ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 3-22

ОБ ОБЛАСТИ E-ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ КАНАЛА С МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ

М. Е. Арутюнян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕГУ

Резюме. Для различных моделей дискретного канала с множественным доступом без памяти получены исправленные внутренние оценки областей E-пропускной способности при средней вероятности ошибки.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретный канал без памяти с множественным доступом (КМД) с двумя кодерами и одним декодером $W_M = \{W : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}\}$ определяется матрицей переходных вероятностей

$$W_M = \{W(y|x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}\},$$

где $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ – конечные алфавиты первого и второго входов канала, соответственно, а $\mathcal{Y}$ – конечный алфавит выхода. Предположим, что у канала отсутствует память, т.е. для последовательности длины N $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N}) \in \mathcal{X}_1^N$, $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2N}) \in \mathcal{X}_2^N$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathcal{Y}^N$, переходные вероятности задаются следующим образом :

$$W^N(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \prod_{n=1}^{N} W(y_n|x_{1n}, x_{2n}).$$

Первая модель КМД, исследуемая ниже, является наиболее общей : КМД с коррелированными источниками, впервые изученными Слепяном и Вулфом [1]. Три независимых источника (Рис. 1) создают сообщения для передачи двумя

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS Grant No. 00-738.

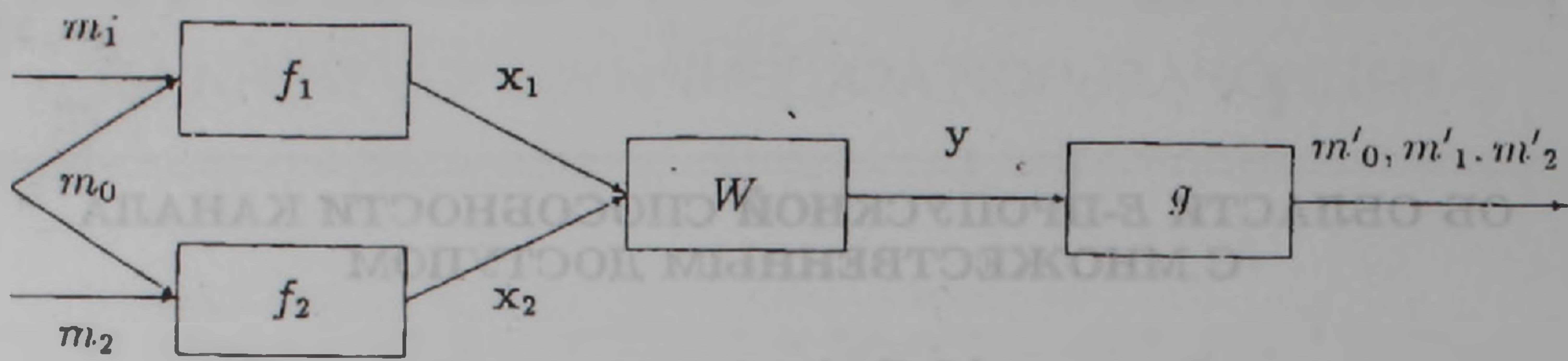

Рис.1. КМД с коррелированными источниками

кодерами. Один из источников связан двумя кодерами, а каждый из двух других связан только с одним из кодеров.

Пусть $\mathcal{M}_0 = \{1, 2, ..., M_0\}$, $\mathcal{M}_1 = \{1, 2, ..., M_1\}$ и $\mathcal{M}_2 = \{1, 2, ..., M_2\}$ – множества сообщений соответствующих источников. Кодом длины N является набор отображений (f_1, f_2, g), где $f_1 : \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \to \mathcal{X}_1^N$ и $f_2 : \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_2 \to \mathcal{X}_2^N$ – кодирования, а $g : \mathcal{Y}^N \to \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ – декодирование. Числа $\frac{1}{N} \log M_i$, $i = 0, 1, 2$, называются скоростями кода. Используем логарифмические и экспоненциальные функции по основанию 2. Обозначим

$$f_1(m_0, m_1) = \mathrm{x}_1(m_0, m_1), \quad f_2(m_0, m_2) = \mathrm{x}_2(m_0, m_2),$$

$$g^{-1}(m_0, m_1, m_2) = \{\mathrm{y} : g(\mathrm{y}) = (m_0, m_1, m_2)\},$$

тогда

$$e(m_0, m_1, m_2) = W^N\{\mathcal{Y}^N - g^{-1}(m_0, m_1, m_2) | f_1(m_0, m_1), f_2(m_0, m_2)\} \tag{1}$$

есть вероятность ошибки при передаче сообщений m_0, m_1 и m_2. Изучаем "среднюю вероятность ошибки кода" :

$$\bar{e}(f_1, f_2, g, N, W_M) = \frac{1}{M_0 M_1 M_2} \sum_{m_0, m_1, m_2} e(m_0, m_1, m_2). \tag{2}$$

Иногда рассматривается максимальная вероятность ошибки кода :

$$e(f_1, f_2, g, N, W_M) = \max_{m_0, m_1, m_2} e(m_0, m_1, m_2).$$

Для заданного положительного числа E (называется надежностью), числа R_0, R_1, $R_2 > 0$ называются E-достижимыми скоростями для W_M, если для любых $\delta_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, при достаточно больших N существует код такой, что

$$\frac{1}{N} \log M_i \geq R_i - \delta_i, \ i = 0, 1, 2, \tag{3}$$

и средняя вероятность ошибки удовлетворяет условию

$$\overline{e}(f_1, f_2, g, N, W_M) \leq \exp\{-NE\}. \tag{4}$$

В (R_0, R_1, R_2)-пространстве область всех троек E-достижимых скоростей называется областью E-пропускной способности при средней вероятности ошибки и обозначается через $\overline{C}(E, W_M)$. Когда $E \to 0$, получаем область пропускной способности $\overline{C}(W_M)$ канала W_M при средней вероятности ошибки.

Дуек [2] показал, что, вообще говоря, область пропускной способности КМД при максимальной вероятности ошибки меньше чем соответствующая область при средней вероятности ошибки.

В [1] найдена область достижимых скоростей КМД с коррелированными источниками, а в [3] получена оценка сферической упаковки.

В частном случае $M_0 = 1$ (Рис. 2) имеем классический КМД, впервые изученный Алсведе [4], [5] и Ван дер Меленом [6].

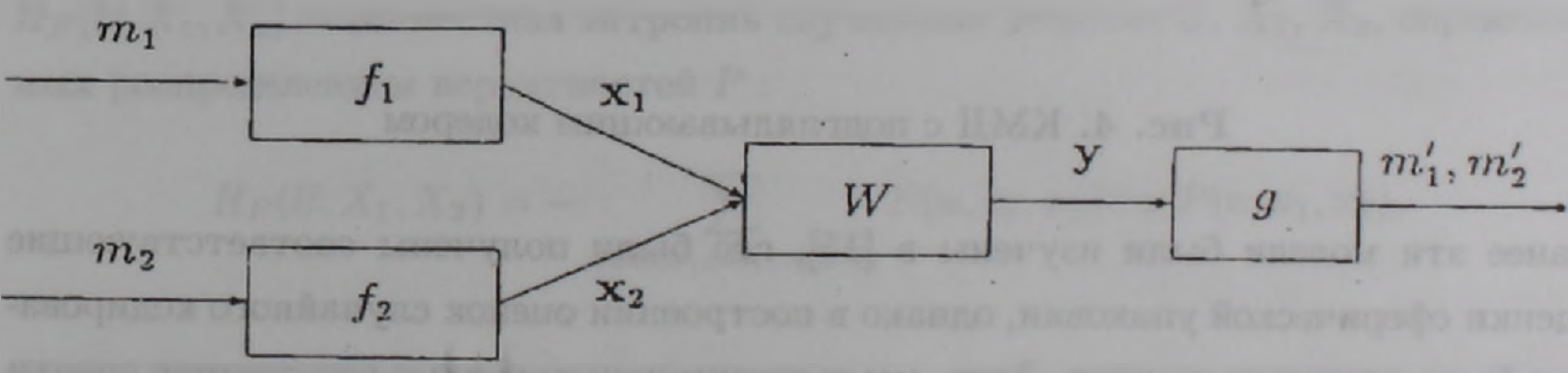

Рис. 2. Обычный КМД

Различные оценки для экспоненты вероятности ошибки получены в [7] — [10]. Модель с $M_1 = 1$ (Рис. 3), называется асимметричным КМД. Он был рассмотрен Арутюняном [3] и Ван дер Меленом [11]. В этой модели один из двух источников имеет доступ только к одному из кодеров, тогда как другой источник имеет доступ к обоим кодерам.

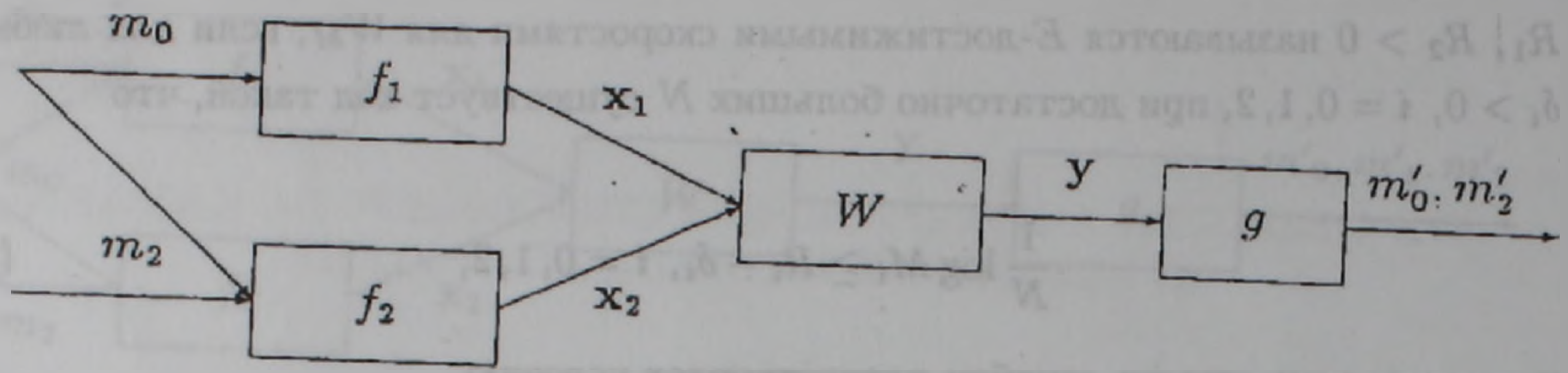

Рис. 3. Асимметричный КМД

Виллемс и Ван дер Мелен [12], [13] описали области пропускных способностей для различных КМД с подглядывающими кодерами. В данной статье мы рассмотрим случай (Рис. 4), изученный Ван дер Меленом [14], когда первый кодер имеет информацию о кодовом слове, созданном вторым кодером.

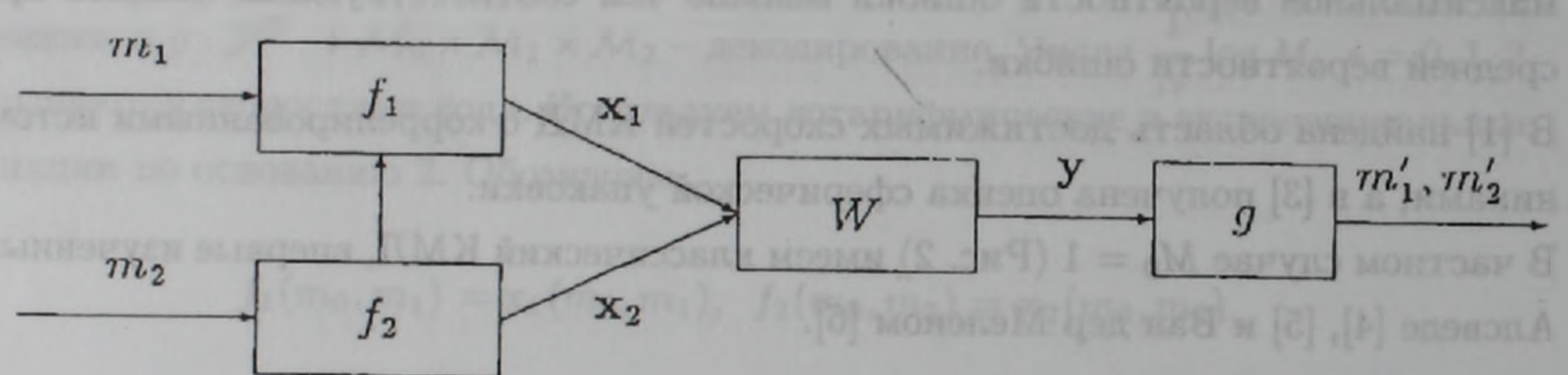

Рис. 4. КМД с подглядывающим кодером

Ранее эти модели были изучены в [15], где были получены соответствующие оценки сферической упаковки, однако в построении оценок случайного кодирования была допущена ошибка. Здесь мы выводим исправленные внутренние оценки областей E-пропускной способности для тех же случаев.

§2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим вспомогательную случайную величину U со значениями в конечном множестве $\mathcal{U}$. Пусть случайные величины U, X_1, X_2, Y со значениями в алфавитах $\mathcal{U}, \mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y}$ соответственно, образуют цепь Маркова $U \ominus X_1 X_2 \ominus Y$ и задаются следующими распределениями вероятностей :

$$P_0 = \{P_0(u), u \in \mathcal{U}\},$$

$$P_i^* = \{P_i^*(x_i|u), x_i \in \mathcal{X}_i\}, \; i = 1, 2,$$

$$P^* = \{P_0(u)P_1^*(x_1|u)P_2^*(x_2|u), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

$$P = \{P(u, x_1, x_2) = P_0(u)P(x_1, x_2|u), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

$$\sum_{x_{3-i}} P(x_1, x_2|u) = P_i^*(x_i|u), \; i = 1, 2,$$

и совместным распределением вероятностей

$$P \circ V = \{P_0(u)P(x_1, x_2|u)V(y|x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}\},$$

где $V = \{V(y|x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}\}$ – некоторое условное распределение вероятностей.

Обозначения энтропии, взаимной информации, дивергенции, также как понятия типов и условных типов и их оценки можно найти в [16] — [18]. В частности, мы используем следующие обозначения :

$H_{P_0, P_i^*}(X_i|U)$ = условная энтропия случайной величины X_i с распределением вероятностей P_i^* (при заданном U) :

$$H_{P_0, P_i^*}(X_i|U) = -\sum_{u \in \mathcal{U}, x_i \in \mathcal{X}_i} P_0(u)P_i^*(x_i|u) \log P_i^*(x_i|u),$$

$H_P(U, X_1, X_2)$ = совместная энтропия случайных величин U, X_1, X_2, определяемых распределением вероятностей P :

$$H_P(U, X_1, X_2) = -\sum_{u \in \mathcal{U}, x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2} P(u, x_1, x_2) \log P(u, x_1, x_2),$$

$H_{P,V}(Y|X_1, X_2)$ = условная энтропия случайной величины Y при заданных X_1, X_2 :

$$H_{P,V}(Y|X_1, X_2) = -\sum_{u \in \mathcal{U}, x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y \in \mathcal{Y}} P(u, x_1, x_2)V(y|x_1, x_2) \log V(y|x_1, x_2),$$

$I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)$ = взаимная информация случайных величин X_1, X_2 и Y :

$$I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) =$$

$$= \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2,y\in\mathcal{Y}} P(u,x_1,x_2)V(y|x_1,x_2)\log\frac{V(y|x_1,x_2)}{\sum\limits_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P\circ V(u,x_1,x_2,y)};$$

$I_P(X_1\wedge X_2|U)$ = условная взаимная информация случайных величин X_1 и X_2, при заданном U :

$$I_P(X_1\wedge X_2|U) = -\sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P(u,x_1,x_2)\log\frac{P(x_1|u,x_2)}{P^*(x_1|u)};$$

$D(P\|P^*)$ = информационная дивергенция Кульбака-Лейблера распределений вероятностей P и P^* :

$$D(P\|P^*) = \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P(u,x_1,x_2)\log\frac{P(u,x_1,x_2)}{P_0(u)P_1^*(x_1|u)P_2^*(x_2|u)} =$$

$$= \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2} P(u,x_1,x_2)\log\frac{P(x_1,x_2|u)}{P_1^*(x_1|u)P_2^*(x_2|u)},$$

$D(V\|W|P)$ = условная дивергенция распределений вероятностей $P\circ V$ и $P\circ W$:

$$D(V\|W|P) = \sum_{u\in\mathcal{U},x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2,y\in\mathcal{Y}} P(u,x_1,x_2)V(y|x_1,x_2)\log\frac{V(y|x_1,x_2)}{W(y|x_1,x_2)}.$$

Также будем использовать следующие тождества :

$$H_{P,V}(X_1,X_2,Y|U) = H_P(X_1,X_2|U) + H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U),$$

$$I_{P,V}(X_1,X_2\wedge Y) = I_{P,V}(Y\wedge X_1,X_2) = I_{P,V}(Y\wedge U,X_1,X_2) =$$

$$= H_{P,V}(Y) - H_{P,V}(Y|X_1,X_2) = H_P(U,X_1,X_2) + H_{P,V}(Y) - H_{P,V}(U,X_1,X_2,Y) =$$

$$= I_{P,V}(U\wedge Y) + I_{P,V}(X_1\wedge Y|U) + I_{P,V}(X_2\wedge Y|U,X_1),$$

$$D(P\circ V\|P^*\circ W) = D(P\|P^*) + D(V\|W|P), \qquad D(P\|P^*) = I_P(X_1\wedge X_2|U).$$

Доказательства в данной работе основаны на понятии типа. Пусть $N(u|\mathbf{u})$ – число повторений элемента u в векторе $\mathbf{u} = (u_1,...,u_N)\in\mathcal{U}^N$. Типом P_0 вектора $\mathbf{u}$ называется распределение вероятностей

$$P_0 = \{P_0(u) = \frac{N(u|\mathbf{u})}{N}\ \ u\in\mathcal{U}\}. \tag{5}$$

Множество всех последовательностей $\mathbf{u}$ типа P_0 на $\mathcal{U}^N$ обозначается через $\mathcal{T}_{P_0}^N(U)$ и часто также называется типом P_0. Любое распределение вероятностей P_0 вида (5) может рассматриваться как тип векторов из $\mathcal{U}^N$.

Если $N(x_1,u|\mathbf{x}_1,\mathbf{u})$ есть число пар (x_1,u) в $(\mathbf{x}_1,\mathbf{u}) \in \mathcal{X}_1^N \times \mathcal{U}^N$, то совместный тип последовательностей $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1^N$ и $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^N$ определяется следующим образом :

$$P_1^* = \{P_1^*(x_1,u) = \frac{N(x_1,u|\mathbf{x}_1,\mathbf{u})}{N}, x_1 \in \mathcal{X}_1,\ u \in \mathcal{U}\}.$$

При заданном $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^N$ будем говорить, что элемент $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1^N$ имеет условный тип $P_1^* = \{P_1^*(x_1|u),\ x_1 \in \mathcal{X}_1,\ u \in \mathcal{U}\}$, если $N(x_1,u|\mathbf{x}_1,\mathbf{u}) = N(u|\mathbf{u})P_1^*(x_1|u)$, $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $u \in \mathcal{U}$.

При заданном векторе $\mathbf{u} \in \mathcal{T}_{P_0}^N(U)$ множество всех последовательностей $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}_1^N$ условного типа P_1^* обозначается через $\mathcal{T}_{P_0,P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u})$. Множества $\mathcal{T}_P^N(X_1,X_2|\mathbf{u})$, $\mathcal{T}_P^N(X_1,X_2)$, $\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ определяются аналогичным образом.

В доказательствах используются следующие утверждения :

a) для $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \in \mathcal{T}_P^N(X_1X_2), \mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P,V}^N(Y|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$

$$W^N(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \exp\{-N(H_{P,V}(Y|X_1,X_2) + D(V\|W|P))\}, \tag{6}$$

b) число различных типов последовательностей $\mathbf{u}$ при фиксированном N не превышает $(N+1)^{|\mathcal{U}|}$,

c) при любом типе P_0 число элементов множества $\mathcal{T}_{P_0}^N(U)$ допускает следующую двустороннюю оценку :

$$(N+1)^{-|\mathcal{U}|}\exp\{NH_{P_0}(U)\} \le |\mathcal{T}_{P_0}^N(U)| \le \exp\{NH_{P_0}(U)\}.$$

Чтобы определить область случайного кодирования $\mathcal{R}_r(E,W_M)$ воспользуемся понятием условной взаимной информации для трёх случайных величин, введённым в [10] :

$$I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) = H_{P_1^*}(X_1|U) + H_{P_2^*}(X_2|U) + H_{P,V}(Y|U) - H_{P,V}(Y,X_1,X_2|U) =$$

$$= I_{P,V}(X_1,X_2 \wedge Y|U) + I_P(X_1 \wedge X_2|U).$$

Область **случайного кодирования** запишется следующим образом :

$$\mathcal{R}_r(P^*,E,W_M) = \{(R_0,R_1,R_2) : 0 \le R_i \le$$

$$\leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_i \wedge X_{3-i}, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+, \ i=1,2, \tag{7}$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+, \tag{8}$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_P(X_1 \wedge X_2|U) + \tag{9}$$

$$+ D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+\},$$

и $\mathcal{R}_r(E, W_M) = co\{\bigcup_{P^*} \mathcal{R}_r(P^*, E, W_M)\}$, где $|a|^+ = \max(o, a)$ и $co\{\mathcal{R}\}$ – выпуклое замыкание области $\mathcal{R}$.

Следующая оценка **сферической упаковки** была получена в [15] :

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_0, R_1, R_2) :$$

$$0 \leq R_i \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_i \wedge Y|U, X_{3-i}), \ i=1,2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y|U),$$

$$R_0 + R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\},$$

и $\mathcal{R}_{sp}(E, W_M) = co\{\bigcup_P \mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M)\}$.

Теперь мы можем сформулировать наши основные результаты.

Теорема 1. *При всех $E > 0$ для КМД с коррелированными источниками*

$$\mathcal{R}_r(E, W_M) \subseteq \overline{C}(E, W_M) \subseteq \mathcal{R}_{sp}(E, W_M).$$

Следствие. Когда $E \to 0$, получаем внешнюю и внутреннюю оценки области пропускной способности канала. Внутренняя граница совпадает с областью пропускной способности :

$$\mathcal{R}_r(P^*, W_M) = \{(R_0, R_1, R_2) : \ 0 \leq R_i \leq I_{P^*,W}(X_i \wedge Y|X_{3-i}, U), \ i=1,2,$$

$$R_1 + R_2 \leq I_{P^*,W}(X_1, X_2 \wedge Y|U), \quad R_0 + R_1 + R_2 \leq I_{P^*,W}(X_1, X_2 \wedge Y)\}. \tag{10}$$

Внутренняя граница имеет аналогичную форму с вероятностными распределениями P вместо P^*.

Замечание. Область пропускной способности (10), получена в [1], где показано, что в данном случае достаточно рассматривать такие U, для которых $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{Y}| + 3$.

В частных случаях получаются следующие результаты :

Теорема 2. *Для обычного КМД* ($R_0 = 0$)

$$\mathcal{R}_r(P^*, E, W_M) = \{(R_1, R_2) : 0 \leq R_i \leq$$

$$\leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_i \wedge X_{3-i}, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ \ , \ i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{P,V:D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+\}$$

является внутренней границей области E-пропускной способности, а

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_1, R_2) : \ 0 \leq R_i \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_i \wedge Y|X_{3-i}), \ i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\}$$

является внешней границей.

В [10] установлено, что в данном случае достаточно рассмотреть такие U, для которых $|\mathcal{U}| = 4$.

Теорема 3. *Для асимметричного КМД* ($R_1 = 0$) *имеем*

$$\mathcal{R}_r(P, E, W_M) = \{(R_0, R_2) :$$

$$0 \leq R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(X_2 \wedge Y|X_1) + D(V\|W|P) - E|^+ \ ,$$

$$R_0 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + D(V\|W|P) - E|^+\},$$

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_0, R_2) : \ 0 \leq R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_2 \wedge Y|X_1),$$

$$R_0 + R_2 \leq \min_{V:D(V\|W|P)\leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\}.$$

В этом случае, когда $E \to 0$, внешние и внутренние границы равны и совпадают с областью пропускной способности асимметричного КМД MAC [3], [11].

Теорема 4. *Для КМД с подглядывающими кодерами внешние и внутренние оценки Теоремы 2 точны, и при $E \to 0$ они сводятся к области пропускной способности канала :*

$\mathcal{R}_r(P, E, W_M) = \{(R_1, R_2) :$

$$0 \leq R_i \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} |I_{P,V}(X_i \wedge Y|X_{3-i}) + D(V\|W|P) - E|^+, \ i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + D(V\|W|P) - E|^+\},$$

$$\mathcal{R}_{sp}(P, E, W_M) = \{(R_1, R_2) : 0 \leq R_i \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(X_i \wedge Y|X_{3-i}), \quad i = 1, 2,$$

$$R_1 + R_2 \leq \min_{V: D(V\|W|P) \leq E} I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y)\}.$$

Отметим, что все оценки, полученные в Теоремах 1 – 4, непрерывны по E и являются замкнутыми областями. В случае асимметричного КМД, так же как и для КМД с подглядывающими кодерами, полученные границы совпадают при малых значениях E. В остальных случаях внешние и внутренние границы не совпадают. Причина в том, что вообще говоря, граница сферической упаковки $\mathcal{R}_{sp}(E, W_M)$ в Теореме 1 не точна. Граница случайного кодирования $\mathcal{R}_r(E, W_M)$ в Теореме 1 точна, поскольку её предел при $E \to 0$ совпадает с пропускной способностью канала.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКИ В ТЕОРЕМЕ 1

Доказательство основано на следующей модификации леммы об упаковке [16].

Лемма. *Пусть для любых $E > 0$, $\delta \in (0, E)$ и типа P^*, если*

$$0 \leq N^{-1} \log M_i \leq$$

$$\leq \min_{P,V: D(P \circ V\|P^* \circ W) \leq E} |I_{P,V}(X_i \wedge X_{3-i}, Y|U) + D(P \circ V\|P^* \circ W) - E|^+, \ i = 1, 2, \tag{11}$$

$$N^{-1} \log(M_1 M_2) \leq \min_{P,V: D(P \circ V\|P^* \circ W) \leq E} |I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) + \\ + D(P \circ V\|P^* \circ W) - E|^+, \tag{12}$$

$$N^{-1} \log(M_0 M_1 M_2) \leq \min_{P,V: D(P \circ V\|P^* \circ W) \leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_P(X_1 \wedge X_2|U) +$$

$$+D(P \circ V \| P^* \circ W) - E|^+\}, \tag{13}$$

то существуют M_0 векторов $\mathbf{u}(m_0) \in \mathcal{T}^N_{P_0}(U)$ и для каждого $\mathbf{u}(m_0)$ существуют M_1 векторов $f_1(m_0, m_1) \in \mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))$ и M_2 векторов $f_2(m_0, m_2) \in \mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))$ такие, что для типов $P : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, $P' : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, $V : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}$, $V' : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}$ и для достаточно больших N имеют место неравенства :

$$\sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)} \left| \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \dot{\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}} \right.$$

$$\left. \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2')) \right| \leq$$

$$\leq M_0 M_1 M_2 \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\right| \times \exp\{-N \left|E - D(P' \circ V' \| P^* \circ W)\right|^+\} \times$$

$$\times \exp\{-N(D(P\|P^*) - \delta)\}, \tag{14}$$

где $f(m_0, m_1, m_2) = (\mathbf{u}(m_0), f_1(m_0, m_1), f_2(m_0, m_2))$.
Доказательство Леммы приведено в Приложении.

Доказательство внутренней границы в Теореме 1. Нужно показать существование кода (f_1, f_2, g) длины N с M_0, M_1, M_2, удовлетворяющими (3), (11), (12), (13), и средней вероятностью ошибки (2), удовлетворяющей (4). Существование кодовых слов $f_1(m_0, m_1) \in \mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1)$ и $f_2(m_0, m_2) \in \mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2)$, удовлетворяющих (14), следует из Леммы. Воспользуемся следующим методом декодирования : каждому $\mathbf{y}$ ставится в соответствие тройка (m_0, m_1, m_2), для которой $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2))$, где P, V таковы, что $D(P \circ V \| P^* \circ W)$ минимально. Для сообщений (m_0, m_1, m_2) может возникнуть ошибка декодирования, если существуют некоторые $(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)$ и P', V_1' такие, что

$$\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))$$

и

$$D(P' \circ V' \| P^* \circ W) \leq D(P \circ V \| P^* \circ W). \tag{15}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{D} = \{P', V, V'$, для которых имеет место (15)$\}$. Среднюю вероятность ошибки можно оценить сверху следующим образом :

$$\frac{1}{M_0 M_1 M_2} \sum_{m_0,m_1,m_2} e(m_0, m_1, m_2) \leq$$

$$\leq \frac{1}{M_0M_1M_2}\sum_{P}\sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}_P^N(X_1,X_2,U)} W^N\{\bigcup_{\mathcal{D}}\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap$$

$$\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}\mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))|f_1(m_0,m_1),f_2(m_0,m_2)\}\leq$$

$$\leq \frac{1}{M_0M_1M_2}\sum_{P}\sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}_P^N(X_1,X_2,U)}\sum_{\mathcal{D}} W^N\{\mathbf{y}|f_1(m_0,m_1),f_2(m_0,m_2)\}\times$$

$$\times\left|\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}\mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right|.$$

Наконец, из (6) и (14) для достаточно больших N получим

$$\frac{1}{M_0M_1M_2}\sum_{m_0,m_1,m_2} e(m_0,m_1,m_2)\leq\sum_{P,\mathcal{D}}\exp\{-N(H_{P,V}(Y|X_1,X_2)+D(V\|W|P))\}\times$$

$$\times\exp\{N(H_{P,V}(Y|U,X_1,X_2)+D(P'\circ V'\|P^*\circ W)-E-D(P\|P^*)+\delta)\}\leq$$

$$\leq(N+1)^{2|\mathcal{X}_1||\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|(1+|\mathcal{Y}_1|)}\exp\{-N(E-\delta)\}\leq\exp\{-N(E-2\delta)\}.$$

Учитывая непрерывность вместо типов можно рассматривать произвольные распределения вероятностей. Внутренняя граница Теоремы 1 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Леммы. Выберем случайно M_0 векторов $\mathbf{u}(m_0)$ из $\mathcal{T}_{P_0}^N(U)$, M_1 векторов $\mathbf{x}_1(m_0,m_1)$ из $\mathcal{T}_{P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u}(m_0))$ и M_2 векторов $\mathbf{x}_2(m_0,m_2)$ из $\mathcal{T}_{P_2^*}^N(X_2|\mathbf{u}(m_0))$. Пусть P' и V' таковы, что $D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E$. Имеем

$$\exp\{-N\left|E-D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\right|^+\}=1.$$

Так как

$$\left|\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}\mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right|\leq$$

$$\leq \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\right|,$$

то для доказательства (14) достаточно показать, что

$$\frac{|\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2} \leq \exp\{-N(D(P\|P^*)-\delta\}.$$

Отметим, что (14) можно записать в виде

$$\frac{1}{M_0M_1M_2} \sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1,X_2,U)} \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\right.$$

$$\left.\bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P,V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| \times$$

$$\times \exp\{N(D(P\|P^*)-H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U)+E-D(P'\circ V'\|P^*\circ W)-\delta)\} \leq 1. \quad (16)$$

Чтобы показать, что неравенство (16) имеет место для всех P,V и P',V', удовлетворяющих условию $D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\leq E$, достаточно доказать неравенство

$$\frac{1}{M_0M_1M_2} \sum_{f(m_0,m_1,m_2)\in\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1,X_2,U)} \sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\leq E}$$

$$\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)}\right.$$

$$\left.\mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| \exp\{N(D(P\|P^*)-H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U)+ \quad (17)$$

$$E-D(P'\circ V'\|P^*\circ W)-\delta)\} + \sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E}$$

$$\frac{|\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2\ .} \times \exp\{N(D(P\|P^*)-\delta)\} \leq 1.$$

Докажем, что

$$\sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\leq E} \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap\right.$$

$$\bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\Bigg| \times$$

$$\times \exp\{N(D(P\|P^*) - H_{P,V}(Y|X_1,X_2,U) + E - D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - \delta)\} +$$

$$+\sum_{P,V}\sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E} \mathbf{E}\frac{|\mathcal{T}^N_P(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2}\times \tag{18}$$

$$\times \exp\{N(D(P\|P^*)-\delta)\} \le 1.$$

Это означает, что существует хотя бы один код, который удовлетворяет неравенству (17). Для этого оценим математическое ожидание

$$J = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{(m_0',m_1',m_2')\neq(m_0,m_1,m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| =$$

$$= \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_0'\neq m_0}\bigcup_{(m_1',m_2')} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| +$$

$$+\mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_2'\neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1,m_2'))\right| + \tag{19}$$

$$+\mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2))\right| +$$

$$+\mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1,m_2'\neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2'))\right| :=$$

$$:= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Так как $f(m_0, m_1, m_2)$ и $f(m_0', m_1', m_2')$ выбираются независимыми, то для J_1 получим

$$J_1 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_0' \neq m_0} \bigcup_{(m_1',m_2')} \mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_0' \neq m_0} \bigcup_{(m_1',m_2')} \tag{20}$$

$$\mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\} \leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times$$

$$\sum_{m_0' \neq m_0} \sum_{(m_1',m_2')} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\}.$$

Для того, чтобы получить оценку вероятности в (18) мы должны предположить, что $\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P,V}^N(Y)$. Отсюда получаем

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} = \frac{|\mathcal{T}_{P,V}^N(X_1,X_2,U|\mathbf{y})|}{|\mathcal{T}_{P_0}^N(U)|\left|\mathcal{T}_{P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u}(m_0))\right|\left|\mathcal{T}_{P_2^*}^N(X_2|\mathbf{u}(m_0))\right|} =$$

$$= \frac{|\mathcal{T}_{P,V}^N(U|\mathbf{y})||\mathcal{T}_{P,V}^N(X_1|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0))|\,|\mathcal{T}_{P,V}^N(X_2|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1))|}{|\mathcal{T}_{P_0}^N(U)|\left|\mathcal{T}_{P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u}(m_0))\right|\left|\mathcal{T}_{P_2^*}^N(X_2|\mathbf{u}(m_0))\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} \exp\{-N(I_{P,V}(X_1,X_2,U \wedge Y) + I_P(X_2 \wedge X_1|U))\}.$$

Вторая вероятность в (18) оценивается аналогично

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0',m_1',m_2'))\} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} \exp\{-N(I_{P',V'}(X_1,X_2 \wedge Y) + I_{P'}(X_2 \wedge X_1|U))\}.$$

Теперь оценим J_2 :

$$J_2 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}_{P,V}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_2' \neq m_2} \mathcal{T}_{P',V'}^N(Y|f(m_0,m_1,m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times \sum_{m_2'\neq m_2} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1,m_2'))\}. \tag{21}$$

Первая вероятность в (21) положительна, если $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), f_1(m_0,m_1))$. Она оценивается следующим образом :

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} = \frac{\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_2|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_1(m_0,m_1))\right|}{\left|\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_2\wedge Y|X_1,U) + I_P(X_2\wedge X_1|U))\} =$$
$$= (N+1)^{-|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_2\wedge X_1,Y|U)\}.$$

Аналогично оценивается вторая вероятность в (21).

Далее, J_3 оценивается следующим образом :

$$J_3 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times \sum_{m_1'\neq m_1} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2))\}, \tag{22}$$

где по условию положительности $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0), f_2(m_0,m_2))$ и

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} = \frac{\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1|\mathbf{y},\mathbf{u}(m_0),\mathbf{x}_2(m_0,m_2))\right|}{\left|\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1\wedge X_2,Y|U)\}.$$

Наконец

$$J_4 = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} \mathcal{T}^N_{P',V_1'}(Y|f(m_0,m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}^N} \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0,m_1,m_2))\} \times \sum_{m_1'\neq m_1, m_2'\neq m_2} \tag{23}$$

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0,m_1',m_2'))\},$$

последнее выражение положительно, только если $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}(m_0))$ и

$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2))\} =$$

$$= \frac{|\mathcal{T}^N_{P,V}(X_1|\mathbf{y}, \mathbf{u}(m_0))||\mathcal{T}^N_{P,V}(X_2|\mathbf{y}, \mathbf{u}(m_0), \mathbf{x}_1(m_0, m_2))|}{|\mathcal{T}^N_{P_1^*}(X_1|\mathbf{u}(m_0))||\mathcal{T}^N_{P_2^*}(X_2|\mathbf{u}(m_0))|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{-(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} \exp\{-NI_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U)\}.$$

В силу (22), (23) получим

$$J = \mathbf{E}\left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2)) \bigcap \bigcup_{(m_0', m_1', m_2') \neq (m_0, m_1, m_2)} \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0', m_1', m_2'))\right| \leq$$

$$\leq |\mathcal{T}^N_{P,V}(Y)| \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2))\}(M_0 - 1)M_1 M_2$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0', m_1', m_2'))\} +$$
$$+ \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}, \mathbf{x}_1)\right| \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2))\}(M_2 - 1)$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0, m_1, m_2'))\} +$$
$$+ \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u}, \mathbf{x}_2)\right| \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2))\}(M_1 - 1)$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0, m_1', m_2))\} +$$
$$+ \left|\mathcal{T}^N_{P,V}(Y|\mathbf{u})\right| \Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P,V}(Y|f(m_0, m_1, m_2))\}(M_1 M_2 - 1)$$
$$\Pr\{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^N_{P',V'}(Y|f(m_0, m_1', m_2'))\}.$$

Согласно (11)–(13) и (24) имеем

$$J \leq (N+1)^{-2(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} \exp\{-N(I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_P(X_2 \wedge X_1|U) - H_{P,V}(Y)\} \times$$

$$\times \exp\{-N(I_{P',V'}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_{P'}(X_2 \wedge X_1|U))\} \times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V: D(P \circ V \| P^* \circ W) \leq E} |I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_P(X_2 \wedge X_1|U) +$$

$$+ D(P \circ V \| P^* \circ W) - E|^+ - \delta\} +$$

$$+ (N+1)^{-2|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|} \exp\{-N(I_{P,V}(X_2 \wedge X_1, Y|U) - H_{P,V}(Y|U, X_1)\} \times$$

$$\times \exp\{-NI_{P',V'}(X_2 \wedge X_1, Y|U)\} \times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V: D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_2\wedge X_1, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ - \delta\} +$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U) - H_{P,V}(Y|U,X_2)\}\times$$

$$\times \exp\{-NI_{P',V'}(X_1\wedge X_2, Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V: D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ - \delta\} +$$

$$+(N+1)^{-2(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U) - H_{P,V}(Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{-NI_{P',V'}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N \min_{P,V: D(P\circ V\|P^*\circ W)\leq E} |I_{P,V}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U) + D(P\circ V\|P^*\circ W) - E|^+ - \delta\}. \tag{25}$$

Поскольку $\min_x f(x) \leq f(x')$, то из (25) получим

$$J \leq (N+1)^{-2(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-N(I_{P,V}(X_1, X_2\wedge Y) + I_{P,V}(X_2\wedge X_1|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E) - \delta\} +$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_2\wedge X_1, Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U,X_1) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E) - \delta\} +$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1\wedge X_2, Y|U)\}\times$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U,X_2) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E - \delta)\} +$$

$$+(N+1)^{-2(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-NI_{P,V}(X_1\wedge X_2\wedge Y|U)\}\times \tag{26}$$

$$\times \exp\{N(H_{P,V}(Y|U) + D(P'\circ V'\|P^*\circ W) - E - \delta)\}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}\frac{|\mathcal{T}_P^N(X_1,X_2,U)\bigcap f(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)|}{M_0M_1M_2} = \frac{|\mathcal{T}_P^N(X_1,X_2|\mathbf{u})|}{\left|\mathcal{T}_{P_1^*}^N(X_1|\mathbf{u})\right|\left|\mathcal{T}_{P_2^*}^N(X_2|\mathbf{u})\right|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|}\exp\{-ND(P\|P^*)\}. \tag{27}$$

Подставляя (25) и (27) в (17) и учитывая, что

$$I_{P,V}(X_1, X_2 \wedge Y) + I_{P,V}(X_2 \wedge X_1|U) - H_{P,V}(Y) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

$$I_{P,V}(X_2 \wedge X_1, Y|U) - H_{P,V}(Y|U, X_1) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

$$I_{P,V}(X_1 \wedge X_2, Y|U) - H_{P,V}(Y|U, X_2) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

$$I_{P,V}(X_1 \wedge X_2 \wedge Y|U) - H_{P,V}(Y|U) - D(P\|P^*) + H_{P,V}(Y|X_1, X_2, U) = 0,$$

для левой части (17) получим оценку сверху

$$\sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)\le E} \Big\{(N+1)^{-2(1+|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} +$$

$$+(N+1)^{-2|\mathcal{X}_2||\mathcal{U}|} + (N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|} + (N+1)^{-2|\mathcal{X}_1||\mathcal{U}|}\Big\} \exp\{-N\delta\} +$$

$$+\sum_{P,V} \sum_{P',V':D(P'\circ V'\|P^*\circ W)>E} (N+1)^{(|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|)|\mathcal{U}|} \exp\{-N\delta\}.$$

Легко видеть, что при достаточно большом N последнее выражение не превышает 1. Доказательство неравенства (17) завершено. Лемма доказана.

Abstract. For several models of discrete memoryless channels with multiple access some inner bounds of E-capacity regions for average error probability are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Slepian, J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources", Bell System Techn. J., vol. 52, pp. 1037 – 1076, 1973.
2. G. Dueck, "Maximal error capacity regions are smaller than average error capacity regions for multi-user channels", Problems of Control and Inform. Theory, vol. 7, no. 1, pp. 11 – 19, 1978.
3. Е. А. Арутюнян, "Нижняя граница вероятности ошибки для каналов со многими передающими сторонами", Проблемы Передачи Информатики, том 11, № 2, стр. 22 – 36, 1975.
4. R. F. Ahlswede, "Malty-way communication channels", 2nd Intern. Sympos. Inform. Theory. Tsahkadsor, Armenia, 1971, Budapest : Akad. Kiado, pp. 23 – 52, 1973.
5. R. F. Ahlswede, "The capacity region of a channel with two senders and two receivers", Ann. Probability, vol. 2. no. 2. pp. 805 – 814, 1974.

6. E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless channel with two senders and one receiver", Proc. 2nd Int. Sympos. Inform. Theory. Tsahkadsor, Armenia, 1971, Budapest : Akad. Kiado, pp. 103 – 135, 1973.

7. R. G. Gallager, "A perspective on multiaccess channels", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. 31, no. 1, pp. 124 – 142, 1985.

8. A. G. Dyachkov, "Random constant composition codes for multiple access channels", Problems of Control and Inform. Theory, vol. 13, no. 6, pp. 357 – 369, 1984.

9. J. Pokorny and H.M. Wallmeier, "Random coding bound and codes produced by permutations for the multiple-access channel", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-31, pp. 741 – 750, 1985.

10. Y. S. Liu and B. L. Hughes, "A new universal coding bound for the multiple-access channel", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-42, pp. 376 – 386, 1996.

11. E. C. Van der Meulen, "Some recent results on the asymmetric multiple-access channel", Proc. 2nd Joint Swedish-Soviet Intern. Workshop on Inform. Theory, Granna, Sweden, pp. 172 – 176, 1985.

12. F. M. J. Willems, "Information theoretical results for the discrete memoryless multiple access channel", P.h.D. dissertation, Katholieke university, Leuven, 156 p., 1982.

13. F. M. J. Willems, E. C. Van der Meulen, "The discrete memoryless multiple-access channel with cribbing encoders", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, no. 3, pp. 313 – 327, 1985.

14. E. C. Van der Meulen, "A Survey of multi-way channels in information theory : 1961 – 1976, IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. IT-23, no. 1, pp. 1 – 37, 1977.

15. Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, А. Е. Аветисян, "Область достижимых скоростей канала множественного доступа и надежность", Изв. АН Армении, Математика, том 27, № 5, 1992.

16. I. Csiszár, J. Körner, Information Theory. Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems, Budapest : Akad. Kiado, 1981.

17. I. Csiszár, "The method of types", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-44, pp. 2505 – 2523, 1998.

18. Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, "Границы области E-пропускной способности двустороннего канала с ограничениями", Проблемы Передачи Информации, том 34, № 3, стр. 7 – 16, 1998.

Поступила 11 июня 2002

Известия НАН Армении. Математика, **38**, № *1, 2003, 23-40*

О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КВАЗИПОЛИНОМАМИ ИЗ СИСТЕМЫ МЮНТЦА

Г. В. Бадалян, В. М. Едигарян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматривается задача наилучших среднеквадратичных приближений квазиполиномами из мюнтцевской системы функций. Предлагается метод приближения, который использует как квазиполиномы Лежандра, так и ассоциированные функции Неймана. Результаты работы устанавливают связь между дифференциальными свойствами функций и их приближениями.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для заданной последовательности чисел $\gamma = \{\gamma_\nu\}$, удовлетворяющих условиям

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{k+1} \ldots \tag{1.1}$$

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \geq 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \sum \gamma_\nu^{-1} = \infty, \tag{1.2}$$

рассмотрим наилучшее приближение в метрике $L^2(0,1)$ функции $f(x)$, определённой на $[0,1]$, полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^{\gamma_k}. \tag{1.3}$$

Предложенный метод приближения основан на квазиполиномах Лежандра, построенных Г. Бадаляном в [2], [3] и так называемых ассоциированных функциях Д. С. Неймана [4]. Сначала приведём несколько результатов из [4]. Пусть $\gamma = \{\gamma_\nu\}$ – последовательность чисел, удовлетворяющих (1.1), (1.2) и $\gamma_{k+1} - \gamma_k \geq 2$.

Определение 1. *Функция $g(x)$, определённая на $[-1,1]$, называется ассоциированной с $f(x) \in L^2(0,1)$, если*

1) $g(x) = f(x)$ на $[0,1]$, а на $[-1,0]$ $g(x)$ является чётным продолжением функции $f(x)$;

2) $g(x)$ продолжается на $(-\infty,\infty)$ как 2-периодическая функция.

Пусть $\omega_g(\delta)_{L^2(0,1)}$ – модуль непрерывности функции $g(x)$ в $L^2(-1,1)$:

$$\omega_g(\delta)_{L^2(0,1)} = \omega_g(\delta) = \sup_{|t|\le\delta}\left(\int_{-1}^{1}|g(x+t)-g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Теорема A, [4]. *Имеет место следующее неравенство :* $\inf_{P_n}\|f-P_n\|_{L^2(0,1)} \le c\omega_g(\varepsilon_\Lambda)$, $x\in[0,1]$, *где*

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k\, x^{\lambda_k}, \quad \varepsilon_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda_n} = \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu - 1/2}{\gamma_\nu + 1/2}. \tag{1.4}$$

Теорема B, [4]. *Если* $\omega_g(\delta)_{L^2}\le\delta$, *то*

$$\frac{\varepsilon_\Lambda}{4} \le \inf_{P_n}\left(\int_{-1}^{1}|f(x)-P_n(x)|^2dx\right)^{1/2} \le \varepsilon_\Lambda.$$

Отметим, что Теоремы A и B не затрагивают связи между дифференциальными свойствами функций $f(x)$ и их среднеквадратичными приближениями, частично изученными в [5] и [9]. Для системы Мюнтца $\{x^{\gamma_k}\}$ рассмотрим производные [1] :

$$\varphi^{[0]}(\chi) = \varphi(\chi); \quad \varphi^{[1]}(\chi) = \varphi'(\chi); \quad \varphi^{[k+1]}(\chi) = \left(\frac{\varphi^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}}}\right)', \quad k=1,2,\ldots \tag{1.5}$$

$$\left\{\varphi_k(\chi) = \left(\frac{\varphi^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)\right\}, \quad k=1,2,\ldots(\gamma_{-1}=-1) \tag{1.6}$$

и ортонормальную систему функций (см. [2], [3]) :

$$\widehat{\chi}_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i}\int_c \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\zeta-\gamma'_\nu)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}x^{-\zeta}\,d\zeta, \quad \gamma'_\nu=\gamma_\nu+1, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.7}$$

где c – контур, охватывающий точки $0, -\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_n$, $\int_0^1 \widehat{\chi}_n(x)\, \widehat{\chi}_{n'}(x)\, dx = \delta_{n,n'}$, $(n' \geq n)$.

В настоящей статье вопрос наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f(x)$ сводится к разложению Фурье функции $f(x)$ по системе (1.7) с (1.5). Используя дифференциальные свойства функции $f(x)$ получаем также оценки сверху для приближений. Положим

$$\rho_n(f) = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{L^2(0,1)} = \|f(x) - \sigma_{n(f,x)}\|_{L^2(0,1)},$$

$$\text{где} \quad \sigma_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \widehat{\chi}_k(x), \quad \text{и} \quad a_k = \int_0^1 f(x)\widehat{\chi}_k(x)\, dx. \tag{1.8}$$

Обозначим через d_n коэффициенты Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе $\{e^{i\pi n x}\}_{-\infty}^{\infty}$:

$$g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\pi n x}, \quad d_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\, e^{i\pi n x}\, dx.$$

Имеем

$$\omega_g^2(\delta) = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} [g(x+t) - g(x)]^2\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-1}^{1} \left[\sum_{k=-n}^{n} d_n \frac{e^{i\pi k t} - 1}{2} e^{i\pi k t}\right]^2 dx = \sup_{|t|\leq\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} t\, n.$$

Обозначим через $T_{1/\delta}(x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $g(x)$ на $[-1,1]$: $T_{1/\delta}(x) = \sum_{|n|\leq 1/\delta} d_n\, e^{i\pi n x}$.

Теорема 1.1, [4]. *Справедливы следующие неравенства :*

$$\|g - T_k\|_{L^2(-1,1)} \leq \frac{2\pi}{\pi - 1}\, \omega_g(\delta), \qquad \|T'_{1/2}\|_{L^2(-1,1)} \leq 2\pi \frac{\omega_g(\delta)}{\delta}.$$

§2. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 2.1. *Пусть $f(x) \in L^2(0,1)$ и $\omega_g(\delta)$ – модуль непрерывности в $L^2(-1,1)$ ассоциированной функции $g(x)$. Справедливо следующее неравенство :*

$$\rho_{1/\delta}(f) = \left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, \widehat{\chi}_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_0 \, \omega_g(\delta) \left(1 + \frac{\left[B_{1/\delta}^{(-1)}\right]^{1/2}}{\delta} \right), \tag{2.1}$$

где

$$\alpha_k = \int_0^1 f(x) \widehat{\chi}_k(x) \, dx, \qquad \widehat{\chi}_k(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_k + 1}}{2\pi i} \int_c \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1} (\zeta - \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)} x^{-\zeta} \, d\zeta,$$

$$0 < B_{1/\delta}^{(-1)} = \left| \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (\zeta - \gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma'_\nu)} d\zeta \, \frac{1}{2\pi} \int_{c'} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (\zeta - \gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta' + \gamma'_\nu)} \frac{d\zeta}{(\zeta + \zeta')^2 - 1} \right|, \quad n \leq \frac{1}{\delta}. \tag{2.2}$$

Контуры c и c' содержат точки 0, $-\gamma_1$, $-\gamma_2$,..., $-\gamma_n$, поэтому при $\gamma_1 = 1$, $n \leq 1/\delta$ имеем

$$0 < \delta^2 = B_{1/\delta}^{(-1)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (y^2 + \gamma_\nu^2)^{1/2}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (y^2 + \gamma'_\nu)^2} dy \, \frac{1}{2\pi} \int_{c'} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (y'^2 + \gamma_\nu'^2)^{1/2}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (y'^2 + \gamma_\nu'^2)^{1/2}} \frac{dy}{(y' - y)^2 + 1}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\rho_n^2(f) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2. \tag{2.4}$$

Положим

$$b_k = \int_0^1 \left[f(t) - T_{1/\delta}(t) \right] \widehat{\chi}_k(t) \, dt, \qquad c_k = \int_0^1 \left[T_{1/\delta}(t) \right] \widehat{\chi}_k(t) \, dt, \tag{2.5}$$

где $T_{1/\delta}(t)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $g(x)$. Согласно Теореме 1.1

$$\sum_{|k|\le 1/\delta} b_k^2 = \int_0^1 \left| f(t) - T_{1/\delta}(t) \right|^2 \, dx \le 3\,\omega_g^2(\delta)_{L^2(-1,1)}. \tag{2.6}$$

Оценим теперь сумму $\sum_{|k|\le 1/\delta} c_k^2$, где c_k определены в (2.4). Имеем

$$c_k = T_{1/\delta}(t)\,\widehat{\chi}_k^{(-1)}(t)\Big|_{b=0}^{1} + \int_0^1 T'_{1/\delta}(t)\,\widehat{\chi}_k^{(-1)}(t)\,dt,$$

где

$$\widehat{\chi}_k^{(-1)}(t) = \frac{\sqrt{2\gamma_k+1}\,t}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\zeta-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}\, t^{-\zeta}\,d\zeta, \qquad \widehat{\chi}_k^{(-1)}(0) = \widehat{\chi}_k^{(-1)}(1) = 0.$$

Следовательно, $c_k = \int_0^1 T'_{1/\delta}(t)\,\widehat{\chi}_k^{(-1)}(t)\,dt$. Отсюда имеем

$$|c_k|^2 = A_k^2 \int_0^1 |T'_{1/\delta}(t)|^2\,dt, \tag{2.7}$$

где

$$A_k^2 = \int_0^1 |\widehat{\chi}_k^{(-1)}(t)|^2\,dt = \frac{2\,\gamma_k+1}{2\,\pi\,i}\int_c R_k(\zeta)\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{c'} R_k(\zeta')\,d\zeta'\,\frac{d\zeta}{1-\zeta-\zeta'}, \tag{2.8}$$

$$R_k(\zeta) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\zeta-\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma'_\nu)}, \qquad R_k(\zeta') = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\zeta'-\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta'+\gamma'_\nu)}, \qquad \gamma'_\nu = \gamma_\nu + 1.$$

Применяя Теорему 1.1 получим $\sum\limits_{|k|\ge 1/\delta} c_k^2 \le \dfrac{\omega_g^2(\delta)}{\delta^2}\sum\limits_{k\ge 1/\delta} A_k^2$, где A_k^2 определены в (2.8). Полагая

$$Q_k(\zeta) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}(\zeta-\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma'_\nu)} \tag{2.9}$$

и используя формулу Р. Лагранжа (см. [2], стр. 15), получим

$$\sum_{n\le k\le n'} A_k^2 = -\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times \int_c \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} [Q_n(\zeta)\,Q_n(\zeta') - Q_{n'}(\zeta)\,Q_{n'}(\zeta')]\,\frac{d\zeta\,d\zeta'}{(1-\zeta-\zeta')(1+\zeta+\zeta')}, \tag{2.10}$$

где контуры c и c' охватывают окрестности полюсов $Q_{n'}(\zeta)$ и $Q_{n'}(\zeta')$, соответственно, и

$$\sum (2\gamma_k+1)\,R_k(\zeta)\,R_k(\zeta') = -[Q_n(\zeta)\,Q_n(\zeta') - Q_{n'}(\zeta)\,Q_{n'}(\zeta')]\,\frac{1}{1+\zeta+\zeta'}. \tag{2.11}$$

Положим

$$B_{n'}^{(-1)} = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_c Q_{n'}(\zeta)\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c'} Q_{n'}(\zeta)\,Q_{n'}(\zeta')\,\frac{d\zeta'}{(\zeta+\zeta')^2-1}\right|,$$

где $Q_{n'}(\zeta)$ и $Q_{n'}(\zeta')$ из (2.9), и докажем, что

$$\lim_{n'\to\infty} B_{n'}^{(-1)} = 0. \tag{2.12}$$

Имеем

$$B_{n'}^{(-1)} \le \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n'}(y^2+\gamma_\nu^2)^{1/2}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n'}(y^2+\gamma_\nu')^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n'}(y'^2+\gamma_\nu^2)^{1/2}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n'}(y^2+\gamma_\nu'^2)^{1/2}}\,\frac{dy\,dy'}{(y'-y)^2+1}, \tag{2.13}$$

где $\gamma_\nu' = \gamma_\nu + 1$.

Очевидно, что из (2.13) следует (2.12). Чтобы получить оценку сверху для $\sum\limits_{k\ge 1/\delta} c_k^2$ воспользуемся (2.7), (2.10) и (2.11). Имеем

$$\sum_{k\ge 1/\delta} c_k^2 \le \frac{\omega_g^2(\delta)}{\delta^2}\sum_{n\ge 1/\delta} A_k^2 \le \frac{\omega_g^2(\delta)}{\delta^2}\,B_{1/\delta}^{(-1)}. \tag{2.14}$$

Согласно неравенству Минковского

$$\rho_{1/\delta}(f) = \left(\sum_{k\geq 1/\delta} a_k^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k\geq 1/\delta} b_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k\geq 1/\delta} c_k^2\right)^{1/2}.$$

Учитывая (2.6) и (2.14), получаем $\rho_{1/\delta}(f) \leq C_0\,\omega_g(\delta)\,(1 + (B_{1/\delta}^{(-1)})^{1/2}/\delta)$. Теорема 2.1 доказана.

§3. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Определение 2. *Функция $f(x)$, определенная на $[0,1]$, принадлежит классу S_p, если*

1) $f(x)$ p-раз дифференцируема в смысле (1.5);

2) функции $f_m(x) = \dfrac{f^{[m]}(x)}{x^{\gamma_m-\gamma_{m-1}-1}}$, $m = 0,1,...,p$ $L^2(0,1)$-интегрируемы;

3) функция $f_p(x)$ может быть продолжена как функция, четная и непрерывная в метрике $L^2(-1,1)$;

4) $\omega_{g_p}(\delta) = o(1)$ при $\delta \to 0$, где $g_p(x)$ – ассоциированная с $f_p(x)$ функция.

В этом параграфе мы докажем аналог Теоремы 2.1 для функций из класса S_p. Рассмотрим задачу оценки сверху для

$$\rho_n^2(f) = \int_0^1 |f(x) - \sigma_n(f,x)|^2\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2,$$

где $\sigma_n(f,x)$ и a_k определены в (1.8).

Положим $du = \widehat{\chi}_k(t)\,dt$, $v = f(t)$ и $dv = f'(t)\,dt$, где

$$u = u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\zeta - \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta + \gamma_\nu)}\,t^{-\zeta+1}\,d\zeta = -t\,\widehat{\chi}_k^{[-1]}(t),$$

$$\widehat{\chi}_k^{[-1]}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\zeta - \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta + \gamma_\nu)}\,t^{-\zeta}\,d\zeta.$$

Имеем $t\,\widehat{\chi}_k^{[-1]}(t) \to 0$ при $t \to 0$ или $t \to 1$. Поэтому интегрирование по частям даёт

$$a_k = \int_0^1 f'(x)\, x\, \widehat{\chi}_k^{[-1]}(x)\, dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{t^{\gamma_1 - 1}}\, x^{\gamma_1}\, \widehat{\chi}_k^{[-1]}(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{f^{[2]}(x)}{t^{\gamma_2-\gamma_1-1}}\, x^{\gamma_2}\, \widehat{\chi}_k^{[-2]}(x)\, dx,$$

где

$$\widehat{\chi}_k^{[-2]}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\prod\limits_{\nu=2}^{k-1} (\zeta - \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)}\, x^{-\zeta}\, d\zeta.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$a_k = \int_0^1 f^{[p]}(x)\, x^{\gamma_{p-1}+1}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx = \int_0^1 f_p(x)\, x^{\gamma_p}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx, \qquad (3.1)$$

где

$$\widehat{\chi}_k^{[-p]}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\prod\limits_{\nu=p}^{k-1} (\zeta - \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)}\, t^{-\zeta}\, d\zeta \quad \text{и} \quad f_p(x) = \frac{f^{[p]}(x)}{x^{\gamma_p - \gamma_{p-1} - 1}}.$$

Из (3.1) следует, что

$$\sum_{k \ge 1/\delta} a_k^2 = \sum_{k \ge 1/\delta} \left(\int_0^1 f_p(x)\, x^{\gamma_p}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx \right)^2.$$

Следовательно

$$a_k = \int_0^1 [f_p(x) - T_{1/\delta}(x,p)]\, x^{\gamma_p}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx + \int_0^1 T_{1/\delta}(x,p)\, x^{\gamma_p}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx = b_k + c_k,$$

где

$$b_k = \int_0^1 [f_p(x) - T_{1/\delta}(x,p)]\, x^{\gamma_p}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx \quad \text{и} \quad c_k = \int_0^1 T_{1/\delta}(x,p)\, x^{\gamma_p}\, \widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\, dx,$$

а $T_{1/\delta}(t,p)$ – полином наилучшего приближения функции $g_p(x)$ в метрике $L^2(-1,1)$, определённый в (2.5). Согласно Теореме 1.1 имеем

$$b_k^2 = \int_0^1 |f_p(x) - T_{1/\delta}(x,p)|^2\,dx \int_0^1 |x^{\gamma_p}\,\widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)|^2\,dx \le \omega_{g_p}^2(\delta)\,\mathcal{F}_k^2(p), \tag{3.2}$$

где

$$\mathcal{F}_k^2(p) = \frac{2\,\gamma_k+1}{2\,\pi\,i}\int_0^1 \widehat{\chi}_k^{(-p)}(x)\,\widehat{\chi}_k^{[-p]}(x)\,x^{2\,\gamma_p}\,dx =$$

$$= \frac{2\,\gamma_k+1}{2\,\pi\,i}\int_c R_{p,k}(\zeta)\,d\zeta \int_c R_{p,k}(\zeta')\,d\zeta' \int_0^1 x^{2\,\gamma_p-\zeta-\zeta'}\,dx,$$

$$\mathrm{Re}(2\,\gamma_p-\zeta-\zeta') > -1, \quad R_{p,k}(\zeta) = \frac{\prod\limits_{\nu=p}^{k-1}(\zeta-\gamma_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma'_\nu)}$$

и

$$\sum_{k\ge 1/\delta}^{n}\mathcal{F}_k^2(p) = \sum_{1/\delta\le k\le n'}\frac{2\,\gamma_k+1}{2\,\pi\,i}\int_c R_{p,k}(\zeta)\,d\zeta\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_c R_{p,k}(\zeta')\frac{d\zeta'}{1-\zeta-\zeta'+2\,\gamma_p}.$$

Используя формулу Р. Лагранжа, получим

$$\sum_{1/\delta\le k\le n'}\mathcal{F}_k^2(p) =$$

$$= \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_c Q_{p,i/\delta}(\zeta)\,d\zeta\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_c Q_{p,1/\delta}(\zeta')\frac{d\zeta'}{(1-\zeta-\zeta'+2\,\gamma_p)(-\zeta-\zeta'-1)}- \tag{3.3}$$

$$-\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_c Q_{p,n'}(\zeta)\,d\zeta\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_c^{\prime} Q_{p,n'}(\zeta')\,d\zeta\,\frac{d\zeta'}{(1-\zeta-\zeta'+2\,\gamma_p)(-\zeta-\zeta'-1)},$$

где

$$Q_{p,n}(\zeta) = \frac{\prod\limits_{\nu=p}^{n}(\zeta-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

Полагая $\zeta = \zeta^* + \gamma_p/2 + 1/2$ и $\zeta' = \zeta^{**} + \gamma_p/2 + 1/2$, получим

$$Q_{p,n'}(\zeta) = Q^*_{p,n}(\zeta^*) = \frac{\prod\limits_{\nu=p}^{n} (\zeta^* + \gamma_p/2 + 1/2 - \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta^* + \gamma_p/2 + 1/2 + \gamma_\nu)}. \tag{3.4}$$

Легко проверить, что второе слагаемое в (3.3) стремится к нулю при $n' \to \infty$. Поэтому, из (3.3) и (3.4) имеем $\sum_{k\geq 1/\delta} \mathcal{F}^2_k(p) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_c Q^*_{p,1/\delta}(\zeta)\, d\zeta\, \frac{1}{2\pi i} \int_c Q^*_{p,1/\delta}(\zeta') \frac{d\zeta'}{(\zeta + \zeta' - \gamma_p)(\zeta + \zeta' + \gamma_p)} = B^{(-p)}_{1/\delta},$$

где

$$B^{(-p)}_{1/\delta} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\prod\limits_{p\leq k\leq 1/\delta} (\zeta + (\gamma_p - 1)/2 - \gamma_\nu)}{\prod\limits_{0\leq k\leq 1de} (\zeta + (\gamma_p + 1)/2 + \gamma_\nu)}\, d\zeta \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\prod\limits_{p\leq k\leq 1/\delta} (\zeta' + (\gamma_p - 1)/2 - \gamma_\nu)}{\prod\limits_{0\leq k\leq 1de} (\zeta' + (\gamma_p + 1)/2 + \gamma_\nu)} \frac{d\zeta}{(\zeta + \zeta')^2 - \gamma_p^2}. \tag{3.5}$$

Из (3.2) и (3.5) вытекает $\sum_{k\geq 1/\delta} b^2_k \leq c\,\omega_{g_p}(\delta)\, B^{(-p)}_{1/\delta}$, где число $c > 0$ не зависит от $\delta > 0$.

Теперь оценим сверху $\sum_{k\geq 1/\delta} c^2_k$, где

$$c_k = \int_0^1 T'_{1/\delta}(t,p) t^{\gamma_p + 1}\, \widehat{\chi}^{[-p-1]}_k(t)\, dt, \quad \text{и}$$

$$\widehat{\chi}^{[-p-1]}_k(t) = \frac{\sqrt{2\gamma_k + 1}}{2\pi i} \int \frac{\sum\limits_{\nu=p+1}^{k-1} (\zeta - \gamma'_\nu)}{\sum\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)} t^{-\zeta}\, d\zeta.$$

Имеем

$$c^2_k \leq 2 \left| \int_0^1 T'_{1/\delta}(t,p)\, t^{\gamma_p+1}\, \widehat{\chi}^{[-p-1]}_k(t)\, dt \right|^2 \leq$$

$$\leq 2 \int_0^1 |T'_{1/\delta}(t,p)|^2\, dt \int_0^1 |t^{\gamma_p+1}\, \widehat{\chi}^{[-p-1]}_k(t)|^2\, dt.$$

Согласно Теореме 1.1 и формуле Р. Лагранжа получаем

$$2\int_0^1 |T'_{1/\delta}(t,p)|^2\,dt \le \frac{\omega^2_{g_p}(\delta)}{\delta^2}\,C \text{ и}$$

$$\sum_{k\ge 1/\delta} \mathcal{F}_k^2(p+1) = \sum_{k\ge 1/\delta} \int |t^{\gamma_p+1}\,\widehat{\chi}_k^{[-p-1]}(t)|^2\,dt = B_{1/\delta}^{(-p-1)},$$

где

$$B_{1/\delta}^{(-p-1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c Q_{p+1,1/\delta}(\zeta)\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int_c Q_{p+1,1/\delta}(\zeta')\frac{d\zeta'}{(\zeta+\zeta'-1)(3-\zeta-\zeta'+2\gamma_p)} \tag{3.6}$$

и

$$Q_{p+1,1/\delta}(\zeta) = \frac{\prod\limits_{\nu=p+1}^{k}(\zeta-\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}, \qquad k=\left[\frac{1}{\delta}\right].$$

Следовательно

$$\sum_{k\ge 1/\delta} c_k^2 \le c\,\frac{\omega^2_{f_p}(\delta)}{\delta^2}\,B_{1/\delta}^{(-p-1)},$$

где $B_{1/\delta}^{(-p-1)}$ определено в (3.6). Полагая $\zeta = \zeta^* + \gamma_p/2 + 1$ и $\zeta' = \zeta^{**} + \gamma_p/2 + 1$, получим

$$B_{1/\delta}^{(-p-1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c Q^*_{p+1,1/\delta}(\zeta)\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int_c Q^*_{p+1,1/\delta}(\zeta')\frac{-d\zeta'}{(\zeta+\zeta'-\gamma'_p)(\zeta+\zeta'+\gamma'_p)}, \tag{3.7}$$

где

$$Q^*_{p+1.1/\delta}(\zeta) = \frac{\prod\limits_{p+1\le\nu\le 1/\delta}(\zeta-a^*_\nu)}{\prod\limits_{0\le k\le 1/\delta}(\zeta+b^*_\nu)}, \quad \text{и} \quad a^*_\nu = \frac{-\gamma_p}{2}+\gamma_\nu, \quad b^*_\nu = \frac{\gamma_p}{2}+1+\gamma_\nu.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для всякой функции $f(x) \in S_p$ справедливо неравенство*

$$\rho_{1/\delta}(f) \leq C_0\, \omega_{g_p}(\delta) \left(\left(B_{1/\delta}^{(-p)}\right)^{1/2} + \left(\frac{B_{1/\delta}^{(-p-1)}}{\delta^2} \right)^{1/2} \right), \tag{3.8}$$

где $B_{1/\delta}^{(-p)}$ и $B_{1/\delta}^{(-p-1)}$ определены в (3.5) и (3.7), соответственно.

§4. ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ $B_{1/\delta}^{(-p)}$ И $B_{1/\delta}^{(-p-1)}$

В этом параграфе получены верхние числовые оценки для величин $B_{1/\delta}^{(-p)}$ и $B_{1/\delta}^{(-p-1)}$ при $p \geq 1$.

Подставив в (3.5) и (3.7) в качестве контуров c и c' прямую $(-i\infty, i\infty)$, получим

$$B_n^{(-p)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p \leq \nu \leq n} (iy - a_\nu)}{\prod\limits_{0 \leq \nu \leq n} (iy + b_\nu)}\, dy\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p \leq \nu \leq n} (iy' - a_\nu)}{\prod\limits_{0 \leq \nu \leq n} (iy' + b_\nu)} \cdot \frac{dy'}{(iy + iy')^2 - \gamma_p^2},$$

где $a_\nu = \gamma_\nu - (\gamma_p - 1)/2$, $b_\nu = \gamma_\nu + (\gamma_p + 1)/2$, $b_\nu - a_\nu = \gamma_p$. Согласно (1.1) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} 0 < B_n^{(-p-1)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p+1 \leq \nu \leq n} (y^2 + a_\nu^2)^{1/2}}{\prod\limits_{0 \leq \nu \leq n} (y^2 + b_\nu^2)^{1/2}}\, dy \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p+1 \leq \nu \leq n} (y'^2 + a_\nu^2)^{1/2}}{\prod\limits_{0 \leq \nu \leq n} (y'^2 + b_\nu^2)^{1/2}} \cdot \frac{dy'}{(y' - y)^2 + \gamma_p^2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Полагая

$$a_{\nu+p} - b_\nu = \gamma_{\nu+p} - \frac{\gamma_p - 1}{2} - \gamma_\nu - \frac{\gamma_p - 1}{2} - \frac{\gamma_p + 1}{2} = \gamma_{\nu+p} - \gamma_\nu + \gamma_p \geq 0, \tag{4.2}$$

получим $0 < B_n^{(-p-1)} \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p+1 \leq \nu \leq n} (y^2 + a_\nu^{*2})^{1/2}}{\prod\limits_{0 \leq \nu \leq n} (y^2 + b_\nu^{*2})^{1/2}}\, dy\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p+1 \leq \nu \leq n} (y'^2 + a_\nu^{*2})^{1/2}}{\prod\limits_{0 \leq \nu \leq n} (y'^2 + b_\nu^{*2})^{1/2}} \cdot \frac{dy'}{(y' - y)^2 + \gamma_p^2},$$

где

$$a_\nu^* = \gamma_\nu - \frac{\gamma_p}{2}, \quad b_\nu^* = \gamma_\nu + \frac{\gamma_p}{2} + 1, \quad a_{\nu+p+1}^* - b_\nu^* = \gamma_{\nu+p+1} - \gamma_\nu - \gamma_p - 1 \geq 0. \quad (4.3)$$

Сначала оценим $B_{1/\delta}^{(-p)}$ и $B_{1/\delta}^{(-p-1)}$. Согласно (1.2) и (4.2) для любого $p > 0$ имеем $a_{\nu+p} - b_\nu = \gamma_{\nu+p} - \gamma_\nu - \gamma_p \geq 0$. Положим

$$H_{1,1/\delta}(y) = \frac{\prod\limits_{p\leq\nu\leq 1/\delta} (y^2 + a_\nu^2)}{\prod\limits_{0\leq\nu\leq 1/\delta-p} (y^2 + b_\nu^2)}, \qquad H_{2,1/\delta}(y) = \frac{1}{\prod\limits_{1/\delta-p\leq\nu\leq 1/\delta} (y^2 + b_\nu^2)} \quad (4.4)$$

и оценим интеграл

$$Y_{1,1/\delta}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p\leq\nu\leq 1/\delta} (y'^2 + a_\nu^2)}{\prod\limits_{0\leq\nu\leq 1/\delta} (y'^2 + b_\nu^2)} \cdot \frac{dy}{(y-y')^2 + \gamma_p^2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{1,1/\delta}^{1/2}(y)\, H_{2,1/\delta}^{1/2}(y')\, \frac{dy'}{(y-y')^2 + \gamma_p^2}. \quad (4.5)$$

Выберем число $1/\delta = \Delta$ достаточно большим и используем метод больших чисел Лапласа (см. [8], стр. 103 – 104, 108).

Делая замену переменной $y' = y + \tau$ и используя (4.4), равенство (4.5) можно записать в виде

$$Y_{p,n}(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{h_{1,n}(y+\tau) + h_{2,n}(y+\tau)}\, \frac{d\tau}{\tau^2 + \gamma_p^2}, \quad (4.6)$$

где

$$n = \left[\frac{1}{\delta}\right], \quad h_{1,n}(y+\tau) = \frac{1}{2}\ln H_{1,n}(y+\tau), \quad h_{2,n}(y+\tau) = \frac{1}{2}\ln H_{2,n}(y+\tau).$$

Заметим, что для фиксированного $y \geq 0$ функции $h_{1,n}(y+\tau)$ и $h_{2,n}(y+\tau)$ достигают наибольших значений в точке $\tau = -y$. Действительно, для $h_{1,n}(y+\tau)$ и $\tau = -y$ имеем

$$h'_{1,1/\delta}(y+\tau) = \frac{\partial h_{1,n}(y+\tau)}{dy} = \sum_{p\leq\nu\leq 1/\delta} \frac{y+\tau}{(y+\tau)^2 + a_\nu^2} - \sum_{0\leq\nu\leq 1/\delta-p} \frac{y+\tau}{(y+\tau)^2 + b_\nu^2} = 0.$$

Аналогично, для $h_{2,n}(y+\tau)$ и $\tau=-y$ получаем

$$h'_{2,1/\delta}(y+\tau)=\frac{\partial h_{2,n}(y+\tau)}{dy}=\sum_{1/\delta-p\le\nu\le1/\delta}\frac{y+\tau}{(y+\tau)^2+b_\nu^2}=0.$$

Для второй производной в точке $\tau=-y$ имеем

$$h''_{1,1/\delta}(0)=\sum_{p\le\nu\le1/\delta}\frac{1}{a_\nu^2}-\sum_{0\le\nu\le1/\delta-p}\frac{1}{b_\nu^2}<0\quad\text{и}\quad h''_{2,1/\delta}(0)=-\sum_{1/\delta-p\le\nu\le1/\delta}\frac{1}{b_\nu^2}<0.$$

Полагая

$$h_{1/\delta}(y+\tau)=h_{1,1/\delta}(y+\tau)+h_{2,1/\delta}(y+\tau)=h_\Delta(y+\tau),$$

интеграл (4.6) можно записать в виде

$$Y_{p,1/\delta}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{h_{1/\delta}(y+\tau)}\frac{d\tau}{\tau^2+\gamma_p^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{h_\Delta(y+\tau)}\frac{d\tau}{\tau^2+\gamma_p^2},$$

где $1/\delta=\Delta>0$ сколь угодно велико. Проверим, что

$$\left.\frac{\partial h_\Delta(y+\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=-y}=0\quad\text{и}\quad\left.\frac{\partial^2 h_\Delta(y+\tau)}{\partial^2\tau}\right|_{\tau=-y}<0\quad\text{для}\quad n>n_0>0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 h_\Delta(y+\tau)}{\partial^2\tau}\right|_{\tau=-y}&=\sum_{p\le\nu\le\Delta}\frac{1}{a_\nu^2}-\sum_{0\le\nu\le\Delta}\frac{1}{b_\nu^2}=\\&=-\left[\sum_{0\le\nu\le\Delta}\frac{1}{b_\nu^2}-\sum_{p\le\nu\le\Delta}\frac{1}{a_\nu^2}\right]<c<0.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Следовательно (ср. [6]), получаем асимптотические равенства

$$Y_{p,1/\delta}(y)=Y_{p,\Delta}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{h_\Delta(y+\tau)}\frac{d\tau}{\tau^2+\gamma_\nu^2}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2/3}}e^{h_\Delta(0)}\frac{1}{y^2+\gamma_\nu^2}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{0\le\nu\le\Delta}\frac{1}{b_\nu^2}-\sum\limits_{p\le\nu\le\Delta}\frac{1}{a_\nu^2}}(1+o(1)),$$

где число Δ достаточно велико.

Аналогичный асимптотический результат может быть получен для внешнего интеграла в (4.1). Единственное различие в том, что теперь точкой экстремума будет $y = 0$ вместо точки $y = -\tau$. Таким образом, имеем

$$B_{1/\delta}^{(-p)} \le \frac{1}{(2\,\pi)^2} e^{2h_\Delta(0)} \frac{2\,\pi}{\sum\limits_{0\le\nu\le\Delta} \frac{1}{b_\nu^2} - \sum\limits_{p\le\nu\le\Delta} \frac{1}{a_\nu^2}} (1 + o(1)), \quad \Delta \to \infty. \tag{4.8}$$

Учитывая, что

$$e^{h_\Delta(0)} = \frac{\prod_{p\le\nu\le\Delta} a_\nu}{\prod_{0\le\nu\le\Delta} b_\nu} = \frac{1}{\prod\limits_{0\le\nu\le p-1} b_\nu} \prod_{p\le\nu\le\Delta} \frac{a_\nu}{b_\nu} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{0\le\nu\le p-1} (\gamma_\nu + (\gamma_p + 1)/2)} \prod_{p\le\nu\le\Delta} \frac{\gamma_\nu - (\gamma_p + 1)/2}{\gamma_\nu + (\gamma_p + 1)/2} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{0\le\nu\le p-1} (\gamma_\nu + (\gamma_p + 1)/2)} \prod_{p\le\nu\le\Delta} \left(1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_\nu + (\gamma_\nu + 1)/2}\right) <$$

$$< \frac{2^p}{\gamma_p^p} \exp\left(-\gamma_p \sum_{p\le\nu\le\Delta} \frac{1}{\gamma_\nu + (\gamma_p + 1)/2}\right),$$

получим оценку сверху

$$B_{1/\delta}^{(-p)} = B_\Delta^{(-p)} \le C_0 e^{2h_\Delta(0)} \le C_0 \frac{2^p}{\gamma_p^p} \exp\left(-2\gamma_p \sum_{p\le\nu\le\Delta} \frac{1}{\gamma_\nu + (\gamma_p + 1)/2}\right), \tag{4.9}$$

где

$$C_0 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{0\le\nu\le\Delta} \frac{1}{b_\nu^2} - \sum\limits_{p\le\nu\le\delta} \frac{1}{a_\nu^2}} > 0.$$

Для того, чтобы оценить $B_{1/\delta}^{(-p-1)}$, заметим, что

$$B_{\Delta}^{(-p-1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod\limits_{p+1\le\nu\le\Delta}(y^2+a_\nu^{*2})^{1/2}}{\prod\limits_{0\le\nu\le\Delta}(y^2+b_\nu^{*2})^{1/2}}\,dy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod\limits_{p+1\le\nu\le\Delta}(y'^2+a_\nu^{*2})^{1/2}}{\prod\limits_{0\le\nu\le\Delta}(y'^2+b_\nu^{*2})^{1/2}}\,\frac{dy}{(y-y')^2+(\gamma_p+1)^2},$$

где $a_\nu^* = \gamma_\nu - \gamma_p/2$ и $b_\nu^* = \gamma_\nu - \gamma_p/2 + 1$ удовлетворяют условиям (4.3). Вышеприведёнными рассуждениями получаем

$$B_{\Delta}^{(-p-1)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\,e^{2\,h_\Delta^*(0)}\,\frac{1}{\sum\limits_{0\le\nu\le\Delta}\frac{1}{b_\nu^{*2}} - \sum\limits_{p+1\le\nu\le\Delta}\frac{1}{a_\nu^{*2}}}\cdot(1+O(1)),\quad n\ge n_0>0, \tag{4.10}$$

$$h_\Delta^*(0) = \frac{\prod\limits_{p+1\le\nu\le\Delta} a_\nu^*}{\prod\limits_{0\le\nu\le\Delta} b_\nu^*} = \frac{1}{\prod\limits_{0\le\nu\le p} b_\nu^*}\prod_{p+1\le\nu\le\Delta}\frac{a_\nu^*}{b_\nu^*}\sim$$

$$\sim\prod_{0\le\nu\le p}\frac{1}{\gamma_\nu+\gamma_p/2+1}\exp\left(-(\gamma_p+1)\sum_{p+1\le\nu\le\Delta}\left(1+\frac{\gamma_p+1}{\gamma_\nu+\gamma_p/2+1}\right)\right).$$

Следовательно, при $\Delta\to\infty$

$$B_{\Delta}^{(-p-1)} \le \frac{c_0}{2\pi^2\prod\limits_{0\le\nu\le p}(\gamma_\nu+\gamma_p/2+1)}\times$$

$$\times\exp\left(-2(\gamma_p+1)\sum_{p+1\le\nu\le\Delta}\frac{1}{\gamma_\nu+\gamma_p/2+1}\right)\cdot\frac{1}{\sum\limits_{0\le\nu\le\Delta}\frac{1}{b_\nu^{*2}} - \sum\limits_{p+1\le\nu\le\Delta}\frac{1}{a_\nu^{*2}}}.$$

Для $0 < C(p,\Delta) \le C_p^*$ и всех $\Delta > p$

$$\sum_{p\le\nu\le\Delta}\frac{1}{\gamma_\nu+\gamma_p/2+1} = \sum_{p\le\nu\le\Delta}\frac{1}{\gamma_\nu} - C(p,\Delta). \tag{4.11}$$

Итак, для $B_\Delta^{(-p)}$ получим упрощённую оценку сверху

$$0 < B_\Delta^{(-p)} < C_0\, C_p \exp\left(-2\gamma \sum_{p\le\nu\le\Delta} \frac{1}{\gamma_\nu}\right), \tag{4.12}$$

где $C_p' > 0$ зависит только от p, а C_0 не зависит от p и Δ. Аналогично, имеем

$$0 < B_\Delta^{(-p-1)} < C_0^*\, C_p^* \exp\left(-2\,(\gamma_p+1) \sum_{p\le\nu\le\Delta} \frac{1}{\gamma_\nu}\right), \tag{4.13}$$

где C_0^* не зависит от p и Δ, а C_p^* зависит только от p.

§5. ТЕОРЕМЫ 2.1 И 3.1 В ТЕРМИНАХ МАЖОРАНТ ВЕЛИЧИН $B_\delta^{(-p)}$ И $B_\delta^{(-p-1)}$

Основные Теоремы 2.1 и 3.1 можно сформулировать в терминах мажорант для $B_\delta^{(-p)}$ и $B_\delta^{(-p-1)}$. Сначала отметим, что

$$(B_n^{(-1)})^{1/2} < C_0'\, C_1' \exp\left(-\sum_{1\le\nu\le n} \frac{1}{\gamma_\nu}\right). \tag{5.1}$$

Следовательно, полагая

$$\delta = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k}\right) = \delta_n, \qquad n = [\Delta] = [1/\delta] \quad \text{при} \quad \gamma_k = 1 \tag{5.2}$$

вместо (2.1), получим

$$\rho_n(f) = \left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k\, \widehat{\chi}_k(x)^2 \right| dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le C_1\, \omega_g(\delta_n) \left[1 + C_2\, \frac{\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}\right)}{\delta_n}\right] = M\, \omega_g(\delta_n),$$

где $M > 0$ не зависит от n, откуда вытекает следующая версия Теоремы 2.1.

Теорема 5.1. *В предположениях Теоремы 2.1 и дополнительных условиях (4.10) при $p=0$, имеет место (5.2).*

Полагая $\delta = \delta_n = \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma_k}\right)$, из (3.8), (4.12) и (4.13) получим версию Теоремы 3.1.

Теорема 5.2. *В предположениях Теоремы 3.1 и дополнительных условиях (4.7), (4.10) имеем*

$$\rho_n(f) = \left(\int_0^1 |f(x)-\sigma_n(f,x)|\,dx\right)^{1/2} \le M_0\,M_p\,\omega_{g_p}(\delta_n)\exp\left(-\gamma_p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right),$$

где $M_0>0$ не зависит от p, а δ_n определено в (5.2).

Abstract. The paper considers the problem of best mean square approximations by quasipolynomials from Muntz functions system. A method of approximation that employs both Legendre quasipolynomials and Newman's associated functions is suggested. The results relate the differential properties of a function and of its approximation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Бадалян, "Обобщённые факториальные ряды", Сообщения инст. Мат. и Мех. АН Арм.ССР, вып. 5, 1950.
2. Г. В. Бадалян, "Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения", ДАН АрмССР, том VIII, № 1, стр. 3 — 33, 1955.
3. Г. В. Бадалян, "Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения", ДАН АрмССР, том IX, № 1, стр. 1 — 28, 1956.
4. D. S. Newman, "A Muntz–Jakson theorem", Amer. Journal Math., vol. 87, no. 4, 1965.
5. D. S. Bak, D. S. Newman, "A Muntz–Jakson theorem in $L_p(0,1)$ and $C(0,1)$", Amer. Journal Math., vol. 94, pp. 437 — 457, 1972.
6. Г. В. Бадалян, В. М. Едигарян, "К вопросу наилучшего приближения k-кратно дифференцируемых функций полиномами из системы Мюнтца в пространстве $L_p(0,1)$", Уч. Записки ЕГУ, 1 (161), стр. 3 - 10, 1988.
7. Г. В. Бадалян, В. М. Едигарян, Тезисы конференции, Уфа, Россия, 1980.
8. Г. Полия, Г. Сеге, Задачи и Теоремы из Анализа, том 1, Наука, Москва, 1978.
9. G. G. Lorentz, M. Von Golistschec, Y. Makovoz, Constructive Approximation Advanced Problems, Springer, Berlin, 1996.

Поступила 19 апреля 2001

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 41–68

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБЩИМ ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет
e–mail : gmarting@ysu.am

Резюме. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система ограниченных функций такая, что $\|\varphi_n\|_{p_0} \leq const$ для некоторого $p_0 > 2$ и всех $n \geq 1$. В статье доказывается, что существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой непрерывной функции $f(x)$ существует $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье для $g(x)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ сходится к $g(x)$ как равномерно на E, так и в метрике $L^1_{[0,1]}$, а последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ принадлежит l^q для всех $q > 2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работ автора [1] — [8], посвящённых изучению сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам. В 1912 году Н. Н. Лузин [9] доказал следующую знаменитую теорему :

Теорема (Н. Н. Лузин). *Для любой измеримой, почти всюду конечной на [0,1] функции $f(x)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $|E| > 1-\epsilon$ и непрерывная на $[0,1]$ функция $g(x)$, совпадающая $f(x)$ на E.*

В 1939 году Д. Е. Меньшов [10] доказал следующую фундаментальную теорему :

Теорема (Меньшов, I). *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, почти всюду конечная на $[0,2\pi]$. Для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывная функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E| > 2\pi-\epsilon$, и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0,2\pi]$.*

Далее в этом направлении важные результаты были получены А. А. Талаляном, Ф. Г. Арутюняном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Кашиным, К. С. Казаряном, Ш. В. Хеладзе, А. Б. Гулисашвили, Р. И. Осиповым, Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе и другими авторами (см. [13] – [23]). Здесь мы приведём те результаты, которые непосредственно относятся к настоящей работе. В работе [13] А. А. Талаляном был установлен следующий результат.

Теорема (А. А. Талалян). *Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любой функции $f(x) \in L^2_{[0,1]}$ и любого $\epsilon > 0$ существует функция $g(x) \in L^2_{[0,1]}$ такая, что $|\{x \in [0,1] : \ g(x) \neq f(x)\}| < \epsilon$, и её ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится почти всюду.*

В 1978 году Ш. В. Хеладзе [21] опубликовал следующий результат :

Теорема (Ш. В. Хеладзе). *Любую функцию $f(x) \in L^1$ можно изменить на множестве E, зависящем от $f(x)$ так, что полученная функция $g(x)$ обладает следующими свойствами : $|g(x)| = |f(x)|$, и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к $g(x)$ как почти всюду, так и в метрике L^1.*

Замечание 1. Необходимо отметить, что во всех выше сформулированных теоремах, “исключительное” множество E, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит от функции. Более того, Д. Е. Меньшов в работе [10] установил, что “исключительное” множество E существенно зависит от исправляемой функции $f(x)$, но тем не менее имеет место следующее утверждение (см. [11]).

Теорема (Д. Е. Меньшов, II). *Пусть $f(x)$ – произвольная суммируемая функция на $[0, 2\pi]$ и $Q \subset [0, 2\pi]$ – любое нигде не плотное множество. Тогда существует суммируемая функция $g(x)$ такая, что $g(x) = f(x)$ на Q, и её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.*

Отметим, что метод, который применил Д. Е. Меньшов при доказательстве Теоремы 2, не позволяет получить исправленную функцию с рядом Фурье, сходящимся в метрике L^1. В 1988 году автору этой статьи (см. [3]) удалось построить множество E сколь угодно малой меры такое, что любую функцию $f(x)$ из $L^1_{[0,2\pi]}$ изменением на множестве E можно превратить в функцию $g(x)$ такую, что её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к $g(x)$ как в метрике $L^1_{[0,2\pi]}$, так и почти всюду. Более того, в работах [1], [3] изучен спектр и скорость убывания коэффициентов Фурье функции $g(x)$. В статьях автора [2], [7] и [8], для общей ортонормированной системы, получены следующие результаты :

1). Для любой полной в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированной системы ограниченных функций $\{\varphi_n(x)\}$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел

m_k со следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что
a) ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^1_{[0,1]}$;
b) m_k-ая частичная сумма ряда Фурье функции $g(x)$ по $\{\varphi_n(x)\}$ сходится почти всюду на $[0,1]$.

2). Для любой равномерно ограниченной полной в $L^2_{[0,1]}$ ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что
a) для любой непрерывной на E функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E и такая, что её ряд Фурье по $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $f(x)$ на E и последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ принадлежит l^q, $q > 2$;
b) для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ как почти всюду, так и в норме пространства $L^1_{[0,1]}$.

3). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормальная система ограниченных функций такая, что $||\varphi_n||_{p_0} \leq const$ для любого $n \geq 1$ и для некоторого $p_0 > 2$. Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p_E$, где $p \in [2, p_0]$ фиксировано, существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $f(x)$ на E в норме пространства L^p_E, а на множестве $[0,1] \setminus E$ сходится к $g(x)$ в метрике L^1.
В настоящей работе доказывается следующая теорема :

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система ограниченных функций со свойством*

$$||\varphi_n||_{p_0} \leq const, \quad n \geq 1, \quad p_0 > 2. \tag{1.1}$$

Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой непрерывной функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, *совпадающая на E с функцией $f(x)$ такая, что её ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве E, и сходится к функции $g(x)$ в метрике пространства $L^1_{[0,1]}$, причём последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ лежит в l^q для всех $q > 2$.*

В связи с этой теоремой остаются открытыми следующие вопросы :

1. Можно ли доказать Теорему 1 без условия (1.1) ?

2. Можно ли в Теореме 1 исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы её ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходился бы к функции $g(x)$ равномерно на $[0,1]$?

Замечание 2. В Теореме 1 перестановка членов ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}$ необходима даже в случае, когда $\{\varphi_k(x)\}$ является тригонометрической системой. Это вытекает из следующей теоремы Д. Меньшова (см. [12]) :

Теорема (Меньшов, III). *Для любого совершенного множества $G \subset [0, 2\pi]$, $|G| > 0$ и любой его точки плотности $x_0 \in G$ существует непрерывная функция $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, обладающая следующим свойством : для любой измеримой на $[0, 2\pi]$ ограниченной функции $\varphi(x)$, совпадающей с $f(x)$ на G, тригонометрический ряд Фурье функции $\varphi(x)$ расходится в точке x_0.*

Теорема 1 следствие более общего результата.

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система ограниченных функций такая, что $||\varphi_n||_{p_0} \leq const$ для любого $n \geq 1$ и при некотором $p_0 > 2$. Тогда существует ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{\sigma(k)}(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty, \quad \text{для всех} \quad q > 2, \tag{1.2}$$

где $\{\sigma(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел, обладающая следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой непрерывной на E функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ является a) частичным рядом ряда (1.2), b) сходится к $f(x)$ равномерно на E, и c) сходится к $g(x)$ в метрике $L^1_{[0,1]}$.

Заметим, что ряд классических результатов невозможно перенести на двумерный случай, где сферические, прямоугольные и квадратные частичные суммы резко отличаются друг от друга в вопросах сходимости. Имеет место следующий двумерных аналог Теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система ограниченных функций такая, что $||\varphi_n||_{p_0} \leq const$ для любого $n \geq 1$ и при некотором $p_0 > 2$. Тогда существует двойной ряд*

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} c_{k,s}\, \varphi_{\sigma(k),\sigma(s)}(x), \quad \sum_{k,s=1}^{\infty} |c_{k,s}|^q < \infty, \quad \text{для всех} \quad q > 2, \tag{1.3}$$

где $\{\sigma(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел, обладающая следующим свойством : для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для любой непрерывной на E функции $f(x,y)$ существует функция $g(x,y) \in L^1_{[0,1]^2}$, совпадающая с $f(x,y)$ на E, ряд Фурье которой по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x), \varphi_{\sigma(s)}(y)\}$ является a) частичным рядом ряда (1.3), b) сходится к $f(x,y)$ равномерно на E и c) сходится к $g(x,y)$ в метрике $L^1_{[0,1]^2}$.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Для $m = 1, 2, ...$ положим

$$I_m(x) = \begin{cases} -\sqrt{m}, & x \in \left[0, \frac{1}{m+1}\right]; \\ \frac{1}{\sqrt{m}}, & x \in \left(\frac{1}{m+1}, 1\right], \end{cases} \quad \Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right], \; 1 \leq i \leq 2^m. \tag{2.1}$$

Функции $I_m(x)$, $m = 1, 2, ..$ продолжим с $[0,1]$ на $\mathbb{R}^1$ с периодом 1. Ясно, что

$$\int_0^1 I_m(x)dx = 0, \;\; m = 1, 2, ... \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Для любых натуральных чисел $s > m$ и любой ступенчатой функции $\varphi(x)$ с интервалами постоянства вида $\Delta_m^{(n)}$ справедливы следующие равенства :*

$$\int_0^1 \left[\varphi(x) \cdot I_m(2^s x)\right]^2 dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx, \int_0^1 |\varphi(x) \cdot I_m(2^s x)|\, dx = \frac{2\sqrt{m}}{m+1} \int_0^1 |\varphi(x)| dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{2^m} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x),$$

где Δ_k – интервалы постоянства функции $\varphi(x)$ вида $\Delta_m^{(n)}$, а $\chi_{\Delta_k}(t)$ – характеристическая функция множества Δ_k. Пусть $e=\{x\in[0,1], \quad I_m(x)=-\sqrt{m}\}$. Ясно, что

$$\int_0^1 [\varphi(x)\cdot I_m(2^s x)]^2\,dx=\sum_{k=1}^{2^m}\gamma_k^2\cdot\left[\int_{\Delta_k\cap e} I_m^2(2^s x)\,dx+\int_{\Delta_k\setminus e} I_m^2(2^s x)dx\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{2^m}\gamma_k^2\cdot\left[m\cdot\frac{|\Delta_k|}{m+1}+\frac{|\Delta_k|}{m}\cdot\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\right]=\int_0^1\varphi^2(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается второе равенство. Лемма 1 доказана.

Мы будем пользоваться следующим неравенством А. Гарсия (см. [25], стр. 72) :

$$\frac{1}{N!}\sum_\sigma\left[\max_{1\le n\le N}\left|\sum_{k=1}^n\chi_{\sigma(k)}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\le A_p\cdot\left[\left|\sum_{k=1}^n\chi_k\right|+\left(\sum_{k=1}^n\chi_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right],\quad p\ge1, \tag{2.3}$$

где суммирование ведется по множеству всех перестановок набора $\{1,2,...,n\}$, $\{\chi_k\}$ – произвольные действительные числа, а A_p – постоянная, зависящая от p. Следующая лемма является основным средством для доказательства Теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2_{[0,1]}$ ортонормированная система такая, что при некотором $p_0>2$*

$$||\varphi_n||_{p_0}\le B=const,\qquad n=1,2,... \tag{2.4}$$

Тогда для любой функции $f(x)\in L_{[0,1]}$ и любых чисел $N_0>1$ и $\epsilon\in(0,1)$ существуют функция $g(x)\in L_{[0,1]}$, измеримое множество $G\subset[0,1]$, полином $Q(x)=\sum_{k=N_0}^N a_k\varphi_k(x)$ и перестановка $\sigma(N_0),...,\sigma(N)$ натуральных чисел $N_0,...,N$, удовлетворяющие условиям :

1) $g(x)=f(x),\quad x\in G$, *с мерой* $|G|>1-\epsilon$, 2) $\displaystyle\int_0^1|g(x)|\,dx<3\int_0^1|f(x)|\,dx$,

3) $\displaystyle\int_0^1|Q(x)-g(x)|\,dx<\epsilon$, 4) $\displaystyle\sum_{k=N_0}^N|a_{\sigma(k)}|^{2+\epsilon}<\epsilon$,

5) $$\max_{N_0\le m\le N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx\le 3\cdot\int_0^1|f(x)|dx,$$

6) $$\max_{N_0\le m\le N}\left|\sum_{k=N_0}^{m}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx\le|f(x)|+\epsilon,\quad\forall x\in G.$$

Доказательство. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x),\qquad \nu_0=2^j, \tag{2.5}$$

где Δ_ν имеют вид $\Delta_j^{(n)}$), такую, что

$$\int_0^1|f(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\epsilon_0^2}{4}, \tag{2.6}$$

а

$$\epsilon_0=\min\left\{\frac{\epsilon}{4};\frac{1}{4}\int_0^1|f(x)|\,dx\right\}. \tag{2.7}$$

По лемме Фейера (см. [26], стр. 77) и из (2.2) получим

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^1[\varphi(x)\cdot I_m(sx)]\cdot\varphi_k(x)\,dx=0,\quad m,k=1,2,...$$

Следовательно, существует натуральное число $s_1>\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1[\varphi(x)\cdot I_m(2^{s_1}x)]\varphi_k(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon_0}{4\cdot\sqrt{N_0}},\quad k=1,2,...,N_0. \tag{2.8}$$

Возьмем натуральное число $N_1>N_0$ настолько большим, чтобы

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{N_1}a_i^{(1)}\varphi_i(x)-g_1(x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\epsilon}{4},$$

где $g_1(x) = \varphi(x) \cdot I_1(2^{s_1}x)$ и $a_i^{(1)} = \int\limits_0^1 g_1(x)\varphi_i(x)dx$. Отсюда и из (2.8) вытекает

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=N_0}^{N_1} a_i^{(1)}\varphi_i(x) - g_1(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{4} + \left(\sum_{i=1}^{N_0}\left[a_i^{(1)}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

По индукции определим последовательности чисел $s_1 < s_2 < \ldots$; $N_0 < N_1 < \ldots$, функций

$$g_m(x) = f(x) \cdot I_m(2^{s_m}x); \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

и полиномов

$$Q_m(x) = \sum_{i=N_m-1}^{N_m} a_i^{(m)}\varphi_i(x), \tag{2.10}$$

где

$$a_i^{(m)} = \int_0^1 g_m(x)\varphi_i(x)\, dx, \tag{2.11}$$

удовлетворяющие условиям

$$\left(\int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{\epsilon_0}{2^{m+1}}\right)^2. \tag{2.12}$$

По Лемме 1 и (2.9)

$$\int_0^1 g_m^2(x)dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\, dx, \tag{2.13}$$

$$\int_0^1 |g_m(x)|\, dx < \frac{2}{\sqrt{m}}\int_0^1 |\varphi(x)|\, dx. \tag{2.14}$$

Обозначим

$$E_m = \{x \in [0,1] : I_m(2^{s_m}x) = -\sqrt{m}\}. \tag{2.15}$$

В силу (2.1)

$$|E_m| = \frac{1}{m+1}. \tag{2.16}$$

Выберем натуральные числа q_0, q и положительное число ϵ_1 так, что

$$q > q_0 > \left(\frac{8||f||_2}{||f||_1}\right)^{p_0}; \qquad \epsilon_1 < min\{p_0 - 2;\ \frac{\epsilon}{4}\}, \tag{2.17}$$

$$0 < 1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\epsilon_1}} < \frac{\epsilon_0}{\int_0^1 |\varphi(x)|dx + 1}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \frac{\epsilon_0^{p_0+1}}{4 \cdot (2A_{p_0}B_{p_0}||\varphi||_{p_0})^{p_0} + \left(1 + 2\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{p_0}}, \tag{2.19}$$

где A_{p_0} и B_{p_0} суть постоянные из (2.3) и(2.4), а множество

$$G_m = \{x \in [0,1] : \ |Q_m(x) - g_m(x)| < \frac{\epsilon_0}{2^{m+2}}\}, \tag{2.20}$$

$$E = \bigcap_{m=q_0}^{q} G_m \bigcap \{[0,1] \setminus E_m\}. \tag{2.21}$$

Применяя неравенство Чебышева, из (2.11) получим

$$|G_m| > 1 - \frac{\epsilon_0}{2^{m+2}}. \tag{2.22}$$

В силу (2.16) и (2.19)–(2.21) $|E_m| > 1 - \frac{\epsilon_0}{2}$. На основании неравенства Бесселя, Леммы 1 и (2.9), (2.11) имеем

$$\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m - 1} \left|a_i^{(m)}\right|^2 \le \int_0^1 g_m^2(x)dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx, \quad m \ge 1. \tag{2.23}$$

В силу неравенства Гарсия (2.3) для каждого числа m, $q_0 \le m \le q$, существует перестановка $\sigma_m(N_{m-1}),\ldots, \sigma_m(N_m - 1)$ натуральных чисел $N_{m-1},\ldots,N_m - 1$ такая, что

$$\int_E \left[\max_{N_{m-1} \le n < N_m} \left|\sum_{k=N_{m-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|\right]^{p_0} dx \le$$

$$\leq (A_{p_0})^{p_0}\int_E\left[\left|\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1}a_k^{(m)}\varphi_k(x)\right|+\left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1}[a_k^{(m)}\varphi_k(x)]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{p_0}dx. \qquad (2.24)$$

Обозначим¿

$$H_m=\left(x\in E:\max_{N_{m-1}\leq n<N_m}\left|\sum_{k=N_{m-1}}^{n}a_{\sigma_m(k)}^{(m)}\varphi_{\sigma_m(k)}(x)\right|>\epsilon_0\cdot m^{\frac{1}{2+\epsilon}}\right). \qquad (2.25)$$

Учитывая, что $g_m(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{m}}$ при $x\in E$ (см. (2.1), (2.9), (2.15), (2.21)) и соотношения (2.4), (2.20), (2.21), (2.23)–(2.25) для каждого $m\in[q_0.q]$ имеем

$$\left(m^{\frac{p_0}{2+\epsilon_n}}\cdot\epsilon_0^{p_0}\cdot|H_m|\right)^{\frac{1}{p_0}}\leq\left(\int_{H_m}\max_{N_{m-1}\leq n<N_m}\left|\sum_{k=N_{m-1}}^{n}a_{\sigma_m(k)}^{(m)}\varphi_{\sigma_m(k)}(x)\right|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\leq$$

$$\leq A_{p_0}\left[\left(\int_E|Q_m(x)|^{p_0}dx|\right)^{\frac{1}{p_0}}+\left(\int_E\left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1}[a_k^{(m)}\varphi_k(x)]^2\right)^{\frac{p_0}{2}}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\right]\leq$$

$$\leq A_{p_0}\left[\left(\int_E|Q_m(x)-g_m(x)|^{p_0}\,dx|\right)^{\frac{1}{p_0}}+\left(\int_E|g_m(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\right]+$$

$$+A_{p_0}\left[\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1}\left(\int_0^1\left[a_k^{(m)}\varphi_k(x)\right]^{p_0}dx\right)^{\frac{2}{p_0}}\right]^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq A_{p_0}\cdot\frac{\epsilon_0}{2^m}+A_{p_0}\cdot\frac{||\varphi||_{p_0}}{\sqrt{m}}+A_{p_0}\cdot B_{p_0}\cdot\left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1}|a_k^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq 2\cdot A_{p_0}\cdot B_{p_0}\cdot||\varphi||_{p_0}.$$

Отсюда следует, что

$$|H_m|<\left(\frac{2\cdot A_{p_0}\cdot B_{p_0}}{\epsilon_0}\right)^{p_0}\cdot\frac{||\varphi||_{p_0}^{p_0}}{m^{\frac{p_0}{2+\epsilon_1}}},\quad\forall m\in[q_0,q]. \qquad (2.26)$$

Теперь определим множество G, функцию $g(x)$, полином $Q(x)$ и перестановку $\sigma(N_0),\dots, \sigma(N)$ натуральных чисел $N_0,\dots,N$ следующим образом :

$$G = E \cap ([0,1] \setminus H_m) \cap \{x \in [0,1] : |f(x) - \varphi(x)| < \epsilon_0\}, \tag{2.27}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in G \\ \overline{g}(x), & x \in [0,1] \setminus G, \end{cases} \tag{2.28}$$

где

$$\overline{g}(x) = \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot g_m(x), \tag{2.29}$$

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \varphi_k(x) = \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot Q_m(x), \tag{2.30}$$

$$a_k = m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot a_k^m, \quad N_{m-1} \le k < N_m; \quad N = N_q - 1, \tag{2.31}$$

$$\sigma(k) = \sigma_m(k), \quad N_{m-1} \le k < N_m; \quad 1 \le m \le q. \tag{2.32}$$

Из (2,7), (2.19), (2.26), (2.27) следует, что $|G| > 1 - \epsilon$. В силу (2.6), (2.7), (2.14), (2.18), (2.28), (2.29) имеем

$$\int_0^1 |g(x)|dx = \int_G |f(x)|dx + \int_{[0,1]\setminus G} |\overline{g}(x)|dx \le \int_0^1 |f(x)|\, dx +$$

$$+ \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \int_0^1 |g_m(x)|dx \le \int_0^1 |f(x)|dx + \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{m}} \cdot \int_0^1 |\varphi(x)|dx \le$$

$$\le 3 \cdot \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Учитывая (2.6), (2.7), (2.9), (2.12), (2.15), (2.18), (2.21), получим

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)|dx \le \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \left(\int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)|dx \right) + \int_0^1 |g(x) - \overline{g}(x)|dx \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{4} + \int_0^1 |\varphi(x) - f(x)|\, dx + \int_G \left| \varphi(x) - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot g_m(x) \right| dx \le$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_G |\varphi(x)| \left[1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot I_m(2^{s_m}x)\right] dx =$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \left[1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}-\frac{1}{2}}\right] \cdot \int_0^1 |\varphi(x)| dx < \epsilon.$$

В силу неравенства Бесселя из (2.6), (2.7), (2.11) и (2.13) вытекает

$$\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left[a_i^{(m)}\right]^2 \leq \int_0^1 g_m^2(x)dx = \int_0^1 \varphi^2(x)dx \leq 2 \cdot \int_0^1 f^2(x)dx. \tag{2.33}$$

Отсюда и из (2.19), (2.31) и (2.32) имеем

$$\sum_{k=N_0}^{N} |a_k|^{2+\epsilon_1} = \sum_{m=q_0}^{q} \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} \left[a_k^{(m)} \cdot m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}}\right) \right|^{2+\epsilon_1} \leq$$

$$\leq \sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} \left(\sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} |a_k^{(m)}|^2 \right)^{\frac{2+\epsilon_1}{2}} \leq \left(2 \cdot \int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{\frac{2+\epsilon_1}{2}} \cdot \sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \epsilon,$$

Таким образом, утверждения 1) – 4) Леммы 2 доказаны. Для доказательства утверждений¿5) – 6) сперва отметим, что (см. (2.17), (2.31)–(2.33)) для каждого $m \in [q_0, q]$ и любых $N \in [N_{m-1}, N_m]$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{m-1}}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^2 dx \leq \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k^2 = m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left[a_i^{(m)}\right]^2 \leq$$

$$\leq 2 \cdot q_0^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \int_0^1 f^2(x)\, dx. \tag{2.34}$$

Пусть $n \in [N_0, N]$. Для некоторого m_0 имеем $N_{m_0-1} \leq n < N_{m_0}$. Поэтому из (2.30)–(2.32) следует, что

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{k=l_0}^{m_0-1} k^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} Q_k(x) + \sum_{k=N_{m_0}-1}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x).$$

В силу (2.6), (2.7), (2.9), (2.12), (2.1), (2.19), (2.34)

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \le \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \int_0^1 |Q_m(x) - g_m(x)| dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{+\epsilon_1}} g_m(x) \right| dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{m_0}}^{N} a_k\varphi_k(x) \right| dx \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)| dx + \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{q_1}{2+\epsilon_1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{m}} \cdot \int_0^1 |\varphi(x)| dx + \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)| dx < 3 \cdot \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Из равенства $g_m(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{m}}$ при $x \in G$ (см. (2.1), (2.9), (2.15), (2.21), (2.27)) и соотношения (2.7), (2.18), (2.20), (2.21), (2.25), (2.27), (2.31), (2.32) для всех $x \in G$ и $n \in [N_0, M]$ получим

$$\left| \sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right| = \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} |Q_m(x) - g_m(x)| + \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} |g_m(x)| +$$

$$+ m_0^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}} \cdot \left| \sum_{k=N_{m_0}}^{N} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right| \le \frac{\epsilon_0}{4} + \sum_{m-q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\epsilon_1}-\frac{1}{2}} \cdot |\varphi(x)| + \epsilon_0 < |f(x)| + \epsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\{\omega_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система такая, что $||\omega_k||_{p_0} < const$ при некотором $p_0 > 2$. Тогда для любых чисел $\gamma \neq 0$, $\delta \in (0,1)$, $N > 1$ и любого квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T = [0,1]^2$ существуют измеримое множество $E \subset T$, функция $g(x,y)$, полином*

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x) \cdot \omega_n(y)$$

и перестановка $\sigma(N)$, $\sigma(N+1)$,...,$\sigma(M)$ натуральных чисел N, $N+1$,...,M, обладающих свойствами :

1) $g(x,y) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x,y)$ *для всех* $(x,y) \in E$ *с мерой* $|E| > 1 - \delta$,

2) $\displaystyle\int\int_T |g(x,y)|dxdy \le 9\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|$, 3) $\displaystyle\int\int_T |Q(x,y)-g(x,y)|\,dxdy < \delta^2$,

4) *для любых* $(x,y)\in E$
$$\max_{N\le \overline{k},\overline{n}\le M}\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|+$$
$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|\le 16\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|+\delta,$$

5)
$$\max_{N\le \overline{k},\overline{n}\le M}\int\int_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy+$$
$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\int\int_T\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy\le 36\cdot|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

6)
$$\sum_{k,n=N}^{M}|c_{k,n}|^{2+\delta}<\delta.$$

Доказательство. Применим Лемму 2 с $f(x)=\gamma\cdot\chi_{\Delta_1}(x)$, $N_0=N$ и $\epsilon_0=\frac{\delta}{4}$, где $\chi_{\Delta_1}(x)$ – характеристическая функция множества Δ_1. Тогда можно определить множество $E_1\subset[0,1]$, функцию $g_1(x)$, полином $Q_1(x)=\sum\limits_{k=N}^{N_1}a_k\omega_k(x)$ и перестановку $\sigma_1(N),\ldots,\sigma_1(N_1)$ натуральных чисел $N,\ldots,N_1$, удовлетворяющих условиям :

$1^0)$ $g_1(x)=\gamma\cdot\chi_{\Delta_1}(x)$, $\forall x\in E_1$, $|E_1|>1-\dfrac{\delta}{2}$, $2^0)$ $\displaystyle\int_0^1|g_1(x)|dx\le 3\cdot|\gamma|\cdot|\Delta_1|$,

$3^0)$ $\displaystyle\max_{N\le\overline{k}\le N_1}\left|\sum_{k=N}^{\overline{k}}a_{\sigma_1(k)}\omega_{\sigma_1(k)}(x)\right|\le|\gamma|\cdot\chi_{\Delta_1}(x)+\frac{\delta}{4}$, для всех $x\in E_1$,

$$4^0)\ \int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)|\, dx < \frac{\delta}{4},$$

$$5^0)\quad \max_{N\le\overline{k}\le N_1} \int_0^1 \left|\sum_{k=N}^{\overline{k}} a_{\sigma_1(k)}\omega_{\sigma_1(k)}(x)\right| dx \le 3\cdot|\gamma|\cdot|\Delta_1|, \qquad 6^0)\quad \sum_{k=N}^{N_1} |a_k|^{2+\delta} < \frac{\delta}{4}.$$

Обозначим

$$M_0 = 2\cdot\left(N_1^2+1\right). \tag{2.35}$$

Снова применив Лемму 2 с $f(y) = \chi_{\Delta_2}(y)$, $N_0 = M_0$ и $\epsilon = \frac{\delta}{4(|\gamma|+1)}$, можем

определить множество $E_2 \subset [0,1]$, функцию $g_2(y)$, полином $Q_2(y) = \sum\limits_{n=M_0}^{M} b_n\omega_n(y)$

и перестановку $\sigma_2(M_0)$, ...,$\sigma_2(M)$ чисел M_0,...,M следующим образом :

$$1^{00})\quad g_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y),\ \ \forall y\in E_2,\quad |E_2| > 1-\frac{\delta}{2}, \qquad 2^{00})\quad \int_0^1 |g_2(y)|dy \le 3\cdot|\Delta_2|,$$

$$3^{00})\qquad \int_0^1 |Q_2(y) - g_2(y)|\, dy < \frac{\delta}{4\cdot(|\gamma|+1)},$$

4^{00})

$$\max_{M_0\le\overline{n}\le M}\left|\sum_{n=M_0}^{\overline{n}} b_{\sigma_2(n)}\omega_{\sigma_2(n)}(y)\right| \le \chi_{\Delta_2}(y) + \frac{\delta}{4\cdot(|\gamma|+1)}, \quad \text{для любого}\quad y\in E_2,$$

$$5^{00})\quad \max_{M_0\le\overline{n}\le M} \int_0^1 \left|\sum_{n=M_0}^{\overline{n}} b_{\sigma(n)}\omega_{\sigma(n)}(y)\right| dy \le 3\cdot|\Delta_2|, \qquad 6^{00})\quad \sum_{n=M_0}^{M} |b_n|^{2+\delta} < \delta.$$

Теперь определим функцию $g(x,y)$, множество E, полином $Q(x,y)$ и перестановку $\sigma(N)$,..., $\sigma(M)$ натуральных чисел N, $N+1$,...,M следующим образом :

$$g(x,y) = g_1(x)\cdot g_2(y),\quad E = E_1\times E_2, \tag{2.36}$$

$$Q(x,y) = Q_1(x)\cdot Q_2(y) = \sum_{k,n=M_0}^{M} c_{k,n}\omega_k(x)\cdot\omega_n(y), \tag{2.37}$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} a_k \cdot b_n, & N \le k \le N_1, \quad M_0 \le n \le M; \\ 0, & k \notin [N, N_1], \quad n \notin [M_0, M], \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma_1(n), & N \le n \le N_1; \\ n, & N_1 \le n \le M_0; \\ \sigma_2(n), & M_0 \le n \le M. \end{cases} \tag{2.39}$$

Отсюда и из $(1^0), (1^{00}), (4^0), (4^{00}), (6^0), (6^{00})$ вытекает, что $g(x,y) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x,y)$, $(x,y) \in E$ с мерой $|E| > 1-\delta$, $\sum\limits_{k,n=M_0}^{M} |c_{k,n}|^{2+\delta} < \delta$,

$$\int\int_T |Q(x,y) - g(x,y)| dx dy < \delta, \qquad \int\int_T |g(x,y)| dx dy \le 9 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Теперь докажем утверждения 4) и 5) Леммы 3. Пусть $N^2 + M_0^2 < R^2 < N_1^2 + M^2$, тогда для некоторого m_0 будем иметь $m_0 \le R < m_0 + 1$. Из (2.35) $R^2 - N_1^2 \ge (m_0 - 1)^2$. Поэтому, из $5^0), 5^{00})$ и (2.36)–(2.39) вытекает

$$\max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \iint_T \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y) \right| dx dy \le$$

$$\le \iint_T \left| \sum_{k=N}^{N_1} \sum_{n=m_0}^{m_0-1} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dx dy +$$

$$+ \max_{N \le s \le N_1} \int\int_T \left| \sum_{k=N}^{s} c_{\sigma(k),\sigma(m_0)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(m_0)}(y) \right| dx\, dy =$$

$$= \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{N_1} a_{\sigma(k)} \cdot \omega_{\sigma(k)}(x) \right| dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m_0-1} b_{\sigma(n)} \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dy \right) +$$

$$+ \left(\int_0^1 |b_{\sigma(m_0)} \cdot \omega_{\sigma(m_0)}(y)| dy \right) \cdot \left(\max_{N \le s \le N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=N}^{s} a_{\sigma(k)} \cdot \omega_{\sigma(k)}(x) \right|^q dx \right) < 12 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Аналогично, из 3^0), 3^{00}) и (2.36)-(2.39), для всех $x \in E$ получим

$$\max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y) \right| \le 12 \cdot |\gamma| \cdot \chi_\Delta(x,y) + \frac{\delta}{2}.$$

Учитывая 3^0), 5^0), 3^{00}), 5^{00}) и (2.36)-(2.39) при $N \le \overline{k} \le N_1$, $M_0 \le \overline{n} \le M$, имеем

$$\iint_T \left| \sum_{k,n=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \le 9 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|,$$

$$\left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) \right| \le 4 \cdot |\gamma| \cdot \chi_\Delta + \frac{\delta}{4}, \quad \forall (x,y) \in E.$$

Доказательство Леммы 3 завершено.

Лемма 4. *Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система такая, что $||\omega||_{p_0} \le const$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in L_{(T)}$ и любых $\epsilon > 0$, $N > 1$ существуют множество $E \subset T = [0,1]^2$, функция $g(x,y)$, полином $Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n} \omega_k(x) \cdot \omega_n(y)$, и перестановка $\sigma(N)$, $\sigma(N+1)$,...,$\sigma(M)$ натуральных чисел N,$N+1$,...,M такие, что*

$$1) \quad g(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in E, \quad |E| > 1-\epsilon,$$

$$2) \quad \iint_T |g(x,y)|\, dxdy \le 10 \cdot \int\int_T |f(x,y)|\, dxdy,$$

3) $$\iint_T |Q(x,y) - g(x,y)|\, dxdy < \epsilon,$$

4) *для любого* $(x,y) \in E$ $$\max_{N \le \overline{k},\overline{n} \le M} \left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) \right| +$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right|\le 6\cdot||f(x,y)||+\epsilon,$$

5) $$\max_{N\le\overline{k},\overline{n}\le M}\iint_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right|dxdy+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\iint_T\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{x\sigma(k)}\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right|dxdy\le$$

$$\le 22\cdot\int\int_T|f(x,y)|dxdy+\epsilon,$$

6) $$\sum_{k,n=N}^{M}|c_{k,n}|^{2+\epsilon}<\epsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y),\tag{2.40}$$

удовлетворяющую условию

$$\max_{1\le\nu\le\nu_0}(|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|)+||f(x,y)-\varphi(x,y)||_{L^1[0,1]}<\frac{\epsilon^2}{4^4},\tag{2.41}$$

где Δ_ν, $1\le\nu\le\nu_0$ – прямоугольная область постоянства функции $\varphi(x,y)$. Если $1\le\nu\le\nu_0$ – заданное число, то по Лемме 3 существуют множество $E_\nu\subset T$, функция $g_\nu(x,y)$, многочлен

$$Q_\nu(x,y)=\sum_{k,n=N_\nu}^{M_\nu}c_{k,n}^{(\nu)}\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)\tag{2.42}$$

и перестановка $\sigma_\nu(N_\nu),\dots,\sigma_\nu(M_\nu)$ натуральных чисел $N_\nu,\dots,M_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$g_\nu(x,y) = \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x,y), \quad \forall (x,y) \in E_\nu, \quad |E_\nu| > 1 - \frac{\epsilon}{4\cdot\nu_0}, \tag{2.43}$$

$$\iint_T |g_\nu(x,y)|dxdy \le 9\cdot|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|, \tag{2.44}$$

$$\max_{\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}M_\nu} \left| \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| +$$

$$+ \max_{N_\nu \le \overline{k},\overline{n} \le M_\nu} \left| \sum_{k,n=N_\nu}^{\overline{k},\overline{n}} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_u(n)}(y) \right| \le$$

$$\le 16\cdot|\gamma_\nu|\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y) + \frac{\epsilon}{2\cdot\nu_0}, \quad \forall (x,y)\in E_\nu, \tag{2.45}$$

$$\iint_T |Q_\nu(x,y) - g_n u(x,y)|\,dxdy < \left(\frac{\epsilon}{16\cdot\nu_0}\right)^2, \tag{2.46}$$

$$\max_{\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}M_\nu} \iint_T \left| \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dxdy +$$

$$+ \max_{N_\nu \le \overline{k},\overline{n} \le M_\nu} \iint_T \left| \sum_{k,n=N_\nu}^{\overline{k},\overline{n}} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \omega_{\sigma_\nu(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma_\nu(k)}(y) \right| dxdy \le 36\cdot|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|, \tag{2.47}$$

$$\sum_{N_\nu}^{M_\nu} |c^{(\nu)}_{k,n}|^{2+\epsilon} < \frac{\epsilon}{2^{\nu_0}}. \tag{2.48}$$

Таким образом, для фиксированного $1 \le \nu \le \nu_0$ определяются множество $E_\nu \subset T$ и полином $Q_\nu(x,y)$ вида (2.42), удовлетворяющие оценкам (2.43)–(2.48). Можно взять

$$N_1 = N, \quad N_\nu = M_{\nu-1} + 1, \quad 1 \le \nu \le \nu_0. \tag{2.49}$$

Теперь определим множество E, функцию $g(x,y)$, полином $Q(x,y)$ и перестановку $\sigma(N)$,...,$\sigma(M)$ натуральных чисел N,..., M следующим образом :

$$E = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \bigcap \left(\bigcap_{\nu=0}^{\nu_0} G_\nu\right), \tag{2.50}$$

где $G_0 = [(x,y) \in T : |f(x,y) - \varphi(x,y)| < \epsilon/2]$

$$G_\nu = \left[(x,y) \in T : |Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)| < \frac{\epsilon}{\nu_0}\right], \quad 1 \le \nu \le \nu_0,$$

$$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x,y) + [f(x,y) - \varphi(x,y)], \tag{2.51}$$

$$Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x) \cdot \omega_n(y), \quad M = M_{\nu_0}, \tag{2.52}$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} c_{k,n}^{(\nu)}, & N_\nu \le k,n \le M_\nu, \quad 1 \le \nu \le \nu_0; \\ 0, & k,s \notin [N_\nu, M_\nu], \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \end{cases} \tag{2.53}$$

а $\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$, при $N_{\nu-1} \le k < N_\nu$, $1 \le \nu \le \nu_0$. Из (2.40)–(2.44), (2.46) и (2.50)–(2.53) следует, что $g(x,y) = f(x,y)$, для $(x,y) \in E$, $|E| > 1 - \epsilon$ и

$$\iint_T |g(x,y)|dxdy \le 10 \cdot \iint_T |f(x,y)|\,dx\,dy \qquad \sum_{k,n=N}^{M} |c_{k,n}|^{2+\epsilon} < \epsilon,$$

$$\iint_T |Q(x,y) - g(x,y)|dxdy < \epsilon.$$

Таким образом, утверждения 1)–3) и 6) Леммы 4 доказаны. Для доказательства утверждений 4) и 5) сначала отметим, что для всех $(x,y) \in E$ и $\nu \in [1,\nu_0]$, $G \subset E$ имеем (см. (2.40) и (2.41))

$$\left|\sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x,y)\right| \le |\varphi(x,y)| \le |f(x,y)| + \frac{\epsilon}{4}, \tag{2.54}$$

$$\int\int_T \left|\sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x,y)\right| dxdy \le \iint_T |\varphi(x,y)|dxdy \le \iint_T |f(x,y)|dxdy. \tag{2.55}$$

Пусть $R \in [\sqrt{2}N, \sqrt{2}M]$. Для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем $\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}M_\nu$. Поэтому из (2.51)-(2.53) получаем

$$\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\nu-1} Q_s(x,y) + \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y). \tag{2.56}$$

Учитывая (2.41), (2.44) и (2.45), для всех $(x,y) \in E$ получим

$$\left|\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(n)}(y)\right| \le \sum_{s=1}^{\nu-1} |Q_s(x,y) - \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)| +$$

$$+ \left|\sum_{s=1}^{\nu-1} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)\right| + \left|\sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| \le |f(x,y)| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Из (2.47), (2.49), (2.55) и (2.56) следует, что

$$\int\int_T \left|\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| dxdy \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{\nu-1} \iint_T |Q_s(x,y) - \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)| \, dx\, dy +$$

$$+ \int\int_T \left|\sum_{s=1}^{\nu-1} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)\right| dxdy +$$

$$+ \int\int_T \left|\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(k)}\omega_{\sigma(k)}(x) \cdot \omega_{\sigma(k)}(y)\right| dxdy \le 2 \cdot \iint_T |f(x,y)| \, dx\, dy + \frac{\epsilon}{4}.$$

Аналогично, для всех $\overline{k}$, $\overline{n} \in [N, M]$

$$\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}(x)\cdot\omega_{\sigma(k)}(y)\right| \le |f(x,y)| + \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{для всех} \quad (x,y)\in E,$$

$$\int\int_T\left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\omega_{\sigma(k)}v(x)\cdot\omega_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \le 2\cdot\int\int_T |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

Доказательство Леммы 4 завершено.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 2 : Пусть

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

есть последовательность алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя Лемму 2 к $f = f_k$, из (3.1) определим непрерывные функции $\{\overline{g}_n(x)\}$, множества $\{G_n\}$ и полиномы

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x), \tag{3.2}$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$ – некоторая перестановка натуральных чисел m_{n-1}, $m_{n-1}+1$, ...,$m_n - 1$ (для каждого фиксированного n), удовлетворяющие условиям

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x\in G_n, \tag{3.3}$$

$$|G_n| > 1 - 2^{-n-2}, \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)|dx < 3\cdot\int_0^1 |f_n(x)|dx, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 |\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)| < 2^{-8(n+1)}, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{N} \left|a_k^{(n)}\right|^{2+2^{-n}} < 2^{-n}, \tag{3.7}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{k=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right|\le 3\cdot\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{3.8}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\left(\left|\sum_{k=m_{n-1}}^{N}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right|\right)\le|f_n(x)|+2^{-8(n+1)},\quad\forall x\in G_n. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$E_n=\{x\in[0,1]:\quad|\overline{Q}_n(x)-\overline{g}_n(x)|<2^{-4(n+1)}\}. \tag{3.10}$$

В силу неравенства Чебышева из (3.6) следует

$$|E_n|>1-2^{-4(n+1)}. \tag{3.11}$$

Определим перестановку и ряд следующим образом :

$$\sigma(k)=\sigma_n(k),\quad m_{n-1}\le k<m_n. \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_{\sigma(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}a_k^{(n)}\varphi_{\sigma_n(k)}(x)\right), \tag{3.13}$$

где $c_k=a_k^{(n)}$, $k\in[m_{n-1},m_n)$, $n\ge1$.

Теперь покажем, что (3.13) есть искомый ряд. Пусть ϵ – произвольное положительное число, n_0 – целая часть $\log_{1/2}\epsilon$. Выберем $B\in[0,1]$ с мерой $|B|>1-\frac{\epsilon}{4}$ так, чтобы $\varphi_k(x)$ были непрерывны на B. Рассмотрим множество

$$\overline{E}=\bigcap_{n=n_0}^{\infty}(G_n\cap E_n)\cap B. \tag{3.14}$$

Из (3.4), (3.10), (3.14) получим $|\overline{E}|>1-\frac{\epsilon}{2}$. Пусть $E\subset\overline{E}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\overline{E}$ с мерой $|E|>|\overline{E}|-\frac{\epsilon}{2}$. Ясно, что $|E|>1-\epsilon$. Пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная функция, определенная на E. Легко видеть, что подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из (3.1) может быть выбрана так, чтобы

$$\lim_{N\to\infty}\max_{x\in E}\left|\sum_{n=1}^{N}f_{k_n}(x)-f(x)\right|=0, \tag{3.15}$$

$$\max_{x\in[0,1]}|f_{k_n}(x)|<2^{-8n},\quad n\geq 2,\quad k_1>n_0. \tag{3.16}$$

Полагая $g_1(x)=\overline{g}_{k_1}(x)$, $Q_1(x)=\overline{Q}_{k_1}(x)$ и учитывая (3.2)–(3.12) легко проверить, что функция $g_1(x)$ и полином $Q_1(x)$ удовлетворяют условиям (3.26)–(3.31) при $n=1$. Предположим, что уже определены функции $f_{\nu_1}(x)$,..., $f_{\nu_{q-1}}(x)$ и $g_{\nu_1}(x)$,..., $g_{\nu_{q-1}}(x)$ и полиномы

$$\overline{Q}_{\nu_n}(x)=\sum_{k=M_n}^{\overline{M}_n}c_k^{(\nu_n)}\varphi_{\sigma(k)}(x),\quad M_n=m_{\nu_n-1},\quad \overline{M}_n=m_{\nu_n}-1,\quad n\leq q-1, \tag{3.17}$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x)=f_{k_n}(x),\quad x\in E,\qquad n\leq q-1, \tag{3.18}$$

$$\int_0^1|g_n(x)|dx<2^{-(n+1)}, \tag{3.19}$$

$$\max_{x\in E}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left[\overline{Q}_{\nu_k}(x)-g_k(x)\right]\right|<2^{-2n}, \tag{3.20}$$

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\overline{Q}_{\nu_k}(x)-g_k(x)\right]\right|dx<2^{-(n+1)}, \tag{3.21}$$

$$\max_{M_n\leq m\leq\overline{M_n}}\int_0^1\left|\sum_{i=M_n}^{m}c_i^{(\nu_n)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|\mu(x)dx<2^{-n}, \tag{3.22}$$

$$\max_{M_n\leq m\leq\overline{M_n}}\max_{x\in E}\left|\sum_{i=M_n}^{m}c_i^{(\nu_n)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|<2^{-n}. \tag{3.23}$$

Выберем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из (3.1) такую, что

$$\max_{x\in E}\left|f_{\nu_q}(x)-\left(f_{k_q}(x)-\sum_{i=1}^{q-1}[Q_i(x)-g_i(x)]\right)\right|<2^{-8q}, \tag{3.24}$$

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right| dx < 2^{-8\cdot q}. \tag{3.25}$$

В силу (3.16), (3.20) и (3.21)

$$\max_{x\in E} \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)\right] \right| dx < 2 \cdot 2^{-2q}, \tag{3.26}$$

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right| dx < 2 \cdot 2^{-q}. \tag{3.27}$$

Из (3.24)–(3.27) имеем

$$\max_{x\in E} \left| f_{\nu_q}(x) \right| dx < 3 \cdot 2^{-2q}, \tag{3.28}$$

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right| dx < 3 \cdot 2^{-q}. \tag{3.29}$$

Полагая

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)] \tag{3.30}$$

и учитывая (3.3), (3.6), (3.18), (3.21), (3.22), (3.24) и (3.30), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E, \tag{3.31}$$

$$\int_0^1 |g_q(x)| dx \le \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)\right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)\right] \right| dx < 2^{-q-1}, \tag{3.32}$$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q} \left| \overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x) \right| dx \right) \le \int_0^1 \left| \overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[\overline{Q}_{\nu_i}(x) - g_i(x)\right] \right) \right| dx < 2^{-2q}. \tag{3.33}$$

Аналогично, из (3.6), (3.10), (3.14), (3.20) и (3.24) получим

$$\max_{x\in E}\left|\sum_{i=1}^{q}|\overline{Q}_{\nu_i}(x)-g_i(x)\right|<2^{-2q}. \tag{3.34}$$

В силу (3.8), (3.9), (3.12) ,(3.13), (3.28) и (3.29)

$$\max_{m_{\nu_q-1}\le m<m_{\nu_q}}\left(\max_{x\in E}\left|\sum_{i=m_{\nu_q}}^{m} c_i^{(\nu_q)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|\right)<2^{-q}, \tag{3.35}$$

$$\max_{m_{\nu_q-1}\le m<m_{\nu_q}}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=m_{\nu_q}}^{m} c_i^{(\nu_q)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|dx\right)<2^{-q}. \tag{3.36}$$

По индукции, определим последовательности функций $\{g_q(x)\}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих (3.17)–(3.23) для всех $q\ge 1$. Из (3.19) следует, что

$$\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^1|g_q(x)|dx<\infty. \tag{3.37}$$

Пусть

$$g(x)=\sum_{q=1}^{\infty}g_q(x), \tag{3.38}$$

$$\delta_i=\begin{cases}1, & m_{\nu_q-1}\le i<m_{\nu_q};\\ 0, & i\notin[m_{\nu_q-1},m_{\nu_q}).\end{cases} \tag{3.39}$$

В силу (3.17), (3.37) и (3.38), $g(x)\in L^1_{[0,1]}$, $g(x)=f(x)$, $x\in E$. Пусть $n>m_{k_0}$ – произвольное натуральное число. Тогда для некоторого q имеем $m_{\nu_q-1}\le n<m_{\nu_q}$. Поэтому из (3.16), (3.20), (3.31)–(3.35), (3.38) и (3.39) имеем

$$\max_{x\in E}\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i c_i\varphi_{\sigma(i)}(x)-g(x)\right|\le\max_{x\in E}\left|\sum_{i=1}^{q-1}[Q_{\nu_i}(x)-g_i(x)]\right|+$$

$$+\sum_{i=q}^{\infty}\left(\max_{x\in E}|g_i(x)|dx\right)+\max_{x\in E}\left|\sum_{k=m_{\nu_q-1}}^{n} c_i^{(\nu_q)}\varphi_{\sigma(i)}(x)\right|<2^{-q+2}.$$

Аналогично имеем $\int\limits_0^1\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i c_i\varphi_{\sigma(i)}(x)-g(x)\right|dx<2^{-q+2}$. Отсюда вытекает, что

$\delta_i c_i=\int\limits_0^1 g(x)\varphi_{\sigma(i)}(x)\,dx$, $i=1,2,\ldots$. Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Идея доказательства аналогична доказательству Теоремы 2. Единственная разница в использовании Леммы 4 вместо Леммы 1.

Abstract. Let $\{\varphi_n(x)\}$ be a complete in $L^2[0,1]$ orthonormal system of bounded functions such that $\|\varphi_n\|_{p_0}\le const$ for some $p_0>2$ and all $n\ge 1$. The paper proves that a rearrangement $\{\sigma(k)\}$ of the natural numbers exists, such that the system $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ possesses the following property : for each $\varepsilon>0$ there exists a measurable set $E\subset[0,1]$ with measure $|E|>1-\varepsilon$, such that for each continuous function $f(x)$ there exists $g(x)\in L^1_{[0,1]}$ coinciding with $f(x)$ on E, the Fourier series for $g(x)$ by the system $\{\varphi_{\sigma(k)}\}$ converges to $g(x)$ both uniformly on E and in the metric of $L^1_{[0,1]}$, while the sequence of Fourier coefficients of $g(x)$ by the system $\{\varphi_n(x)\}$ belongs to l^q for all $q>2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. G. Grigorian, "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1", Analysis Math., vol. 17, no. 3, pp. 211 — 237, 1991.
2. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Сборник, том 181, № 8, стр. 1011 – 1030, 1990.
3. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье, и о коэффициентах Фурье суммируемых функций", Изв. АН Армении, Математика, том 26, № 2, стр. 18 – 35, 1991.
4. М. Г. Григорян, "Сходимость почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Заметки, том 51, № 5, стр. 35 — 43, 1992.
5. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН сер. Матем., том 57, № 5, стр. 75 – 105, 1993.
6. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia. Math., vol. 134, no. 3, pp. 207 – 216, 1999.
7. М. Г. Григорян, "О сходимости рядов Фурье по полной ортонормированной системе в L^p, $p>2$", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 1, стр. 34 – 53, 1999.
8. M. G. Grigorian, K. K. Kazarian, F. Soria, "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions", Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), vol. 352, no. 8, pp. 3777 — 3799, 2000.

9. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сборник, том 28, № 2, стр. 266 – 294, 1912.
10. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сборник, том 53, № 2, стр. 67 – 96, 1942.
11. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды Моск. матем. общ-ва, том 1, стр. 5 – 38, 1952.
12. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье непрерывных функций", Уч. Записки, серия Математика, том 148, № 4, стр. 108 – 132, 1951.
13. А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. Заметки, серия Математика, том 33, № 5, стр. 715 – 722, 1983.
14. К. И. Осколков, "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", ДАН СССР, том 228, № 2, стр. 304 – 306, 1976.
15. А. А. Талалян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм.ССР, том 42, № 3, стр. 134 – 140, 1966.
16. Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, серия Матем. и Механика, № 1, стр. 6 – 8, 1988.
17. О. Д. Церетели, "О сходимости почти всюду рядов Фурье", Сообщ. АН Груз.ССР, том 57, № 1, стр. 21 – 24, 1970.
18. J. J. Price, Walsh series and adjustment of functions on small sets, Illinois J. Math., vol. 13, pp. 131 — 136, 1969.
19. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 1, № 4, стр. 270 – 283, 1966.
20. Ш. В. Хеладзе, "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики L^1", Мат. Сборник, том 107, № 2, стр. 245 – 258, 1978.
21. К. С. Казарян, "О некоторых вопросах теории ортогональных рядов", Мат. Сборник, том 119, № 2, стр. 278 – 298, 1982.
22. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Матем. Сборник, том 99(141), стр. 356 – 365, 1976.
23. А. Б. Гулисашвили, "Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов", Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, том 107, стр. 45 – 59, 1982.
24. Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зерекидзе, "О сопряженных функциях нескольких переменных", Сообщ. АН Груз.ССР, том 94, № 3, стр. 541 – 544, 1979.
25. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
26. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физматгиз, 1961.

Поступила 14 июня 2002

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 69-82

НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОЖЕСТВ ε-ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Р. А. Хачатрян, Р. А. Аветисян, А. Р. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. Работа посвящена вопросу непрерывности многозначных отображений и применения этих отображений в теории игр двух лиц с передачей информации. Указан ряд условий, при которых многозначное отображение является непрерывным. Используя этот результат, доказывается существование социального равновесия в ϵ–оптимальных стратегиях в играх с двумя лицами и с противоположными интересами.

ВВЕДЕНИЕ

При заданном множестве F стратегий первого игрока, множество ϵ–оптимальных стратегий второго игрока с функцией проигрыша $f(x, y)$ определяется по формуле

$$\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F\colon f(x,y) \leq \inf_{y\in F} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

В этой статье рассматривается вопрос непрерывности многозначного отображения $\alpha_\varepsilon^F(x)$. Известно (см. [6]), что при $\epsilon = 0$ многозначное отображение, вообще говоря, не является непрерывным. Мы находим условия, которые гарантируют непрерывность многозначного отображения $\alpha_\varepsilon^F(x)$ при $\varepsilon > 0$. Используя непрерывность многозначного отображения $\alpha_\varepsilon^F(x)$, в работе установлены следующие результаты :

a) Методом градиентного спуска строится функциональная последовательность, и при некоторых естественных условиях доказывается, что расстояние этой последовательности до множества $\alpha_\varepsilon(x)$ равномерно по $x \in E$ стремится к нулю.

b) С помощью так называемых сеточных множеств [7], строятся аппроксимации множеств ϵ–оптимальных стратегий и доказывается существование социального равновесия ϵ–стратегий в игре двух лиц с противоположными интересами.

Напомним некоторые определения из [2].

Определение 1. Многозначным отображением из множества X в множество Y называется отображение α, которое сопоставляет каждому $x \in X$ множество $\alpha(x) \subseteq Y$.

Определение 2. Многозначное отображение $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется H–полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\alpha(x) \subseteq \alpha(x_0) + B(0, \varepsilon)$ для любого $x \in U(x_0)$, где $B(0, \varepsilon)$ – шар радиуса ε с центром в начале координат 0.

Определение 3. Многозначное отображение α называется H–полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\alpha(x_0) \subseteq \alpha(x) + B(0, \varepsilon)$ для любого $x \in U(x_0)$.

Определение 4. Многозначное отображение α называется H–непрерывным в точке x_0, если оно одновременно H–полунепрерывно в точке x_0 и сверху и снизу.

Определение 5. Многозначное отображение α называется K–полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если из того, что $x_j \to x_0$, $\nu_j \in \alpha(x_j)$ и $\nu_j \to \nu_0$ следует, что $\nu_0 \in \alpha(x_0)$.

Определение 6. Многозначное отображение α называется K–полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любого $\nu_0 \in \alpha(x_0)$ и любой последовательности $\{x_j\}$, $x_j \to x_0$ найдутся такие $\nu_j \in \alpha(x_j)$, что $\nu_j \to \nu_0$.

Определение 7. Многозначное отображение α называется K–непрерывным в точке x_0, если оно одновременно K–непрерывно в точке x_0 и сверху и снизу.

§1. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которая выпукла по y при каждом фиксированном x. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – компакт и для любого $x \in E$ функция $V(x) = \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y)$. Положим

$$\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad f(x, y) \leq V(x)\}, \qquad \alpha_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad f(x, y) \leq V(x) + \varepsilon\},$$

где ε – некоторое положительное число.

Лемма 1.1. *Пусть для компакта $E \subseteq \mathbb{R}^n$ множество $Im\,\alpha \equiv \bigcup_{x \in E} \alpha(x)$ ограничено. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ множество $Im\,\alpha_\varepsilon \equiv \bigcup_{x \in E} \alpha_\varepsilon(x)$ ограничено.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда будут существовать последовательности $\{\varepsilon_j\}$, $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ такие, что $x_j \to x_0 \in E$, $y_j \in \alpha_{\varepsilon_j}(x_j)$, $y_j \to \infty$ при $\varepsilon_j \to 0$. Для $z_j \in \alpha(x_j)$, $h_j = \dfrac{y_j - z_j}{\|y_j - z_j\|}$, $\lambda_j = \dfrac{\alpha}{\|y_j - z_j\|}$, где $\alpha \geq 0$, имеем

$$f(x_j, \lambda_j y_j + (1-\lambda_j)z_j) \leq \lambda_j f(x_j, y_j) + (1-\lambda_j)\, f(x_j, z_j) \leq$$
$$\leq \lambda_j\,(V(x_j)+\varepsilon) + (1-\lambda_j)\, V(x_j) \leq V(x_j) + \varepsilon_j,$$

т.е. предел при $j \to \infty$ есть $f(x_0, y_0 + \alpha h) \leq V(x_0)$, где $h = \lim\limits_{j\to\infty} h_j$, $h \neq 0$, $y_0 = \lim\limits_{j\to\infty} z_j$. Следовательно $y_0 + \alpha h \in \alpha(x_0)$ для любого $\alpha \geq 0$. Это противоречит ограниченности множества $\alpha(x_0)$. Лемма 1.1 доказана.

Замечание. В [9], Лемма 26.1 доказано, что если $\alpha(x_0) \neq \emptyset$ и $\alpha(x_0)$ ограничено, то существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\alpha(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in U(x_0)$, причем множество $\operatorname{Im}\alpha \equiv \cup_{x\in U(x_0)}\alpha(x)$ ограничено.

Лемма 1.2. *Многозначное отображение $\alpha_\varepsilon(x)$ H–непрерывно.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $x \in E$ существует непрерывное отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \alpha_\varepsilon(x)$. Положим $\Psi(x,y) = f(x,y) - V(x) - \varepsilon$. Существует отображение $\overline{y}(x)$ (не обязательно непрерывное) из E в $\mathbb{R}^m$ такое, что

$$f(x, \overline{y}(x)) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} f(x,y).$$

Пусть $\delta > 0$. Поскольку $\Psi(x,y)$ непрерывно по x, то существует окрестность $B(x,\eta(x))$ точки x такая, что $\Psi(z,\overline{y}(x)) \leq \Psi(x,\overline{y}(x)) + \delta$ для любого $x \in B(x,\eta(x))$. Так как E – компакт, то его можно покрыть шарами $B(x_i,\eta(x_i))$, $i = 1,...,n$. Пусть g_i, $i = 1,...,n$ – непрерывное разбиение единицы. Рассмотрим функцию

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,\overline{y}(x_i).$$

Отметим, что $D(x)$ непрерывна, поскольку непрерывны функции g_i, $i = 1,..,n$.

Так как функция $y \to \Psi(x,y)$ выпукла, $g_i(x) \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, то

$$\Psi(x, D(x)) \leq \sum_{i\in I(x)} g_i(x)\,\Psi(x, \overline{y}(x_i)),$$

где $I(x) = \{i\colon\, g_i(x) > 0, i = 1,..,n\}$ непусто, поскольку $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$. С другой стороны, если $g_i(x) > 0$, то точка x принадлежит носителю g_i, который содержится в шаре $B(x_i, \eta(x_i))$, т.е. $x \in B(x_i, \eta(x_i))$. Поэтому при достаточно малых $\delta > 0$

$$\Psi(x, \overline{y}(x_i)) \leq \Psi(x_i, \overline{y}(x_i)) + \delta = -\varepsilon + \delta < 0.$$

Отсюда вытекает

$$\Psi(x, D(x)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x)\, \Psi(x, \overline{y}(x_i)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x)\, (\Psi(x_i, \overline{y}(x_i)) + \delta) < 0$$

для достаточно малого $\delta > 0$. Следовательно, $D(x) \in \alpha_\varepsilon(x)$.

Пусть $x_j \to x_0$, $y_0 \in \alpha_\varepsilon(x_0)$. Положим $T_j = \{t\colon\, 0 \leq t \leq 1, t\, y_0 + (1 - t)\, D(x_j) \in \alpha_\varepsilon(x_j)\}$. Так как $0 \in T_j$, то имеем $T_j \neq \emptyset$. Пусть t_j – максимальный элемент множества T_j. Можно предположить, что $\{t_j\}$ является сходящейся последовательностью, $t_j \to t$. Если $t = 1$, то $D(x_j) \to D(x_0)$. Поэтому $y_j \to y_0$, а $\{y_j\}$ – искомая последовательность. Если $t < 1$, то начиная с некоторого номера все $t_j < 1$. Покажем, что отсюда вытекает $\Psi(x_j, y_j) = 0$. Действительно, если $\Psi(x_j, y_j) < 0$, то положим $t'_j = t_j + \delta < 1$ и рассмотрим точку $y'_j = y_j + \delta\,(y_0 - D(x_j))$. Воспользовавшись непрерывностью функции $\Psi(x, \cdot)$, можно выбрать δ настолько малым, чтобы $\Psi(x_j, y'_j) < 0$. Это противоречит максимальности t_j. Поэтому, при $t < 1$ имеем $0 = \lim \Psi(x_j, y_j) \leq \Psi(x_0, \overline{y})$, где $\overline{y} = t\, y_0 + (1 - t)\, D(x_0)$. Учитывая, что функция $\Psi(x, y)$ выпукла относительно y, получим

$$0 \leq \Psi(x_0, \overline{y}) \leq t\, \Psi(x_0, y_0) + (1 - t)\, \Psi(x_0, D(x_0)).$$

Поскольку $\Psi(x_0, D(x_0)) < 0$, то имеем $\Psi(x_0, y_0) > 0$, что противоречит тому, что $y_0 \in \alpha_\varepsilon(x_0)$. Таким образом, случай $t < 1$ невозможен. Следовательно, $\alpha_\varepsilon(x)$ K–полунепрерывен снизу в точке x_0. Учитывая, что множество значений $\operatorname{Im} \alpha_\varepsilon$ компактно и график многозначного отображения α_ε замкнут, заключаем, что $\alpha_\varepsilon(x)$ H–непрерывно в точке x_0. Лемма 1.2 доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующие две леммы.

Лемма 1.3. *Пусть $f(x, y)$ непрерывна и выпукла по $y \in F$, где $F \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый компакт и*

$$\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F\colon\, f(x, y) \leq \min_{y \in F} f(x, y) + \varepsilon\},$$

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^m\colon\ f(x,y) \le \min_{y\in F} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

Тогда многозначное отображение α_ε^F H–непрерывно, а отображение $B(x)$ K–непрерывно.

Лемма 1.4. *Пусть выполнены условия Леммы 1.3. Если для любого $x \in E$ существует $y \in F$ такое, что $f(x,y) < 0$, то многозначное отображениет $A(x) = \{y \in F\colon\ f(x,y) \le 0\}$ является H–непрерывным.*

Теорема 1.1. *Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям :*

1) $f(x,y)$ выпукла относительно y при фиксированном $x \in E$, где $E \equiv U(x_0)$ – некоторая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

2) для каждого $x \in E$ существует производная $f'_y(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, непрерывная относительно x и y ;

3) множество $\alpha(x_0)$ непусто и ограничено.

Тогда существует замкнутая окрестность $E_0 \subset E$ точки x_0 такая, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$d(y_j(x), \alpha_\varepsilon(x)) \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty \quad \text{равномерно по} \quad x \in E_0, \tag{1.1}$$

когда

$$\lambda_j \to 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = +\infty, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty, \quad \text{и} \quad y_{j+1}(x) = y_j(x) + z_j(x),$$

где $z_j(x) = -\lambda_j\, f'_y(x, y_j(x))/w_j$, $w_j \equiv \max_{x\in E_0} \|f'_y(x, y_j(x))\|$.

Доказательство. Мы показали, что существует замкнутая окрестность $E_0 \subset E$ точки x_0 такая, что $\alpha(x) \neq \emptyset$ и $\operatorname{Im}\alpha = \cup_{x\in E_0}\alpha(x)$ ограничено. Покажем теперь, что последовательность $\{y_j\}$, построенная вышеуказанным способом, равномерно ограничена. Пусть $y^*(x) \in \alpha(x)$. Имеем

$$\|y_{j+1}(x) - y_j(x)\|^2 = \|y_j(x) - \lambda_j\, \frac{f'_y(x, y_j(x))}{w_j} - y^*(x)\|^2 = \|y_j(x) - y^*(x)\|^2 +$$

$$+\, 2\frac{\lambda_j}{w_j} < y^*(x) - y_j(x), f'_y(x, y_j(x)) > + \lambda_j^2\, \frac{\|f'_y(x, y_j(x))\|}{w_j} \le \|y_j(x) - y^*(x)\|^2 + \lambda_j^2.$$

Отсюда вытекает

$$\|y_j(x) - y^*(x)\|^2 \le \|y_0(x) - y^*(x)\|^2 + \sum_{i=0}^{j} \lambda_i^2.$$

Так как $\operatorname{Im}\alpha$ ограничено, то существует число $m > 0$ такое, что $\max_{x\in E_0} \|y_j(x)\| \le m$ для любого j. Чтобы доказать (1.1) предположим обратное. Тогда должно существовать бесконечное множество индексов K такое, что для каждого $j \in K$ существует элемент $x_j \in E_0$ такой, что для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$d(y_j(x_j), \alpha_\varepsilon(x_j)) \ge 2\,\delta > 0. \tag{1.2}$$

Поскольку E_0 компактно, то можно считать, что $x_j \to \overline{x} \in E_0$. Учитывая, что многозначное отображение α_ε полунепрерывно снизу, при достаточно больших $j \in K$ имеем

$$\alpha_\varepsilon(\overline{x}) \subseteq \alpha_\varepsilon(x_j) + \delta\, B(0,1). \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что

$$d(y_j(x_j), \alpha_\varepsilon(\overline{x})) \ge \delta > 0. \tag{1.4}$$

Существует число $\Delta > 0$ такое, что для достаточно большого $j \in K$ $\nu_j \equiv y_j(x_j) \notin \alpha_{\varepsilon+\Delta}(\overline{x})$. Если предположить обратное, то должны существовать последовательности $\Delta_i \to 0$, $j_i \in K$ такие, что $\nu_{j_i} \in \alpha_{\varepsilon+\Delta_i}(\overline{x})$. Можно предположить, что

$$\nu_{j_i} \to \overline{\nu} \in \alpha_\varepsilon(\overline{x}). \tag{1.5}$$

С другой стороны, из (1.4) следует, что $\overline{\nu} \notin \alpha_\varepsilon(\overline{x})$, что противоречит соотношению (1.5). Поэтому $f(\overline{x}, \nu_j) > V(\overline{x}) + \varepsilon + \Delta$. Теперь, если $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$, то для $j \ge N$ имеем

$$< f'_y(\overline{x}, \nu_j), \nu - \nu_j > \le f(\overline{x}, \nu) - f(\overline{x}, \nu_j) \le -\Delta < 0. \tag{1.6}$$

Положим $A_j(z,\nu) =< f'_y(z,\nu_j), \nu - \nu_j >$, $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$, $j \ge N$. Так как отображение $f'_y(x,\nu)$ непрерывно, то для $\nu \in \Omega$ (где Ω – компакт) и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(\overline{x})$ точки $\overline{x}$ такая, что

$$\|f'_y(z,\nu) - f'_y(\overline{x},\nu)\| \le \epsilon, \quad \text{для любого} \quad z \in U(\overline{x}) \subseteq E, \quad \text{и} \quad \nu \in \Omega.$$

Поскольку $\alpha_\varepsilon(\overline{x})$ и $\{\nu_j\}$ ограничены, то существует $M > 0$ такое, что для любого $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$ и $j \geq N$ имеем

$$A_j(z,\nu) \leq A_j(\overline{x},\nu) + < f'_y(z,\nu_j) - f'_y(\overline{x},\nu_j), \nu - \nu_j > \leq$$
$$\leq \|f'_y(z,\nu_j) - f'_y(\overline{x},\nu_j)\| \cdot \|\nu - \nu_j\| \leq \varepsilon(\|\nu\| + \|\nu_j\|) \leq \varepsilon \cdot M.$$

Поэтому $A_j(z,\nu) < -\Delta/2$ при $\varepsilon < \Delta/(2M)$. Следовательно, для достаточно больших $j \in K$ и любого $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$ имеем $A_j(x_j,\nu) < -\Delta/2$. Учитывая (1.6), получим

$$< u_j, \nu_j - \nu > \leq -\frac{\Delta\,\lambda_j}{2\,w_j}, \tag{1.7}$$

где $u_j = z_j(x_j)$.

Так как последовательность $y_j(x)$ равномерно ограничена, то ограничена и последовательность w_j. Поэтому $w_j \leq m$, и согласно (1.7) для $\nu \in \alpha_\varepsilon(\overline{x})$ получаем $< u_j, \nu_j - \nu > \leq -r\,\lambda_j$, $r \equiv \Delta/(2m)$. При $\overline{y} \in \alpha(\overline{x})$ имеем $\|\nu_{j+1} - \overline{y}\|^2 =$

$$= \|\nu_j + u_j - \overline{y}\|^2 = \|\nu_j - \overline{y}\|^2 + 2 < u_j, \nu_j - \overline{y} > + \|u_j\|^2 \leq \|\nu_j - \overline{y}\|^2 - 2\,r\,\lambda_j + \lambda_j^2.$$

Поскольку $\lambda_j \to 0$ при достаточно больших j, то имеем $\|\nu_{j+1} - \overline{y}\|^2 \leq \|\nu_j - \overline{y}\|^2 - r\,\lambda_j$. Отсюда следует

$$\|\nu_{j+s} - \overline{y}\|^2 \leq \|\nu_j - \overline{y}\|^2 - r\sum_{i=0}^{s-1}\lambda_{j+i}$$

для любого натурального s. Следовательно, $\|\nu_{j+s} - \overline{y}\|^2 \to -\infty$ при $s \to \infty$. Этим противоречием доказывается Теорема 1.1.

Следствие. Если α – однозначное отображение, т.е. $\alpha(x) = \{y(x)\}$ для любого $x \in E_0$, то $y_j(x) \to y(x)$ равномерно относительно $x \in E_0$.

Доказательство. Положим $d_\varepsilon(x) = \max\limits_{y \in \alpha_\varepsilon(x)} d(y, \alpha(x))$, и докажем, что $d_\varepsilon(x) \to 0$ при $j \to \infty$ равномерно относительно $x \in E_0$. Предположим обратное. Тогда существуют число $\delta > 0$ и последовательности $x_j \in E_0$, $\varepsilon_j \to 0$, $y_j \in \alpha_{\varepsilon_j}(x_j)$ такие, что

$$d(y_j, \alpha(x_j)) > \delta. \tag{1.8}$$

Так как E_0 – компакт и множество $\operatorname{Im}\alpha_\varepsilon$ ограничено, то можно считать, что

$$x_j \to \overline{x} \in E_0, \qquad y_j \to \overline{y} \in \alpha(\overline{x}). \tag{1.9}$$

С другой стороны, поскольку α непрерывно снизу и является однозначным отображением, то оно непрерывно. Поэтому для достаточно большого j имеем $\alpha(\overline{x}) \subseteq \alpha(x_j) + \delta \cdot B(0,1)$. Отсюда и из (1.8) следует $d(\overline{y}, \alpha(\overline{x})) \geq \delta > 0$, т.е. $\overline{y} \notin \alpha(\overline{x})$, что противоречит соотношению (1.9). Для $u \in \alpha_\varepsilon(x)$ имеем

$$d(y_j(x), y(x)) \leq d(y_j(x), u) + d(y(x), u) \leq d(y_j(x), u) + d_\varepsilon(x).$$

Так как $u \in \alpha_\varepsilon(x)$ произвольно, то

$$d(y_j(x), y(x)) \leq d(y_j(x), \alpha_\varepsilon(x)) + d_\varepsilon(x).$$

Следствие доказано.

Для многозначного отображения $b(x)$ положим

$$N_b(x,y) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ < \nu, u - y > \leq 0, \quad \text{для любого} \quad u \in b(x)\}.$$

Лемма 1.5. *Пусть $b(x)$ – многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями, и пусть точка (x_0, y_0) такая, что $y_0 \notin b(x_0)$ и $\operatorname{int} N_b(x_0, y_0) \neq \emptyset$. Предположим, что $b(x)$ H-полунепрерывно сверху и K-полунепрерывно снизу в точке x_0. Тогда многозначное отображение $N_b(x,y)$ K-непрерывно в точке (x_0, y_0).*

Доказательство. Сначала покажем, что $N_b(x,y)$ K-полунепрерывно сверху, т.е. что из $x_j \to x_0$, $y_j \to y_0$ и $\nu_j \in N_b(x_j, y_j)$, $\nu_j \to \nu_0$ вытекает, что $\nu_0 \in N_b(x_0, y_0)$. Если $\nu_j \in N_b(x_j, y_j)$, то $< \nu_j, u - x_j > \leq 0$ для любого $u \in b(x_j)$. Пусть $u_0 \in b(x_0)$. Поскольку многозначное отображение b K-полунепрерывно снизу, то существует последовательность $u_j \in b(x_j)$ такая, что $u_j \to u_0$. Следовательно, имеем

$$< \nu_j, u_j - x_j > \leq 0, \tag{1.10}$$

откуда вытекает $< \nu_0, u_0 - x_0 > \leq 0$ для любого $u_0 \in b(x_0)$. Поэтому $\nu_0 \in N_b(x_0, y_0)$.

Теперь покажем, что $N_b(x,y)$ K-полунепрерывно снизу. Если $y_0 \notin b(x_0)$, то существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $U_{\delta_0}(y_0) \cap \{b(x_0) + B(0, \varepsilon_0)\} = \emptyset$. Пусть $x_j \to x_0$, $y_j \to y_0$ и $\nu_0 \in \operatorname{int} N_b(x_0, y_0)$. Так как отображение $b(x)$ H–полунепрерывно сверху, то существует число N такое, что при $j \geq N$ имеем

$$b(x_j) \subseteq b(x_0) + B(0, \varepsilon_0), \qquad y_j \in U_{\delta_0}(y_0). \tag{1.11}$$

Пусть $\min\limits_{u\in b(x_0)+B(0,\varepsilon_0)} \|u-y_j\| = \|u_j - y_j\| \geq m > 0$. Известно, что для любого $u \in b(x_0) + B(0,\varepsilon_0)$ имеем

$$< u - y_j, u_j - y_j > \geq \|u_j - y_j\|^2.$$

Положим $\delta_j = 2\,\|u_j - y_j\|^{-1} \cdot | < \nu_0, y_0 - y_j > |$ и $\nu_j = \nu_0 + \delta_j\,\|u_j - y_j\|^{-1} \cdot (y_j - u_j)$. Ясно, что $\delta_j \to 0$. Поэтому для $u \in b(x_0) + B(0,\varepsilon_0)$ имеем

$$\begin{aligned} &< u - y_j, \nu_j > = < u - y_j, \nu_0 > + \delta_j < u - y_j, \|u_j - y_j\|^{-1}(y_j - u_j) > \leq \\ &\leq < u - y_j, \nu_0 > - \delta_j\,\|u_j - y_j\| = < u - y_0, \nu_0 > + < y_0 - y_j, \nu_0 > - \\ &- 2\,| < \nu_0, y_0 - y_j| \leq < u - y_0, \nu_0 > . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Так как $\nu_0 \in \operatorname{int} N_b(x_0, y_0)$, то существует окрестность $V_\delta(\nu_0)$ такая, что $V_\delta(\nu_0) \subset N_b(x_0, y_0)$. При $\nu \in V_\delta(\nu_0)$ имеем $\nu = \nu_0 + \overline{\nu}$, $\|\overline{\nu}\| \leq \delta$. Следовательно, имеем

$$< \nu_0, u - y_0 > \leq - < \overline{\nu}, u - y_0 >, \quad \text{для любого} \quad u \in b(x_0) \quad \text{и} \quad \overline{\nu} \in B(0,\delta). \tag{1.13}$$

Полагая $\overline{\nu} = \dfrac{u - y_0}{\|u - y_0\|} \cdot \delta$ и учитывая (1.12), для любого $u \in b(x_0)$ получим

$$< \nu_0, u - y_0 > \leq -\delta\,\|u - y_0\| \leq -\delta\, d(y_0, b(x_0)) < 0.$$

В силу (1.11) – (1.13) $< u - y_j, \nu_j > < 0$ для любого $u \in b(x_j)$. Отсюда следует $\nu_j \in N_b(x_j, y_j)$ и $\nu_j \to \nu_0$. Далее, если ν_0 – граничная точка множества $N_b(x_0, y_0)$, то существует последовательность $\overline{\nu}_j \in \operatorname{int} N_b(x_0, y_0)$ такая, что $\overline{\nu}_j \to \nu_0$. Поэтому можно построить последовательность $\nu_j \in N_b(x_j, y_j)$ такую, что $\nu_j \to \nu_0$. Лемма 1.5 доказана.

Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция, которая при каждом $x \in E$ выпукла по $y \in F$, при этом E – компакт, а F – выпуклый компакт. Положим $Ep(x) = \{(\alpha, y)\colon\ \alpha \in \mathbb{R}^1,\ y \in F,\ f(x,y) \leq \alpha\}$ и для $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, $\varepsilon > 0$ и $\overline{y}_0 = (f(x_0,y_0) - \varepsilon, y_0) \notin Ep(x_0)$ имеем

$$\partial^F_{\varepsilon,y} f(x_0,y_0) = \{\nu \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \geq < \nu, y - y_0 > -\varepsilon, \text{ для любого } y \in F\},$$

$$Q(x_0,\overline{y}_0) = \{ \text{[illegible]} 1,\nu) \in N_\alpha(x_0,\overline{y}_0)\}.$$

Множество $\partial^F_{\varepsilon,y} f(x_0,y_0)$ называ[illegible]словным ε–субдифференциалом функции $f_x(\cdot) \equiv f(x,\cdot)$ в точке (x_0,y_0) по множеству F (см. [2]). Ясно, что $y \in \alpha^F_\varepsilon(x)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \partial^F_{\varepsilon,y} f(x,y)$. Имеют место следующие результаты.

Лемма 1.6 (см. [6]). *Многозначное отображение* $Ep(x)$ *полунепрерывно снизу.*

Лемма 1.7. $Q(x_0, \overline{y}_0) = \partial^F_{\varepsilon,y} f(x_0, y_0)$.

Доказательства аналогичны доказательству Леммы 13.2 из [2].

Теорема 1.2. *Отображение* $\partial^F_{\varepsilon,y} f(x,y)$ K*–непрерывно по* $(x,y) \in E \times F$.

§2. АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ $\mathcal{E}$–СТРАТЕГИЙ СЕТОЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Пусть $\alpha^F_\varepsilon(x) = \{y \in F\colon\ f(x,y) \le V^F(x) + \varepsilon\}$, где F - выпуклое компактное множество и $V^F(x) = \inf\limits_{y \in F} f(x,y)$. Для последовательности $h_j \to +0$ построим

конечные F_{h_j}-сетки на F такие, что расстояние между любой точкой $y \in F$ и ближайшей к ней точкой сетки F_{h_j} меньше h_j. Пусть

$$\overline{F}_{h_1} = F_{h_1}, \quad \overline{F}_{h_2} = \overline{F}_{h_1} \cup F_{h_2}, \quad \ldots, \overline{F}_{h_j} = \overline{F}_{h_{j-1}} \cup F_{h_j}, \ldots$$

Ясно, что $\overline{F}_{h_1} \subseteq \overline{F}_{h_2} \subseteq \ldots$. Положим

$$V_j(x) = \min_{y \in \overline{F}_{h_j}} f(x,y), \qquad \alpha^{h_j}_\varepsilon(x) = \{y \in \overline{F}_{h_j}\colon\ f(x,y) \le V_j(x) + \varepsilon\}.$$

Лемма 2.1. $V_j(x) \to V^F(x)$ *при* $j \to \infty$ *равномерно по* $x \in E$.

Доказательство. Ясно, что $V_j(x) \le V^F(x)$ для любого $x \in E$ и $j \in N$. С другой стороны, по определению нижней грани, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\overline{y} \in F$ такой, что $f(x, \overline{y}) \le V^F(x) + \varepsilon/2$. В силу непрерывности $f(x,y)$ по y, существует окрестность $U_h(\overline{y})$ точки $\overline{y}$ такая, что для любого $y \in U_h(\overline{y})$ имеем $f(x,y) \le f(x,\overline{y}) + \varepsilon/2$.

Для достаточно больших j имеем $h_j < h$. Поэтому $U_h(\overline{y})$ содержит хотя бы одну точку из $\overline{F}_{h_j}$. Следовательно, $V_j(x) \le f(x,\overline{y}) + \varepsilon/2 \le V^F(x) + \varepsilon$. Отсюда следует, что $V_j(x) \to V(x)$ при $j \to \infty$. Поскольку $V_j(x) \ge V_{j+1}(x)$ для любого j, то сходимость равномерна по $x \in E$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если* $x_j \to x_0$, *то для любого* $\delta > 0$ *существует число* $N(\delta)$ *такое, что*

$$\alpha^F_\varepsilon(x_0) \subseteq (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha^F_\varepsilon(x_j)) + \delta \cdot B(0,1) \quad \text{при} \quad j \ge N(\delta). \tag{2.1}$$

Доказательство : Допустим противное. Тогда существуют числа $\delta_0 > 0$ и последовательность y_j такие, что

$$y_j \in \alpha^F_\varepsilon(x_0), \quad y_j \notin (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha^F_\varepsilon(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.2}$$

Можно предположить, что $y_j \to y_0 \in \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. Поэтому

$$\Psi(x_0, y_0) \equiv f(x_0, y_0) - V^F(x_0) - \varepsilon \leq 0. \tag{2.3}$$

Пусть в (2.3) имеет место строгое неравенство. Поскольку Ψ непрерывна, то существует окрестность $U_\Delta(x_0) \times U_\Delta(y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $\Psi(x, y) < 0$ для любого $(x, y) \in U_\Delta(x_0) \times U_\Delta(y_0)$. Если $h_j < \Delta$, то $U_\Delta(y_0)$ содержит точку $y^{(j)} \in \overline{F}_{h_j}$ такую, что $\Psi(x_j, y^{(j)}) < 0$, $\|y^{(j)} - y_0\| < \Delta$. Поэтому $y^{(j)} \in \overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)$. При $\Delta < \delta_0/4$ имеем $\|y_j - y^{(j)}\| \leq \|y_j - y_0\| + \|y^{(j)} - y_0\| < \delta_0/4 + \delta_0/4 = \delta_0/2$. Это означает, что

$$y_j \in y^{(j)} + \frac{\delta_0}{2} B(0,1) \subseteq (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \frac{\delta_0}{2} B(0,1),$$

что противоречит соотношению (2.2). Пусть теперь $\Psi(x_0, y_0) = 0$. Существует точка $\overline{y} \in F$ такая, что $\|\overline{y} - y_0\| < \delta_0/4$, $\Psi(x_0, \overline{y}) < 0$. Рассмотрим окрестности $U_\Delta(x_0)$ и $U_\Delta(\overline{y})$ $(\Delta \leq \delta_0/4)$ $\Psi(x, y) < 0$ для любого $(x, y) \in U_\Delta(x_0) \times U_\Delta(\overline{y})$. Если $h_j < \Delta$, то существует элемент $y^{(j)} \in U_\Delta(\overline{y}) \cap \overline{F}_{h_j}$ такой, что $\Psi(x_j, y^{(j)}) < 0$. Отсюда получим $\|y^{(j)} - \overline{y}\| < \delta_0/4$ при $y^{(j)} \in \overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)$. Следовательно, $\|y_j - y^{(j)}\| \leq \|y_j - y_0\| + \|\overline{y} - y_0\| + \|y^{(j)} - \overline{y}\| \leq (3\delta_0)/4 < \delta_0$ при $y_j \in (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1)$, что противоречит соотношению (2.2). Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.1. *В метрике Хаусдорфа имеем* $\lim_{j\to\infty} \alpha_\varepsilon^{h_j}(x) = \alpha_\varepsilon^F(x)$ *равномерно на* E.

Доказательство. По Лемме 2.1 $V_j(x) \to V^F(x)$ при $j \to \infty$ равномерно на E. Поэтому, для любого $\Delta > 0$ существует $N(\Delta)$ такое, что при $j \geq N(\Delta)$

$$V_j(x) \leq V^F(x) + \Delta. \tag{2.4}$$

Следовательно, при $y \in (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^{h_j}(x))$ имеем $f(x, y) \leq V_j(x) + \varepsilon$. Учитывая (2.4), получим $f(x, y) \leq V^F(x) + \varepsilon + \Delta$, т.е. $y \in \alpha_{\varepsilon+\Delta}^F(x)$. Таким образом, $\alpha_\varepsilon^{h_j}(x) \subseteq \alpha_{\varepsilon+\Delta}^F(x)$ для любого $x \in E$ и $j \geq N(\Delta)$. Покажем теперь, что для любого $\delta > 0$ существует $\Delta(\delta) > 0$ такое, что

$$\alpha_{\varepsilon+\Delta}^F(x) \subseteq \alpha_\varepsilon^F(x) + \delta \cdot B(0,1), \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

Предположим обратное. Тогда существуют $\delta_0 > 0$, $\Delta_j \to 0$, $x_j \in E$ и $y_j \in \alpha_{\varepsilon+\Delta_j}^F(x_j)$ такие, что

$$y_j \notin \alpha_\varepsilon^F(x_j) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.5}$$

Так как E компактно, то можно считать, что

$$x_j \to x_0 \in E, \qquad y_j \to y_0 \in \alpha_\varepsilon^F(x_0). \tag{2.6}$$

Учитывая, что отображение α_ε полунепрерывно сверху, из (2.5) получим $y_j \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)+\delta_0/2\, B(0,1)$. Отсюда следует $y_0 \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)$, что противоречит (2.6). Таким образом, доказали, что для любого $\delta > 0$ существует число $N(\delta)$ такое, что

$$\alpha_\varepsilon^{h_j}(x) \subseteq \alpha_\varepsilon^F(x) + \delta \cdot B(0,1), \quad \text{для любого} \quad x \in E \quad \text{и} j \geq N(\delta).$$

Осталось показать, что

$$\alpha_\varepsilon^F(x) \subseteq \alpha_\varepsilon^{h_j}(x) + \delta \cdot B(0,1), \quad \text{для любого} \quad x \in E \quad \text{и} j \geq N(\delta). \tag{2.7}$$

Предположим, что (2.7) не верно. Тогда существуют $\delta_0 > 0$, $x_j \to x_0$ и $y_j \to y_0$ такие, что

$$y_j \in \alpha_\varepsilon^F(x_j), \qquad y_j \notin \alpha_\varepsilon^{h_j}(x_j) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.8}$$

Так как $V^F(x) \leq V_j(x)$, то будем иметь $\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j) \subseteq \alpha_\varepsilon^{h_j}(x_j)$. Поэтому, из (2.8)

$$y_j \notin (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.9}$$

Согласно Лемме 2.2, для достаточно больших j имеем

$$\alpha_\varepsilon^F(x_0) \subseteq (\overline{F}_{h_j} \cap \alpha_\varepsilon^F(x_j)) + \delta_0 \cdot B(0,1). \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует, что $y_j \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0) + \delta_0/2 \cdot B(0,1)$. Следовательно, $y_0 \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. С другой стороны, из $y_j \in \alpha_\varepsilon^F(x_j)$ следует, что $y_0 \in \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. Это противоречит тому, что $y_0 \notin \alpha_\varepsilon^F(x_0)$. Теорема 2.1 доказана.

§3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе применяем полученные результаты к задаче теории игр для двух лиц с передачей информации. Рассмотрим игру двух лиц с функцией выигрыша $f(x,y)$ и стратегией $x \in E$ первого игрока и функцией проигрыша $f(x,y)$ и стратегией $y \in F$ второго игрока. Величина

$$u_0 = \sup_{x\in E} \inf_{y \in \alpha_\varepsilon^F(x)} \Phi(x,y) \tag{3.1}$$

задает наилучший гарантированный результат первого игрока при множестве ε-оптимальных стратегий $\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F\colon f(x,y) \leq V^F(x) + \varepsilon\}$. Для последовательности $h_j \to +0$ положим

$$u_0^{h_j} = \sup_{x\in E} \inf_{y \in \alpha_\varepsilon^{h_j}(x)} \Phi(x,y).$$

Теорема 3.1. *Пусть Φ и f – непрерывные функции, определённые на произведении компактов E и F. Если F – выпуклое множество и при фиксированном $x \in E$ функция $f(x,y)$ выпукла по $y \in F$, то предельная точка x^* последовательности x_{h_j}, для которой*

$$\min_{y \in \alpha_\varepsilon^{h_j}(x_{h_j})} \Phi(x_{h_j}, y) \geq u_0^{h_j} - \delta_j, \quad \text{при} \quad \delta_j \to +0$$

является оптимальной стратегией в задаче (3.1), т.е.

$$\min_{y \in \alpha_\varepsilon^F(x^*)} \Phi(x^*, y) = u_0, \qquad u_0^{h_j} \to u_0, \quad j \to \infty.$$

Доказательство следует из Теоремы 2.1 и Теоремы 3.4 из [7].

Теперь введём понятие социального равновесия в ε–стратегиях. Пусть $\alpha_\varepsilon^F(x)$ и $b_\varepsilon^E(y)$ – множества ε–стратегий первого и второго игроков, соответственно :

$$\alpha_\varepsilon^F(x) = \{y \in F: \ f(x,y) \leq \inf_{y \in F} f(x,y) + \varepsilon\},$$

$$b_\varepsilon^E(y) = \{x \in E: \ g(x,y) \leq \inf_{x \in E} g(x,y) + \varepsilon\}.$$

Пусть $\Phi(x,y)$ – функция выигрыша (проигрыша) первого (второго) игрока.

Определение 8. *Пара $(\overline{x}, \overline{y})$ называется состоянием социального равновесия в ε–стратегиях, если*

1) $\overline{y} \in \alpha_\varepsilon^F(\overline{x})$ и $\overline{x} \in b_\varepsilon^E(\overline{y})$;

2) $\Phi(\overline{x},\overline{y}) = \inf\limits_{y \in \alpha_\varepsilon^F(\overline{x})} \Phi(\overline{x}, y)$ и $\Phi(\overline{x},\overline{y}) = \sup\limits_{x \in b_\varepsilon^E(\overline{y})} \Phi(x, \overline{y})$.

Следующий результат вытекает из Леммы 1.2 и Теоремы 23 (см. [6], стр. 342).

Теорема 3.2. *Из условий*

1) множества $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ выпуклы и компактны ;

2) функции $\Phi(x,y)$, $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны, Φ выпукла по y и вогнута по x ;

3) f выпукла по y, а g выпукла по x

вытекает существование социального равновесия в ε–оптимальных стратегиях.

Теперь рассмотрим параметрическую задачу выпуклого программирования :

$$\inf_y \{ f_0(x,y) : f_j(x,y) \leq 0, \ j = 1, ..., m, \ y \in F\} \ (= V(x)).$$

Положим $A(x) = \{y \in F: \ f_j(x,y) \leq 0, \ j = 1, \ldots, m\}$ и

$$\alpha(x) = \{y \in A(x): \ f_0(x,y) \leq V(x)\}, \quad \alpha_\varepsilon(x) = \{y \in A(x): \ f_0(x,y) \leq V(x) + \varepsilon\},$$

где ε – некоторое положительное число.

Теорема 3.3. *Из условий*

1) функции $f_j(x,y)$, $j = 0, 1, ..., m$ непрерывны на $E \times F$, где $E \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, а $F \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый компакт ;

2) для каждого $x \in E$ функции $f_j(x,y)$, $j = 0, 1, ..., m$ выпуклы по y ;

3) для любого $x \in E$ существует $y \in F$ такое, что $f_j(x,y) < 0$ для всех $j = 1, ..., m$ вытекает, что многозначное отображение $\alpha_\varepsilon(x)$ H–непрерывно.

Доказательство. Пусть $B(x) = \{y \in \mathbb{R}^m\colon\ f(x,y) \leq V(x) + \varepsilon\}$ и $\Psi(x,y) = \max\limits_{j \in \{1,...,m\}} f_j(x,y)$. Имеем $A(x) = \{y \in F\colon\ \Psi(x,y) \leq 0\}$ и $\alpha_\varepsilon(x) = A(x) \cap B(x)$.

Согласно Лемме 1.4, многозначное отображение $A(x)$ H–непрерывно и по Лемме 1.3, $B(x)$ K–полунепрерывно сверху. Ясно, что существует число $\delta > 0$ такое, что $\alpha(x) + B(0,\delta) \subseteq B(x)$ для любого $x \in E$. Поэтому $B(0,\delta) \subseteq A(x) - B(x)$. Для завершения доказательства остаётся применить рассуждения доказательства Теоремы 16 (см. [6], стр. 121).

Abstract. The paper is devoted to the problem of continuity of multivalue mappings and its applications in the two-person game theory with information transmission. A set of conditions is described under which the multivalue mapping is continuous. Basing on this result, existence of a social equilibrium state in the ε–optimal strategies of two-person game with antagonistic profits is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука, 1980.
2. В. Ф. Демьянов, Недифференцируемая Оптимизация, Москва, Наука, 1981.
3. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации", Экономика и Математические Методы, № . 6, стр. 1133 — 1140, 1982.
4. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума для негладких функций", Известия АН Арм.ССР, серия Математика, том 18, № 4, стр. 318 - 325, 1983.
5. В. А. Треногин, Функциональный Анализ, Москва, Наука, 1980.
6. Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
7. В. В. Федоров, Численные Методы Максимина, Москва, Наука, 1979.
8. Ю. Б. Гермейр, Н. Н. Моисеев, "О некоторых задачах иерархических систем", В книге : "Проблемы Прикладной Математики и Механики", Москва, Наука, стр. 30 — 43, 1971.
9. И. И. Еремин, Н. Н. Астафьев, Введение в Теорию Линейного и Выпуклого Программирования, Наука, 1976.

Поступила 10 мая 2002

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 83–88

ПРОИЗВОДНЫЕ РЕШЕНИЯ $\overline{\partial}$-УРАВНЕНИЯ В БИДИСКЕ

А. И. Петросян

Ереванский государственный университет
e–mail : albpet@freenet.am

1. В единичном бидиске решение уравнения

$$\overline{\partial}u = f, \quad \text{где} \quad \overline{\partial}u = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_1}d\overline{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_2}d\overline{z}_2 \tag{1}$$

было получено в работе [1], используя интегральное представление гладких функций

$$u(z) = P[u](z) + T[\overline{\partial}u](z), \tag{2}$$

которое является многомерным аналогом формулы Коши–Грина, [2].

Заметим, что $P[u]$ – "аналитическая часть" функции $u(z)$, которая является интегралом типа Коши от $u(z)$. Это свойство позволяет выписать в явном виде "каноническое" решение $\overline{\partial}$-уравнения $u_0 = T[f]$.

Поскольку в (2) слагаемое $P[u]$ является ортогональной проекцией u в пространстве L^2 на остове (отличное от границы) бидиска на подпространство голоморфных функций, то среди решений уравнения (1) u_0 имеет минимальную L^2–норму. Ниже получены явные формулы для производных решений.

2. Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n: \ |z_k| < 1, \ \ k = 1, \ldots, n\}$ – единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$;

$\mathbb{T}^n = \{z \in \overline{\mathbb{C}^n}: \ |z_k| = 1, \ \ k = 1, \ldots, n\}$ – остов (отличный от границы) полидиска $\mathbb{D}^n$;

$C^m(\overline{\mathbb{D}^n})$ (соответственно, $C^m(\mathbb{T}^n)$) – множество функций, которые m раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{\mathbb{D}^n}$ (соответственно, на $\mathbb{T}^n$) ;
$C^m_{(0,1)}(\overline{\mathbb{D}^n})$ – множество дифференциальных форм типа $(0,1)$ с коэффициентами, принадлежащими $C^m(\overline{\mathbb{D}^n})$.

Для функции u, заданной на $\mathbb{T}^n$, через $P[u](z)$ обозначим ее n-кратный интеграл типа Коши

$$P[u](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{u(\zeta) d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{k=1}^n (\zeta_k - z_k)}, \tag{3}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$, $\quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$.

Для операторов дифференцирования будем пользоваться краткими обозначениями : $D_k = \dfrac{\partial}{\partial z_k}$, $\quad \overline{D}_k = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$, $\quad D^r = D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n}$, для заданного мультииндекса $r = (r_1, \ldots, r_n)$ положим $|r| = r_1 + \cdots + r_n$.

3. Ниже применяем операторы дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_k}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_k}$ к функциям из класса $C^m(\mathbb{T}^n)$. Согласно теореме Уитни (см., например, [3]) функции из $C^m(\mathbb{T}^n)$ можно продолжить в окрестность остова $\mathbb{T}^n$ с сохранением класса гладкости. Упомянутые операции дифференцирования применяются именно к продолжениям функций. Для последних будем пользоваться теми же обозначениями, что и для исходных функций.

Следующие две леммы справедливы для произвольного n.

Лемма 1. *Пусть $g \in C^1(\mathbb{T}^n)$, $1 \le k \le n$. Тогда*

$$P\left[\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k}\right](z) = P\left[\overline{\zeta}_k^{\,2} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_k}\right](z) + \frac{\partial}{\partial z_k} P[g](z). \tag{4}$$

Доказательство. При фиксированном $z \in \mathbb{D}^n$ рассмотрим дифференциальную форму типа $(n-1, 0)$

$$\omega = \frac{(-1)^{k-1} g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} \bigwedge_{i \ne k} d\zeta_i.$$

Используя формулу Стокса, получим

$$0 = \int\limits_{\mathbb{T}^n} d_\zeta \omega = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \frac{g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j} \frac{(-1)^{k-1} g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\overline{\zeta}_j \wedge \Big(\bigwedge_{i \ne k} d\zeta_i\Big). \tag{5}$$

Поскольку $\zeta_j\overline{\zeta}_j = 1$ $(j = 1,\ldots,n)$ на $\mathbb{T}^n$, то имеем $\zeta_j d\overline{\zeta}_j = -\overline{\zeta}_j d\zeta_j$. Следовательно

$$(-1)^{k-1}d\overline{\zeta}_j \wedge \left(\underset{i\neq k}{\wedge} d\zeta_i\right) = \begin{cases} -\overline{\zeta}_k^2 d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n, & \text{если} \quad j=k, \\ 0, & \text{если} \quad j\neq k. \end{cases} \tag{6}$$

Итак, из (5) получим

$$\int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n(\zeta_i - z_i)} - \int_{\mathbb{T}^n} \frac{g(\zeta)d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_k - z_k)^2\prod_{i\neq k}(\zeta_i - z_i)} -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_k} \frac{\overline{\zeta}_k^2 d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n(\zeta_i - z_i)} = 0. \tag{7}$$

С учетом равенства

$$\frac{1}{(\zeta_k - z_k)^2} = \frac{\partial}{\partial z_k}\frac{1}{\zeta_k - z_k}$$

из (7) имеем

$$\int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n(\zeta_i - z_i)} = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_k} \frac{\overline{\zeta}_k^2 d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n(\zeta_i - z_i)} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_k}\int_{\mathbb{T}^n} \frac{g(\zeta)d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n(\zeta_i - z_i)}.$$

Отсюда вытекает (4). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого $u \in C^m(\mathbb{T}^n)$ и мультииндекса r с $|r| \leq m$ имеет место формула*

$$P[D^r u](z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{r_j} D_1^{r_1}\cdots D_{j-1}^{r_{j-1}} D_j^{r_j-k_j} P\left[\overline{\zeta}_j^2 \overline{D}_j D_j^{k_j-1} D_{j+1}^{r_{j+1}}\cdots D_n^{r_n} u\right](z) + \tag{8}$$

$$+ D^r P[u](z).$$

Если $r_1 + \cdots + r_j - k_j = 0$, то оператор дифференцирования под знаком двойной суммы в (8) считается тождественным оператором.

Доказательство. Взяв в Лемме 1 $g(z) = D_1^{r_1-1}D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n}u(z)$ и $k=1$, получим реккурентное соотношение

$$P[D^r u](z) = P\left[\overline{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1-1}D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n} u\right](z) + D_1 P\left[D_1^{r_1-1}D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n}u\right](z). \tag{9}$$

Применив (9) r_1 раз, получим

$$P[D^r u](z) = P\left[\overline{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1-1} D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n} u\right](z)+$$

$$+ D_1\left\{P\left[\overline{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1-2} D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n} u\right](z) + D_1 P\left[D_1^{r_1-2} D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n} u\right](z)\right\} = \tag{10}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{r_1-k_1} P\left[\overline{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{k_1-1} D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n} u\right](z) + D^{r_1} P\left[D_2^{r_2}\cdots D_n^{r_n} u\right](z).$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части (10) не содержит производных по ζ_1. Применив формулу (4) последовательно по переменным $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$, выбирая каждый раз соответствующим образом k и $g(z)$, получим (8). Лемма 2 доказана.

4. Приведем конкретный вид двумерного аналога интегрального представления в бидиске

$$u = P[u] + T[\overline{\partial} u]. \tag{11}$$

Здесь $P[u]$ – двумерный интеграл Коши, определенный в (3), а оператор T, задаётся следующим образом :

$$T[\overline{\partial} u] = T[\overline{\partial} u](z_1, z_2) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}^1} \frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}_1}(\zeta_1, z_2)\frac{d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} - \int_{\mathbb{D}^1} \frac{\partial u}{\partial \overline{\zeta}_2}(z_1, \zeta_2)\frac{d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2}+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{D}^2} \overline{\partial} u(\zeta_1, \zeta_2)\wedge\frac{(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)d\overline{\zeta}_2 - (\overline{\zeta}_2 - \overline{z}_2)d\overline{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4}\wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{D}^1\times\mathbb{T}^1} \overline{\partial} u(\zeta_1, \zeta_2)\wedge\frac{\overline{\zeta}_2 - \overline{z}_2}{(\zeta_1 - z_1)(|\zeta - z|^2} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2+ \tag{12}$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^1\times\mathbb{D}^1} \overline{\partial} u(\zeta_1, \zeta_2)\wedge\frac{\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1}{(\zeta_2 - z_2)(|\zeta - z|^2} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2.$$

Лемма 3. *Пусть $u \in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$, $\overline{\partial} u \in C^m_{(0,1)}(\overline{\mathbb{D}^2})$ и $r_1 + r_2 \le m$. Тогда*

$$D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z) = r_1 \overline{z}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1-1} D_2^{r_2} u(z) + r_2 \overline{z}_2^2 \overline{D}_2 D_1^{r_1} D_2^{r_2-1} u(z) -$$

$$-\sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1-1} T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1-k_1} D_2^{r_2} u(\zeta)\right)\right](z) -$$

$$-\sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2-1} T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_2^2 \overline{D}_2 D_2^{r_2-k_2} u(\zeta)\right)\right](z) + \tag{13}$$

$$+T\left[\overline{\partial}\left(D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta)\right)\right](z) + D_1^{r_1} D_2^{r_2} P[u](z).$$

Доказательство. Заметим, что для двумерного случая формулу (8) можно записать в виде

$$P\left[D_1^{r_1}D_2^{r_2}u\right](z)=\sum_{k_1=1}^{r_1}D_1^{k_1-1}P\left[\overline{\zeta}_1^{2}\overline{D}_1D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right](z)+$$
$$+\sum_{k_2=1}^{r_2}D_1^{r_1}D_2^{k_2-1}P\left[\overline{\zeta}_2^{2}\overline{D}_2D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right](z)+D_1^{r_1}D_2^{r_2}P[u](z). \tag{14}$$

Применив (11) к функции $D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(z)$, получим

$$D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(z)=P\left[D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right](z)+T\left[\overline{\partial}D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right](z). \tag{15}$$

Далее, применяя (11) к интегралам Коши в правой части (14), получим

$$P\left[\overline{\zeta}_1^{2}\overline{D}_1D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right](z)=\overline{z}_1^{2}\overline{D}_1D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(z)-$$
$$-T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_1^{2}\overline{D}_1D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right)\right](z), \tag{16}$$

$$P\left[\overline{\zeta}_2^{2}\overline{D}_2D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right](z)=\overline{z}_2^{2}\overline{D}_2D_2^{r_2-k_2}u(z)-T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_2^{2}\overline{D}_2D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right)\right](z). \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (14), а затем полученное в (15), получим $D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(z)=$

$$=\sum_{k_1=1}^{r_1}D_1^{k_1-1}\left\{\overline{z}_1^{2}\overline{D}_1D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(z)-T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_1^{2}\overline{D}_1D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right)\right](z)\right\}+$$
$$+\sum_{k_2=1}^{r_2}D_1^{r_1}D_2^{k_2-1}\left(\overline{z}_2^{2}\overline{D}_2D_2^{r_2-k_2}u(z)-T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_2^{2}\overline{D}_2D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right)\right](z)\right)+$$
$$+T\left[\overline{\partial}D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right](z)+D_1^{r_1}D_2^{r_2}P[u](z).$$

Отсюда вытекает (13). Лемма 3 доказана.

Теорема. *Пусть $f(z)=f_1(z)d\overline{z}_1+f_2(z)d\overline{z}_2$ – $\overline{\partial}$-замкнутая форма типа $(0,1)$ и $f\in C^m_{(0,1)}(\overline{\mathbb{D}^2})$. Тогда функция $u_0(z)=T[f](z)$ является решением уравнения (1) в $\mathbb{D}^2$, имеющее минимальную норму в $L^2(\mathbb{T}^2)$. Кроме этого, $u_0\in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$ и для производных u_0 имеем*

$$D_1^{r_1}D_2^{r_2}u_0(z)=r_1\overline{z}_1^{2}D_1^{r_1-1}D_2^{r_2}f_1(z)+r_2\overline{z}_2^{2}D_1^{r_1}D_2^{r_2-1}f_2(z)-$$
$$-\sum_{k_1=1}^{r_1}D_1^{k_1-1}T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_1^{2}D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}f_1(\zeta)\right)\right](z)-$$
$$-\sum_{k_2=1}^{r_2}D_1^{r_1}D_2^{k_2-1}T\left[\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_2^{2}D_2^{r_2-k_2}f_2(\zeta)\right)\right](z)+T\left[D_1^{r_1}D_2^{r_2}f(\zeta)\right](z). \tag{18}$$

Доказательство : Как доказано в [1], u_0 является решением уравнения (1). Теперь, записав интеграл Коши (3) в виде

$$P[u](z) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{u(\zeta_1, \zeta_2) dm_2(\zeta)}{(1 - \overline{\zeta}_1 z_1)(1 - \overline{\zeta}_2 z_2)},$$

где $m_2(\zeta)$ – нормированная мера Лебега на торе $\mathbb{T}^2$, убеждаемся, что при фиксированном $z \in \mathbb{D}^2$ $P[u](z)$ является скалярным произведением $u(\zeta)$ и голоморфной (относительно ζ) функции $[(1 - \overline{\zeta}_1 z_1)(1 - \overline{\zeta}_2 z_2)]^{-1}$. Это означает, что P является оператором ортогонального проектирования в $L^2(\mathbb{T}^2)$ на подпространство голоморфных функций. Из (11) следует, что $P[u_0] = 0$, т.е. u_0 ортогонален этому подпространству. Учитывая, что решения уравнения (1) отличаются друг от друга на голоморфное слагаемое заключаем, что среди решений уравнения (1) u_0 имеет минимальную L_2–норму.

Утверждение $u_0 \in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$ можно доказать рассуждениями, использованными в [4]. Наконец, (18) следует из Леммы 3 и равенств $\overline{\partial} u_0 = f$, $\overline{D}_1 u = f_1$, $\overline{D}_2 u = f_2$ и $P[u_0] = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Хенкин, Е. М. Чирка, "Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных", Итоги Науки, Совр. Проб. Мат., ВИНИТИ, том 4, стр. 13 – 142, 1975.
2. Ph. Charpentier, "Formules explicities pour les solutions minimales de l'equation $\overline{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$", Ann. Inst. Fourier, vol. 30, no. 4, pp. 121–154, 1980.
3. B. Malgrange, Ideals of Differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.
4. А. И. Петросян, "Оценка в C^m–норме минимальных решений $\overline{\partial}$–уравнения в полидиске", Изв. НАН Армении, Серия Математика, том 26, № 2, стр. 99 — 107, 1991.

Поступила 5 января 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 1, 2003, 89-94

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЛАПЛАСА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^p_\mu(S^3)$

А. С. Саргсян

Ереванский государственный университет

Декартовы и сферические координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^3$ (S^3 – единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве) связаны соотношением

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = \cos\theta, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi].$$

Пусть $L^p(G)$ – класс функций $f(x)$, $x \in G \subset S^3$ с конечными интегралами

$$\iint\limits_G |f(x)|^p \, ds < \infty,$$

где G – измеримое множество на S^3, а $ds = \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$ – элемент площади поверхности на S^3.

Рассмотрим весовое пространство $L^p_\mu(G)$ функций из $L^p(G)$ с нормой

$$||f||_{L^p_\mu(G)} = \left(\iint\limits_G |f(x)|^p \mu(x) \, ds \right)^{1/p},$$

где $\mu(x)$ – весовая функция. На S^3 существуют $2n+1$ линейно независимых сферических гармоник степени n (см. [1] – [3]) :

$$p_n(\cos\theta), \quad p_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad p_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi, \tag{1}$$

$$m = 1, ..., n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

где $p_n(t)$ – обычные, а $p_n^m(t)$ – присоединенные многочлены Лежандра. Любую сферическую функцию $Y_n(\theta,\varphi)$ степени n можно представить в виде линейной комбинации этих функций :

$$Y_n(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\alpha_n p_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}p_n^m(\cos\theta)[\alpha_n^{(m)}\cos m\varphi+\beta_n^{(m)}\sin m\varphi].$$

Отметим, что как функции $Y_n(\theta,\varphi)$, так и функции из (1) образуют ортогональные системы. Кроме того

$$\left\|p_n(\cos\theta)\right\|_{L^p(S^3)}=\frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\left\|p_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\right\|^2_{L^2(S^3)}\left\|p_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right\|^2_{L^2(S^3)}=\frac{2\pi}{n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

(Снова возрождается интерес к сферическим функциям, см., например, [1] – [4], [6].)

Для $f(x)\in L(S^3)$ положим

$$a_n^{(m)}(f)=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)p_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$b_n^{(m)}(f)=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)p_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$Y_n[f,(\theta,\varphi)]=\frac{1}{2}a_n^{(0)}(f)p_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}p_n^m(\cos\theta)[a_n^{(m)}(f)\cos m\varphi+b_n^{(m)}(f)\sin m\varphi]. \tag{3}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}Y_n[f,(\theta,\varphi)]$ называется **рядом Фурье–Лапласа** функции $f(\theta,\varphi)$. В 1973 году А. Бонами и Е. Клерк [5] доказали, что для каждого числа $p\neq 2$ существует функция $f(\theta,\varphi)\in L^p(S^3)$ такая, что ее ряд Фурье–Лапласа не сходится в метрике $L^p(S^3)$.

Существуют ли весовая функция $\mu(x)$ и измеримое множество E сколь угодно малой положительной меры такие, что любую функцию из $L^p(S^3)$ можно было бы изменить на E так, чтобы получить функцию, ряд Фурье–Лапласа которой сходился в норме $L^p_\mu(S^3)$? В данной статье даётся положительный ответ на этот вопрос.

Теорема. *Пусть $p\in[1,2]$ и $\varepsilon>0$ – произвольные числа. Существуют измеримая функция $\mu(x)$ и измеримое множество $E\subset S^3$ такие, что*

$$0<\mu(x)\le 1,\quad \mu(x)=1 \text{ при } x\in E,\quad mes\,E>4\pi-\varepsilon,$$

и для каждой функции $f(x) \in L^p_\mu(S^3)$ существует функция $g(x) \in L^1(S^3)$, совпадающая с $f(x)$ на E такая, что ее ряд Фурье–Лапласа сходится к $g(x)$ как по $L^p_\mu(S^3)$-норме, так и по $L^1(S^3)$-норме, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \iint\limits_{S^3} \left| \sum_{k=1}^{N} Y_k[g,(\theta,\varphi)] - g(\theta,\varphi) \right|^p \mu(x)\, ds = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \iint\limits_{S^3} \left| \sum_{k=1}^{N} Y_k[g,(\theta,\varphi)] - g(\theta,\varphi) \right| ds = 0.$$

Эта Теорема усиливает следующий результат М. Г. Григоряна [6]. Пусть $p \in [1,2]$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Существует измеримое множество $G \subset S^3$ с $mes\ G > 4\pi - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p(G)$ существует функция $g(x) \in L^1(S^3)$, совпадающая с $f(x)$ на G, ряд Фурье–Лапласа которой сходится к $f(x)$ на G в метрике $L^p(G)$, и сходится к $g(x)$ на $S^3 \setminus G$ в метрике $L^1(S^3 \setminus G)$.

Для доказательства Теоремы используем метод, приведенный в [7] и [8]. Однако, идея улучшения сходимости рядов Фурье функции $f(x)$ путем изменения $f(x)$ на множестве малой меры принадлежит Д. Е. Меньшову [9], [10]. В этом направлении в [11] – [14] получено несколько интересных результатов.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству Леммы 2 из [7].

Лемма. *Пусть $p \in [1,2)$, $N_0 > 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. Для любой функции $f(\theta,\varphi) \in L^p(S^3)$ существуют измеримое множество $E \subset S^3$, функция $g(\theta,\varphi) \in L^1(S^3)$ и полином*

$$P(\theta,\varphi) = \sum_{k=N_0}^{\overline{N}} Y_k(\theta,\varphi),$$

удовлетворяющие следующим условиям :

1. $$mes\ E > 4\pi - \varepsilon, \quad g(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \text{ на } E,$$

2. $$\|g\|_{L^1(S^3)} \le 4\|f\|_{L^1(S^3)}, \quad \|g - P\|_{L^p(S^3)} < \varepsilon,$$

3. $$\sup_{N_0 \le m \le \overline{N}} \cdot \left\| \sum_{k=N}^{m} Y_k \right\|_{L^p(e)} \le 2\|f\|_{L^p(e)}, \quad e \subset E,$$

4. $$\sup_{N_0 \le m \le \overline{N}} \left\| \sum_{k=N}^{m} Y_k \right\|_{L^1(S^3)} \le 4\|f\|_{L^1(S^3)}.$$

Доказательство Теоремы : Пусть $f_n(\theta,\varphi)$, $n = 1,2,...$ – последовательность полиномов по сферическим гармоникам $Y_n(\theta,\varphi)$ с рациональными коэффициентами. Последовательно применяя Лемму можно найти последовательность функций $\{\overline{g}_n(\theta,\varphi)\}$, множеств $\{\overline{E}_n\}$ и полиномов

$$\overline{P}_n(\theta,\varphi) = \sum_{k=M_{n-1}}^{M_n-1} Y_k(\theta,\varphi), \quad M_{n-1} < M_n,$$

удовлетворяющие условиям

$$mes\,\overline{E}_n > 4\pi - \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \overline{g}_n(\theta,\varphi) = f_n(\theta,\varphi) \text{ on } \overline{E}_n \subset S^3, \tag{4}$$

$$\|\overline{g}_n\|_{L^1(S^3)} \le 4\|f_n\|_{L^1(S^3)}, \quad \|\overline{P}_n - \overline{g}_n\|_{L^p(S^3)} < \frac{1}{2^{4n}}, \tag{5}$$

$$\sup_{M_{n-1}\le m\le M_n} \left\| \sum_{k=M_{n-1}}^{m} Y_k \right\|_{L^p(e)} \le 2\|f_n\|_{L^p(e)}, \quad e \in \overline{E}_n, \tag{6}$$

$$\sup_{M_{n-1}\le m\le M_n} \left\| \sum_{k=M_{n-1}}^{m} Y_k \right\|_{L^1(S^3)} \le 2\|f_n\|_{L^1(S^3)}. \tag{7}$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n, \quad \Omega_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{E}_k, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_n) \cup E. \tag{8}$$

Легко проверить, что (см. [4])

$$E = \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots, \quad mes\,E > 4\pi - \varepsilon, \tag{9}$$

$$B = \bigcup_{n=k}^{\infty} (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_n) \cup \Omega_k, \quad mes\,B = 4\pi. \tag{10}$$

Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E \cup (S^3 \setminus B), \\ 2^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n+1} V_i + 1\right)^{-1} & \text{при } x \in \Omega_{n+1} \setminus \Omega_n, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$V_i = \left(\sup_{M_{i-1}\le m\le M_i} \left\| \sum_{k=M_{i-1}}^{m} Y_k \right\|_{L^p(S^3)}^p + \|\overline{g}_i\|_{L^p}^p \right) \|f_i\|_{L^p(S^3)}^{-p}.$$

Ясно, что $\mu(x)$ измерима и $0 < \mu(x) \leq 1$. Из (4) и (8) – (11) следует

$$\iint_{S^3} |\overline{g}|^p \mu(x)\, ds = \iint_{\Omega_k} |f_k|^p \mu(x)\, ds + \sum_{n=k}^{\infty} \iint_{D_n} |\overline{g}_k|^p \mu(x)\, ds \leq$$

$$\leq \iint_{\Omega_k} |f_k(x)|^p\, ds + \sum_{n=k}^{\infty} \iint_{D_n} |\overline{g}_k|^p \frac{2^{-n}}{V_k}\, ds \leq .$$

$$\leq \iint_{S^3} |f_k(x)|^p\, dx + \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \|f_k\|^p_{L^p(S^3)} \leq 2\|f_k\|^p_{L^p(S^3)},$$

где $D_n = \Omega_{n+1} \setminus \Omega_n$. В силу (6) и (8) – (11) имеем

$$\sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \iint_{S^3} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \mu(x)\, ds =$$

$$= \sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \left[\iint_{\Omega_k} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \mu(x)\, ds + \sum_{n=k}^{\infty} \iint_{D_n} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \mu(x)\, ds \right] \leq$$

$$\leq \sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \iint_{\Omega_k} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p dx + \sum_{n=k}^{\infty} \sup_{M_{k-1} \leq m \leq M_k} \iint_{D_n} \left| \sum_{n=M_{k-1}}^{m} Y_n(x) \right|^p \times$$

$$\times \frac{2^{-n}}{V_k}\, ds \leq 2\|f_k\|^p_{L^p(S^3)} + \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \|f_k\|^p_{L^p(S^3)} \leq 3\|f_k\|^p_{L^p(S^3)}.$$

Для завершения доказательства осталось повторить рассуждения, приведённые в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Стейн, Г. Вейс, Введение в Гармонический Анализ в Евклидовых Пространствах, Москва, Мир, 1971.
2. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, "Приближение сферическими полиномами", Труды мат. инст. АН СССР, том 166, стр. 186 – 200, 1984.
3. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "К теории приближения на сфере", Труды мат. инст. АН СССР, том 172, стр. 272 – 279, 1985.
4. Л. В. Жижиашвили, С. Б. Топурия, "Ряды Фурье–Лапласа на сфере", Итоги Науки и Техники, Мат. Анализ, том 15, стр. 83 – 132, 1977.
5. A. Bonami, J. Clerc, "Sommes de Cesaro et multiplication des developenesen harmoniques speriques", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 183, pp. 223 – 263, 1973.
6. М. Г. Григорян, "О сходимости рядов Фурье–Лапласа", ДАН СССР, том 315, № 3, стр. 265 – 266, 1990.

7. М. Г. Григорян, "Сходимость рядов Фурье–Лапласа", Изв. Вузов, Математика, том 2, стр. 17 – 24, 1992.
8. M. G. Grigorian, S. A. Episkoposian, "On universal trigonometric series in weighted spaces $L^1_\mu[0,2\pi]$", East J. on Approx., том 5, № 4, стр. 483 – 492, 1999.
9. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат. Сборник, том 53, № 2, стр. 67 – 96, 1942.
10. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды моск. мат. общ-ва, том 1, стр. 5 – 38, 1952.
11. А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. заметки, том 33, № 5, стр. 715 – 722, 1983.
12. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН АрмССР, том 64, № 2, стр. 72 – 76, 1976.
13. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia Math., vol. 134, no. 3, pp. 207 – 216, 1999.
14. M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 352, no. 8, pp. 3777 – 3799, 2000.

Поступила 21 февраля 2002

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 38, Номер 1, 2003

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 38, No. 1, 2003

Contents