ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, **38**, № 2, *2003, 3–16*

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ТИПА ХИ–КВАДРАТ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

М. С. Гиновян

Институт Математики НАН Армении

E-mail : maingin@sci.am

Резюме. В работе рассматривается задача проверки гипотез на основе конечной реализации $\mathbf{X}_T = \{X(1), \dots \dots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t = 0, \pm 1, ...$ с нулевым средним. Критерии согласия построены для проверки сложной гипотезы H_0 о том, что гипотетическая спектральная плотность процесса $X(t)$ имеет вид $f(\lambda, \theta)$, где $\lambda \in [-\pi, \pi]$, а $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ – неизвестный векторный параметр. В случаях, когда $f(\lambda, \theta)$ обладает "слабыми" нулями типа Макенхаупта и/или "сильными" нулями полиномиального типа, которые не зависят от параметра θ, описывается предельное распределение статистики $\Phi_T'(\widehat{\theta})\Phi_T(\widehat{\theta})$, где $\widehat{\theta}_T$ суть асимптотическая оценка максимального правдоподобия θ, а $\Phi_T(\widehat{\theta})$ – подходящим образом выбранная мера расхождения между гипотетической спектральной плотностью $f(\lambda, \theta)$ и эмпирической спектральной плотностью $I_T(\lambda)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Основываясь на конечной реализации $\mathbf{X}_T = \{X(1), \dots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, ...\}$ с нулевым средним, рассматривается задача построения критериев согласия для проверки гипотез о виде спектральной плотности процесса $X(t)$. Изучается случай сложной гипотезы H_0, означающей, что гипотетическая спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $X(t)$ зависит от неизвестного p–мерного векторного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)' \in S$, т.е. $f(\lambda) = f(\lambda, \theta)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in S$, где S – открытое множество евклидова пространства $\mathbb{R}^p$.

Для того, чтобы сделать задачу ясной, вначале рассмотрим случай полностью

Работа выполнена при поддержке ANSEF (грант # PS58) и NFSAT (грант # MA 070-02/CRDF #12011).

определённой (простой) гипотезы H_0, т.е. случай, когда истинное значение θ_0 параметра θ известно. Обозначим через $I_T(\lambda)$ эмпирическую спектральную плотность (периодограмму) процесса $X(t)$:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} X(t)e^{-i\lambda t}\right|^2 \tag{1.1}$$

Для проверки гипотезы H_0, нам нужно выбрать меру расхождения между гипотетической и эмпирической спектральными плотностями, и построить критерий согласия, основанный на свойствах распределения выбранной меры.

Ниже, в качестве меры расхождения между гипотетической спектральной плотностью $f(\lambda,\theta)$ и эмпирической спектральной плотностью $I_T(\lambda)$, рассматривается m–мерный случайный вектор (ср. [5], [16]) :

$$\Phi_T(\theta) = (\Phi_{1T}(\theta), \ldots, \Phi_{mT}(\theta))' \tag{1.2}$$

с координатами

$$\Phi_{jT}(\theta) = \Phi_{jT}(\theta, \mathrm{X}_T) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda,\theta)} - 1\right]\varphi_j(\lambda)\,d\lambda, \quad j = 1, ..., m, \tag{1.3}$$

где $\{\varphi_j(\lambda)\}$, $j = 1, ..., m$ – некоторая ортонормальная система на $[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\lambda)\,\varphi_j(\lambda)\,d\lambda = \delta_{kj}.$$

При некоторых достаточно широких условиях на $f(\lambda,\theta)$ (см., например, [12], [14]), случайный вектор $\Phi_T(\theta)$ имеет асимптотически $N(0, I_m)$–нормальное распределение при $T\to\infty$, а $\Phi_{kT}(\theta)$ и $\Phi_{jT}(\theta)$ – некоррелированы при $k \neq j$. Следовательно, в случае простой гипотезы H_0, мы можем использовать статистику

$$\chi_T^2(\theta) = \sum_{j=1}^{m}\Phi_{jT}^2(\theta), \tag{1.4}$$

которая при $T\to\infty$ и $\theta = \theta_0$ имеет χ^2–распределение с m степенями свободы (см. [5], [12]).

Следовательно, фиксируя асимптотический уровень значимости α, мы можем рассмотреть класс критериев согласия для проверки простой гипотезы H_0 о виде спектральной плотности f с асимптотическим уровнем значимости α, определяемый критической областью вида

$$\{x:\ \Phi_T'(x)\,\Phi_T(x) > d_\alpha\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1.5}$$

где $\Phi_T(x) = \Phi_T(\theta_0, x)$ является m–мерным случайным вектором, заданным по формулам (1.2), (1.3), а d_α – квантиль χ^2–распределения с m степенями свободы, т.е. d_α определяется из условия

$$P(\chi^2 > d_\alpha) = \int_{d_\alpha}^{\infty} k_m(x)\,dx = \alpha, \tag{1.6}$$

где $k_m(x)$ – плотность χ^2–распределения с m степенями свободы.

В этой статье рассматривается случай сложной гипотезы H_0 о том, что спектральная плотность рассматриваемого процесса $X(t)$ имеет вид $f(\lambda, \theta)$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)'$ – неизвестный p–мерный параметр. Согласно принятым в математической статистике рассуждениям (см., например, [4] и [15]), для проверки сложной гипотезы H_0 мы вновь можем использовать статистику (1.4), где, однако, вместо неизвестного параметра θ подставим некоторую его статистическую оценку $\widetilde{\theta}_T$. При этом, предельное распределение (1.4) будет зависеть от свойств выбранной оценки $\widetilde{\theta}_T$, и вообще говоря, не будет χ^2–распределением. Итак, в качестве первого шага, мы должны определить предельное распределение статистики

$$\chi^2_T(\widetilde{\theta}_T) = \sum_{j=1}^{m} \Phi^2_{jT}(\widetilde{\theta}_T), \tag{1.7}$$

где $\widetilde{\theta}_T$ – некоторая статистическая оценка неизвестного параметра θ. Тогда, для заданного уровня значимости α мы можем рассмотреть класс критериев согласия для проверки сложной гипотезы H_0 о функциональном виде спектральной плотности f с асимптотическим уровнем значимости α, определяемый критической областью вида

$$\{x:\ \Phi'_T(\widetilde{\theta}_T, x)\,\Phi_T(\widetilde{\theta}_T, x) > d_\alpha\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1.8}$$

где d_α – квантиль предельного распределения статистики (1.7), т.е. d_α определяется из условия

$$\int_{d_\alpha}^{\infty} \widetilde{k}_m(x)\,dx = \alpha, \tag{1.9}$$

где $\widetilde{k}_m(x)$ – плотность предельного распределения величины $\chi^2_T(\widetilde{\theta}_T)$, определённой по (1.7).

Для независимых наблюдений предельное распределение статистики типа (1.7) с различными статистическими оценками $\widetilde{\theta}_T$, было рассмотрено Черновым и Леманом [2], Чибисовым [3] и другими. Для наблюдений, порождённых гауссовскими стационарными процессами, предельное распределение статистики (1.7) для различных статистических оценок $\widetilde{\theta}_T$ неизвестного параметра θ изучалось Джапаридзе [5] и Осидзе [16]- [18]. Основное ограничение, налагаемое на гипотетическую спектральную плотность $f(\lambda, \theta)$ являлось существование постоянной $C > 0$ такой, что при всех $\theta \in S$

$$\inf_{\lambda \in [-\pi, \pi]} f(\lambda, \theta) > C > 0.$$

Настоящая работа обобщает некоторые результаты этих статей на более широкий класс спектральных плотностей, обладающих нулями и полюсами.

В качестве статистической оценки для неизвестного параметра θ мы берём асимптотическую оценку максимального правдоподобия (АОМП) $\widehat{\theta}_T$, и описываем предельное распределение статистики (1.7) в следующих двух случаях.

a) $f(\lambda) = f(\lambda, \theta)$ может обладать "слабыми" нулями типа Макенхаупта, не зависящими от параметра θ, т.е. (см. [6], [13])

$$\sup_{\theta \in S} \sup_{J \subset [-\pi, \pi]} \frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda, \theta) \, d\lambda \int_J f^{-1}(\lambda, \theta) \, d\lambda < \infty, \tag{1.10}$$

b) $f(\lambda) = f(\lambda, \theta)$ может обладать "слабыми" нулями типа Макенхаупта и/или "сильными" нулями полиномиального типа, т.е. $f(\lambda, \theta)$ допускает следующее представление (см. [8]) :

$$f(\lambda, \theta) = |Q_n(e^{i\lambda})|^2 \, h(\lambda, \theta), \tag{1.11}$$

где $Q_n(e^{i\lambda})$ $(|Q_n(0)| = 1)$ - многочлен степени n с корнями на единичной окружности, не зависящими от параметра θ, а функция $h(\lambda, \theta)$ удовлетворяет условию (1.10).

Замечание 1. Спектральные плотности, удовлетворяющие условию Макенхаупта (1.10) могут обладать нулями и полюсами. В частности, функции вида $f(\lambda) = |\lambda|^\alpha$, $-1 < \alpha < 1$ удовлетворяют условию (1.10).

Статья организована по следующей схеме : в §2 сформулированы основные результаты статьи (теоремы 1 и 2), в §3 приведены некоторые вспомогательные результаты, §4 посвящён доказательству результатов, приведённых в §2.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathrm{lip}(\alpha, 2)$ $(0 < \alpha < 1)$ интегральный класс Липшица, т.е. класс 2π-периодических интегрируемых на $[-\pi, \pi]$ функций $g(\lambda)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{|k| \geq n} |\widehat{g}_k|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\widehat{g}_k$ суть коэффициенты Фурье функции $g(\lambda)$.

Первая теорема относится к случаю а). Будем предполагать, что выполнены следующие условия :

A1) Истинное значение θ_0 параметра θ принадлежит ограниченному замкнутому множеству $\Theta \subset S$.

A2) Если θ_1 и θ_2 – две различные точки множества Θ, то $f(\lambda, \theta_1) \neq f(\lambda, \theta_2)$ для почти всех (λ).

A3) При $\theta \in \Theta$ функция $f(\lambda, \theta)$ удовлетворяет условию Макенхаупта (1.10).

A4) При $\theta \in \Theta$ функции $f(\lambda, \theta)$, $\ln f(\lambda, \theta)$, $\dfrac{1}{f(\lambda, \theta)} \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)$ $(k = 1, ..., p)$ и $\dfrac{\varphi_j(\lambda)}{f(\lambda, \theta)}$ $(j = 1, ..., m)$ принадлежат классу Липшица $\mathrm{lip}(\alpha, 2)$ для некоторого $\alpha \geq 1/4$.

A5) Функции $\dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta)$ $(k = 1, ..., p)$ непрерывны по (λ, θ) при $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in S$, а функции $\dfrac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \ln f(\lambda, \theta)$ $(k, j = 1, ..., p)$ и $\dfrac{\partial^3}{\partial \theta_k \partial \theta_j \partial \theta_i} \ln f(\lambda, \theta)$ $(k, j, i = 1, ..., p)$ непрерывны по (λ, θ) при $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\theta \in N_\delta(\theta_0)$, где $N_\delta(\theta_0) = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta\}$ – некоторая окрестность точки θ_0.

A6) Матрица $\Gamma(\theta_0) = ||\gamma_{kj}(\theta_0)||_{k,j=1,...,p}$ с элементами

$$\gamma_{kj}(\theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(\lambda, \theta) \right]_{\theta=\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda, \theta) \right]_{\theta=\theta_0} d\lambda \tag{2.1}$$

невырождена.

Рассмотрим асимптотическую оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_T$ неизвестного параметра θ, являющегося решением системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} L_T(\theta) = 0, \quad k = 1, ..., p, \tag{2.2}$$

где

$$L_T(\theta) = -\frac{T}{2} \left\{ \ln 2\pi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln f(\lambda, \theta) + \frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda, \theta)} \right] d\lambda \right\} \tag{2.3}$$

– логарифм асимптотической функции правдоподобия (см., например, [5], [6]).

Пусть $B(\theta) = ||b_{kj}(\theta)||_{k=1,...,m,\, j=1,...,p}$ есть $(m \times p)$–матрица с элементами

$$b_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f(\lambda, \theta)\, d\lambda, \tag{2.4}$$

где $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1, ..., m)$ суть функции из (1.3).

Теорема 1. *При условиях A1)–A6) предельное распределение (при $T \to \infty$) статистики*

$$\chi^2_T(\widehat{\theta}_T) = \sum_{j=1}^{m} \Phi^2_{jT}(\widehat{\theta}_T) \tag{2.5}$$

совпадает с распределением случайной величины

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \, \xi^2_{m-p+j}, \tag{2.6}$$

где ξ_j, $j = 1, ..., m$ – независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа ν_k $(0 \le \nu_k < 1)$, $k = 1, ..., p$ суть корни уравнения

$$\det\left[(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)\, B(\theta_0)\right] = 0. \tag{2.7}$$

Теперь рассмотрим случай b) (см. §1), т.е. предполагаем, что $f(\lambda, \theta)$ допускает представление

$$f(\lambda, \theta) = |Q_n(e^{i\lambda})|^2 \, h(\lambda, \theta), \tag{2.8}$$

где $Q_n(e^{i\lambda})$ – многочлен степени n с корнями на единичной окружности, а функция $h(\lambda, \theta)$ удовлетворяет условию Макенхоупта (1.10).

Будем использовать следующие обозначения : $L_2(f)$ обозначает L_2-пространство с весом f ; $H_T(f)$ – пространство тригонометрических многочленов степени не выше T (подпространство пространства $L_2(f)$) ; $G_T(f; \lambda, \mu)$ – воспроизводящее ядро пространства $H_T(f)$ (см. [1]). Отметим, что ядро $G_T(f; \lambda, \mu)$ допускает следующее представление

$$G_T(f; \lambda, \mu) = \sum_{k=1}^{T} \psi_k(f; \zeta)\, \overline{\psi_k(f; z)}, \quad z = e^{i\lambda}, \quad \zeta = e^{i\mu}, \tag{2.9}$$

где $\{\psi_k(f; z),\ k = 1, 2, ...\}$ – система ортогональных многочленов, связанных со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Обозначим через $\widetilde{I}_T(t)$ обобщённую периодограмму процесса $X(t)$, определяемую соотношением

$$\widetilde{I}_T(t) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_T(|Q_n|^2; \lambda, t) G_T(|Q_n|^2; t, \mu) |Q_n(e^{it})|^2 \, Z^f(d\lambda)\, Z^f(d\mu), \tag{2.10}$$

где $Z^f(d\lambda)$ – ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении процесса $X(t)$: $X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, Z^f(d\lambda)$. Отметим, что обычная периодограмма $I_T(t)$, определённая по (1.1) допускает аналогичное спектральное представление с ядром

$$G_T(\lambda, t) = G_T(\mathbf{I}; \lambda, t) = e^{iT(\lambda - t)/2} \cdot \frac{\sin(T(\lambda - t)/2)}{\sin((\lambda - t)/2)}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим m–мерный случайный вектор

$$\widetilde{\Phi}_T(\theta) = \left(\widetilde{\Phi}_{1T}(\theta), \ldots, \widetilde{\Phi}_{mT}(\theta)\right)' \tag{2.12}$$

с компонентами

$$\widetilde{\Phi}_{jT}(\theta) = \widetilde{\Phi}_{jT}(\theta, \mathrm{X}_T) = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\widetilde{I}_T(\lambda)}{h(\lambda,\theta)} - 1 \right] \varphi_j(\lambda) d\lambda, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.13}$$

где $h(\lambda, \theta)$ функция из (2.8), а $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1, ..., m)$ суть функции из (1.3). Обозначим через $\widetilde{\theta}_T$ асимптотическую оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ, которая в этом случае является решением следующей системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \ln h(\lambda, \theta) + \frac{\widetilde{I}_T(\lambda)}{h(\lambda, \theta)} \right\} d\lambda \right] = 0, \quad k = 1, ..., p. \tag{2.14}$$

Наконец, пусть $\widetilde{\Gamma}(\theta) = ||\widetilde{\gamma}_{kj}(\theta)||_{k,j=1,\ldots,p}$ и $\widetilde{B}(\theta) = ||\widetilde{\beta}_{kj}(\theta)||_{k=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,p}$ суть соответственно $(p \times p)$ и $(m \times p)$ матрицы с элементами

$$\widetilde{\gamma}_{kj}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln h(\lambda, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln h(\lambda, \theta)\, d\lambda, \tag{2.15}$$

$$\widetilde{b}_{kj}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(\lambda) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln h(\lambda, \theta)\, d\lambda. \tag{2.16}$$

Введём следующие предположения :

B1) Условия A1)–A3), A5) и A6) удовлетворены для функции $h(\lambda, \theta)$.

B2) Для $\theta \in \Theta$ функции $h(\lambda, \theta)$, $\ln h(\lambda, \theta)$, $\dfrac{1}{h(\lambda,\theta)} \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln h(\lambda, \theta)$ $(k = 1, ..., p)$ и $\dfrac{\varphi_j(\lambda)}{h(\lambda, \theta)}$ $(j = 1, ..., m)$ принадлежат классу Липшица $\mathrm{lip}(\alpha, 2)$ при некотором $\alpha > 1/4$.

B3) Матрица $\widetilde{\Gamma}(\theta)$ с элементами заданными формулой (2.15) невырождена.

Теорема 2. *При условиях B1) – B3) предельное распределение (при $T \to \infty$) статистики*

$$\widetilde{\chi}^2_T(\widetilde{\theta}_T). = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\Phi}^2_{jT}(\widetilde{\theta}_T) \tag{2.17}$$

совпадает с распределением случайной величины

$$\sum_{j=1}^{m-p} \xi_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \widetilde{\nu}_j\, \xi^2_{m-p+j}, \tag{2.18}$$

где ξ_j, $j = 1, ..., m$ суть независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа $\widetilde{\nu}_k$ $(0 \le \widetilde{\nu}_k < 1)$, $k = 1, ..., p$ – корни уравнения

$$\det\left[(1-\nu)\widetilde{\Gamma}(\theta_0) - \widetilde{B}'(\theta_0)\,\widetilde{B}(\theta_0)\right] = 0. \tag{2.19}$$

Замечание 2. Частные случаи теорем 1 и 2 без доказательств были приведены в работе [7].

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для функции $h(\lambda) \in L_1[-\pi,\pi]$ через $\mathcal{B}_T(h)$ обозначим $T \times T$ теплицеву матрицу, порождённую по h, т.е. $\mathcal{B}_T(h) = ||\widehat{h}(k-j)||_{k,j=1,...,T}$, где $\widehat{h}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ суть коэффициенты Фурье функции $h(\lambda)$.

Доказательства следующих двух лемм можно найти в [10], [11].

Лемма 1. *Если $h_1(\lambda) \in lip(\alpha,2)$, $h_2(\lambda) \in lip(\beta,2)$ и $\alpha+\beta \ge 1/2$, то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,tr\left[\mathcal{B}_T(h_1)\mathcal{B}_T(h_2)\right] = 4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi} h_1(\lambda)\,h_2(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.1}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,||\mathcal{B}_T(h_1)\mathcal{B}_T(h_2)||_2^2 = 8\pi^3\int_{-\pi}^{\pi} h_1^2(\lambda)\,h_2^2(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.2}$$

где $tr[A]$ и $||A||_2$ обозначают, соответственно, след и норму Гильберта–Шмидта оператора A.

Лемма 2. *Пусть $f(\lambda) \in lip(\alpha,2)$ и $g(\lambda)$ – чётная функция такая, что $g(\lambda) \in lip(\beta,2)$ и $\alpha+\beta \ge 1/2$. Тогда случайная величина*

$$\eta_T = \frac{T^{1/2}}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda)\,g(\lambda)\,d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}_f\left[I_T(\lambda)\right]g(\lambda)\,d\lambda\right], \tag{3.3}$$

где $I_T(\lambda)$ – периодограмма, определённая формулой (1.1), имеет асимптотически (при $T\to\infty$) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)\,g^2(\lambda)\,d\lambda. \tag{3.4}$$

Рассмотрим $(m+p)$-мерный случайный вектор-столбец $\Psi_T(\theta) = (\Phi_T(\theta), \Delta(\theta))'$, где $\Phi_T(\theta)$ определяется по формулам (1.2), (1.3), а

$$\Delta_T(\theta) = (\Delta_{1T}(\theta), \ldots, \Delta_{pT}(\theta)) \tag{3.5}$$

является p-мерным случайным вектором с компонентами

$$\Delta_{jT}(\theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{I_T(\lambda)}{f(\lambda,\theta)} - 1\right]\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)\,d\lambda, \quad j = 1, ..., p. \tag{3.6}$$

Следующая лемма является следствием леммы 2.

Лемма 3. *Случайный вектор $\Psi_T(\theta)$ имеет асимптотически $N(0, G(\theta_0))$ - нормальное распределение при $T \to \infty$, где*

$$G(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_m & B(\theta_0) \\ B'(\theta_0) & \Gamma(\theta_0) \end{pmatrix}$$

и I_m – $m \times m$ единичная матрица.

Доказательство следующей леммы можно найти в [6].

Лемма 4. *Асимптотическая оценка максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_T$ неизвестного параметра θ является состоятельной, асимптотически нормальной и асимптотически эффективной оценкой при $T \to \infty$.*

Прямым следствием леммы 4 является следующее асимптотическое соотношение

$$\sqrt{T}\,(\widehat{\theta}_T - \theta_0) - \Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0) = o_P(1), \tag{3.7}$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности при $T \to \infty$.

Лемма 5. *Через $\widehat{\theta}_T$ обозначим $\sqrt{T}$–состоятельную оценку параметра θ (т.е. $\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T - \theta)$ – ограничена по $\mathbf{P}_\theta$-вероятности). Тогда при $T \to \infty$*

$$\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = \Phi_T(\theta_0) - \sqrt{T}B(\theta_0)\,(\widehat{\theta}_T - \theta_0) + o_P(1), \tag{3.8}$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности.

Доказательство. Используя теорему о среднем, получаем

$$\Phi_{jT}(\widehat{\theta}_T) - \Phi_{jT}(\theta_0) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{1}{f(t, \widehat{\theta}_T)} - \frac{1}{f(t, \theta_0)} \right] \varphi_j(t)\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=1}^{p} (\widehat{\theta}_{kT} - \theta_{k0}) \int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{1}{f(t, \theta)} \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\, dt, \tag{3.9}$$

где $\theta_* \in (\theta_0, \widehat{\theta}_T)$. Так как $\widehat{\theta}_T$ является $\sqrt{T}$–состоятельной оценкой для θ, то для завершения доказательства соотношения (3.8) достаточно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{1}{f(t, \theta)} \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)\, dt = b_{kj}(\theta_0) + o_P(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.10}$$

Положим $g_* = g_*(t) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{1}{f(t, \theta)} \right]_{\theta=\theta_*} \varphi_j(t)$ и $f_0 = f(t, \theta_0)$. Тогда в силу (3.1), при $T \to \infty$, получаем

$$\mathbb{E} \left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(t) \left[\frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{1}{f(t, \theta)} \right]_{\theta=\theta_*} dt \right] = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 g_*(t) f(\lambda, \theta_0)\, d\lambda dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi T}\mathrm{tr}\ [\mathcal{B}_T(f_0)\mathcal{B}_T(g_*)] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f(\lambda,\theta)\,d\lambda = b_{kj}(\theta_0). \quad (3.11)$$

В силу (3.2), при $T \to \infty$, имеем

$$\mathbb{D}\left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(t)\left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{f_\theta(t)}\right]_{\theta=\theta_*}\varphi_j(t)\,dt\right] = \frac{1}{4\pi T^2}||\mathcal{B}_T(f_0)\mathcal{B}_T(g_*)||_2^2 \longrightarrow 0. \quad (3.12)$$

Теперь, нетрудно видеть, что (3.10) следует из (3.11), (3.12) и неравенства Чебышева. Лемма 5 доказана.

Замечание 3. В [6] доказано, что в условиях теоремы 1 АОМП $\widehat{\theta}_T$ является $\sqrt{T}$–состоятельной оценкой для θ.

Доказательство следующей леммы можно найти в [2], [3].

Лемма 6. *Предположим, что случайный вектор $\eta_T = (\eta_{1T},\ldots,\eta_{nT})$ имеет предельное $N(0,A)$ нормальное распределение (при $T\to\infty$). Тогда предельное распределение случайной величины*

$$\eta_T'\eta_T = \sum_{j=1}^{n}\eta_{jT}^2 \quad (3.13)$$

совпадает с распределением суммы

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\xi_j^2, \quad (3.14)$$

где ξ_j, $j=1,...,n$ суть независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа λ_j ($j=1,...,n$) суть собственные значения матрицы A. В частности, если A является идемпотентной матрицей, т.е. если $A^2 = A$, то предельное распределение $\eta_T'\eta_T$ совпадает с χ^2 распределением с $k = \mathrm{tr}\,[A]$ степенями свободы.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1. Согласно (3.7) и леммы 4, при $T\to\infty$ имеем асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned}\Phi_T(\widehat{\theta}_T) &= \Phi_T(\theta_0) - B(\theta_0)\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T-\theta_0) + o_P(1) = \\ &= \Phi_T(\theta_0) - B(\theta_0)\,\Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0) + o_P(1),\end{aligned} \quad (4.1)$$

которое можно переписать в виде

$$\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = U_T(\theta_0) + [V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)] + o_P(1), \quad (4.2)$$

где

$$U_T(\theta_0) = A(\theta_0)\Phi_T(\theta_0), \quad A(\theta_0) = I_m - B(\theta_0)\left(B'(\theta_0)B(\theta_0)\right)^{-1} B'(\theta_0), \tag{4.3}$$

$$V_T(\theta_0) = B(\theta_0)\left(B'(\theta_0)B(\theta_0)\right)^{-1} B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0), \tag{4.4}$$

$$W_T(\theta_0) = B(\theta_0)\,\Gamma^{-1}(\theta_0)\Delta_T(\theta_0). \tag{4.5}$$

Легко видеть, что

$$A(\theta_0)B(\theta_0) = 0. \tag{4.6}$$

Поэтому $U'_T(\theta_0)V_T(\theta_0) = U'_T(\theta_0)W_T(\theta_0) = 0$. Следовательно, из (4.2) имеем

$$\Phi'_T(\widehat{\theta}_T)\Phi_T(\widehat{\theta}_T) = U'_T(\theta_0)U_T(\theta_0)+[V_T(\theta_0)-W_T(\theta_0)]'[V_T(\theta_0)-W_T(\theta_0)]+o_P(1). \tag{4.7}$$

Из леммы 3 и (4.6) получаем

$$\mathbb{E}[U_T(\theta_0)(V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0))'] \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Следовательно, слагаемые в правой части (4.7) являются асимптотически независимыми случайными величинами. Так как матрица $A(\theta_0)$ в (4.3) является идемпотентной и $\operatorname{tr}[A(\theta_0)] = m - p$, то используя леммы 3 и 6, заключаем, что случайная величина $U'_T(\theta_0)U_T(\theta_0)$ в пределе при $T \to \infty$, имеет χ^2–распределение с $m - p$ степенями свободы.

Для того, чтобы описать предельное распределение второго слагаемого в правой части (4.7), заметим, что в силу леммы 3

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0))(V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0))'] &\longrightarrow \\ \longrightarrow B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right] B'(\theta_0)&\end{aligned} \tag{4.8}$$

при $T \to \infty$. Следовательно, по лемме 6 предельное распределение случайной величины

$$[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)]\,[V_T(\theta_0) - W_T(\theta_0)]'$$

совпадает с распределением суммы $\sum\limits_{j=1}^{p} \nu_j\,\xi^2_{m-p+j}$, где ξ_j, $j = 1, ..., m$ суть независимые $N(0,1)$ случайные величины, а числа ν_k $(k = 1, ..., p)$ суть ненулевые собственные значения матрицы в правой части (4.8). По лемме 4.3 из [3], числа ν_k $(k = 1, ..., p)$ совпадают с ненулевыми собственными значениями матрицы $B'(\theta_0)B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right]$, т.е. ν_k являются корнями уравнения

$$\det\left[B'(\theta_0)B(\theta_0)\left[(B'(\theta_0)B(\theta_0))^{-1} - \Gamma^{-1}(\theta_0)\right] - \nu I_p\right] = 0. \tag{4.9}$$

Так как матрица $\Gamma(\theta_0)$ – невырождена, то (4.9) эквивалентно (2.7).
Для того, чтобы показать $0 \le \nu_k < 1$ при $k = 1, ..., p$, заметим, что по лемме 3

$$\mathbb{E}\left[(\Delta_T(\theta_0) - B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0))\right]\left[\Delta_T(\theta_0) - B'(\theta_0)\Phi_T(\theta_0)\right]' \longrightarrow \Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) \tag{4.10}$$

при $T \to \infty$. Следовательно, матрица $\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0)$ – неотрицательно определена. Отсюда следует, что $(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) > 0$ при $\nu < 0$. С другой стороны, так как $\Gamma(\theta_0) > 0$ и $B'(\theta_0)B(\theta_0) > 0$, то при $\nu \ge 1$ имеем $(1-\nu)\Gamma(\theta_0) - B'(\theta_0)B(\theta_0) < 0$. Поэтому $0 \le \nu_k < 1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. В [8] доказано, что при условиях B1)–B3) асимптотическая оценка максимального правдоподобия $\widetilde{\theta}_T$ параметра θ при $T \to \infty$ состоятельна, асимптотически нормальна и асимптотически эффективна, причём

$$\sqrt{T}\,(\widetilde{\theta}_T - \theta_0) - \widetilde{\Gamma}^{-1}(\theta_0)\widetilde{\Delta}_T(\theta_0) = o_P(1), \tag{4.11}$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности при $T \to \infty$, $\widetilde{\Gamma}(\theta_0)$ является $p \times p$ матрицей с элементами, задаваемыми по (2.13), а $\widetilde{\Delta}_T(\theta) = \left(\widetilde{\Delta}_{1T}(\theta), \ldots, \widetilde{\Delta}_{pT}(\theta)\right)$ – p-мерный случайный вектор с компонентами

$$\widetilde{\Delta}_{jT}(\theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\widetilde{I}_T(\lambda)}{h(\lambda,\theta)} - 1\right]\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln h(\lambda,\theta)\,d\lambda, \quad j = 1, ..., p, \tag{4.12}$$

где $h(\lambda,\theta)$ – функция из (2.8), а $\widetilde{I}_T(\lambda)$ задаётся по (2.10).
Нетрудно убедиться, что $(m+p)$–мерный случайный вектор-столбец $\widetilde{\Psi}_T(\theta) = (\widetilde{\Phi}_T(\theta), \widetilde{\Delta}(\theta))'$, где $\widetilde{\Phi}_T(\theta)$ определяется по формулам (2.12), (2.13) имеет асимптотически $N(0, \widetilde{G}(\theta_0))$ – нормальное распределение при $T \to \infty$, где

$$\widetilde{G}(\theta_0) = \begin{pmatrix} I_m & \widetilde{B}(\theta_0) \\ \widetilde{B}'(\theta_0) & \widetilde{\Gamma}(\theta_0) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

и I_m – $m \times m$ единичная матрица.
Далее, полагая $a_0(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta_k}\frac{1}{h(t,\theta)}\right]_{\theta=\theta_0}$, $h_0(t) = h(t,\theta_0)$ и используя леммы 1 и 2 работы [8], можно показать, что при условиях B1) и B2) справедливы соотношения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_T(|Q_n|^2;\lambda,t)\,Q_n(e^{i\lambda})\overline{Q_n(e^{it})}|^2 a_0(t)h_0(\lambda)\,d\lambda\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_0(t)\,dt \tag{4.14}$$

и

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}G_T(|Q_n|^2;\lambda,t)\,G_T(|Q_n|^2;t,\mu)Q_n(e^{i\lambda})\overline{Q_n(e^{i\mu})}\times\right.$$

$$\left.\times|Q_n(e^{it})|^2a_0(t)\,dt\right|^2h_0(\lambda)h_0(\mu)\,d\lambda\,d\mu=\int_{-\pi}^{\pi}a_0^2(t)\,dt. \qquad (4.15)$$

Используя аргументы доказательства леммы 5 и (4.14), (4.15), получаем асимптотическое соотношение

$$\widetilde{\Phi}_T(\widetilde{\theta}_T)=\widetilde{\Phi}_T(\theta_0)-\sqrt{T}\,\widetilde{B}(\theta_0)\,(\widetilde{\theta}_T-\theta_0)+o_P(1), \qquad (4.16)$$

где слагаемое $o_P(1)$ стремится к нулю по вероятности при $T\to\infty$.
Остальная часть доказательства повторяет аргументы доказательства теоремы 1, с использованием формул (4.11), (4.13) и (4.16). Теорема 2 доказана.

Abstract. The paper considers a problem of hypotheses testing based on a finite realization $\mathbf{X}_T = \{X(1),\ldots\ \ldots,X(T)\}$ of a zero mean real-valued stationary Gaussian process $X(t)$, $t=0,\pm1,\ldots$. Goodness-of-fit tests are constructed for testing a composite hypothesis H_0 that the hypothetical spectral density of the process $X(t)$ has the form $f(\lambda,\theta)$, where $\lambda\in[-\pi,\pi]$ and $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)'$ is an unknown vector parameter. In the cases where $f(\lambda,\theta)$ can possess Muckenhoupt–type "weak" zeros and/or "strong" zeros of polynomial type that do not depend on parameter θ, we describe the limiting distribution of the statistics $\Phi_T'(\widehat{\theta})\Phi_T(\widehat{\theta})$, where $\widehat{\theta}_T$ is the asymptotic estimate of maximum likelihood of θ, and $\Phi_T(\widehat{\theta})$ is a suitable chosen measure of divergence between the hypothetical spectral density $f(\lambda,\theta)$ and the empirical spectral density $I_T(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Aronszajn, "Theory of Reproducing Kernels", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68, pp. 337 – 404, 1950.
2. H. Chernov, E. L. Lehman, "The use of maximum likelihood estimates in χ^2–tests for goodness of fit", Ann. Math. Statist., vol. 25, no. 3, pp. 579 -586, 1954.
3. Д. М. Чибисов, "Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений", Теория вероят. и её примен., том 16, № 1, стр. 1 - 20, 1971.
4. Г. Крамер, Математические Методы Статистики, Москва, Мир, 1975.
5. K. Dzhaparidze, Parameter Estimation and Hypotesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series, Springer-Verlag, New York, 1986.
6. M. S. Ginovian, "On the asymptotical estimation of the maximum likelihood of parameters of the spectrum of a stationary Gaussian time series", In : Limit Theorems in Probability and Statistics, v.1 (P. Revesz, ed.) Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 36, North-Holland Amsterdam), pp. 457–497. 1984.
7. М. С. Гиновян, "О критерии согласия для проверки сложной гипотезы о спектре гауссовской стационарной последовательности", ДАН Арм. ССР, том 80, № 1, стр. 23 - 26, 1985.

8. M. S. Ginovian, "On the asymptotic estimator of the maximum likelihood of parameters of the spectral density having zeros", Acta Scien. Math., Szeged., vol. 50, no. 1-2, pp. 169 - 182. 1986.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", Теория вероят. и ее примен., том 33, стр. 315 — 322, 1988.
10. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Th. Rel. Fields, vol. 100, pp. 395 - 406, 1994.
11. М. С. Гиновян, "Ассимптотические свойства спектральной оценки стационарных гауссовских процессов", Изв. АН Армении, Математика, том 30, № 1, стр. 1 – 16, 1995.
12. E. J. Hannan, Time Series Analysis, John Wiley, New York, 1960.
13. Hunt R. A., Muckenhoupt B. and Wheeden R. L., Weighted Norm Inequalities for the Conjugate Function and Hilbert Transform, Trans. of the AMS, vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
14. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория вероят. и её примен., том 8, № 4, стр. 391 – 430, 1963.
15. M. G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, vol. 2 (Inference and Relationship), Charles Griffin & Comp., London, 1967.
16. А. Г. Осидзе, "О критерии согласия в случае зависимости спектральной плотности гауссовского процесса от неизвестных параметров", Сообщения АН Груз. ССР, том 74, № 2, стр. 273 - 276, 1974.
17. А. Г. Осидзе, "О критерии χ^2 для проверки гипотезы относительно спектральной плотности гауссовского случайного процесса с неизвестными параметрами", Сообщения АН Груз.ССР, том 75, № 2, стр. 273 - 275, 1974.
18. А. Г. Осидзе, "Об одной статистике проверки гипотезы относительно вида спектральной плотности стационарного гауссовского процесса", Сообщения АН Груз.ССР, том 77, № 2, стр. 313 - 315, 1975.

Поступила 16 января 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 2, 2003, 17–28

ОБРАЩЕНИЕ УСЕЧЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА–ХОПФА И ОШИБКА ПРОГНОЗА ДЛЯ ARMA ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

М. С. Гиновян, Л. В. Микаелян

Институт Математики НАН Армении, Ереванский государственный университет

E-mail : mamgin@sci.am

Резюме. В статье рассматриваются усечённые операторы Винера–Хопфа с рациональными символами, допускающими нули. Получены явные выражения для соответствующих резольвент. Эти результаты применяются для получения явных выражений ошибки прогноза для ARMA процессов первого и второго порядков с непрерывным временем и спектральными плотностями равными нулю в точке ноль.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $f(\lambda)$ такая, что $1 - f(\lambda)$ допускает локально интегрируемое преобразование Фурье $\widehat{f}(t)$. Тогда для любого $r > 0$ усечённые операторы Винера–Хопфа

$$[T_r(f)g](t) = g(t) + \int_0^r \widehat{f}(t-s)\, g(s)\, ds \tag{1.1}$$

определены и ограничены в пространстве $L_2(0,r)$.

Настоящая статья рассматривает важный частный случай, когда $f(\lambda)$ является рациональной функцией допускающей нули. В частности, в §2 мы докажем, что операторы $T_r(f_1)$ и $T_r(f_2)$, порождённые символами

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} \tag{1.2}$$

и

$$f_2(\lambda) = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+1)^2} \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке NFSAT (грант # MA 070-02/CRDF #12011).

соответственно, являются обратимыми и получим явные выражения для соответствующих резольвент.

В §3 изучается асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарных гауссовских процессов с непрерывным временем, обладающих спектральной плотностью $f(\lambda)$. Ошибка прогноза $\delta(f;T)$ определяется в терминах так называемой "параметрической" функцией $a(f;r) = \Gamma_r(f;0,r)$ $(r>0)$, где $\Gamma_r(f;t,s)$ – резольвента усечённого оператора Винера–Хопфа $T_r(f)$ с символом $f(\lambda)$.

Используя результаты §2, мы находим явные выражения ошибки прогноза для ARMA процессов первого и второго порядков с непрерывным временем и спектральными плотностями равными нулю в точке ноль.

§2. ОБРАЩЕНИЕ УСЕЧЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА–ХОПФА

В этом параграфе мы покажем, что усечённые операторы Винера–Хопфа, порождённые символами $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, которые определены по формулам (1.2) и (1.3) соответственно, являются обратимыми и получим явные выражения для соответствующих резольвент. Следующая теорема без доказательства была приведена в [13].

Теорема 1. *Для f определённой (1.2), операторы $T_r(f)$ $(0<r<\infty)$ являются обратимыми в пространствах $L_2(0,r)$ и*

$$\left(\left[T_r(f)\right]^{-1}\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \int_0^r \Gamma_r(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

где

$$\Gamma_r(t,s) := \Gamma_r(f_1 : t,s) = \frac{(1+t)(1+s)}{r+2} - 1 - \min\{t,s\}. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Для f определённой (1.3), операторы $T_r(f)$ $(0<r<\infty)$ являются обратимыми в пространствах $L_2(0,r)$ и*

$$\left(\left[T_r(f)\right]^{-1}\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \int_0^r \Gamma_r(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

с $\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(s,t)$ и

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(f_2;t,s) = Q_r(t,s) + \frac{1}{\Delta}\left[\psi_{r1}(t)\widetilde{\psi}_{r1}(s) + \psi_{r2}(t)\widetilde{\psi}_{r2}(s)\right] \quad \text{при} \quad s \le t,$$

где

$$Q_r(t,s) = t - s + 2 - (t-2)(s-2)(t-r) + \frac{1}{2}(t+s-4)(t^2-r^2) - \frac{1}{3}(t^3-r^3),$$

$$\Delta = \frac{1}{192}(r+4)(r^3+12r^2+48r+48),$$

$$\psi_{r1}(t) = U\phi_1 = -\frac{1}{4}\left[t^2 - 2rt - 4t + r^2 + 4r + 2\right],$$

$$\psi_{r2}(t) = U\phi_2 = -\frac{1}{12}\left[t^3 - 3(r^2 + 4r + 6)t + 2(r^3 + 6r^2 + 12r + 6)\right],$$

$$\widetilde{\psi}_{r1}(s) = \frac{1}{96}\left[(r^2 + 4r)s^3 - (2r^3 + 12r^2 + 24r + 24)s^2 + \right.$$
$$\left. +(r^4 + 8r^3 + 30r^2 + 72r + 96)s - (4r^3 + 36r^2 + 96r + 48)\right],$$

$$\widetilde{\psi}_{r2}(s) = -\frac{r+4}{96}\left[2s^3 - 3rs^2 - (12r + 36)s + (r^3 + 12r^2 + 42r + 24)\right].$$

Доказательство Теоремы 1. Известно (см., например, [13]), что

$$T_r(f_1 f_2) = T_r(f_1)T_r(f_2) + P_r H(f_1)H(\widetilde{f_2})P_r + Q_r H(\widetilde{f_1})H(f_2)Q_r, \tag{2.2}$$

где $H(g)$ – оператор Ганкеля с символом g, а P_r – ортогональный проектор в $L_2(0,\infty)$ на $L_2(0,r)$, т.е.

$$(P_r f)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если} \quad t \in [0,r], \\ 0, & \text{если} \quad t \notin [0,r], \end{cases}$$

$Q_r f(t) = (P_r f)(r-t)$ и $\widetilde{f(\lambda)} = f(-\lambda)$. Имеем

$$\frac{\lambda}{\lambda + i} = 1 - \int_0^\infty e^{-t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \geq 0), \tag{2.3}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda - i} = 1 - \int_{-\infty}^0 e^{t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \leq 0), \tag{2.4}$$

$$\frac{\lambda + i}{\lambda} = 1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda > 0), \tag{2.5}$$

$$\frac{\lambda - i}{\lambda} = 1 + \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda < 0). \tag{2.6}$$

Положим

$$T = T_r\left[\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}\right], \qquad H = H\left[\frac{\lambda}{\lambda + i}\right], \qquad T_\pm = T_r\left[\frac{\lambda}{\lambda \pm i}\right]. \tag{2.7}$$

Из (2.2) – (2.7) получаем

$$(T_+ f)(t) = f(t) - \int_0^t e^{-(t-s)} f(s)\,ds, \qquad (T_- f)(t) = f(t) - \int_t^r e^{t-s} f(s)\,ds$$

и

$$(T_+^{-1} f)(t) = f(t) + \int_0^t f(s)\,ds, \tag{2.8}$$

$$(T_-^{-1}f)(t) = f(t) + \int_t^r f(s)\,ds. \tag{2.9}$$

Учитывая, что оператор Ганкеля с символом $\frac{\lambda}{\lambda-i}$ является тривиальным и $\widetilde{\frac{\lambda}{\lambda-i}} = \frac{\lambda}{\lambda+i}$, из (2.2) получаем

$$T = T_+T_- + P_rH^2P_r = (I + P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1})T_+T_-. \tag{2.10}$$

Далее, для оператора Ганкеля H имеем

$$(Hf)(t) = -(f, e^{-s})e^{-t}$$

и

$$(H^2f)(t) = -(Hf, e^{-s})e^{-t} = -(f, He^{-s})e^{-t} = -\frac{1}{2}(f, e^{-s})e^{-t},$$

где $(.,.)$ обозначает скалярное произведение в $L_2(0,r)$. Полагая $T_-^{-1}T_+^{-1} = U$, из (2.10) получаем $T^{-1} = U(I + P_rH^2P_rU)^{-1}$. В силу (2.8) и (2.9) имеем

$$(Uf)(t) = (T_-^{-1}T_+^{-1})(t) = f(t) + \int_0^r Q_r(t,s)f(s)\,ds, \tag{2.11}$$

где

$$Q_r(t,s) = 1 + r - t \quad \text{для} \quad s \le t \tag{2.12}$$

и $Q_r(t,s) = Q_r(s,t)$. Далее, заметим, что

$$((I + P_rH^2P_rU)f)(t) = f(t) + (f, 1 + r - t)\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Следовательно,

$$((I + P_rH^2P_rU)^{-1}f)(t) = f(t) - (Kf)(t), \tag{2.13}$$

где

$$(Kf)(t) = -\frac{1}{r+2}(f, 1 + r - s)e^{-t}.$$

В силу (2.11) – (2.13) имеем $T^{-1} = U + UK$ и

$$(UK)f = -\frac{1}{r+2}(f, 1 + r - s)Ue^{-t} = -\frac{1}{r+2}(f, 1 + r - s)(1 + r - t).$$

Наконец, получаем

$$(T_r^{-1})f(t) = f(t) - \int_0^r \Gamma_r(t,s)f(s)\,ds,$$

где

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(t,s) = \frac{(1+t)(1+s)}{r+2} - 1 - s \quad \text{при} \quad s \le t$$

и $\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(s,t)$. Отсюда вытекает (2.1). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Нетрудно убедиться, что

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2 = 1 + \int_0^\infty (t-2)e^{-t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \geq 0),$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2 = 1 + \int_{-\infty}^0 (-t-2)e^{t}e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda \leq 0), \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^2 = 1 + \int_0^\infty (t+2)e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda > 0), \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^2 = 1 + \int_{-\infty}^0 (-t+2)e^{i\lambda t}\,dt, \quad (Im\lambda < 0).$$

Так как оператор Ганкеля с символом $\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2$ является тривиальным, то из (2.2) получаем

$$T_r\left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^2\right] = T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\right] =$$

$$= T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right]T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\right] + P_r H\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right]H\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right]P_r. \tag{2.16}$$

Положим

$$T = T_r\left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^2\right], \qquad H = H\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right], \qquad T_\pm = T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda\pm i}\right)^2\right].$$

Принимая во внимание, что $\widetilde{\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2$, равенство (2.16) можно записать в виде

$$T = T_+T_- + P_r H^2 P_r,$$

или

$$T = (I + P_r H^2 P_r T_-^{-1} T_+^{-1})T_+T_-. \tag{2.17}$$

Из (2.3) и (2.14) получаем

$$(T_+f)(t) = f(t) + \int_0^t (t-s-2)e^{-t+s}f(s)\,ds,$$

$$(T_-f)(t) = f(t) + \int_t^r (-t+s-2)e^{t-s}f(s)\,ds.$$

Из (2.2) следует, что

$$T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2\right]T_r\left[\left(\frac{\lambda+i}{\lambda}\right)^2\right] = P_r,$$

$$T_r\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\right]T_r\left[\left(\frac{\lambda-i}{\lambda}\right)^2\right]=P_r.$$

Следовательно, операторы T_+ и T_- являются обратимыми в пространстве $L_2(0,r)$, и в силу (2.15) и (2.16) находим

$$(T_+^{-1}f)(t)=f(t)+\int_0^t(t-s+2)f(s)\,ds, \tag{2.18}$$

$$(T_-^{-1}f)(t)=f(t)+\int_t^r(-t+s+2)f(s)\,ds. \tag{2.19}$$

Заметим, что оператор H^2 в (2.17) – двумерный, и может быть представлен в виде

$$(H^2f)(t)=(f,\phi_1)\phi_1+(f,\phi_2)\phi_2,$$

где $(.,.)$ обозначает скалярное произведение в пространстве $L_2(0,r)$, а ϕ_1 и ϕ_2 определяются по формулам

$$\phi_1(t)=\frac{1}{2}(t-1)e^{-t},\qquad \phi_2(t)=(\frac{1}{2}t-1)e^{-t}. \tag{2.20}$$

В силу (2.17) имеем

$$T^{-1}=T_-^{-1}T_+^{-1}(I+P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1})^{-1}.$$

Следовательно, для вычисления T^{-1}, достаточно показать, что оператор $I+P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1}$ обратим и вычислить его обратный. Полагая $T_-^{-1}T_+^{-1}=U$, в силу (2.18) и (2.19), получаем

$$(Uf)(t)=f(t)+\int_0^r Q_r(t,s)f(s)\,ds,$$

где

$$Q_r(t,s)=t-s+2+(2-t)(2-s)(r-t)+\frac{1}{2}(r^2-t^2)(4-t-s)+\frac{1}{3}(r^3-t^3) \tag{2.21}$$

для $s\le t$ и $Q_r(t,s)=Q_r(s,t)$. Далее, заметим, что оператор

$$I+P_rH^2P_rT_-^{-1}T_+^{-1}=P_r+P_rH^2P_rU$$

может быть представлен в виде

$$(P_r+P_rH^2P_rU)f=f+(f,U\phi_1)\phi_1+(f,U\phi_2)\phi_2.$$

Следовательно, $(P_r + P_r H^2 P_r U)^{-1} f = f - Kf$, где K – двумерный оператор. Имеем

$$Kf = \frac{1}{\Delta}\left[(1 + (\phi_2, \psi_{r2})(f, \psi_{r1}) - (\phi_2, \psi_{r1})(f, \psi_{r2})\right]\phi_1 +$$
$$+ \frac{1}{\Delta}\left[(1 + (\phi_1, \psi_{r1})(f, \psi_{r2}) - (\phi_1, \psi_{r2})(f, \psi_{r1})\right]\phi_2,$$

где $\psi_{r1} = U\phi_1$, $\psi_{r2} = U\phi_2$, и

$$\Delta = [1 + (\phi_1, \psi_{r1})]\,[1 + (\phi_2, \psi_{r2})] - (\phi_1, \psi_{r2})(\phi_2, \psi_{r1}),$$

где ϕ_1 и ϕ_2 определены по (2.20). Непосредственными вычислениями получаем

$$\psi_{r1} = U\phi_1 = -\frac{1}{4}\left[t^2 - 2rt - 4t + r^2 + 4r + 2\right], \tag{2.22}$$

$$\psi_{r2} = U\phi_2 = -\frac{1}{12}\left[t^3 - 3(r^2 + 4r + 6)t + 2(r^3 + 6r^2 + 12r + 6)\right], \tag{2.23}$$

$$\Delta = \frac{1}{192}(r + 4)(r^3 + 12r^2 + 48r + 48). \tag{2.24}$$

Следовательно, $\Delta \neq 0$ для $r > 0$, что является необходимым и достаточным условием для обратимости оператора $(P_r + P_r H^2 P_r U)$. Таким образом, мы доказали, что для всех $r > 0$ оператор $T_r\left[\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}\right)^2\right]$ обратим, и его обратный оператор может быть представлен в виде :

$$T^{-1} = U - UK. \tag{2.25}$$

Далее, легко видеть, что оператор UK – двумерный и может быть записан в виде

$$UKf = \frac{1}{\Delta}(f, \widetilde{\psi}_{r1})U\phi_1 + (f, \widetilde{\psi}_{r2})U\phi_2 = (f, \widetilde{\psi}_{r1})\psi_{r1} + (f, \widetilde{\psi}_{r2})\psi_{r2}, \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{r1} = [1 + (\phi_2, \psi_{r2})]\,\psi_{r1} - (\phi_2, \psi_{r1})\psi_{r2} = \frac{1}{96}\,&\left[(r^2 + 4r)t^3 - (2r^3 + 12r^2 + \right.\\ \left. + 24r + 24)t^2 + (r^4 + 8r^3 + 30r^2 + 72r + 96)t - (4r^3 + 36r^2 + 96r + 48)\right]&,\end{aligned} \tag{2.27}$$

и

$$\begin{aligned}&\widetilde{\psi}_{r2} = [1 + (\phi_1, \psi_{r1})]\,\psi_{r2} - (\phi_1, \psi_{r2})\psi_{r1} = \\ &= -\frac{r + 4}{96}\left[2t^3 - 3rt^2 - (12r + 36)t + (r^3 + 12r^2 + 42r + 24)\right].\end{aligned} \tag{2.28}$$

В силу (2.22) – (2.28), после некоторых преобразований, получаем

$$(T_r^{-1})f(t) = f(t) - \int_0^r \Gamma_r(t, s)f(s)\,ds,$$

причём $\Gamma_r(t, s) = \Gamma_r(s, t)$ определяется по формуле

$$\Gamma_r(t, s) = -Q_r(t, s) + \psi_{r1}(t)\widetilde{\psi}_{r1}(s) + \psi_{r2}(t)\widetilde{\psi}_{r2}(s) \quad \text{для} \quad s \leq t,$$

где $Q_r(t, s)$, $\psi_{r1}(t)$, $\psi_{r2}(t)$, $\widetilde{\psi}_{r1}(s)$ и $\widetilde{\psi}_{r2}(s)$ определены по (2.21) – (2.23), (2.27) и (2.28) соответственно. Теорема 2 доказана.

§3. ОШИБКА ПРОГНОЗА ДЛЯ ARMA ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЁМ

В этом параграфе изучается задача асимптотического поведения ошибки прогноза для стационарных гауссовских процессов с непрерывным временем, обладающих спектральной плотностью $f(\lambda)$. Используя результаты §2, получены явные выражения ошибки прогноза для ARMA процессов первого и второго порядков с непрерывным временем и спектральными плотностями равными нулю в точке ноль.

Пусть $X(\phi)$ – стационарный гауссовский обобщённый процесс, т.е. $X(\cdot)$ является линейным оператором, отображающим пространство $D = D(\mathbb{R})$ – бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в гауссовское подпространство H пространства $L_2(dP)$ такой, что

$$R(\varphi,\psi) = (X(\varphi), X(\psi)) = R(\tau_t\varphi, \tau_t\psi), \quad \varphi,\psi \in D, \tag{3.1}$$

где, τ_t – оператор сдвига : $[\tau_t\varphi](s) = \varphi(s+t)$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H, определяемое по формуле

$$(\xi,\eta) = E\xi\overline{\eta}, \quad \xi,\zeta \in H.$$

Мы предполагаем, что процесс $X(\phi)$ обладает спектральной плотностью $f(\lambda)$. Последнее означает, что ковариационный оператор (3.1) допускает представление

$$R(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\lambda)\overline{\widehat{\psi}(\lambda)} f(\lambda)\,d\lambda, \quad \varphi,\psi \in D,$$

где $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ – преобразования Фурье функций φ и ψ соответственно.

Пусть H_1 и H_2 – подпространства пространства H, а P_1 и P_2 – ортогональные проекторы в H на H_1 и H_2, соответственно. Рассмотрим функционал

$$\tau(H_1,H_2) = \operatorname{tr}[P_1P_2P_1],$$

где $\operatorname{tr}[A]$ обозначает след оператора A. Отметим (см., например, [9], стр. 162), что подпространства H_1 и H_2 являются ортогональными тогда и только тогда, когда $P_1P_2P_1 = 0$, и функционал $\tau(H_1,H_2)$ оценивает близость подпространств H_1 и H_2 к взаимно ортогональным. Ясно, что

$$\tau(H_1,H_2) = \tau(H_2,H_1).$$

Обозначим через $H_s^t(X)$ подпространство пространства H, порожденное случайными величинами $X(\varphi)$ с $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset [s,t)$. Положим

$$\tau(f;r,s) = \tau(H_{-r}^0, H_0^s), \qquad \tau(f;s) = \tau(H_{-\infty}^0, H_0^s),$$

$$\delta(f;r,s) = \tau(f;s) - \tau(f;r,s).$$

Ясно, что $\delta(f;r,s)$ неотрицательна и при фиксированном s стремится к нулю при $r \to \infty$. Величина $\delta(f;r,s)$ является естественной мерой точности прогноза случайной величины $\xi \in H_0^s$ по величинам $\eta \in H_{-r}^0$ (прошлое длины r), по сравнению с их прогнозом по величинам $\eta \in H_{-\infty}^0$ (всё прошлое). Естественно также называть величину

$$\delta(f;r) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\,\delta(f;r,s) \tag{3.2}$$

ошибкой прогноза по прошлому длины r. Ясно, что $\delta(f;r) \geq 0$ и $\delta(f;r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Нас интересует оценивание скорости убывания $\delta(f;r)$ к нулю при $r \to \infty$, в зависимости от свойств спектральной плотности $f(\lambda)$, при условии, что рассматриваемый процесс $X(\phi)$ близок к "белому шуму", и регулярен. Последнее означает, что $f(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям (см., например, [9], [16]) :

$$1 - f(\lambda) \in L_1(\mathbb{R}), \tag{3.3}$$

и

$$\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} \in L_1(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

В силу условия (3.3) преобразование Фурье $H(f;t)$ функции $1 - f(\lambda)$ корректно задаётся по формуле

$$H(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - f(\lambda)]e^{-it\lambda}\,d\lambda.$$

Хорошо известно (см. [1], [10]), что для любого положительного числа r у эрмитова ядра $H(f;t-s)$ $(0 \leq t,s \leq r)$ существует эрмитова резольвента :

$$\Gamma_r(f;t,s) = \overline{\Gamma_r(f;s,t)}, \quad 0 \leq t,s \leq r, \quad r > 0,$$

удовлетворяющая условию

$$\Gamma_r(f;t,s) + \int_0^r H(f;t-u)\Gamma_r(f;u,s)\,du = H(f;t-s), \quad 0 \leq t,s \leq r.$$

Рассмотрим так называемую "параметрическую" функцию $a(f;r)$, определяемую по формуле

$$a(f;r) = \Gamma_r(f;0,r), \quad r > 0. \tag{3.5}$$

Следующая лемма, доказанная в [11] (см., также, [15]), даёт представление $\delta(f;T)$ в терминах "параметрической" функции $a(f;r)$.

Лемма 1. *При условиях (3.3) и (3.4) имеем*

$$\delta(f;T) = \int_T^\infty |a(f;r)|^2 dr, \tag{3.6}$$

где $\delta(f;T)$ определена в (3.2).

Таким образом, в силу (3.5) и (3.6), задача сводится к изучению резольвенты усечённого оператора Винера–Хопфа $T_r(f)$, порожденного спектральной плотностью $f(\lambda)$.

Вышеупомянутая задача для процессов со строго положительной спектральной плотностью $f(\lambda)$ была изучена в [11] и [12] (см., также, [2]), где было доказано, что асимптотическое поведение $\delta(f;T)$ определяется дифференциальными свойствами спектральной плотности $f(\lambda)$.

В настоящей статье рассматривается важный частный случай стационарных смешанных процессов авторегрессии – скользящего среднего (ARMA) с непрерывным временем со спектральной плотностью $f(\lambda)$ обладающей нулями, и показывается, что $\delta(f;T) \sim 1/T$ при $T \to \infty$. Отметим, что аналогичная задача для процессов с дискретным временем была исследована в [4]–[8].

Напомним (см., например, [14], стр. 284), что стационарный ARMA(m,n) процесс с непрерывным временем обладает рациональной спектральной плотностью :

$$f(\lambda) = \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}, \tag{3.7}$$

где $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^k$ и $Q(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} q_k z^k$ суть полиномы не имеющие корней в правой полуплоскости.

Ниже, используя результаты §2, мы получаем явные выражения для ошибки прогноза $\delta(f;T)$ в случае стационарных ARMA(1,1) и ARMA(2,2) процессов с непрерывным временем, и со спектральными плотностями, определёнными по формулам (1.2) и (1.3) соответственно.

Предложение 1. *Для стационарного ARMA(1,1) процесса с непрерывным временем, со спектральной плотностью $f_1(\lambda)$, заданной по (1.2), имеем*

$$\delta(f_1;T) = \frac{1}{T+2}. \tag{3.8}$$

Доказательство. В силу (3.5) и теоремы 1 для спектральной плотности $f_1(\lambda)$, определённой по формуле (1.2), и для любого $r > 0$ имеем

$$a_1(r) := a(f_1;r) = \Gamma_r(f_1;0,r) = \frac{1}{r+2}. \tag{3.9}$$

Следовательно, в силу леммы 1 и (3.9), получаем

$$\delta(f_1;T) = \int_T^\infty |a_1(r)|^2\, dr = \int_T^\infty \frac{1}{(r+2)^2}\, dr = \frac{1}{T+2}.$$

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Для стационарного ARMA(2,2) процесса с непрерывным временем, со спектральной плотностью $f_2(\lambda)$, заданной по (1.3) имеем

$$\delta(f_2;T) = \frac{4\ (T^3+12T^2+48T+60)}{(T+4)(T^3+12T^2+48T+48)}. \qquad (3.10)$$

Доказательство. В силу (3.5) и теоремы 2 для спектральной плотности $f_2(\lambda)$, определённой по формуле (1.3), и для любого $r > 0$ имеем

$$a_2(r) := a(f_2;r) = \Gamma_r(f_2;0,r) = \frac{2(r+6)(r^2+6r+12)}{(r+4)(r^3+12r^2+48r+48)}. \qquad (3.11)$$

Следовательно, в силу леммы 1 и (3.11), получаем

$$\delta(f_2;T) = \int_T^\infty |a_2(r)|^2\, dr = \int_T^\infty \left[\frac{2(r+6)(r^2+6r+12)}{(r+4)(r^3+12r^2+48r+48)}\right]^2 dr =$$

$$= \frac{4\ (T^3+12T^2+48T+60)}{(T+4)(T^3+12T^2+48T+48)}.$$

Предложение 2 доказано.

Явное выражение для $\delta(f;T)$ также можно получить для общих стационарных ARMA(m,n) процессов с непрерывным временем, со спектральной плотностью (3.7), обращающейся в нуль в точке 0.

Из (3.8) и (3.10) следует, что

$$\delta(f_i;T) \sim 1/T, \qquad i = 1,2, \quad \text{при} \quad T \to \infty. \qquad (3.12)$$

Последнее соотношение для $\delta(f_1;T)$ впервые было установлено в [3].

Можно доказать, что (3.12) имеет место в случае, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ обращается в ноль по крайней мере в одной точке.

Abstract. The paper considers Wiener-Hopf truncated operators with rational symbols that possess zeros. Explicit expressions for the corresponding resolvents are derived. The results are applied to obtain explicit expressions for prediction error in the cases of the first and the second order continuous time ARMA processes with spectral densities vanishing at zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, "Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах", Укр. Мат. Жур., том. 16, № 4, стр. 445 – 462, 1964.
2. Н. Бабаян, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Записки Науч. Семин. ЛОМИ, том 130, стр. 11 – 24, 1983.
3. H. Dym and H. P. McKean, "Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem", Academic Press, New York, 1976.
4. М. С. Гиновян, "Асимптотическое поведение ошибки прогноза для стационарных случайных последовательностей", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 1, стр. 14 – 33, 1999.
5. Б. Л. Голинский, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и её Примен., том 19, № 4, стр. 724 – 739, 1974.
6. У. Гренандер, Г. Сегё, Теплицевы Формы и их Приложения, Иностр. Лит., Москва, 1961.
7. И. А. Ибрагимов, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и её Примен., том 9, № 4, стр. 695 – 703, 1964.
8. И. А. Ибрагимов, В. Н. Солев, "Асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарной последовательности со спектральной плотностью специального вида", Теория Вероятн. и её Примен., том 13, № 4, стр. 746 – 750, 1968.
9. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские Случайные Процессы, Наука, Москва, 1970.
10. М. Г. Крейн, "Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности", ДАН СССР, том 105, № 4, стр. 637 – 640, 1955.
11. Н. Х. Месропян, "Об ошибке прогноза стационарных процессов с непрерывным временем, Межвуз. сб. науч. трудов, ЕГУ, вып. 1, стр. 204 – 212, 1982.
12. Н. Х. Месропян, "Асимптотика ошибки прогноза стационарного процесса с непрерывным временем", Уч. Записки ЕГУ, том 2, стр. 3 – 6, 1983.
13. Л. В. Микаелян, "Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера–Хопфа в некотором сингулярном случае", ДАН Арм. ССР, том 82, № 4, стр. 151 – 155, 1986.
14. M. B. Pristley, Spectral Analysis and Time Series, Academic Press, New York, 1981.
15. В. Н. Солев, "Аппроксимация гауссовских мер, порождённых стационарными процессами", Записки Науч. семин. ЛОМИ, том 79, стр. 44 – 66, 1978.
16. Ю. А. Розанов, Стационарные Случайные Процессы, Москва, Физмат, 1963.

Поступила 20 февраля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 2, 2003, 29–36

НОВЫЙ КЛАСС ДВОИЧНЫХ КОДОВ, ИСПРАВЛЯЮЩИХ ОШИБКИ

А. А. Григорьянц

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет
E-mail : ar_grig@freenet.am

Резюме. Новые линейные двоичные коды, исправляющие ошибки, получаются из двух семейств кодов с помощью суммы соответствующих тензорных произведений. Исследуются основные параметры нового кода : размерность и расстояние, в частности получены верхние и нижние границы расстояния. Приведены примеры оптимальных кодов на небольших длинах, полученные с помощью новой конструкции. Некоторые классические конструкции являются частными случаями новой конструкции. Поставлен ряд нерешённых задач.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья является вводной для цикла статей, посвящённых исследованию новой конструкции кодов, исправляющих ошибки, полученные из двух семейств с помощью операций тензорного произведения и суммы кодов. Исследуются параметры (размерность и расстояние) новых кодов и приводятся примеры хороших кодов на небольших длинах, полученные этим путем. Также поставлен ряд нерешённых проблем, которые будут рассмотрены в последующих статьях. Настоящая статья дает ответ на несколько вопросов, приведенных в [1], §18. Некоторые классические конструкции являются частными случаями нашей конструкции.

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под (n, k, d)-кодами понимаются линейные двоичные коды на длине n, размерности k и с минимальным расстоянием d, т.е. k-мерное подпространство арифметического линейного пространства F_2^n над полем $F_2 = \{0; 1\}$. Наряду с терминологией принятой в алгебраической теории кодирования (см. [1]), будем использовать стандартные понятия линейной и тензорной алгебры.

Пусть $\mathbf{C} = \{C_i\}_{i=1}^{s}$ и $\mathbf{D} = \{D_i\}_{i=1}^{s}$ – два семейства линейных двоичных кодов на длине n и n', соответственно. Код на длине nn' задаётся по формуле

$$\mathbf{C} \otimes \mathbf{D} = C_1 \otimes D_1 + \cdots + C_s \otimes D_s \tag{1}$$

являющейся суммой тензорных произведений соответствующих кодов из $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$. Коды вида (1) назовём **фрактальными кодами**. Основные параметры конструкции $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ являются объектом исследования настоящей статьи.

Пусть $S = \{1, ..., s\}$ – множество первых s натуральных чисел, а $\alpha = \{i_1, ..., i_r\}$ – произвольное подмножество S. Положим $|\alpha| = r$. Для произвольного семейства кодов $\mathbf{C} = \{C_i\}_{i=1}^s$ рассмотрим коды

$$C^\alpha = \sum_{i\in\alpha} C_i, \quad C_\alpha = \bigcap_{i\in\alpha} C_i. \tag{2}$$

Таким образом, C^α и C_α суть сумма и пересечение линейных подпространств соответствующих мультииндексу α. Также будем использовать обозначение $C_{12} = C_1 \cap C_2$ и т.п. Параметры кодов C^α и C_α будем обозначать через $(n^\alpha, k^\alpha, d^\alpha)$ и $(n_\alpha, k_\alpha, d_\alpha)$, соответственно. Через $(n'^\alpha, k'^\alpha, d'^\alpha)$ и $(n'_\alpha, k'_\alpha, d'_\alpha)$ обозначим параметры соответствующих кодов для семейства $\mathbf{D}$.

Семейство векторов $\mathbf{e} = \{e_i\} \subset \cup C_\alpha$ называется **базисом** семейства подпространств $\mathbf{C} = \{C_i\}_{i=1}^s$, если $C_\alpha \cap \mathbf{e}$ порождает C_α и $\mathbf{e}$ минимальное (по включению) множество с этим свойством. Легко видеть, что любое семейство подпространств обладает базисом. Однако, базис семейства необязательно линейно независимый. Семейство подпространств, обладающее линейно независимым базисом назовем **ацикличным**.

Обозначим через α_a максимальный по мощности, и следовательно, однозначно определённый мультииндекс, для которого $a \in C_{\alpha_a}$. Для произвольного семейства векторов $\mathbf{a} = \{a_i\}$ положим $\Psi(\mathbf{a}) = \{\alpha_{a_i} \;:\; a_i \in \mathbf{a}\}$. Пусть Ψ – произвольное подмножество мультииндексов. Выбирая по одному элементу из каждого мультииндекса в Ψ, получим некоторый мультииндекс. Множество всех таких мультииндексов обозначим через Ψ^*.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{e} = \{e_i\}$ и $\mathbf{g} = \{g_i\}$ – базисы двух ацикличных семейств подпространств $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$. Тогда размерность кода (1) вычисляется по формуле*

$$\kappa = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|+1} k_\alpha k'_\alpha. \tag{3}$$

Верхняя граница расстояния кода (1) есть

$$\delta \le \min_\alpha (d_\alpha d'^\alpha, d^\alpha d'_\alpha), \tag{4}$$

где минимум берется по всем α, для которых подпространства C_α и D_α ненулевые. Нижняя граница расстояния кода (1) есть

$$\delta \geq \max\left\{ \min_{\Psi_0 \subset \Psi(\mathbf{e})} \left[\left(\max_{\alpha \in \Psi_0} d'^{\alpha} \right) \left(\max_{\beta \in \Psi_0^*} d^{\beta} \right) \right], \min_{\Psi_0 \subset \Psi(\mathbf{g})} \left[\left(\max_{\alpha \in \Psi_0} d^{\alpha} \right) \left(\max_{\beta \in \Psi_0^*} d'^{\beta} \right) \right] \right\}, \tag{5}$$

где Ψ_0 – произвольное непустое подмножество в $\Psi(\mathbf{e})$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть L и M – два линейных пространства. Тогда для любого вектора $x \in L \otimes M$ существует единственное представление вида*

$$x = \sum_i e_i \otimes b_i, \tag{6}$$

где $\{e_i\}$ – базис в L, а b_i – некоторые векторы из M. В частности, $x = 0$ тогда и только тогда, когда $b_i = 0$ для всех i.

Доказательство. Пусть $\{g_j\}$ – базис в M. Тогда $\{e_i \otimes g_j\}$ формирует базис в $L \otimes M$, и любой $x \in L \otimes M$ единственным образом может быть представлен в виде

$$x = \sum_{i,j} a_{ij}(e_i \otimes g_j) = \sum_i e_i \otimes \sum_j a_{ij} g_j = \sum_i e_i \otimes b_i,$$

где $b_i = \sum_j a_{ij} g_j$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть L и M – два линейных пространства. Для любых подпространств L_1, ..., $L_s \subset L$ и M_1, ..., $M_s \subset M$, выполнено следующее равенство*

$$(L_1 \otimes M_1) \cap \cdots \cap (L_s \otimes M_s) = (L_1 \cap \cdots \cap L_s) \otimes (M_1 \cap \cdots \cap M_s). \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $s = 2$. Отметим, что если $L_{12} = 0$ или $M_{12} = 0$, то $H \equiv (L_1 \otimes M_1) \cap (L_2 \otimes M_2) = 0$. Действительно, пусть, например, $L_{12} = 0$. Тогда для любых базисов $\{e_i^1\}$ в L_1 и $\{e_i^2\}$ в L_2 и для любого вектора $x \in H$ имеем

$$x = \sum_i e_i^1 \otimes b_i = \sum_j e_j^2 \otimes b'_j.$$

Учитывая линейную независимость системы векторов $\{e_i^1, e_j^2\}$, в силу Леммы 1, получим $x = 0$.

Пусть L'_i (M'_i) – произвольное прямое дополнение L_{12} (M_{12}) до L_i (M_i), $i = 1, 2$. Используя дистрибутивность тензорного произведения подпространств относительно суммы, получим

$$H = ((L_{12} \oplus L'_1) \otimes (M_{12} \oplus M'_1)) \cap ((L_{12} \oplus L'_2) \otimes (M_{12} \oplus M'_2)) =$$
$$= L_{12} \otimes M_{12} \oplus (L_{12} \otimes M'_1 \oplus L'_1 \otimes M_1) \cap L_{12} \otimes M_{12} \oplus (L_{12} \otimes M'_2 \oplus L'_2 \otimes M_2).$$

Положим $A = L_{12} \otimes M_{12}$, $B = L_{12} \otimes M'_1 \oplus L'_1 \otimes M_1$, $C = L_{12} \otimes M'_2 \oplus L'_2 \otimes M_2$. Выберем базис $\{e_i^{12}\}$ ($\{g_{i'}^{12}\}$) в L_{12} (M_{12}) и дополним его векторами $\{e_j^1\}$ ($\{g_{j'}^1\}$) до базиса в L_1 (M_1) и векторами $\{e_m^2\}$ ($\{g_{m'}^2\}$) до базиса в L_2 (M_2). Заметим, что система векторов $\{e_p \otimes g_q\}$, где

$$e_p \in \{e_i^{12}\} \cup \{e_j^1\} \cup \{e_m^2\}, \quad g_q \in \{g_{i'}^{12}\} \cup \{g_{j'}^1\} \cup \{g_{m'}^2\}$$

является линейно независимой. Далее, каждое из подпространств A, B, C имеет нулевое пересечение с сумой двух остальных, как линейные оболочки попарно непересекающихся подсистем линейно независимой системы векторов. Откуда, в частности, следует $(A \oplus B) \cap (A \oplus C) = A$. Действительно, для любого $x \in (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$ имеем $x = a + b = a' + c$, где $a, a' \in A$, $b \in B$ и $c \in C$. Откуда $a - a' = c - b = 0$, т.е. $a = a'$, $c = b = 0$. Этим завершается доказательство леммы 2 для случая $s = 2$. Доказательство Леммы 2 завершается индукцией по s.

Лемма 3. *Для любого ацикличного семейства подпространств $L_1, ..., L_s \subset L$ линейного пространства верна формула*

$$dim(L_1 + \cdots + L_s) = \sum_{\alpha \in S} (-1)^{|\alpha|+1} dim\, L_\alpha.$$

Доказательство. При $s = 2$ утверждение Леммы 3 совпадает с классической теоремой о размерности суммы подпространств. Общий случай можно доказать индукцией по s с учетом того, что для ацикличного семейства

$$(L_1 + \cdots + L_{s-1}) \cap L_s = (L_1 \cap L_s) + \cdots + (L_{s-1} \cap L_s). \qquad (8)$$

Чтобы доказать формулу (8) отметим, что очевидное включение

$$(L_1 + \cdots + L_{s-1}) \cap L_s \supset (L_1 \cap L_s) + \cdots + (L_{s-1} \cap L_s)$$

выполняется и без предположения ацикличности. Для доказательства обратного включения, выберем базис семейства $\{L_i\}$ и рассмотрим разложение произвольного вектора y, принадлежащего подпространству в левой части (8). Все базисные векторы в этом разложении принадлежат L_s в силу линейной независимости. По той же причине каждый из этих векторов принадлежит хотя бы одному из подпространств $L_1, ..., L_{s-1}$. Следовательно, вектор y принадлежит подпространству в правой части (8). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для ацикличных семейств подпространств* $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{D}$, *семейство* $\{C_i \otimes D_i\}$ *также ациклично.*

Доказательство. Пусть $\{e_m\}$ – базис в $\mathbf{C}$ и $\{g_j\}$ – базис в $\mathbf{D}$. Поскольку $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ ацикличны, то векторы в семействе $\{e_m \otimes g_j\}$ линейно независимы. Выберем из этого семейства подсемейство, взяв для каждого $e_m \in C_{p_m}$ лишь те произведения $e_m \otimes g_j$, для которых $g_j \in D_{p_m}$. Легко видеть, что полученное подсемейство формирует базис семейства подпространств $\{C_i \otimes D_i\}$. Поскольку построенное семейство векторов линейно независимо, то доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 1. Применив Лемму 3 к (1) с учётом лемм 2 и 4, получим (3). Чтобы доказать (4), возьмём в коде (1) вектор веса $d_\alpha d'^\alpha$ (или $d'_\alpha d^\alpha$). Пусть $x \in C_\alpha$ – вектор минимального веса d_α, а $y \in D^\alpha$ – вектор минимального веса d'^α. Тогда $y = y_{i_1} + \dots + y_{i_t}$, где $t = |\alpha|$ и $y_{i_j} \in D_{i_j}$, так что вектор $x \otimes y = x \otimes y_{i_1} + \dots + x \otimes y_{i_t}$ принадлежит коду (1) и имеет вес $d_\alpha d'^\alpha$. Второй случай разбирается аналогично.

Докажем теперь (5). Для этого рассмотрим произвольный вектор $x = \sum e_i \otimes b_i$ кода $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ (см. лемму 1). Положим

$$\Psi_0 = \{\alpha : \ \alpha = \alpha_{e_i} \quad b_i \neq 0\}.$$

Рассмотрим стандартное матричное представление для вектора, принадлежащего тензорному произведению пространств, а именно, если $a = (a^1, ..., a^n)$ и $c = (c^1, ..., c^n)$ векторы из F^n и $F^{n'}$ соответственно, то координаты вектора $a \otimes c$ запишем в матрицу (a_{ij}), где $a_{ij} = a^i c^j$. Тогда любой вектор $y \in F^{nn'} = F^n \otimes F^{n'}$ можно представить матрицей, равной сумме матриц соответствующих разложимым тензорам, входящим в представление вектора y. Строки соответствующие ненулевым позициям вектора $b = \cup b_i$ в матричном представлении вектора x являются линейными комбинациями векторов e_i. С другой стороны, эти линейные комбинации принадлежат каждому из подпространств C^β, где $\beta \in \Psi_0^*$ и, следовательно, имеют вес не меньший, чем d^β для всех β (более того, этот вес не меньше чем расстояние кода $\bigcap\limits_{\beta \in \Psi_0^*} C^\beta$).

Вес вектора b не меньше чем d'^α для любого $\alpha \in \Psi_0$, поскольку вектор $b_i \in D^\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Psi_0$. Поскольку вес вектора x равен сумме весов ненулевых строк соответствующей матрицы, а вектор x можно представить в виде $x = \sum a_i \otimes g_i$. Поэтому, применяя предыдущие рассуждения для этого представления, завершаем доказательство неравенства (5) и теоремы 1.

§4. ПРИМЕРЫ

Примеры этого параграфа показывают, что класс фрактальных кодов содержит некоторые очень хорошие коды. Кроме того, ряд классических конструкций являются частными случаями конструкции (1). Интересно найти условия, при которых верхняя граница (4) достигается для конструкции (1).

Пример 1. Код Голея. Рассмотрим следующие пары кодов :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 суть (8,4,4)-коды, D_1 есть (3,1,3)-код, а D_2 — (3,2,2)-код. В этом случае $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ является (24,12,8)-кодом Голея с порождающей матрицей $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D} =$

$$\begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\
\cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

В данном примере верхняя граница (4) достигается. Вычислим также нижнюю границу (5). Имеем $\Psi(\mathbf{e}) = \{1, 2, 12\}$ и $\Psi(\mathbf{g}) = \{1, 2\}$. Для соответствующих возможных значений для Ψ_0 и Ψ_0^* и для соответствующих значений внутренних максимумов в (5), имеем таблицу

$\Psi_0 \subset \Psi(\mathbf{e})$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{12\}$	$\{1,12\}$	$\{2,12\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,12\}$
Ψ_0^*	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,12\}$	$\{2,12\}$	$\{12\}$	$\{12\}$
m_1	12	8	4	12	8	6	6

$\Psi_0 \subset \Psi(\mathbf{g})$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,12\}$
Ψ_0^*	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{12\}$
m_2	12	8	4,

где
$$m_1 = (\max_{\alpha\in\Psi_0} d'^{\alpha})(\max_{\beta\in\Psi_0^*} d^{\beta}), \quad m_2 = (\max_{\alpha\in\Psi_0} d^{\alpha})(\max_{\beta\in\Psi_0^*} d'^{\beta}).$$

Отсюда следует, что нижняя граница (5) в этом примере равна $\max(4,4) = 4$.

Пример 2. (21,12,5)-код. Выбросив в кодах C_1 и C_2 примера 1 последний столбец, получим (7,4,3)-коды, имеющие один вектор веса 7 в пересечении. Оставив без изменения коды D_1 и D_2, в качестве $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ мы получим (21,12,5)-код. В этом случае граница (4) равна 6 и не достигается. Тем не менее полученный код является оптимальным. Известен лишь БЧХ-код с такими параметрами. Нижняя граница расстояния в этом коде равна $\max(3,4) = 4$.

Пример 3. (21,8,9)-код. Выбросив в коде C_2 примера 1 предпоследний столбец и последнюю строку, а в коде C_1 предпоследний столбец и первую строку, мы получим пару непересекающихся (7,3,4)-кодов. Соответствующий $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ код имеет параметры (21,9,8). Граница (4) опять достигается, и мы по прежнему имеем оптимальный код. Код с такими же параметрами можно также получить из (23,12,7)-кода Голея выбрасыванием слов нечетного веса и укорочением. Нижняя граница расстояния (5) в этом случае равна $\max(4,6) = 6$.

Пример 4. (28,22,4)-код. Возьмем в качестве C_1 (7,3,4)-код C_2 из примера 3, в качестве C_2 (7,6,2)-код всех слов чётного веса, а в качестве C_3 (7,7,1)-код всех кодовых слов на длине 7. Далее, положим D_1 – (4,4,1)-код всех слов на длине 4, D_2 – (4,3,2)-код всех слов чётного веса, а D_3 – (4,1,4)-код. Тогда $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ является (28,22,4)-кодом. Граница (4) достигается, и поэтому этот код оптимален. Отметим, что код с такими же параметрами можно получить из (31,26,3)-кода Хемминга, выбрасыванием слов нечётного веса и укорочением. Для вычисления нижней границы (5) заметим, что в этом случае $\Psi(\mathbf{e}) = \{123, 23, 3\}$ и $\Psi(\mathbf{g}) = \{1, 12, 123\}$. Поскольку ситуация симметрична относительно $\mathbf{e}$ и $\mathbf{g}$, то достаточно рассмотреть только первый случай. Имеем следующую таблицу :

$\Psi_0 \subset \Psi(\mathbf{e})$	$\{123\}$	$\{23\}$	$\{3\}$	$\{123, 23\}$	$\{123, 3\}$	$\{23, 3\}$	$\{123, 23, 3\}$
Ψ_0^*	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$	$\{12,13,2,23,3\}$	$\{13,23,3\}$	$\{23,3\}$	$\{12,13,23,3\}$
m_1	4	4	4	4	4	4	4.

Отсюда следует, что нижняя граница равна 4 и совпадает с верхней границей.

Пример 5. Конструкция $|u|u+v|$. (см [1], §2.9). Возьмём в качестве C_1 и C_2 произвольные коды. В качестве D_1 возьмем (2,1,2)-код, а в качестве D_2 (2,1,1)-код (векторы (0,0) и (0,1)). В этом случае $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ является конструкцией $|u|u+v|$.

Верхняя граница расстояния достигается и равна $\min(2d_1, d_2)$, где d_1 и d_2 – расстояния кодов C_1 и C_2, соответственно. В этом случае нижняя и верхняя границы совпадают.

Пример 6. Конструкция $|a+x|b+x|a+b+x|$. (см. [1], §18.7.4). Опять коды C_1 и C_2 произвольны, а D_1 и D_2 однозначно определённые (3,1,3)-код и (3,2,2)-код, соответственно. Тогда $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ есть конструкция $|a+x|b+x|a+b+x|$. Верхняя граница расстояния в этом случае достигается не всегда (см. предыдущие примеры). Возможность получить код Голея с помощью конструкции $|a+x|b+x|a+b+x|$ впервые указал Турин [2] (см. также [3]). В этом случае нижняя граница зависит от конфигурации семейства $\{C_i\}$.

Таким образом, как видно из предыдущих примеров, коды Голея, Хамминга, Рида-Маллера, а также многие оптимальные коды на коротких составных длинах являются фрактальными кодами. В связи с этим интересна следующая задача (см. [4]) : Выяснить при каких условиях, код на составной длине является фрактальным или эквивалентен фрактальному коду.

В заключение хотелось бы выразить свою признательность академику Г. Г. Хачатряну, благодаря которому автор познакомился с основами и проблематикой алгебраической теории кодирования.

Abstract. New linear error-correcting binary codes are obtained from two families of codes by summation of the corresponding tensor products. The basic parameters of the new codes, such as dimension and distance are studied, in particular, lower and upper bounds for code distance are obtained. Examples of optimal codes of small lengths obtained by the new construction are considered. Some classical constructions turn to be special cases of the new construction. Some unsolved problems are posed.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. J. MacWilliams, N. J. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, Bell Labor. Murray Hill, NJ 07974 USA, 1977.
2. E. F. Assmus, H. F. Mattson, R. J. Turyn, "Research to develop the algebraic theory of codes", Report AFCRL-67-0365, Air Force Cambridge Res. Labs., Bedford, Mass, 1967.
3. R. T. Curtis, "A new combinatorial approach to M_{24}", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. vol. 79, pp. 25 – 41, 1976.
4. Angela I. Barbero, "An algorithm for characterizing linear bidimensional product codes", In : Arithmetic, Geometry and Coding Theory, pp. 9 – 21, de Gruyter, Berlin, 1996.

Поступила 7 ноября 2002

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 2, 2003, 37-62

ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

А. Н. Карапетянц, Д. Н. Карасев, В. А. Ногин

Ростовский государственный университет, Ростов, Россия

Резюме. В статье получены $L_p \longmapsto L_q$-оценки для операторов типа потенциала с ядрами, имеющими степенные особенности на любом конечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$ и в начале координат и осциллирующие на бесконечности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье изучаются $L_p \longmapsto L_q$-оценки для операторов типа потенциала

$$\left(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}\varphi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|)\varphi(x-y)\,dy \tag{1.1}$$

с ядрами вида

$$k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|) = \begin{cases} d(|y|)|y|^{\gamma-n}, & |y| \le \eta, \\ b_j(|y|)(r_j^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_j - 1}, & r_j - \delta \le |y| \le r_j + \delta, \quad j = 1, \ldots, s, \\ e^{i|y|}a(|y|)|y|^{\alpha-n}, & |y| \ge N, \end{cases}$$

где $\eta < r_1 - \delta$, $r_s + \delta < N$ и $r_j + \delta < r_{j+1} - \delta$, $j = 1, 2, \ldots, s-1$ в случае $s \ge 2$; $0 <$ Re α, Re $\gamma < n$; $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\frac{1-n}{2} < \beta_j < 1$, $\beta_j \ne 0, -1, \ldots$ (в случае, когда $\beta_j < 0$ для некоторых j, интеграл (1.1) понимается в смысле регуляризации). Функции $a(r)$, $b_j(r)$ и $d(r)$ называются **характеристиками**. Предположим, что характеристики $a(r)$ и $b_j(r)$ являются достаточно гладкими, а $d(r)$ ограничена и стабилизируется в нуле как гёльдеровская функция, т.е.

$$|d(r) - d(0)| \le Cr^\lambda, \quad r \to 0, \tag{1.1'}$$

для некоторого $\lambda > 0$. Кроме того, предполагаем, что $a(\infty) \ne 0$, $b_j(r_j) \ne 0$, и $d(0) \ne 0$, и что ядро $k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(r)$ ограничено вне множества

$$\{r : r \le \eta\} \cup \{r : r \ge N\} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^{s} [r_j - \delta, r_j + \delta] \right\}.$$

Рассматриваем также случай $\gamma = n$, предполагая, что ядро $k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|)$ ограничено в шаре $|y| \leq \eta$.

Построены выпуклые множества в $(1/p, 1/q)$–плоскости, для которых оператор (1.1) $L_p \longmapsto L_q$-ограничен и указаны области, в которых этот оператор неограничен. В некоторых случаях построена $\mathcal{L}$–характеристика оператора $K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}$, т.е. дано описание множества всех пар $(1/p, 1/q)$, для которых этот оператор $L_p \longmapsto L_q$-ограничен.

Также укажем на ряд интересных эффектов, иллюстрирующих насколько сильно осцилляция ядра и особенности на сферах и в начале координат могут влиять на картину ограниченности оператора (1.1). Интерес к $L_p \longmapsto L_q$–оценкам для оператора (1.1) вызван приложениями этих оценок к описанию образа $K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(L_p)$, как в эллиптическом так и в неэллиптическом случае (см. [6] для случая $s = 1$). В настоящее время имеется большое число работ, посвящённых исследованию операторов типа потенциала (см. книги [18], [20], обзорные статьи [14], [15], [17]), однако редко исследуются потенциалы с осциллирующими ядрами, имеющими особенности на различных многообразиях в $\mathbb{R}^n$. Кроме статьи [6], имеются только две работы [5], в которых $L_p \longmapsto L_q$–оценки были получены для оператора (1.1) для некоторых частных случаев (для $\gamma = \alpha \in (0, n)$ и некоторых других ограничениях). Скоро выйдет статья [9], в которой рассматривается оператор (1.1) в случае $s = 1$.

Работа организована следующим образом. В §2 приведены основные результаты (Теоремы 2.1 и 2.2), в §3 и §4 содержатся необходимые сведения и Теоремы 4.3, 4.4 и 4.5, представляющие самостоятельный интерес. Эти теоремы посвящены $L_p \longmapsto L_q$–оценкам для операторов с ядрами, имеющими такой же вид, что и ядро $k_{\alpha,\overline{\beta},\gamma}(|y|)$, если $|y| \geq N$ и $y \in \bigcup\limits_{j=1}^{s} \{y : r_j - \delta \leq |y| \leq r_j + \delta\}$, соответственно, и равными нулю вне указанных множеств. В §5 приведены доказательства Теорем 2.1 и 2.2. В §6 мы обсуждаем некоторые эффекты, порождённых осцилляцией ядер оператора (1.1) на бесконечности, а также особенностями этих ядер на сферах.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Помимо наложенных выше условий на характеристики $a(r)$, $b_j(r)$ и $d(r)$, требуем также следующее. Предположим, что функция $a^*(r) = a(1/r)$, $0 < r < N^{-1}$, $a^*(0) = \lim\limits_{r\to 0} a(1/r)$ непрерывно дифференцируема до порядка $[\ \mathrm{Re}\ \alpha] + 2$ в интервале $[0, N^{-1})$, $b_j(r) \in C^m(r_j - \delta, r_j + \delta)$, где $[\alpha]$ – целая часть α, $m = [n/2] + 1 - 2[\beta_j]$ при $\beta_j < 0$ и $m = [n/2] + 1$ при $0 < \beta_j < 1$.

Всюду в дальнейшем, символ $(A, B, \dots, K)$ обозначает открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках $A, B, \dots, K$; $[A, B, \dots, K]$ является его замыканием ;

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ – $\mathcal{L}$ - характеристика оператора $\mathcal{A}$. Обозначим

$$A = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad A' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 0\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n - \operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad B' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n-1)(n - \operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}\right), \quad C' = \left(\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}, \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$D = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha + 1}{n+1}, \frac{n - \operatorname{Re}\alpha}{n+1}\right), \quad E = (1,0), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad G' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad H' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right),$$

$$K = \left(\frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1}\right),$$

$$L = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\gamma}{n}\right), \quad L' = \left(\frac{\operatorname{Re}\gamma}{n}, 0\right), \quad O = (1,1), \quad O' = (0,0),$$

$$M = \left(\frac{n+\beta}{n+1}, \frac{1-\beta}{n+1}\right),$$

$$Q = \begin{cases} \left(1 + \frac{\beta}{n-1}, 1 + \frac{\beta}{n-1}\right) & \text{если } \beta \le 0, \\ (1, 1-\beta) & \text{если } \beta > 0, \end{cases}$$

$$Q' = \begin{cases} \left(-\frac{\beta}{n-1}, -\frac{\beta}{n-1}\right) & \text{если } \beta \le 0, \\ (\beta, 0) & \text{если } \beta > 0. \end{cases}$$

Для формулировки результатов по ограниченности оператора (1.1), рассмотрим следующие множества в $(1/p, 1/q)$ - плоскости (см. Рис. 1 и 2 для случаев $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ и $0 < \operatorname{Re}\alpha \le \frac{n-1}{2}$, соответственно) : $L_1(\alpha, n) =$

$$= \begin{cases} (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{n}{2} \le \operatorname{Re}\alpha < n, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\alpha = \frac{n-1}{2}, \ \operatorname{Im}\alpha \ne 0, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & \frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n-1}{2}, \\ [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \operatorname{Re}\alpha \le \frac{n(n-1)}{2(n+1)}, \end{cases}$$

если $n \geq 3$ или $n = 2$ и $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$;

$$L_1(\alpha, n) = \begin{cases} (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{1}{2} \leq \alpha < 2,\ \alpha \neq 1, \\ (A', B', B, A, E) \cup (B, B') \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = 1, \\ [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

если $n = 2$ и $\operatorname{Im}\alpha = 0$;

$$L_1^*(\alpha, n) = \begin{cases} L_1(\alpha, n) \cup [K', K], & (n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n/2, \\ L_1(\alpha, n) \cup (B', B), & n/2 \leq \alpha < n, \quad \alpha \neq (n+1)/2, \quad (n+3)/2, \ldots, \\ L_1(\alpha, n) & \text{otherwise}; \end{cases}$$

$$L_2(\beta, n) = \begin{cases} [M, Q', Q], & (1-n)/2 < \beta < 0, \\ [M, Q', O', O, Q] \setminus (\{Q'\} \cup \{Q\}), & 0 < \beta < 1, \end{cases}$$

$$L_3(\gamma, n) = [O, L, L', O'] \setminus (\{L'\} \cup \{L\}).$$

Замечание 1. Отметим, что множество $L_1^*(\alpha, n)$, которое является осциллирующей частью оператора (1.1), $L_p \longmapsto L_q$-ограничена, и больше чем аналогичное множество, построенное в [9]. Следовательно, все результаты этого параграфа в случае $s = 1$ сильнее соответствующих результатов, представленных в [9].

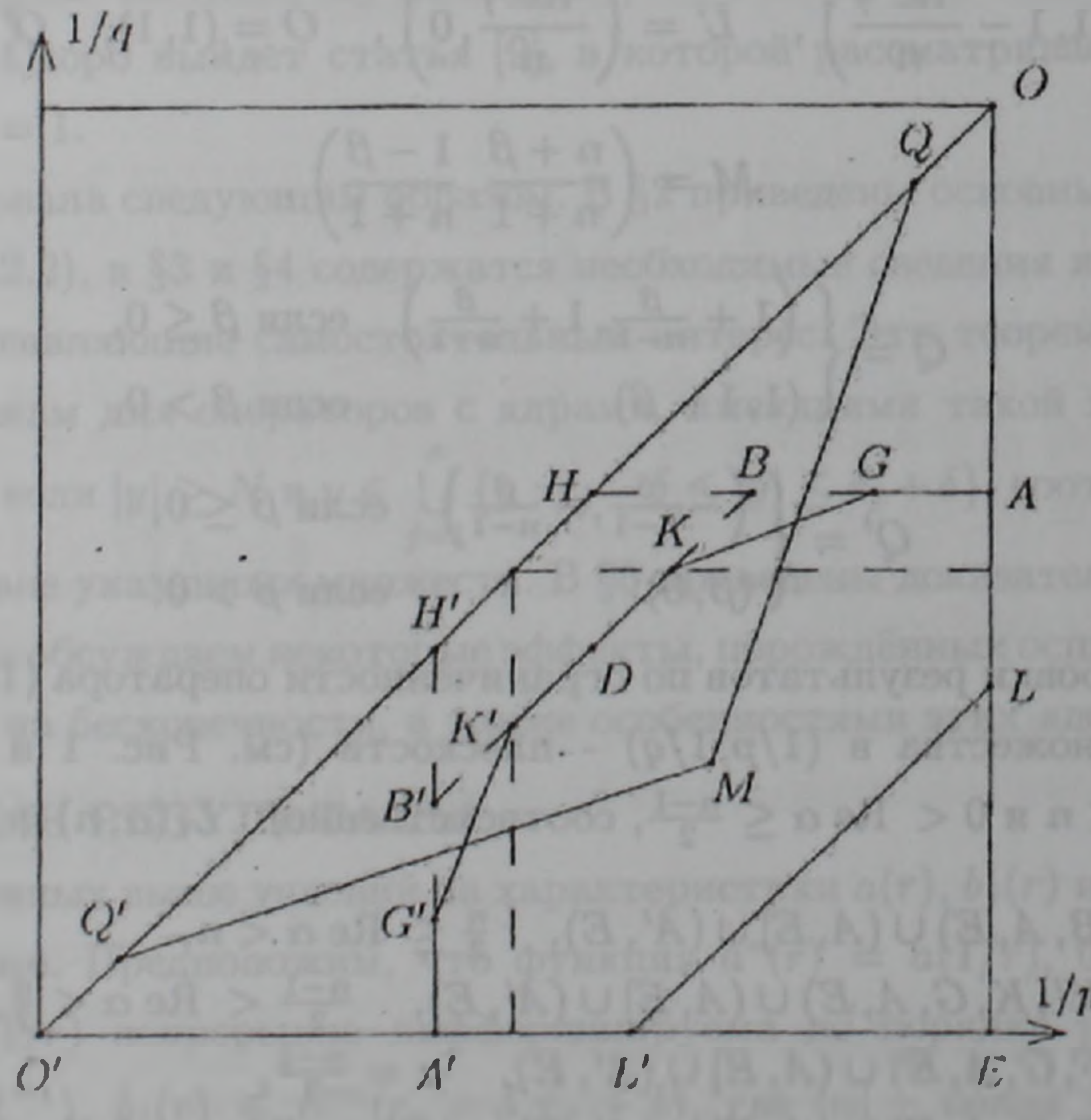

Рис. 1.

Основной результат статьи представлен в следующей теореме (см. также Рис. 1 и 2), которая содержит $L_p \longmapsto L_q$-оценки для оператора (1.1) (см. §5 по поводу трактовки этого оператора на функциях из L_p-пространств).

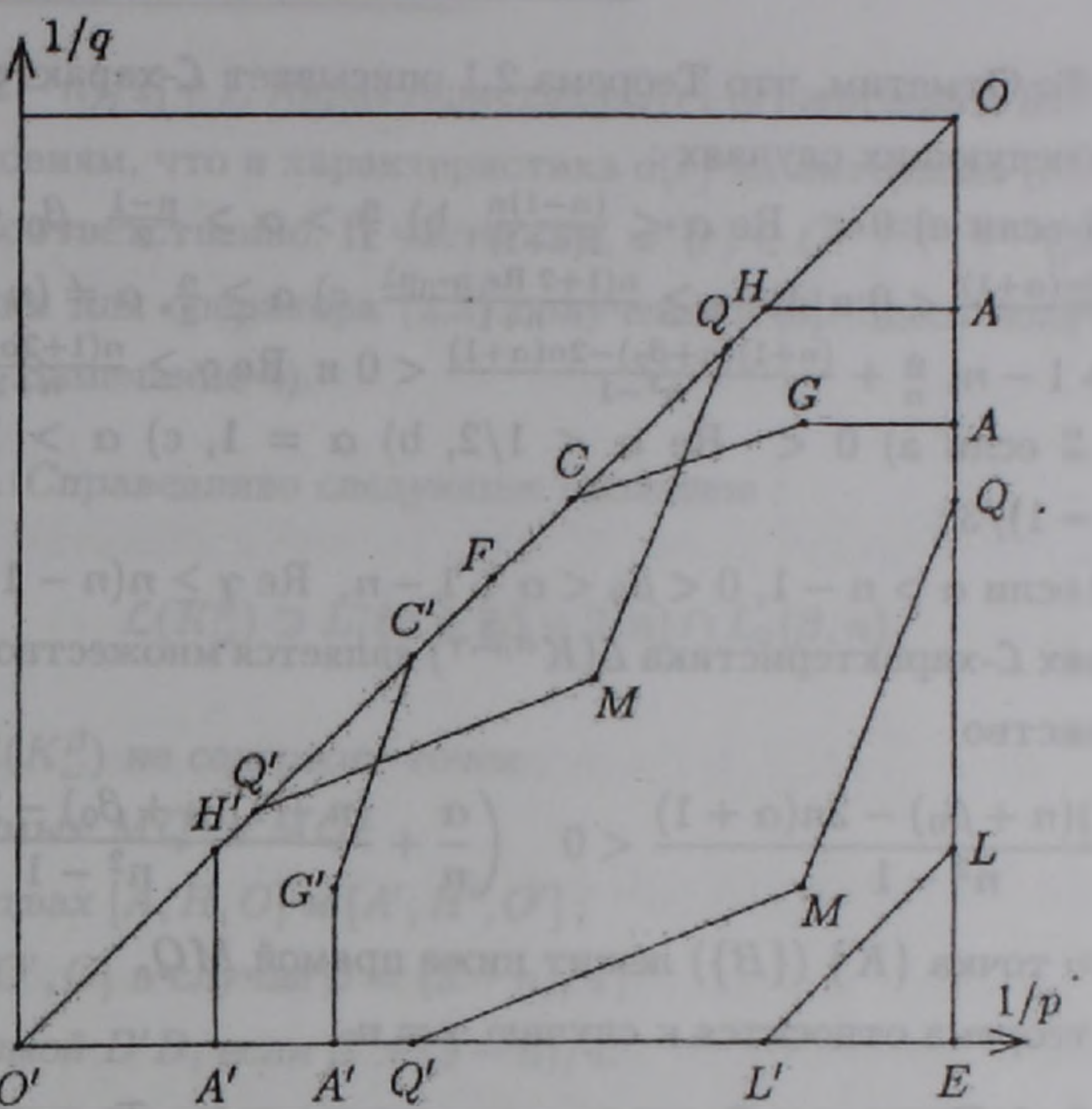

Рис. 2.

Теорема 2.1. *I. Если* $0 < \operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\gamma < n$, $(1-n)/2 < \beta_j < 1$, $\beta_j \neq 0, -1, \ldots, [(1-n)/2]+1$, *то*

$$\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}) \supset L_1^*(\alpha,n) \cap L_2(\beta_0,n) \cap L_3(\gamma,n), \tag{2.1}$$

где $\beta_0 = \min\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s\}$.

II. Если, кроме того, $b_j(r) \in C^{\max\{3,[n/2]+1\}}(r_j-\delta, r_j+\delta)$, *то множество* $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma})$ *не содержит точек*

1) вне множества $L_2(\beta_0,n)$, *если либо а)* $\beta_0 < 0$ *и пересечение в (2.1) не пусто, либо б)* $0 < \beta_0 < 1$ *;*

2) множества $[A,H,O] \cup [A',H',O']$ *в случаях а) и б) пункта 1) или в случае* $\alpha > \frac{n-1}{2}, \beta^*(\alpha) \leq \beta_0 < \min\{0, \alpha+1-n\}$, *и* $\operatorname{Re}\gamma \geq \alpha$, *где* $\beta^*(\alpha) = (n-1)(\alpha-n)/(n+1)$ *;*

3) сегмента $[O',O]$, *если* $\alpha = \frac{n-1}{2}$*;*

4) полуплоскости выше прямой $B'B$ *при* $\alpha > (n-1)/2$ *в случае а) пункта 1) или в случае* $0 < \beta_0 < 1$ *и* $\operatorname{Re}\gamma \geq \frac{n(n-1+2\beta_0)}{n+1}$, *или, если* $\beta^*(\alpha) \leq \beta_0 < \min\{0,\alpha+1-n\}$ *;*

5) множества $[L',L,E] \setminus (L',L)$ *в первых двух случаях пункта 4).*

Замечание 2. Неравенства $\alpha > (n-1)/2$, $\beta_0 < \min\{0,\alpha+1-n\}$ означают, что точка $\{D\}$ лежит ниже точки $\{M\}$, а условие $\operatorname{Re}\gamma \geq \alpha$ означает, что точка $\{A\}$ лежит выше или совпадает с точкой $\{L\}$ (см. 2)). Смысл неравенства $\beta^*(\alpha) \leq \beta_0$ поясним при доказательстве Теоремы 2.1. Неравенства $0 < \beta_0 < 1$ и $\operatorname{Re}\gamma \geq n(n-1+2\beta_0)/(n+1)$ означают, что точка $\{M\}$ лежит на прямой $L'L$ или выше неё.

Замечание 3. Отметим, что Теорема 2.1 описывает $\mathcal{L}$-характеристику $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma})$ в следующих случаях :

1) $n \geq 3$ если a) $0 <$ Re $\alpha < \frac{(n-1)n}{2(n+1)}$, b) $\frac{n}{2} > \alpha > \frac{n-1}{2}$, $\beta_0 \leq \alpha + 1 - n$, $\frac{1}{2} + \frac{(n+1)(n+\beta_0)-2n(\alpha+1)}{n^2-1} < 0$ и Re $\gamma \geq \frac{n(1+2 \text{ Re } \alpha - n)}{n+1}$, c) $\alpha \geq \frac{n}{2}$, $\alpha \neq (n+1)/2, (n+3)/2, \ldots, \beta_0 \leq \alpha+1-n$, $\frac{\alpha}{n} + \frac{(n+1)(n+\beta_0)-2n(\alpha+1)}{n^2-1} < 0$ и Re $\gamma \geq \frac{n(1+2\alpha-n)}{n+1}$;

2) $n = 2$ если a) $0 <$ Re $\alpha < 1/2$, b) $\alpha = 1$, c) $\alpha > 1$, $\beta_0 \geq \alpha - 1$ и Re $\gamma \geq 2(2\alpha-1)/3$;

3) $n \geq 2$ если $\alpha > n-1$, $0 < \beta_0 < \alpha + 1 - n$, Re $\gamma \geq n(n-1+2\beta_0)/(n+1)$.

В этих случаях $\mathcal{L}$-характеристика $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma})$ является множеством в правой части (2.1). Неравенство

$$\frac{1}{2} + \frac{(n+1)(n+\beta_0) - 2n(\alpha+1)}{n^2-1} < 0 \qquad \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{(n+1)(n+\beta_0) - 2n(\alpha+1)}{n^2-1} < 0\right)$$

означает, что точка $\{K\}$ ($\{B\}$) лежит ниже прямой MQ.

Следующая теорема относится к случаю $\gamma = n$.

Теорема 2.2. *I. Пусть α и β_j удовлетворяют условиям Теоремы 2.1. Тогда*

$$\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},n}) \supset L_1^*(\alpha, n) \cap L_2(\beta_0, n). \tag{2.2}$$

II. Множество $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},n})$ не содержит точек

1) дополнения $\mathcal{L}_2(\beta_0, n)$, если a) $\beta_0 < 0$ и пересечение в (2.2) не пусто, b) $0 < \beta_0 < 1$, c) $\beta^*(\alpha) \leq \beta_0 \leq \alpha + 1 - n$;

2) множества $[A, H, O]$, если выполнены условия пункта 1), или в случае $\alpha < \frac{n-1}{2}$, $\alpha - n \leq \beta_0 < \min\{0, \alpha+1-n\}$;

3) множества $[A', H', O]$ при тех же условиях, что и в 2) ;

4) сегмента $[O', O]$, если $\alpha = \frac{n-1}{2}$;

5) полуплоскости выше прямой $B'B$, если $\alpha > \frac{n-1}{2}$ и $\beta^*(\alpha) \leq \beta_0 < 1$.

Замечание 4. Отметим, что Теорема 2.2 описывает $\mathcal{L}$-характеристику $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},n})$ в следующих случаях :

1) $n \geq 2$, если a) $0 <$ Re $\alpha < \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$, b) $\frac{n}{2} > \alpha > \frac{n-1}{2}$, $\beta_0 \leq \alpha + 1 - n$, $\frac{1}{2} + \frac{(n+1)(n+\beta_0)-2n(\text{ Re } \alpha+1)}{n^2-1} < 0$, c) $\alpha \geq \frac{n}{2}$, $\alpha \neq \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots$, $\beta_0 \leq \alpha + 1 - n$, $\frac{\alpha}{n} + \frac{(n+1)(n+\beta_0)-2n(\text{ Re } \alpha+1)}{n^2-1} < 0$;

2) $n = 2$, если $0 <$ Re $\alpha < 1/2$ или $\alpha = 1$, или $\alpha > 1$, $\beta_0 \geq \alpha - 1$;

3) $n \geq 2$, если $\alpha > n-1$, $0 < \beta_0 < \alpha + 1 - n$.

Наконец, приведем важный частный случай Теоремы 2.2, именно, случай потенциалов типа Стрихарца по $\mathbb{R}^n$ вида

$$(K_\omega^\beta \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) e^{i|y|} (1 - |y|^2 + i0)^{\beta-1} \varphi(x-y)\, dy, \qquad \frac{2-n}{2} < \beta < 1, \tag{2.3}$$

$\beta \neq 0, -1, \ldots, [(2-n)/2]+1$. Характеристика $\omega(r)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет тем же условиям, что и характеристика $a(r)$ на интервале $(N, \infty]$ и $b_j(r)$ на $(r_j - \delta, r_j + \delta)$, соответственно. В частности, $\omega^*(r) \in C^{[n+2\beta-2]+2}([0, N^{-1}))$. Некоторые оценки для оператора (2.3) получены в [9]. Здесь получаем строгие результаты (см. Замечание 4).

Теорема 2.3. *I. Справедливо следующее вложение :*

$$\mathcal{L}(K_\omega^\beta) \supset L_1^*(n+2\beta-2, n) \cap L_2(\beta, n).$$

II. Множество $\mathcal{L}(K_\omega^\beta)$ не содержит точек

1) ниже прямых MQ' и MQ ;

2) в множествах $[A, H, O]$ и $[A', H', O']$;

3) отрезка $[O', O]$ в случае $\beta = (3-n)/4$;

4) выше прямой $B'B$, если $\beta > (3-n)/4$.

Замечание 5. Отметим, что $\mathcal{L}$-характеристика $\mathcal{L}(K_\omega^\beta)$ описана в Теореме 2.3 в следующих случаях : (случай 4) не описывается Замечанием 2.1 из [9])

1) $n = 2$, $\beta = 1/2$,

2) $n = 2$, $0 < \beta < 1/4$,

3) $n \geq 3$, $(2-n)/2 < \beta < \frac{-n^2+n+4}{n(n+1)}$,

4) $n \geq 3$, $\beta \geq \frac{4-n}{4}$, $\beta \neq \frac{4-n+1}{2}, \frac{4-n+2}{2}, \ldots$.

§3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сначала приведем некоторые обозначения. S^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$,

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x)\, dx,$$

$\mathcal{S}$ – класс Шварца быстро убывающих гладких функций, $\mathcal{R}_0$ – винеровское кольцо. Следуя [3], обозначим через L_p^q пространство всех распределений $k \in \mathcal{S}'$ таких, что $\|k * f\|_q \leq C\|f\|_p$, где $f \in \mathcal{S}$, постоянная $C > 0$ не зависит от f. Двойственное пространство Фурье $F(L_p^q)$ обозначим через M_p^q.

3.1. Равномерное асимптотическое разложение функции Бесселя $J_\nu(z)$. Пусть

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| > \eta, \ |\arg z| < \theta\},$$

где $\eta > 0$ и $\theta \in (0, \pi/2)$. Представляя $J_\nu(z)$ в виде линейной комбинации функций Ханкеля $H_{\pm\nu}^{(1)}(z)$ и $H_{\pm\nu}^{(2)}(z)$ (мы берём $+\nu$, если $\nu > -1/2$ и $-\nu$ в противном случае) и применяя результаты из [22], стр. 220, получаем равенство

$$J_\nu(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi z}}\left[e^{-iz}\left(\sum_{j=0}^{m} C_{j,-}^{(\nu)} z^{-j} + R_{m,-}^{(\nu)}(z)\right) + e^{iz}\left(\sum_{j=0}^{m} C_{j,+}^{(\nu)} z^{-j} + R_{m,+}^{(\nu)}(z)\right)\right], \tag{3.1}$$

где $C_{0,\pm}^{(\nu)} = \frac{1}{2} e^{\mp(i\pi/4)(2\nu+1)}$

Замечание 6. Остаточные члены $R_{m,\pm}^{(\nu)}(z)$ являются аналитическими функциями в Ω и $R_{m,\pm}^{(\nu)}(z) = O(|z|^{-m-1})$ при $|z| \to \infty$. Кроме того,

$$\frac{d^k}{dz^k} R_{m,\pm}^{(\nu)}(z) = O(|z|^{-m-1-k}), \quad |z| \to \infty$$

в любом замкнутом секторе $\Omega_0 \subset \Omega$ (см. [16], стр. 21).

3.2. $L_p \longmapsto L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала, ядра которых имеют особенности на единичной сфере. Рассмотрим оператор

$$\left(M_b^\beta \varphi\right)(x) = \int\limits_{1-\delta<|y|<1+\delta} \theta(|y|) b(|y|)(1-|y|^2+i0)^{\beta-1} \varphi(x-y)\, dy, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \tag{3.2}$$

$(1-n)/2 < \beta < 1$, $\beta \neq 0, -1, \ldots, [(1-n)/2]+1$, где характеристика $b(r)$ – достаточно гладкая функция и $\theta(r) \in C^\infty(0,\infty)$ такова, что $0 \le \theta(r) \le 1$, $\theta(r) = 1$, если $r \in [1-\delta/2, 1+\delta/2]$ и $\theta(r) = 0$, если $r \notin (1-\delta, 1+\delta)$, $\delta < 1$. В случае $\beta < 0$, интеграл $\left(M_b^\beta \varphi\right)(x)$ понимается в смысле аналитического продолжения в область

$$\Omega = \{\beta : \ (1-n)/2 < \operatorname{Re}\beta < 1, \quad \beta \neq 0, -1, \ldots, [(1-n)/2]+1\}, \tag{3.3}$$

и может быть записан в виде

$$(M_b^\beta \varphi)(x) = \frac{2^{[\frac{1-n}{2}]-1}}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta-[\frac{1-n}{2}])} \int_{1-\delta}^{1+\delta} (1-\rho^2+i0)^{\beta-[\frac{1-n}{2}]} (sign(1-\rho))^{-[\frac{1-n}{2}]+1} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\right)^{-[\frac{1-n}{2}]+1} \left(\rho^{n-1} b(\rho)\theta(\rho) \int_{S^{n-1}} \varphi(x-\rho\sigma)\, d\sigma\right) d\rho. \tag{3.4}$$

Следующая теорема, содержит $L_p \longmapsto L_q$-оценки для оператора (3.2).

Теорема 3.1. *([9], [12]) 1) Пусть $b(r) \in C^m(1-\delta, 1+\delta)$, где $m = [n/2]+1-2[\beta]$, если $(1-n)/2 < \beta < 0$, $\beta \neq -1, \ldots, [(1-n)/2]+1$, и $m = [n/2]+1$ в случае $0 < \beta < 1$. Тогда*

$$\mathcal{L}\left(M_b^\beta\right) \supset L_2(\beta, n). \tag{3.5}$$

2) Если дополнительно, $b(r) \in C^{\max\{3,[n/2]+1\}}(1-\delta, 1+\delta)$ *в случае* $0 < \beta < 1$ *и* $b(1) \neq 0$, *то*

$$\mathcal{L}\left(M_b^\beta\right) = L_2(\beta, n). \tag{3.6}$$

Замечание 7. В случае $\beta < 0$, вложение (3.5) означает, что оператор M_b^β продолжим на все пространство L_p до ограниченного линейного оператора из L_p в L_q, если $(1/p, 1/q) \in L_2(\beta, n)$.

Приведем основные этапы доказательства. Оно основано на равенстве

$$\left(M_b^\beta \varphi\right)(x) = \left(N_b^\beta \varphi\right)(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad \frac{1-n}{2} < \beta < 1, \quad \beta \neq 0, -1, \ldots, \tag{3.7}$$

где N_b^β – соответствующий мультипликативный оператор с символом

$$n_{\beta,b}(|\xi|) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{1-\delta}^{1+\delta} (1-\rho^2+i0)^{\beta-1} \rho^{n-1} b(\rho)\theta(\rho) \frac{J_{(n-2)/2}(\rho|\xi|)}{(\rho|\xi|)^{(n-2)/2}}\, d\rho, \tag{3.8}$$

то есть

$$\left(N_b^\beta \varphi\right)(x) = \left(F^{-1} n_{\beta,b}(|\xi|) F\varphi\right)(x), \quad \varphi \in \mathcal{S} \tag{3.9}$$

(здесь мультипликатор $n_{\beta,b}(|\xi|)$ выписан для $0 < \beta < 1$; в случае $\beta < 0$, интеграл в (3.8) понимается в смысле регуляризации). В силу (3.7), задача сводится к $L_p \longmapsto L_q$-оцениванию для оператора N_b^β.

При выполнении условий пункта 1), в [9], [12] показано, что $n_{\beta,b} \in M_p^q$, если $(1/p, 1/q) \in L_2(\beta, n)$, что означает справедливость (3.5). Если $b(r)$ удовлетворяет дополнительным условиям пункта 2), то (см. [9], [12]) мультипликатор $n_{\beta,b}(|\xi|)$ можно представить в виде

$$n_{\beta,b}(|\xi|) = \mu_\beta(|\xi|) + \nu_\beta(|\xi|), \tag{3.10}$$

где

$$\mu_\beta(|\xi|) = B_\beta b(1) v(|\xi|^2) \frac{e^{i|\xi|}}{|\xi|^{(n-1)/2+\beta}}, \tag{3.11}$$

$$B_\beta = (2\pi)^{n/2} 2^{\beta-1} e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\frac{n-1}{2}+\beta\right)} \Gamma(\beta)\left(1 - e^{2i\pi\beta}\right),$$

функция $v(r) \in C^\infty(0,\infty)$ такова, что $0 \le v(r) \le 1$, $v(r) = 0$, если $r \le 1$ и $v(r) = 1$ в случае $r \ge 2$;

$$\nu_\beta \in M_p^q \quad \text{если} \quad (1/p, 1/q) \in L_2(\beta+1, n). \tag{3.12}$$

Учитывая соотношение

$$\mu_\beta \in M_p^q \iff (1/p, 1/q) \in L_2(\beta, n) \tag{3.13}$$

вытекающее из Теоремы 4.1 из [11], из (3.10), (3.12) и (3.13) получаем (3.6).

3.3. Об $\mathcal{L}$-характеристике одного оператора с конечным ядром, имеющим особенность в начале координат. Рассмотрим оператор с $d(r)$, описанным в §§1 и 2 :

$$(L_d^\gamma \varphi)(x) = \int_{|y|<\eta} |y|^{\gamma-n} d(|y|)\varphi(x-y)\,dy, \quad 0< \operatorname{Re}\gamma < n.$$

Теорема 3.2. *[5], [9] Если* $0< \operatorname{Re}\gamma<n$, *то*

$$\mathcal{L}(L_d^\gamma) = \mathcal{L}_3(\gamma, n).$$

§4. $L_p \longmapsto L_q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

Получение $L_p \longmapsto L_q$-оценок для оператора

$$\left(S_a^\alpha \varphi\right)(x) = \int_{|t|\geq N} \frac{a(|t|)e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt, \quad 0< \operatorname{Re}\alpha<n \tag{4.1}$$

начнем с модельного случая $a(r) \equiv 1$; соответствующий оператор обозначим через S^α. Будем писать

$$\left(S^\alpha \varphi\right)(x) = \left(K^\alpha \varphi\right)(x) + (M\varphi)(x), \tag{4.2}$$

где

$$(M\varphi)(x) = \int_{|t|\geq N} (1-\chi(|t|))\frac{e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt,$$

$$\left(K^\alpha \varphi\right)(x) = \int_{|t|\geq N} \chi(|t|)\frac{e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\,dt, \quad 0< \operatorname{Re}\alpha<n,$$

функция $\chi(r) \in C^\infty(0,\infty)$ такова, что $0 \leq \chi(r) \leq 1$, $\chi(r) = 0$, если $r \leq N$, $\chi(r) = 1$, если $r \geq 2N$. Учитывая, что

$$\mathcal{L}(M) = [O', O, E], \tag{4.3}$$

задача сводится к получению $L_p \longmapsto L_q$-оценок для оператора K^α.

4.1. О символе оператора K^α. Здесь изучаем преобразование Фурье ядра $k_\alpha(|y|) = \chi(|y|)|y|^{\alpha-n}e^{i|y|}$, где $\frac{n-1}{2} <$ Re $\alpha<n$, $\alpha \neq \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2}$ для нечетных n и $\alpha \neq \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, n-1$ для четных n. Имеем

$$\widehat{k_\alpha}(|\xi|) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|),$$

где

$$\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(|y|) \frac{e^{i|y|-\varepsilon|y|}}{|y|^{n-\alpha}} e^{i(\xi\cdot y)}\, dy. \tag{4.4}$$

Переходя к полярным координатам и применяя формулу Бохнера (см. (2.6) из [18]), имеем

$$\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\xi|^{(n-2)/2}} \int_0^\infty \chi(\rho) e^{i\rho-\varepsilon\rho} \rho^{\alpha-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho|\xi|)\, d\rho. \tag{4.5}$$

Допустим $\omega(r) \in C^\infty(0,\infty)$ такова, что $0 \le \omega(r) \le 1$, $\omega(r) = 0$, если $r \ge \eta$ и $\omega(r) = 1$, если $r \le \eta/2 < 1/2$. Представим $\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|)$ в виде

$$\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) = \omega(|\xi|)\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) + (1-\omega(|\xi|))(1-\chi(|\xi|))\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) + \chi(|\xi|)\widehat{k_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) \equiv$$

$$\equiv \widehat{k^0_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) + \widehat{k^1_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) + \widehat{k^\infty_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|), \tag{4.6}$$

выпишем представления для предельных функций

$$\widehat{k^0_\alpha}(|\xi|) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{k^0_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|), \quad \widehat{k^\infty_\alpha}(|\xi|) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{k^\infty_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|),$$

полученные в [4], [6].

Лемма 4.1. *Функция $\widehat{k^0_\alpha}(|\xi|)$ допускает представление*

$$\widehat{k^0_\alpha}(|\xi|) = d_0\omega(|\xi|) \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt}{(-i(1+|\xi|t))^M} \int_N^\infty e^{i\rho(1+|\xi|t)} \left(\frac{d}{d\rho}\right)^M \left(\frac{\chi(\rho)}{\rho^{1-\alpha}}\right) d\rho, \tag{4.7}$$

где $M = [\,Re\,\alpha] + [n/2] + 2$.

Лемма 4.2. *Имеет место следующее представление*

$$\widehat{k^\infty_\alpha}(|\xi|) = \mu^\alpha_+(|\xi|) + \mu^\alpha_-(|\xi|), \tag{4.8}$$

где

$$\mu^\alpha_\pm(r) = \chi(r) r^{\frac{1-n}{2}} \left[d_1^\pm (-i(1\pm r))^{-M-1} \int_N^\infty e^{i\rho(1\pm r)} \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{M+1} \left(\frac{\chi(\rho)}{\rho^{\frac{n+1}{2}-\alpha}}\right) d\rho + \right.$$

$$\left. + d_2^\pm(-i(1\pm r))^{-M} \int_N^\infty e^{i\rho(1\pm r)} \left(\frac{d}{d\rho}\right)^M \left(\frac{\chi(\rho) R_{0,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho r)}{\rho^{\frac{n+1}{2}-\alpha}}\right) d\rho \right],$$

$R_{0,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(z)$ – *остаток из (3.1).*

Рассмотрим функцию $\widehat{k^1_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|)$. Применяя формулу (3.1) с $m = [\frac{n}{2}] + 1$ к функции Бесселя в (4.5), получим

$$\widehat{k^1_{\alpha,\varepsilon}}(|\xi|) = (1-\omega(|\xi|))(1-\chi(|\xi|))(2\pi)^{n/2}\left[\sum_{j=0}^{m}\Big(C^{(\frac{n-2}{2})}_{j,+}h^+_{j,\varepsilon}(|\xi|)+\right.$$

$$\left.+C^{(\frac{n-2}{2})}_{j,-}h^-_{j,\varepsilon}(|\xi|)\Big)+R^\varepsilon_{m,+}(|\xi|)+R^\varepsilon_{m,-}(|\xi|)\right], \tag{4.9}$$

где

$$h^\pm_{j,\varepsilon}(|\xi|) = |\xi|^{j-\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty \chi(\rho)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}-j}e^{i\rho(1\pm|\xi|)-\varepsilon\rho}\,d\rho, \tag{4.10}$$

$$R^\varepsilon_{m,\pm}(|\xi|) = |\xi|^{\frac{1-n}{2}}\int_0^\infty \chi(\rho)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}e^{i\rho(1\pm|\xi|)-\rho\varepsilon}R^{(\frac{n-2}{2})}_{m,\pm}(\rho|\xi|)\,d\rho. \tag{4.11}$$

Ясно, что $h^\pm_{0,\varepsilon}(|\xi|) =$

$$= |\xi|^{\frac{1-n}{2}}\left(\int_0^\infty \rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}e^{i\rho(1\pm|\xi|)-\varepsilon\rho)}d\rho+\int_0^\infty(\chi(\rho)-1)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}e^{i\rho(1\pm|\xi|)-\varepsilon\rho)}d\rho\right),$$

отсюда при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$h^\pm_0(|\xi|) = \lim_{\varepsilon\to 0}h^\pm_{0,\varepsilon}(|\xi|) = |\xi|^{\frac{1-n}{2}}\Big(A^\pm_{\alpha-\frac{n+1}{2}}(1\pm|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}+$$

$$+\int_0^\infty(\chi(\rho)-1)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}e^{i\rho(1\pm|\xi|)}\,d\rho\Big), \tag{4.12}$$

где

$$A^\pm_\lambda = (2\pi)^{-(n+1)/2}e^{-i\pi(n-\lambda)/2}\Gamma((n+1)/2-\lambda).$$

Рассмотрим $h^\pm_{j,\varepsilon}(|\xi|)$, $j \geq 1$. Интегрируя по частям j раз, получим

$$h^\pm_{j,\varepsilon}(|\xi|) = \frac{|\xi|^{-j+\frac{1-n}{2}}}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)(\alpha-\frac{n-3}{2}-j)\ldots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\times$$

$$\times\int_0^\infty \rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^j\left(\chi(\rho)e^{-\rho(\varepsilon-i(1\pm|\xi|))}\right)d\rho =$$

$$= \frac{|\xi|^{-j+\frac{1-n}{2}}}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)(\alpha-\frac{n-3}{2}-j)\ldots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\times$$

$$\times\left(\int_0^\infty \rho^{\alpha-\frac{n-1}{2}}\chi(\rho)\left(\frac{d}{d\rho}\right)^j\left(e^{-\rho(\varepsilon-i(1\pm|\xi|))}\right)d\rho+\int_0^\infty \rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}U^\pm_{j,\varepsilon}(\rho,|\xi|)d\rho\right) =$$

$$= \frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}(i(1\pm|\xi|)-\varepsilon)^j}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\ldots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty e^{-\rho(\varepsilon-i(1\pm|\xi|))}\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}d\rho+$$

$$+\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}(i(1\pm|\xi|)-\varepsilon)^j}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty(\chi(\rho)-1)e^{-\rho(\varepsilon-i(1\pm|\xi|))}\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho+$$

$$+\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty U^{\pm}_{j,\varepsilon}(\rho,|\xi|)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho, \qquad (4.13)$$

где

$$U^{\pm}_{j,\varepsilon}(\rho,|\xi|)=e^{-\rho(\varepsilon-i(1\pm|\xi|))}(C_1\chi'(\rho)(i(1\pm|\xi|)-\varepsilon)^{j-1}+\ldots+C_j\chi^{(j)}(\rho)).$$

Переходя в (4.13) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\widehat{k^1_\alpha}(|\xi|)=(1-\omega(|\xi|))(1-\chi(|\xi|))(2\pi)^{n/2}(1-|\xi|^2+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}f_\alpha(|\xi|)+$$

$$+g_\alpha(|\xi|)+r^+_\alpha(|\xi|)+r^-_\alpha(|\xi|), \qquad (4.14)$$

где

$$f_\alpha(|\xi|)=|\xi|^{\frac{1-n}{2}}A^-_{\alpha-\frac{n+1}{2}}+A^-_{\alpha-\frac{n+1}{2}}\sum_{j=1}^{[n/2]+1}\frac{|\xi|^{j-\frac{n-1}{2}}(i(1-|\xi|))^j}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n-1}{2}-1)},$$

$$g_\alpha(|\xi|)=(1-\omega(|\xi|))(1-\chi(|\xi|))\Big[|\xi|^{(1-n)/2}A^+_{\alpha-\frac{n+1}{2}}(1+|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}+$$

$$+|\xi|^{\frac{1-n}{2}}\int_0^\infty(\chi(\rho)-1)e^{i\rho(1+|\xi|)}\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho+$$

$$+A^+_{\alpha-\frac{n+1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]+1}\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}(i(1+|\xi|))^j}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}+|\xi|^{\frac{1-n}{2}}\right)(1+|\xi|+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}+$$

$$+\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]+1}\left(\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}(i(1+|\xi|))^j}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty(\chi(\rho)-1)e^{i\rho(1+|\xi|)}\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho+\right.$$

$$+\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}(i(1-|\xi|))^j}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty(\chi(\rho)-1)e^{i\rho(1-|\xi|)}\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho+$$

$$+\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty\widetilde{\chi}^+_j(\rho|\xi|)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho+$$

$$\left.+\frac{|\xi|^{-j-\frac{n-1}{2}}}{(\alpha-\frac{n-1}{2}-j)\dots(\alpha-\frac{n+1}{2})}\int_0^\infty\widetilde{\chi}^-_j(\rho|\xi|)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}\,d\rho\right)\Big],\quad \alpha\neq\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2}\ldots;$$

$$r^{\pm}_\alpha(|\xi|)=\frac{(1-\omega(|\xi|))(1-\chi(|\xi|))}{|\xi|^{(n-1)2}}\int_0^\infty\chi(\rho)\rho^{\alpha-\frac{n+1}{2}}e^{i\rho(1\pm|\xi|)}R^{(\frac{n-2}{2})}_{[\frac{n}{2}]+1,\pm}(\rho|\xi|)\,d\rho.$$

Таким образом, функция $\widehat{k^1_\alpha}(|\xi|)$ допускает представление (4.14).

4.2. Переход к символу оператора K^α (в смысле L_2). Обозначим $\widehat{k_\alpha}(|\xi|) = \widehat{k_\alpha^0}(|\xi|) + \widehat{k_\alpha^1}(|\xi|) + \widehat{k_\alpha^\infty}(|\xi|)$ и установим следующую лемму.

Лемма 4.3. *Пусть* $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}$, $\varphi \in \mathcal{S}$. *Тогда*

$$\widehat{K^\alpha\varphi}(\xi) = \widehat{k_\alpha}(|\xi|)\widehat{\varphi}(\xi), \tag{4.15}$$

где преобразование Фурье понимается в смысле L_2.

Доказательство. При $k_\alpha(|t|) \in L_2$ для $\operatorname{Re}\alpha < n/2$, это утверждение очевидно.

4.3. $L_p \longmapsto L_q$-оценки для оператора Бохнера-Рисса и связанного оператора. Приведем некоторые результаты ограниченности для хорошо известного оператора Бохнера-Рисса

$$(B^{\gamma/2}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-n/2+\gamma/2} J_{n/2-\gamma/2}(|y|)\varphi(x-y)\, dy, \tag{4.16}$$

и оператора $G^{\gamma/2}$, определённого формулой

$$(G^{\gamma/2}\varphi)(x) = (A^\gamma\varphi)(x) - e^{-\frac{\gamma}{2}i\pi}\frac{\Gamma(1-\frac{\gamma}{2})}{2^{\gamma/2}(2\pi)^{n/2}}(B^{\gamma/2}\varphi)(x), \quad \gamma \neq 2, 4, \dots. \tag{4.17}$$

Здесь A^γ – акустический потенциал,

$$(A^\gamma\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_\gamma(|y|)\varphi(x-y)\, dy,$$

$$h_\gamma(|y|) = \zeta_{n,\gamma}|y|^{\frac{\gamma-n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-\gamma}{2}}(|y|), \quad \zeta_{n,\gamma} = 2^{(\gamma-n)/2}\pi^{1-n/2}\frac{i}{\Gamma(\gamma/2)},$$

$H^{(1)}_\nu(z)$ – функция Ханкеля первого рода.
Соответствующие результаты содержатся в Теоремах 4.1 и 4.2. Их подробные доказательства будут опубликованы в других работах. Здесь приведем лишь основные идеи этих доказательств.
Положим $\alpha = \frac{\gamma+n-1}{2}$ в формулах для координат точек $\{K'\}$, $\{K\}$, $\{B'\}$, и $\{B\}$.

Теорема 4.1. *Справедливы следующие вложения :*

$$[K', K] \subset \mathcal{L}(B^{\gamma/2}), \quad 0 < \operatorname{Re}\gamma < 1, \tag{4.18}$$

$$(B', B) \subset \mathcal{L}(B^{\gamma/2}), \quad 1 \leq \gamma < n+1. \tag{4.19}$$

Доказательство. В случае действительных γ, Теорема 4.1 была доказана в [1]. Приведем схему доказательства вложения (4.18) для случая комплексных γ,

$0 <$ Re $\gamma < 1$. Чтобы доказать (4.18), нужно проверить, что $\{K\} \in \mathcal{L}(B^{\gamma/2})$, $0 <$ Re $\gamma < 1$. Аналогично, нужно доказать оценку

$$\|B^{\gamma/2}\varphi\|_2 \leq C\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in L_p, \quad 1/p = 1/2 + \text{ Re } \gamma/(n+1), \tag{4.20}$$

где постоянная C не зависит от φ.

Вместе с оператором (4.16) рассмотрим соответствующий мультипликативный оператор $\widetilde{B}^{\gamma/2}$ с символом $\frac{2^{\gamma/2}(2\pi)^{-n/2}}{\Gamma(1-\gamma/2)}(1-|\xi|^2)_+^{-\gamma/2}$. Для $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\|B^{\gamma/2}\varphi\|_2^2 = \langle \widetilde{B}^{\gamma/2}\varphi, \widetilde{B}^{\gamma/2}\varphi\rangle = \langle \widetilde{B}^{\text{ Re }\gamma}\varphi, \varphi\rangle \leq \|B^{\text{ Re }\gamma}\varphi\|_{p'}\|\varphi\|_p \leq C\|\varphi\|_p. \tag{4.21}$$

Последнее неравенство в (4.21) следует из ограниченности оператора $B^{\text{ Re }\gamma}$ из L_p в $L_{p'}$ (см. [2]). Так как оператор $B^{\gamma/2}$ является $L_p \longmapsto L_q$ ограниченным, $0 < 1/q < 1/2$, согласно Теореме 2.1 из [8], неравенство (4.20) также справедливо для $\varphi \in L_p$.

Аналогичный результат имеет место для оператора $G^{\gamma/2}$.

Теорема 4.2. *Справедливы следующие вложения*

$$[K', K] \subset \mathcal{L}(G^{\gamma/2}), \quad 0 < \text{ Re}\,\gamma < 1, \tag{4.22}$$

$$(B', B) \subset \mathcal{L}(G^{\gamma/2}), \quad 1 \leq \gamma < n+1, \quad \gamma \neq 2, 4, \ldots. \tag{4.23}$$

Учитывая, что соотношение $\{D\} \in \mathcal{L}(A^{\gamma})$, $0 < \gamma < n+1$ (см. [13]), доказательство вложения (4.22) аналогично доказательству (4.18). Вложение (4.23) выводится из (4.22) с помощью интерполяционной теоремы для аналитических семейств операторов (см. [21]).

4.4. $L_p \longmapsto L_q$-оценки для операторов S^α и S^α_a. Вначале получим $L_p \longmapsto L_q$-оценки для оператора S^α на интервале, проходящем в точке $\{D\}$ ортогонально прямой двойственности $1/p + 1/q = 1$.

Теорема 4.3. *Если* $(1/p, 1/q) \in [K', K]$ *при* $(n-1)/2 <$ Re $\alpha < n/2$ *и* $(1/p, 1/q) \in (B', B)$ *при* $n/2 \leq \alpha < n$, $\alpha \neq (n+1)/2, (n+3)/2, \ldots$, *то*

$$\|S^\alpha\varphi\|_q \leq C\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{4.24}$$

Доказательство. В силу (4.2) и (4.3), для оператора K^α достаточно доказать оценку вида (4.24). Будем основываться на следующем представлении для символа оператора K^α :

$$\widehat{k}_\alpha(r) = \theta^2(r)\widehat{k}_\alpha(r) + (1-\theta^2(r))\widehat{k}_\alpha(r) = (1-\theta^2(r))\widehat{k}_\alpha(r) +$$

$$+\theta^2(r)((1-r+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}f_\alpha(r)+g_\alpha(r)+r_\alpha^+(r)+r_\alpha^-(r))=$$
$$=\theta(r)(1-r^2+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\theta(r)(1+r)^{\frac{1-n}{2}+\alpha}f_\alpha(r)+\theta^2(r)g_\alpha(r)+\theta^2(r)(r_\alpha^+(r)+$$
$$+r_\alpha^-(r))+(1-\theta^2(r))\widehat{k}_\alpha(r)=(1-r^2+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}\theta(r)(1+r)^{\frac{1-n}{2}+\alpha}f_\alpha(r)+$$
$$+\theta(r)(\theta(r)-1)(1-r^2+i0)^{\frac{n-1}{2}-\alpha}(1+r)^{\frac{1-n}{2}+\alpha}f_\alpha(r)+$$
$$+\theta^2(r)g_\alpha(r)+\theta^2(r)(r_\alpha^+(r)+r_\alpha^-(r))+(1-\theta^2(r))\widehat{k}_\alpha(r),$$

где $\theta(r)$ – функция из (3.2), функции $f_\alpha(r)$, $g_\alpha(r)$, и $r_\alpha^\pm(r)$ определены после равенства (4.14). Учитывая это представление, в прообразах Фурье имеем

$$(K^\alpha\varphi)(x)=(e^{-(\alpha-\frac{n-1}{2})i\pi}(\Gamma((n+1)/2-\alpha)2^{(\alpha-\frac{n-1}{2})}(2\pi)^{-n/2}B^{\alpha-(n-1)/2}+$$
$$+G^{\alpha-(n-1)/2})V^\alpha\varphi)(x)+(P^\alpha\varphi)(x)+(R^\alpha\varphi)(x)+(T^\alpha\varphi)(x),\quad \varphi\in\mathcal{S}, \tag{4.25}$$

где $\frac{n-1}{2}<\ \mathrm{Re}\,\alpha<\frac{n}{2}$,

$$(V^\alpha\varphi)(x)=F^{-1}\big(\theta(|\xi|)(1+|\xi|)^{\alpha-\frac{n-1}{2}}f_\alpha(|\xi|)\widehat{\varphi}(\xi)\big)(x),$$
$$(P^\alpha\varphi)(x)=F^{-1}\big(\theta(|\xi|)(\theta(|\xi|)-1)(1-|\xi|+i0)^{\alpha-\frac{n-1}{2}}f_\alpha(|\xi|)\widehat{\varphi}(\xi)\big)(x),$$
$$(Q^\alpha\varphi)(x)=F^{-1}\big(\theta^2(|\xi|)g_\alpha(|\xi|)\widehat{\varphi}(\xi)\big)(x),$$
$$(R^\alpha\varphi)(x)=F^{-1}\big(\theta^2(|\xi|)(r_\alpha^-(|\xi|)+r_\alpha^+(|\xi|))\widehat{\varphi}(\xi)\big)(x),$$
$$(T^\alpha\varphi)(x)=F^{-1}\big((1-\theta^2(|\xi|))\widehat{k}_\alpha(|\xi|)\widehat{\varphi}(\xi)\big)(x).$$

Равенство (4.25) проверяется переходом к образам Фурье в смысле L_2 с учётом леммы 4.3. Из (4.25) и теорем 4.1 и 4.2 выводим (4.24) в случае $(n-1)/2<\ \mathrm{Re}\,\alpha<n/2$.

Далее отметим, что все функции в (4.25) непрерывны в $\mathbb{R}^n$, следовательно, равенство (4.25) справедливо для всех $x\in\mathbb{R}^n$. Зафиксируем $x\in\mathbb{R}^n$ и заметим, что обе части (4.25) аналитичны по α в области

$$\Lambda=\left\{\alpha:\quad \frac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n,\quad \alpha\neq\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\ldots,\frac{n+1}{2}+\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right\},$$

в силу леммы 1.31 из [18]. Следовательно, (4.25) справедливо для всех $\alpha\in\Lambda$.

Теперь мы можем доказать (4.24). Отметим, что символы операторов V^α, P^α и T^α принадлежат $\mathcal{S}$, тогда как символ R^α принадлежит $\mathcal{R}_0\cap L_1\ \subset\ M_p^q$, $1\le p\le q\le\infty$. (Соотношение $\theta(|\xi|)(r_\alpha^-(|\xi|)+r_\alpha^+(|\xi|))\in\mathcal{R}_0$ устанавливается с помощью теоремы 8.2 из [19] и замечания 6.) Следовательно, эти символы принадлежат q, $1\le p\le q\le\infty$. Применяя теоремы 4.1 и 4.2 к операторам $B^{\alpha-(n-1)/2}$ и $G^{\alpha-(n-1)/2}$, соответственно, мы получаем требуемый результат. Теорема 4.3 доказана.

Применяя теорему 4.3 и теорему 4.1 из [8], получим следующее утверждение.

Теорема 4.4. *I. Справедливо вложение $\mathcal{L}(S^\alpha) \supset L_1^*(\alpha, n)$.*

II. Множество $\mathcal{L}(S^\alpha)$ не имеет общих точек с

1) множествами $[A, H, O]$ и $[A', H', O']$,

2) полуплоскостью выше прямой $B'B$ в случае $(n-1)/2 < \alpha < n$,

3) отрезком $[O', O]$, если $\alpha = (n-1)/2$.

Возвращаясь к оператору (4.1), предположим, что характеристика $a(r)$ такова, что $a^*(r) \in C^{[\operatorname{Re}\alpha]+2}([0, N^{-1}))$. Следующая теорема содержит информацию об ограниченности оператора S_a^α.

Теорема 4.5. *Если $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, то $\mathcal{L}(S_a^\alpha) = \mathcal{L}(S^\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re}\alpha \neq 1, 2, \ldots$. Применяя формулу Тейлора к функции $a^*(r)$, $r \in [0, N^{-1})$, представим S_a^α в виде суммы операторов $S^{\alpha-k}$, $0 \le k \le [\operatorname{Re}\alpha]$, и некоторого оператора, $\mathcal{L}$-характеристикой которого является треугольник $[O', O, E]$. Теперь теорема 4.4 следует из теоремы 4.3 и вложения

$$L_1^*(\alpha, n) \subset L_1^*(\alpha - 1, n), \quad 1 < \operatorname{Re}\alpha < n.$$

Случай $\operatorname{Re}\alpha = \ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, n-1$ рассматривается аналогично. Теорема 4.5 доказана.

4.5. Об $\mathcal{L}$-характеристиках некоторых операторов типа потенциала с ядрами, имеющими особенности на конечном числе сфер в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим оператор вида

$$\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) = \sum_{j=1}^{s} \left(M_{b_j, r_j}^{\beta_j}\varphi\right)(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad s \ge 1, \tag{4.26}$$

где

$$\left(M_{b_j, r_j}^{\beta_j}\varphi\right)(x) = \int_{r_j-\delta<|y|<r_j+\delta} \theta_j(|y|) b_j(|y|)(r_j^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_j - 1}\varphi(x-y)\,dy, \tag{4.27}$$

$(1-n)/2 < \beta_j < 1$, $\beta_j \neq 0, -1, \ldots, [(1-n)/2] + 1$; функция $\theta_j(r) \in C^\infty(0, \infty)$ такова, что $0 \le \theta_j(r) \le 1$, $\theta_j(r) = 1$, если $r \in [r_j - \delta/2, r_j + \delta/2]$ и $\theta_j(r) = 0$, если $r \notin (r_j - \delta, r_j + \delta)$.

В случае $\beta_j < 0$, интеграл (4.27) понимается в смысле аналитического продолжении в область (3.3), которое может быть построено в виде :

$$\left(M_{b_j, r_j}^{\beta_j}\varphi\right)(x) = \frac{2^{[\frac{1-n}{2}]}}{\beta_j(\beta_j+1)\ldots(\beta_j - [\frac{1-n}{2}] - 1)} \int_{r_j-\delta}^{r_j+\delta} (r_j^2 - \rho^2 + i0)^{\beta_j - [\frac{1-n}{2}] - 1} \times$$

$$\times (sign(1-\rho))^{-[\frac{1-n}{2}]+1} \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\right)^{-[\frac{1-n}{2}]} \left(\rho^{n-1} b_j(\rho)\theta_j(\rho) \int_{S^{n-1}} \varphi(x - \rho\sigma)\,d\sigma\right) d\rho.$$

Следующая теорема содержит $L_p \longmapsto L_q$-оценки для оператора $M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}$.

Теорема 4.6. *Пусть* $\beta_0 = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ *и* $b_j(\rho) \in C^m(r_j - \delta, r_j + \delta)$, *где* $m = [n/2] + 1 - 2[\beta_j]$. *Тогда*

$$\mathcal{L}(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}) \supset L_2(\beta_0, n). \tag{4.28}$$

Если, кроме того, $b_j(\rho) \in C^{\max\{3,[n/2]+1\}}(r_j - \delta, r_j + \delta)$ *в случае* $0 < \beta_j < 1$ *и* $b_j(r_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$, *то*

$$\mathcal{L}(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}) = L_2(\beta_0, n). \tag{4.29}$$

Доказательство. С помощью простых преобразований получаем равенство

$$\left(M_{b_j,r_j}^{\beta_j}\varphi\right)(x) = r_j^{n+2(1-\beta_j)}\left(M_{\widetilde{b}_j,1}^{\beta_j}\varphi(r_jt)\right)\left(\frac{x}{r_j}\right), \tag{4.30}$$

где $M_{\widetilde{b}_j,1}^{\beta_j} \equiv M_{\widetilde{b}_j}^{\beta_j}$ – оператор вида (3.2) с характеристикой $\widetilde{b}_j(r) = b_j(r_jr)$. Из (4.30) получим

$$\mathcal{L}\left(M_{b_j,r_j}^{\beta_j}\right) = \mathcal{L}\left(M_{b_j,1}^{\widetilde{\beta}_j}\right). \tag{4.31}$$

Ввиду (3.5) отсюда следует (4.28).

Для доказательства точности вложения (4.28), докажем (4.29). Из (4.31) и (3.7) получаем

$$\left(M_{b_j,r_j}^{\beta_j}\varphi\right)(x) = r_j^{n+2(1-\beta_j)}\left(N_{\widetilde{b}_j,1}^{\beta_j}\varphi(r_jt)\right)\left(\frac{x}{r_j}\right), \tag{4.32}$$

где $N_{\widetilde{b}_j,1}^{\beta_j} \equiv N_{\widetilde{b}_j}^{\beta_j}$ – мультипликативный оператор вида (3.9) с символом $n_{\beta_j,\widetilde{b}_j}(|\xi|)$ (который может быть представлен в виде (3.8)). Используя (4.32) и (3.10), оператор $M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}$ представим в виде

$$\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) = \left(\mathcal{M}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) + \left(\mathcal{N}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x), \tag{4.33}$$

где

$$\left(\mathcal{M}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) = \sum_{j=1}^{s} r_j^{n+2(1-\beta_j)}F^{-1}\left(\mu_{\beta_j}(|\xi|)\widehat{\varphi(r_jt)}(\xi)\right)\left(\frac{x}{r_j}\right),$$

$$\left(\mathcal{N}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) = \sum_{j=1}^{s} r_j^{n+2(1-\beta_j)}F^{-1}\left(\nu_{\beta_j}(|\xi|)\widehat{\varphi(r_jt)}(\xi)\right)\left(\frac{x}{r_j}\right).$$

В силу (3.12) заключаем, что

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{N}^{\overline{\beta}}\right) \supset L_2(\beta_0 + 1, n).$$

Теперь, чтобы доказать (4.29), достаточно показать

$$\mu_{\overline{\beta}}(|\xi|) \equiv \sum_{j=1}^{s} \mu_{\beta_j}(r_j|\xi|) = \sum_{j=1}^{s} B_{\beta_j} b_j(r_j) \frac{v(|\xi|^2) e^{ir_j|\xi|}}{|\xi|^{(n-1)/2+\beta_j}} \notin M_p^q, \tag{4.34}$$

если $(1/p, 1/q) \in L_2(\beta_0+1, n) \setminus L_2(\beta_0, n)$ в случае $\beta_0 < 0$ и $(1/p, 1/q) \in [O', O, E] \setminus L_2(\beta_0, n)$ в случае $0 < \beta_0 < 1$.

Рассмотрим случай $\beta_0 < 0$. Выберем точку $(1/p, 1/q)$ такую, что

$$\frac{n}{p} - n - \beta_0 \le \frac{1}{q} < \frac{n}{p} - n - \beta_0 + 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1, \quad \frac{1}{p} \le 1 + \frac{\beta_0}{n+1}. \tag{4.35}$$

Неравенства (4.35) означают, что точка $(1/p, 1/q)$ принадлежит множеству

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in (L_2(\beta_0+1, n) \setminus L_2(\beta_0, n)) \cap \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) : \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1, \ \frac{1}{p} \le 1 + \frac{\beta_0}{n+1} \right\}. \tag{4.36}$$

Далее выберем $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{n}{p} - n - \beta_0 + 1$. Следуя [11], рассмотрим функцию $f_{\lambda_0}(x) = F^{-1}(v(|\xi|^2)|\xi|^{-\lambda_0})(x)$, где $\lambda_0 = 1 - \beta_0 - 1/q - \varepsilon$, обратное преобразование Фурье понимается в смысле $\mathcal{S}'$. Тогда по лемме 5.2 из [11], имеем $f_{\lambda_0}(x) \in L_p$. Рассмотрим функцию

$$f_{\lambda_0, \sigma}(x) = F^{-1}(v(|\xi|^2) e^{-\sigma|\xi|} |\xi|^{\lambda_0})(x) \in \mathcal{S}, \quad \sigma > 0.$$

Учитывая, что $\mu_{\overline{\beta}}(|\xi|) \in M_p^p$, по теореме 3.2 из [11] имеем

$$\left(\mathcal{M}^{\overline{\beta}} f_{\lambda_0}\right)(x) = \overset{(L_p)}{\lim_{\sigma \to 0}} \left(\mathcal{M}^{\overline{\beta}} f_{\lambda_0, \sigma}\right)(x). \tag{4.37}$$

Покажем, что предел в правой части (4.37) существует для всех $x \notin \Theta \equiv \bigcup_{j=1}^{s} \{x : |x| = r_j\}$ и совпадает с (4.37). Применяя формулу (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{M}^{\overline{\beta}} f_{\lambda_0, \sigma}\right)(x) = \frac{(2\pi)^n}{|\xi|^{(n-2)/2}} \sum_{j=1}^{s} B_{\beta_j} b_j(r_j) \Bigg(& C_{0,+}^{\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty v^2(\rho^2) \frac{e^{-\rho(\sigma - i(r_j + |x|))}}{\rho^{\beta_j + \lambda_0}} d\rho + \\ & + C_{0,-}^{\frac{n-2}{2}} \int_{0}^\infty v^2(\rho^2) \frac{e^{-\rho(\sigma - i(r_j - |x|))}}{\rho^{\beta_j + \lambda_0}} d\rho + \\ & + C_{1,+}^{\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty v^2(\rho^2) \frac{e^{-\rho(\sigma - i(r_j + |x|))}}{\rho^{\beta_j + \lambda_0}} R_{0,+}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|x|) d\rho + \\ & + C_{1,-}^{\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty v^2(\rho^2) \frac{e^{-\rho(\sigma - i(r_j - |x|))}}{\rho^{\beta_j + \lambda_0}} R_{0,-}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|x|) d\rho \Bigg). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Из леммы 2 работы [10], стр. 342, имеем

$$\lim_{\sigma\to 0}(\mathcal{M}^{\overline{\beta}} f_{\lambda_0,\sigma})(x) = \frac{(2\pi)^{-n}}{|\xi|^{(n-2)/2}} \sum_{j=1}^{s} \Bigg(B_{\beta_0} A_{-\lambda_0-\beta_0} \Big(C_{0,-}^{(\frac{n-2}{2})} (r_j - |x| + i0)^{\beta_0+\lambda_0-1} +$$

$$+ C_{0,+}^{(\frac{n-2}{2})} (r_j + |x| + i0)^{\beta_0+\lambda_0-1} + I_{\lambda_0,\beta_0}(|x|) +$$

$$+ C_{1,+}^{(\frac{n-2}{2})} \int_0^\infty v^2(\rho^2) e^{i\rho(r_j+|x|)} \frac{R_{0,+}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|x|)}{\rho^{\beta_0+\lambda_0}} d\rho +$$

$$+ C_{1,-}^{(\frac{n-2}{2})} \int_0^\infty v^2(\rho^2) e^{i\rho(r_j-|x|)} \frac{R_{0,-}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|x|)}{\rho^{\beta_0+\lambda_0}} d\rho \Big) b_j(r_j) \Bigg), \quad x \notin \Theta,$$

где

$$B_{\beta_0} A_{-\lambda_0-\beta_0} C_{0,-}^{(\frac{n-2}{2})} = \frac{\Gamma(\beta_0)\Gamma(1-\lambda_0-\beta_0)(1-e^{2i\pi\beta_0})}{2^{2-\beta_0-n}\pi^{-(n+3)/2}} e^{\frac{i\pi}{4}(n-3-\lambda_0-\beta_0)} \neq 0,$$

а функция $I_{\lambda_0,\beta_0}(r)$ является гладкой в $\mathbb{R}$.

Для определённости будем считать, что $\beta_j = \beta_0$, $1 \le j \le k$ $(\le s)$. Тогда имеем

$$\lim_{\sigma\to 0}(\mathcal{M}^{\overline{\beta}} f_{\lambda_0,\sigma})(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{\beta_0} A_{-\lambda_0-\beta_0} C_{0,-}^{(\frac{n-2}{2})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |x|^{\frac{n-2}{2}}} b_j(r_j)(r_j - |x| + i0)^{-1/q-\varepsilon} +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{s} \frac{B_{\beta_0} A_{-\lambda_0-\beta_0} C_{0,-}^{(\frac{n-2}{2})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |x|^{\frac{n-2}{2}}} b_j(r_j)(r_j - |x| + i0)^{\beta_j-\beta_0-1/q-\varepsilon} + g(|x|), \tag{4.39}$$

где $g(r)$ ограничена на любом отрезке $[0, A]$, $A > 0$. Из (4.39) видим, что $(\mathcal{M}^{\overline{\beta}} f_{\lambda_0})(x) \notin L_q$, следовательно $\mu_{\overline{\beta}}(|\xi|) \notin M_p^q$.

Таким образом, мы доказали, что точки множества (4.36) не принадлежат $\mathcal{L}\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\right)$. Применяя рассуждения выпуклости и двойственности, получаем, что $\mathcal{L}$-характеристика $\mathcal{L}\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\right)$ не содержит точек множества $L_2(\beta_0+1,n) \setminus L_2(\beta_0,n)$.

В случае $0 < \beta_0 < 1$, соотношение $(1/p, 1/q) \notin \mathcal{L}\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\right)$ для точек ниже прямых MQ' и MQ доказывается аналогично с использованием того же контрпримера с функцией f_{λ_0}. В этом случае, остаётся доказать, что $\{Q'\}, \{Q\} \notin \mathcal{L}\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\right)$.

Так как ядро оператора $M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}$ не принадлежит $L_1^{\frac{1}{1-\beta_0}}$, то применяя теорему 3.3 из [11], заключаем, что $\{Q\} \notin \mathcal{L}\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\right)$. Тогда, в силу двойственности, $\{Q'\} \notin \mathcal{L}\left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\right)$. Теорема 4.6 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сначала отметим, что оператор (1.1) определён на всём пространстве L_p. $1 \leq p < n/\operatorname{Re}\alpha$, если $0 < \beta_j < 1$, $j = 1, \ldots, s$. В случае $\beta_j < 0$ для некоторого j, мы трактуем этот оператор в рамках L_p-пространств следующим образом :

$$\left(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}\varphi\right)(x) = (L_d^{\gamma}\varphi)(x) + \left(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) + (S_a^{\alpha}\varphi)(x) + (A\varphi)(x), \qquad (5.1)$$

где операторы L_d^{γ}, $M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}$ и S_a^{α} рассмотрены в предыдущих параграфах, а A – оператор с конечным ограниченным ядром. Используя (4.33), имеем

$$\left(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}\varphi\right)(x) = (L_d^{\gamma}\varphi)(x) + \left(\mathcal{M}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) + \left(\mathcal{N}^{\overline{\beta}}\varphi\right)(x) + (S_a^{\alpha}\varphi)(x) + (A\varphi)(x). \quad (5.2)$$

5.1. Доказательство теоремы 2.1. Утверждение I следует из (5.1) в силу теорем 3.2, 4.5 и 4.6. Чтобы доказать II, 1) поступим как в доказательстве (4.30). В случае a), функции $(S_a^{\alpha} f_{\lambda_0})(x)$ и $(L_d^{\gamma} f_{\lambda_0})(x)$ принадлежат L_q, и (4.36) не содержится в $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma})$. Доказательство этого факта проводится непосредственно, на основании свойств функции f_{λ_0}, полученных в лемме 5.2 из [11].

В случае утверждения II, 2) сначала рассмотрим случай $0 < \beta_0 < 1$. Пусть $\chi_{\frac{1}{10}}(|y|)$ – характеристическая функция шара $|y| \leq 1/10$. Как было доказано в [7], $S_a^{\alpha}\chi_{\frac{1}{10}}(x) \notin L_q$, если $1 \leq q \leq n/(n - \operatorname{Re}\alpha)$. Так как операторы L_d^{γ}, $N_{\overline{b}}^{\beta}$, и A в правой части (5.1) имеют конечные суммируемые ядра, то функции $(L_d^{\gamma}\chi_{\frac{1}{10}})(x)$, $(M_{\overline{b}}^{\overline{\beta}}\chi_{\frac{1}{10}})(x)$, и $(A\chi_{\frac{1}{10}})(x)$ конечны и ограничены. Поэтому они принадлежат L_q, $1 \leq q \leq n/(n - \operatorname{Re}\alpha)$, откуда получаем $(K^{\alpha,\overline{\beta},\gamma}\chi_{\frac{1}{10}})(x) \notin L_q$ для указанных q.

Утверждение a), II, 1) следует из теорем 3.2, 4.4 и 4.5, с учётом соображений выпуклости и двойственности. При $\beta^*(\alpha) < \beta_0 < \alpha - n + 1$, утверждение II следует из теорем 3.2, 4.4 и 4.5 и того факта, что точка $\{D\}$ принадлежит множеству (4.36), если $\beta^*(\alpha) < \beta_0$. Тогда 3) следует из 2) по двойственности. Утверждение 4) очевидно.

Доказательство остальных результатов аналогично доказательству утверждения пункта 2).

5.2. Доказательство теорем 2.2 и 2.3. Утверждение I теоремы 2.2 следует из (5.1), в силу теорем 4.5, 4.6 и равенства $\mathcal{L}(L_d^n) = [O', O, E]$.

Доказательство утверждения II во многом повторяет доказательство соответствующего утверждения теоремы 2.1. Отметим лишь, что $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},n}) = \emptyset$ в случае $\beta^*(\alpha) < \beta_0 < \alpha - n + 1$.

Доказательство Теоремы 2.3 сводится к проверке, что ядро оператора (2.3) удовлетворяет предположениям теоремы 2.2.

§6. НЕСКОЛЬКО КОММЕНТАРИЙ

6.1. О влиянии осцилляции и особенностей ядра оператора (1.1) на его картину ограниченности. I. Прежде всего рассмотрим исходный оператор $K^{\alpha,\beta_1,n}$, ядро которого $k_{\alpha,\beta_1,n}(|y|)$ непрерывно на $\mathbb{R}^n \setminus \{y : |y| = r_1\}$ и таково, что

$$k_{\alpha,\beta_1}(|y|) = \begin{cases} (r_1^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1 - 1}, & |y| \to r_1, \\ e^{i|y|}|y|^{\alpha-n}, & |y| \to \infty, \end{cases}$$

где $\alpha > n/2$, $\alpha \neq (n+1)/2, (n+3)/2, \dots$; $\alpha - n + 1 < \beta_1 < 0$, $\beta_1 \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда в силу теорем 4.5 и 4.6, получаем $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n}) = L_1^*(\alpha, n) \cap L_2(\beta_1, n)$.

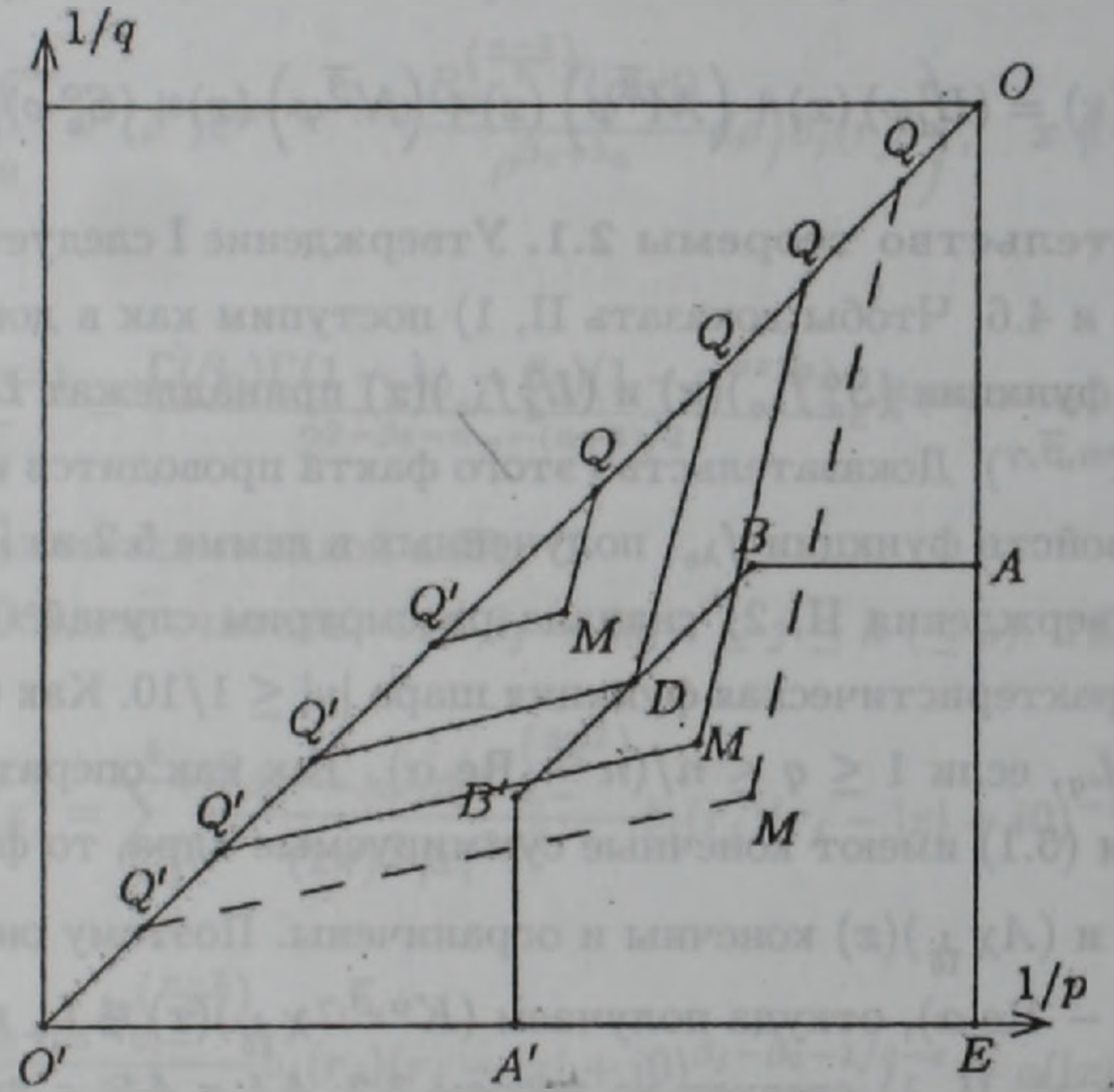

Рис. 3.

Далее рассмотрим оператор $K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n}$, $\beta_2 < \beta_1$, ядро которого получается из $k_{\alpha,\beta_1,n}(|y|)$ добавлением особенности порядка $\beta_2 - 1$ на сфере $|y| = r_2$, и сравним множества $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n})$ и $\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n})$.

1) В случае $\beta_2 > \alpha - n + 1$, из теоремы 2.2 имеем

$$\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n}) \subset \mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n}) \quad 0 < mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n}) < mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n}),$$

так как $\mathcal{L}$-характеристика $\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n})$ не содержит точек, лежащих вне множества $L_2(\beta_2, n)$ в силу утверждения II, пункт 1), теоремы 2.2. Более того, $mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n})$ убывает при убывании β_2, и стремится к нулю при $\beta_2 \to \alpha - n + 1$ (см. рисунок 3, пунктирные линии $Q'M$ соответствуют случаю оператора $K^{\alpha,\beta_1,n}$).

2) Если $\beta_2 = \alpha + 1 - n$, $\alpha \neq [n/2] + 1, [n/2] + 2 \dots, n - 1$, то справедливо равенство

$$\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n}) = \{D\} = \{M\}$$

3) Если $\beta^*(\alpha) \le \beta_2 < \alpha + 1 - n$, то $\mathcal{L}(K^{\alpha,(\beta_1,\beta_2),n}) = \emptyset$ (см. Рис. 3 для случая, когда точка $\{D\}$ лежит выше $\{M\}$).

II. Влияние особенности ядра в начале координат на картину ограниченности оператора (1.1) может быть таким же сильным как и влияние особенностей, "размазанным" по сферам. Чтобы продемонстрировать это, добавим особенность в начале координат порядка $\gamma - n$, $n\frac{1+2\alpha-n}{n+1} < \operatorname{Re}\gamma < n$, в ядро оператора $K^{\alpha,\beta_1,n}$. Тогда, в силу теоремы 2.1, получаем $\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,\gamma}) \subset \mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n})$ и $0 < mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,\gamma}) < mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n})$.

1) При $\operatorname{Re}\gamma \to n\frac{1+2\alpha-n}{n+1}$ получаем, что $mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,\gamma})$ убывает и стремится к нулю.

2) Если $\operatorname{Re}\gamma = n\frac{1+2\alpha-n}{n+1}$ (это означает, что $(B', B) \subset L'L$, см. Рис. 4), то

$$\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,\gamma}) = (B', B) \cap L_2(\beta_1, n).$$

Таким образом, $mes\,\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,\gamma}) = 0$.

3) Если $\operatorname{Re}\gamma < n\frac{1+2\alpha-n}{n+1}$ (это означает, что прямая $L'L$ лежит выше $B'B$, см. Рис. 4), то операторы $K^{\alpha,\beta_1,\gamma}$ и $K^{\alpha,\beta_1,n}$ не ограничены из L_p в L_q для одинаковых значений p и q. Более того, имеем

$$\mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,\gamma}) \cap \mathcal{L}(K^{\alpha,\beta_1,n}) = \emptyset.$$

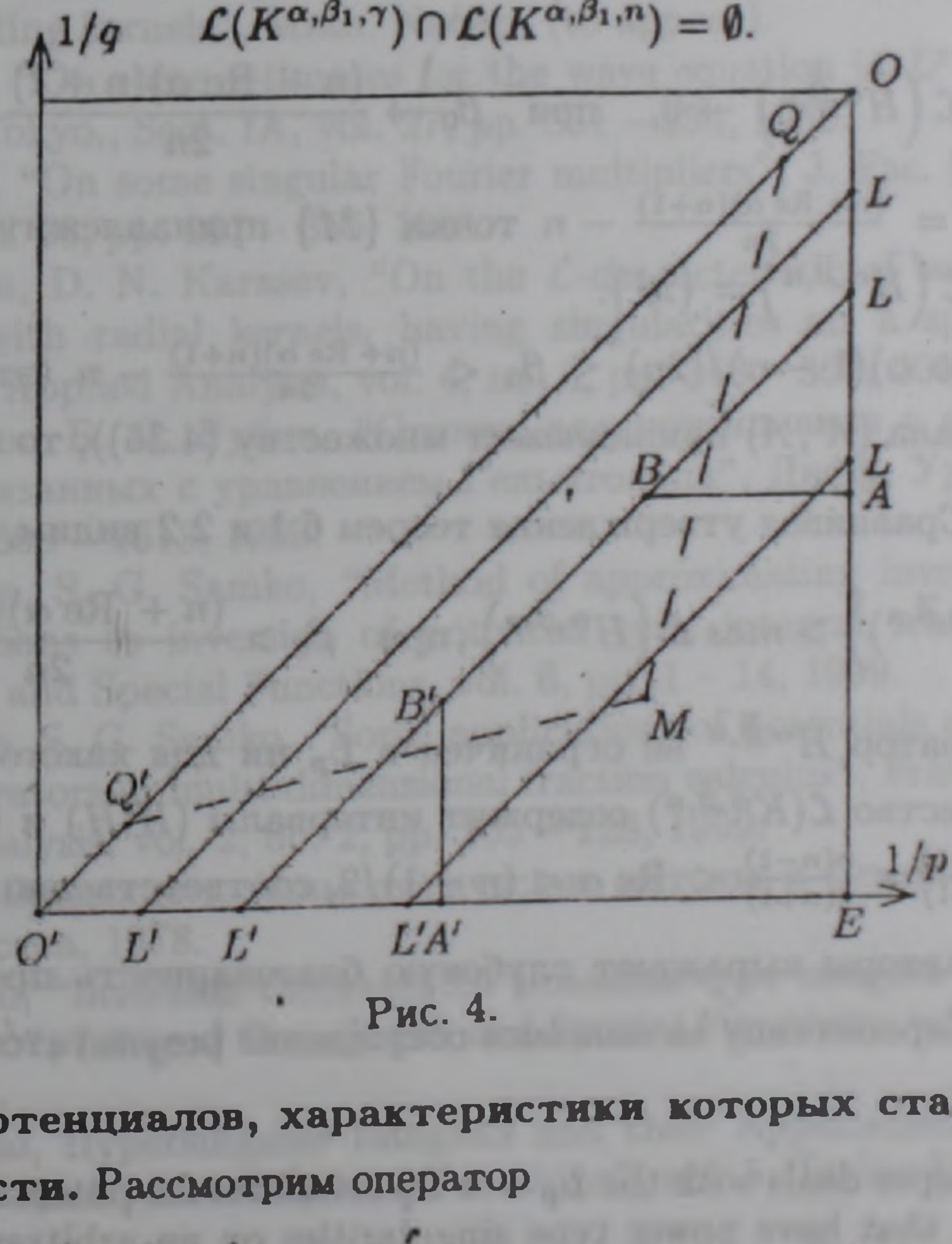

Рис. 4.

6.2. Случай потенциалов, характеристики которых стабилизируются на бесконечности. Рассмотрим оператор

$$\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\varphi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_{\alpha,\overline{\beta},n}(|y|)\varphi(x-y)\,dy,$$

где $\frac{1-n}{2} < \beta_j < 1$,

$$h_{\alpha,\overline{\beta},n}(|y|) = b_j(|y|)(r_j^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_j - 1}, \quad r_j - \delta \le |y| \le r_j + \delta, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$h_{\alpha,\overline{\beta},n}(|y|) = a(|y|)|y|^{\alpha - n}, \quad |y| \ge N, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n. \tag{6.1}$$

Ядро $h_{\alpha,\overline{\beta},n}(|y|)$ ограничено вне указанного множества. Предположим, что характеристики $b_j(r)$ такие же как в теоремах 2.1 и 2.2, и для некоторого $\sigma > 0$ и $a(\infty) \ne 0$ имеем

$$|a(r) - a(\infty)| \le Cr^{-\sigma}, \quad r \to \infty.$$

Обозначим $\beta_0 = \min\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$.

Теорема 6.1. *При $\beta_0 \ge (n - \operatorname{Re}\alpha)(1-n)/(2n)$, имеем*

$$\mathcal{L}\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\right) = L_2(\beta_0, n) \cap ([A', A, E] \setminus (\{A\} \cup \{A'\})). \tag{6.2}$$

Доказательство основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 2.1.

Замечание 8. 1. Отметим, что в случае $\beta_0 > \frac{(n+\operatorname{Re}\alpha)(n+1)}{2n} - n$, точка $\{M\}$ лежит ниже прямой $A'A$, и поэтому пересечение в правой части (6.1) непусто и $mes\mathcal{L}\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\right) > 0$. Отметим также, что

$$mes\mathcal{L}\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\right) \to 0, \quad \text{при} \quad \beta_0 \to \frac{(n+\operatorname{Re}\alpha)(n+1)}{2n} - n.$$

2. В случае $\beta_0 = \frac{(n+\operatorname{Re}\alpha)(n+1)}{2n} - n$ точка $\{M\}$ принадлежит прямой $A'A$, и поэтому имеем $\mathcal{L}\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\right) = \{M\}$.

3. Если $(n - \operatorname{Re}\alpha)(1-n)/(2n) \le \beta_0 < \frac{(n+\operatorname{Re}\alpha)(n+1)}{2n} - n$ (это означает, что середина интервала (A', A) принадлежит множеству (4.36)), то $\mathcal{L}\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\right) = \emptyset$.

Замечание 9. Сравнивая утверждения теорем 6.1 и 2.2 видим, что множество

$$mes\left(\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},n})\right) > mes\,\mathcal{L}\left(H^{\alpha,\overline{\beta},n}\right), \text{при} \quad \beta_0 > \frac{(n+\operatorname{Re}\alpha)(n+1)}{2n} - n.$$

Более того, оператор $H^{\alpha,\overline{\beta},n}$ не ограничен в L_p ни для какого p, $1 \le p \le \infty$, тогда как множество $\mathcal{L}(K^{\alpha,\overline{\beta},n})$ содержит интервалы $(H'H)$ и $(C'C)$ в случаях $0 < \operatorname{Re}\alpha \le \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $\frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < (n-1)/2$, соответственно.

В заключение, авторы выражают глубокую благодарность профессорам С. Г. Самко и Н. К. Карапетянцу за полезное обсуждение результатов работы.

Abstract. The paper deals with the $L_p \longmapsto L_q$ estimates for potential-type operators with the kernels, that have power type singularities on an arbitrary finite union of spheres in $\mathbb{R}^n$ and at the origin and that are oscillating at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-G. Bak, D. McMichael, D. Oberlin, "$L^p \longmapsto L^q$ estimates off the line of duality", J. Austral. Math. Soc., (Series A), vol. 58, pp. 154 – 166, 1995.
2. L. Börjeson, "Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index", Indiana University Mathematics Journal, vol. 35, no. 2, pp. 225 – 233, 1986.
3. L. Hörmander, "Estimates for translation invariant operators in L^p spaces", Acta Mathematica, vol. 104, pp. 93 – 140, 1960.
4. D. N. Karasev, V. A. Nogin, "Inversion of some potential-type operators with oscillating kernels in the elliptic and non-elliptic cases", Integral Transforms and Special Functions, vol. 13, pp. 529 – 545, 2002.
5. D. N. Karasev, "$L_p \longmapsto L_q$ - estimates for some potential-type operators with oscillating kernels", Fractional Calculus & Applied Analysis, vol. 5, no. 2, pp. 131 – 153, 2002.
6. D. N. Karasev, V. A. Nogin, "Description of the ranges of some potential-type operators with oscillating kernels in the non-elliptic case", Fractional Calculus & Applied Analysis, vol 5, no. 3, 316 – 349, 2002.
7. D. N. Karasev, V. A. Nogin, "Estimates for the acoustic potentials and their application", Proceedings of A. Razmadze Math. Inst., vol. 129, pp. 29 – 51, 2002.
8. D. N. Karasev, V. A. Nogin, "($L_p \longmapsto L_q$) - estimates for the Bochner-Riesz operator of complex order", Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, vol. 21, no. 4, pp. 915 – 929, 2002.
9. D. N. Karasev, V. A. Nogin, "On boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels", Math. Nachr., (to appear).
10. A. Miyachi, "On some estimates for the wave equation in L^p and H^p", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sect. IA, vol. 27, pp. 331 – 354, 1980.
11. A. Miyachi, "On some singular Fourier multipliers", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA., vol. 28, pp. 267 – 315, 1981.
12. V. A. Nogin, D. N. Karasev, "On the $\mathcal{L}$-characteristic of some potential-type operators with radial kernels, having singularities on a sphere", Fractional Calculus & Applied Analysis, vol. 4, no. 3, pp. 343 – 366, 2001.
13. В. А. Ногин, Б. С. Рубин, "Оценки для потенциалов с осциллирующими ядрами, связанных с уравнением Гельмгольца", Дифф. Уравнения, том 26, № 9, стр. 1608 – 1613, 1990.
14. V. A. Nogin, S. G. Samko, "Method of approximating inverse operators and its applications to inversion of potential type integral transforms", Integral Transforms and Special Functions, vol. 6, pp. 1 – 14, 1999.
15. V. A. Nogin, S. G. Samko, "Some applications of potentials and approximative inverse operators in multi-dimensional fraction calculus", Fractional Calculus & Applied Analysis, vol. 2, no. 2, pp. 205 – 228, 1999.
16. Ф. Олвер, Введение в Асимптотические методы и Специальные Функции, Наука, Москва, 1978.
17. S. G. Samko, "Inversion theorems for potential-type integral transforms in $\mathbb{R}^n$ and on S^{n-1}", Integral Transforms and Special Functions, vol. 1, no. 2, pp. 145 – 163, 1993.
18. S. G. Samko, Hypersingular Integrals and their Applications, Internat. Series "Analytical Methods and Special Functions", vol. 5, Taylor & Frances, London, 2002.

19. С. Г. Самко, Г. С. Костетская, "Абсолютная интегрируемость интегралов Фурье", Вестник РУДН (Мат.), том 1, стр. 138 – 168, 1994.
20. S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon & Breach. Sci. Publ., London – New-York, 1993.
21. E. M. Stein, "Interpolation of linear operators", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 83, pp. 482 – 492, 1956.
22. Г. Н. Ватсон, Теория Бесселевых Функций, Москва, Иностранная Лит., 1949.

Поступила 26 ноября 2002

Известия НАН Армении. Математика, **38**, № 2, 2003, 63-72

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГАЗА ЖИНИБРА В n-СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

С. Погосян, Г. Цессин

Институт Математики НАН Армении, Университет Биелефелда, Германия
E-mails : surpo@instmath.sci.am, zessin@mathematik.uni-bielefeld.de

Резюме. Для модели взаимодействующих броуновских петель в допустимой ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$, при условии, что задана энергия $\mathcal{U}$ рассматриваемой системы, для логарифма соответствующей статистической суммы в расширенной области $R \cdot \Lambda$, $R \geq 1$ найдено разложение в виде объёмного члена $p(\phi, z) \cdot |R \cdot \Lambda|$ и остаточного члена вида $0(R^{\nu-1})$ при $R \to +\infty$. Доказательство основано на методе кластерного разложения.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для системы взаимодействующих броуновских петель в ограниченной области $\Lambda_R \subset \mathbb{R}^\nu$, Λ_R = расширение $R \cdot \Lambda$, $R \geq 1$ допустимой области Λ в $\mathbb{R}^\nu$, рассматривается следующая версия знаменитой проблемы Каца [2]. При условии, что задана энергия $\mathcal{U}$ рассматриваемой системы, определяемая с помощью устойчивого потенциала ϕ с хорошими свойствами убывания и с активностью $z > 0$, соответствующий логарифм статистической суммы

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = \ln \int \exp(-\mathcal{U}(\mu))\, W_{z\rho_{\Lambda_R}}(d\mu), \tag{1}$$

при достаточно малых z и при $R \to +\infty$, разлагается в виде

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi, z) \cdot R^\nu \cdot |\Lambda| + O(R^{\nu-1}). \tag{2}$$

Здесь и ниже через $|\Lambda|$ означает объём области Λ.

Так-называемое давление $p(\phi, z)$ определяется с помощью потенциала ϕ и активности z, и задаётся явно в терминах функционального интеграла относительно меры $W_{z\rho_{\Lambda_R}}$, определяющей броуновские петли в Λ_R. Поскольку (2) может быть записано в виде

$$\frac{1}{R^\nu} \ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi, z) \cdot |\Lambda| + O(R^{-1}), \tag{3}$$

мы получаем, в частности, что потенциал однозначно определяет объем области Λ. Основной идеей доказательства является получение информации о геометрии области Λ из модели взаимодействующих броуновских петель, которую мы называем газом Жинибра.

Существование давления для этой модели было получено Жинибром в [1] с помощью уравнений Кирквуда-Зальцбурга. В случае прямоугольного Λ полное разложение, включая не только объёмный член $p(\phi, z)$, но и члены отвечающие за границу, а также углы прямоугольника, было получено в [6]. В случае классических систем в выпуклых, односвязных областях с кусочно гладкими границами, полное разложение было получено в [4].

Здесь мы интересуемся n-связными областями Λ с гладкими границами, и для таких областей не только доказываем существование давления, но даём его явное выражение в терминах функции Урселла. Также, мы оцениваем скорость сходимости в термодинамическом пределе. Доказательство основано на сильных кластерных оценках функции Урселла для газа Жинибра, которые были получены в [5], в комбинации с идеями работ [3] и [4].

§2. УСЛОВИЯ НА ПОТЕНЦИАЛ

Как и в [1], [5], мы рассматриваем систему неразличимых частиц в ν-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\nu$, взаимодействующих с помощью парного потенциала ϕ со следующими свойствами :

(1) $\phi : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – чётная функция ;

(2) существует постоянная $B \geq 0$ такая, что для любого множества точек $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^\nu$ имеем $\sum\limits_{i<j} \phi(x_i - x_j) \geq -n \cdot B$;

(3) ϕ имеет степенное убывание порядка $l + \nu$, $l > 0$, точнее

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} |\phi(u)| \cdot (1 + |u|)^l \, du < +\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_l$ класс потенциалов ϕ, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

§3. КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЛАСТЕЙ

Класс допустимых областей $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^\nu$, в которых заключена наша система, описываем в духе работы [3].

Открытое ограниченное подмножество Λ в $\mathbb{R}^\nu$ будем называть **областью**, если любые две точки Λ могут быть соединены непрерывным путём, целиком содержащимся в Λ. Мы будем называть область Λ в $\mathbb{R}^\nu$ **односвязной**, если любой замкнутый путь в Λ гомотопен нулю, т.е. эту кривую, непрерывно деформируя в пределах области Λ, можно стянуть в любую точку этой области.

Рассмотрим теперь односвязную область $\widetilde{\Lambda}$ в $\mathbb{R}^\nu$ и пусть $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$ – односвязные попарно непересекающиеся области в $\widetilde{\Lambda}$. Обозначая через $\bar{\Lambda}_j$ замыкание, положим $\Lambda = \widetilde{\Lambda} \setminus (\bar{\Lambda}_1 \cup \cdots \cup \bar{\Lambda}_n)$. Тогда Λ является n-**связной областью**. Через $\partial\Lambda$ обозначим границу Λ. Допустимые области мы определяем как n-связные области Λ в $\mathbb{R}^\nu$ с достаточно гладкими границами, удовлетворяющими следующим условиям (C1), (C2) и (C3). Пусть d означает евклидово расстояние в $\mathbb{R}^\nu$.

(C1). В каждой точке границы $\partial\Lambda$ главные кривизны $\kappa_1, ..., \kappa_{\nu-1}$ и главные направления определены таким образом, что

$$\kappa_0 = \max_{i=1,\dots,\nu-1} \sup_{r\in\partial\Lambda} |\kappa_i(r)| < +\infty.$$

Следующее условие позволяет использовать гауссовские координаты вблизи поверхности Λ.

(C2). Существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям $0 < \delta < \frac{1}{\kappa_0}$ и $0 < \delta < \frac{1}{3}\min\{d(\partial\Lambda_i, \partial\Lambda_j) | i, j = 1, ..., n, i \neq j\}$ такое, что если $u \in \Lambda$ и $d(u, \partial\Lambda) < \delta$, то существует единственное $r = r(u) \in \partial\Lambda$, для которого $d(u, r) = d(u, \partial\Lambda)$.

Для каждого $r \in \partial\Lambda$ через $\mathbf{n}$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Lambda$ в точке r. Далее, пусть $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_{\nu-1}$ – единичные векторы в касательной плоскости к $\partial\Lambda$ в точке r вдоль направлений главных кривизн.

В каждой точке $r \in \partial\Lambda$ определим локальные координаты $\eta, \xi_1, ..., \xi_{\nu-1}$ следующим образом : возьмём η вдоль $\mathbf{n}$, а $\xi_1, ..., \xi_{\nu-1}$ соответственно вдоль $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_{\nu-1}$. В этой локальной координатной системе $\partial\Lambda$ задаётся с помощью функции

$$\eta = f_r(\xi_1, ..., \xi_{\nu-1}) = f_r(\xi), \qquad \xi = (\xi_1, ..., \xi_{\nu-1}).$$

Локально поведение функции f_r подчиняется условию :

(C3). Существуют $\tau > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $r \in \partial\Lambda$

$$|f_r(\xi)| < C \cdot |\xi|, \quad \text{когда} \quad |\xi| < \tau.$$

§4. ГАЗ ЖИНИБРА, ПОДЧИНЯЮЩИЙСЯ СТАТИСТИКЕ МАКСВЕЛЛА–БОЛЬЦМАНА

Напомним вкратце понятие газа Жинибра, подчиняющегося МБ-статистике. Для фиксированного $\beta > 0$ рассмотрим пространство $(X, \mathcal{B}_X, \rho)$ с σ-конечной мерой, где $X = \{x \in \mathcal{C}([0,\beta], \mathbb{R}^\nu) | x(0) = x(\beta)\}$ означает пространство непрерывных петель в $\mathbb{R}^\nu$ с топологией равномерной сходимости. Здесь $\mathcal{B}_X$ = – борелевская σ-алгебра в X, а $\rho = \int_{\mathbb{R}^\nu} P_{uu}\, du$ – локально-конечная мера на X, определённая с помощью меры броуновского моста P_{uu}, сосредоточенная на множестве X^u

петель, которые начинаются и кончаются в u. (Для более подробного определения, а также конструкцию этой меры можно найти в [1], [5]).

Пусть теперь Λ – допустимая область в $\mathbb{R}^\nu$ и рассмотрим ограничение ρ_Λ меры ρ на борелевское множество $X(\Lambda) = \{x \in X : \ x(t) \in \Lambda \quad \text{для каждого} \quad 0 \leq t \leq \beta\}$. Легко видеть, что ρ_Λ является конечной мерой, удовлетворяющей оценке

$$\rho(X(\Lambda)) \leq |\Lambda| \cdot (\pi\beta)^{-\nu/2}. \tag{4}$$

На множестве $\mathcal{M}^{\cdot}_f(X) = \{\mu \subset X : \ |\mu| < \infty\}$ конечных конфигураций петель x из X определим меру $W_{z\cdot\rho}$:

$$W_{z\cdot\rho}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_X \cdots \int_X \varphi(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_n})\rho(dx_1)\ldots\rho(dx_n), \tag{5}$$

где $\varphi\colon \mathcal{M}^{\cdot}_f(X) \to \mathbf{R}$ – измеримая функция, а δ_x – мера Дирака петли x.

Обозначим через $W_{z\cdot\rho_\Lambda}$ ограничение меры $W_{z\cdot\rho}$ на множество $\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda)$ конечных конфигураций петель x из $X(\Lambda)$. Здесь и далее, для краткости, мы пишем $\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda) = \mathcal{M}^{\cdot}_f(X(\Lambda))$ и $\mathcal{M}^{\cdot}_f = \mathcal{M}^{\cdot}_f(X)$.

С помощью потенциала $\phi \in \mathcal{P}_l$, мы определяем энергию конфигурации μ по формуле

$$\mathcal{U}(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mu, x\neq y} \int_0^\beta \phi(x(s) - y(s))\, ds, \quad \mu \in \mathcal{M}^{\cdot}_f. \tag{6}$$

Пусть $\phi \in \mathcal{P}_l$, $\beta > 0$, $z > 0$, и Λ – некоторая допустимая область в $\mathbb{R}^\nu$, тогда тройку $(\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda), W_{z\rho_\Lambda}, \mathcal{U})$ мы будем называть **газом Жинибра в Λ с активностью z, энергией $\mathcal{U}$ и МБ-статистикой ρ. Статистическая сумма** этой системы определяется формулой $Z = Z(\Lambda, z) = W_{z\cdot\rho_\Lambda}(e^{-\mathcal{U}})$. Заметим, что из устойчивости потенциала ϕ следует, что для ограниченных областей Λ статистическая сумма $Z(\Lambda, z)$ конечна.

§5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ДОПУСТИМЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ УВЕЛИЧЕНИИ ОБЪЁМА

Прежде чем сформулировать основной результат, дадим определение функции Урселла для нашей системы. Пусть $\Gamma_c(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}^{\cdot}_f$ – множество всех связных графов с множеством вершин μ. Для $\gamma \in \Gamma_c(\mu)$ через $E(\gamma)$ обозначим множество всех рёбер графа γ. Тогда функция Урселла g (см. [7]) задаётся формулой

$$g(\mu) = \sum_{\gamma\in\Gamma_c(\mu)} \prod_{e\in E(\gamma)} q(e), \qquad \mu \in \mathcal{M}^{\cdot}_f,$$

где

$$q(x,y) = \exp\left(-\int_0^\beta \phi(x(s) - y(s))\, ds \right) - 1. \tag{7}$$

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Если $\phi \in \mathcal{P}_l$, $l > 1$, и z из интервала*

$$0 < z < C(\nu,\beta,l) \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi(u)|\,(1+|u|)^l\right]^{-1},$$

где $C(\nu,\beta,l) = \left[(2^{l+1}+e)\beta(\pi\beta)^{-\nu/2}e^{4\beta B+1}\right]^{-1}$, то для любой допустимой области Λ в $\mathbb{R}^\nu$

$$\ln Z(\Lambda_R, z) = zp(\phi,z)\,R^\nu|\Lambda| + O(R^{\nu-1})$$

при $R \to +\infty$, где

$$p(\phi,z) = \int_{X^0} P_{00}(dx^0) \int_{\mathcal{M}_f} W_\rho(d\mu)\, z^{|\mu|} \cdot \frac{g(\mu+\delta_{x^0})}{|\mu|+1},$$

а g обозначает функцию Урселла и $\Lambda_R = R\Lambda = \{R\cdot u\colon\ u \in \Lambda\}$, $R \geq 1$.

Как и в [6], мы используем представление $\ln Z(\Lambda,z) = W_{z\rho_\Lambda}(g)$, которое имеет место при достаточно малых z (см. [1], [4]). Основным свойством функции g, допускающей подробный анализ $\ln Z$, является то, что g обладает строгим **кластерным свойством** (см. [5] и ссылки там). Более того, g удовлетворяет строгой кластерной оценке с параметром $a = e^{z\beta B}$ и оценивающей функцией $h = a\cdot|q|$:

$$|g(\mu)| \leq e^{2\beta B} \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{T}(\mu)} \prod_{e\in E(\gamma)} |h(e)|, \qquad \mu \in \mathcal{M}_f, \tag{8}$$

где через $\mathcal{T}(\mu)$ обозначено множество всех деревьев, построенных на конфигурации μ, а $E(\gamma)$ – множество всех ребёр дерева γ.

Мы предполагаем, что h обладает хорошими свойствами убывания в смысле, что $h \in \mathbf{B}_{\delta_l}$ (см. [5] для определения банахова пространства $\mathbf{B}_{\delta_l}$ и доказательства сильного кластерного свойства функции g).

В частности отсюда следует, что $p(h) := \sup_{x\in X}\int_X \rho(dy)|h(x,y)|$ удовлетворяет оценке

$$p(h) \leq (\pi\beta)^{-\nu/2}\cdot\beta\cdot e^{4\beta B}\cdot\int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi(u)|. \tag{9}$$

Чтобы подчеркнуть важность сильного кластерного свойства, мы покажем, как из него следует интегрируемость функции Урселла.

Лемма 1. *Если $0 < z < [e\cdot p(h)]^{-1}$, то $g \in \mathcal{L}^1(W_{z\rho_\Lambda})$, или более того,*

$$W_{z\rho_\Lambda}(|g|) \leq \frac{ze^{2\beta B}|\Lambda|\cdot(\pi\,\beta)^{\nu/2}}{(\pi\beta)^{\nu/2} - z\beta e^{4\beta B+1}\int_{\mathbb{R}^\nu} du\,|\Phi(u)|}. \tag{10}$$

Доказательство. Для любой измеримой функции $\varphi\colon \mathcal{M}^{\cdot}_f \to \mathbf{R}$

$$W_{z\rho_\Lambda}(\varphi) = z\int_{X(\Lambda)} \rho(dx)\int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda)} W_{z\rho}(d\mu)\frac{\varphi(\mu+\delta_x)}{|\mu|+1} \tag{11}$$

(см. [6] и ссылки там). Отсюда следует, что

$$W_{z\rho_\Lambda}(|g|) \le z\int_{X(\Lambda)} \rho(dx) G_z(x), \tag{12}$$

где

$$G_z(x) = \int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f} W_{z\rho}(d\mu)\frac{|g(\mu+\delta_x)|}{|\mu|+1}. \tag{13}$$

Оценим функцию $G_z(x)$, используя сильную кластерную оценку функции (8). Имеем

$$\begin{aligned} G_z(x) &\le \int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f} W_{z\rho}(d\mu) \sum_{\gamma\in\mathcal{T}(\mu+\delta_x)} \prod_{e\in E(\gamma)} h(e) = \\ &= e^{2\beta B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{X^n}\rho(dx_1)\cdots\rho(dx_n)\sum_{\gamma\in\mathcal{T}(x,x_1,\cdots,x_n)}\prod_{e\in E(\gamma)} h(e). \end{aligned} \tag{14}$$

Последовательно интегрируя относительно меры ρ, начиная со свободных вершин дерева γ и замечая, что результат $[p(h)]^n$ такого интегрирования не зависит от выбора $\gamma \in \mathcal{T}(x, x_1, \cdots, x_n)$ (подробности см. в [5]) получим, что

$$G_z(x) \le e^{2\beta B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{\gamma\in\mathcal{T}(x,x_1,\cdots,x_n)} [p(h)]^n. \tag{15}$$

Поскольку число рёбер дерева $\gamma \in \mathcal{T}(\mu)$ равно $|\mu|-1$, а число элементов множества $\mathcal{T}(x, x_1, \cdots, x_n)$ равно $(n+1)^{n-1}$, то с помощью формулы Стирлинга и (9) находим, что $G_z(x) \le$

$$\le e^{2\beta B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[zp(h)]^n}{n!}(n+1)^{n-1} \le e^{2\beta B}\left[1 - z\beta e^{4\beta B+1}(\pi\beta)^{-\nu/2}\int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi(u)|\right]^{-1}$$

Теперь, утверждение леммы следует из (12) и (4).

§6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для исследования асимптотики $W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g)$ при больших R начнём со следующего представления :

$$W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g) = z\cdot\int_{X(\Lambda_R)} \rho(dx)\int_{\mathcal{M}^{\cdot}_f(\Lambda_R)} W_{z\rho}(d\mu)\frac{g(\mu+\delta_x)}{|\mu|+1}, \tag{16}$$

которое следует из (11). Ниже будем пользоваться обозначениями из [5]. Положим

$$g_z(u,x^0,\mu)=z^{|\mu|}\cdot\frac{g(\mu+\delta_{x^0+u})}{|\mu|+1},\ dx^0=P_{00}(dx^0),\ d\mu=W_\rho(d\mu),\ W_{z\rho}(d\mu)=z^{|\mu|}d\mu.$$

Используя (16), получим

$$W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g)=z\cdot\int_{\Lambda_R}du\int_{X^0}dx^0 1_{X(\Lambda_R)}(x^0+u)\int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)}\cdot\ d\mu\, g_z(u,x^0,\mu).$$

Подынтегральное выражение $I(u,R)$, $u\in\Lambda_R$, может быть представлено в виде :

$$\begin{aligned}I(u,R)&=\int_{X^0}dx^0\int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)}d\mu g_z(u,x^0,\mu)-\\&-\int_{X^0}dx^0[1-1_{X(\Lambda_R)}(x^0+u)]\cdot\int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)}d\mu g_z(u,x^0,\mu)=I_1(u,R)-I_2(u,R).\end{aligned}\tag{17}$$

Таким образом, имеем

$$W_{z\rho_{\Lambda_R}}(g)=z\int_{\Lambda_R}duI_1(u,R)-z\cdot\int_{\Lambda_R}duI_2(u,R).$$

Следующим шагом мы разлагаем первый член в правой части (17), представляя $I_1(u,R)$ в виде $I_1(u,R)=I_1^A(u)-I_1^B(u,R)$, где

$$I_1^A(u)=\int_{X^0}dx^0\int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}}d\mu\, g_z(u,x^0,\mu),\tag{18}$$

$$I_1^B(u,R)=\int_{X^0}dx^0\int_{C\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)}d\mu\, g_z(u,x^0,\mu).\tag{19}$$

Здесь $C\mathcal{M}$ обозначает теоретико-множественное дополнение к множеству $\mathcal{M}$.

§7. Вклад соответствующий объёму. Давление.

Рассмотрим теперь $I_1^A(u)$. Поскольку и W_ρ и $g_z(u,x^0,\mu)=z^{|\mu|}\cdot\frac{g(\mu+\delta_{x^0+u})}{|\mu|+1}$ инвариантны относительно сдвигов по u, то I_1^A не зависит от u и может быть представлено в виде

$$I_1^A=p(\phi,z)=\int_{X^0}dx^0\int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}}d\mu z^{|\mu|}\cdot\frac{g(\mu+\delta_{x^0})}{|\mu|+1}.\tag{20}$$

Таким образом, показали, что

$$\ln Z(\Lambda_R,z)=zp(\phi,z)|\Lambda_R|-z\int_{\Lambda_R}du\, I_1^B(u,R)-z\int_{\Lambda_R}du\, I_2(u,R).\tag{21}$$

Ниже мы рассмотрим второй и третий члены в правой части (21).

Анализ $\int_{\Lambda_R} du I_1^B(u,R)$.

В силу Леммы 4.7 из [5] можно оценить интеграл сверху :

$$|\int_{\Lambda_R} du\, I_1^B(u,R)| \le \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 \int_{C\mathcal{M}_f^{\cdot}(\Lambda_R)} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot \frac{|g(\mu+\delta_{x^0+u})|}{|\mu|+1} \le \tag{22}$$

$$\le z \cdot \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+u})| =: \mathcal{J}_1^B(R).$$

Пусть $\delta > 0$ удовлетворяет Условию (C2) и пусть $\Lambda_\delta = \{u \in \Lambda | d(u, \partial\Lambda) < \delta\}$. Тогда

$$\mathcal{J}_1^B(R) = zR^\nu \int_{\Lambda} du \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\mathring{\Lambda}_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+Ru}| =$$

$$= zR^\nu \int_{\Lambda\setminus\Lambda_\delta} \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+Ru})| + \tag{23}$$

$$+ zR^\nu \int_{\Lambda_\delta} du \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+Ru}| =:$$

$$=: \mathcal{J}_{11}^B(R) + \mathcal{J}_{12}^B(R).$$

Рассмотрим $\mathcal{J}_{12}^B(R)$. Следуя работе [3], мы воспользуемся условием (C2) и локальной системой координат, введённой после условия (C2). Заметим, что если Λ допустимая область, то мера Лебега du в Λ_δ может быть представлена в виде $\sigma(dr)dt \prod_{j=1}^{\nu-1}(1 - t\cdot\kappa_i(r))$, где σ означает $\nu-1$-мерную площадь на $\partial\Lambda$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{12}^B(R) = z\cdot R^\nu \cdot \int_{\partial\Lambda} \sigma(dr) \int_0^\delta dt \prod_{j=1}^{\nu-1}(1 - t\cdot\kappa_i(r)) \times \\ \times \int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+R(r+t\cdot\mathbf{n})})|. \end{aligned} \tag{24}$$

Пользуясь основной леммой 5.3 из [5], оценим подынтегральное выражение, зависящее от r, следующим образом. Если

$$0 < z < [(2^{l+1}+e)\cdot e^{2\beta B}\cdot ||q||_l]^{-1}, \tag{25}$$

то для каждого $R \ge 1$, $r \in \partial\Lambda$ и $0 \le t \le \delta$,

$$\begin{aligned} &\int_{X^0} dx^0 \int_{CX(\Lambda_R)} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+R(r+t\cdot\mathbf{n})})|, \\ &\int_{X^0} dx^0 \int_{CX(B_{R(r+t\mathbf{n})}(tR))} \rho(dy) \int_{\mathcal{M}_f^{\cdot}} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu+\delta_y+\delta_{x^0+R(r+t\mathbf{n})})| \le \\ &\le C(\nu,\beta,l,z,\phi)\cdot(1+tR)^{-l}, \end{aligned} \tag{26}$$

где $C(\nu,\beta,l,z,\phi)$ – постоянная, не зависящая от R, r, t, а $B_u(R)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^\nu$ радиуса R с центром в $u \in \mathbb{R}^\nu$. Заметим теперь, что в силу (C1) и (C2), при $0 \le t \le \delta$ имеем $\prod_{j=1}^{\nu-1}(1 - t\cdot\kappa_i(\nu)) \le 2^{\nu-1}$. Подставляя (26) в (24) получаем, что

$$|\mathcal{J}_{12}^B(R)| \le z \cdot R^\nu \cdot 2^{\nu-1} \cdot C(\nu,\beta,l,z,\phi) \cdot \int_{\partial\Lambda} \sigma(dr) \int_0^\delta dt\,(1 + t\cdot R)^{-l}.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^\delta dt\,(1+t\cdot R)^{-l} \le C(l)\cdot\frac{1}{R},$$

так что мы приходим к оценке ($|\cdot|_{\nu-1}$ означает $(\nu-1)$-мерный объём)

$$|\mathcal{J}_{12}^B(R)| \le z \cdot 2^{\nu-1} \cdot \bar{C}(\nu,\beta,z,\phi) \cdot |\partial\Lambda|_{\nu-1} \cdot R^{\nu-1}. \tag{27}$$

Чтобы оценить $\mathcal{J}_{11}^B(R)$ воспользуемся снова основной леммой 5.3 из [5]. Получим, что для всех $z > 0$ из интервала (25) $|\mathcal{J}_{11}^B(R)| \le z \cdot R^\nu \cdot |\Lambda| \cdot \widetilde{C}(\nu,\beta,l.z,\phi)(t+\delta R)^{-l}$, что эквивалентно $|\mathcal{J}_{11}^B(R)| \le z \cdot |\Lambda| \cdot C^*(\nu,\beta,l,z,\phi,\delta)\cdot R^{\nu-l}$. Теперь из (27), (22) и (23) следует, что

$$\left|\int_{\Lambda_R} du\, I_1^B(u,R)\right| \le C \cdot R^{\nu-1} \tag{28}$$

для всех z из интервала (25), где постоянная C не зависит от R.

Анализ $\int_{\Lambda_R} du\, I_2(u,R)$.

Остаётся исследовать последний интеграл в правой части (21). Имеем

$$\left|\int_{\Lambda_R} du\, I_2(u,R)\right| \le \int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 [1 - 1_{X(\Lambda_R)}(x^0+u)] \cdot G_z(x^0+u), \tag{29}$$

где

$$G_z(x^0+u) = \int_{\mathcal{M}_f} d\mu\, z^{|\mu|} \cdot |g(\mu + \delta_{x^0+u})|.$$

Заметим, что $G_z(x^0+u) = G_z(x^0)$ для всех $u \in \mathbb{R}^\nu$. Следующая лемма показывает, что величина $G_z(x^0)$ равномерно ограничена.

Лемма 2. *Для всех z из интервала $0 < z < [e\cdot p(h)]^{-1}$ и каждого $x^0 \in X^0$ имеет место оценка*

$$|G_z(x^0)| \le \frac{e^{2\beta B}}{\sqrt{2\pi}}[1 - zep(h)]^{-1},$$

где $h = e^{2\beta B}\cdot|q|$.

Доказательство аналогично доказательству Леммы 1. Кроме того, Лемма 2 остаётся верной, если заменить $p(h)$ её верхней оценкой $(\pi\beta)^{-\nu/2}\beta e^{4\beta B}\int_{\mathbb{R}^\nu} du|\phi(u)|$. Следующая лемма является следствием формул (2.11) - (2.17) работы [3].

Лемма 3. *Для любой функции $G \in \mathcal{L}^2(P_{00})$ и любой допустимой области Λ имеет место оценка*

$$\int_{\Lambda_R} du \int_{X^0} dx^0 [1 - 1_{X(\Lambda_R)}(x^0 + u)] \cdot |G(x^0)| \le C \cdot R^{\nu-1},$$

где C – постоянная, не зависящая от R.

Из Леммы 2 следует, в частности, что $G_z \in \mathcal{L}^2(P_{00})$. Поэтому следующая оценка является прямым следствием Лемм 2 и 3 и формулы (29) :

$$\left| \int_{\Lambda_R} du I_2(u, R) \right| \le C \cdot R^{\nu-1}. \tag{30}$$

Теперь Теорема 1 следует из (21), (28) и (30).

С. Погосян выражает свою благодарность факультету математики Биелефелдского университета за теплое гостеприимство.

Abstract. The following version of the inverse spectral problem of Kac is discussed for a system of interacting Brownian loops in a bounded admissible domain $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$: Given the energy $\mathcal{U}$ of the system, the logarithm of the associated partition function in the swollen region $R \cdot \Lambda$, $R \ge 1$, is presented as a sum of a volume term $p(\phi, z) \cdot |R \cdot \Lambda|$ and a residual term $0(R^{\nu-1})$ as $R \to +\infty$. The proof is based on the method of cluster expansion.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ginibre, "Reduced density matrices of quantum gases. I. Limit of infinite volume", J. Math. Phys. vol. 6, pp. 238–251, 1965. II. Cluster property. J. Math. Phys. vol. 6, pp. 252–263, 1965.
2. M. Kac, "Can one hear the shape of a drum", Am. Math. Monthly, vol. 73, pp. 1–23, 1966.
3. N. Macris, P. A. Martin, J. V. Pulé, "Large volume asymptotics of brownian integrals and orbital magnetism", Ann. Inst. Henri Poincar 66, pp. 147–183, 1997.
4. S. Poghosyan, "Asymptotic expansion of the logarithm of the partition function", Comm. Math. Phys., vol. 95, pp.227–245, 1984.
5. S. Poghosyan, H. Zessin, "Decay of correlations of the Ginibre gas obeying Maxwell–Boltzmann statistics", Markov Processes Relat. Fields vol. 7, pp. 1–20, 2001.
6. S. Poghosyan, H. Zessin, "A geometric expansion of the logarithm of the partition function for the Ginibre gas obeying Maxwell–Boltzmann statistics", Markov Processes Relat. Fields, vol. 7, pp. 21–33, 2001.
7. Д. Рюэль, Статистическая Механика, Строгие результаты, Изд. "Мир", 1971.

Поступила 11 декабря 2002

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 2, 2003, 73–82

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЗОНА ДОСТИГАЕМОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Н. Е. Товмасян, Л. З. Геворгян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье используется некоторое интегральное представление выпуклых функций для описания траекторий летательных аппаратов и определения зоны достигаемости.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для заданных $a > 0$, $x_0 > 0$ и произвольного действительного числа y_0, обозначим через $M(x_0, y_0, a)$ класс дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, x_0]$ действительных функций, удовлетворяющих условиям

$$f''(x) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \tag{1}$$

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) = y_0, \tag{2}$$

$$1 + (f'(0))^2 + af''(0) = 0. \tag{3}$$

Задача $\mathbf{A}_n$. Найти полином порядка n, принадлежащий классу $M(x_0, y_0, a)$. В настоящей статье получено интегральное представление класса $M(x_0, y_0, a)$ и доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача $\mathbf{A}_n$ разрешима тогда и только тогда, когда*

$$y_0 \leq \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x_0^2), \tag{4}$$

где

$$a_n = \frac{n(n+2)}{8}a, \quad \text{при } n = 2m, \quad m \geq 1, \tag{5}$$

$$a_n = \frac{(n-1)(n+3)}{8}a, \quad \text{при } n = 2m+1, \quad m \geq 1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Задача* $\mathbf{A}_n$ *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$y_0 = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x_0^2).$$

Теорема 3. *Пусть в (4) имеет место строгое неравенство. Тогда задача* $\mathbf{A}_n$ *при* $n = 2$ *имеет два решения, а при* $n \geq 3$ *имеет бесконечное число решений.*

При доказательстве теорем 1 – 3 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для* $k = 0, 1, \ldots, m = 1, 2, \ldots$

$$I_{km} = \min_{a_1,\ldots,a_m} \int_0^1 (1-x)^k (1 - a_1 x - \ldots - a_m x^m)^2 dx = \frac{1}{(m+1)(m+k+1)}. \quad (7)$$

Скажем, что полином $P(x)$ принадлежит классу $N(n,b)$, если он имеет порядок n, $P(0) = 1$, $P(x) \geq 0$ при $0 < x \leq 1$ и

$$\int_0^1 (1-x)P(x)\, dx = b, \quad (8)$$

где $b > 0$. Обозначим

$$c_n = \frac{4}{(n+2)(n+4)}, \quad \text{при } n = 2m, \quad m \geq 1,$$

$$c_n = \frac{4}{(n+1)(n+5)}, \quad \text{при } n = 2m+1, \quad m \geq 1.$$

Лемма 2. *Если* $b < c_n$, *то* $N(n,b)$ *является пустым, если* $b = c_n$, *то* $N(n,b)$ *содержит единственный полином, а если* $b > c_n$, *то* $N(n,b)$ *содержит бесконечное число элементов.*

В §2 получено указанное выше параметрическое представление, в §3 и §4 доказываются теоремы 1 – 3. В §5 полученные результаты применяются для описания траектории полета летательных аппаратов и для определения зоны достигаемости. В §6 доказываются леммы 1 и 2.

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССА $M(x_0, y_0, a)$

В пространстве $C(0,1)$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций введём норму

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|(1-x)\, dx.$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ класс неотрицательных функций ω из $C(0,1)$, удовлетворяющих $\omega(0) = 1$.

Теорема 4. *Любая функция $f \in M(x_0, y_0, a)$ представляется в виде*

$$f(x) = \frac{y_0}{x_0}x + kx_0 f_0\left(\frac{x}{x_0}\right), \tag{9}$$

где

$$f_0(x) = x - \frac{1}{||\omega||}\int_0^x (x-t)\omega(t)\,dt, \tag{10}$$

$\omega(t)$ – произвольная функция из класса $\mathcal{N}$, удовлетворяющая неравенству

$$2||\omega|| \le \frac{a}{y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \tag{11}$$

а k – любое решение уравнения

$$k^2 x_0^2 - 2kx_0\left(\frac{a}{2||\omega||} - y_0\right) + x_0^2 + y_0^2 = 0. \tag{12}$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Любая функция f, удовлетворяющая (1), (2) и дополнительному условию $f''(0) < 0$, может быть представлена в виде (9), где $k > 0$ и $\omega \in \mathcal{N}$.*

Доказательство. Пусть сначала $y_0 = 0$. Поскольку f' убывает на $[0, x_0]$, то из условия $f'(0) \le 0$ вытекает $f'(x) < 0$ на $(0, x_0)$, в противоречии $f(0) = f(x_0) = 0$. Следовательно, $f'(0) > 0$. Обозначим

$$f_0(x) = \frac{f(x_0 x)}{x_0 f'(0)}, \quad 0 \le x \le 1. \tag{13}$$

Функция f_0 удовлетворяет условиям

$$f_0(0) = f_0(1) = 0, \quad f_0'(0) = 1, \quad f_0''(0) < 0, \quad f_0''(x) \le 0. \tag{14}$$

Из формулы Коши, $f_0(x) = x + \int_0^x (x-t) f_0''(t)\,dt$ или эквивалентно

$$f_0(x) = x - (-f_0''(0))\int_0^x (x-t)\frac{f_0''(t)}{f_0''(0)}\,dt.$$

Обозначим

$$\omega(x) = \frac{f_0''(x)}{f_0''(0)}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание (14), легко видеть, что $||\omega|| = -1/f_0''(0)$, откуда следует (10). Из (13) имеем $f(x) = kx_0 f_0\left(\frac{x}{x_0}\right)$, где $k = f'(0) > 0$. Из последних двух формул следует утверждение леммы 3, в частном случае $y_0 = 0$. Если же $y_0 \ne 0$, то введя вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \frac{y_0}{x_0}x$, сведем задачу к уже рассмотренному случаю. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 сводится к установлению соотношений (11) и (12). Подставляя $f(x)$ из (9) в (3), получим квадратное (относительно k) уравнение (13). Оно имеет положительное решение тогда и только тогда, когда выполнено условие (11). Отметим, что в этом случае оба корня уравнения (12) положительны. Легко проверить, что любая функция $f(x)$ вида (9) принадлежит классу $M(x_0, y_0, a)$. Таким образом, теорема 4 доказана.

Функция $\omega_n(x) = (1-x)^n$, где n натуральное число, принадлежит $\mathcal{N}$ и $||\omega_n|| = 1/(n+2)$. Таким образом, при достаточно больших n функция $\omega_n(x)$ удовлетворяет неравенству (11). Отсюда и из теоремы 4 следует, что любой класс $M(x_0, y_0, a)$ содержит бесконечно много полиномов.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть Q_n – множество полиномов порядка n, принадлежащих классу $\mathcal{N}$. Обозначим $b_n = \inf\limits_{M \in Q_n} ||M||$.

Лемма 4. *Существует полином* $\omega \in Q_n$ *такой, что* $b_n = ||\omega||$ *и* $b_{2m} = I_{1m}$, $b_{2m+1} = I_{2m}$.

Доказательство. Согласно классической теореме Маркова – Лукача (ср. [1], стр. 89), любой неотрицательный на $[0,1]$ полином P можно представить в виде

$$P(t) = \begin{cases} Q^2(t) + t(1-t)T^2(t), & \text{при} \quad deg\, P = 2m, \quad m = 1, 2..., \\ tQ^2(t) + (1-t)R^2(t), & \text{при} \quad deg\, P = 2m+1, \quad m = 0, 1, ..., \end{cases}$$

где $deg\, Q = deg\, R = m$ и $deg\, T = m - 1$.

Пусть для определенности $deg\, P = 2m$. Если полином P удовлетворяет $P(0) = 1$, то его можно записать в виде $P(t) = (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 + (t - t^2)T^2(t)$. Норма полинома P равна

$$||P|| = \int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 (1-t)\, dt + \int_0^1 t(1-t^2)T^2(t)\, dt.$$

Поскольку второе слагаемое в этом выражении неотрицательно, то минимум нормы $||P||$ достигается при $T(t) \equiv 0$, т.е. должны найти минимум интеграла

$$\int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 (1-t)\, dt. \tag{15}$$

Аналогично, для нечетной степени получим

$$\int_0^1 (1 + x_1 t + \cdots + x_m t^m)^2 (1-t)^2\, dt.$$

В обоих случаях минимум достигается, поскольку Q_n является конечномерным. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть Задача A_n имеет решение $f(x) = P_n(x)$. Согласно теореме 4, полином P_n можно представить в виде (9), где ω – полином порядка $n-2$ из класса $\mathcal{N}$, удовлетворяющий условию (11). Из определения b_n имеем $||\omega|| \geq b_{n-2}$. Ввиду (11),

$$2b_{n-2} \leq \frac{a}{y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \tag{16}$$

или

$$y_0 \leq \frac{1}{2\gamma_n}(\gamma_n^2 - x_0^2), \quad \gamma_n = \frac{a}{2b_{n-2}}. \tag{17}$$

Из (7) и леммы 4 следует, что $\gamma_n = a_n$, где числа a_n определяются формулами (5) и (6). Следовательно, условие (4) необходимо для разрешимости задачи A_n. Пусть теперь условие (4) выполняется. Так как $\gamma_n = a_n$, то его можно переписать в виде (17), что эквивалентно (16). Согласно лемме 4, существует полином $\omega_0 \in Q_{n-2}$ такой, что $||\omega_0|| = b_{n-2}$. Следовательно условие (16) принимает вид (11). Итак, ω_0 удовлетворяет условиям (11) и $\omega_0(0) = 1$. По теореме 4, функция (9) является решением A_n, где $\omega = \omega_0$ и k – любое решение уравнения (12) при $||\omega|| = ||\omega_0|| = b_{n-2}$. Теорема 1 доказана.

Используя лемму 2, теоремы 2 и 3 можно доказать аналогично, поэтому их доказательства опускаются.

§4. УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМ 1 – 3

Обозначим через $M_0(x_0, y_0, a)$ класс, который получается из класса $M(x_0, y_0, a)$, если условие (1) заменить условием $f''(x) < 0$, $0 \leq x \leq x_0$.

Задача B_n. Найти полином порядка n из класса $M_0(x_0, y_0, a)$.

Обозначим через $\mathcal{N}_0$ класс функций ω, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условиям

$$\omega(0) = 1, \quad \omega(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{18}$$

Теорема 5. *Любая функция из класса $M_0(x_0, y_0, a)$ представляется в виде (9), где k – решение уравнения (12), а ω – функция из $\mathcal{N}_0$, удовлетворяющая (11).*

Теорема 6. *Задача B_n разрешима тогда и только тогда, когда x_0, y_0 и a удовлетворяют условиям*

$$y_0 \leq \frac{1}{2a}(a^2 - x_0^2), \qquad \text{при} \quad n = 2, \tag{19}$$

$$y_0 < \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x_0^2), \qquad \text{при} \quad n \geq 3. \tag{20}$$

Теорема 7. *Задача* B_n *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $n = 2$ *и*

$$y_0 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_0^2).$$

Теорема 8. *Если имеет место строгое неравенство (19), то задача* B_2 *имеет два решения. Если* $n \geq 3$ *и имеет место неравенство (20), то Задача* B_n *имеет бесконечное число линейно независимых решений.*

Теорема 9. *Если имеет место условие (19), то общее решение задачи* B_2 *определяется формулой*

$$f(x) = kx\left(1 - \frac{x_0}{x}\right) + \frac{y_0}{x_0}x,$$

где $k = a - y_0 \pm \sqrt{(a - y_0)^2 - x_0^2 - y_0^2}$.

Теорема 10. *Если* $n \geq 3$ *и имеет место условие (20), то общее решение задачи* B_n *определяется формулой (9), где* k *– любое решение уравнения (12), а* ω *– произвольный полином порядка* $(n-2)$*, удовлетворяющий условиям (11) и (18).*

Теоремы 5 – 10 доказываются аналогично теоремам 1 – 4, поэтому их доказательства опускаются.

§5. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗОНА ДОСТИГАЕМОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Рассмотрим систему

$$m\frac{d\nu_1}{dx} = \frac{F}{\nu}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}, \tag{21}$$

$$m\nu_1\frac{d\nu_2}{dx} = \frac{F\nu_2}{\nu} - gm, \tag{22}$$

$$\nu_2 = f'(x)\nu_1, \tag{23}$$

$$|F| = -\frac{1}{k_0}\nu_1\frac{dm}{dx}, \tag{24}$$

$$\nu_1(0) > 0, \quad m(x_0) = m_0, \quad \nu(0) = \nu_0, \quad m(x) > 0, \tag{25}$$

где g, m_0, ν_0 и k_0 – положительные постоянные, f – некоторая трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, x_0]$ функция, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = 0, \quad f(x_0) = y_0. \tag{26}$$

Задача состоит в нахождении непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, x_0]$ функций m, ν_1, ν_2 и F.

Пусть $x0y$ – декартова система координат, где положительная ось y-ов направлена вертикально вверх относительно земной поверхности. Система (21) – (25)

описывает полет летательного аппарата по траектории $y = f(x)$, $0 \le x \le x_0$, когда расстояние полета мало по сравнению с радиусом Земли [2], сопротивление окружающей среды отсутствует, $m(x)$ – масса летательного аппарата в точке (x, y) траектории, ν_1 и ν_2 – компоненты вектора скорости, $|F|$ – величина реактивной силы, m_0 – масса летательного аппарата без расходуемого топлива, ν_0 – начальная скорость,

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + H)^2},$$

где $g_0 \approx 9.8$ *м/сек*^{2} – ускорение земного тяготения, R_0 – радиус Земли, H – расстояние начала координат от земной поверхности.

Полет осуществляется при помощи соответствующего подбора реактивной силы и расходуемого топлива $m_1 = m(0) - m(x_0)$. Эти величины подлежат определению, решая задачу (21) – (25). Докажем, что полет по траектории $y = f(x)$, $0 \le x \le x_0$ возможен тогда и только тогда, когда задача (21) – (25) разрешима.

Теорема 11. *Система (21) – (25) разрешима тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет условиям*

$$f''(x) < 0, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{27}$$

$$1 + (f'(0))^2 + \frac{\nu_0^2}{g} f'(0) = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Дифференцируя обе части (23) по x, получим

$$\nu_2'(x) = f''(x)\nu_1(x) + f'(x)\nu_1'(x).$$

С учетом (21), уравнение (24) можно записать в виде

$$f''(x)\nu_1^2 = -g, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{29}$$

откуда следует (27). Из (21), (23), (26) и условия $\nu_1(0) > 0$ получим

$$\nu_1(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-f''(x)}}, \quad \nu_2(x) = \frac{\sqrt{g} f'(x)}{\sqrt{-f''(x)}}, \quad \nu^2 = -\frac{g(1 + f'(x))^2}{f''(x)}. \tag{30}$$

Из $\nu(0) = \nu_0$ получим (28). Следовательно, условия (27) – (28) необходимы для разрешимости задачи (21) – (25).

Пусть теперь выполнены условия (27) и (28). Докажем, что задача (21) – (25) имеет единственное решение. Подставляя ν_1 и ν_2 из (30) в (21) и (24), получим

$$F(x) = m(x) g \frac{f'''(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{(f''(x))^2}, \tag{31}$$

$$\frac{dm}{dx} = -k_0\frac{\sqrt{-f''(x)}}{\sqrt{g}}|F(x)|. \tag{32}$$

Подставляя $F(x)$ из (31) в (32) и используя $m(x) > 0$, получим

$$\frac{dm}{dx} = -\psi(x)m, \tag{33}$$

где

$$\psi(x) = \frac{k_0\sqrt{g}|f'''(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}}{(-f''(x))^{3/2}}.$$

Решение уравнения (33) с граничным условием $m(x_0) = m_0$ определяется формулой

$$m(x) = \frac{m_0\psi_0(x)}{\psi_0(x_0)}, \quad 0 \le x \le x_0, \tag{34}$$

где

$$\psi_0(x) = \exp\left[\int_0^x \psi(t)\,dt\right].$$

Так как $\psi(t) \ge 0$, то ψ_0 – возрастающая, а m – убывающая функция. Подставляя $m(x)$ из (34) в (31), определим $F(x)$. Из (34) получим $m(0) - m(x_0) = m_0(\psi_0(x_0) - 1)$, где $m(0) - m(x_0)$ – масса расходуемого топлива. Следовательно, условия (27) и (28) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (21) – (25). Если эти условия выполнены, то система (21) – (25) имеет единственное решение. Теорема 11 доказана.

Из (26) – (28) следует, что $f \in M_0(x_0, y_0, a)$ при $a = \nu_0^2/g$ является необходимым и достаточным условием для разрешимости данной задачи. Итак, используя результаты §4, можно описать все возможные траектории соединяя точки $(0,0)$ и (x_0, y_0) с начальной скоростью ν_0 и определить расстояние полета для траекторий вида $y = P_n(x)$, где P_n – полином порядка n.

§6. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Доказательство леммы 1. Сначала вычислим

$$I_{km} = \inf_{a_1,\ldots,a_m}\int_0^1 (1-x)^k(1-a_1x-\ldots-a_mx^m)^2dx, \quad k = 0,1,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Для этой цели найдём ортогональные относительно веса $w(t) = (1-t)^k$ полиномы. Рассмотрим функцию $r_n(t) = t^n(t-1)^{n+k}$, и обозначим

$$q_n(t) = \frac{1}{(t-1)^k}\frac{d^n}{dt^n}r_n(t).$$

Имеем

$$(q_m, q_n) = \int_0^1 q_m(t)\frac{d^n r_n(t)}{dt^n}\,dt.$$

Легко видеть, что $r_n(t)$ и все ее производные вплоть до порядка $n-1$, равны нулю в точках $t=0$ и $t=1$. Полагая $n>m$ и интегрируя по частям $m+1$ раз, получим

$$(q_m, q_n) = (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{d^{n-m-1} r_n(t)}{dt^{n-m-1}} \frac{d^{m+1} q_m(t)}{dt^{m+1}}\, dt = 0,$$

чем доказывается их ортогональность.

В случае $n=m$ имеем

$$||q_n||^2 = \int_0^1 r_n(t) \frac{d^n q_n(t)}{dt^n}\, dt.$$

Коэффициент при старшем члене полинома $q_n(t)$ равен $\dfrac{(2n+k)!}{(n+k)!}$, следовательно

$$||q_n||^2 = \frac{(2n+k)!n!}{(n+k)!} \int_0^1 t^n (1-t)^{n+k}\, dt = \frac{(2n+k)!n!}{(n+k)!} \frac{(n+k)!n!}{(2n+k+1)!},$$

откуда $||q_n|| = \frac{n!}{\sqrt{2n+k+1}}$. Из последней формулы заключаем, что ортонормированные полиномы

$$P_m(t) = \frac{\sqrt{2m+k+1}}{m!} \frac{1}{(t-1)^k} \frac{d^m}{dt^m} r_m(t)$$

удовлетворяют равенству $P_m(0) = (-1)^m \sqrt{2m+k+1}$. Разложим полином $1 - a_1 t - \dots - a_m t^m$ по ортонормированному базису $\{P_k\}_0^m$:

$$1 - a_1 t - \dots - a_m t^m = \alpha_0 P_0(t) + \alpha_1 P_1(t) + \dots + \alpha_m P_m(t).$$

Тогда

$$\int_0^1 (1-t)^k (1 - a_1 t - \dots - a_m t^m)^2\, dt = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2.$$

Минимум данной суммы при условии

$$\alpha_0 \sqrt{k+1} - \alpha_1 \sqrt{k+3} + \dots + (-1)^m \alpha_m \sqrt{2m+k+1} = 1,$$

равен $[(m+1)(m+k+1)]^{-1}$. Лемма 1 доказана.

Найдем теперь явный вид минимизирующего полинома. Выражение I_{km} может быть интерпретировано как квадрат расстояния от полинома $P_0(t) \equiv 1$ до подпространства полиномов порядка не превышающих m без свободного члена в пространстве $L^2_w(0,1)$, где $w(t) = (1-t)^k$. Следовательно $\nu_m(t) = 1 - a_1 t - \dots - a_m t^m$ ортогонален мономам t^s, $s = 1, \dots, m$, означающий, что $\nu_m(t)$ является m-ым ортогональным полиномом по отношению к весу $w'(t) = t(1-t)^k$. Таким образом

$$\nu_m(t) = \frac{C}{t(t-1)^k} \frac{d^m}{dt^m} \left[t^{m+1}(t-1)^{m+k}\right].$$

Постоянную C можно найти из условия нормировки $\nu_m(0) = 1$, т.е. $C = 1$.

Доказательство леммы 2. Из (7) и (15) имеем $b_n = c_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Следовательно, уравнение (8) при $b < c_n$ не имеет решения. Пусть $b = c_n$. Согласно лемме 4, уравнение (8) разрешимо. Осталось доказать, что оно единственно. Так как $b_n = c_n$, то уравнение (8) при $b = c_n$ можно записать в виде

$$||P_n|| = b_n. \tag{35}$$

Пусть $n = 2m$, $m \geq 1$ и P_n – решение уравнения (35). Тогда по теореме Маркова-Лукача $P_n(x) = (1 - q_m(x))^2$, где q_m – некоторый полином порядка m, а $q_m(0) = 0$. Из (15) и (35) получим

$$\int_0^1 (1-x)(1-q_m(x))^2\, dx = I_{1m},$$

что означает, что q_m – наилучшее квадратичное приближение функции $f(x) \equiv 1$ (с весом $w(x) = 1 - x$) на отрезке $[0, 1]$ линейными комбинациями $c_1 x + \ldots + c_m x^m$. Известно (ср. [3], Гл. 1, 9), что такое приближение определено единственным образом, поэтому уравнение (8) при $b = c_n$ имеет единственное решение.

Пусть теперь $b > c_n$ и ω – функция из леммы 4. Частное решение уравнения (8) ищем в виде $P_n(x) = \omega(x) + \alpha x + \beta x^2$, где α и β – неотрицательные постоянные. Подставляя P_n в (8) и имея ввиду, что $||\omega|| = b_n = c_n$, получим $\beta + 2\alpha = 2(b - c_n) > 0$, откуда следует, что уравнение (8) имеет бесконечное число решений. Лемма 2 доказана.

Abstract. The paper applies certain integral representation of convex functions to the description of trajectories of an aircraft and determination of its range.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, Проблема Моментов Маркова и Экстремальные Проблемы, Москва, Наука, 1995.
2. N. E. Tovmasyan, "Boundary value problems for some classes of ordinary quasi-linear differential equations and applications", in Nonlinear Differential Equations, Publ. National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, 1997.
3. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, Наука, Москва, 1965.

Поступила 26 ноября 2002

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 38, Номер 2, 2003

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 38, No. 2, 2003

Contents