

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ  
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ  
ИЗВЕСТИЯ  
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ  
МАТЕМАТИКА

## ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան

Գ. Գ. Գևորգյան

Վ. Ս. Չաքարյան

Ա. Ա. Թալալյան

Ն. Ե. Թովմասյան

Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան

Բ. Ս. Նահապետյան

Ա. Բ. Ներսիսյան

Ռ. Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա. Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ. Ա. Հովհաննիսյան

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсесян

А. А. Талалян

Н. Е. Товмасян

Р. Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Настоящий выпуск представляет собой № 4 тематической серии, посвящённой близким предметам ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (в смысле Бляшке–Санта-ло–Хадвигера) и СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. Статьи в этой области, имеющие прикладную или статистическую природу, публикуются в ряде периодических изданий. Однако работы в той же области, посвящённые математическому анализу, несмотря на большой интерес к ним, не имеют определённого признанного места публикации. Настоящая тематическая серия быть может изменит эту ситуацию.

Список публикаций по Интегральной и Стохастической Геометрии в “Известиях Академии Наук Армении”, серия Математика довольно значителен. В частности, не считая тематической серии, имеются три специальных выпуска (4-ые номера за 1994, 1996 и 1998 годы) под общим названием “Аналитические Результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии”. Эти три выпуска заслужили самых высоких оценок (так, профессор Дитер Баум из Трирского Университета писал: “Букет блестящих, впечатляющих аналитических результатов ... очень важные, успешные и глубокие математические исследования”). Эти выпуски составляли хорошую начальную основу для тематической серии.

Выпуски тематической серии не имеют строгого графика. Их публикация зависит от наличия и готовности материала. Предусматривается строгая процедура рецензирования. Планируются несколько дополнительных сборников статей, представляющих лучшие исследования по Интегральной и Стохастической Геометрии, ранее опубликованных в нашем журнале.

Редакционная коллегия надеется на положительный резонанс интернационального математического сообщества, включая представление статей к публикации, участие в процессе рецензирования и т.д.. Журнал готов к любому сотрудничеству, направленному на улучшение качества тематической серии.

Рубен В. Амбарцумян

Ереван, июнь 2003

Главный редактор

## ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении

E-mail : rhambart@aua.am

**Резюме.** В статье приведены несколько теорем, касающихся валюаций на так называемых кольцах Сильвестра в пространствах прямых или плоскостей в 2- или 3-мерных евклидовых пространствах. В трансляционно-инвариантном случае эти результаты дополняют классическую теорию.

### ВВЕДЕНИЕ

Валюация – обычное название конечно-аддитивных функций, определённых на кольце подмножеств некоторого пространства. В статье приведены теоремы об общих валюациях, определённых на так называемых кольцах Сильвестра в пространствах :

$\mathbf{G}$  = прямые в евклидовой плоскости,  $g \in \mathbf{G}$ ,  $\dim \mathbf{G} = 2$ ,

$\mathbf{E}$  = плоскости в трёхмерном евклидовом пространстве,  $e \in \mathbf{E}$ ,  $\dim \mathbf{E} = 3$ ,

$\mathbf{\Gamma}$  = прямые в трёхмерном евклидовом пространстве,  $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ ,  $\dim \mathbf{\Gamma} = 4$ .

Основным инструментом является аппарат комбинаторных валюаций, исследованных автором и его учениками в [1]– [10], среди которых выделим монографию

CIG = COMBINATORIAL INTEGRAL GEOMETRY, [1].

Важный вопрос : все ли валюации на кольцах Сильвестра в вышеупомянутых пространствах являются комбинаторными получил к настоящему времени положительный ответ только для пространства  $\mathbf{G}$  (Теорема 1). Несмотря на этот пробел, комбинаторные валюации применяются в ряде задач общей теории. Например, в задаче существования валюаций на кольцах Сильвестра в пространствах  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{\Gamma}$ , обладающих наперёд заданными биффоновыми плотностями (Теоремы 4 и 7). Здесь положительный ответ даётся указанием конкретных комбинаторных

валюаций. Примечательно, что обе теоремы используют т.н. "отображение Функа", т.е. существование и единственность решения классической задачи Функа о восстановлении симметрической функции, определённой на сфере, по интегралам вдоль больших кругов.

В настоящей статье комбинаторные валюации в пространствах  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{I}$ , строятся на основе флаговых плотностей, последние впервые были предложены в контексте интегральной геометрии в монографии [2]. В частности, подход связанный с флаговой плотностью позволяет установить "локальные" условия продолжимости комбинаторной валюации до знакопеременной меры в соответствующем пространстве (Теоремы 2, 5, 8). Эти условия приводят к красивым чисто геометрическим результатам : при дополнительном условии трансляционной инвариантности, все валюации, допускающие продолжения до знакопеременных мер – необходимо комбинаторные, и определяются с помощью флаговых плотностей, получаемых как образы Функа бюфоновых плотностей (Теоремы 3, 5, 9). Первоначальный интерес к общим валюациям, возник из давнего результата ([1], [10]), о комбинаторном решении четвёртой проблемы Гильберта. Согласно Теореме 1, этот результат теперь можно сформулировать в следующем виде :

**Предложение.** Пусть функция  $F(P_1, P_2)$ ,  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$  симметрична и непрерывна. Следующие два утверждения эквивалентны :

- 1)  $F(P_1, P_2)$  есть линейно-аддитивная псевдометрика на  $\mathbb{R}^2$  ;
- 2) единственная валюация  $V$  на кольце Сильвестра в пространстве  $\mathbf{G}$ , для которой  $F(P_1, P_2)$  является т.н. бюфоновой функцией, продолжается до неотрицательной меры в пространстве  $\mathbf{G}$ , причём последняя приписывает меру ноль каждому пучку прямых, проходящих через одну точку.

Статья состоит из двух частей : В параграфах 1–6 приводятся необходимые понятия, задачи и предварительные Предложения, а в параграфе 7 приводятся Теоремы. Теоремы приводятся без доказательств, последние могут быть выработаны из результатов [1]–[10].

## §1. КОЛЬЦА СИЛЬВЕСТРА

Для строгого определения колец Сильвестра требуется рассмотрение эквивалентных классов : два множества в пространстве  $\mathbf{G}$  ( $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{I}$ ) называются эквивалентными, если их замыкания совпадают. На этой детали мы останавливаться не будем.

**Определение 1.**  $SRG$  = кольцо Сильвестра в пространстве  $\mathbf{G}$  :

Две различные точки  $P_1$  и  $P_2$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  определяют "Бюффово множество"

$$\{g \in \mathbf{G} : g \text{ разделяет точки } P_1 \text{ и } P_2\}.$$

По определению

$\mathbf{SRG}$  = минимальное кольцо подмножеств в пространстве  $\mathbf{G}$ , которое содержит все Бюффовы множества.

**Определение 2.**  $\mathbf{SRIE}$  = кольцо Сильвестра в пространстве  $\mathbf{IE}$  :

Так как каждая плоскость  $e \in \mathbf{IE}$  разделяет трёхмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  на две компоненты, определение кольца  $\mathbf{SRIE}$  аналогично определению кольца  $\mathbf{SRG}$ .

Две различные точки  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$  определяют Бюффово множество в  $\mathbf{IE}$  :

$$\{e \in \mathbf{IE} : e \text{ разделяет точки } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3\}.$$

По определению

$\mathbf{SRIE}$  = минимальное кольцо подмножеств в  $\mathbf{IE}$ , содержащее все Бюффовы множества.

**Определение 3.**  $\mathbf{SR\Gamma}$  = кольцо Сильвестра в пространстве  $\mathbf{\Gamma}$  :

Пусть  $\tau$  – пластинка = ограниченное выпуклое многоугольное плоское подмножество в  $\mathbb{R}^3$ . Бюффовы множества в  $\mathbf{\Gamma}$  имеют вид

$$\{\gamma \in \mathbf{\Gamma} : \gamma \text{ содержит одну точку из внутренности пластинки } \tau\}.$$

По определению

$\mathbf{SR\Gamma}$  = минимальное кольцо подмножеств в  $\mathbf{\Gamma}$ , содержащее все бюффовы множества.

## §2. БЮФФОНОВЫ ФУНКЦИИ

Для валюации  $V$ , заданной на кольце Сильвестра в  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{IE}$  или  $\mathbf{\Gamma}$ , её сужение на Бюффовы множества называется Бюффовой функцией валюации  $V$  (обозначение :  $B(P_1, P_2)$  для  $\mathbf{G}$  или  $\mathbf{IE}$ , и  $B(\tau)$  для  $\mathbf{\Gamma}$ ).

Бюффовы функции наследуют свойство аддитивности соответствующей валюации  $V$  на каждой прямой  $g \in \mathbf{G}$ , прямой  $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$  или плоскости  $e \in \mathbf{IE}$ .

Плотности Бюффовых функций не обязательно неотрицательны. Дадим соответствующие определения.

Бюффовы плотности валюации  $V$  на  $\mathbf{SRG}$  : если для любых  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ ,

$$B(P_1, P_2) = \int_{P_1 P_2} \lambda(P, \varphi) dl, \quad (1)$$

то  $\lambda(P, \varphi)$  называется Бюффоновой плотностью валюации  $V$ . В (1) интегрирование ведётся по  $P$ , принадлежащим отрезку  $P_1, P_2$ ,  $dl$  – мера Лебега на этом отрезке. Одномерный параметр  $\varphi$  в аргументе плотности  $\lambda$  обозначает плоское направление отрезка  $P_1, P_2$ , т.е. остаётся постоянным для точек  $P$ , изменяющихся вдоль пути интегрирования  $P_1, P_2$ .

**Бюффовы плотности валюации  $V$  на  $SR\mathbb{E}$**  : если для любых  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$  имеем

$$B(P_1, P_2) = \int_{P_1 P_2} \lambda(P, \Omega) dl, \quad (2)$$

то  $\lambda(P, \Omega)$  есть Бюффонова плотность валюации  $V$ . В (2) интегрирование ведётся по  $P$ , принадлежащим отрезку  $P_1, P_2$  в  $\mathbb{R}^3$ ,  $dl$  – мера Лебега на этом отрезке. Параметр  $\Omega =$  пространственному направлению отрезка  $P_1, P_2$ .

**Бюффовы плотности валюации  $V$  на  $SR\mathbb{I}$**  : если для любой пластинки  $\tau$  имеем

$$B(\tau) = \int_{\tau} \lambda(P, \omega) da, \quad (3)$$

то  $\lambda(P, \omega)$  есть Бюффонова плотность валюации  $V$ . В (3) интегрирование ведётся по  $P \in \tau$  относительно  $da =$  2-мерная мера Лебега на пластинке  $\tau$ , а  $\omega =$  пространственное направление нормали к  $\tau$ .

### §3. ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ И В ТЕРМИНАХ ВАЛЮАЦИЙ

**Классические формулировки :**

- 1) Существует ли для данной функции  $\lambda(P, \varphi)$  знакопеременная мера на  $\mathbf{G}$ , значения которой на Бюффовых множествах задаются интегралом (1) ?
- 2) Существует ли для данной функции  $\lambda(P, \Omega)$  знакопеременная мера на  $\mathbb{E}$ , значения которой на Бюффовых множествах задаются интегралом (2) ?
- 3) Существует ли для данной функции  $\lambda(P, \omega)$  знакопеременная мера на  $\mathbb{I}$ , значения которой на Бюффовых множествах задаётся интегралом (3) ?

Для трансляционно инвариантных случаев при некоторых предположениях гладкости имеются утвердительные ответы на эти три вопроса (получены с помощью обращения  $\cos$ -преобразования).

**Формулировки в терминах валюаций**

- Q1. Существует ли для заданной функции  $\lambda(P, \varphi)$  валюация  $V$  на  $SR\mathbf{G}$  такая, что её Бюффонова функция задаётся интегралом (1) ?
- Q2. Существует ли для заданной функции  $\lambda(P, \Omega)$  валюация  $V$  на  $SR\mathbb{E}$  такая, что её Бюффонова функция задаётся интегралом (2) ?

Q3. Существует ли для заданной функции  $\lambda(P, \Omega)$  валюация  $V$  на  $SR\Gamma$  такая, что её Бюффонова функция задаётся интегралом (3)?

Q4–Q6. Возможно ли валюацию  $V$  заданную на  $SRG$  ( $SR\mathbb{E}$  или  $SR\Gamma$ ) продолжить до знакопеременной меры на  $G$  ( $\mathbb{E}$  или  $\Gamma$ )?

Говоря о знакопеременных мерах мы обычно (если не оговорено противное) подразумеваем знакопеременные меры, имеющие плотности. Знакопеременная мера  $M$  на  $G$  обладает плотностью, если существует не обязательно неотрицательная непрерывная функция  $p(g)$ ,  $g \in G$  такая, что для любого борелевского множества  $A \in G$

$$M(A) = \int_A p(g) \mu(dg),$$

где  $\mu$  = единственная (с точностью до постоянного множителя) инвариантная относительно евклидовых движений мера на  $G$ .

Это определение распространяется на знакопеременные меры на  $\mathbb{E}$  и  $\Gamma$ , где также существуют инвариантные относительно евклидовых движений меры, причём они единственны (с точностью до постоянного множителя). Соответствующие плотности обозначаем  $p(e)$ ,  $e \in \mathbb{E}$  или  $p(\gamma)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . Таким образом, вопросы Q4–Q6 в действительности относятся к существованию плотностей  $p(g)$ ,  $p(e)$  и  $p(\gamma)$ . Вопросы Q1 и Q4 как бы делят классическую задачу 1) на две части; то же касается вопросов Q2, Q5 и классической задачи 2), а также вопросов Q3, Q6 и классической задачи 3).

#### §4. ФЛАГИ И КЛИНЬЯ

2–флаг  $f$  есть пара состоящая из точки  $P \in \mathbb{R}^2$  и плоского направления  $\varphi$ . Таким образом,

$$f = (P, \varphi), \quad P \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi \in \mathcal{E}_1,$$

где  $\mathcal{E}_1$  – окружность, с отождествлёнными парами взаимно противоположных направлений (представляет пространство направлений на плоскости).

Пусть  $\mathcal{E}_2$  – проективная (или эллиптическая) плоскость,  $\mathcal{E}_1(\Omega)$  – окружность, представляющая пространство направлений ортогональных  $\Omega$ .

3–флаг  $f$  есть тройка, состоящая из точки  $P \in \mathbb{R}^3$ , пространственного направления  $\Omega$  и направления  $\phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$ . Таким образом

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

Каждому прямолинейному отрезку  $\nu$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  имеющему направление  $\varphi \in \mathcal{E}_1$  соответствует множество 2–флагов

$$\nu = \{f = (P, \varphi) : P \in \nu, \text{ но } \varphi \text{ фиксировано и совпадает с направлением } \nu\},$$

которое называется 2-клином. Отметим, что отображение  $\nu \rightarrow \nu$  является взаимно однозначным, т.е. 2-клинья могут быть заменены прямолинейными отрезками.

Каждому прямолинейному отрезку  $\nu$  в  $\mathbb{R}^3$  имеющему направление  $\Omega \in \mathcal{E}_2$  и дуге  $\alpha \subset \mathcal{E}_1(\Omega)$  соответствует множество 3-флагов

$$w = \{f = (P, \Omega, \phi) : P \in \nu, \text{ но } \Omega \text{ фиксировано и совпадает с пространственным направлением отрезка } \nu, \phi \in \alpha\},$$

которое называется 3-клином.

### Дуальные параметры 3-флагов

Для того, чтобы задать 3-флаг  $f$  в  $\mathbb{R}^3$  можно использовать параметры дуальные к  $\Omega$  и  $\phi$ , т.е.  $f = (P, \omega, \varphi)$ , где

$\omega \in \mathcal{E}_2$  — направление нормали к  $\Omega$  и направлению  $\phi$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$  — направление совпадающее с направлением  $\Omega$ .

### Приведённые флаговые функции

Любая функция  $\rho(f) = \rho(P, \Omega, \phi)$ , зависящая от 2-флагов имеет дуальное представление  $\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi)$ . Если флаговая функция имеет вид  $\rho(f) = \rho(P, \omega)$  (не зависит от  $\varphi$ ), то  $\rho(P, \Omega, \phi)$  называется приводимой и  $\rho(P, \omega)$  (функция определена на  $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{E}_2$ ) называется приведённой версией функции  $\rho(P, \Omega, \phi)$ .

### Образ Функа

Для функции  $u(\Omega)$ , заданной на  $\mathcal{E}_2$ , её образом Функа  $v(\omega)$  называется функция определённая на  $\mathcal{E}_2$  и являющаяся единственным решением уравнения Функа

$$u(\Omega) = \int_{c(\Omega)} v(\omega) dl,$$

где  $c(\Omega) \subset \mathcal{E}_2$  — большой круг с полюсом в точке  $\Omega$ . Условие  $u(\Omega) \in C^{(3)}$ , где  $C^{(3)}$  означает класс трижды непрерывно дифференцируемых функций, достаточно для существования и единственности решения уравнения Функа.

## §5. РАЗРЕШАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА КЛИНЬЕВ И ФУНКЦИИ

Следующие утверждения можно найти в СИГ. Заметим, что в СИГ, Предложением 1 сформулировано в терминах прямолинейных отрезков.

**Случай SRG**

В Предложении 1,  $M$  есть (произвольная) мера на  $G$ , а  $F(v)$  (функция, зависящая от 2-клина  $v$ ) строится следующим образом. Пусть  $\lambda_2(P, \varphi)$  – Бюффонова плотность валюации  $V =$  сужение меры  $M$  на  $SRG$ . Ясно, что  $\lambda_2(P, \varphi)$  зависит от 2-флага. Полагаем

$$F(v) = \int_v \lambda_2(P, \varphi) dl, \quad (4)$$

где  $dl =$  мера Лебега на отрезке соответствующего  $v$ . Согласно (1),  $F(v) = B(P_1, P_2)$ , где отрезок  $P_1, P_2$  и 2-клин  $v$  соответствуют друг другу.

**Предложение 1.** Для любого  $A \in SRG$  существуют конечное множество 2-клиньев  $\{v_i\}$  (разрешающее множество) и необязательно положительные целые коэффициенты  $c_i(A)$  (разрешающие коэффициенты), зависящие только от 2-клина  $v_i \in \{v_i\}$  и  $A$ . Для любой знакопеременной меры  $M$  на  $G$

$$M(A) = \sum_{\{v_i\}} c_i(A) F(v_i).$$

**Случай SRIE**

В Предложении 2,  $M$  – произвольная мера на  $\mathbb{E}$ , а функция  $F(w)$  зависящая от 3-клина  $w$ , строится следующим образом. Положим

$$\rho(P, \Omega, \phi) = \rho(f) = \int \sin^2 \alpha M(de),$$

где  $f = (P, \Omega, \phi)$  есть 3-флаг,  $\alpha = \alpha(f, e)$  – угол между  $\Omega$  и направлением прямой пересечения плоскости  $e$  с плоскостью, содержащей  $\Omega$  и  $\phi$ . Полагаем

$$F(w) = \int_\nu dl \int_\alpha \rho(P, \Omega, \phi) d\phi, \quad (5)$$

где  $w$  соответствует  $\nu =$  отрезку направления  $\Omega$  и  $\alpha =$  дуге в  $\mathcal{E}_1(\Omega)$ ,

$dl =$  мера Лебега на  $\nu$ ,

$d\phi =$  равномерная угловая мера на  $\alpha$ .

**Предложение 2.** Для любого  $A \in SRIE$  существует конечное множество 3-клиньев  $\{w_s\}$  (разрешающее множество) и целые необязательно положительные

коэффициенты  $c_s(A)$ , зависящие только от 3-клина  $w_i \in \{w_i\}$  и  $A$  (разрешающие коэффициенты). Для любой знакопеременной меры  $M$  на  $\mathbb{E}$

$$M(A) = \sum_{\{V_s\}} c_s(A) F(w_s).$$

**Случай SRГ :**

В Предложении 3,  $M$  есть (произвольная) мера на  $\mathbb{I}$ , а 3-клиновая функция  $W(w)$  строится следующим образом. Сначала положим

$$\rho(P, \Omega, \phi) = \rho(f) = \int \sin \varphi p(f, \varphi) d\varphi,$$

где  $p(f, \varphi)$  – значение плотности  $p(\gamma)$  меры  $M$  на прямой  $\gamma_0$ , содержащей точку  $P$ , и параллельной плоскости, проходящей через  $\Omega$  и  $\phi$  и направление которой составляет угол  $\varphi$  с  $\Omega$ . Затем полагаем

$$W(w) = \int_{\nu} dl \int_{\alpha} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \rho(P, \Omega, \phi) d\phi, \quad (6)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между  $\phi$  и концами дуги  $\alpha$ .

**Предложение 3.** Для любого  $A \in \text{SRГ}$  существуют два двумерных многообразия 3-клиньев  $\{w^{(1)}(l_1, l_2)\}$  и  $\{w^{(2)}(l_1, l_2)\}$  (разрешающие множества) и две целые необязательно положительные функции  $c_A^{(1)}(l_1, l_2)$  и  $c_A^{(2)}(l_1, l_2)$  (разрешающие функции), зависящие только от соответствующих 3-клиньев и  $A$ . Для любой знакопеременной меры  $M$  на  $\mathbb{E}$  имеем

$$M(A) = \sum_{i=1,2} \int \int c_A^{(i)}(l_1, l_2) W(w^{(i)}(l_1, l_2)) dl_1 dl_2.$$

Для всех трёх случаев, в монографии СИГ предложены конкретные алгоритмы для нахождения решающих множеств и коэффициентов (или функций), которые мы называем комбинаторными алгоритмами.

## §6. КОМБИНАТОРНЫЕ ВАЛЮАЦИИ : ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### Случай SRG

Каждой симметричной, непрерывной аддитивной функции  $b(P_1, P_2)$ ,  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ , соответствует функция  $F(v)$  зависящая от 2-клиньев :

$$F(v) = b(P_1, P_2),$$

где отрезок  $(P_1, P_2)$  и 2-клин  $v$  соответствуют друг другу как описано выше. В случае

$$b(P_1, P_2) = \int_{P_1, P_2} \rho(P, \varphi) dl$$

(ср. с (1)), говорим, что  $F(v)$  соответствует функции  $\rho(P, \varphi)$ .

Комбинаторная валюация  $V$ , которая соответствует функции  $b(P_1, P_2)$  (или  $\rho(P, \varphi)$ ) определяется следующим образом. Для заданного  $A \in \text{SRG}$  полагаем

$$V(A) = \sum_{\{v_i\}} c_i(A) F(v_i),$$

где  $\{v_i\}$  и  $c_i(A)$  суть разрешающее множество и разрешающие коэффициенты множества  $A$ , определённые по комбинаторному алгоритму.

### Случай SRIE

Каждой непрерывной 3-флаг функции  $\rho(P, \Omega, \phi)$  соответствует комбинаторная валюация  $V$  на SRIE. По определению, для каждого  $A \in \text{SRIE}$

$$V(A) = \sum_{\{w_s\}} c_s(A) F(w_s),$$

где функция клина  $F(w)$  определяется по формуле (5),  $\{w_s\}$  и  $c_s(A)$  суть разрешающее множество и разрешающие коэффициенты, определённые по комбинаторному алгоритму.

### Случай SRГ

Каждой непрерывной 3-флаговой функции  $\rho(P, \Omega, \phi)$  соответствует комбинаторная валюация  $V$  на SRГ. По определению, для каждого  $A \in \text{SRГ}$

$$V(A) = \sum_{i=1,2} \int \int K(l_1, l_2) c_A^{(i)}(l_1, l_2) W(w^{(i)}(l_1, l_2)) dl_1 dl_2,$$

где функция клина  $F(w)$  определяется по формуле (6),  $\{w^{(i)}(l_1, l_2)\}$  и  $c_A^{(i)}(l_1, l_2)$  суть разрешающие многообразия и разрешающие функции, определённые по комбинаторному алгоритму.

Ниже, функции  $\rho$  называются **флаговыми плотностями** соответствующих комбинаторных валюаций на  $SRG$ ,  $SRIE$  или  $SRIG$ . Для комбинаторной валюации  $V$  на  $SRG$ , всегда  $\rho(P, \varphi) = \lambda(P, \varphi)$ , т.е. флаговая плотность совпадает с Бюффоновой плотностью.

## §7. ТЕОРЕМЫ

**Теорема 1.** Каждая валюация  $V$ , определённая на  $SRG$  и обладающая непрерывной Бюффоновой функцией  $B(P_1, P_2)$  совпадает с комбинаторной валюацией для  $F(v) = B(P_1, P_2)$ .

Рассмотрим дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial \lambda(P, \varphi)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \lambda(P, \varphi)}{\partial \varphi \partial_\varphi P}, \quad (7)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  обозначает дифференцирование по переменной  $\varphi$  против часовой стрелки.

На прямой  $L$ , которая содержит точку  $P$  и имеет направление  $\varphi \in \mathcal{E}_1$ , мы выбираем одно из двух возможных направлений в качестве положительного.

Тогда  $\frac{\partial}{\partial_\varphi P}$  обозначает дифференцирование по точке  $P$  в его положительном

направлении и  $\frac{\partial}{\partial_n P}$  обозначает дифференцирование по  $P$  в направлении нормали

$L$  и отстающая в левой полуплоскости от ориентированной прямой  $L$ .

**Теорема 2.** Уравнение (7) является необходимым и достаточным условием того, что валюация  $V$  на  $SRG$ , соответствующая  $\lambda(P, \varphi) \in C^{(3)}$ , продолжается до знакопеременной меры на  $G$ .

Для трансляционно инвариантных валюаций,  $\lambda(P, \varphi) = \lambda(\varphi)$  не зависит от  $P$ , и соотношение (7) всегда выполнено. Отсюда следует :

**Теорема 3.** Любая трансляционно инвариантная валюация  $V$  на  $SRG$ , обладающая Бюффоновой плотностью  $\lambda(\varphi) \in C^{(3)}$ , продолжается до знакопеременной меры на  $G$ , плотность которой для прямой  $g$  имеющей направление  $\varphi$  равна

$$p(g) = \lambda(\varphi) + \lambda''(\varphi).$$

**Теорема 4.** Для каждого  $\lambda(P, \Omega) \in C^{(3)}$ , класс валюаций  $V$  на  $SR\mathbb{E}$  для которых  $\lambda(P, \Omega)$  является Бюфоновой плотностью, непуст и, в частности, содержит комбинаторные валюации. Всякая комбинаторная валюация  $V$  из описанного класса соответствует флаговой плотности типа

$$\rho_1(P, \Omega, \phi) + \rho_2(P, \Omega, \phi),$$

где  $\rho_2(P, \Omega, \phi)$  – флаговая функция, удовлетворяющая условию

$$\int \rho_2(P, \Omega, \phi) d\phi = 0.$$

Для каждого  $P \in \mathbb{R}^3$ , флаговая функция  $\rho_1(P, \Omega, \phi)$  приводима и её приведённая версия  $\rho_1(P, \omega)$  удовлетворяет условию

$$\rho_1(P, \omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(P, \Omega).$$

**Теорема 5.** Комбинаторная валюация  $V$  на  $SR\mathbb{E}$  соответствующая приводимой  $\rho(P, \Omega, \phi) \in C^{(3)}$ , продолжается до локально конечной знакопеременной меры на  $\mathbb{E}$  тогда и только тогда, когда приведённая версия  $\rho(P, \omega)$  функции  $\rho(P, \Omega, \phi)$  удовлетворяет следующим четырем условиям :

$$\frac{\partial^2 \rho(P, \omega)}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega)}{(\partial_y P)^2} = 0, \quad \frac{\partial \rho(P, \omega)}{\partial \omega P} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \rho(P, \omega)}{\partial_x P \partial_y \omega} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega)}{\partial_y P \partial_x \omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho(P, \omega)}{\partial_y P \partial_y \omega} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega)}{\partial_x P \partial_x \omega} = 0,$$

где  $x$  и  $y$  – взаимно ортогональные направления, ортогональные к  $\omega$ .

**Теорема 6.** Трансляционно инвариантная валюация  $V$  на  $SR\mathbb{E}$ , обладающая Бюфоновой плотностью  $\lambda(\Omega) \in C^{(3)}$  продолжается до знакопеременной меры на  $\mathbb{E}$  тогда и только тогда, когда  $V$  является комбинаторной валюацией, порождённой приводимой флаговой плотностью  $\rho(\Omega, \phi)$ , причём её приводимая версия удовлетворяет условию

$$\rho(\omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(\Omega).$$

**Замечания**

Уравнения в (8) означают, что при фиксированном  $\omega$ , функция  $\rho(P, \omega)$  зависит только от проекции точки  $P$  на плоскости, перпендикулярной к  $\omega$  и гармонична в этой плоскости.

Если в Теореме 4,  $\rho_2(P, \Omega, \phi) \neq 0$ , то комбинаторная валюация  $V$ , соответствующая  $\rho_1(P, \Omega, \phi) + \rho_2(P, \Omega, \phi)$  может не иметь продолжений до знакопеременной меры на  $\mathbb{E}$  (существуют примеры).

Доказательство Теоремы 6 основано на геометрическом тождестве

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \sin(\Lambda, r_i) (\cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2}) = 0,$$

верном для каждого многоугольника  $\tau$ , всякой точки  $Q_0 \in \tau$  и всякого направления  $\Lambda$  в плоскости многоугольника. В этом выражении

$r_i = |Q_0 v_i|$  – расстояния между  $Q_0$  и вершинами  $v_1, \dots, v_n$  многоугольника  $\tau$ ,

$\sigma_i$  = внутренний угол многоугольника  $\tau$  при вершине  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

$\sigma_{i1}, \sigma_{i2}$  = углы, на которые прямая  $Q_0 v_i$  разделяет внутренний угол  $\sigma_i$ ,  $\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$(\Lambda, r_i)$  – угол между  $\Lambda$  и  $r_i$ .

Полное доказательство этого геометрического тождества, вместе с описанием его места в доказательстве Теоремы 6 можно найти в статье В. К. Оганяна [11] в настоящем номере.

**Теорема 7.** Для каждой  $\lambda(P, \omega) \in C^{(3)}$  класс валюаций на  $SR\Gamma$ , для которых  $\lambda_4(P, \omega)$  есть Бюффенова плотность не пуст, и, в частности, содержит комбинаторные валюации. Всякая комбинаторная валюация  $V$  из этой совокупности соответствует флаговой плотности типа

$$\rho(P, \Omega, \phi) = \rho_1(P, \Omega) + \rho_2(P, \Omega, \phi),$$

где  $\rho_2(P, \Omega, \phi)$  – флаговая функция, удовлетворяющая условию

$$\int \sin^2(\phi - \beta) \rho_2(P, \Omega, \phi) d\phi = 0;$$

для каждого  $P \in \mathbb{R}^3$ , а флаговая функция  $\rho_1(P, \Omega)$  (независящая от  $\phi$ ) удовлетворяет уравнению

$$\rho_1(P, \Omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(P, \omega).$$

Имеется результат А. Давтяна относительно продолжения валюации  $V$  на  $SR\Gamma$  до знакопеременной меры в  $\Gamma$  для случая  $\rho(P, \Omega, \phi) = \rho(P, \Omega)$  (нет зависимости от  $\phi$ ). Рассмотрим дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial \rho(P, \Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho(P, \Omega)}{\partial_n P \partial_n \Omega}, \quad (9)$$

в котором  $\frac{\partial}{\partial_n P}$  означает дифференцирование по аргументу  $P$  в направлении  $\Omega$ ,

$\frac{\partial}{\partial_n P}$  и  $\frac{\partial}{\partial_n \Omega}$  означают дифференцирование по аргументу  $P$  и  $\Omega$  соответственно,

оба в некотором направлении  $n$ , перпендикулярном  $\Omega$ .

**Теорема 8.** (А. Давтян). Комбинаторная валюация  $V$  на  $SR\Gamma$ , соответствующая  $\rho(P, \Omega) \in C^{(3)}$  порождает знакопеременную меру в пространстве  $\Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\rho(P, \Omega)$  удовлетворяет уравнению (9) для любого направления  $n$ , перпендикулярного  $\Omega$ .

Как следствие получаем :

**Теорема 9.** Для любой функции  $\lambda(\omega) \in C^{(3)}$  существует единственная трансляционно-инвариантная валюация  $V$  на  $SR\Gamma$ , Бюффенова плотность которой есть  $\lambda(\omega)$  и которая продолжается до знакопеременной меры на  $\Gamma$ . Валюация  $V$  необходимо комбинаторная и соответствует флаговой плотности

$$\rho(\Omega) = \text{образ Функа функции } \lambda(\omega).$$

**Abstract.** The paper presents several theorems concerning valuations on the so-called Sylvester rings in the spaces of lines or planes in 2- or 3-dimensional Euclidean spaces. In translation-invariant case these results complement the classical theory.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, Metrics and zonoids", Acta Applicandae Mathem., vol. 9, pp. 3 — 27, 1987.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.



5. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 28, № 2, стр. 51 — 59, 1993.
6. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals" Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606-626, 1995.
7. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Изв. АН Армении, серия Математика, том 29, № 4, стр. 7 — 63, 1994.
8. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Изв. АН Армении, серия Математика, том 31, № 4, стр. 53 — 89, 1996.
9. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 33, № 4, стр. 66 — 87, 1998.
10. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор", Изв. АН Армении, серия Математика, том 34, № 6, стр. 7 — 51, 1999.
11. В. К. Оганян, "Об одном тождестве в теории валюаций в пространстве плоскостей", Изв. АН Армении, серия Математика, том 38, № 3, стр. 37 — 52, 2003.

Поступила 20 января 2003

## ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА С ПРИМЕНЕНИЕМ В ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Р. Г. Арамян

Институт математики НАН Армении

E-mail : rafik@instmath.sci.am

**Резюме.** Некоторые проблемы теории выпуклых тел приводят к интегральным уравнениям, обобщающим преобразование Радона на сфере. Настоящая работа предлагает так называемый метод согласования для решения соответствующих интегральных уравнений. Исследуемое в работе уравнение ранее было найдено при изучении связи проективной кривизны выпуклого тела с его порождающей плотностью. Обращение этого уравнения приводит к новому представлению для порождающей плотности выпуклого тела.

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые результаты в теории выпуклых тел приводят к интегральным уравнениям, которые назовём обобщённые уравнения Радона. Введём обозначения :

$S^2$  – единичная сфера в  $\mathbb{R}^3$  (пространство пространственных направлений),

$S_\omega \subset S^2$  – окружность большого круга с полюсом в точке  $\omega \in S^2$ .

Пусть  $K_\omega(\psi, \varphi)$  – функция, заданная для каждого  $(\psi, \varphi) \in S_\omega \times S_\omega$ , причём  $\omega \in S^2$ .

Для заданной непрерывной функции  $f(\Omega)$ , определённой для  $\Omega \in S^2$ , обозначим через  $f_\omega(\varphi)$ ,  $\varphi \in S_\omega$  сужение  $f(\Omega)$  на окружность  $S_\omega$ . Рассмотрим интеграл

$$F(\omega, \psi) = \int_{S_\omega} K_\omega(\psi, \varphi) f_\omega(\varphi) d\varphi, \quad \omega \in S^2 \text{ и } \psi \in S_\omega, \quad (1.1)$$

где  $d\varphi$  – обычная угловая мера, т.е. мера на  $S_\omega$  инвариантная относительно вращений вокруг  $\omega$  и нормированная условием  $\int_{S_\omega} d\varphi = 2\pi$ . Формула (1.1) определяет преобразование

$$f(\Omega) \rightarrow F(\omega, \psi) \quad (1.2)$$

и мы ставим задачу обращения этого уравнения (т.е. восстановление функции  $f(\Omega)$  по заданным  $F(\omega, \psi)$  и  $K_\omega(\psi, \varphi)$ ).

*Работа выполнена при поддержке NFSAT (грант # MA 087-02/CRDF #12065).*

**Определение 1.1.** Если для заданных  $F(\omega, \psi)$  и  $K_\omega(\psi, \varphi)$  существует  $f(\Omega)$ , определённая на  $S^2$  и удовлетворяющая (1.1), то  $f(\Omega)$  называется сферическим решением уравнения (1.1).

В случае  $K_\omega(\psi, \varphi) \equiv 1$ , для всех  $\omega \in S^2$ , имеем  $F(\omega, \psi) = F(\omega)$  и задача

$$F(\omega) = \int_{S_\omega} f_\omega(\varphi) d\varphi, \quad (1.3)$$

сводится к классической задаче Функа (или сферической задаче Радона), которая имеет единственное сферическое решение в классе чётных (симметричных) функций, определённых на  $S^2$ , когда  $F(\omega)$  является чётной и достаточно гладкой (см. [7], [9]). Ниже рассматриваем уравнение (1.1) для более общих ядер  $K_\omega(\psi, \varphi)$ , удовлетворяющих некоторым предположениям гладкости, без условия симметрии на функцию  $f(\Omega)$ . В (1.1),  $f_\omega(\varphi)$  – флаговая функция, и мы напомним основные понятия, связанные с флагами (в интегральной геометрии понятие флага впервые было систематически использовано Р. В. Амбарцумяном в монографии [2]).

Флагом называется пара  $(\omega, \varphi)$ , где  $\omega \in S^2$  и  $\varphi \in S_\omega$ . Каждому флагу  $(\omega, \varphi)$  соответствует дуальный флаг

$$(\omega, \varphi) \rightarrow (\omega, \varphi)^* = (\Omega, \phi), \quad (1.4)$$

где  $\Omega \in S^2$  – пространственное направление совпадающее с  $\varphi \in S_\omega$ , а  $\phi$  – одно из двух направлений в  $S_\Omega$ , ортогональных к  $\omega$ . Для заданной флаговой функции  $g(\omega, \varphi)$ , обозначим через  $g^*(\omega, \varphi)$  образ функции  $g$ , определяемой формулой

$$g^*(\omega, \varphi) = g((\omega, \varphi)^*) = g(\Omega, \phi). \quad (1.5)$$

**Определение 1.2.** Для каждого  $\omega \in S^2$ , (1.1) сводится к интегральному уравнению на окружности  $S_\omega$ . Если непрерывная функция  $G(\omega, \varphi)$  для каждого  $\omega \in S^2$  является решением этого уравнения, то  $G(\omega, \varphi)$  называется флаговым решением уравнения (1.1).

**Определение 1.3.** Если флаговое решение  $G(\omega, \varphi)$  удовлетворяет условию

$$G(\Omega, \phi) = G(\Omega) \quad (1.6)$$

(нет зависимости от переменной  $\phi$ ), то  $G(\omega, \varphi)$  называется согласованным флаговым решением.

Пример.

$$G(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \quad (1.7)$$

является флаговым решением для сферического уравнения Радона (1.3), которое не является согласованным.

Существует важный принцип : каждое согласованное флаговое решение  $G(\omega, \varphi)$  уравнения (1.1) с помощью отображения

$$G(\omega, \varphi) \rightarrow G(\Omega, \phi) = G(\Omega) = f(\Omega) \quad (1.8)$$

приводится к сферическому решению уравнения (1.1), и наоборот, сужение сферического решения уравнения (1.1) на большие окружности является согласованным флаговым решением.

Следовательно, задача нахождения сферических решений уравнения (1.1) сводится к нахождению согласованных флаговых решений уравнения (1.1).

С этой целью, здесь используется специальный метод согласования, впервые использованный в [5], где он был проверен для классического уравнения Функа.

В настоящей статье мы используем метод согласования для решения уравнения (1.1) в случае, когда  $K_\omega(\psi, \varphi)$  имеет специальный вид :

$$K_\omega(\psi, \varphi) = \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}), \quad (1.9)$$

где  $(\psi - \varphi)_{2\pi} = (\psi - \varphi) \pmod{2\pi}$  (здесь  $\psi$  и  $\varphi$  суть углы, измеряемые от некоторой точки отсчёта на  $S_\omega$ ),  $\mathcal{K}(t)$  – гладкая функция, определённая на отрезке  $[0, 2\pi)$ , преобразованном в окружность  $S^1$ . Ясно, что  $\mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi})$  не зависит от выбора точки отсчёта на  $S_\omega$ . На каждой окружности  $S_\omega$  в качестве положительного мы выбираем направление против часовой стрелки.

Мы будем рассматривать функции  $\mathcal{K}(t)$  из следующих классов :

Класс а).  $\mathcal{K}(t + \pi) = \mathcal{K}(t)$ , т.е.  $\mathcal{K}(t)$  является чётной функцией на  $S^1$  и

$$\int_{S^1} \mathcal{K}(t) dt \neq 0,$$

Класс б).  $\mathcal{K}(t + \pi) = -\mathcal{K}(t)$ , т.е.  $\mathcal{K}(t)$  является нечётной функцией на  $S^1$  и

$$\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t dt \neq 0,$$

Класс с). функция  $\mathcal{K}(t)$  не является ни чётной, ни нечётной,  $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) dt \neq 0$  и

$$\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t dt \neq 0.$$

**Теорема 1.1** (доказательство в §5).

1) Если  $\mathcal{K}(t)$  принадлежит классу а), то уравнение (1.1) или не имеет ни одного, или имеет единственное сферическое решение, которое является чётным.

В последнем случае уравнение (1.1) необходимо имеет бесконечное множество

других (не являющихся чётными) сферических решений, а в первом случае, вообще не существуют сферических решений уравнения (1.1).

2) Если  $\mathcal{K}(t)$  принадлежит классу  $b$ ), то уравнение (1.1) или не имеет ни одного, или имеет единственное сферическое решение, которое является нечётным. В последнем случае уравнение (1.1) необходимо имеет бесконечное множество других (не являющихся нечётными) сферических решений, а в первом случае, не существуют вообще сферические решения уравнения (1.1).

3) Если  $\mathcal{K}(t)$  принадлежит классу  $c$ ), то уравнение (1.1) или имеет единственное сферическое решение, или не имеет сферических решений.

Прежде чем перейти к основному результату сделаем несколько замечаний. Для  $\mathcal{K}(t) \in a$ ) задача обращения уравнения (1.1) сводится к сферической задаче Радона, так как если проинтегрировать уравнение (1.1) относительно угловой меры  $d\psi$  по интервалу  $[0, 2\pi)$ , то получим

$$\int_0^{2\pi} F(\omega, \psi) d\psi = \int_{S_\omega} \left[ \int_0^{2\pi} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) d\psi \right] f_\omega(\varphi) d\varphi \quad (1.10)$$

и интеграл  $\int_0^{2\pi} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) d\psi = C \neq 0$  не зависит от  $\varphi$ . Итак, (1.10) сводится к сферическому уравнению Радона (1.3), причём  $F(\omega) = C^{-1} \int_0^{2\pi} F(\omega, \psi) d\psi$ . Если  $f(\Omega)$  является сферическим решением уравнения (1.1), то  $f(\Omega)$  будет сферическим решением уравнения (1.10). Обратное утверждение не верно.

Если функция  $\mathcal{K}(t)$  является чётной, то  $\mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi})$  необходимо симметрична (чётна) относительно обеих переменных, а интеграл  $\int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) f_\omega(\varphi) d\varphi$  зависит от суммы значений функции  $f(\Omega)$  в диаметрально противоположных точках. Следовательно, если  $f(\Omega)$  является сферическим решением уравнения (1.1), то  $g(\Omega) = \frac{1}{2}(f(\Omega) + f(-\Omega))$  будет чётным сферическим решением уравнения (1.1). Поэтому в случае  $a$ ), задача обращения уравнения (1.1) сводится к сферической задаче Радона. Следовательно, если уравнение (1.10) имеет чётное сферическое решение  $f(\Omega)$ , тогда  $f(\Omega)$  может быть единственным сферическим решением уравнения (1.1) (надо проверить). Если  $f(\Omega)$  является единственным чётным сферическим решением уравнения (1.1), то (1.1) имеет много других (не являющихся чётными) сферических решений вида  $f(\Omega) + g(\Omega)$ , где  $g(\Omega)$  – любая нечётная функция на  $S^2$ .

Для случаев  $\mathcal{K}(t) \in b$ ) и  $\mathcal{K}(t) \in c$ ) уравнение (1.1) может иметь сферическое решение, которое не является чётным и задача обращения уравнения (1.1) не сводится к сферической задаче Радона, потому что в классическом случае можно восстановить только чётные решения.

Теперь сформулируем основной результат. В §6 определяется последовательность стандартных тригонометрических многочленов  $P_k(n, u)$ : они называются стандартными, так как их конструкция не зависит от выбора  $F(\omega, \psi)$  или  $\mathcal{K}(t)$  в уравнении (1.1). Сферические решения выражаются с помощью величин, определённых для  $\alpha \in [0, 2\pi)$  и  $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  по формуле

$$A_n(\alpha, u) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [\cos(2i-1)\alpha I(2i-1) P_{2i-1}(n, u) + \sin 2i\alpha I(2i) P_{2i}(n, u)], \quad (1.11)$$

где функция  $I(k)$  принимает только два значения 0 или 1. В случае  $\mathcal{K}(t) \in c)$  они с помощью алгоритма вычисляются единственным образом (зависят только от  $\mathcal{K}(t)$ ). В случае  $\mathcal{K}(t) \in a)$ , чтобы получить единственное чётное сферическое решение мы только должны единственным образом вычислить  $I(2i-1)$ , полагая  $I(2i) = 0$  при  $i = 1, 2, \dots$ . В случае  $\mathcal{K}(t) \in b)$ , чтобы получить единственное нечётное сферическое решение мы только должны единственным образом вычислить  $I(2i)$ , полагая  $I(2i-1) = 0$  при  $i = 1, 2, \dots$  (см. §5).

На протяжении всей статьи (в частности, в Теореме 1.2) мы используем для точек  $\omega$  обычные сферические координаты  $u, \tau$  на  $S^2$ , зависящие от выбора как северного полюса  $\mathcal{N} \in S^2$  так и точки отсчёта  $\tau = 0$  на экваторе  $S_{\mathcal{N}}$ . Здесь  $u = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\omega, \mathcal{N}})$  так, что точки  $(0, \tau)$  лежат на экваторе. Для того, чтобы параметризовать флаги, на каждой окружности  $S_{\omega}$  выберем  $E =$  восточное направление в точке  $\omega$  для точки отсчёта.

Пусть  $G(\omega, \varphi)$  – флаговое решение уравнения (1.1).

Для заданного северного полюса  $\mathcal{N}$ , и величин  $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , обозначим

$$\bar{G}_{\mathcal{N}}(u, \alpha) = \int_{\theta_{(u, \alpha)}} G(\omega, \varphi) d\tau = \int_0^{2\pi} G(\omega(u, \tau), \varphi(\alpha)) d\tau, \quad (1.12)$$

где  $\theta_{(u, \alpha)} = \{(\omega, \varphi) : (\widehat{\omega, \mathcal{N}}) = \frac{\pi}{2} - u, (\widehat{\varphi, E}) = \alpha\}$ , а  $d\tau$  – обычная угловая мера на  $\theta_{(u, \alpha)}$  (по существу  $\theta_{(u, \alpha)}$  – окружность),  $\varphi(\alpha) \in S_{\omega(u, \tau)}$  и  $(\widehat{\varphi(\alpha), E}) = \alpha$ .

**Теорема 1.2.** Из каждого из этих условий

1)  $\mathcal{K}(t) \in a)$  и уравнение (1.1) имеет единственное (чётное) непрерывное сферическое решение и функция  $G(\omega, \varphi)$  является чётной.

2)  $\mathcal{K}(t) \in b)$  и уравнение (1.1) имеет единственное (нечётное) непрерывное сферическое решение и функция  $G(\omega, \varphi)$  является нечётной.

3)  $\mathcal{K}(t) \in c)$  и (1.1) имеет единственное непрерывное сферическое решение,

вытекает, что сферическое непрерывное решение  $f(\Omega)$  уравнения (1.1) имеет следующий вид

$$f(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \bar{G}_\Omega(0, \frac{\pi}{2}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \bar{G}_\Omega(u, \alpha)}{\partial u} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{G}_\Omega(u, \alpha)}{\partial \alpha} \tan u \sin \alpha \right] A_n(\alpha, u) d\alpha du. \quad (1.13)$$

Теорема 1.2 предлагает практический алгоритм решения уравнения (1.1) в ситуации, когда известно одно из флаговых решений  $G(\omega, \varphi)$  уравнения (1.1), а именно, можно вычислить правую часть соотношения (1.13) для каждого направления  $\Omega \in S^2$  и проверить является ли этот результат решением.

В работе [5] для решения сферического уравнения Радона (1.3), был использован частный случай соотношения (1.13) с функцией  $G(\omega, \varphi)$  вида (1.7).

Говоря о мотивировках, отметим, что стандартная стереографическая проекция переводит задачу обращения классического преобразования Радона на плоскости к задаче обращения обобщённой задачи Радона на сфере с  $\mathcal{K} \neq 1$ .

Уравнение (1.1) также возникает в следующей задаче теории выпуклости. Обозначим через  $B_o$  класс выпуклых тел  $B \subset \mathbb{R}^3$ , имеющих центр симметрии в начале координат  $O \in \mathbb{R}^3$ . Опорная функция любого достаточно гладкого тела  $B \in B_o$  имеет единственное представление вида (см. [11]) :

$$H(\xi) = \int_{S^2} |(\xi, \Omega)| h(\Omega) d\Omega, \quad (1.14)$$

где  $d\Omega$  – обычная мера площади на сфере  $S^2$ , функция  $h(\Omega)$  являющаяся чётной, непрерывной и не обязательно неотрицательной называется порождающей плотностью выпуклого тела  $B$ . Введём также следующие обозначения :

$e(\omega, \psi)$  - плоскость, содержащая начало координат  $O \in \mathbb{R}^3$  и направления  $\omega \in S^2$  и  $\psi \in S_\omega$ ,

$B(\omega, \psi)$  - проекция тела  $B \in B_o$  на плоскость  $e(\omega, \psi)$ ,

$R(\omega, \psi)$  - радиус кривизны  $\partial B(\omega, \psi)$  в точке для которой направление внешней нормали совпадает с направлением  $\omega$ .

В работе [5] доказано, что для любого достаточно гладкого выпуклого тела  $B \in B_o$  и направления  $\psi \in S_\omega$  имеем

$$R(\omega, \psi) = 2 \int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) h_\omega(\varphi) d\varphi, \quad (1.15)$$

где  $(\widehat{\psi, \varphi})$  – угол между  $\psi$  и  $\varphi$ , а  $h_\omega(\varphi)$  – сужение порождающей плотности  $h(\Omega)$  тела  $B$  на  $S_\omega$ .

Ясно, что (1.15) имеет вид (1.1) с

$$K_\omega(\psi, \varphi) = \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) \quad \text{и} \quad F(\omega, \psi) = \frac{1}{2}R(\omega, \psi).$$

Итак, порождающая плотность является одним из сферических решений уравнения (1.15). По Теореме 1.1, для  $\mathcal{K}(t) = \cos^2 t$ , уравнение (1.15) имеет единственное чётное решение. Следовательно, оно совпадает с порождающей плотностью тела  $V$ . Выполняя необходимые вычисления в выражении (1.13), получаем новое представление для порождающей плотности выпуклых тел в  $\mathbb{R}^3$ , в терминах радиусов кривизны их проекций, которое сравниваем с классическим представлением Бляшке из [6].

## §2. ОБЩЕЕ ФЛАГОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Зафиксируем  $\omega \in S^2$  и начнем решать уравнение (1.1) как интегральное уравнение на окружности  $S_\omega$ . Предположим, что полюс  $\mathcal{N} \in S^2$  фиксирован, а угол  $(\varphi, E)$  здесь и ниже будем обозначать через  $\varphi$ . Определим

$$\begin{cases} a(n) = 1, & \text{если } \int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \cos n\varphi d\varphi = 0 \text{ для любого } \psi \in S_\omega, \\ a(n) = 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{cases} b(n) = 1, & \text{если } \int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \sin n\varphi d\varphi = 0 \text{ для любого } \psi \in S_\omega, \\ b(n) = 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.2)$$

**Теорема 2.1.** Каждое непрерывное флаговое решение уравнения (1.1) имеет вид

$$g(\omega, \varphi) = G(\omega, \varphi) + \sum_{n=0,1,2,\dots} [a(n) C_n \cos n\varphi + b(n) S_n \sin n\varphi] \quad (2.3)$$

для некоторых действительных коэффициентов  $C_n$  и  $S_n$  и для заданного флагового решения  $G(\omega, \varphi)$ .

**Доказательство.** Каждое непрерывное флаговое решение уравнения (1.1) является суммой  $G(\omega, \varphi) + g_0(\omega, \varphi)$ , где  $g_0(\omega, \varphi)$  – флаговое решение соответствующего однородного уравнения

$$0 = \int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) g(\omega, \varphi) d\varphi \quad \text{for each } \psi \in S_\omega. \quad (2.4)$$

Ищем общее флаговое решение уравнения (2.4) как ряд Фурье

$$g_0(\omega, \varphi) = \sum_{n=0,1,2,\dots} [C_n \cos n\varphi + S_n \sin n\varphi]. \quad (2.5)$$

Если  $g_0(\omega, \varphi)$  удовлетворяет (2.4), то  $C_n = 0$ , если  $\int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \cos n\varphi d\varphi \neq 0$  для хотя бы одного  $\psi \in S_\omega$  и  $S_n = 0$ , если  $\int_{S_\omega} \mathcal{K}((\psi - \varphi)_{2\pi}) \sin n\varphi d\varphi \neq 0$  для хотя бы одного  $\psi \in S_\omega$ . Теорема 2.1 доказана.

### §3. УСЛОВИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ

Рассмотрим теперь  $C_n = C_n(\omega)$  и  $S_n = S_n(\omega)$  в (2.3) как функции от  $\omega = \omega(\nu, \tau)$  и найдём  $C(\omega)$  и  $S(\omega)$  из условия, что функция  $g(\omega, \varphi)$  удовлетворяет (1.6). Запишем  $g(\omega, \varphi)$  в дуальных координатах и потребуем, чтобы  $g(\Omega, \phi)$  не зависела от  $\phi$  для каждого  $\Omega \in S^2$ , т.е. для каждого  $\Omega \in S^2$  имеем

$$(g(\Omega, \phi))'_\phi = \left( G(\omega, \varphi) + \sum_{n=0,1,2,\dots} [a(n)C_n(\omega) \cos n\varphi + b(n)S_n(\omega) \sin n\varphi] \right)'_\phi = 0. \quad (3.1)$$

Здесь и ниже  $(\cdot)'_\phi$  означает производную, соответствующую правому вращению винта вокруг  $\Omega$ .

Из почленного дифференцирования с использованием выражений (см. [5])

$$\tau'_\phi = \frac{\sin \varphi}{\cos \nu}, \quad \varphi'_\phi = -\tan \nu \sin \varphi, \quad \nu'_\phi = -\cos \varphi \quad (3.2)$$

и естественной группировки слагаемых в (3.1), получаем ряд Фурье  $-(G(\omega, \varphi))'_\phi$  (соответствующий подробный вывод можно найти в [5]). В силу единственности коэффициентов Фурье, имеем

$$\begin{cases} -a(1)(C_1(\omega))'_\nu + \frac{b(1)(S_1(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + 2 \tan \nu a(1)C_1(\omega) = -2I^*(0) A_0^*(\omega) \\ -a(0)(C_0(\omega))'_\nu - a(2)(C_2(\omega))'_\nu + \frac{b(2)(S_2(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + 2 \tan \nu a(2)C_2(\omega) = \\ = -I^*(1) A_1^*(\omega) \\ \frac{a(0)(C_0(\omega))'_\tau}{\cos \nu} - b(2)(S_2(\omega))'_\nu - \frac{a(2)(C_2(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + 2 \tan \nu b(2)S_2(\omega) = \\ = -I^*(1) B_1^*(\omega), \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $I^*(1) = 1 - (1 - a(2))(1 - b(2))(1 - a(0))$  и  $I^*(0) = 1 - (1 - a(1))(1 - b(1))$

$$\begin{cases} -a(n)(C_n(\omega))'_\nu - \frac{b(n)(S_n(\omega))'_\tau}{\cos \nu} - n \tan \nu a(n)C_n - a(n+2)(C_{(n+2)}(\omega))'_\nu + \\ + \frac{b(n+2)(S_{(n+2)}(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + (n+2) \tan \nu a(n+2)C_{n+2} = -I^*(n+1) A_{n+1}^*(\omega) \\ -b(n)(S_n(\omega))'_\nu + \frac{a(n)(C_n(\omega))'_\tau}{\cos \nu} - n \tan \nu b(n)S_n - b(n+2)(S_{(n+2)}(\omega))'_\nu - \\ - \frac{a(n+2)(C_{(n+2)}(\omega))'_\tau}{\cos \nu} + (n+2) \tan \nu b(n+2)S_{n+2} = -I^*(n+1) B_{n+1}^*(\omega), \end{cases} \quad (3.4)$$

для  $n = 1, 2, 3, \dots$  Здесь  $A_n^*$  и  $B_n^*$  суть коэффициенты Фурье  $-(G(\omega, \varphi))'_\phi$

$$A_n^*(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \cos n\varphi d\varphi \quad B_n^*(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \sin n\varphi d\varphi, \quad (3.5)$$

и  $I^*(n+1) = 1 - (1 - a(n))(1 - a(n+2))(1 - b(n))(1 - b(n+2))$ . Другими словами

$$I^*(n+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } a(n) = a(n+2) = b(n) = b(n+2) = 0, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.6)$$

#### §4. УСРЕДНЕНИЕ

Пусть  $h$  – непрерывное сферическое решение уравнения (1.1), тогда сужение  $h$  на большие круги является согласованным флаговым решением уравнения (1.1). Чтобы вычислить  $h(\Omega)$  возьмём  $\Omega \in S^2$  для полюса  $\Omega = \mathcal{N}$ . Возвращаясь к формуле (2.3) для каждого  $\tau \in [0, 2\pi)$ , получаем

$$h(\Omega) = G(\omega(0, \tau), \frac{\pi}{2}) + \sum_{k=0,1,2,3,\dots} [a(2k)C_{2k}(\omega(0, \tau))(-1)^k + b(2k+1)S_{2k+1}(\omega(0, \tau))(-1)^k]. \quad (4.1)$$

Проинтегрируем обе части (4.1) относительно однородной угловой меры  $d\tau$  по множеству  $[0, 2\pi)$ . Имеем, (см. (1.12))

$$2\pi h(\Omega) = \overline{G}_{\Omega}(0, \frac{\pi}{2}) + \sum_{k=0,1,2,\dots} (-1)^k \left[ \int_0^{2\pi} a(2k)C_{2k}(\omega(0, \tau))d\tau + \int_0^{2\pi} b(2k+1)S_{2k+1}(\omega(0, \tau))d\tau \right]. \quad (4.2)$$

Теперь задача состоит в вычислении

$$\int_0^{2\pi} C_{2k}(\omega(0, \tau))d\tau = \overline{C}_{2k}(0) \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} S_{2k+1}(\omega(0, \tau))d\tau = \overline{S}_{2k+1}(0). \quad (4.3)$$

Для этого мы собираемся интегрировать обе части (3.3) и (3.4) относительно  $d\tau$  по множеству  $[0, 2\pi)$ .

Для  $\omega = (\nu, \tau)$ , где  $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$  и  $\tau \in (0, 2\pi)$  (см. (3.5)) обозначим

$$\overline{C}_{2k}(\nu) = \int_0^{2\pi} C_{2k}(\omega(\nu, \tau))d\tau \quad \text{and} \quad \overline{S}_{2k+1}(\nu) = \int_0^{2\pi} S_{2k+1}(\omega(\nu, \tau))d\tau$$

$$A_{2k+1}(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \cos(2k+1)\varphi d\varphi d\tau \quad \text{и} \quad (4.4)$$

$$B_{2k}(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(\omega, \varphi))'_\phi \sin 2k\varphi d\varphi d\tau.$$

Далее предположим, что существуют числа :  $m_0 =$  минимальное число, для которого  $a(2m_0) = 0$  и  $m_1 =$  минимальное число, для которого  $b(2m_1 + 1) = 0$ .

Обсуждение этих предположений можно найти в §5.

Интегрируя обе части (3.3) и (3.4) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} (S_n(\nu, \tau))'_\tau d\tau = 0$$

для  $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$  получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a(0)\bar{C}'_0(\nu) + a(2)\bar{C}'_2(\nu) - 2a(2)\bar{C}_2(\nu) \tan \nu = \\ = I(1)A_1(\nu) \\ a(2)\bar{C}'_2(\nu) + 2a(2)\bar{C}_n(\nu) \tan \nu + a(4)\bar{C}'_4(\nu) - 4a(4)\bar{C}_4(\nu) \tan \nu = \\ = I(3)A_3(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a(2m_0 - 2)\bar{C}'_{2m_0-2}(\nu) + (2m_0 - 2)a(2m_0 - 2)\bar{C}_{2m_0-2}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_0 - 1)A_{2m_0-1}(\nu) \\ a(2m_0 + 2)\bar{C}'_{2m_0+2}(\nu) - (2m_0 + 2)a(2m_0 + 2)\bar{C}_{2m_0+2}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_0 + 1)A_{2m_0+1}(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a(2k)\bar{C}'_{2k}(\nu) + 2ka(2k)\bar{C}_{2k}(\nu) \tan \nu + a(2k + 2)\bar{C}'_{2k+2}(\nu) - \\ - (2k + 2)a(2k + 2)\bar{C}_{2k+2}(\nu) \tan \nu = I(2k + 1)A_{2k+1}(\nu) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

для  $k > m_0$  и

$$\left\{ \begin{array}{l} b(1)\bar{S}'_1(\nu) + b(1)\bar{S}_1(\nu) \tan \nu + b(3)\bar{S}'_3(\nu) - 3b(3)\bar{S}_3(\nu) \tan \nu = \\ = I(2)B_2(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b(2m_1 - 1)\bar{S}'_{2m_1-1}(\nu) + (2m_1 - 1)b(2m_1 - 1)\bar{S}_{2m_1-1}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_1)B_{2m_1}(\nu) \\ b(2m_1 + 3)\bar{S}'_{2m_1+3}(\nu) - (2m_1 + 3)b(2m_1 + 3)\bar{S}_{2m_1+3}(\nu) \tan \nu = \\ = I(2m_1 + 2)B_{2m_1+2}(\nu) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b(2k - 1)\bar{S}'_{2k-1}(\nu) + (2k - 1)b(2k - 1)\bar{S}_{2k-1}(\nu) \tan \nu + \\ + b(2k + 1)\bar{S}'_{2k+1}(\nu) - (2k + 1)b(2k + 1)\bar{S}_{2k+1}(\nu) \tan \nu = I(2k)B_{2k}(\nu) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

для  $k > m_1 + 2$ . Здесь (см. (2.1) и (2.2))

$$I(2k+1) = 1 - (1 - a(2k))(1 - a(2k+2)), \quad I(2k) = 1 - (1 - b(2k-1))(1 - b(2k+1)). \quad (4.7)$$

Обе системы (4.5) и (4.6) являются (бесконечными) системами дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов  $\bar{C}_n(\nu)$  и  $\bar{S}_n(\nu)$ . Методом аналогичным методу работы [5], для  $n \neq 0$  из (2.3) и (4.4), получим

$$\bar{C}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(\Omega, \varphi) - G(\Omega, \varphi)) \cos n(\varphi - \tau) d\tau d\varphi = 0, \quad (4.8)$$

$$\bar{S}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(\Omega, \varphi) - G(\Omega, \varphi)) \sin n(\varphi - \tau) d\tau d\varphi = 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, имеем системы дифференциальных уравнений (4.5) и (4.6) с граничными условиями (4.8) и (4.9).

## §5. РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из (4.5) получаем следующие рекуррентные уравнения для коэффициентов  $\bar{C}_{2k}(\nu)$  (подробный вывод можно найти в [5])

$$\left\{ \begin{aligned} a(2p)\bar{C}'_{2p}(\nu) + 2pa(2p)\bar{C}_{2p}(\nu) \tan \nu &= + \sum_{i=p}^{m_0-1} (-1)^{p+i} I(2i+1)A_{2i+1}(\nu) + \\ &+ \sum_{i=p+1}^{m_0-1} (-1)^{p+i} 4ia(2i)\bar{C}_{2i}(\nu) \tan \nu \\ a(2m_0-2)\bar{C}'_{2m_0-2}(\nu) + (2m_0-2)a(2m_0-2)\bar{C}_{2m_0-2}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_0-1)A_{2m_0-1}(\nu) \\ a(2m_0+2)\bar{C}'_{2m_0+2}(\nu) - (2m_0+2)a(2m_0+2)\bar{C}_{2m_0+2}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_0+1)A_{2m_0+1}(\nu) \\ a(2k)\bar{C}'_{2k}(\nu) - 2ka(2k)\bar{C}_{2k}(\nu) \tan \nu &= \sum_{i=m_0+1}^k (-1)^{k+i} I(2i-1)A_{2i-1}(\nu) + \\ &+ \sum_{i=m_0+1}^{k-1} (-1)^{k+i} 4ia(2i)\bar{C}_{2i}(\nu) \tan \nu, \end{aligned} \right. \quad (5.1)$$

для  $0 \leq p < m_0$  и  $k > m_0$ .

Для коэффициентов  $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$  из (4.6) имеем

$$\left\{ \begin{aligned} b(2p-1)\bar{S}'_{2p-1}(\nu) + (2p-1)b(2p-1)\bar{S}_{2p-1}(\nu) \tan \nu &= \\ &= \sum_{i=p}^{m_1} (-1)^{p+i} I(2i)B_{2i}(\nu) + \sum_{i=p+1}^{m_1} (-1)^{p+i-1} 2(2i-1)b(2i-1)\bar{S}_{2i-1}(\nu) \tan \nu \\ b(2m_1-1)\bar{S}'_{2m_1-1}(\nu) + (2m_1-1)b(2m_1-1)\bar{S}_{2m_1-1}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_1)B_{2m_1}(\nu) \\ b(2m_1+3)\bar{S}'_{2m_1+3}(\nu) - (2m_1+3)b(2m_1+3)\bar{S}_{2m_1+3}(\nu) \tan \nu &= \\ &= I(2m_1+2)B_{2m_1+2}(\nu) \\ b(2k+1)\bar{S}'_{2k+1}(\nu) - (2k+1)b(2k+1)\bar{S}_{2k+1}(\nu) \tan \nu &= \\ &= \sum_{i=m_1+1}^k (-1)^{k+i} I(2i)B_{2i}(\nu) + \\ &+ \sum_{i=m_1+1}^{k-1} (-1)^{k+i} 2(2i+1)b(2i+1)\bar{S}_{2i+1}(\nu) \tan \nu, \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

для  $0 < p < m_1$  и  $k > m_1 + 1$ .

Таким образом, получили дифференциальные уравнения двух типов :

$$X'(\nu) - nX(\nu) \tan \nu = T(\nu), \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (5.3)$$

$$Y'(\nu) + nY(\nu) \tan \nu = T(\nu), \quad \nu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (5.4)$$

Единственное решение уравнения (5.3) найдено в [5] :

$$X(\nu) = -\frac{1}{\cos^n \nu} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{2}} T(u) \cos^n u \, du. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) имеет много решений, зависящих от действительного числа  $c$  :

$$Y(\nu) = \cos^n \nu \int_0^{\nu} T(u) \frac{1}{\cos^n u} \, du + c \cos^2 \nu. \quad (5.6)$$

Отметим, что если  $m_0 = 0$  и  $m_1 = 0$ , в силу (5.5) находим единственные значения  $\bar{C}_{2k}(\nu)$  и  $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$ , т.е. в силу (4.2) единственным образом вычисляем  $h(\Omega)$ .

Для случая, когда  $\mathcal{K}(t)$  не является как чётной, так и нечётной, существует число  $m_0$  такое, что  $a(2m_0) = 0$  и число  $m_1$  для которого  $b(2m_1 + 1) = 0$  (см. (2.2) и (2.3)). Из (5.1) и (5.2) следует, что если  $m_0 = 0$  (эквивалентно  $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \, dt \neq 0$ ) и  $m_1 = 0$  (эквивалентно  $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t \, dt \neq 0$ ) мы единственным образом вычисляем коэффициенты  $\bar{C}_{2k}(\nu)$  и  $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$ . Следовательно, в силу (4.2) уравнение (1.1) или не имеет решений или имеет единственное сферическое решение.

Для случая чётного  $\mathcal{K}(t)$ , если (1.1) имеет сферическое решение, то (1.1) имеет чётное сферическое решение (см. §1). Поэтому рассмотрим (2.3) в классе чётных функций (т.е.  $a(2k + 1) = 0$  и  $b(2k + 1) = 0$ ). Следовательно, существует такое число  $m_0$ , что  $a(2m_0) = 0$ . Из (5.1) следует, что если  $m_0 = 0$  (эквивалентно  $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \, dt \neq 0$ ), то мы единственным образом можем вычислить коэффициенты  $\bar{C}_{2k}(\nu)$ . Следовательно, в силу (4.2), в классе чётных функций уравнение (1.1) или не имеет решений или имеет единственное сферическое решение. Если уравнение (1.1) в классе чётных функций не имеет решений, то оно вообще не имеет сферических решений, а если уравнение (1.1) в классе чётных функций имеет единственное решение, то оно необходимо имеет бесконечно много сферических решений, не являющихся чётными.

Для случая нечётного  $\mathcal{K}(t)$ , если (1.1) имеет сферическое решение  $f(\Omega)$ , то  $g(\Omega) = \frac{1}{2}(f(\Omega) - f(-\Omega))$  является нечётным сферическим решением (1.1). Поэтому рассмотрим (2.3) в классе нечётных функций (т.е.  $a(2k) = 0$  и  $b(2k) = 0$ ). В случае нечётного  $\mathcal{K}(t)$ , существует число  $m_1$  такое, что  $b(2m_1 + 1) = 0$ . Из (5.2)

следует, что если  $m_1 = 0$  (эквивалентно  $\int_{S^1} \mathcal{K}(t) \sin t dt \neq 0$ ), то мы единственным образом можем вычислить коэффициенты  $\bar{S}_{2k+1}(\nu)$ . Следовательно, в силу (4.2), в классе нечётных функций уравнение (1.1) или не имеет решений, или имеет единственное сферическое решение. Если уравнение (1.1) в классе нечётных функций не имеет решений, то оно вообще не имеет сферических решений, а если уравнение (1.1) в классе нечётных функций имеет единственное решение, то оно необходимо имеет бесконечно много сферических решений, не являющихся нечётными. Теорема 1.1 доказана.

Далее предположим, что  $m_0 = 0$  для чётного  $\mathcal{K}(t)$ ,  $m_1 = 0$  для нечётного  $\mathcal{K}(t)$ , и  $m_0 = m_1 = 0$  для функции  $\mathcal{K}(t)$ , которая не является ни чётной, ни нечётной. Учитывая (5.3), из (5.1), для  $k > 0$  получаем

$$a(2k)\bar{C}_{2k}(\nu) = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^{2k} \nu} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{i=1}^k (-1)^i I(2i-1) A_{2i-1}(u) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i 4ia(2i)\bar{C}_{2i}(u) \tan u \right] \cos^{2k} u du. \quad (5.7)$$

Аналогично из (5.2), для  $k > 0$  имеем

$$b(2k+1)\bar{S}_{2k+1}(\nu) = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^{2k+1} \nu} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{i=1}^k (-1)^i I(2i) B_{2i}(\nu) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i 2(2i+1)b(2i+1)\bar{S}_{2i+1}(\nu) \tan \nu \right] \cos^{2k+1} u du. \quad (5.8)$$

## §6. ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ РЯДА

Обозначим через

$$P_n = \sum_{k=1}^n [(-1)^k a(2k)\bar{C}_{2k}(0) + (-1)^k b(2k+1)\bar{S}_{2k+1}(0)] \quad (6.1)$$

частичную сумму ряда. Последовательной подстановкой (5.7) при  $k = 1, 2, \dots, n$  и (5.8) при  $k = 1, \dots, n$  в (6.1) можно доказать (см. [5]) следующую лемму.

**Лемма 6.1.** Частичные суммы ряда (6.1) имеют вид

$$P_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_{2i-1}(u) I(2i-1) P_{2i-1}(n, u) + B_{2i}(u) I(2i) P_{2i}(n, u) du, \quad (6.2)$$

где  $A_n(u)$  и  $B_n(u)$  определены в (4.4),  $I(n)$  в (4.7) и

$$P_{2i-1}(n, u) = \sum_{j=i}^n \frac{\cos^{2j} u}{(j+i-1)!(j-i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j+m-1)!}{m!} \quad \text{для } i \geq 1,$$

$$P_{2i}(n, u) = \sum_{j=i}^n \frac{\cos^{2j+1} u}{(j+i)!(j-i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j+m)!}{m!} \quad \text{для } i \geq 1. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.2) и (4.4) в (4.2) получим (см. (1.11))

$$2\pi h(\Omega) = \bar{G}_\Omega(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (G(\omega(u, \tau), \varphi))'_\phi A_n(\varphi, u) d\varphi du d\tau. \quad (6.4)$$

Используя (3.2) имеем

$$G'_\phi = -G'_u \cos \varphi - G'_\varphi \tan u \sin \varphi + G'_\tau \frac{\sin \varphi}{\cos u}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем

$$h(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \bar{G}_\Omega(0, \frac{\pi}{2}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \bar{G}_\Omega}{\partial u} \cos \varphi + \frac{\partial \bar{G}_\Omega}{\partial \varphi} \tan u \sin \varphi \right] A_n(\varphi, u) d\varphi du \quad (6.6)$$

(ясно, что  $\int_0^{2\pi} G'_\tau d\tau = 0$ ). Теорема 1.2 (см. §1) доказана.

## §7. СФЕРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ (1.15)

В этом параграфе мы рассматриваем частный случай уравнения (1.1) с  $K(t) = \cos^2 t$  и  $F(\omega, \psi) = \frac{1}{2}R(\omega, \psi)$ , где  $R(\omega, \psi)$  – кривизна проекции тела  $B \in B_0$  (см. Введение). Нашей целью является демонстрация факта, что в этом случае предел в (6.6) можно вычислить и получить полезное представление порождающей плотности  $f(\Omega) = h(\Omega)$  тела  $B$ .

Начнем с результата из [3]: для любого гладкого выпуклого тела  $B$  имеем

$$R(\omega, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega, \varphi)} d\varphi, \quad \omega \in S^2 \quad \text{и} \quad \psi \in S_\omega, \quad (7.1)$$

где  $k_i$ ,  $i = 1, 2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) – главные нормальные кривизны  $\partial B$  в точке с нормалью  $\omega$ ,  $k(\omega, \varphi)$  – нормальная кривизна в той же точке в направлении  $\varphi$ .

Таким образом, имеем флаговое решение (1.15), которое не является согласованным:

$$G(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega, \varphi)}. \quad (7.2)$$

Найдём согласованное флаговое решение уравнения (1.15). Согласно Теореме 1.2 нужно вычислить индикаторы  $I(2i - 1)$ . В силу (4.7) имеем  $I(2i - 1) =$

$1 - (1 - a(2i))(1 - a(2i - 2))$ . Из (2.1) имеем, что  $a(2i) = 1$  тогда и только тогда, когда

$$\int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) \cos 2i\varphi d\varphi = 0 \quad \text{для каждого } \psi \in S_\omega.$$

Легко понять, что  $a(0) = a(2) = 0$ ,  $a(2i) = 1$  при  $i = 2, 3, 4, \dots$ , поскольку

$$\cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) = \cos^2(\psi - \varphi) = 2 \cos 2\psi \cos 2\varphi + 2 \sin 2\psi \sin 2\varphi - 1.$$

Имеем  $I(1) = 0$ ,  $I(2i - 1) = 1$  при  $i = 2, 3, \dots$  и полагаем  $I(2i) = 0$  при  $i = 1, 2, \dots$

После подстановки в (1.11), находим

$$A_n(\varphi, u) = \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos(2i - 1)\varphi \sum_{j=i}^n \frac{\cos^{2j} u}{(j + i - 1)!(j - i)!} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \frac{(2j + m - 1)!}{m!}. \quad (7.3)$$

Теперь подставим (7.3) в (6.6) и проинтегрируем по частям под знаком предела.

Имеем

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}'_u A_n(\varphi, u) du d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \left[ \overline{G} A_n(\varphi, u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G} (A_n)'_u du \right] d\varphi = - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \overline{G}(0, \varphi) A_n(\varphi, 0) d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}(u, \varphi) \cos \varphi (A_n)'_u du d\varphi, \quad (7.4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan u \int_0^{2\pi} \overline{G}'_\varphi \sin \varphi A_n(\varphi, u) du d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan u \left[ \overline{G} \sin \varphi A_n(\varphi, u) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \overline{G} (\sin \varphi A_n)'_\varphi d\varphi \right] du = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}(u, \varphi) \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi du d\varphi. \quad (7.5)$$

Подставляя (7.4) и (7.5) в (6.6), получаем

$$h(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \overline{G}(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{2\pi} \cos \varphi \overline{G}(\omega(0, \varphi) A_n(\varphi, 0) d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{G}(u, \varphi) [\cos \varphi (A_n)'_u + \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi] du d\varphi \right]. \quad (7.6)$$

**Лемма 7.1.** *Имеет место следующее равенство*

$$\begin{aligned} & \cos \varphi (A_n)'_u + \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi = \\ & = - \cos 2\varphi \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} (j+1) \cos^{2j-1} u \sin u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi (A_n)'_u + \tan u (\sin \varphi A_n)'_\varphi &= \cos \varphi \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos (2i-1)\varphi (P_{2i-1})'_u + \\
 &+ \tan u \left[ \sum_{i=2}^n (-1)^i \sin \varphi \cos (2i-1)\varphi P_{2i-1} \right]'_\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (-1)^i [\cos 2i\varphi + \cos (2i-2)\varphi] (P_{2i-1}(u))'_u + \\
 &+ \frac{1}{2} \tan u \sum_{i=2}^n (-1)^i [\sin 2i\varphi - \sin (2i-2)\varphi]'_\varphi P_{2i-1}(u) = \\
 &= \frac{1}{2} \cos 2\varphi (P_3)'_u + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos 2i\varphi [(P_{2i-1})'_u - (P_{2i+1})'_u] + \\
 &+ \sum_{i=2}^n (-1)^i i \cos 2i\varphi (P_{2i-1} + P_{2i+1}) \tan u - \cos 2\varphi \tan u P_3 = \\
 &= -\cos 2\varphi \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} (j+1) \cos^{2j-1} u \sin u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m},
 \end{aligned}$$

поскольку легко проверить, что

$$(P_{2i-1})'_u - (P_{2i+1})'_u + 2i(P_{2i-1} + P_{2i+1}) \tan u = 0 \quad \text{при } i = 2, \dots, n.$$

Теперь рассмотрим два слагаемых под знаком предела в (7.6). Используя тождества, которые можем проверить методом математической индукции

$$\sum_{j=i}^n \binom{2j-1}{j-i} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} = n-i+1, \quad (7.8)$$

$$\cos \varphi \sum_{i=2}^n (-1)^i (n-i+1) \cos (2i-1)\varphi = \frac{1}{2} [(n-1) \cos 2\varphi + \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos 2i\varphi], \quad (7.9)$$

и (см. [10])

$$\frac{\cos (2n+1)\varphi}{\cos \varphi} = 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \cos 2i\varphi + (-1)^n, \quad n \geq 0, \quad (7.10)$$

получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \bar{G}(0, \varphi) A_n(0, \varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos \varphi \sum_{i=2}^n (-1)^i \cos (2i-1)\varphi \times \\
 &\times \sum_{j=i}^n \binom{2j-1}{j-i} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \left[ \frac{n}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n \cos (2n+1)\varphi}{4 \cos \varphi} \right] d\varphi.
 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Обозначим через

$$Q_n(u) = \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} \cos^{2j} u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m}. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.7) в (7.6) и интегрируя по частям получим ( $Q_n(\frac{\pi}{2}) = 0$ )

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi \sum_{j=2}^n \binom{2j-1}{j-2} (j+1) \cos^{2j-1} u \sin u \times \\ & \times \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} du d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi \tan u Q_n(u) du d\varphi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi dQ_n(u) = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi \tan u Q_n(u) du d\varphi + \frac{1}{2} Q_n(0) \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right]' a_u Q_n(u) du = \quad (7.13) \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right)'_u + \left( \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right) \tan u \right] Q_n(u) du + \\ & + \frac{1}{2} (n-1) \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Используя (7.1) и (7.3) находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \bar{G}(u, \varphi) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [R(\omega(u, \tau), x) - R(\omega(u, \tau), y)] d\tau = \frac{1}{2} [\bar{R}(u, x) - \bar{R}(u, y)], \quad (7.14) \end{aligned}$$

где  $x$  – направление перпендикулярное  $\omega$  и  $\Omega$ ,  $y$  – направление перпендикулярное  $\omega$  и  $x$ .

Подставляя (7.14), (7.11) в (7.6) получаем  $h(\Omega) =$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2\pi} \bar{G}(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \left( \frac{n}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n \cos(2n+1)\varphi}{4 \cos \varphi} \right) d\varphi - \right. \\ & \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} B'(u) + B(u) \tan u \right) Q_n(u) du - \frac{n-1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \cos 2\varphi d\varphi \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{1}{2\pi} \bar{G}(0, \frac{\pi}{2}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \bar{G}(0, \varphi) \left( \frac{(-1)^n \cos(2n+1)\varphi}{4 \cos \varphi} - \frac{1}{4} \right) d\varphi \right] + \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} D'(u) + D(u) \tan u \right) Q_n(u) du - \frac{1}{2} D(0) \right] = I_1 + I_2, \quad (7.15)
\end{aligned}$$

где

$$D(u) = \bar{R}(u, x) - \bar{R}(u, y). \quad (7.16)$$

## §8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОГО СЛАГАЕМОГО В (7.15)

Используя известную формулу из дифференциальной геометрии [6], получаем

$$\begin{aligned}
2\pi I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega(0, \tau), \frac{\pi}{2})} d\tau - \\
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k^2(\omega(0, \tau), \frac{\pi}{2})} \left( \frac{(-1)^n \cos(2n+1)\varphi}{\cos \varphi} - 1 \right) d\varphi d\tau = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 \cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha_0) + k_2 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \alpha_0))^2} d\tau - \\
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2} \sum_{m=1}^n (-1)^m \cos 2m\varphi d\varphi d\tau}{(k_1 \cos^2(\varphi - \alpha_0) + k_2 \sin^2(\varphi - \alpha_0))^2}, \quad (8.1)
\end{aligned}$$

где  $\alpha_0$  — направление первой главной кривизны в точке с нормалью  $\omega(0, \tau)$ .

Заменяя  $\varphi = \frac{x+2\alpha_0}{2}$ , получаем

$$\begin{aligned}
2\pi I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2 + (k_2 - k_1) \cos 2\alpha_0)^2} d\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2)^2} \times \\
&\times \left[ \int_0^{2\pi} \frac{(-1)^m \cos(mx + 2m\alpha_0)}{(1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \cos x)^2} dx \right] d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2)^2 (1 + a \cos 2\alpha_0)^2} d\tau - \\
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1 + k_2)^2} \cos 2m\alpha_0 \left[ \int_0^{\pi} \frac{(-1)^m \cos mx}{(1 + a \cos x)^2} dx \right] d\tau, \quad (8.2)
\end{aligned}$$

где  $a = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} < 1$ . Заметим, что  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin mx}{(1 + a \cos x)^2} dx = 0$ .

Вычислим (см. [10])

$$\begin{aligned}
A(2m) &= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2mx}{(1 + a \cos x)^2} dx = \frac{2\pi}{a} \sum_{i=1}^m (2i-1) \frac{(\sqrt{1-a^2}-1)^{2i-1}}{a^{2i-1} \sqrt{1-a^2}} + \\
&+ \frac{\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi q}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}} \frac{mq^m(q-1)+1-q^m}{(q-1)^2} - \\
&- \frac{2\pi}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}} \frac{q^{m+1}-q}{q-1} + \frac{\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(2m+1) &= \int_0^\pi \frac{\cos(2m+1)x}{(1+a\cos x)^2} dx = \frac{2\pi}{a} \sum_{i=1}^m 2^i \frac{(\sqrt{1-a^2}-1)^{2i}}{a^{2i}\sqrt{1-a^2}} - \frac{a\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{4\pi q}{a\sqrt{1-a^2}} \frac{mq^m(q-1)+1-q^m}{(q-1)^2} - \frac{a\pi}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}},
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

где  $q = \left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^2$ .

Вычислим предел подпоследовательности с чётными номерами (для подпоследовательности с нечётными номерами предел тот же). Подставляя (8.3) в (8.2) и используя формулу из [10], получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2(1-a\cos 2\alpha_0)^2} d\tau - \\
 &- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2} \sum_{i=1}^{2n} \cos 2i\alpha \int_0^\pi \frac{(-1)^i \cos ix}{(1+a\cos x)^2} dx d\tau = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{k_1 k_2} d\tau}{\pi(k_1+k_2)^2(1-a\cos 2\alpha_0)^2}
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}
 &- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{4\sqrt{k_1 k_2} \sum_{m=1}^n (\cos 4m\alpha_0 A(2m) - \cos 2(2m-1)\alpha_0 A(2m-1)) d\tau}{\pi^2(k_1+k_2)^2} = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2(1-a\cos 2\alpha_0)^2} - \\
 &- \frac{4}{\pi^2} \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{(k_1+k_2)^2} \left[ \frac{4\pi q^2}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}(q-1)} \frac{\cos 4\alpha_0(1+q^2)-2q}{(1-2q\cos 4\alpha_0+q^2)^2} - \right. \\
 &- \frac{2\pi(1+q)}{(\sqrt{1-a^2}-1)\sqrt{1-a^2}(q-1)^2} \frac{q\cos 4\alpha_0-q^2}{1-2q\cos 4\alpha_0+q^2} - \frac{4\pi q \cos 2\alpha_0}{a\sqrt{1-a^2}(q-1)} \times \\
 &\left. \times \frac{2q^2 \cos 4\alpha_0 + 1 - 2q - q^2}{(1-2q\cos 4\alpha_0+q^2)^2} - \frac{4\pi q^2 \cos 2\alpha_0}{a\sqrt{1-a^2}(q-1)(1-2q\cos 4\alpha_0+q^2)} \right] d\tau.
 \end{aligned}$$

Подставляя  $a = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$ ,  $q = \left(\frac{\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}\right)^2$  в (8.4), получаем

$$2\pi I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} d\tau, \tag{8.5}$$

где  $k_i = k_i(\omega(0, \tau))$ ,  $k = 1, 2$ .

§9. ВЫЧИСЛЕНИЕ  $I_2$ 

Сравнивая представление решения классической задачи Функа (см. [5]) с решением Бляшке (см. [6]) для гладкой функции  $F(\omega) = F(u, \tau)$ , заданной на  $S^2$ , получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u \left( \frac{1}{\sin u} - 1 \right) du = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u W_n(u) du, \quad (9.1)$$

где

$$W_n(u) = \sum_{j=1}^n \binom{2j-1}{j-1} \cos^{2j} u \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^m \binom{2j-1+m}{m} \quad \text{и} \quad \bar{F}(u) = \int_0^{2\pi} F(u, \tau) d\tau.$$

Чтобы вычислить  $I_2$  нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 9.1.** Для достаточно гладкой функции  $F(\omega) = F(u, \tau)$ , определённой на  $S^2$ , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u Q_n(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(u)'_u \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin u} - 1 \right) - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du, \quad (9.2)$$

где  $Q_n(u)$  определено в (7.12).

**Доказательство.** Так как  $[\cos^2 u (W_n(u) - Q_n(u))]' = -4 \cos u \sin u W_n(u)$ , то

$$Q_n(u) = W_n(u) - \frac{4}{\cos^2 u} \int_u^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t W_n(t) dt. \quad (9.3)$$

Подставляя (9.3) в (9.1) получим (9.2). Используя (9.2) и интегрируя по частям второе слагаемое в (7.15), получим

$$\begin{aligned} 2\pi^2 I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} D'(u) + D(u) \tan u \right) Q_n(u) du - \frac{1}{2} D(0) = -\frac{1}{2} D(0) + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} D'(u) + D(u) \tan u \right) \left( \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2} D(0) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} du + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \tan u \left( \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du = -\frac{1}{2} D(0) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du + \frac{1}{2} D(0) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \left( \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right)' du + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \tan u \left( \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} - \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u} \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} D'(u) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du - \\ &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} D(u) \tan u \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} D'(u) - D(u) \tan u \right) \frac{1 - \sin u}{2 \sin u} du. \quad (9.4) \end{aligned}$$

Здесь использовали  $D(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

### §10. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОРОЖДАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТИ

Для фиксированного  $\Omega \in S^2$  рассмотрим обычные сферические координаты  $u, \tau$  относительно полюса  $\Omega$ . Как и раньше ( $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tau \in [0, 2\pi)$ ). На  $S_\omega$  для каждого  $\omega = \omega(u, \tau)$  рассмотрим два направления  $x$  и  $y$ , где  $y$  – проекция  $\Omega$  на  $S_\omega$ , а  $x$  – перпендикуляр к  $y$ .

Пусть  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны тела  $B$  в точке с нормалью  $\omega = \omega(u, \tau)$  и

$$D(u) = \int_0^{2\pi} [R(\omega(u, \tau), x) - R(\omega(u, \tau), y)] d\tau,$$

где  $R(\omega, x)$  и  $R(\omega, y)$  – радиусы кривизны проекции тела  $B$  в  $\omega$  по направлениям  $x$  и  $y$ .

**Теорема 10.1.** Порождающая плотность любого гладкого выпуклого тела  $B \in B_o$  имеет следующее представление

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^\Omega} (R_1 + R_2) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (D'(u) - 2D(u) \tan u) \frac{1 - \sin u}{\sin u} du. \quad (10.1)$$

**Доказательство.** Подстановкой (9.4), (8.5), (7.16) в (7.15) получим (10.1).

В [6] можно найти следующее представление Бляшке, которое дуально в некотором смысле (10.1)

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^\Omega} (R_1 + R_2) d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R_1(u, \tau) + R_2(u, \tau))'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du, \quad (10.2)$$

где  $R_i(u, \tau), i = 1, 2$  – главные радиусы кривизны тела  $B$  в точке с нормалью  $\omega = \omega(u, \tau)$ .

Из дифференциальной геометрии известно, что (см. [6])

$$R(\omega, x) + R(\omega, y) = R_1(\omega) + R_2(\omega). \quad (10.3)$$

Просуммировав (10.1) и (10.2), получаем следующие следствия :

**Следствие 10.1.** Порождающая плотность каждого  $B \in B_o$  имеет следующее представление

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^\Omega} (R_1 + R_2) d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R(\omega, y))'_u + [R(\omega, x) - R(\omega, y)] \tan u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du d\tau. \quad (10.4)$$

**Следствие 10.2.** Для любых  $B \in \mathcal{B}_0$  и  $\Omega \in S^2$  имеет место следующее равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R(\omega(u, \tau), x)'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} - (R(\omega(u, \tau), x) - R(\omega(u, \tau), y)) \frac{1 - \sin u}{\cos u} d\tau du = 0. \quad (10.5)$$

Подставляя  $R(\omega, \psi)$  из (1.15) в правую часть (10.1) можно получить  $2\pi h(\Omega)$ .

В следующей статье, используя выражения (10.1) и (10.4) для порождающей плотности, мы построим выпуклые тела в терминах радиусов кривизны проекции.

Хочу выразить свою благодарность профессору Р. В. Амбарцумяну за замечания и обсуждения.

**Abstract.** Some problems in convexity theory lead to certain integral equations which generalize Radon transform on the sphere. The article suggests what is called a consistency method to solve those integral equations. An equation of the type in question was found earlier to relate the projection curvature of a convex body with its generating density. Inversion of the equation results in a new representation for the generating density.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metric and zonoids", Acta Appl. Math., vol. 9, pp. 3 – 27, 1987.
2. R. V. Ambartzumian, "Factorization Calculus and Geometrical Probability", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
3. Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Армении, Математика, том 22, № 5, стр. 427 – 438, 1987.
4. Р. Г. Арамян, "Радиусы кривизны плоских проекций выпуклых тел в  $\mathbb{R}^n$ ", Изв. АН Армении, Математика, том 37, № 1, стр. 7 – 18, 2002.
5. Р. Г. Арамян, "Подход к обобщённым уравнениям Функа, I", Изв. АН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 47 – 58, 2001.
6. W. Blaschke, "Kreis und Kugel" (Veit, Leipzig), 2nd Ed. De Gruyter, Berlin, 1956.
7. S. Helgason, "The Radon Transform", Birkhauser, Basel and Boston, Massachusetts, 1980.
8. P. Funk, "Uber Flächen mit lauter geschlossenen geodatischen Linien", Math. Ann. 74, pp. 278 – 300, 1913.
9. I. M. Gelfand, M. I. Graev, R. Rosu, "The problem of integral geometry and intertwining operators for a pair of real Grassmannian manifolds", J. Operator Theory, vol. 12, pp. 359 – 383, 1984.
10. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, "Интегралы и Ряды", Наука, Москва 1981.
11. W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in Convexity and its Applications, Ed. P. Gruber and J. Wills, Birkhauser, Basel, 1983.

## ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ В ТЕОРИИ ВАЛЮАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ

В. К. Оганян

Ереванский государственный университет

E-mail : victo@aua.am

**Резюме.** Некоторые из теорем интегральной геометрии представленных Р. В. Амбарцумяном в его статье настоящего сборника, касаются трансляционно инвариантных случаев. Р. В. Амбарцумян предложил в качестве отдельной проблемы получить упрощённые доказательства этих результатов. Целью настоящей статьи является доказательство геометрического тождества на которое опирается доказательство теоремы о валюациях в пространстве  $\mathbb{E} =$  плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ . Статья состоит из двух частей. Первая часть содержит необходимые основные понятия из теории комбинаторных валюаций в пространстве  $\mathbb{E}$ . Вторая часть даёт элементарное доказательство этого геометрического тождества.

### §0. ВВЕДЕНИЕ

Валюации в пространствах интегральной геометрии изучались в работах [5] – [13]. Теоремы 3, 6 и 9 интегральной геометрии представленные в статье Р. В. Амбарцумяна [1] получены из ранних работ, в которых изучались общие комбинаторные валюации. Однако они относятся к трансляционно инвариантному случаю, для которого возможно получить упрощённые доказательства и Р. В. Амбарцумян в качестве отдельной задачи предложил вывести упрощённые доказательства этих результатов.

Целью настоящей статьи является рассмотрение Теоремы 6 с этой точки зрения, в частности, дать упрощённое доказательство геометрического тождества на которое опирается доказательство теоремы. Указывая на истоки этой задачи, мы будем называть это тождество “Тождество Амбарцумяна”.

Валюации в пространстве плоскостей в  $\mathbb{R}^3$  и в пространствах прямых в  $\mathbb{R}^2$  и в  $\mathbb{R}^3$  изучались в работах [5] – [13], где была доказана чрезвычайная важность валюаций в интегральной геометрии.

Настоящая статья состоит из двух частей. Первая часть содержит необходимые основные понятия из теории комбинаторных валюаций на кольце Сильвестра  $U_{\mathbb{E}}$  (см. [1]) подмножеств

$$\mathbb{E} = \text{пространство плоскостей в } \mathbb{R}^3,$$

которые приводят к тождеству Амбарцумяна. Эта часть является версией представления в [2]. Вторая часть даёт элементарное доказательство этого геометрического тождества, а также проверку результата в некоторых частных случаях.

### §1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этом параграфе мы в основном следуем представлению [2]. Пусть в  $\mathbb{R}^3$  задано конечное множество точек  $\{P_i\}$ , содержащее по крайней мере две точки. Две плоскости, не содержащие точек  $P_i$  называются эквивалентными, если они индуцируют одно и тоже разбиение множества  $\{P_i\}$ . Множество эквивалентных плоскостей мы называем атомом, если его замыкание компактно.

Для заданного множества  $\{P_i\}$ , минимальное кольцо подмножеств пространства  $\mathbb{E}$ , содержащее все атомы, обозначим через  $\tau\{P_i\}$ . Два множества  $A \in \tau\{P_i\}$  и  $B \in \tau\{Q_i\}$  назовём тождественными, если симметрическая разность  $A \Delta B$  принадлежит объединению конечного числа пучков. По определению, пучок есть множество  $[P]$  плоскостей, проходящих через точку  $P \in \mathbb{R}^3$ . Определим кольцо подмножеств пространства  $\mathbb{E}$  :

$$U_{\mathbb{E}} = \bigcup \tau\{P_i\},$$

где объединение распространено по всем конечным подмножествам  $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ , содержащим более чем одну точку.

Флаг  $f$  в  $\mathbb{R}^3$  есть тройка  $(P, \gamma, e)$ , состоящая из точки  $P \in \mathbb{R}^3$ , прямой  $\gamma$  проходящей через точку  $P$  и определяемой её пространственным направлением  $\Omega$  и плоскости  $e$  (плоскость флага  $f$ ), проходящей через прямую  $\gamma$  и определяемой углом поворота  $\phi$  вокруг оси  $\gamma$ . Имеем

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

где  $\mathcal{E}_2$  – проективная (или эллиптическая) плоскость,  $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$  – окружность длины  $\pi$ , представляющая пространство плоских направлений ортогональных к  $\gamma$ . Пространство флагов в  $\mathbb{R}^3$  обозначим, через  $\mathcal{F}$ . Пространство  $\mathcal{F}$  флагов

в  $\mathbb{R}^3$  представляет собой произведение  $\mathbb{R}^3 \times \nabla$ , где  $\nabla$  – пространство свободных флагов. Мы представляем флаг  $f$  парой  $f = (P, \Lambda)$ , где  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Lambda = (\Omega, \phi)$  – свободный флаг флага  $f$ . Часто используются параметры свободного флага  $\Lambda = (\omega, \varphi)$  дуальные к  $\Omega, \phi$ :

$\omega$  – направление нормали к плоскости флага  $f$ ,  $\omega \in \mathcal{E}_2$ ;

$\varphi$  – направление в плоскости флага  $f$ , совпадающее с  $\Omega$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ .

Следовательно, флаг  $f \in \mathcal{F}$  может быть представлен в виде  $f = (P, \omega, \varphi) = (P, e, g)$ , где  $e$  – плоскость, содержащая  $P$ , направление нормали которой есть  $\omega$  и  $g$  – прямая в  $e$ , содержащая точку  $P$  с направлением  $\varphi$ .

Рассмотрим семейство флагов, зависящих от прямой  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f: P \in \gamma, \Omega \text{ совпадает с направлением } \gamma, \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)\}.$$

Простейшие множества из  $\mathcal{F}_\gamma$  имеют вид произведения  $w = \nu \times \lambda$ , где  $\nu \subset \gamma$  – замкнутый интервал, а  $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$  – замкнутая дуга (длины, не превышающей  $\pi$ ). Множества  $w = \nu \times \lambda$  называются клиньями. Пусть  $e(\gamma, \phi)$  – плоскость, проходящая через прямую  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ , повернутая на угол  $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$ .

Прямая  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  и замкнутая дуга  $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$  определяют множество

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3.$$

Теперь мы можем дать следующее эквивалентное определение клина: клин есть пара  $w = (\nu, V)$ , где  $\nu \subset \gamma$  – отрезок, а  $V$  соответствует некоторому  $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ .

Каждой непрерывной, трансляционно инвариантной флаговой функции  $\rho(\Omega, \phi)$  соответствует комбинаторная валюация  $V$  на  $U_{\mathbb{E}}$ . По определению, для любого  $A \in U_{\mathbb{E}}$ :

$$V(A) = \sum_{\{w_s\}} c_s(A) F(w_s),$$

где суммирование по множеству клиньев  $\{w_s\}$ , ассоциированных с  $\{P_i\}$ , а клиновная функция  $F(w)$  определяется следующим образом:

$$F(w) = |\nu| \int_{\alpha} \rho(\Omega, \phi) d\phi,$$

$w$  соответствует  $\nu =$  отрезку направления  $\Omega$ , а  $\alpha =$  дуга в  $\mathcal{E}_1(\Omega)$ ,  $d\phi$  – инвариантная относительно вращений мера на  $\phi$ -окружности.

Комбинаторный алгоритм вычисления целых коэффициентов  $c_s(A)$  можно найти в [2]—[4].

Пусть  $\tau$  – ограниченный, выпуклый многоугольник с вершинами  $v_1, \dots, v_n$ , лежащий в плоскости  $e_0 \subset \mathbb{R}^3$ . Пусть  $Q$  – точка, лежащая вне плоскости  $e_0$ . Пару  $(Q, \tau)$  будем называть пирамидой  $K$  с вершиной  $Q$  и основанием  $\tau$ . Положим

$$A = \{e \in \mathbb{E}: e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\} \in U_{\mathbb{E}}.$$

Мы используем обозначения из [3] и [4]. Система разрешающих клиньев  $w_s$  для  $K$  состоит из клиньев вида

$$w_s = (\gamma, V),$$

где  $\gamma$  – ребро пирамиды  $K$ , а  $V$  – один из плоских углов между плоскостями, содержащими грани пирамиды с общим ребром  $\gamma$ . Ниже, рассмотрим  $V$  как множество пространственных направлений  $\phi$ , ортогональных  $\gamma^*$ , где  $\gamma^*$  – направление отрезка  $\gamma$ .

Рёбра пирамиды  $K$  назовём боковыми, если они типа  $L_i = Qv_i$  и базовыми, если они типа  $b_k = v_i v_j$ . Клиньев  $w_s = (\text{ребро пирамиды } K, V)$  называется опорным, если  $V \cap \text{int } K = \emptyset$ , и покрывающим, если  $\text{int } K \subset V$ . Будем писать  $w_s \in \text{sl}$ , если  $w_s$  есть опорный клин на боковом ребре, и  $w_s \in \text{cb}$ , если  $w_s$  есть покрывающий клин на базовом ребре.

Пусть  $\rho(\omega)$  – непрерывная функция, определённая на обычной 2-сфере  $S_2$ ,  $\omega \in S_2$ .  $\Psi$  – комбинаторная валюация на  $U_{\mathbb{E}}$ . Значение на множестве  $A$  комбинаторной валюации  $\Psi$ , соответствующей “флаговой плотности”  $\rho(\omega)$  имеет вид (см. [3])

$$\Psi(A) = \sum_{\text{sl}} |L_i| \cdot \int_{V_i} \rho(\omega(L_i^*, \phi)) d\phi - \sum_{\text{cb}} |b_i| \int_{V_i} \rho(\omega(b_i^*, \phi)) d\phi, \quad (1.1)$$

где  $\omega(L_i^*, \phi)$  и  $\omega(b_i^*, \phi)$  суть пространственные направления нормалей к плоскостям, содержащим пары направлений в скобках.

Разность в правой части (1.1) называется пирамидальным эксцессом (см. [2]). Предположим, что точка  $Q$  стремится к предельной точке  $Q_0 \in \text{int } \tau$ . Будем писать  $Q = Q_h$ , где  $h$  – расстояние  $h = |Q, Q_0|$  и  $A_h = \{e \in \mathbb{E}: e \text{ отделяет } Q_h \text{ от } \tau\}$ .

Критерий пирамидального эксцесса, [2]. Условие

$$h^{-2} \Psi(A_h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

является необходимым и достаточным для существования единственной, локально конечной знакопеременной меры  $m$  в  $\mathbb{E}$ , сужение которой

на  $U_{\mathbb{E}}$  есть  $\Psi$  (кратко :  $\Psi$  – локально конечная знакопеременная мера в пространстве  $\mathbb{E}$ ).

Используя разложение Тейлора для  $\Psi(A_h)$ , по непрерывности функции  $\rho(\omega)$  имеем из (1.1), что  $\Psi(A_0) = 0$ . Следовательно, (1.2) эквивалентно условиям

$$\frac{d\Psi(A_0)}{dh} = 0, \quad \frac{d^2\Psi(A_0)}{dh^2} = 0. \quad (1.3)$$

Будем использовать следующие обозначения :

$\beta_i$  — плоские углы между  $\tau$  и плоскостью, проходящей через  $b_i$  и  $Q_h$  ;

$(r, \varphi)$  — полярные координаты точки на плоскости  $\tau$  с началом координат в  $Q_0$  ;

$\xi$  — направление опорной прямой многоугольника  $\tau$  ; мы предполагаем, что  $\tau$  лежит в левой полуплоскости относительно опорной прямой направления  $\xi$ .

Пространство опорных прямых есть окружность  $S_1$  ;

$d\xi$  — мера на  $S_1$ , инвариантная относительно вращений ;

$p$  — расстояние от точки  $Q_0$  до прямой, содержащей отрезок  $b$  ;

$\sigma_i$  — внутренний угол многоугольника  $\tau$  при вершине  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ;

$\sigma_{i1}$  и  $\sigma_{i2}$  суть углы на которые отрезок  $\tau_i = Q_0v_i$  делит внутренний угол  $\sigma_i$ ,

$\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Рассмотрим (1.1) предполагая, что положительный обход границы  $\partial\tau$  из точки  $Q_h$  является обходом против часовой стрелки. Не умаляя общности, можно считать, что прямая  $Q_h, Q_0$  перпендикулярна плоскости многоугольника  $\tau$ .

Для клина  $w_i$  из  $sl$  или  $cb$ , через  $\phi_i$  обозначим плоский угол, определяющий плоскость в  $V_i$ . В случае  $w_i \in sl$  сделаем замену переменной  $\phi \rightarrow \xi_i$ . Используя стандартную формулу из сферической тригонометрии  $\tan \xi_i = \sin \alpha_i \tan \phi_i$ ,  $\tan \alpha_i = h/r_i$ , получаем, что Якобиан преобразования имеет следующий асимптотический ( $h \rightarrow 0$ ) вид :

$$\left| \frac{d\phi}{d\xi_i} \right| = \frac{h}{r_i \sin^2 \xi_i} + o(h^2)$$

(коэффициент при  $h^2$  равен нулю). Теперь уравнение (1.1) примет вид

$$\Psi(h) = B_1(h, \tau) - B_2(h, \tau) + o(h^2), \quad (1.4)$$

$$B_1(h, \tau) = h \sum_{v_i} \frac{L_i}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{\rho(\omega(L_i, \xi_i))}{\sin^2 \xi_i} d\xi_i, \quad (1.5)$$

$$B_2(h, \tau) = \sum_{b_i} b_i \int_0^{\beta_i} \rho(\omega(b_i, \phi_i)) d\phi_i, \quad (1.6)$$

где  $\Phi_i$  – внешний угол многоугольника  $\tau$  при вершине  $v_i$ .

Выпишем точные выражения членов пропорциональных  $h$  и  $h^2$  в разложении Тейлора формулы (1.4). Начнём с  $B_1(h, \tau)$ . Через  $\frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \xi_i}$  обозначим производную соответствующую положительному вращению вокруг оси  $\xi_i^*$ , т.е. в направлении  $\xi_i - \frac{\pi}{2}$ .

Разложение Тейлора имеет вид

$$\rho(\omega(L_i, \xi_i)) = \rho(\omega) + \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \xi_i} \frac{h}{r_i \sin \xi_i} + O(h^2),$$

где  $\omega$  – направление нормали к  $\tau$ . Имеем

$$B_1(h, \tau) = h \sum_{v_i} \rho(\omega) \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} + h^2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \Theta_i + o(h^2), \quad (1.7)$$

где

$$\Theta_i = \int_{\Phi_i} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^3 \xi_i}. \quad (1.8)$$

Окончательно имеем

$$\left. \frac{\partial B_1(h, \tau)}{\partial h} \right|_{h=0} = \sum_{v_i} \rho(\omega) \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial^2 B_1(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \Theta_i. \quad (1.9)$$

Теперь найдём  $\left. \frac{\partial B_2(h, \tau)}{\partial h} \right|_{h=0}$  и  $\left. \frac{\partial^2 B_2(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0}$  (см. (1.6)). Так как первые два слагаемых в разложении Тейлора имеют вид

$$\rho(\omega(b_i, \phi)) = \rho(\omega) + \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial b_i} \phi + O(\phi^2),$$

то получаем

$$B_2(h, \tau) = \sum_{b_i} \beta_i b_i \rho(\omega) + \sum_{b_i} \frac{\beta_i^2 b_i}{2} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial b_i} + o(h^2).$$

Так как  $\beta_i = h/p_i + o(h^2)$ , мы находим

$$\left. \frac{\partial B_2(h, \tau)}{\partial h} \right|_{h=0} = \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i} \rho(\omega) \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial^2 B_2(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial b_i}. \quad (1.10)$$

Из (1.9), (1.10) и (1.4) получаем, что необходимые и достаточные условия для порождения знакопеременной меры являются уравнения (эквивалентны условию (1.3)) :

$$\rho(\omega) \left[ \sum_{v_i} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} - \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i} \right] = 0 \quad (1.11)$$

и

$$2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \Theta_i - \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2} \frac{\partial \rho(\omega)}{\partial b_i} = 0, \quad (1.12)$$

которые должны выполняться для любого многоугольника  $\tau$  и любой точки  $Q_0 \in \tau$ .

Для доказательства (1.11) мы можем использовать известный факт, что комбинаторная валюация  $\Psi$ , соответствующая  $\rho(\omega) \equiv 1$ , порождает стандартную инвариантную меру  $\mu$  в пространстве плоскостей  $\mathbb{E}$ . Так как (1.11) является необходимым условием порождения знакопеременной меры, то подставляя  $\rho(\omega) = 1$  в (1.11), заключаем, что выражение в квадратных скобках равно нулю.

Что касается (1.12), заметим, что существует некоторое направление  $\Lambda$  в плоскости многоугольника  $\tau$  такое, что для каждого направления  $\xi$  лежащего в той же плоскости, имеем

$$\frac{\partial \rho(\omega)}{\partial \xi} = \cos(\xi, \Lambda), \quad (1.13)$$

где  $(\xi, \Lambda)$  – угол между  $\xi$  и  $\Lambda$ .

Подставляя (1.13) в (1.12), получаем первую форму тождества Амбарцумяна

$$2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i, \Lambda) d\xi_i}{\sin^3 \xi_i} - \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2} \cos(b_i, \Lambda) = 0, \quad (1.14)$$

которое имеет место для любого многоугольника  $\tau$ , любой точки  $Q_0 \in \tau$  и любого направления  $\Lambda$  в плоскости многоугольника.

## §2. ТОЖДЕСТВО АМБАРЦУМЯНА

**2.1. Преобразование (1.14).** Преобразуем (1.14) к более удобному виду. Прежде всего вычислим интегралы

$$I_i = \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i, \Lambda) d\xi_i}{\sin^3 \xi_i} \quad \text{для } i = 1, \dots, n.$$

Нетрудно убедиться, что  $\Phi_i$  соответствует интервалу  $(\sigma_{i1}, \pi - \sigma_{i2})$  для любого  $i = 1, \dots, n$ . Имеем

$$\begin{aligned} \cos(\xi_i, \Lambda) &= \cos((\Lambda, \tau_i) + (\tau_i, \xi_i)) = \cos(\Lambda, \tau_i) \cos(\tau_i, \xi_i) - \sin(\Lambda, \tau_i) \sin(\tau_i, \xi_i) = \\ &= \cos(\Lambda, \tau_i) \cos \xi_i - \sin(\Lambda, \tau_i) \sin \xi_i. \end{aligned}$$

Так как

$$\int \frac{d\xi}{\sin^2 \xi} = -\cot \xi \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos \xi d\xi}{\sin^3 \xi} = -\frac{1}{2}(1 + \cot^2 \xi),$$

то имеем

$$I_i = \cos(\Lambda, r_i) \int_{\sigma_{i1}}^{\pi - \sigma_{i2}} \frac{\cos \xi_i d\xi_i}{\sin^3 \xi_i} - \sin(\Lambda, r_i) \int_{\sigma_{i1}}^{\pi - \sigma_{i2}} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\Lambda, r_i) (\cot^2 \sigma_{i1} - \cot^2 \sigma_{i2}) - \sin(\Lambda, r_i) (\cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2}). \quad (2.1)$$

Следовательно, получаем

$$2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} I_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} [\cos(\Lambda, r_i) (\cot^2 \sigma_{i1} - \cot^2 \sigma_{i2}) - 2 \sin(\Lambda, r_i) (\cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2})]. \quad (2.2)$$

Перейдём к сумме  $\sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i^2} \cos(b_i, \Lambda)$  в (1.14). Так как

$$\frac{b_i}{p_i} = \cot \sigma_{i2} + \cot \sigma_{i+1,1} \quad \text{и} \quad p_i = r_i \sin \sigma_{i2} = r_{i+1} \sin \sigma_{i+1,1},$$

то получаем

$$\frac{b_i}{p_i^2} = \frac{1}{r_i} \frac{\cot \sigma_{i2}}{\sin \sigma_{i2}} + \frac{1}{r_{i+1}} \frac{\cot \sigma_{i+1,1}}{\sin \sigma_{i+1,1}}. \quad (2.3)$$

Так как  $(r_i, b_i) = \pi - \sigma_{i2}$  и  $(r_{i+1}, b_i) = \sigma_{i+1,1}$ , имеем

$$\cos(b_i, \Lambda) = \cos((\Lambda, r_i) + (r_i, b_i)) = \cos(\Lambda, r_i) \cos(r_i, b_i) - \sin(\Lambda, r_i) \sin(r_i, b_i) =$$

$$= -\cos(\Lambda, r_i) \cos \sigma_{i2} - \sin(\Lambda, r_i) \sin \sigma_{i2}, \quad (2.4)$$

$$\cos(b_i, \Lambda) = \cos((\Lambda, r_{i+1}) + (r_{i+1}, b_i)) =$$

$$= \cos(\Lambda, r_{i+1}) \cos(r_{i+1}, b_i) - \sin(\Lambda, r_{i+1}) \sin(r_{i+1}, \xi_i) = \quad (2.5)$$

$$= \cos(\Lambda, r_{i+1}) \cos \sigma_{i+1,1} - \sin(\Lambda, r_{i+1}) \sin \sigma_{i+1,1}.$$

Используя (2.2) — (2.5), для (1.14) получаем проинтегрированную форму тождества Амбарцумяна

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \sin(\Lambda, r_i) (\cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2}) = 0, \quad (2.6)$$

которое должно быть выполнено для любого многоугольника  $\tau$ , для любого направления  $\Lambda$  и любой точки  $Q_0 \in \tau$ .

Так как

$$\int_{\phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2 \xi_i} = \cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2} \quad \text{и} \quad \sum_{b_i} \frac{b_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n (\cot \sigma_{i2} + \cot \sigma_{i+1,1}),$$

то получаем, что квадратная скобка в (1.11) равна нулю.

Перейдём к пределу в выражении (2.6), записанному для последовательности многоугольников  $\tau_n$ , аппроксимирующих выпуклую область  $D$  с гладкой границей и содержащей точку  $Q_0$ . В пределе мы получаем вид тождества Амбарцумяна для выпуклой области  $D$ , обладающей гладкой границей

$$\int_{\partial D} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi) \sin^2 \theta(\varphi)} d\varphi = 0, \quad (2.7)$$

которое имеет место для любого направления  $\Lambda$  и для любой точки  $Q_0 \in D$ . Выше  $r = r(\varphi)$  – плоский радиус точки на  $\partial D$ ,  $\theta(\varphi)$  – угол между  $r(\varphi)$  и касательной к  $\partial D$  в той же точке, интегрирование по обычной инвариантной относительно вращений меры  $d\varphi$  на  $\partial D$ .

Отметим, что в (2.6) единственная функция, которая принимает значения обеих знаков есть  $\sin(\Lambda, r(\varphi))$ . Следовательно, для любого фиксированного направления  $\Lambda$ , мы можем разбить интеграл в (2.7) на две части, а именно,

$$\int_{\partial D_1} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi) \sin^2 \theta(\varphi)} d\varphi + \int_{\partial D_2} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi) \sin^2 \theta(\varphi)} d\varphi = 0, \quad (2.8)$$

где  $\partial D_1$  ( $\partial D_2$ ) – часть границы, где  $\sin(\Lambda, r(\varphi))$  неотрицательна (отрицательна). Отметим, что  $\partial D_1$  и  $\partial D_2$  зависят от  $\Lambda$ . Для фиксированного  $\partial D_2$  мы можем менять  $\partial D_1$ , т.е. получаем

$$\int_{\partial D_1} \frac{\sin(\Lambda, r(\varphi))}{r(\varphi) \sin^2 \theta(\varphi)} d\varphi = \text{постоянная}. \quad (2.9)$$

Получили последний вид тождества Амбарцумяна, которое выполняется для выпуклой области с “линейным основанием”.

**2.2. ПРОВЕРКА ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО  $n$ -УГОЛЬНИКА.** Для правильного  $n$ -угольника и для точки  $Q_0$  являющейся центром тяжести, условие (2.6) имеет следующий вид :

$$\sum_{i=1}^n \sin(\Lambda, r_i) = 0. \quad (2.10)$$

Мы можем переписать (2.10) в виде :

$$\begin{aligned} & \sin(\Lambda, r_1) + \sin((\Lambda, r_1) + \pi - 2\alpha_n) + \sin((\Lambda, r_1) + 2\pi - 4\alpha_n) + \sin((\Lambda, r_1) + \\ & + 3\pi - 6\alpha_n) + \dots + \sin((\Lambda, r_1) + (n-1)\pi - 2(n-1)\alpha_n) = 0, \end{aligned}$$

где  $2\alpha_n = \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$ . Используя формулы приведения и произвольность направления  $(\Lambda, r_1)$ , получаем следующую систему уравнений (коэффициенты перед  $\sin(\Lambda, r_1)$  и  $\cos(\Lambda, r_1)$ ) :

$$A(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x = 0, \quad (2.11)$$

$$B(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin(n-1)x = 0, \quad (2.12)$$

где  $x = \frac{2\pi}{n}$ .

Докажем (2.11) и (2.12). Умножая обе стороны выражений (2.11) и (2.12) на  $2 \sin x/2$  и используя формулы  $2 \sin \beta \cos \gamma = \sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)$  и  $2 \sin \beta \sin \gamma = \cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)$ , получаем

$$2 \sin x/2 A(x) = \sin x/2 + \sin \frac{2n-1}{2}x \quad \text{и} \quad 2 \sin x/2 B(x) = \cos x/2 - \cos \frac{2n-1}{2}x.$$

Подставляя  $x = \frac{2\pi}{n}$ , получаем

$$A(x) = \frac{\sin x/2 + \sin \frac{2n-1}{2}x}{2 \sin x/2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi - \pi/n)}{2 \sin \pi/n} = 0$$

и

$$B(x) = \frac{\cos x/2 - \cos(2n-1)x/2}{2 \sin x/2} = \frac{2 \sin(2\pi) \sin((n-1)2\pi/n)}{2 \sin \pi/n} = 0.$$

**2.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (2.6).** Для доказательства (2.6) в общем случае произведём триангуляцию многоугольника  $\tau$  из точки  $Q_0 \in \tau$ . Рассмотрим треугольник, для которого  $r_i$  и  $r_{i-1}$  являются сторонами.

**Лемма 1.** Имеет место следующее тождество :

$$\frac{\cos(\Lambda, r_{i-1})}{r_{i-1}} - \frac{\cos(\Lambda, r_i)}{r_i} = \frac{\sin(\Lambda, r_{i-1})}{r_{i-1}} \cot \sigma_{i-1,2} + \frac{\sin(\Lambda, r_i)}{r_i} \cot \sigma_{i,1}. \quad (2.13)$$

**Доказательство.** Используя теорему синусов, получим

$$r_i = r_{i-1} \frac{\sin \sigma_{i-1,2}}{\sin \sigma_{i,1}},$$

т.е. (2.13) можно переписать в виде

$$\cos(\Lambda, r_{i-1}) - \frac{\cos(\Lambda, r_i) \sin \sigma_{i,1}}{\sin \sigma_{i-1,2}} = \frac{\sin(\Lambda, r_{i-1}) \cos \sigma_{i-1,2}}{\sin \sigma_{i-1,2}} + \frac{\sin(\Lambda, r_i) \cos \sigma_{i,1}}{\sin \sigma_{i-1,2}}$$

или

$$\sin((\Lambda, r_{i-1}) - \sigma_{i-1,2}) = \sin((\Lambda, r_i) + \sigma_{i,1}). \quad (2.14)$$

Так как  $(\Lambda, r_i) - (\Lambda, r_{i-1}) + \sigma_{i,1} + \sigma_{i-1,2} = \pi$ , получим (2.14). Лемма 1 доказана.

Теперь если мы просуммируем (2.13) по всем треугольникам возникающим при триангуляции, то в левой части мы получим ноль (так как выражение  $\frac{\cos(\Lambda, r_i)}{r_i}$  встречается два раза с противоположными знаками), а суммирование правой части даёт (2.6). Следовательно, (2.6) доказано для любого многоугольника  $\tau$  и для любой точки  $Q_0 \in \text{int } \tau$ .

2.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (2.9). Чтобы доказать что (2.9) не зависит от  $\partial D_1$  достаточно проверить, что вклад вершины  $A$  треугольника  $AS_1S_2$  с основанием  $S = S_1S_2$ , на котором лежит точка  $Q_0$  и имеет направление  $\Lambda$ , равна суммарному вкладу точек  $A_1$  и  $A_2$ , которые образуются пересечением боковых сторон (несовпадающих с основанием  $S = S_1S_2$ ) прямой, т.е. мы должны доказать

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \sin(\Lambda, r) \cdot (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2) - \frac{1}{r_1} \sin(\Lambda, r_1) \cdot (\cot \sigma_{12} + \cot \sigma_{11}) - \\ & - \frac{1}{r_2} \sin(\Lambda, r_2) \cdot (\cot \sigma_{21} + \cot \sigma_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $r = Q_0A$ ,  $r_1 = Q_0A_1$ ,  $r_2 = Q_0A_2$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - части внутреннего угла  $\alpha$  треугольника  $AS_1S_2$  при вершине  $A$ , на которые  $r$  делит его  $\alpha_1 = \angle Q_0AS_2$ ;  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\sigma_{i1}$  и  $\sigma_{i2}$  - части внутреннего угла четырёхугольника  $S_1A_1A_2S_2$  при вершине  $A_i$ ;  $\sigma_{12} = \angle S_1A_1Q_0$ ;  $\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$ ;  $\sigma_{21} = \angle Q_0A_2S_2$ . Из треугольников  $Q_0A_1A$  и  $Q_0A_2A$  следует, что

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \frac{\sin \sigma_{12}}{\sin \alpha_2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \alpha_1}. \quad (2.16)$$

Так как  $\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}$ ,  $\cot \sigma_{i1} + \cot \sigma_{i2} = \frac{\sin \sigma_i}{\sin \sigma_{i1} \sin \sigma_{i2}}$ ,  $i = 1, 2$  и  $\sin(\Lambda, r) = \sin(\gamma_2 + \alpha_1)$ ,  $\sin(\Lambda, r_1) = \sin(\gamma_1 + \sigma_{12})$ ,  $\sin(\Lambda, r_2) = \sin(\gamma_2 + \sigma_{21})$  ( $\gamma_i$  - внутренний угол при вершине  $s_i$  треугольника  $S_1AS_2$ ), то получаем

$$\sin(\gamma_2 + \alpha_1) \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \sin(\gamma_1 + \sigma_{12}) \cdot \frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_{11} \sin \alpha_2} - \sin(\gamma_2 + \sigma_{21}) \cdot \frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22} \sin \alpha_1} = 0. \quad (2.17)$$

Нетрудно проверить, что первое слагаемое можно записать в виде :

$$\begin{aligned} & \sin(\gamma_2 + \alpha_1) \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} = (\sin \gamma_2 \cos \alpha_1 + \cos \gamma_2 \sin \alpha_1) \left[ \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} + \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \right] = \\ & = \cos(\gamma_2 + \alpha_1) + \frac{\cos \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \gamma_2)}{\sin \alpha_2} + \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin(\gamma_2 + \alpha)}{\sin \alpha_2} + \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

а последнее слагаемое в (2.17) имеет вид (используем  $\cos^2 \sigma_{21} = 1 - \sin^2 \sigma_{21}$ ) :

$$\begin{aligned} I_3 &= \sin(\gamma_2 + \sigma_{21}) \cdot \frac{\sin \sigma_{21} \cos \sigma_{22}}{\sin \sigma_{22} \sin \alpha_1} + \frac{\sin \sigma_{21} \cos \gamma_2 \cos \sigma_{21}}{\sin \alpha_1} + \frac{\cos^2 \sigma_{21} \sin \gamma_2}{\sin \alpha_1} = \\ &= \sin(\gamma_2 + \sigma_{21}) \cdot \frac{\sin \sigma_{21} \cos \sigma_{22}}{\sin \sigma_{22} \sin \alpha_1} + \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_1} + \frac{\sin \sigma_{21} \cos(\gamma_2 + \sigma_{21})}{\sin \alpha_1} = \\ &= \frac{\sin \sigma_{21} \sin(\gamma_2 + \sigma_2)}{\sin \sigma_{22} \sin \alpha_1} + \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.17), получаем

$$\frac{\sin(\gamma_2 + \alpha)}{\sin \alpha_2} - \sin(\gamma_1 + \sigma_{12}) \frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_{11} \sin \alpha_2} - \frac{\sin \sigma_{21} \sin(\gamma_2 + \sigma_2)}{\sin \sigma_{22} \sin \alpha_1} = 0. \quad (2.20)$$

Используя (2.16) получим

$$\frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{22} \sin \alpha_1} = \frac{\sin \sigma_{12}}{\sin \sigma_{11} \sin \alpha_2}.$$

Следовательно, (2.20) можно записать в виде

$$\frac{\sin(\gamma_2 + \alpha)}{\sin \alpha_2} - \sin(\gamma_1 + \sigma_{12}) \frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_{11} \sin \alpha_2} - \frac{\sin \sigma_{12} \sin(\gamma_2 + \sigma_2)}{\sin \alpha_2 \sin \sigma_{11}} = 0.$$

Так как  $\gamma_2 + \alpha = \pi - \gamma_1$  и  $\gamma_2 + \sigma_2 = 2\pi - (\gamma_1 + \sigma_1)$ , получим

$$\sin \gamma_1 - \sin(\gamma_1 + \sigma_{12}) \sin \sigma_1 + \frac{\sin \sigma_{12} \sin(\gamma_1 + \sigma_1)}{\sin \sigma_{11}} = 0$$

или  $\sin \gamma_1 \sin \sigma_{11} + \sin \sigma_{12} \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 \cos \sigma_{12} \sin \sigma_1 = 0$ .

Следовательно  $\sin \sigma_1 + \sin \sigma_{12} \cos \sigma_1 - \cos \sigma_{12} \sin \sigma_1 = 0$  или  $\sin \sigma_1 - \sin \sigma_1 = 0$ .

Доказательство завершено.

**2.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (2.7).** Чтобы доказать (2.7) достаточно показать, что результат Леммы 1 записанный для бесконечно малой дуги  $dl$  границы  $\partial D$  имеет порядок  $O(l^2)$ , т.е. разность между левой и правой частями (2.13) имеет нулевой коэффициент при  $dl$ .

Запишем (2.13) для гладкой части границы длины  $dl$

$$\frac{\cos \alpha(l)}{r(l)} - \frac{\cos(\alpha(l) + dl)}{r(l + dl)} = \frac{\sin(\Lambda, r(l))}{r(l)} \cot \sigma_{12} + \frac{\sin(\Lambda, r(l + dl))}{r(l + dl)} \cot \sigma_{l+dl,1}. \quad (2.21)$$

Поскольку имеем  $(\kappa(l) - \text{кривизна в точке } l)$

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{\cos \alpha(l)}{r(l)} \right) = \frac{\cos(\alpha(l) - \sigma_1(l))}{r^2(l)}, \quad d\theta = \left( \frac{\sin \sigma_1(l)}{r} - \kappa(l) \right) dl,$$

$$\cot \sigma_{12} = \cot \left( \theta(l) - \frac{\kappa dl}{2} \right) = \cot \theta(l) + \frac{\kappa(l)}{2 \sin^2 \theta(l)} dl,$$

$$\cot \sigma_{l+dl,1} = -\cot \theta(l) + \frac{1}{\sin^2 \theta(l)} \left( \frac{\sin \sigma_{11}}{r(l)} - \frac{\kappa(l)}{2} \right) dl,$$

$$\frac{\sin(\Lambda, r(l + dl))}{r(l + dl)} = \frac{\sin \alpha(l)}{r(l)} + \frac{\sin(\alpha(l) - \sigma_1(l))}{r^2(l)} dl,$$

то подставляя эти формулы в (2.21) получим требуемый результат.

2.6. ПРОВЕРКА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. Из теоремы синусов получаем

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} \frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{12}}, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} \frac{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{31}}{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22}}.$$

Так как

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} \frac{\sin \sigma_{32}}{\sin \sigma_{11}}, \quad (2.22)$$

то имеем

$$\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22} \sin \sigma_{32} = \sin \sigma_{11} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_{31}.$$

Очевидно, что  $(\Lambda, r_i) = (\Lambda, r_1) + (r_1, r_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$(r_1, r_2) = \pi - (\sigma_{12} + \sigma_{21}), \quad (r_1, r_3) = 2\pi - (\sigma_{12} + \sigma_2 + \sigma_{31}).$$

Поскольку (2.6) имеет место для любого направления  $(\Lambda, r_1)$ , то коэффициенты перед  $\sin(\Lambda, r_1)$  и  $\cos(\Lambda, r_1)$  равны нулю. Следовательно, для треугольника  $\tau_3$  с точкой  $Q_0 \in \tau_3$  получаем следующую систему двух уравнений :

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_{11} \sin \sigma_{12}} - \cos(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{22}} \frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{12}} + \\ & + \cos(\sigma_{12} + \sigma_2 + \sigma_{31}) \frac{\sin \sigma_3}{\sin \sigma_{31} \sin \sigma_{32}} \frac{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{31}}{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22}} = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{22}} \sin(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{12}} - \\ & - \sin(\sigma_{12} + \sigma_2 + \sigma_{31}) \frac{\sin \sigma_3}{\sin \sigma_{31} \sin \sigma_{32}} \frac{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{31}}{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22}} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Докажем (2.23) и (2.24). Начнем с (2.23). Сокращая на  $\sin \sigma_{12}$  и используя, что  $\sigma_{12} + \sigma_2 + \sigma_{31} = \pi - \sigma_{11} - \sigma_{32}$ , получаем

$$\frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_{11}} - \frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} \cos(\sigma_{12} + \sigma_{21}) - \cos(\sigma_{11} + \sigma_{32}) \frac{\sin \sigma_3}{\sin \sigma_{32}} \frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{22}} = 0. \quad (2.25)$$

Подставляя в (2.25)

$$\cos(\sigma_{12} + \sigma_{21}) = \cos \sigma_{12} \cos \sigma_{21} - \sin \sigma_{21} \sin \sigma_{12}$$

и

$$\cos(\sigma_{11} + \sigma_{32}) = \cos \sigma_{11} \cos \sigma_{32} - \sin \sigma_{32} \sin \sigma_{11},$$

получаем

$$\frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_{11}} - \frac{\cos \sigma_{12} \cos \sigma_{21} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} +$$

$$+ \frac{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} - \frac{\cos \sigma_{11} \cos \sigma_{32} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{22} \sin \sigma_{32}} + \frac{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{11} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{22}} = 0.$$

Так как  $\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{31} + \sigma_{32}$  и  $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$  имеем

$$\begin{aligned} & \cos \sigma_{12} + \frac{\cos \sigma_{11} \sin \sigma_{12}}{\sin \sigma_{11}} - \frac{\cos \sigma_{12} \cos \sigma_{21} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} + \frac{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} \\ & - \frac{\cos \sigma_{11} \sin \sigma_{31} \sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{22} \sin \sigma_{32}} + \frac{\cos \sigma_{11} \sin \sigma_{31} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_{32}}{\sin \sigma_{22}} - \\ & - \frac{\cos \sigma_{11} \cos \sigma_{32} \sin \sigma_{21} \cos \sigma_{31}}{\sin \sigma_{22}} + \frac{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{11} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{22}} = 0. \end{aligned}$$

Используя (2.22) получим

$$\begin{aligned} & \cos \sigma_{12} - \frac{\cos \sigma_{12} \cos \sigma_{21} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} + \frac{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{22}} + \\ & + \frac{\cos \sigma_{11} \sin \sigma_{31} \sin \sigma_{21} \sin \sigma_{32}}{\sin \sigma_{22}} - \\ & - \frac{\cos \sigma_{11} \cos \sigma_{32} \sin \sigma_{21} \cos \sigma_{31}}{\sin \sigma_{22}} + \frac{\sin \sigma_{21} \sin \sigma_{11} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{22}} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\sigma_2 = \sigma_{21} + \sigma_{22}$ , то сокращая на  $\sin \sigma_{21}$ , получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{\cos \sigma_{12} \cos \sigma_{21} \cos \sigma_{22}}{\sin \sigma_{22}} + \sin \sigma_{21} \cos \sigma_{12} + \frac{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{21} \cos \sigma_{22}}{\sin \sigma_{22}} + \\ & + \sin \sigma_{12} \cos \sigma_{21} + \frac{\cos \sigma_{11} \sin \sigma_{31} \sin \sigma_{32}}{\sin \sigma_{22}} - \\ & - \frac{\cos \sigma_{11} \cos \sigma_{32} \cos \sigma_{31}}{\sin \sigma_{22}} + \frac{\sin \sigma_{11} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{22}} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.26) следует, что

$$\begin{aligned} & - \frac{\cos \sigma_{12} \cos \sigma_{21} \cos \sigma_{22}}{\sin \sigma_{22}} + \sin(\sigma_{21} + \sigma_{12}) + \frac{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{21} \cos \sigma_{22}}{\sin \sigma_{22}} - \\ & - \frac{\cos \sigma_{11} \cos \sigma_3}{\sin \sigma_{22}} + \frac{\sin \sigma_{11} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{22}} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$- \cos(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \cos \sigma_{22} + \sin(\sigma_{21} + \sigma_{12}) \sin \sigma_{22} - \cos(\sigma_{11} + \sigma_3) = 0,$$

или

$$- \cos(\sigma_{12} + \sigma_2) - \cos(\sigma_{11} + \sigma_3) = 0.$$

Так как  $\sigma_3 + \sigma_{11} = \pi - (\sigma_{12} + \sigma_2)$ , то условие (2.23) доказано.

Докажем (2.24). Сокращая на  $\frac{\sin \sigma_{21}}{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22}}$  и используя, что  $\sigma_{12} + \sigma_2 + \sigma_{31} = \pi - \sigma_{11} - \sigma_{32}$ , получаем

$$\frac{\sin \sigma_2}{\sin \sigma_{21}} \sin(\sigma_{12} + \sigma_{21}) - \sin(\sigma_{11} + \sigma_{32}) \frac{\sin \sigma_3}{\sin \sigma_{32}} = 0. \quad (2.27)$$

Подставляя в (2.24)

$$\sin(\sigma_{12} + \sigma_{21}) = \sin \sigma_{12} \cos \sigma_{21} + \sin \sigma_{21} \cos \sigma_{12}$$

и

$$\sin(\sigma_{11} + \sigma_{32}) = \sin \sigma_{11} \cos \sigma_{32} + \sin \sigma_{32} \cos \sigma_{11}$$

получаем

$$\cos \sigma_{12} \sin \sigma_2 - \cos \sigma_{11} \sin \sigma_3 + \frac{\cos \sigma_{21} \sin \sigma_{12} \sin \sigma_2}{\sin \sigma_{21}} - \frac{\cos \sigma_{32} \sin \sigma_{11} \sin \sigma_3}{\sin \sigma_{32}} = 0.$$

Поскольку  $\sigma_2 = \sigma_{21} + \sigma_{22}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{31} + \sigma_{32}$  и  $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ , получаем

$$\begin{aligned} & \cos \sigma_{12} \sin \sigma_2 - \cos \sigma_{11} \sin \sigma_3 + \cos \sigma_{21} \sin \sigma_{12} \cos \sigma_{22} + \\ & + \frac{\sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22}}{\sin \sigma_{21}} - \sin \sigma_{21} \sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22} - \\ & - \cos \sigma_{32} \cos \sigma_{31} \sin \sigma_{11} - \frac{\sin \sigma_{11} \sin \sigma_{31}}{\sin \sigma_{32}} + \sin \sigma_{32} \sin \sigma_{11} \sin \sigma_{31} = 0. \end{aligned}$$

Используя (2.22) получаем

$$\begin{aligned} & \cos \sigma_{12} \sin \sigma_2 - \cos \sigma_{11} \sin \sigma_3 + \cos \sigma_{21} \sin \sigma_{12} \cos \sigma_{22} - \sin \sigma_{21} \sin \sigma_{12} \sin \sigma_{22} - \\ & - \cos \sigma_{32} \cos \sigma_{31} \sin \sigma_{11} + \sin \sigma_{32} \sin \sigma_{11} \sin \sigma_{31} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\cos \sigma_{12} \sin \sigma_2 - \cos \sigma_{11} \sin \sigma_3 + \sin \sigma_{12} \cos \sigma_2 - \sin \sigma_{11} \cos \sigma_3 = 0. \quad (2.28)$$

Из (2.28) следует, что

$$\sin(\sigma_{12} + \sigma_2) - \sin(\sigma_{11} + \sigma_3) = 0.$$

Условие (2.24) доказано.

**Abstract.** Some of the integral geometry theorems presented by R. V. Ambartzumian in his paper in the present issue refer to the translation invariant cases. R. V. Ambartzumian has posed the derivation of their simplified proofs as a separate problem. The purpose of the present article is to give a simplified proof of a geometrical identity on which the theorem on valuations in the space  $\mathbb{IE}$  = the space of planes in  $\mathbb{R}^3$  is based. The article consists of two parts. The first part contains necessary basic concepts from the theory of combinatorial valuations on  $\mathbb{IE}$ . The second part gives an elementary proof of identity in question.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "Валюации в пространствах интегральной геометрии", Изв. АН Армении, серия Математика, том 38, № 3, стр. 2 – 15, 2003.
2. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор", Изв. АН Армении, серия Математика, том 34, № 6, стр. 7 — 51, 1999.
3. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
5. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Изв. АН Армении, серия Математика, том 29, № 4, стр. 7 – 63, 1994.
6. R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", *Adv. Appl. Prob. (SGSA)*, vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
7. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.
8. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками", Изв. АН Армении, серия Математика, том 27, № 5, стр. 69– 80, 1992.
9. Г. С. Сукиасян, "О порождении мер пространственными флаговыми функциями", Изв. АН Армении, серия Математика, том 28, № 2, стр. 61– 70, 1993.
10. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 28, № 2, стр. 51 — 60, 1993.
11. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Изв. АН Армении, серия Математика, том 31, № 4, стр. 53 – 89, 1996.
12. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", Изв. АН Армении, серия Математика, том 31, № 4, стр. 5 – 52, 1996.
13. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", *Israel Math. Journal*, vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
14. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
15. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in  $\mathbb{R}^3$ ", *Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb.*, vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.

Поступила 20 января 2003

## ТРЕХМЕРНОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. С. Сукиасян

Институт математики НАН Армении

E-mail : haikarin@netsys.am

**Резюме.** В статье трёхмерное тождество Плейеля в сочетании с методом  $\delta$ -функций применяются для вычисления функции распределения случайной хорды выпуклых многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Показано, что метод приводит к вычислению одномерных интегралов, зависящих от геометрических параметров. Для класса прямоугольных параллелепипедов получены явные выражения этих параметров.

### ВВЕДЕНИЕ

Двух- и трёхмерные тождества Плейеля и их аналитические следствия впервые были рассмотрены в [1]. Тождество Плейеля на плоскости в сочетании с "методом  $\delta$ -функций" применён в [2] для вычисления функции распределения случайной хорды выпуклых многоугольников.

Настоящая работа является попыткой применения трёхмерного тождества Плейеля в сочетании с методом  $\delta$ -функций для вычисления функции распределения случайной хорды выпуклых многогранников в  $\mathbb{R}^3$ . Исследуемая функция распределения является фактически четырехмерным интегралом в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ . Показано, что метод сводит задачу к вычислению одномерных интегралов. Для класса прямоугольных параллелепипедов получены явные выражения всех геометрических параметров. Данная задача заинтересовала автора после знакомства с рукописью В. Гилле [3], чья мотивация исходит из задач прикладной физики. В. Гилле изучал плотность распределения случайной хорды на полусфере. Для полноты §1 содержит также вывод тождества Плейеля в  $\mathbb{R}^3$ , представленный в [1].

### §1. ТРЕХМЕРНОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

Пусть  $D$  выпуклая область на плоскости, гладкая граница которой не содержит линейных участков, а  $g$  – прямая пересекающая границу области  $D$  в двух

точках  $P_1$  и  $P_2$ . Обозначим через  $\chi$  длину хорды  $P_1P_2$ , а через  $\alpha_k$  – угол между прямой  $g$  и касательной к  $D$  в точке  $P_k$ ,  $k = 1, 2$ . Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  берутся в одной и той же полуплоскости относительно прямой  $g$ . Для любой непрерывно дифференцируемой функции  $f$  заданной на  $[0, \infty)$  со свойством  $f(0) = 0$  имеет место двумерное тождество Плейеля (см. [1]) :

$$\int_{[D]} f(\chi) dg = \int_{[D]} \chi f'(\chi) \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg, \quad (1.1)$$

где  $dg$  – мера в пространстве прямых на плоскости, инвариантная относительно группы евклидовых движений,  $[D]$  – множество прямых, пересекающих  $D$ .

Ниже приведено доказательство трёхмерного тождества Плейеля, которое можно найти и в [1]. Теперь рассмотрим пространство прямых в  $\mathbb{R}^3$ , пусть  $d\gamma$  – мера в этом пространстве, инвариантная относительно группы евклидовых движений  $\mathbb{R}^3$ . Инвариантные меры  $dg$  и  $d\gamma$  связаны соотношением (см. [2])

$$dg de = d\gamma d\phi, \quad (1.2)$$

где  $de$  – мера в пространстве плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ , инвариантная относительно группы евклидовых движений  $\mathbb{R}^3$ , а  $d\phi$  – мера Хаара на группе вращений вокруг прямой  $\gamma$ .

Пусть  $B$  – ограниченное выпуклое тело в  $\mathbb{R}^3$  с гладкой границей  $\partial B$ . Обозначим через  $\chi$  длину хорды  $\gamma \cap B$ , а через  $e(P)$  – касательную плоскость в точке  $P \in \partial B$ . Пусть прямая  $\gamma$  пересекает  $\partial B$  в двух точках  $P_1$  и  $P_2$ . Имеем ([1]) :

$$d\gamma = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\chi^2} dP_1 dP_2, \quad (1.3)$$

где  $\psi_k$  – угол между хордой  $P_1P_2$  и её ортогональной проекцией на плоскость  $e(P_k)$ ,  $dP_k$  – мера площади на  $\partial B$ . Мы всегда имеем  $0 \leq \psi_1, \psi_2 \leq \pi/2$ . Используя (1.2), получим

$$\pi \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \int_{[B]} de \int_{[B \cap e]} f(\chi) dg.$$

Применяя тождество Плейеля (1.1), получаем

$$\pi \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \int_{[B]} de \int_{[B \cap e]} \chi f'(\chi) \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg. \quad (1.4)$$

Теперь предположим, что тело  $V$  имеет гладкую границу без плоских участков. Тогда для любой пары точек  $P_1, P_2 \in \partial V$  имеет место  $\psi_1, \psi_2 > 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Подставляя (1.3) в (1.2) и (1.4), находим

$$2\pi \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \iint_{(\partial V)^2} f'(\chi) \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\chi} dP_1 dP_2 \int_0^\pi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d\phi. \quad (1.5)$$

Обозначим через  $H(P_1, P_2)$  пучок полуплоскостей, границы которых содержат отрезок  $P_1 P_2$ . Введем в  $H(P_1, P_2)$  координату  $\phi$ , причём за начальную ( $\phi = 0$ ) примем полуплоскость  $\bar{e}_1 \in H(P_1, P_2)$ , содержащую ортогональную проекцию отрезка  $P_1 P_2$  на  $e(P_1)$ . Отметим, что при  $\phi = 0$  имеем  $\alpha_1 = \psi_1$ . С помощью известных формул сферической тригонометрии (см. Рис. 1) получаем

$$\cot \alpha_1 = \cos \phi \cot \psi_1. \quad (1.6)$$

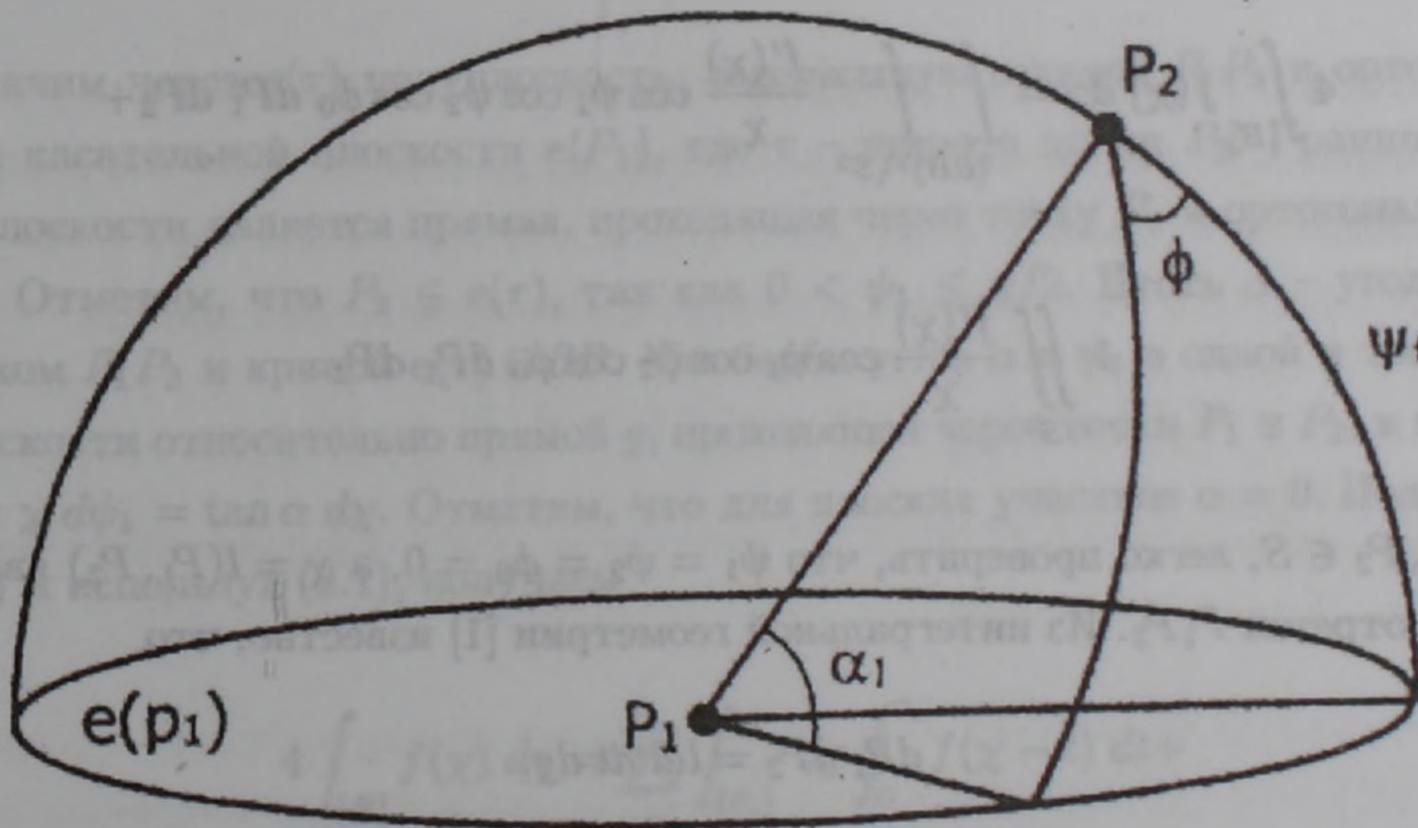


Рис. 1

Аналогично, обозначим через  $\bar{e}_2$  полуплоскость из  $H(P_1, P_2)$ , содержащую ортогональную проекцию отрезка  $P_1 P_2$  на  $e(P_2)$ . Пусть  $\phi_0$  – плоский угол между  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  ( $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$ ). Имеем (сравни с (1.6))

$$\cot \alpha_2 = \cos(\phi - \phi_0) \cot \psi_2. \quad (1.7)$$

В силу (1.6) и (1.7) получаем

$$\int_0^\pi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d\phi = \cot \psi_1 \cot \psi_2 \int_0^\pi \cos \phi \cos(\phi - \phi_0) d\phi = \frac{\pi}{2} \cot \psi_1 \cot \psi_2 \cos \phi_0.$$

Подставляя в (1.5), получаем трёхмерное тождество Плейеля :

$$4 \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \iint_{(\partial B)^2} \frac{f'(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 dP_1 dP_2. \quad (1.8)$$

## §2. ВАРИАНТЫ ТРЁХМЕРНОГО ТОЖДЕСТВА ПЛЕЙЕЛЯ

В этом параграфе мы преобразуем тождество (1.8) к виду, удобному для применения подхода  $\delta$ -функции. Предположим, что граница  $\partial B$  содержит плоский участок  $S \subset \partial B$ . В силу (1.8), имеем

$$4 \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \iint_{(\partial B)^2 \setminus S^2} \frac{f'(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 dP_1 dP_2 + \\ + \iint_{S^2} \frac{f'(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 dP_1 dP_2.$$

Для  $P_1, P_2 \in S$ , легко проверить, что  $\psi_1 = \psi_2 = \phi_0 = 0$ , а  $\chi = l(P_1, P_2)$  является длиной отрезка  $P_1 P_2$ . Из интегральной геометрии [1] известно, что

$$dP_1 dP_2 = l dl dt dg,$$

где  $t$  – координата левого конца отрезка  $P_1 P_2$  на хорде  $g \cap S$ . Следовательно, для плоской части, используя свойство  $f(0) = 0$ , получаем

$$\iint_{S^2} \frac{f'(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 dP_1 dP_2 = \iint_{S^2} \frac{f'(l(P_1, P_2))}{l(P_1, P_2)} dP_1 dP_2 = \\ = \int_{[S]} dg \int_0^\chi dt \int_0^{\chi-t} f'(l) dl = \int_{[S]} dg \int_0^\chi f(\chi - t) dt. \quad (2.1)$$

Теперь рассмотрим случай выпуклого тела  $V$  в  $\mathbb{R}^3$ , имеющего гладкую границу без плоских частей. Тогда для любой пары точек  $P_1, P_2 \in \partial V$  имеем  $\sin \psi_2 > 0$ , и мы можем использовать замену переменной

$$dP_2 = \frac{\chi^2}{\sin \psi_2} d\omega, \quad (2.2)$$

где  $d\omega$  – телесный угол, под которым  $dP_2$  видна из точки  $P_1$ . Будем использовать соотношение

$$d\omega = \cos \psi d\psi d\tau, \quad (2.3)$$

где  $\psi$  и  $\tau$  суть широта и долгота  $\omega$  на единичной сфере с центром в точке  $P_1$ . Отметим, что в нашем случае  $\psi = \psi_1$ . Подставляя (2.2) и (2.3) в (1.8), получаем

$$4 \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \int_{\partial V} dP_1 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi_1 d\psi_1 \int_0^{2\pi} f'(\chi) \chi \cot \psi_2 \cos \phi_0 d\tau. \quad (2.4)$$

Обозначим через  $e(\tau)$  полуплоскость, содержащую отрезок  $P_1 P_2$  и ортогональную к касательной плоскости  $e(P_1)$ , где  $\tau$  – широта точки  $P_2$ . Границей этой полуплоскости является прямая, проходящая через точку  $P_1$  и ортогональную к  $e(P_1)$ . Отметим, что  $P_2 \in e(\tau)$ , так как  $0 < \psi_1 \leq \pi/2$ . Пусть  $\alpha$  – угол между отрезком  $P_1 P_2$  и кривой  $e(\tau) \cap \partial V$ . Мы берём углы  $\alpha$  и  $\psi_1$  в одной и той же полуплоскости относительно прямой  $g$ , проходящей через точки  $P_1$  и  $P_2$ , и поэтому имеем  $\chi d\psi_1 = \tan \alpha d\chi$ . Отметим, что для плоских участков  $\alpha = 0$ . Подставляя в (2.4) и используя (2.1), получаем

$$4 \int_{[B]} f(\chi) d\gamma = \sum_i \int_{[S_i]} dg \int_0^{\chi} f(\chi - t) dt + \\ + \int_{\partial V} dP_1 \int_0^{2\pi} d\tau \int f'(\chi) \cos^2 \psi_1 \cot \psi_2 \cos \phi_0 \tan \alpha d\chi, \quad (2.5)$$

где  $\{S_i\}$  суть плоские участки границы  $\partial V$ .

Теперь мы можем использовать метод  $\delta$ -функции. В (2.5) в качестве  $f$  возьмём

$$f_z(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq z, \\ 0 & \text{при } x < z, \end{cases} \quad z \in (0, \infty).$$

Тогда производная  $f'$  является  $\delta$ -функцией Дирака и мы можем в (2.5) произвести одно интегрирование :

$$4 \int_{[B]} f_z(\chi) d\gamma = \sum_i \int_{[S_i]} (\chi - z)_+ dg + \\ + \int_{\partial B} dP_1 \int_0^{2\pi} \sum_{P_2 \in C(P_1, \tau, z)} \cos^2 \psi_1 \cot \psi_2 \cos \phi_0 \tan \alpha d\tau, \quad (2.6)$$

где  $X_+ = X$ , если  $X > 0$ , и  $X_+ = 0$ , если  $X \leq 0$ , причём  $C(P_1, \tau, z)$  – множество точек  $P$  на кривой  $e(\tau) \cap (\partial B \setminus S(P_1))$  такое, что  $|P_1 P| = z$ . Здесь  $|P_1 P|$  обозначает длину отрезка  $P_1 P$  и

$$S(P_1) = \begin{cases} S_i, & \text{если } P_1 \in S_i, \\ \emptyset, & \text{если } P_1 \in \partial B \setminus \cup S_i. \end{cases}$$

### §3. ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ ДЛЯ МНОГОГРАННИКА

В этом параграфе мы рассматриваем случай, когда тело  $B$  является выпуклым многогранником с гранями  $\{S_i\}$ . Через  $K(P_1, \tau, z)$  обозначим круг в полуплоскости  $e(\tau)$ , радиуса  $z$  и с центром в точке  $P_1$ . Положим

$$C_j(P_1, \tau, z) = K(P_1, \tau, z) \cap S_j = C(P_1, \tau, z) \cap S_j.$$

Отметим, что множество  $C_j(P_1, \tau, z)$ , либо пусто, либо содержит самое большее две точки. В силу (2.6) имеем

$$4 \int_{[B]} f_z(\chi) d\gamma = \sum_i \int_{[S_i]} (\chi - z)_+ dg + \\ + \sum_i \int_{S_i} dP_1 \sum_{j \neq i} \int_0^{2\pi} \cot \psi_2 \sum_{P_2 \in C_j(P_1, \tau, z)} \cos^2 \psi_1 \cos \phi_0 \tan \alpha d\tau. \quad (3.1)$$

Заметим, что для фиксированных  $z, P_1$  и  $j$ , угол  $\psi_2$  не зависит от  $\tau$  :  $\sin \psi_2 = h/z$ , где  $h = h(P_1, S_j)$  – расстояние между  $P_1$  и плоскостью  $e(S_j)$ , содержащую грань  $S_j$ . Обозначим через  $\beta_{ij}$  угол между плоскостями  $e(S_i)$  и  $e(S_j)$ , и предположим, что  $g_{ij} = e(S_i) \cap e(S_j) \neq \emptyset$ . Случай  $e(S_i) \parallel e(S_j)$  мы рассмотрим отдельно. На

плоскостях  $e(S_i)$  и  $e(S_j)$  выберем системы декартовых координат  $Oxy$  и  $Ox'y'$ , беря оси  $Ox$  и  $Ox'$  так, чтобы они совпадали с прямой  $g_{ij}$ . В силу (3.1),

$$4 \int_{[B]} f_z(\chi) d\gamma = \sum_i \left[ A_i(z) + \sum_{j \neq i} B_{ij}(z) \right], \quad (3.2)$$

где

$$A_i(z) = \int_{[S_i]} (\chi - z)_+ dg, \\ B_{ij}(z) = \int_0^{2\pi} d\tau \iint_{S_i} \sum_{P_2 \in C_j(x, y, \tau, z)} \cot \psi_2 \cos^2 \psi_1 \cos \phi_0 \tan \alpha dx dy, \quad i \neq j. \quad (3.3)$$

Пусть  $(p, \varphi)$  – обычные координаты прямой  $g$ . Тогда (см. [2])  $dg = dp d\varphi$  и для любого  $\varphi$

$$\int_{\{p: (p, \varphi) \in [D]\}} \chi dp = |D|,$$

где  $|D|$  – площадь области  $D$ . Следовательно,

$$A_{ij} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\{p: (p, \varphi) \in [D]\}} (\chi - z)_+ dp = \int_0^{2\pi} |S_i \cap S_i(z, \varphi)| d\varphi, \quad (3.2')$$

где  $S_i(z, \varphi)$  – многоугольник, получающийся из  $S_i$  сдвигом на  $(z \cos \varphi, z \sin \varphi)$ .

Теперь вычислим подынтегральное выражение в (3.3) для  $\beta_{ij} > 0$ . Рассмотрим сферу  $S$  радиуса  $z$  с центром в точке  $P_1 \in S_i$ . Очевидно  $P_2 \in S$ . Обозначим через  $N_1$  точку из  $S$  такую, что радиус  $P_1 N_1$  ортогонален плоскости  $e(S_i)$ . Таких точек две,  $N_1$  – та из них, что ближе к  $P_2$ . Отметим, что ближайшая точка определяется единственным образом (предполагаем, что  $P_2 \notin e(S_i)$ ). Обозначим через  $N_2$  ту точку из  $S$ , для которого радиус  $P_1 N_2$  ортогонален плоскости  $e(S_j)$ .

На  $S$  рассмотрим сферический треугольник  $P_2 N_1 N_2$  (см. Рис. 2). Поскольку  $\beta_{ij} > 0$ , имеем  $N_i \neq N_j$ . В наших обозначениях

$$|P_2 N_1| = z(\pi/2 - \psi_1), \quad |P_2 N_2| = z(\pi/2 - \psi_2), \quad |N_1 N_2| = z\beta_{ij},$$

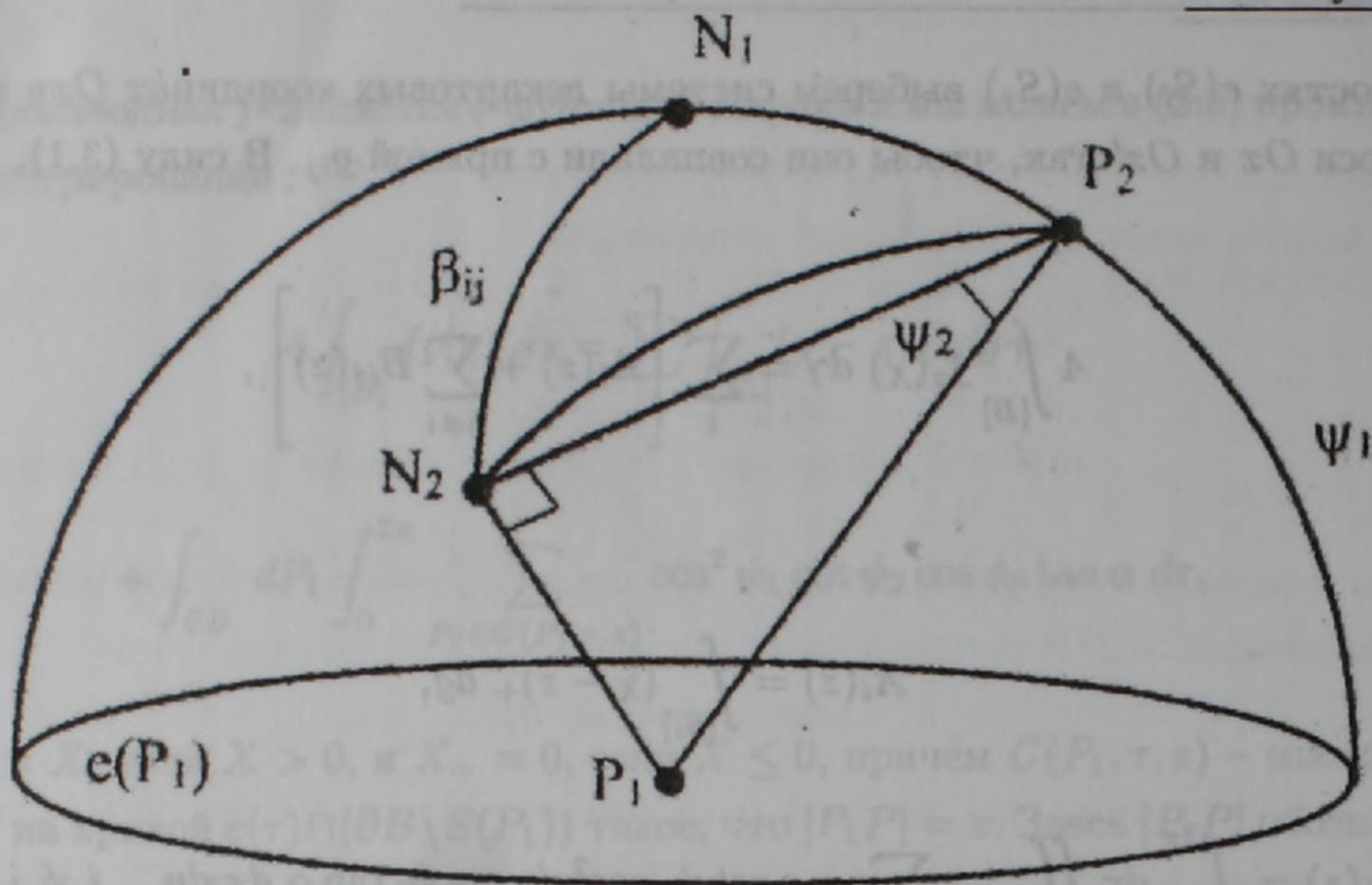


Рис. 2

где  $|PN|$  – длина дуги  $PN$ . Угол  $\phi_0$  в (3.3) – это угол при вершине  $P_2$ . Из формул сферической тригонометрии имеем

$$\cos \beta_{ij} = \cos \phi_0 \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 \sin \psi_2. \quad (3.4)$$

Следовательно,

$$\cos \phi_0 = \frac{\cos \beta_{ij} + \sin \psi_1 \sin \psi_2}{\cos \psi_1 \cos \psi_2}.$$

Подставляя  $\cos \phi_0$  в (3.3), получим

$$B_{ij}(z) = \int_0^{2\pi} d\tau \iint_{S_i} \sum_{P_2 \in C_j(x,y,\tau,z)} \frac{\cos \psi_1}{\sin \psi_2} (\cos \beta_{ij} + \sin \psi_1 \sin \psi_2) \tan \alpha \, dx \, dy. \quad (3.5)$$

Имеем

$$\sin \psi_2 = \frac{1}{z} h(y, S_j) = \frac{1}{z} y \sin \beta_{ij}, \quad (3.6)$$

где  $h(y, S_j)$  – расстояние между  $P_1 = (x, y)$  и плоскостью  $e(S_j)$ .

Теперь выразим углы  $\alpha$  и  $\psi_1$  в терминах  $z, y$  и  $\tau$ . Для этого рассмотрим треугольник  $P_1, P_2, P_3$ , где  $P_3$  – точка пересечения полуплоскости  $e(\tau)$  с прямой  $g_{ij}$ , см. Рис. 3. Напомним, что  $e(\tau)$  есть полуплоскость, содержащая отрезок  $P_1P_2$  и ортогональна касательной плоскости  $e(P_1)$ ,  $\tau$  – долгота точки  $P_2$  на  $S$ . Угол при

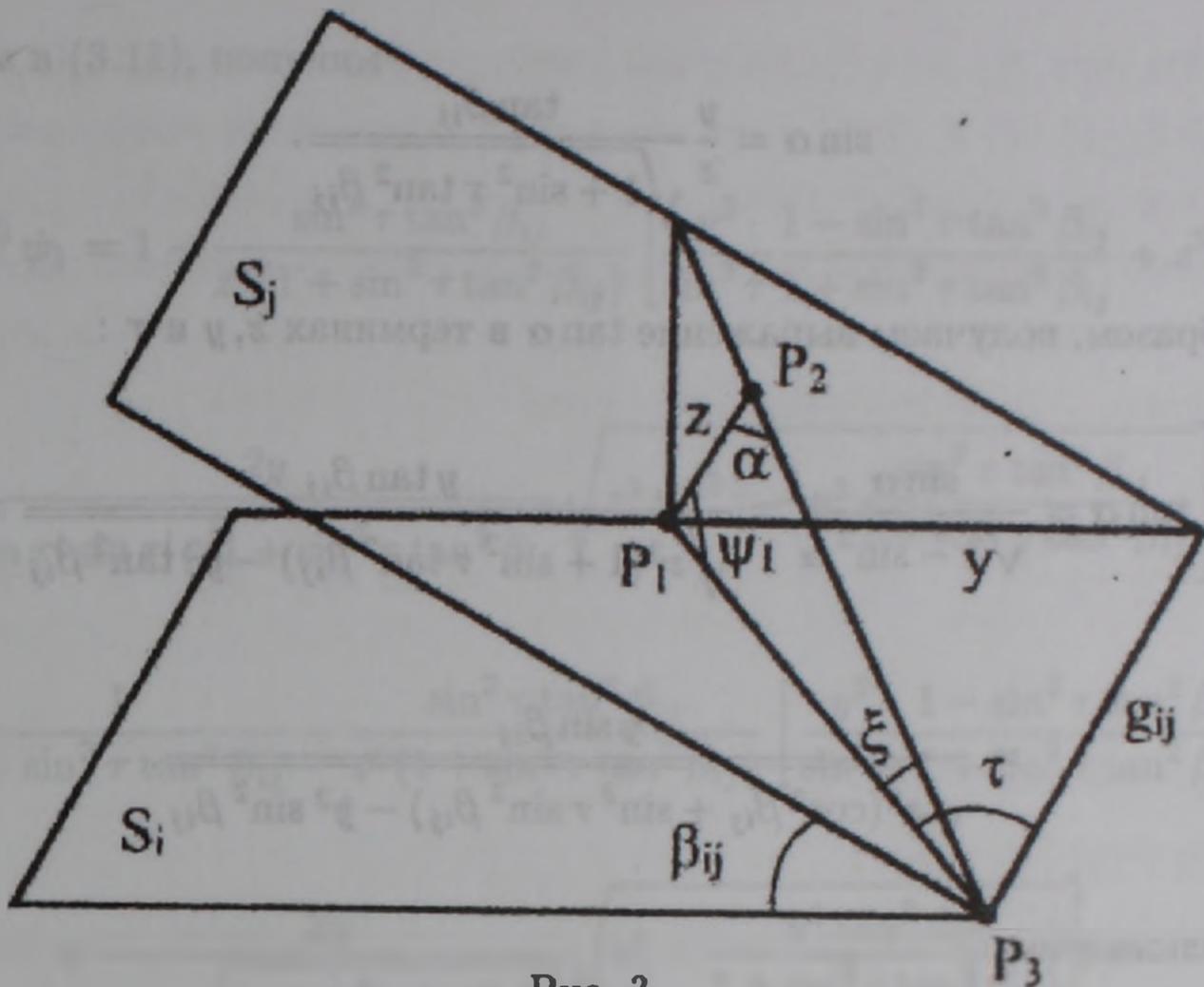


Рис. 3

вершине  $P_1$  есть  $\psi_1$ , угол при вершине  $P_2$  есть  $\alpha$ . Отметим, что угол  $\xi = \pi - \alpha - \psi_1$  при вершине  $P_3$  не зависит от  $y$ :

$$\tan \xi = \sin \tau \tan \beta_{ij}. \quad (3.7)$$

Заметим, что при  $\beta_{ij} = \pi/2$  имеем  $\xi = \pi/2$ . Следовательно,  $\alpha = \pi/2 - \psi_1$ . Подставляя в (3.5), получим

$$B_{ij}(z) = \int_0^{2\pi} d\tau \iint_{S_i} \sum_{P_2 \in C_j(x,y,\tau,z)} \cos^2 \psi_1 dx dy, \quad \beta_{ij} = \pi/2. \quad (3.5')$$

Вернемся к случаю произвольного  $\beta_{ij} > 0$ . Имеем  $|P_1 P_2| = z$  и  $|P_1 P_3| = y / \sin \tau$ . По теореме косинусов

$$z^2 = \frac{y^2}{\sin^2 \tau} + |P_2 P_3|^2 - 2|P_2 P_3| \frac{y}{\sin \tau},$$

находим длину  $P_2 P_3$

$$|P_2 P_3| = \frac{y}{|\sin \tau|} \cos \xi + \frac{1}{\sin \tau} \sqrt{z^2 \sin^2 \tau - y^2 \sin^2 \xi}. \quad (3.8)$$

По теореме синусов имеем  $\sin \alpha = \frac{y \sin \xi}{z \sin \tau}$ . Следовательно, в силу (3.7),

$$\sin \xi = \frac{\tan \xi}{\sqrt{1 + \tan^2 \xi}} = \frac{\sin \tau \tan \beta_{ij}}{\sqrt{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}}, \quad (3.9)$$

то есть

$$\sin \alpha = \frac{y}{z} \frac{\tan \beta_{ij}}{\sqrt{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}}.$$

Таким образом, получаем выражение  $\tan \alpha$  в терминах  $z, y$  и  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{y \tan \beta_{ij}}{\sqrt{z^2(1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}) - y^2 \tan^2 \beta_{ij}}} = \\ &= \frac{y \sin \beta_{ij}}{\sqrt{z^2(\cos^2 \beta_{ij} + \sin^2 \tau \sin^2 \beta_{ij}) - y^2 \sin^2 \beta_{ij}}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теперь используем

$$\sin \psi_1 = \frac{|P_2 P_3|}{z} \sin \xi,$$

и (3.8), чтобы получить

$$\cos^2 \psi_1 = 1 - \frac{\sin^2 \xi}{z^2} \left[ \frac{y^2}{\sin^2 \tau} (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) + z^2 + \frac{2y \cos \xi}{\sin \tau |\sin \tau|} \sqrt{z^2 \sin^2 \tau - y^2 \sin^2 \xi} \right]. \quad (3.11)$$

В частности, при  $\beta_{ij} = \pi/2$  имеем (см. (3.7))  $\xi = \pi/2$ . Из (3.11) получим

$$\cos^2 \psi_1 = 1 - \frac{1}{z^2} \left[ \frac{y^2}{\sin^2 \tau} (-1) + z^2 \right] = \frac{y^2}{z^2 \sin^2 \tau}, \quad \beta_{ij} = \pi/2. \quad (3.11')$$

Подставляя в (3.5'), получим

$$B_{ij}(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{z^2 \sin^2 \tau} \iint_{S_i} \sum_{P_2 \in C_j(x, y, \tau, z)} y^2 dx dy, \quad \beta_{ij} = \pi/2. \quad (3.12)$$

В силу (3.9) имеем

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}}.$$

Подставляя в (3.11), получим

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \psi_1 &= 1 - \frac{\sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}{z^2(1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij})} \left[ \frac{y^2}{\sin^2 \tau} \frac{1 - \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}} + z^2 + \right. \\
 &+ \left. \frac{2y}{\sin \tau |\sin \tau| \sqrt{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}} \sqrt{z^2 \sin^2 \tau - y^2 \frac{\sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}} \right] = \\
 &= \frac{1}{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}} - \frac{\sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}{z^2(1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij})} \left[ \frac{y^2}{\sin^2 \tau} \frac{1 - \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{2y}{\sin \tau \sqrt{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}} \sqrt{z^2 - \frac{y^2 \tan^2 \beta_{ij}}{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}}} \right] = \\
 &= \frac{1}{1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}} \left\{ 1 - \frac{\tan^2 \beta_{ij}}{z^2(1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij})} \right. \\
 &\left. \left[ y^2 - y^2 \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij} + 2y \sin \tau \sqrt{z^2(1 + \sin^2 \tau \tan^2 \beta_{ij}) - y^2 \tan^2 \beta_{ij}} \right] \right\}. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Чтобы использовать (3.13) и для случая  $\beta_{ij} = \pi/2$ , запишем

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \psi_1 &= \frac{1}{\cos^2 \beta_{ij} + \sin^2 \tau \sin^2 \beta_{ij}} \left\{ \cos^2 \beta_{ij} - \frac{\sin^2 \beta_{ij}}{z^2(\cos^2 \beta_{ij} + \sin^2 \tau \sin^2 \beta_{ij})} \right. \\
 &\left. \left[ y^2 \cos^2 \beta_{ij} - y^2 \sin^2 \tau \sin^2 \beta_{ij} + 2y \sin \tau \cos \beta_{ij} \times \right. \right. \\
 &\left. \left. \times \sqrt{z^2(\cos^2 \beta_{ij} + \sin^2 \tau \sin^2 \beta_{ij}) - y^2 \sin^2 \beta_{ij}} \right] \right\} = \frac{1}{1 - \cos^2 \tau \sin^2 \beta_{ij}} \left\{ \cos^2 \beta_{ij} - \right. \\
 &- \frac{\sin^2 \beta_{ij}}{z^2(1 - \cos^2 \tau \sin^2 \beta_{ij})} \left[ y^2 \cos^2 \beta_{ij} - y^2 \sin^2 \tau \sin^2 \beta_{ij} + \right. \\
 &\left. \left. + 2y \sin \tau \cos \beta_{ij} \sqrt{z^2(1 - \cos^2 \tau \sin^2 \beta_{ij}) - y^2 \sin^2 \beta_{ij}} \right] \right\}. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

В частности, для  $\beta_{ij} = \pi/2$ , получим  $\cos \psi_1 = y/(z \sin \tau)$  (ср. (3.11')). Таким образом, (3.6), (3.10) и (3.14) выражают подынтегральное выражение в (3.5) в терминах  $z, y, \beta_{ij}$  и  $\tau$ .

Теперь рассмотрим случай  $e(S_i) \parallel e(S_j)$ . Вместо (3.6) рассмотрим расстояние  $h_{ij}$  между плоскостями  $e(S_i)$  и  $e(S_j)$ . Имеем  $\phi_0 = 0$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = \pi - \alpha$ ,  $\sin \psi_1 = \frac{h_{ij}}{z}$ . Следовательно, (3.3) можно записать в виде

$$B_{ij}(z) = -\frac{z^2 - h_{ij}^2}{z^2} \int_0^{2\pi} d\tau \iint_{S_i} \text{card}[C_j(x, y, \tau, z)] dx dy, \quad \beta_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (3.15)$$

где  $\text{card}[C_j]$  – число точек в  $C_j$ .

#### §4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В §3 мы получили тождество Плейеля для многогранников, используя общее тождество (2.6) для частного случая, когда тело  $V$  является многогранником. Другую версию этого тождества можно получить непосредственно из (1.8). В силу (3.2) и (1.8) имеем

$$4 \int_{[B]} f_z(\chi) d\gamma = \sum_i \left[ A_i(z) + \sum_{j \neq i} B_{ij}(z) \right],$$

где

$$B_{ij}(z) = \iint_{S_i} dP_1 \iint_{S_j} \frac{f'_z(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 dP_2, \quad i \neq j.$$

На плоскостях  $e(S_i)$  и  $e(S_j)$  выбирая системы декартовых координат  $Oxy$  и  $Ox'y'$ , берем оси  $Ox$  и  $Ox'$  так, чтобы они совпадали с прямой  $g_{ij}$ . Обозначая  $\rho = x' - x$ , получим

$$B_{ij}(z) = \iint_{S_i} dx dy \iint_{T(x)} \frac{f'_z(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 d\rho dy', \quad (4.1)$$

где  $T(x) = \{(\rho, y') : (x + \rho, y') \in S_j\}$ . Ясно, что

$$B_{ij}(z) = \iint_{S_i} [J_+(x, y) + J_-(x, y)] dx dy,$$

где

$$J_{\pm}(x, y) = \iint_{T_{\pm}(x)} \frac{f'_z(\chi)}{\chi} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 \, d\rho \, dy', \quad (4.2)$$

$$T_{\pm}(x) = \{(\rho, y') : (x \pm \rho, y') \in S_j, \rho > 0\}.$$

Имеем  $\chi^2 = \rho^2 + y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \beta_{ij}$ , откуда вытекает

$$\chi \, d\chi = \rho \, d\rho. \quad (4.3)$$

Делая в (4.2) замену переменных (4.3), получим

$$J_{\pm}(x, y) = \iint_{T_{\pm}(x)} \frac{f'_z(\chi)}{\rho} \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0 \, d\chi \, dy'.$$

Если  $f'_z(\chi)$  —  $\delta$ -функция, то

$$J_{\pm}(x, y) = \int_{\{y' : (x \pm \rho, y') \in S_j\}} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \phi_0}{\rho} \, dy',$$

где

$$\rho = \sqrt{z^2 - y^2 - y'^2 + 2yy' \cos \beta_{ij}}. \quad (4.4)$$

Используя (3.4) получим

$$J_{\pm}(x, y) = \int_{\{y' : (x \pm \rho, y') \in S_j\}} \frac{\cos \beta_{ij} + \sin \psi_1 \sin \psi_2}{\rho} \, dy'.$$

Легко проверить, что  $\sin \psi_1 = \frac{1}{z} y' \sin \beta_{ij}$ ,  $\sin \psi_2 = \frac{1}{z} y \sin \beta_{ij}$ . Следовательно,

$$B_{ij}(z) = \frac{1}{z^2} \iint_{S_i} \left[ \int_{\{y' : (x+\rho, y') \in S_j\}} \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} \, dy' + \right. \\ \left. + \int_{\{y' : (x-\rho, y') \in S_j\}} \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} \, dy' \right] dx \, dy. \quad (4.5)$$

Теперь приведем тройной интеграл (4.5) к сумме одномерных интегралов. Отметим, что внутренний интеграл в (4.5) зависит от  $x$  только через области интегрирования. Рассмотрим отрезки

$$X_{\pm}(z, y, y') = \{x : P_1 = (x, y) \in S_i, P_2 = (x \pm \rho, y') \in S_j\}, \quad (4.6)$$

где  $\rho$  определяется из (4.4). Из (4.5) получим

$$B_{ij}(z) = \frac{1}{z^2} \iint_D \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} [ |X_+(z, y, y')| + |X_-(z, y, y')| ] dy dy', \quad (4.7)$$

где  $|X|$  – длина отрезка  $X$ ,  $D$  – соответствующая область интегрирования.

**Лемма 1.** Для любого выпуклого многогранника  $B$ , всякой пары  $S_i$  и  $S_j$  её различных граней и любого числа  $z$ , длины  $|X_+(z, y, y')|$  и  $|X_-(z, y, y')|$  суть кусочно линейные функции от аргументов  $y, y'$  и  $\rho$ , т.е. существует конечная совокупность ограниченных двумерных областей  $D_n \subset D$  такая, что

$$|X_{\pm}(z, y, y')| = a_n \rho + b_n y' + c_n y + d_n, \quad (y, y') \in D_n, \quad (4.8)$$

где  $a_n, b_n, c_n, d_n$  некоторые постоянные. Постоянные  $b_n$  зависят только от геометрии грани  $S_j$ , постоянные  $c_n$  зависят только от  $S_i$  и  $a_n = -1, 0, +1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим отрезки

$$J_1(y) = \{x : (x, y) \in S_i\}, \quad J_2(y') = \{x' : (x', y') \in S_j\}.$$

В силу (4.6) имеем

$$X_{\pm}(z, y, y') = J_1(y) \cap [J_2(y') \mp \rho] = [J_1(y) \pm \rho] \cap J_2(y'), \quad (4.9)$$

где  $J + \rho$  означает интервал  $J$ , сдвинутый на  $\rho$ . Пусть  $(l_k, r_k)$  – концы  $J_k$ ,  $k = 1, 2$ . Из (4.9) заключаем, что  $|X_+(z, y, y')|$  – линейная функция аргументов  $l_k, r_k$  и  $\rho$ :

$$|X_+(z, y, y')| = \begin{cases} 0, & \text{если } J_1 + \rho \cap J_2 = \emptyset, \\ r_2 - l_2, & \text{если } J_1 + \rho \supset J_2, \\ r_1 - l_1, & \text{если } J_1 + \rho \subset J_2, \\ r_1 - l_2 + \rho, & \text{если } l_1 + \rho < l_2 < r_1 + \rho < r_2, \\ r_2 - l_1 - \rho, & \text{если } l_2 < l_1 + \rho < r_2 < r_1 + \rho. \end{cases} \quad (4.10)$$

Аналогичное соотношение выполняется для  $|X_-(z, y, y')|$ . Области  $D_n \subset D$  ограничены кривыми второго порядка

$$r_1 = l_1, r_2 = l_2, r_1 - l_2 = \pm\rho, r_2 - l_1 = \pm\rho, r_1 - r_2 = \pm\rho, l_2 - l_1 = \pm\rho. \quad (4.11)$$

Из (4.4) получим дополнительное условие  $z^2 - y^2 - y'^2 + 2yy' \cos \beta_{ij} > 0$ . Остается заметить, что концы  $l_k$  и  $r_k$  суть кусочно линейные функции от аргументов  $y$  и  $y'$  и зависят только от многоугольников  $S_i$  или  $S_j$ . Лемма 1 доказана.

По Лемме 1 и (4.7),

$$B_{ij}(z) = \frac{1}{z^2} \sum_n \iint_{D_n} \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} [a_n \rho + b_n y' + c_n y + d_n] dy dy'. \quad (4.12)$$

**Пример.** Рассмотрим случай, когда тело  $B$  является правильным параллелепипедом с длинами сторон  $a, b, c$ . Пусть грани  $S_i$  и  $S_j$  имеет общую длину сторон  $a$ . Тогда

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = J_2 = [0, a], \quad \rho^2 = z^2 - y^2 - y'^2.$$

Множество (4.11) состоит только из двух кривых (окружностей)  $\rho = 0$  и  $\rho = a$ . В этом случае область интегрирования  $D = [0, b] \times [0, c]$  разделяется по крайней мере на три подобласти

$$D_1 = \{(y, y') \in D : y^2 + y'^2 < z^2 - a^2\}, \quad D_2 = \{(y, y') \in D : z^2 - a^2 < y^2 + y'^2 < z^2\}, \\ D_3 = \{(y, y') \in D : z^2 < y^2 + y'^2\}.$$

Имеем

$$[|X_+(z, y, y')| + |X_-(z, y, y')|] = \begin{cases} 0 & (y, y') \in D_1 \cup D_3, \\ 2(a - \rho) & (y, y') \in D_2. \end{cases}$$

Из Леммы 1 и (4.12) получим следующее следствие.

**Следствие.** Существует конечное множество ограниченных интервалов  $I_n \subset (-\infty, \infty)$  такое, что

$$B_{ij}(z) = \frac{1}{z^2} \sum_n \int dy \int_{I_n} \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} [a_n \rho + b_n y' + c_n] dy', \quad (4.13)$$

где постоянные  $a_n, b_n, c_n$  зависят от  $z, y, \beta_{ij}$  и не зависят от  $\rho$  и  $y'$ .

**Теорема 1.** Для любого выпуклого многогранника  $B$  четырёхмерный интеграл  $\int_{[B]} f_z(\chi) d\gamma$  можно представить в виде суммы одномерных интегралов.

**Доказательство.** В силу (3.2) достаточно найти первообразную функцию для внутреннего интеграла в (4.13). В силу (4.4)

$$\rho d\rho = (y \cos \beta_{ij} - y') dy'. \quad (4.14)$$

Делая в (4.13) замену переменных (4.14), получим

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} [a_n \rho + b_n y' + c_n] dy' &= \sum \frac{1}{z} = \dots \\ &= \int \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{y \cos \beta_{ij} - y'} [a_n \rho + b_n y' + c_n] d\rho. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Решая квадратное уравнение (4.4), получим

$$y' = y \cos \beta_{ij} \pm \sqrt{z^2 - \rho^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}}. \quad (4.16)$$

Положим

$$\sin \lambda = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}}}. \quad (4.17)$$

Тогда

$$\cos \lambda = \frac{\sqrt{z^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}} - \rho^2}{\sqrt{z^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}}}. \quad (4.18)$$

Используя (4.16) и (4.18), получим

$$y' = y \cos \beta_{ij} \pm \sqrt{z^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}} \cos \lambda. \quad (4.19)$$

В силу (4.16) – (4.18),

$$\begin{aligned} d\rho &= \sqrt{z^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}} \cos \lambda d\lambda = \sqrt{z^2 - y^2 \sin^2 \beta_{ij}} - \rho^2 d\lambda = \\ &= \pm(y' - y \cos \beta_{ij}) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Делая в (4.15) замену переменных (4.20), получим

$$\int \frac{z^2 \cos \beta_{ij} + yy' \sin^2 \beta_{ij}}{\rho} [a_n \rho + b_n y' + c_n] dy' = \int Q(y', \rho) d\lambda, \quad (4.21)$$

где  $Q$  – полином от аргументов  $y'$  и  $\rho$ . В силу (4.17) и (4.19) можно представить  $Q(y', \rho)$  в виде полинома  $Q_1$  от аргументов  $\sin \lambda$  и  $\cos \lambda$ . Для любого полинома  $Q_1(\sin \lambda, \cos \lambda)$  в [4] приведён явный вид первообразной функции. Теорема 1 доказана.

### §5. ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

Рассмотрим случай, когда тело  $B$  является правильным параллелепипедом с длинами сторон  $a, b, c$ . Пусть  $S_1$  – грань с длиной сторон  $a, b$ ,  $S_2$  – грань с длиной сторон  $b, c$ ,  $S_3$  – грань с длиной сторон  $a, c$  и  $S_i \parallel S_{i+3}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Сначала вычислим  $A_1$ . Пусть  $P_1 \in S_1$  имеет декартовы координаты  $(x, y)$ . Тогда точка  $P_2$  с полярными координатами  $(z, \tau)$  имеет декартовы координаты  $(x + z \cos \tau, y + z \sin \tau)$ . Точка  $P_2$  принадлежит грани  $S_1$ , если

$$0 \leq x + z \cos \tau \leq a, \quad 0 \leq y + z \sin \tau \leq b.$$

Следовательно, в силу (3.2')

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \int_{S_1} dP_1 \int_0^{2\pi} I_{S_1}(z, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^{2\pi} I_{[-z \cos \tau, a - z \cos \tau]}(x) I_{[-z \sin \tau, b - z \sin \tau]}(y) d\tau. \end{aligned}$$

из соображений симметрии, достаточно рассмотреть только случай  $\tau \in [0, \pi/2]$ .

Тогда

$$\begin{aligned} A_1(z) &= 4 \int_0^{\pi/2} d\tau \int_0^a I_{[-z \cos \tau, a - z \cos \tau]}(x) dx \int_0^b I_{[-z \sin \tau, b - z \sin \tau]}(y) dy = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (a - z \cos \tau)_+ (b - z \sin \tau)_+ d\tau. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Значения  $A_i$ ,  $i > 1$  определяются аналогично. Теперь рассмотрим случай  $P_1 \in S_1$ ,  $P_2 \in S_4$ . Имеем  $\beta_{14} = 0$ ,  $h_{14} = c$ . Из (4.9) следует, что ситуация аналогична (5.1), но вектор сдвига имеет длину  $\sqrt{z^2 - c^2}$  вместо  $z$ , как в (5.1). Используя (3.15), получим

$$B_{14}(z) = -4 \frac{(z^2 - c^2)_+}{z^2} \int_0^{\pi/2} \left( a - \sqrt{z^2 - c^2} \cos \tau \right)_+ \left( b - \sqrt{z^2 - c^2} \sin \tau \right)_+ d\tau. \quad (5.2)$$

Теперь рассмотрим случай  $P_1 \in S_1$ ,  $P_2 \in S_2$ . Имеем  $\beta_{14} = \pi/2$ . Записав  $P_1 = (x, y)$  и  $P_2 = (x', y')$  отметим, что  $x, x' \in [0, b]$ ,  $y \in [0, a]$  и  $y' \in [0, c]$ . В силу (4.7) и (4.10) имеем

$$\begin{aligned} B_{12}(z) &= \frac{1}{z^2} \int_0^a \int_0^c \frac{yy'}{\rho} [ |X_+(z, y, y')| + |X_-(z, y, y')| ] dy dy' = \\ &= \frac{2}{z^2} \int_0^a y dy \int_{\sqrt{(z^2 - b^2 - y^2)_+}}^{\min\{c, \sqrt{(z^2 - y^2)_+}\}} \frac{y'}{\rho} (b - \rho) dy'. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Используя (5.1) – (5.3), А. Хачатрян построил компьютерную программу для вычисления функции распределения длины случайных хорд параллелепипеда.

Хочу выразить свою благодарность профессору Р. В. Амбарцумяну за предложение об использовании метода  $\delta$ -функции и ценные обсуждения.

**Abstract.** The paper applies the Pleijel identity in three dimensions together with  $\delta$ -function method for calculation of the probability distribution function of the length of random chord of a convex polyhedron in  $\mathbb{R}^3$ . It is demonstrated that the method reduces the problem to calculation of a number of one-dimensional integrals depending on certain geometrical parameters. In the case of a right parallelepiped, explicit expressions for these parameters are presented.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, J.Wiley, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
3. W. Gille, "Chord length distributions of the hemisphere", in press.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы Интегралов, Наука, Москва, 1971.

## THE GAUSS–BONNET THEOREM FOR STATIONARY RANDOM SIMPLICIAL SURFACES

G. Zessin

*Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany*

*E-mail : zessin@mathematik.uni-bielefeld.de*

**Abstract.** The paper uses some ideas due to Joseph Mecke to demonstrate that a recent result of Mecke/Stoyan showing, that the theorem of Gauss–Bonnet is true for stationary 1-dimensional networks in  $\mathbb{R}^d$ , remains true for simplicial surfaces with or without boundaries. Here the theorem of Gauss–Bonnet  $\mathcal{K} = 2\pi \cdot \mathcal{X}$  is to be understood in the sense that  $\mathcal{K}$  is the mean total Gaussian curvature per unit volume, and  $\mathcal{X}$  = the mean Euler characteristic per unit volume. Higher dimensional stationary random simplicial pseudomanifolds are discussed.

### INTRODUCTION

The point of departure is a recent result of Mecke/Stoyan [4], where the Gauss–Bonnet theorem is shown for random networks in  $\mathbb{R}^d$  in the following sense :

$$\mathcal{K} = 2\pi \cdot \mathcal{X}, \quad (1.1)$$

where  $\mathcal{K}$  = the mean total Gaussian curvature per unit volume and  $\mathcal{X}$  = the mean Euler characteristic per unit volume. The mean is taken with respect to a stationary, and thus infinitely extended random network in  $\mathbb{R}^d$ .

In this paper we extend the above result to stationary random simplicial surfaces in  $\mathbb{R}^d$  with or without boundaries. To get this result we use the Palm theory of stationary random measures (see [2]), in particular some ideas of Mecke [3] developed for stationary random tessellations of the plane. Our result thus shows that the Gauss–Bonnet theorem remains true for random simplicial surfaces with nontrivial curvatures. In a forthcoming paper [5] we show that this is even true for higher dimensional simplicial complexes and not only in the mean but even individually.

We stress here the intrinsic character of formula (1.1).

## §2. RANDOM COMPLEXES IN $\mathbb{R}^d$

In the following we are always working in  $E = \mathbb{R}^d$ , the  $d$ -dimensional Euclidean space. We denote by  $\mathcal{B}_0(E)$  the collection of bounded Borel sets in  $E$ .

**Simplicial complexes and surfaces in  $E$ .** Let  $X$  be the set of finite subsets  $x$  of  $E$  which are affinely independent. This means that the affine hull of  $x$

$$\text{aff } x = \left\{ \sum_{a \in x} \lambda_a \cdot a \mid \lambda_a \in \mathbb{R}, \sum_{a \in x} \lambda_a = 1 \right\}$$

is different from the affine hull of every proper subset of  $x$ . A  $k$ -simplex is given by the convex hull  $\langle x \rangle$  of an affinely independent  $x$  with  $\text{card } x = k+1$ . The dimension of  $x$  respectively  $\langle x \rangle$  is defined by  $\dim x = \dim \langle x \rangle = \text{card } x - 1$ . A configuration  $\mu$  of affinely independent elements  $x \in X$  is a locally finite point measure in  $X$ , i.e.  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  if and only if  $\mu$  is of the form

$$\mu = \sum_{x \in D} \delta_x, \quad (2.1)$$

where  $D \subseteq X$  is countable and locally finite in the sense that

$$\zeta_B(D) = \text{card}\{z \in D \mid z \cap B \neq \emptyset\} < +\infty, \quad B \in \mathcal{B}_0(E). \quad (2.2)$$

(In the following we identify  $\mu$  and  $D$ , thus considering  $\mu$  as a measure in  $X$  or as subset of  $X$ .)

A configuration  $\mu$  in  $X$  is called Euclidean simplicial complex or simplicial complex in  $E$ , if

$$(x \in \mu, y \subseteq x \Rightarrow y \in \mu); \quad (2.3)$$

$$(x, y \in \mu, \langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in X, z \subseteq x \cap y : \langle z \rangle = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle). \quad (2.4)$$

Let  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(E)$  denote the set of simplicial complexes in  $E$ . The dimension of  $\mu$  is defined by  $\dim \mu = \max\{\dim x \mid x \in \mu\}$ . A general method to construct new complexes from a given one is the following: Given  $\mu \in \mathcal{S}$ , let  $\nu \subseteq \mu$  be some subset. Then the closure of  $\nu$  is given by

$$\text{cl } \nu = \sum_{x \in \nu} \sum_{y \subseteq x} \delta_y. \quad (2.5)$$

Note that in general  $\text{cl } \nu$  is not an element of  $\mathcal{M}(X)$ , but from  $\mathcal{M}^*(X)$ , where  $\eta \in \mathcal{M}^*(X)$  if and only if

$$\eta = \sum_{x \in D} n(x) \cdot \delta_x, \quad (2.6)$$

where  $D \subseteq X$  is locally finite as above and  $n : D \mapsto \mathbb{N} \setminus \{0\}$  is a function with values being integers.

For instance if  $\nu = \{x\}$ ,  $x \in \mu$ , then

$$cl\{x\} = \sum_{y \subseteq x} \delta_y. \quad (2.7)$$

The faces of  $x \in \mu$  are defined by  $cl\{y\}$ ,  $y \subseteq x$ . Call an element  $x \in \mu$  maximal if  $(y \in \mu, x \subseteq y \Rightarrow x = y)$ . It is evident that each  $\mu \in \mathcal{S}$  contains maximal elements  $x$ . Consider the subset  $\nu = \{x \in \mu : x \text{ maximal}\}$ . Then we can consider

$$cl\ \nu = \sum_{\substack{x \in \mu \\ \text{maximal}}} cl\{x\}.$$

It is also evident, that in this case  $\mu = \text{supp } cl\ \nu$ , where the support of  $\eta \in \mathcal{M}''(X)$  is defined by  $\text{supp } \eta = \{y \in X | \eta\{y\} \geq 1\}$ . Another example is the  $k$ -skeleton  $\mu_k$  of  $\mu$ , given by

$$\mu_k = \sum_{\substack{x \in \mu \\ \dim x = k}} cl\{x\}. \quad (2.8)$$

The star and link of  $z \in \mu$  are

$$\mu^z = \sum_{\substack{x \in \mu \\ z \subseteq x}} \delta_x; \quad (2.9)$$

$$lk(z, \mu) = \text{supp } cl\mu^z \setminus \mu^z. \quad (2.10)$$

In this paper we consider for simplicity the following class  $\Gamma \subseteq \mathcal{S}(E)$  of simplicial surfaces  $\mu$  in  $E$ . Here  $\mu \in \Gamma$  if and only if  $\mu \in \mathcal{S}(E)$  and  $\mu$  satisfies the following conditions :

- for each  $x \in \mu$  maximal  $\dim x = 2$ ;
- each edge is contained in one or in two maximal  $x \in \mu$ ;
- for each  $a \in \mu_0$   $\langle lk(a, \mu) \rangle$  is homomorphic to  $S^1$  or to an interval in  $\mathbb{R}^1$ .

Note that  $\mu$  can have a boundary or not.

**Random simplicial complexes.** We consider in  $\Gamma$  the  $\sigma$ -field  $\mathcal{B}_\Gamma$  which is generated by the mapping

$$\zeta : \Gamma \mapsto \mathbb{N}_0^{\mathcal{B}_0(E)}, \quad \mu \rightarrow (B \rightarrow \zeta_B(\mu)). \quad (2.11)$$

A probability  $P$  on  $(\Gamma, \mathcal{B}_\Gamma)$  is called a random simplicial surface in  $E$ . In the following we consider only stationary random simplicial surfaces  $P$  in  $E$ . This means that  $P$  is invariant under the group of transformations in  $\Gamma$  which is induced by the Euclidean translations. We denote these transformations by  $\mu \mapsto \mu - a$ ,  $a \in E$ . In such a situation Mecke's theory of Palm measures can and will be used (see [2]).

### §3. PALM MEASURES

Without going into the details we recall briefly some notations and results for later use (see [2], [3]) : We are given a stationary random simplicial surface in  $E$  described by the probability space  $(\Gamma, \mathcal{B}_\Gamma, P)$ . Denote by  $b : X \mapsto E$  the barycenter defined by

$$b(x) = \frac{1}{\text{card } x} \sum_{a \in x} a, \quad (3.1)$$

$b$  is measurable with respect to Matheron's  $\sigma$ -algebra for systems of closed subsets of  $E$  (see [1]) and induces a measurable transformation  $b : \Gamma \mapsto \mathcal{M}(E)$ , where  $b\mu$ ,  $\mu \in \Gamma$  is the image of  $\mu$  under  $b$ . We use also

$$\mathcal{M}_k^0 = \{\mu \in \Gamma \mid 0 \in b\mu_{(k)}\}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (3.2)$$

Here  $\mu_{(k)} = \sum_{x \in \mu, \dim x = k} \delta_x$ . Given  $\mu \in \mathcal{M}_k^0$  we can consider the typical  $k$ -cell  $x_0^k(\mu)$ , i.e. the unique  $x \in \mu_{(k)}$  with  $0 \in \langle x \rangle$ . The Palm measure of  $P$  is defined by

$$P^0(\varphi) = \int_\Gamma \int_E g(a) \cdot \varphi(\mu - a) b\mu(da) P(d\mu), \quad (3.3)$$

where  $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  is any measurable numerical function and  $g : E \mapsto \mathbb{R}_+$  is a measurable function such that  $\int_E g(a) da = 1$ . By definition  $P^0$  is a  $\sigma$ -finite measure on  $\Gamma$  which is concentrated on  $\mathcal{M}_0^0 \cup \mathcal{M}_1^0 \cup \mathcal{M}_2^0 =: \mathcal{M}^0$ , the set of simplicial surfaces having 0 as a barycenter of some of its elements  $x$ .

We are mainly interested in **intrinsic properties** of the random simplicial surface. These are properties which depend only on the inner metric of the random surface  $\mu$  which is induced by the Euclidean metric of  $E$ .

Such properties are deduced from the basic invariance property of the measure  $b\mu(da)P^0(d\mu)$  under the transformation  $(a, \mu) \mapsto (-a, \mu - a)$ . More formally this is expressed in the

**Lemma 1.** For each  $f \geq 0$  measurable

$$\int_\Gamma \int_E f(a, \mu) b\mu(da) P^0(d\mu) = \int_\Gamma \int_E f(-a, \mu - a) b\mu(da) P^0(d\mu). \quad (3.4)$$

An application of this invariance property to the function

$$f(a, \mu) = 1_{\mathcal{M}_2^0}(\mu) \cdot 1_{b\mu_{(1)} \cap \langle x_0^2(\mu) \rangle}(a) \cdot \varphi(\mu - a)$$

( $\varphi \geq 0$  measurable) yields the following corollary.

**Corollary 1.** For all  $\varphi \geq 0$  measurable

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}_2^0} \int_{\langle x_0^2(\mu) \rangle} \varphi(\mu - a) b_{\mu(1)}(da) P^0(d\mu) = \\ & = \int_{\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 1\}} \varphi(\mu) P^0(d\mu) + 2 \cdot \int_{\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 2\}} \varphi(\mu) P^0(d\mu). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Here for  $\mu \in \mathcal{M}_1^0$ ,  $n_0^{1,2}(\mu) = \zeta_{x_0^1(\mu)}(\mu_2)$  denotes the cardinality of 2-cells of  $\mu$ , which meet the typical edge  $x_0^1(\mu)$ .

The proof is the same in Mecke's proof of theorem 5.1 in [3]. Since the number of edges of a typical 2-cell  $\langle x_0^2(\mu) \rangle$ ,  $\mu \in \Gamma$ , is 3, we obtain directly

$$3 \cdot P^0(\mathcal{M}_2^0) = 2 \cdot P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 2\}) + P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 1\}). \quad (3.6)$$

In particular, if  $P$  is a stationary random simplicial surface without boundary, i.e.  $P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 1\}) = 0$ , then

$$3 \cdot P^0(\mathcal{M}_2^0) = 2 \cdot P^0(\mathcal{M}_1^0). \quad (3.7)$$

The following corollary will be of fundamental importance in the sequel. We need the following notation : If  $\mu \in \mathcal{M}_0^0$  denote by  $\mu_2^0$  the set of all 2-cells of  $\mu$ , which have 0 as a vertex ; i.e.  $\mu_2^0 = \sum_{0 \in x \in \mu(2)} \delta_x$ .

An application of Lemma 1 to the function

$$f(a, \mu) = 1_{\mathcal{M}_2^0}(\mu \cdot 1_{\mu_0 \cap \langle x_0^2(\mu) \rangle}(a)) \cdot h(a, \mu),$$

( $h \geq 0$  measurable) yields by Mecke's reasoning in [3] the following result.

**Corollary 2.** For each  $h \geq 0$  measurable

$$\int_{\mathcal{M}_2^0} \sum_{a \in x_0^2(\mu)} h(a, \mu) P^0(d\mu) = \int_{\mathcal{M}_0^0} \int_E h(-a, \mu - a) b_{\mu_2^0}(da) P^0(d\mu). \quad (3.8)$$

This immediately implies (take  $h \equiv 1$ )

$$3 \cdot P^0(\mathcal{M}_2^0) = \int_{\mathcal{M}_0^0} \mu_2^0(E) P^0(d\mu), \quad (3.9)$$

i.e. the mean number of 2-cells in the random surface with respect to  $P^0$ , which have 0 as a vertex, is 3 times the mean number of 2-cells per unit volume, taken with respect to  $P^0$ .

#### §4. THE GAUSS-BONNET FORMULA FOR STATIONARY RANDOM INFINITELY EXTENDED SURFACES

The main theorem of the present paper proves that a recent theorem of Mecke/Stoyan in [4] given for stationary random 1-dimensional simplicial complexes can be extended to stationary random surfaces with or without boundaries, thus indicating, that this theorem is true more generally for stationary random pseudomanifolds. (This will be done in a forthcoming paper [4]). Its proof is based on the Palm methods presented above.

Let  $P$  be a stationary random simplicial surface in  $E$ . Consider for  $\mu \in \Gamma$  and a given vertex  $a \in \mu_0$  the curvature of  $\mu$  in  $a$ , defined by

$$\mathcal{K}(a, \mu) = \sum_{a \in x \in \mu(2)} \beta(a, x, \mu_2), \quad (4.1)$$

where  $\beta$  is the deficit angle

$$\beta(a, x, \mu_2) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\text{card } \mu_2^a} - \alpha(a, x), & \text{if } \langle lk(a, \mu) \rangle \text{ is a circle} \\ \frac{\pi}{\text{card } \mu_2^a} - \alpha(a, x), & \text{if } \langle lk(a, \mu) \rangle \text{ is an interval.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Here  $\alpha(a, x)$ ,  $a \in x$ , denotes the (intrinsic positive) angles of  $x$  at  $a$ . Roughly speaking  $\mathcal{K}(a, \mu)$  measures the deviation of  $\mu$  from the Euclidean surface (tessellation).

An important observation is the following lemma.

**Lemma 2.** For  $\mu \in \mathcal{M}_0^0$  one has

$$\mathcal{K}(0, \mu) = \begin{cases} 2\pi - \int_E \gamma(-a, \mu - a) b\mu_2^0(da), & \text{if } \mu \in \Gamma \cap \mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{circle}\}, \\ \pi - \int_E \gamma(-a, \mu - a) b\mu_2^0(da), & \text{if } \mu \in \Gamma \cap \mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{interval}\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Here  $\gamma(a, \mu)$  denotes the angle of  $x_0^2(\mu)$  at  $a$ , if  $\mu \in \mathcal{M}_2^0$  with  $a \in \mu_0 \cap x_0^2(\mu)$ .

**Proof :** follows from the fact that the angle  $\alpha$  is translation invariant (in the sense that  $\alpha(a + b, x + b) = \alpha(a, x)$  for each  $b \in E$ ), so that one can write

$$\sum_{0 \in x \in \mu_2} \alpha(0, x) = \int_E \gamma(-a, \mu - a) b\mu_2^0(da). \quad (4.4)$$

Moreover, from Corollary 2 we have the following lemma.

**Lemma 3.**

$$\int_{\mathcal{M}_0^0} \int_E \gamma(-a, \mu - a) b\mu_2^0(da) P^0(d\mu) = \pi P^0(\mathcal{M}_2^0). \quad (4.5)$$

**Proof :** We have to show that  $\sum_{a \in x_0^2(\mu)} \gamma(a, \mu) = \pi$ , if  $\mu \in \mathcal{M}_2^0$ , which is evident.

Now assume in addition that  $0 < P^0(\mathcal{M}_2^0) < +\infty$ . This combined with (3.9) implies first  $0 < P^0(\mathcal{M}_0^0) < +\infty$ . Then lemma 2 and lemma 3 imply that the integral  $\mathcal{K}(P) := \int_{\mathcal{M}_0^0} \mathcal{K}(0, \mu) P^0(d\mu)$  is finite and satisfies the equation

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(P) = & 2\pi \cdot P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{circle}\}) + \\ & + \pi \cdot P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{interval}\}) - \pi P^0(\mathcal{M}_2^0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

We call  $\mathcal{K}(P)$  the **mean specific total curvature of  $P$** . We now assume in addition that

$$P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 1\}) = P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{interval}\}). \quad (4.7)$$

This means that the mean number of exterior edges per unit volume equals the mean number of exterior vertices per unit volume. This is the case for random simplicial surfaces without boundary and, more generally, for random simplicial surfaces  $\mu$ , which are **Delone configurations**, i.e.  $\mu_0$  consists of hard balls, and each  $x \in \mu_{(2)}$  is contained in a ball of fixed radius. Under the additional assumption (4.7) we obtain from (4.6) combined with (3.6) that

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(P) = & \pi[2 \cdot P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{circle}\}) + P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{interval}\}) - \\ & - (2 \cdot P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 2\}) + P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 1\}) - 2 \cdot P^0(\mathcal{M}_2^0))] = \\ = & 2\pi \cdot [P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{circle}\}) - P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 2\}) + P^0(\mathcal{M}_2^0)]. \end{aligned}$$

We now call the alternating sum

$$\mathcal{X}(P) = P^0(\mathcal{M}_0^0 \cap \{\langle lk(0, \cdot) \rangle = \text{circle}\}) - P^0(\mathcal{M}_1^0 \cap \{n_0^{1,2} = 2\}) + P^0(\mathcal{M}_2^0), \quad (4.8)$$

which is well defined for  $P$  under the above conditions, the **mean specific Euler characteristic of  $P$** .  $\mathcal{X}(P)$  associates to  $P$  the mean number of the following alternating cardinalities per unit volume : number of inner vertices – number of inner edges + number of 2-cells.

To summarize we have proven the following version of the theorem of Gauss–Bonnet.

**Theorem.** *Let  $P$  be a stationary random simplicial surface in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , satisfying  $0 < P^0(\mathcal{M}_2^0) < +\infty$  as well as condition (4.7). Then*

$$\mathcal{K}(P) = 2\pi \cdot \mathcal{X}(P).$$

**Резюме.** В статье используются некоторые идеи Йозефа Мекке чтобы показать, что недавний результат Мекке/Штояна показывающий, что теорема Гаусса-Бонне верна для стационарных одномерных сетей в  $\mathbb{R}^d$ , остаётся верной для симплициальных поверхностей с границами или без границ. Здесь теорема Гаусса-Бонне  $\mathcal{K} = 2\pi \cdot \mathcal{X}$  понимается в смысле, что  $\mathcal{K}$  является средней тотальной гауссовской кривизной в единичном объёме, а  $\mathcal{X}$  – средняя характеристика Эйлера в единичном объёме. В настоящей статье рассматриваются многомерные стационарные случайные симплициальные псевдомногообразия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Москва, Мир, 1978.
2. J. Mecke, "Stationäre Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., vol. 9, pp. 36 – 58, 1967.
3. J. Mecke, "Palm methods for stationary random mosaics", Combinatorial Principles in Stochastic Geometry (R. V. Ambartzumian ed.), Armenian Academy of Sciences, Yerevan, pp. 124 – 132, 1980.
4. J. Mecke, D. Stoyan, "The specific connectivity number of random networks", Adv. Appl. Prob., vol. 33, pp. 541 – 558, 2001.
5. H. Zessin, "Specific curvature for random simplicial complexes", Izv. NAN Armenii. Matematika, J. Contemp. Math. Anal. [English translation : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)], vol. 37, no. 1, pp. 64 – 81, 2002.

Поступила 1 сентября 2002

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 38, Номер 3, 2003

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тематическая серия, IV

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора серии .....	4
Р. В. Амбарцумян, Валюации в пространствах интегральной геометрии .....	5
Р. Г. Арамян, Обобщённое преобразование Радона с применением в теории выпуклых тел .....	19
В. К. Оганян, Об одном тождестве в теории валюаций в пространстве плоскостей .....	41
Г. С. Сукиасян, Трёхмерное тождество Плейеля и его приложения .....	57
Г. Цессин, Теорема Гаусса–Боне для стационарных симплициальных поверхностей .....	75

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 38, No. 3, 2003

INTEGRAL AND STOCHASTIC GEOMETRY, IV

CONTENTS

Editor's Message .....	4
R. V. AMBARTZUMIAN, Valuations in the integral geometry spaces ...	5
R. H. ARAMYAN, Generalized Radon transform with an application in convexity theory .....	19
V. K. OHANIAN, An identity in the theory of valuations in the space of planes .....	41
H. S. SUKIASIAN, Three-dimensional Pleijel identity and its applications .....	57
H. ZESSIN, The Gauss–Bonnet theorem for stationary random simplicial surfaces .....	75