$ was constructed in such a way that

- the function $\Psi \in \mathcal{U}_Q$ has universal translates with respect to the prescribed pair of sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$,
- the entire function φ has universal derivatives with respect to the prescribed sequence $\{\lambda_n\}$

and that ϕ has both of these universalities simultaneously. In addition, the power series expansion of ϕ around the origin

$$\phi(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \phi_\nu z^\nu$$

has "quasi-gaps" according to the sequence Q (with positive lower Poisson density) in the sense that we have

$$\lim_{\substack{\nu\to\infty \\ \nu\in Q}} |\phi_\nu|^{1/\nu} = 0.$$

§6. UNIVERSAL APPROXIMATION OF MEASURABLE FUNCTIONS

We now show that the functions which were constructed in Theorem 1 and Theorem 2 possess some universal properties with respect to almost everywhere approximation of Lebesgue measurable functions.

For a Lebesgue measurable set $S \subset \mathbf{C}$ we denote by $\mu(S)$ its (two dimensional) Lebesgue measure.

Theorem 3. *Let the sequences Q, $\{z_n\}$ and $\{\lambda_n\}$ and the entire function ϕ be the same as in Theorem 1. Then ϕ has the property that for any measurable set $S \subset \mathbf{C}$ and any measurable function g on S there exist subsequences $\{r_k\}$ and $\{s_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{\phi(z + z_{r_k})\}$ and $\{\phi^{(\lambda_{s_k})}(z)\}$ converge to $g(z)$ almost everywhere on S.*

The proof follows immediately from the following more general lemma, which might be of independent interest.

Lemma 3. *Suppose that $\{f_n\}$ is a sequence of entire functions with the following properties :*

For any set $K \in \mathcal{M}$ with $K^0 = \emptyset$ and any continuous function φ on K there exists a subsequence $\{n_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{f_{n_k}(z)\}$ converges to $\varphi(z)$ uniformly on K.

Then the sequence $\{f_n\}$ has also the following property :

For any measurable set $S \subset \mathbf{C}$ and any measurable function g on S there exists a subsequence $\{m_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that $\{f_{m_k}(z)\}$ converges to $g(z)$ almost everywhere on S.

Proof. 1. Given a measurable set $S \subset \mathbf{C}$ and a measurable function g on S, the function

$$g_S(z) := \begin{cases} g(z) & \text{if } z \in S \\ 0 & \text{if } z \notin S \end{cases}$$

is measurable on $\mathbf{C}$ and it suffices to approximate g_S almost everywhere on $\mathbf{C}$.

For $n \in \mathbb{N}$ we consider the sets $B_n := \{z : |z| \leq n\}$ and the functions

$$g_n(z) := \begin{cases} g_S(z) & \text{if } g_S(z) \in \mathbf{C} \\ n & \text{if } g_S(z) = \infty. \end{cases}$$

Since g_n is measurable on B_n, Lusin's theorem implies the existence of a measurable set $L_n^* \subset B_n$ with $\mu(B_n \backslash L_n^*) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ and a continuous function φ_n on L_n^* such that

$\varphi_n(z) = g_n(z)$ for all $z \in L_n^*$. The set $L_n := L_n^* \setminus \{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}\}$ ($\mathbb{Q}$ is the set of all rational numbers) satisfies $L_n^0 = \emptyset$ and $\mu(L_n) = \mu(L_n^*)$. Since L_n is measurable, we can find a compact set $M_n \subset L_n$ satisfying $\mu(L_n \setminus M_n) \leq \frac{1}{2^{n+2}}$.
The complement of M_n has the representation $M_n^c = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_n} G_n^{(j)}$ where $\mathcal{J}_n$ is at most countable set and the components $G_n^{(j)}$ are pairwise disjoint. We choose any point

$$z_n^{(j)} = r_n^{(j)} e^{i\Theta_n^{(j)}} \in G_n^{(j)} \quad \text{with} \quad r_n^{(j)} > 0, \quad \Theta_n^{(j)} \in \mathbb{R}$$

and consider the sector

$$H_n^{(j)} := \left\{ z = z_n^{(j)} + \varrho e^{i\Theta} : 0 < \varrho < 2n, |\Theta - \Theta_n^{(j)}| < \frac{1}{n^2 2^{n+j+4}} \right\}.$$

The set $K_n := B_n \cap \{ \bigcup_{j \in \mathcal{J}_n} (G_n^{(j)} \cup H_n^{(j)}) \}^c$ satisfies $K_n \in \mathcal{M}$ and $K_n \subset M_n \subset L_n$.

Hence $K_n^0 = \emptyset$. We obtain

$$\mu(M_n \setminus K_n) \leq \mu\Big(\bigcup_{j \in \mathcal{J}_n} H_n^{(j)} \Big) \leq \frac{2}{2^{n+4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n+2}},$$

and hence $\mu(B_n \setminus K_n) \leq \mu(B_n \setminus L_n^*) + \mu(L_n \setminus M_n) + \mu(M_n \setminus K_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

The measurable set $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=n}^{\infty} K_\nu$ satisfies

$$\mu(B_n \setminus E) \leq \mu\Big(\bigcup_{\nu=n}^{\infty} (B_\nu \setminus K_\nu) \Big) \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Therefore $\mu(\mathbb{C} \setminus E) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n \setminus E) = 0$.
2. The properties of $\{f_n\}$ imply that for every $n \in \mathbb{N}$ there exists an index $m_n \in \mathbb{N}$ satisfying

$$\max_{K_n} |f_{m_n}(z) - \varphi_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

For any point $z_0 \in E$, there exists an N_0 such that $z_0 \in K_n$ for all $n \geq N_0$.

If $g_S(z_0) \in \mathbf{C}$ then for all $n \geq N_0$ we get

$$|f_{m_n}(z_0) - g_S(z_0)| \leq \max_{K_n} |f_{m_n}(z) - \varphi_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

If $g_S(z_0) = \infty$ we get $|f_{m_n}(z_0)| \geq n - \max_{K_n} |f_{m_n}(z) - \varphi_n(z)| \geq n - \frac{1}{n}$. Therefore

$\{f_{m_n}(z)\}$ converges to $g_S(z)$ for all $z \in E$. Lemma 3 is proved.

Theorem 4. *Let the sequences Q, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{\lambda_n\}$ and the holomorphic function ϕ on $\mathbf{D}$ be the same as in Theorem 2. Then ϕ has also the following properties : For any measurable set $S \subset \mathbf{C}$, any measurable function g on S and any $\zeta \in \partial\mathrm{D}$ there exist subsequences $\{r_k\}, \{s_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that*

$$\lim_{k\to\infty} a_{r_k} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} b_{s_k} = \zeta,$$

$$a_{r_k} z + b_{s_k} \in \mathbf{D} \quad \text{for almost all} \quad z \in S,$$

$$\{\phi(a_{r_k} z + b_{s_k})\} \quad \text{converges to} \quad g(z) \quad \text{almost everywhere on} \quad S.$$

If $S \subset \mathbf{D}$, then there exists in addition a subsequence $\{t_k\}$ of $\mathbb{N}$ such that

$$\{\phi^{(\lambda_{t_k})}(z)\} \quad \text{converges to} \quad g(z) \quad \text{almost everywhere on} \quad S.$$

The proof follows by the application of a lemma which is analogous to Lemma 3 and which is proved in a similar way.

Резюме. Построены голоморфные функции на $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$, универсальные относительно как сдвигов так и производных. Соответствующие универсальные функции определяются лакунарными степенными рядами с пробелами положительной нижней пуассоновской плотностью.

REFERENCES

1. G. D. Birkhoff, "Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières", C. R. Acad. Sci. Paris vol. 189, pp. 473 — 475, 1929.
2. R. C. Buck, "An extension of Carlson's theorem", Duke Math. J., vol. 13, pp. 345 — 349, 1946.
3. C. K. Chui, M. N. Parnes, "Approximation by overconvergence of a power series", J. Math. Anal. Appl., vol. 36, pp. 693 — 696, 1971.
4. D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhäuser, Basel/London/ Stuttgart, 1987.

5. T. Gharibyan, W. Luh and J. Müller, "Approximation by lacunary polynomials and applications to universal functions", Analysis, vol. 23, pp. 199 – 214, 2003.
6. T. Gharibyan, W. Luh, "Lacunary power series with various universal properties", Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., vol. 22, pp. 113 – 126, 2003.
7. K.-G. Grosse-Erdmann, "Universal families and hypercyclic operators", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp. 345 — 381, 1999.
8. W. Luh, "Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 88, 1970.
9. W. Luh, " Über den Satz von Mergelyan", J. Approx. Theory, vol. 16, pp. 194 — 198, 1976.
10. W. Luh, "Über cluster sets analytischer Funktionen", Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 33, pp. 137— 142, 1979.
11. W. Luh, "Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten", Aequationes Math., vol. 19, pp. 183 — 193, 1979.
12. W. Luh, "Holomorphic monsters", J. Approx. Theory, vol. 53, pp. 128 — 144, 1988.
13. W. Luh, "Entire functions with various universal properties", Complex Variables Theory Appl., vol. 31, pp. 87 — 96, 1996.
14. W. Luh, "Multiply universal holomorphic functions", J. Approx. Theory, vol. 89, pp. 135 — 155, 1997.
15. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Universal entire functions with gap power series", Indag. Mathem. N. S., vol. 9, pp. 529 — 536, 1998.
16. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "T-universal functions with lacunary power series", Acta Sci. Math. (Szeged), vol. 64, pp. 67 — 79, 1998.
17. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Restricted T-universal functions", J. Approx. Theory, vol. 114, pp. 201 — 213, 2002.
18. G. R. MacLane, "Sequences of derivatives and normal families", J. Analyse Math., vol. 2, pp. 72 — 87, 1952/53.
19. S. N. Mergelian, "Uniform approximations to functions of a complex variable" [in Russian], Uspekhi Matem. Nauk, vol. 7, pp. 31 — 122, 1952 [English translation : Amer. Math. Soc. Transl., vol. 3, pp. 294 — 391, 1962.
20. J. Pál, "Zwei kleine Bemerkungen", Tôhoku Math. J., vol. 6, pp. 42 — 43, 1914/15.
21. G. Pólya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (1. Mitteilung)", Math. Z., vol. 29, pp. 549 — 640, 1929.
22. L. A. Rubel, "Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 83, pp. 417 — 429, 1956.
23. I. Schneider, "Schlichte Funktionen mit universellen Approximationseigenschaften", Mitt.
Math. Sem. Giessen, vol. 230, 1997.
24. R. Tenthoff, Universelle Holomorphe Funktionen mit Vorgegebenen Approximationswegen, Shaker, Aachen, 2000.

Поступила 18 мая 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 65-72

ОБРАЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА В $\mathbb{R}^n$

М. С. Мартиросян, С. В. Самарчян

Ереванский государственный университет
E-mail : mhersm@yahoo.com

Резюме. В пространствах $\mathbb{R}^n$ получены наилучшие обращения неравенства треугольника, т.е. верхние оценки норм конечных сумм через точную верхнюю грань множества норм подсумм с наименьшим весом.

Для любой конечной совокупности $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, ...,$ имеет место неравенство (см. [1], стр. 333 - 334) :

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \le 2n \sup_{J\subset I} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$.

Интересно найти наименьшее значение c_n, при котором неравенство

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \le c_n \sup_{J\subset I} \left\|\sum_{i\in J} x_i\right\| \tag{1}$$

называемое обращением неравенства треугольника с весом обращения c_n, имеет место для любой совокупности $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$. Обращение с минимальным весом называется наилучшим обращением.

Известно (см. [1], стр. 364 и [2], стр. 118), что при $n = 1$ и $n = 2$ наименьшими весами обращения являются $c_1 = 2$ и $c_2 = \pi$, соответственно.

Чтобы найти наименьший вес обращения c_n для всех натуральных n, рассмотрим следующую более общую задачу : описать область значений функционала

$$\rho_n(f) = \frac{\int_X \|f\|\, d\mu}{\sup\limits_{A\in\mathcal{M}} \left\|\int_A f\, d\mu\right\|}, \quad f \in \Im, \tag{1'}$$

где $(X, \mathcal{M}, \mu)$ – измеримое пространство, $L(\mu, X)$ – множество μ-интегрируемых функций $f : X \to \mathbb{R}^n$ и $\Im$ – множество функций из $L(\mu, X)$, которые отличны от нуля на множестве положительной меры.
Пусть S_n – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Каждой функции $f \in \Im$ сопоставим функцию $\varphi_f : S_n \to \mathbb{R}_+$, определяемую по формуле

$$\varphi_f(u) = \int_X \langle f, u \rangle_+ \, d\mu, \tag{2}$$

где $\langle u, v \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Лемма 1. *Для каждой функции* $f \in \Im$ **выполняется равенство**

$$\sup_{A \in \mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\| = \sup_{u \in S_n} \varphi_f(u). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{M}$, $\int_A f \, d\mu \neq 0$ и $u = \frac{\int_A f \, d\mu}{\left\| \int_A f \, d\mu \right\|}$. Поскольку $u \in S_n$, то имеем

$$\left\| \int_A f \, d\mu \right\| = \left\langle \int_A f \, d\mu, u \right\rangle = \int_A \langle f, u \rangle \, d\mu \le \int_A \langle f, u \rangle_+ d\mu \le$$

$$\le \int_X \langle f, u \rangle_+ \, d\mu = \varphi_f(u) \le \sup_{u \in S_n} \varphi_f(u).$$

Следовательно,

$$\sup_{A \in \mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\| \le \sup_{u \in S_n} \varphi_f(u). \tag{3'}$$

Для $u \in S_n$ рассмотрим измеримое множество $A_u = \{x \in X : \langle f(x), u \rangle \ge 0\}$. Имеем

$$\varphi_f(u) = \int_{A_u} \langle f, u \rangle \, d\mu = \left\langle \int_{A_u} f \, d\mu, u \right\rangle \le \left\| \int_{A_u} f \, d\mu \right\| \cdot \|u\| =$$

$$= \left\| \int_{A_u} f \, d\mu \right\| \le \sup_{A \in \mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\|.$$

Следовательно,

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| \geq \sup_{u\in S_n} \varphi_f(u). \tag{3''}$$

Комбинируя (3′) и (3″) получим (3). Лемма 1 доказана.

Пусть Γ – гамма-функция Эйлера : $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$. Рассмотрим числовую последовательность

$$\rho_n = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Функционалы $\rho_n(f)$, определённые по (1′), для $f \in \Im$ удовлетворяют неравенствам*

$$1 \leq \rho_n(f) \leq \rho_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Если $X = S_n$ и $\mathcal{M}$ – система подмножеств единичной сферы измеримых по Лебегу, то для тождественного отображения $\pi(x) = x$ имеем $\rho_n(\pi) = \rho_n$.

Доказательство. Первое неравенство в (5) непосредственно вытекает из

$$\left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leq \int_A \|f\|\,d\mu \leq \int_X \|f\|\,d\mu,$$

которое имеет место для любого множества $A \in \mathcal{M}$. Следовательно,

$$\sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leq \int_X \|f\|\,d\mu.$$

Пусть теперь $n \geq 2$. Чтобы доказать второе неравенство в (5) заметим, что

$$\sup_{u\in S_n} \varphi_f(u) \geq \frac{1}{|S_n|} \int_{S_n} \varphi_f(u)\,dS, \tag{6}$$

где $|S_n|$ – площадь сферы S_n в $\mathbb{R}^n$.

Подставляя $\varphi_f(u)$ из (2) в правую часть (6) и изменив порядок интегрирования, получим

$$\sup_{u\in S_n} \varphi_f(u) \geq \frac{1}{|S_n|} \int_X d\mu \int_{S_n} \langle f, u\rangle_+\,dS. \tag{7}$$

Рассмотрим проектирующее отображение $\pi^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi^1(y) = y^1$, $y = (y^1, y^2, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n$. Для $\zeta \in S_n$ имеем

$$\int_{S_n} \langle \zeta, u \rangle_+ \, dS = \int_{S_n^+(\zeta)} \cos(\widehat{\zeta, u}) \, dS = \int_{S_n^+} \cos(\widehat{e_1, u}) \, dS = \int_{S_n^+} \pi^1(u) \, dS, \qquad (8)$$

где $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in S_n$, $S_n^+(\zeta) = \{u \in S_n : \langle \zeta, u \rangle \geq 0\}$, $S_n^+ = \{u \in S_n : \pi^1(u) \geq 0\}$. Положим $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1, \ \pi^1(x) \geq 0\}$, $\Gamma = \partial\Omega$. По формуле Остроградского (см., например [3], стр. 324), для любой вещественнозначной функции $P = P(x) = P(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ имеем

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1} \, dx = \int_\Gamma P \cos(\widehat{\nu, x_1}) \, dS, \qquad (9)$$

где $\nu = \nu(u)$ – единичная внешняя нормаль к Γ в точке u. Так как $\Gamma = S_n^+ \cup (\{0\} \times B_{n-1})$, где $B_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^{n-1}$, то для $P(x) \equiv 1$ формула (9) примет вид

$$\int_{S_n^+} \cos(\widehat{\nu, x_1}) \, dS + \int_{\{0\} \times B_{n-1}} \cos(\widehat{\nu, x_1}) \, dS = 0.$$

Учитывая, что $\cos(\widehat{\nu, x_1}) = -1$ для $u \in \{0\} \times B_{n-1}$, получим

$$\int_{S_n^+} \pi^1(u) \, dS = \mathrm{vol}(B_{n-1}), \qquad (10)$$

где $\mathrm{vol}(B_{n-1})$ – объем шара B_{n-1}. Последовательно используя (7), (8) и (10), получаем

$$\sup_{u \in S_n} \varphi_f(u) \geq \frac{1}{|S_n|} \int_X \|f\| \, d\mu \int_{S_n} \left\langle \frac{f}{\|f\|}, u \right\rangle_+ dS = \frac{\mathrm{vol}(B_{n-1})}{|S_n|} \int_X \|f\| \, d\mu.$$

По Лемме 1 имеем

$$\rho_n(f) \leq \frac{|S_n|}{\mathrm{vol}(B_{n-1})}. \qquad (11)$$

Подставляя в (11) известные значения $\mathrm{vol}(B_{n-1})$ и $|S_n|$, получаем

$$\frac{|S_n|}{\mathrm{vol}(B_{n-1})} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \rho_n. \tag{12}$$

Далее, учитывая (8) и (10) для тройки $(X, \mathcal{M}, \mu)$ из теоремы, имеем

$$\varphi_\pi(u) = \int_{S_n} \langle x, u\rangle_+ \, d\mu = \int_{S_n} \langle x, u\rangle_+ \, dS = \mathrm{vol}(B_{n-1}), \quad u \in S_n. \tag{13}$$

Следовательно, по Лемме 1 и (12)

$$\rho_n(\pi) = \frac{\int_{S_n} \|x\| \, dS}{\mathrm{vol}(B_{n-1})} = \rho_n.$$

Если обозначить $\mathrm{vol}(B_0) = 1$ и для каждой функции $g : S_1 = \{-1; 1\} \to \mathbb{R}^1$ принять

$$\int_{S_1} g(u)\, dS = g(-1) + g(1), \qquad \int_{S_1^+} g(u)\, dS = g(1),$$

то оценка (6) и равенство (10) останутся верными также и в случае $n = 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие. Неравенство треугольника обратимо в $\mathbb{R}^n$ с весом обращения ρ_n. Действительно, для произвольной конечной системы $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$,при надлежащем подборе тройки $(X, \mathcal{M}, \mu)$, неравенство

$$\int_X \|f\| \, d\mu \le \rho_n \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A f \, d\mu \right\|, \quad f \in L(\mu, X) \tag{14}$$

принимает вид

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| \le \rho_n \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\|. \tag{15}$$

Замечание. Поскольку $\rho_1 = 2$ и $\rho_2 = \pi$, при $n = 1, 2$, то неравенство (15) является наилучшим обращением неравенства треугольника в пространствах

$\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$. Легко проверить, что $\rho_n \sim \sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$, так что оценки (15) значительно улучшают предыдущие оценки (1) с весами обращения $c_n = 2n$. Следующая теорема показывает, в частности, что (15) является искомым наилучшим обращением неравенства треугольника в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всех натуральных n.

Теорема 2. *Верны следующие утверждения :*

a) Для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| > (\rho_n - \varepsilon) \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\|. \tag{16}$$

b) Конечная система $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет равенству

$$\sum_{i\in I} \|x_i\| = \rho_n \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} x_i \right\| \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда она тривиальна, т.е. $x_i = 0$, $i \in I$.

Доказательство. a) Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств S_n измеримых по Лебегу. Для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют конечная система попарно не пересекающихся множеств $A_i \in \mathcal{M}$, $i \in I$ и система точек $\alpha_i \in A_i$, $i \in I$ такие, что $\bigcup_{i\in I} A_i = S_n$ и

$$\int_{S_n} \|s(x) - x\| \, dS < \frac{\varepsilon \operatorname{vol}(B_{n-1})}{\rho_n}, \tag{18}$$

где $s = \sum_{i\in I} \alpha_i \chi_{A_i}$ (при $n = 1$ в правой части (18) берём $\operatorname{vol}(B_0) = 1$). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{J\subset I} \left\| \sum_{i\in J} \alpha_i \mu(A_i) \right\| &= \sup_{J\subset I} \left\| \int\limits_{\bigcup_{i\in J} A_i} s \, d\mu \right\| \le \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A s \, d\mu \right\| \le \\ &\le \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A [s(x) - x] \, d\mu \right\| + \sup_{A\in\mathcal{M}} \left\| \int_A x \, d\mu \right\| \le \\ &\le \int_{S_n} \|s(x) - x\| \, dS + \operatorname{vol}(B_{n-1}) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho_n}\right) \operatorname{vol}(B_{n-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

С другой стороны

$$\sum_{i\in I}\|\alpha_i\,\mu(A_i)\| = \sum_{i\in I}\mu(A_i) = |S_n|. \tag{20}$$

Покажем, что система точек $x_i = \alpha_i\mu(A_i)$, $i \in I$ будет искомой. Действительно, согласно (19) и (20) достаточно проверить, что $|S_n| > (\rho_n - \varepsilon)(1+\varepsilon/\rho_n)\mathrm{vol}(B_{n-1})$. Последнее неравенство следует из $(1+\varepsilon/\rho_n)(1-\varepsilon/\rho_n) < 1$, что доказывает a).

b) Предположим обратное, что существует конечная система $\{a_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ с ненулевыми элементами такая, что $\sum\limits_{i\in I}\|a_i\| = \rho_n \sup\limits_{J\subset I}\|\sum\limits_{i\in J} a_i\|$. Имеем

$$\int_{S_n}\sum_{i\in I}\langle a_i,u\rangle_+\,dS = \sum_{i\in I}\int_{S_n}\langle a_i,u\rangle_+\,dS = \mathrm{vol}(B_{n-1})\sum_{i\in I}\|a_i\| =$$

$$= |S_n|\sup_{J\subset I}\left\|\sum_{i\in J}a_i\right\| = |S_n|\sup_{u\in S_n}\sum_{i\in I}\langle a_i,u\rangle_+.$$

Последнее равенство следует из Леммы 1 при подборе $X = I$, $\mathcal{M} = 2^I$, $\mu(A) = |A|$ для $A \in \mathcal{M}$ и $f(i) = a_i$, $i \in I$. Следовательно, $\sum_{i\in I}\langle a_i,u\rangle_+ = C = \mathrm{const}$ и $u \in S_n$. Поэтому

$$\sum_{i\in I}\langle a_i,u\rangle_+ = C\,\|u\|, \qquad u \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

В единичном шаре рассмотрим множества $A_i = \{u \in B_n : \langle a_i,u\rangle = 0\}$, $i \in I$. Поскольку множества A_i имеют нулевые объёмы в $\mathbb{R}^n$, то существует точка $u_0 \in B_n$ такая, что $\langle a_i,u_0\rangle \neq 0$, $i \in I$. Не умаляя общности можно предположить, что множество индексов $J = \{i \in I : \langle a_i,u_0\rangle > 0\}$ не пусто. Выберем в $\mathbb{R}^n$ окрестность Δ_{u_0} точки u_0 такую, в которой каждое скалярное произведение $\langle a_i,u\rangle$ сохраняет знак. Пусть $u^k = \pi^k(u)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Дифференцирование равенства (21) в точке $u \in \Delta_{u_0}$ по u^1, u^2,..., u^n приводит к равенствам

$$\sum_{i\in J}\pi^k(a_i) = C\frac{u^k}{\|u\|}, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\in J}a_i = C\frac{u}{\|u\|}, \qquad u \in \Delta_{u_0}.$$

Отсюда вытекает $C = 0$ и

$$\sum_{i\in I} \langle a_i, u_0\rangle_+ = \sum_{i\in J} \langle a_i, u_0\rangle > 0,$$

что противоречит (21). Теорема 2 доказана.

Авторы благодарят профессора В. Х. Мусояна за ценные советы и комментарии.

Abstract. In the space $\mathbb{R}^n$ upper bounds of norms of finite sums by the supremum subsum norms with smallest weights (so called best reversions of triangle inequality) are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, Общая Топология : Топологические Группы, Числа и Связанные с ними Группы и Пространства, Москва, 1969.
2. W. Rudin, Real and Complex Analysis, New York, 1987.
3. Г. Е. Шилов, Математический Анализ, Функции Нескольких Вещественных Переменных, том 1 - 2, Москва, 1972.

Поступила 22 июня 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 73–84

CONSTRUCTION OF UNIVERSAL LAURENT AND FABER SERIES

D. Mayenberger
Trier University, Trier, Germany
E–mail : maye4501@uni-trier.de

Abstract. For a finitely connected domain Ω the paper constructively proves the existence of a function f holomorphic on Ω, whose Laurent series partial sums possess universal approximation properties in Ω^c. Existence of functions holomorphic on a Jordan domain G, whose Faber series partial sums possess universal approximation properties in G^c is demonstrated. The class of functions with these properties is a G_δ-set and is dense in the space of all functions holomorphic on G.

§1. INTRODUCTION

The existence of a Taylor series on the unit disc with universal approximation properties of the partial sums has been shown independently by Luh [5] in 1970 and Chui and Parnes [2] in 1971. This result has been generalized by Luh [7] in 1986 for open sets with simply connected components. Let O be an open set with simply connected components. We denote by $s_n^{(\zeta)}(f)(z)$ the n^{th} partial sum of the Taylor expansion of a function f with center at ζ. In [7] Luh proved that there exist a function Φ holomorphic on O and a sequence of natural numbers $\{p_n\}_n$ such that

(1) The sequence $\{s_{p_n}^{(\zeta)}(\Phi)\}_n$ converges locally uniformly on O to Φ for each $\zeta \in O$.

(2) For each compact set $B \subset \overline{O}^c$ with connected complement and each function f continuous on B and holomorphic on its interior there exists a subsequence $\{p'_n\}_n$ of $\{p_n\}_n$, such that $\{s_{p'_n}^{(\zeta)}(\Phi)\}_n$ converges uniformly on B to f for each $\zeta \in O$.

In 1996 Nestoridis [12] obtained a similar result using Baire's theorem. He proved that the set of all holomorphic on the unit disc functions f, that satisfy the condition (A) below, is G_δ and is dense in the space of all functions holomorphic on the unit disc.

Condition (A) : Let $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be the Taylor series of a function f. For every compact set $K \subset \{z : |z| \geq 1\}$ with connected complement and every function h continuous on K and holomorphic on its interior there exists a subsequence

$$S_{\tau_m}(z) = \sum_{n=0}^{\tau_m} a_n z^n, \quad m \in \mathcal{N},$$

that converges to h uniformly on K.
In 2002 Vlachou [16] proved that for $B \subset O^c$ the above classes of universal functions, defined by Luh and by Nestoridis, coincide. Nestoridis [12] pose the question, whether a construction of a universal Taylor series would be possible for multiply connected domains. Gehlen, Luh and Müller [4] gave a negative answer to this question in the case of a bounded multiply connected domain.
Although universal Taylor series have been constructed for more general domains (not necessarily simply connected, see, e.g., [10] and [15]), for multiply connected domains Laurent series appear to be more suitable. In this paper we give a constructive proof for the existence of universal Laurent series.
For universal Faber series Katsoprinakis, Nestoridis and Papadoperakis [6] reduced this problem via Faber mapping to the problem for universal Taylor series. However this method yields only the existence of universal Faber series for domains of bounded rotation. Our proof is constructive and can be applied to more general domains.

§2. UNIVERSAL LAURENT SERIES

2.1. Notation. Let Ω be a domain in the extended complex plane $\hat{\mathbb{C}}$ such that $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ consists of finitely many components to be denoted $A_0, A_1, \ldots, A_k$ and assume that $\infty \in A_0$, and the points $a_j \in A_j$, $j = 1, \ldots, k$ are fixed. Then every function $f \in H(\Omega)$ (the space of all functions being holomorphic on Ω) possesses a unique decomposition $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_k$, with $f_j \in H(A_j^c)$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$ and $\lim_{z\to\infty} f_j(z) = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$. Every f_j has a representation as a Laurent series

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(f_j, a_j)}{(z - a_j)^n}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

where $c_n(f_j, a_j)$ are the Laurent coefficients of f_j with respect to a_j, if z is supposed to lie outside a large enough disc with center at a_j. Using this for $f \in H(\Omega)$ and $\zeta \in A_0^c$ we define the formal sums

$$M_N(f, \zeta)(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f_0^{(n)}(\zeta)}{n!}(z - \zeta)^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n(f_1, a_1)}{(z - a_1)^n} + \ldots + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n(f_k, a_k)}{(z - a_k)^n}.$$

For later use we define an explicit metric on the space $H(\Omega)$ that describes locally uniform convergence. We choose an exhausting sequence $\{K_n\}_n$ of Ω consisting of compact sets, and for $f, g \in H(\Omega)$ we set

$$p_n(f) = \max_{z \in K_n} |f(z)|, \quad n \in \mathcal{N},$$

$$p(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(f)}{2^n(1 + p_n(f))}, \quad d(f,g) = p(f - g).$$

It is easy to check that $(H(\Omega), d)$ is a complete metric space with the desired convergence properties, that is, a sequence of functions $\{f_n\}_n$ in $H(\Omega)$ converges to some function $f \in H(\Omega)$ with respect to the metric d if and only if it does so in the sense of uniform convergence on compact subsets of Ω.

Finally, for a compact set K the space of functions that are continuous on K and holomorphic in the interior of K we denote by A(K).

2.2. Construction of a Universal Laurent Series and its Properties. Now we will prove a result which already appears in [8] (we use the technics of [8], but not the results).

Theorem 2.1. *Let $\Omega \subset \hat{\mathbf{C}}$ be a domain such that $\hat{\mathbf{C}} \setminus \Omega = A_0 \cup \ldots \cup A_k$, $\infty \in A_0$, and let some points $a_j \in A_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ be fixed. Then there exist a function $f \in H(\Omega)$ and a sequence of natural numbers $\{t_n\}_n$ with the following properties :*

(1) For each compact $K \subset \Omega$ and each point $\zeta \in A_0^c$ the sequence $\{M_{t_n}(f, \zeta)\}_n$ converges locally uniformly on Ω to f.

(2) For any compact $K \subset \Omega^c \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ with connected complement and any function $g \in A(K)$ there exists a subsequence $\{t_{n_s}\}_s$ of $\{t_n\}_n$ such that $\{M_{t_{n_s}}(f, \zeta)\}_s$ converges to g uniformly on K for any choice of $\zeta \in A_0^c$.

Proof. 1) Preparatory. For every $j = 0, \ldots, k$ we choose an exhausting sequence $\{L_n^{(j)}\}_n$ of the set A_j^c such that $L_n^{(j)}$ is closed for $j = 1, \ldots, k$, $n \in \mathcal{N}$ and $L_n^{(0)}$ is compact for $n \in \mathcal{N}$. Without loss of generality we can assume that each $L_n^{(j)}$ has connected complement, since every A_j^c $(j = 0, \ldots, k)$ is simply connected in $\hat{\mathbf{C}}$. Furthermore, we choose a sequence of compact sets $\{K_n^*\}_n$ with each $K_n^* \subset \Omega^c \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ possessing connected complement, in such a way that for every compact set K with the same properties there exists $N \in \mathcal{N}$ such that $K \subset K_N^*$. The existence of such a sequence can be proved by application of the technics of [12], Lemma 2.1. We consider an enumeration $\{(K_n, p_n)\}_n$ of the set

$$\{(K, p) : K \in \{K_n^* : n \in \mathcal{N}\}, \quad p \text{ is a polynomial with coefficients in } \mathcal{Q} + i\mathcal{Q}\},$$

in which every combination of K_n^* and p_n appears infinitely many times. Finally, we will use the notation $K_n^{(j)} = K_n \cap A_j$ $(j = 0, \ldots, k, n \in \mathcal{N})$.

2) Construction of the Universal Function. First we set

$$\Theta_0^{(0)}(z) = z - a_1, \qquad \Theta_0^{(j)}(z) = \frac{1}{z - a_j}, \quad j = 1, \ldots, k, \quad \lambda_0 = 1.$$

We assume that for a number $n \in \mathcal{N}$ the functions $\Theta_0^{(m)}, \ldots, \Theta_k^{(m)}$ and the numbers λ_m have been already determined for $m = 0, \ldots, n-1$ in such a way that

(i) $\Theta_m^{(0)}$ is a polynomial,

(ii) $\Theta_m^{(j)}$ is a rational function with one pole at a_j for $j = 1, \ldots, k$. Hence we have

$$\Theta_m^{(j)} = \frac{P_m^{(j)}(z)}{(z - a_j)^{q_m^{(j)}}}, \quad \deg\left(P_m^{(j)}\right) < q_m^{(j)}.$$

To perform the induction we set $g_{n-1} = \max\left\{\deg\left(\Theta_{n-1}^{(0)}\right); q_{n-1}^{(j)}, j = 1, \ldots, k\right\}$, and choose a natural number λ_n such that $\lambda_n > (n-1)(\lambda_{n-1} + g_{n-1})$. By Runge's theorem on polynomial approximation, we find a polynomial $\Theta_n^{(0)}$ satisfying

$$\max_{z \in L_n^{(0)}} |\Theta_n^{(0)}(z)| < \frac{1}{2^n \max\limits_{z \in L_n^{(0)}} |z - a_1|^{\lambda_n}}, \tag{1}$$

$$\max_{z \in K_n^{(0)}} \left| \Theta_n^{(0)}(z) - \frac{p_n(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} (z - a_1)^{\lambda_\nu} \Theta_\nu^{(0)}(z)}{(z - a_1)^{\lambda_\nu}} \right| < \frac{1}{n \max\limits_{z \in K_n^{(0)}} |z - a_1|^{\lambda_n}}. \tag{2}$$

For $j = 1, \ldots, k$ we find a rational function $\Theta_n^{(j)}$ with a single pole at a_j, satisfying

$$\sup_{z \in L_n^{(j)}} |\Theta_n^{(j)}(z)| < \frac{1}{2^n \max\limits_{z \in L_n^{(j)}} \frac{1}{|z - a_j|^{\lambda_n}}}, \tag{3}$$

$$\max_{z \in K_n^{(j)}} \left| \Theta_n^{(j)}(z) - \frac{p_n(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(z - a_j)^{\lambda_\nu}} \Theta_\nu^{(j)}(z)}{\frac{1}{(z - a_1)^{\lambda_\nu}}} \right| < \frac{1}{n \max\limits_{z \in K_n^{(0)}} \frac{1}{|z - a_j|^{\lambda_n}}}. \tag{4}$$

The existence of such a function follows from Runge's theorem on rational approximation (see, for instance, [13], Theorem 13.9). Note that the set $K_n^{(j)} \cup L_n^{(j)}$ has connected complement, which enables to shift the pole. Finally we consider

$$Q_m^{(0)}(z) = (z-a_1)^{\lambda_m}\Theta_m^{(0)}(z), \quad Q_m^{(j)}(z) = \frac{1}{(z-a_j)^{\lambda_m}}\Theta_m^{(j)}(z) \ (j = 1,\ldots,k),$$

and define

$$f_0(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu^{(0)}(z), \tag{5}$$

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu^{(j)}(z), \quad j = 1,\ldots,k. \tag{6}$$

Then the desired function is $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_k$. Since $\{L_n^{(j)}\}_n$ are exhausting sequences for each A_j^c, the inequalities (1) and (2) assure the holomorphy of f on $\Omega = \bigcap_{j=0}^{k} A_j^c$.

Fix $j \in \{1,\ldots,k\}$. We consider the powers of $\frac{1}{z-a_j}$ in $Q_m^{(j)}$ and observe :

- The highest power of $\frac{1}{z-a_j}$ in $Q_m^{(j)}$ is less than or equal to $\lambda_m + g_m$.
- The lowest power of $\frac{1}{z-a_j}$ in $Q_{m+1}^{(j)}$ is greater than λ_{m+1}.

By the definition of λ_n the powers of $\frac{1}{z-a_j}$ do not overlap within the $Q_m^{(j)}$ and the functional series on the right hand side of (6) is indeed a Laurent series. For similar reasons the functional series on the right hand side of (5) turn to be a Taylor series. Hence, setting $t_n = \lambda_n + g_n$ and $q_n = \lambda_{n+1}$, we obtain the equations

$$S_{t_n}(f_0,a_1)(z) = \sum_{\nu=0}^{t_n} \frac{f_0^{(\nu)}(a_1)}{\nu!}(z-a_1)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(0)}(z),$$

$$\sigma_{t_n}(f_j,a_j)(z) = \sum_{\nu=1}^{t_n} \frac{c_\nu(f_j,a_j)}{(z-a_j)^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(j)}(z).$$

Thus the first statement of the theorem holds for $\zeta = a_1$. Moreover, the Taylor series of f_0 with respect to the center a_1 possesses pure Ostrowski gaps $\{t_n, q_n\}$ with $\frac{q_n}{t_n} \to \infty$ (i.e. $a_n(f, a_1) = 0$ for $n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t_n + 1, \dots, q_n\}$). Theorem 1 in [7] states that the difference $M_{t_n}(f, \zeta) - M_{t_n}(f, a_1)$ converges locally uniformly to zero on Ω. This proves the first statement.

3) Proof of the Universal Properties. Let K be an arbitrary compact set with the properties of the second statement and an arbitrary function $g \in A(K)$. First we find an $n_0 \in \mathcal{N}$ with $K \in K_{n_0}$. By Mergelyan's theorem and the definition of the sequence $\{(K_n, p_n)\}_n$ we can choose a sequence $\{n_s\}_s$ of natural numbers with $n_s \geq s$ satisfying

$$\max_{K \cap A_j} \left| p_{n_s}(z) - \left(g(z) - \sum_{\substack{\mu \neq j \\ \mu=0}}^{k} f_\mu(z) \right) \right| < \frac{1}{s}, \quad j = 0, \dots, k, \quad s \in \mathcal{N},$$

and $K_{n_s} = K_{n_0}, (s \in \mathcal{N})$. The estimations (2) and (4) are equivalent to

$$\max_{z \in K_{n_s}^{(0)}} |S_{t_{n_s}}(f_0, a_1)(z) - p_{n_s}(z)| < \frac{1}{n_s} \leq \frac{1}{s}, \quad s \in \mathcal{N}, \tag{7}$$

$$\max_{z \in K_{n_s}^{(j)}} |\sigma_{t_{n_s}}(f_j, a_j)(z) - p_{n_s}(z)| < \frac{1}{n_s} \leq \frac{1}{s} \quad j = 1, \dots, k, \quad s \in \mathcal{N}. \tag{8}$$

For $s \in \mathcal{N}$ the following inequalities hold :

$$\max_{z \in K \cap A_0} |M_{t_{n_s}}(f, a_1)(z) - g(z)| \leq \max_{z \in K_{n_s}^{(0)}} |S_{t_{n_s}}(f_0, a_1)(z) - p_{n_s}(z)| +$$

$$+ \max_{z \in K \cap A_0} \left| p_{n_s}(z) - \left(g(z) - \sum_{\mu=1}^{k} f_\mu(z) \right) \right| + \sum_{\mu=1}^{k} \max_{z \in K \cap A_0} |\sigma_{t_{n_s}}(f_\mu, a_\mu)(z) - f_\mu(z)|.$$

The second line of this estimation tends to zero as $s \to \infty$ by (7) and (8). The last term tends to zero, since $K \cap A_0$ is a compact subset of A_μ^c for each $\mu = 1, \dots, k$. Similarly one can estimate the difference $\max_{z\in K\cap A_j} |M_{t_{n_s}}(f,a_1)(z) - g(z)|$ for $j = 1,\dots,k$ to obtain

$$\max_{z\in K} |M_{t_{n_s}}(f,a_1)(z) - g(z)| \to 0, \quad s \to \infty.$$

Applying again Theorem 1 from [7], we get the second statement of the theorem. This completes the proof of Theorem 2.1.

A function satisfying both statements of the Theorem 2.1 will be called a *universal Laurent series*.

Theorem 2.2. *Let $\Omega \subset \hat{\mathbf{C}}$ be a domain such that $\hat{\mathbf{C}} \setminus \Omega = A_0 \cup \dots \cup A_k$, $\infty \in A_0$, and let $a_j \in A_j$ $(j = 1,\dots,k)$ be fixed points. Then the set of all universal Laurent series is dense in the space $(H(\Omega), d)$.*

Proof. For an arbitrary $g \in H(\Omega)$ and $\varepsilon > 0$ we choose a function f_0 possessing both properties of Theorem 2.1. Now we find a number $\delta > 0$ such that $p(\delta f_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. By Runge's theorem on rational approximation we find a rational function R with poles at $\{a_1,\dots,a_k\}$ satisfying $d(R,g) < \frac{\varepsilon}{2}$. For $f = \delta f_0 + R$ we have

$$d(f,g) = d(\delta f_0 + R, g) \le p(\delta f_0) + d(R,g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hence f "lies near" to g. Next, for all $N \in \mathcal{N}$ greater than any power of $z - a_1$ or $\frac{1}{z-a_j}$ $(j = 1,\dots,k)$ appearing in R (possibly after shifting the pole within R) we get

$$M_N(f,a_1) = \delta M_N(f_0,a_1) + R.$$

By the first statement of Theorem 2.1, there is a sequence $\{t_n\}_n$ such that $\{M_{t_n}(f_0,a_1)\}_n$ converges to f_0 with respect to the metric d. Hence $\{M_{t_n}(f,a_1)\}_n$ converges to f.

Let $K \subset \Omega^c \setminus \{a_1,\dots,a_k\}$ be a compact set and $h \in A(K)$. By the second statement of Theorem 2.1 we can choose a subsequence $\{t_{n_s}\}_s$ of $\{t_n\}_n$ such that $\{M_{t_{n_s}}(f_0,a_1)\}_s$ converges uniformly on K to $\frac{1}{\delta}(h - R)$ (note that R also belongs to the class $A(K)$). Hence $\{M_{t_{n_s}}(f,a_1)\}_s$ converges uniformly on K to h. Thus f satisfies both properties of universal Laurent series. Theorem 2.2 is proved.

§3. UNIVERSAL FABER SERIES

For an introduction into Faber series the reader is referred to [3] and [14]. Following [14] we consider a bounded closed set $\overline{B}$ the complement $\overline{B}^c$ of which is a simply connected domain (in $\hat{\mathbf{C}}$). By the Riemann mapping theorem there exists a conformal mapping $\psi : \overline{\mathcal{D}}^c \longmapsto \overline{B}^c$. The Faber polynomials with respect to ψ we denote by $\{p_n\}_n$.

For $R > 1$ by B_R we denote the bounded domain with the boundary $\{\psi(z) : |z| = R\}$. Then every function $f \in H(B_R)$ can be represented as a Faber series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) p_n(z),$$

where

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(\psi(s))}{s^{n+1}} \, ds, \quad n \in \mathcal{N}_0, \quad 1 < r < R$$

are the Faber coefficients of f. The corresponding partial sums $F_m(f, z)$ are given by

$$F_m(f, z) = \sum_{n=0}^{m} c_n(f) p_n(z).$$

First we will show that the set of universal Faber series is a G_δ-set and is dense in the space $H(B_R)$ for any $R > 1$. To this end we fix a number $R > 1$, a set $G = B_R$ and define an abstract class of universal functions.

Definition 1. The set $\mathcal{U}_F(G)$ *of universal Faber series* is the class of all functions $f \in H(G)$ having the property that for any compact set $K \subset G^c$ with connected complement, any function $g \in A(K)$ and any $\varepsilon > 0$ there exists an index $n \in \mathcal{N}_0$ with

$$\max_{z \in K} |F_n(f, z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Theorem 3.1. *The set $\mathcal{U}_F(G)$ of universal Faber series is a G_δ-set and is dense in the space $H(G)$.*

Proof : First we fix the following three sequences :

(1) Let $\{H_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ be an exhausting sequence of G consisting of closed simply connected domains.

(2) Let $\{r_j; j \in \mathcal{N}\}$ be an enumeration of all polynomials with coefficients in $\mathcal{Q} + i\mathcal{Q}$.

(3) Let $\{K_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ be an enumeration of all compact sets $K \subset G^c$ with connected complement such that for all sets $K \subseteq G^c$ having the same property there exists an $n_0 \in \mathcal{N}$ satisfying $K \subset K_{n_0}$.

The proof consists of three lemmas. The first two lemmas give a representation of $\mathcal{U}_F(G)$ as a G_δ-set and the third one shows that this set is dense in $H(G)$. For

$m, j, s \in \mathcal{N}$, and $n \in \mathcal{N}_0$ we set

$$O(G, m, j, s, n) = \left\{ f \in H(G) : \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| < \frac{1}{s} \right\}. \tag{9}$$

Lemma 3.1. *The following equality holds :*

$$\mathcal{U}_F(G) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} O(G, m, j, s, n). \tag{10}$$

Proof. Let $f \in \mathcal{U}_F(G)$ and $m, j, s \in \mathcal{N}$ be given. Since K_m is a compact subset of G with connected complement by the definition of $\mathcal{U}_F(G)$ with $\varepsilon = \frac{1}{s}$ we obtain that f belongs to the right hand side of (10).

Now suppose that f belongs to the right hand side of (10). For a given compact set $K \subset G$ with connected complement, a function $g \in A(K)$ and a number $\varepsilon > 0$ there exist numbers $m, s \in \mathcal{N}$ such that $K \in K_m$ and $\frac{1}{s} < \frac{\varepsilon}{2}$. By Mergelyan's theorem we conclude the existence of an $j \in \mathcal{N}$ such that $\max_{z \in K_m} |r_j(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. By (9), for the numbers m, j, s there is an $n \in \mathcal{N}_0$ satisfying $\max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| < \frac{1}{s}$. Therefore $\max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - g(z)| < \frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. This shows that f belongs to the left hand side of (10). Lemma 3.1 is proved.

Lemma 3.2. *For all $m, j, s \in \mathcal{N}$ and $n \in \mathcal{N}_0$ the set $O(G, m, j, s, n)$ defined by (9) is an open set in $H(G)$ (in the topology of locally uniform convergence).*

Proof. Fixing $m, j, s \in \mathcal{N}, n \in \mathcal{N}_0$ and $f \in O(G, m, j, s, n)$, for $r \in (1, R)$ we put $C_r = \{\varphi(s); |s| = r\}$. For $\delta > 0$ we define the set

$$U_\delta(f) = \{g \in H(G) : \max_{z \in C_r} |g(z) - f(z)| < \delta\},$$

and show that for an appropriate choice of δ this set is contained in $O(G, m, j, s, n)$. For a fixed $r \in (1, R)$ and any function $g \in U_\delta(f)$ we have

$$|c_\nu(f) - c_\nu(g)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(\psi(s)) - g(\psi(s))}{s^{\nu+1}} \, ds \right| < \frac{\delta}{r^\nu}, \quad \nu \in \mathcal{N}_0.$$

Now we set $M = \max\{|p_\nu(z)| : z \in K_m, \ 0 \le \nu \le n\}$, and choose

$$\delta = \frac{1 - r}{(\frac{1}{r})^n - r} \frac{1}{M} \left(\frac{1}{s} - \max_{z \in K_m} |F_n(f, z) - r_j(z)| \right).$$

It is clear that $\delta > 0$, and hence for all $g \in U_\delta(f)$

$$\max_{z\in K_m} |F_n(g,z) - F_n(f,z)| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu(g) - c_\nu(f)| \max_{z\in K_m} |p_\nu(z)| <$$

$$< \frac{1}{s} - \max_{z\in K_m} |F_n(f,z) - r_j(z)|.$$

Therefore for all $g \in U_\delta(f)$

$$\max_{z\in K_m} |F_n(g,z) - r_j(z)| \leq \max_{z\in K_m} |F_n(g,z) - F_n(f,z)| + \max_{z\in K_m} |F_n(f,z) - r_j(z)| <$$

$$< \frac{1}{s} - \max_{z\in K_m} |F_n(f,z) - r_j(z)| + \max_{z\in K_m} |F_n(f,z) - r_j(z)| = \frac{1}{s},$$

yielding $U_\delta(f) \subset O(G,m,j,s,n)$. Lemma 3.2 is proved.

Lemma 3.3. *For every choice of $m, j, s \in \mathcal{N}$ the set $\bigcup_{n=0}^{\infty} O(G,m,j,s,n)$ is dense in $H(G)$.*

Proof. Given a compact set $K \subset G$, an $\varepsilon > 0$ and numbers $m, j, s \in \mathcal{N}$, let $f \in H(G)$ be arbitrary. Since G is at least simply connected, without loss of generality we can assume that K has connected complement in G. Hence $K \cap K_m = \emptyset$ and $K \cup K_m$ has connected complement. So due to Runge's theorem on polynomial approximation there exists a polynomial P satisfying

$$\max_{z\in K} |P(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \max_{z\in K_m} |P(z) - r_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Let n be the degree of P. Since every Faber polynomial p_n is of full degree, i.e. $\deg(p_n) = n$, we have $P = F_n(P,\cdot)$. Therefore

$$\max_{z\in K_m} |F_n(P,z) - r_j(z)| < \frac{1}{s},$$

yielding $P \in O(G,m,j,s,n)$. Lemma 3.3 is proved.

Now Theorem 3.1 follows immediately from Lemmas 3.1 – 3.3 and Baire's category theorem.

A universal Faber series is constructed by the method already used in the preceding section. So we outline a sketch proof, containing only the construction of the universal Faber series.

Theorem 3.2. *There exists a function f holomorphic on the domain G (as defined above) and a sequence of natural numbers $\{t_n\}n$ satisfying the following properties :*
(1) The sequence$\{F_{t_n}(f,\cdot)\}_n$ converges locally uniformly on G to f.
(2) For each $K \subset G^c$ with connected complement and each $g \in A(K)$ there exists a subsequence $\{t_{n_s}\}_s$ of $\{t_n\}_n$, such that $\{F_{t_{n_s}}(f,\cdot)\}_s$ converges uniformly on K to g.

Proof. We use the same sequences as in the proof of Theorem 3.1. First we choose a sequence $\{(K_n^*, r_n^*)\}_n$, where every combination of K_n and r_n appears infinitely many times. Set $P_0 = 0$ and $\lambda_0 = 1$. Supposing that for an $n \in \mathcal{N}$ the polynomials $P_0, \ldots, P_{n-1}$ and the natural numbers $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ have already been defined, we set

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \max\{\deg(P_\nu); 0 \le \nu \le n-1\} + 1,$$

and choose a polynomial P_n with the following properties

$$\max_{z\in H_n} |P_n(z)| < \frac{1}{n^2 \max\limits_{z\in H_n} |z|^{\lambda_n}}, \tag{11}$$

$$\max_{z\in K_n^*} \left| P_n(z) - \frac{r_n^*(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} z^{\lambda_\nu} P_\nu(z)}{z^{\lambda_n}} \right| < \frac{1}{n \max\limits_{z\in K_n^*} |z|^{\lambda_n}}. \tag{12}$$

Finally we define

$$T_m(z) = \sum_{\nu=0}^{m} z^{\lambda_\nu} P_\nu(z); \qquad f(z) = \lim_{m\to\infty} T_m(z).$$

Similar considerations as in Theorem 2.1 allow to conclude that there is no overlapping of the powers of z in the sum of the right hand side of the first equation. This yields $F_{t_n}(f,\cdot) = T_n$. The universality of f can also be shown analogously as in Theorem 2.1.

Remark. Actually we have used two different definitions of universality (Definition 1 and Theorem 3.2). The general proof outlined in [16], Theorem 2.6 shows that these two classes of universal Faber series coincide.

Acknowledgement : I would like to thank J. Müller and W. Luh for interesting suggestions and helpful discussions.

Резюме. For a finitely connected domain Ω the paper constructively proves the existence of a function f holomorphic on Ω, whose Laurent series partial sums possess universal approximation properties in Ω^c. Existence of functions holomorphic on a Jordan domain G, whose Faber series partial sums possess universal approximation properties in G^c is demonstrated. The class of functions with these properties is a G_δ-set and is dense in the space of all functions holomorphic on G.

REFERENCES

1. G. Costakis, V. Nestoridis, I. Papadoperakis, "Universal Laurent series", submitted.
2. C. K. Chui, M. N. Parnes, "Approximation by overconvergence of power series", Journ. Math. Analysis and Applications vol. 36, pp. 693 – 696, 1971.
3. J. H. Curtiss, "Faber polynomials and the Faber series", Amer. Math. Monthly, vol. 79, no. 4, pp. 577 – 596, 1972.
4. W. Gehlen, W. Luh, J.Müller, "On the existence of O-universal functions", Complex Variables, vol. 41, pp. 81 – 90, 2000.
5. W. Luh, "Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 88, 1970.
6. E. Katsoprinakis, V. Nestoridis, I. Papadoperakis, "Universal Faber series", Analysis, vol. 21, pp. 339 – 363, 2001.
7. W. Luh, "Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets", Analysis, vol. 6, pp. 191 – 207, 1986.
8. D. Mayenberger, V. Vlachou, "Construction of a universal Laurent series", submitted.
9. A. Melas, V. Nestoridis, "Universality of Taylor series as a generic property of holomorphic functions", Adv. in Math., vol. 157, pp. 138 – 176, 2001.
10. A. Melas, "Universal functions on nonsimply connected domains", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 51, no. 6, pp. 1539 – 1551, 2001.
11. S. N. Mergelyan, "Uniform approximations of functions of a complex variable" [in Russian], Uspekhi Mat. Nauk, vol. 7, pp. 31 – 122, 1952 [English translation : Amer. Math. Soc. Transl., vol. 104, 1954].
12. V. Nestoridis, "Universal Taylor series", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 46, no. 5, 1293 – 1306, 1996.
13. W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
14. V. I. Smirnov, N. A. Lebedev, Functions of a Complex Variable – Constructive Theory, M.I.T. Press, 1968.
15. V. Vlachou, "A universal Taylor series in the doubly connected domain $\mathbf{C} \setminus \{1\}$", Complex Variables, vol. 47, pp. 123 – 129, 2002.
16. V. Vlachou, On some classes of universal functions, Analysis, vol. 22, pp. 149 – 161, 2002.

Поступила 2 октября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 4, 2003, 85-94

APPROXIMATION BY OVERCONVERGENT POWER SERIES

B. Schillings

Trier University, Trier, Germany
E-mail : schi4501@uni-trier.de

Abstract. The paper gives a short survey of results on approximation by overconvergent power series and discusses the question of possible lacunas of power series representing the universal functions.

INTRODUCTION

For a compact set K in the complex plane $\mathbf{C}$ we denote by $A(K)$ the set of all complex valued functions, that are continuous on K and holomorphic in its interior K°. The family of all compact sets with connected complement will be denoted by $\mathcal{M}$. By $H(\mathcal{O})$ we denote the family of all functions that are holomorphic on $\mathcal{O}$.

Let $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ be a power series with radius of convergence $R > 0$ and with partial sums $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu (z - z_0)^\nu$. Recall that such a series is said to be overconvergent, if there exists a subsequence $\{s_{n_k}(z)\}$ of $\{s_n(z)\}$ which converges, while $\{s_n(z)\}$ itself diverges.

If a sequence of functions $\{f_n\}$ converges to a function f uniformly on a set S, then we write

$$f_n(z) \underset{S}{\Longrightarrow} f(z).$$

If $\{f_n\}$ converges compactly to f on an open set S (i.e. uniformly on all compact subsets of S), then we write

$$f_n(z) \underset{S}{\rightarrow} f(z).$$

In 1921 Ostrowski started a thorough investigation of the phenomen of overconvergence. The main results in this direction are summarized in Peyerimhoff [10] (see, also, [2]). In 1970, Luh [4] and independently in 1971, Chui and Parnes [1] proved the existence of a holomorphic function in the unit disc $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ possessing a universal approximation property with respect to overconvergence.

Theorem 1 (see [1]). *There exists a holomorphic function φ in $\mathbf{D}$ with the following property : For every compact set $B \subset \mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ with connected complement and every function f, continuous on B and holomorphic in its interior, there exists a sequence $\{n_k\}$ such that $\{s_{n_k}(z)\}$ converges to $f(z)$ uniformly on B.*

This was the starting point for several investigations on universal functions. In this paper we give a short survey of the results in this direction, and discuss the question of possible lacunas of power series representing the universal functions.

§1. PRELIMINARIES

In 1986, Luh [5] proved the existence of a holomorphic function φ on an open set $\mathcal{O}$ with simply connected components, where the function φ has several universal approximation properties with respect to overconvergence.

Theorem 2 (see [5]). *Let $\mathcal{O} \subset \mathbf{C}$ be an open set with simply connected components. Suppose $\zeta \in \mathcal{O}$ and denote by $\{s_n^{(\zeta)}(z)\}$ the sequence of partial sums of the power series expansion of φ around ζ.*

There exists a sequence $\{p_n\}$ of natural numbers such that for all $\zeta \in \mathcal{O}$ the following properties hold :

(1) $\{s_{p_n}^{(\zeta)}(z)\}$ converges to $\varphi(z)$ compactly on $\mathcal{O}$;

(2) for any compact set $B \subset \overline{\mathcal{O}}^c$ with connected complement and any function $f \in A(B)$ there exists a subsequence $\{p_{n_k}\}$ of $\{p_n\}$ such that $\{s_{p_{n_k}}^{(\zeta)}(z)\} \underset{B}{\rightrightarrows} f(z)$;

(3) for any open set $U \subset \overline{\mathcal{O}}^c$ with simply connected components and any function $g \in H(U)$ there exists a subsequence $\{p'_{n_k}\}$ of $\{p_n\}$ such that $\{s_{p'_{n_k}}^{(\zeta)}(z)\} \underset{U}{\to} f(z)$;

(4) for any measurable set $E \subset \mathbf{C} \setminus \overline{\mathbf{D}}$ and any measurable function h on E there exists a subsequence $\{p''_{n_k}\}$ of $\{p_n\}$ such that $\{s_{p''_n}^{(\zeta)}(z)\} \underset{B}{\rightrightarrows} f(z)$.

It is clear, that there is no function φ with the above properties, if $\mathcal{O}$ has a non-simply connected component. It is also easy to see that the topological assumptions imposed on the sets B, U and E and the analytical assumptions imposed on the functions f, g and h respectively are best possible and cannot be weakened.

§2. CONSTRUCTION OF UNIVERSAL HOLOMORPHIC FUNCTION WITH LACUNARY POWER SERIES REPRESENTATION

To prove the existence of a holomorphic function φ with lacunary power series, possessing universal approximation properties with respect to overconvergence, we will need the following lemma.

Lemma 1 (see [6]). *Let K be a compact set in $\mathcal{M}$ with $0 \in K^\circ$ and suppose that K_0 (= the component of K containing 0) is starlike with respect to 0. Let Q be a subsequence of $\mathbf{N}_0$ with upper density $\overline{d}(Q) = 1$, where $\overline{d}(Q) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\nu_Q(n)}{n}$ and $\nu_Q(n)$ is the number of $m \in Q$ with $m \leq n$. Assume that $f \in H(K)$ admits (near the origin) a power series representation*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad \text{with } f_n = 0 \text{ for } n \notin Q.$$

Then for every $\varepsilon > 0$ there exists a polynomial P of the form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad \text{with } p_n = 0 \text{ for } n \notin Q,$$

such that

$$\max_K |f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Now we are able to prove the following theorem.

Theorem 3. *Let $R > 1$ and Q be a subsequence of $\mathbf{N}_0$ with upper density $\overline{d}(Q) = 1$. Then there exist a function $\varphi \in H(\mathbf{D})$ with*

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad \text{with } a_\nu = 0 \text{ for } \nu \notin Q$$

and a sequence $\{p_n\}$ of natural numbers, such that for $s_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ the following properties hold :

(1) For every point z_0 ($|z_0| > R$) we have $s_{p_n}(z_0) \to \infty$ as $n \to \infty$.

(2) For every compact set $K \subset \{z : 1 \leq |z| \leq R\}$ with connected complement and every function $f \in A(K)$ there exists a subsequence $\{n_k\}$ satisfying

$$s_{p_{n_k}}(z) \underset{K}{\Longrightarrow} f(z)$$

Proof. 1. Preconsiderations. Following Nestoridis [9], we choose a sequence of compact sets $\{K_n^{**}\}$ in $\mathbf{D}^c$ with $K_n^{**} \in \mathcal{M}$ and define $K_n^* = K_n^{**} \cap \{z : |z| \leq R\}$. For every $n \in \mathbf{N}$, K_n^* is a compact set in $\mathbf{D}^c$ with connected complement, possessing the property that for every non-empty compact set $K \in \mathcal{M}$ with $K \subset \mathbf{D}^c$ there exists an integer $N = N(K)$ such that $K \subset K_N^*$.

Let $\{Q_n^*\}$ be an enumeration of all polynomials with coefficients, whose real and imaginary parts are rational. Any $n \in \mathbf{N}$ has a unique representation of the type

$$n = \binom{m}{2} + j \quad \text{with } m \in \mathbf{N},\ 1 \leq j \leq m.$$

We define

$$K_n = K_{\binom{m}{2}+j} = K_j^*, \quad Q_n = Q_{\binom{m}{2}+j} = Q_{m-j+1}^*,$$

and consider the sequence of pairs $\{(K_n, Q_n)\}$, where in (K_n, Q_n) any combination (K_ν^*, Q_μ^*) appears infinitely often.

2. Construction of the sequence of polynomials $\{P_n(z)\}$. Let $p_0 \in Q$; we define $P_0(z) = z^{p_0}$, and suppose that for $n \in \mathbf{N}$ the polynomials $P_0(z), ..., P_{n-1}(z)$ are already determined. Each of these polynomials contains only z^ν with $\nu \in Q$. Denote by p_{n-1} the degree of the polynomial P_{n-1} and choose $q_{n-1} \in Q$ such that $q_{n-1} > n \cdot p_{n-1}$.

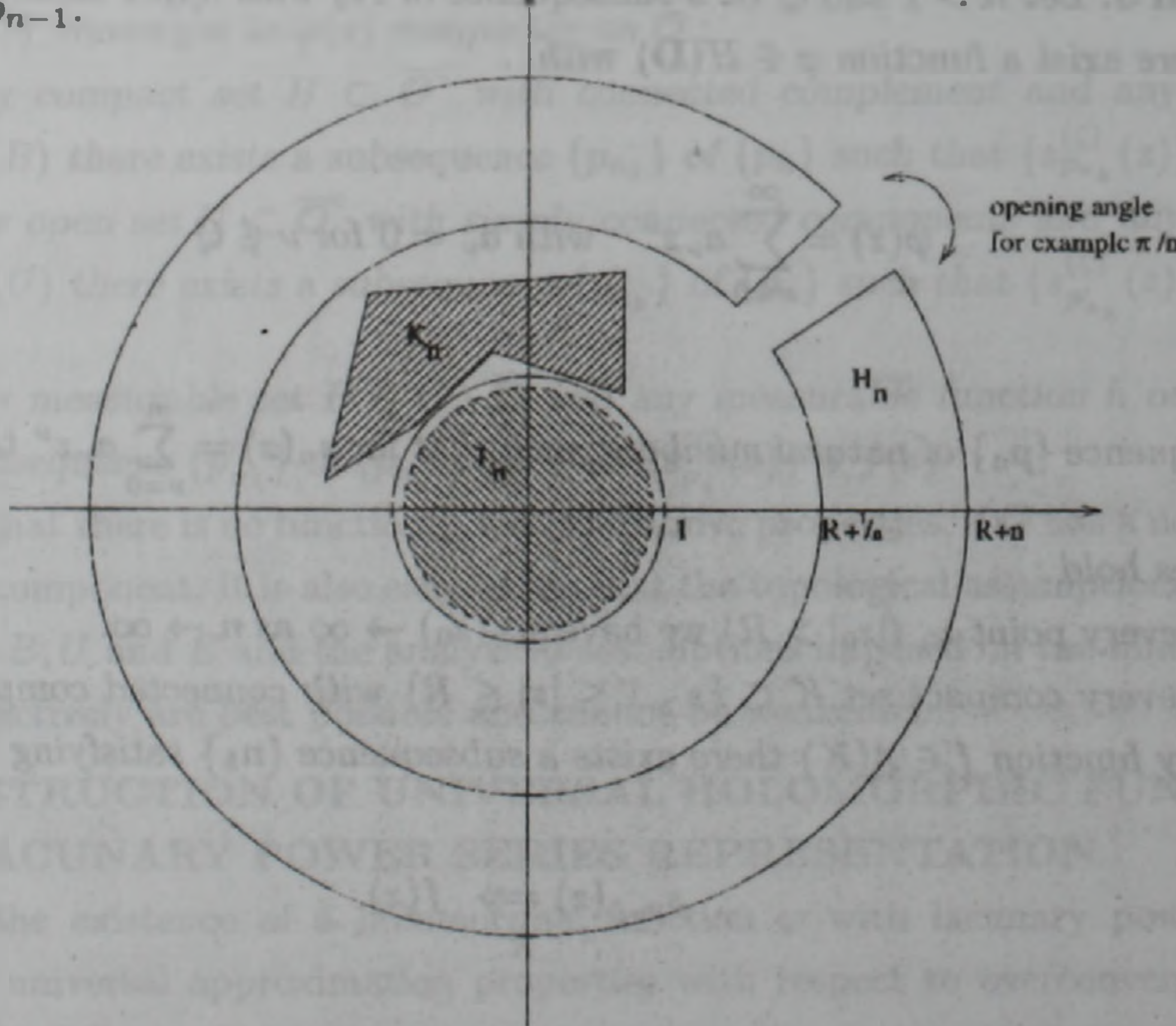

Fig. 1.

Now we consider the sets L_n, K_n and H_n (see Fig. 1), where $L_n = \{z : |z| \leq 1 - \frac{1}{2n}\}$, H_n is as above and K_n was already defined. Then $L_n \cup K_n \cup H_n \in \mathcal{M}$. According to Lemma 1 there exists a polynomial

$$P_n(z) = \sum_{\substack{\nu \in Q \\ \nu \geq q_{n-1}}} a_\nu z^\nu$$

with the following properties :

$$\max_{L_n} |P_n(z)| < \frac{1}{n^2}, \tag{2.1}$$

$$\max_{K_n} \left| P_n(z) - \left\{ Q_n(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(z) \right\} \right| < \frac{1}{n}, \tag{2.2}$$

$$\max_{H_n} \left| P_n(z) - \left\{ (n+1) - \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(z) \right\} \right| < 1. \tag{2.3}$$

We define $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)$.

3. Properties of $\varphi(z)$. By (2.1) the series $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)$ converges compactly on $\mathbf{D}$. Thus, φ is at least holomorphic on the unit disc $\mathbf{D}$.

Consider the polynomials P_ν, which contain only the following powers :

$$P_n(z) : z^{q_{n-1}}, \ldots, z^{p_n}; \quad P_{n+1}(z) : z^{q_n}, \ldots, z^{p_{n+1}}.$$

Because of $q_n > (n+1)p_n$, we have no overlapping. Hence the power series $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ is obtained by formal arranging the series $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)$ by ascending powers of z. This power series contains only the terms z^ν with $\nu \in Q$. In particular, for the partial sums we have

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{p_n} a_\nu z^\nu = s_{p_n}(z).$$

Furthermore $a_\nu = 0$ for $p_n < \nu < q_n$, this means that the power series $\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ has Ostrowski gaps $\{p_n, q_n\}$ with $\frac{q_n}{p_n} \geq n+1 \to \infty$.

4. Let K be a compact set such that $K \subset \{1 \leq |z| \leq R\}$ and $K \in \mathcal{M}$. Given a function $f \in A(K)$, by Mergelian's theorem there exist a number $N \in \mathbf{N}$ with $K \subset K_N^*$ and a sequence $\{m_k\}$ with $m_k \geq k$ satisfying

$$\max_K |f(z) - Q^*_{m_k}(z)| < \frac{1}{k}. \tag{2.4}$$

Setting

$$n_k = \binom{m_k + N - 1}{2} + N,$$

we obtain $K_{n_k} = K_N^*$, $Q_{n_k} = Q^*_{m_k}$ and $K \subset K_{n_k}$. From (2.2) we have

$$\max_{K_{n_k}} \left| \sum_{\nu=0}^{n_k} P_\nu(z) - Q_{n_k}(z) \right| < \frac{1}{n_k}.$$

Hence

$$\max_{K_{n_k}} \left| \sum_{\nu=0}^{p_{n_k}} a_\nu z^\nu - Q_{n_k}(z) \right| < \frac{1}{n_k}.$$

This implies

$$\max_{K_{n_k}} \left| s_{p_{n_k}}(z) - Q^*_{m_k}(z) \right| < \frac{1}{n_k}. \tag{2.5}$$

From (2.4) and (2.5)

$$\max_K |s_{p_{n_k}}(z) - f(z)| \leq \max_K |s_{p_{n_k}}(z) - Q^*_{m_k}(z)| + \max_K |Q^*_{m_k}(z) - f(z)| < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k}.$$

5. The function φ is holomorphic exactly in $\mathbf{D}$. Suppose the opposite, i.e. that φ admits analytical continuation outside $\mathbf{D}$. Then by Ostrowski's overconvergence theorem $\{s_{p_n}(z)\}$ would converge compactly to $\varphi(z)$ in a domain bigger than the unit disc $\mathbf{D}$. This is not possible because of the step 4 of the proof.

6. Divergence outside the unit disc **D**. It follows from (2.3) that

$$\max_{H_n}\left|\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(z)-(n+1)\right|<1.$$

Hence

$$\max_{H_n}|s_{p_n}(z)-(n+1)|<1.$$

Let z_0 be a fixed point satisfying $|z_0|>R$. Then there exists a number N_0 such that $z_0\in H_n$ for all $n\geq N_0$. For these n we have

$$|s_{p_n}(z_0)-(n+1)|\leq\max_{H_n}|s_{p_n}(z)-(n+1)|<1.$$

This implies

$$|s_{p_n}(z_0)|=|s_{p_n}(z_0)-(n+1)+(n+1)|>n.$$

Therefore

$$|s_{p_n}(z)|\to\infty\quad\text{for all } z\quad\text{with } |z|>R.$$

This completes the proof of Theorem 3.

Remark 1. Using Lemma 1 we can achieve an analoguous result for $R=\infty$: Let Q be a subsequence of $\mathbf{N}_0$ with upper density $\overline{d}(Q)=1$, and let G be a simply connected starlike domain such that $\mathbf{D}\subset G$ and $\overline{\mathbf{D}}\not\subset G$. Then there exists a function φ, holomorphic exactly in G with the following properties :

(1) $\varphi(z)=\sum_{\nu\in Q}a_\nu z^\nu$ with radius of convergence equal to 1 ;

(2) there exists a subsequence $\{p_n\}$ such that $s_{p_n}(z)\underset{G}{\rightarrow}\varphi(z)$;

(3) for every compact set $K\subset G^c$ with connected complement and every function $f\in A(K)$ there exists a subsequence $\{n_k\}$ satisfying $s_{p_{n_k}}(z)\underset{K}{\rightrightarrows}f(z)$.

§3. A GENERALIZATION OF MENSHOV'S THEOREM

Theorem 4. Let the power series of $\varphi\in H(\mathbf{D})$ have the universal approximation properties according to Theorem 3, u,v be real-valued Lebesgue-measurable functions on $\partial\mathbf{D}$. Then there exists a subsequence $\{n_k\}$ of the natural numbers, such that

$$Re\ s_{n_k}(z)\to u(z)\quad \textit{almost everywhere on } \partial\mathbf{D}$$

and

$$Im\ s_{n_k}(z) \to v(z) \quad \textit{almost everywhere on } \partial\mathbf{D}.$$

Proof. Let u, v be real-valued, measurable functions on $\partial\mathbf{D}$. By Lusin's theorem (see, e.g., [11], [12]) for all $k \in \mathbf{N}$ there exist continuous, real-valued functions u_k, v_k on $\partial\mathbf{D}$ and a compact set $E \subset \partial\mathbf{D}$ satisfying $E \neq \partial\mathbf{D}$ and $\mu(E) = \mu(\partial\mathbf{D}) = 2\pi$ such that for all $z \in E$

$$u_k(z) \to u(z), \quad v_k(z) \to v(z), \quad \text{as } k \to \infty.$$

We define $h_k(z) = u_k(z) + iv_k(z)$ for $z \in E$. Then h_k is a continuous function on E. Consider the sets

$$E_k = E \setminus \left\{ z = e^{i\omega} : |\omega| < \frac{1}{4k},\ k \in \mathbf{N} \right\}.$$

It is clear that for all $k \in \mathbf{N}$ the set E_k is compact and $E_k \in \mathcal{M}$. Hence by Theorem 3 there exists a number $n_k \in \mathbf{N}$ satisfying

$$\max_{E_k} |s_{n_k}(z) - h_k(z)| < \frac{1}{k}.$$

Let $z_0 \in E$ be an arbitrary point with $z_0 \neq 1$. There exists a number k_0 such that z_0 is contained in E_k for all $k \geq k_0$, so we obtain

$$s_{n_k}(z_0) \to u(z_0) + iv(z_0) \quad \text{for } k \to \infty .$$

This implies

$$s_{n_k}(z) \to u(z) + iv(z) \quad \text{almost everywhere on } \partial\mathbf{D}.$$

Theorem 4 is proved.

If we consider the power series $\varphi(z) = \sum_{\nu \in Q} a_\nu z^\nu$ as above and set $z = e^{it}$ $(t \in \mathbf{R})$, then we obtain

$$\sum_{\nu \in Q} a_\nu e^{i\nu t} = \sum_{\nu \in Q} a_\nu (\cos \nu t + i \sin \nu t),$$

that is, a (formal) trigonometric series with gaps. So, we can say that Theorem 4 is in some sense a generalization of the Menšov's well known theorem [8] on the existence of universal trigonometric series.

§4. SOME REMARKS ON THE DENSITY

We have $\overline{d}(Q) \leq d_{\max}(Q)$, where $d_{\max}(Q)$ is the maximum density (in the sense of Pólya) of a subsequence Q of $\mathbf{N}_0$ (see [3]) :

$$d_{\max}(Q) = \lim_{\theta \to 1-} \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\nu_Q(n) - \nu_Q(\theta n)}{(1-\theta)n} \right).$$

The following example shows that we cannot require $d_{\max}(Q) < 1$ in Theorem 3 : Let $R > 1$ and Q be a subsequence of $\mathbf{N}_0$ with $d_{\max}(Q) < 1$. Suppose that there exists a function $\varphi \in H(\mathbf{D})$ with universal approximation properties according to Theorem 3.

Let K^* be the closed circular arc of $|z| = r$ with $1 < r < R$ and length $2\pi R d_{\max}$. Let G be a simply connected domain in $\{z : \ 1 < |z| < R\}$ which contains K^*. Further, we denote by K the compact set with connected complement in $\{z : \ 1 < |z| < R\}$ satisfying $G \supset K^\circ \supset K^*$ and $K \neq K^*$. By Theorem 3 there exists a subsequence $\{p_{n_k}\}$ of $\{p_n\}$ such that

$$s_{p_{n_k}}(z) \underset{K}{\Longrightarrow} 0.$$

Therefore (see [7], p. 29)

$$s_{p_{n_k}}(z) \xrightarrow[\mathbf{D}_{r+\varepsilon}]{} 0 \quad \text{for some } \varepsilon > 0.$$

In particular $\varphi(z) \equiv 0$ for all $z \in \mathbf{D}$. We came to a contradiction.

Резюме. Статья даёт краткий обзор результатов касающихся аппроксимации по сверхсходящимся степенным рядам и обсуждает вопрос возможной лакунарности степенных рядов, представляющих универсальные функции.

REFERENCES

1. C. K. Chui, M. N. Parnes, "Approximation by overconvergence of power series", Journ. Math. Analysis and Applications vol. 36, pp. 693 – 696, 1971.
2. E. Hille, Analytic Function Theory, II, Chelsea, New York, 1987.
3. P. Koosis, The Logarithmic Integral, vol. I+II, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
4. W. Luh, "Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 88, 1970.
5. W. Luh, "Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets", Analysis vol. 6, pp. 191 – 207, 1986.

6. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Restricted T-universal functions", J. Approxim. Theory, vol. 114, pp. 201 – 213, 2002.
7. J. Müller, "Über analytische Fortsetzung mit Matrixverfahren", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 199, 1990.
8. D. E. Menshov, "On the partial sums of trigonometric series" [in Russian], Math. Sb. (N.S.) vol. 20, pp. 197 – 238, 1947.
9. V. Nestoridis, "Universal Taylor series", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 46, no. 5, 1293 – 1306, 1996.
10. A. Peyerimhoff, Lectures on Summability, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1970.
11. W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.
12. K. R. Stromberg, An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth Inc., Belmont, CA, 1981.

Поступила 2 октября 2003

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 38, Номер 4, 2003

МАТЕМАТИКА В АРМЕНИИ:

Достижения и Перспективы

СОДЕРЖАНИЕ

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 38, No. 4, 2003

MATHEMATICS IN ARMENIA:

Advances and Perspectives

CONTENTS