ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Четыре предыдущих сборника под тем же названием были опубликованы в этом журнале в 1998 году, том 33, № № 2, 3, и в 2000 году, том 35, № 1 и № 6. Статьи настоящего тематического выпуска объединяются новым подходом к задаче Дирихле в многосвязных областях. При этом подходе последняя задача для правильно и неправильно эллиптических уравнений сводится к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, которые имеют единственное решение. Во многих случаях это приводит к эффективному решению краевых задач для эллиптических уравнений на плоскости. Одна из статей предлагает эффективные методы решения задачи Римана-Гильберта в полуплоскости для классов функций, бесконечно дифференцируемых и стремящихся к нулю на бесконечности.

Ереван, Ноябрь 2002 В. С. Закарян

Известия НАН Армении. Математика. **37**, № 6, 2002, 5-40

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье рассматриваются правильно эллиптические уравнения в многосвязных областях. Эффективное решение задачи Дирихле предполагает её сведение к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Выписаны условия, обеспечивающие единственность решения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – $(m+1)$-связная область в комплексной плоскости, ограниченная достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Предположим, что Γ_0 содержит все остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$ – граница области D, и D содержит начало координат. Положительным направлением на Γ будем считать то, которое оставляет область D слева.

Пусть L_j, $j = 1, ..., 2n$ – дифференциальные операторы первого порядка

$$L_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{0.1}$$

где λ_j и a_j – постоянные такие, что

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n+j} < 0, \quad j = 1, ..., n, \tag{0.2}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., 2n. \tag{0.3}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу : найти в D решение $u(z)$ уравнения

$$L_1 \cdots L_{2n} u = 0, \tag{0.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\partial^k u(z)/\partial N^k = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{0.5}$$

где $\partial u(z)/\partial N$ – производная в направлении внешней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – достаточно гладкие функции, определенные на Γ. При $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ задача называется **однородной**.

Через $H(\overline{D})$ (или $H(\Gamma)$) обозначим класс функций $u(z)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ (или на Γ). Ищем решения задачи (0.4) – (0.5) в классе функций, которые $2n$-раз непрерывно дифференцируемы в D, и $(2n-1)$-раз в $\overline{D}$.

Предположим, что функции $d^j f_k(z)/ds^j$, $j = 0, 1, ..., 2n-1-k$ (дифференцирование по дуговой абсциссе s) принадлежат классу $H(\Gamma)$. Из (0.2) следует, что уравнение (0.4) является правильно эллиптическим уравнением $2n$-го порядка. Все функции и постоянные предполагаются комплекснозначными, пока неоговорено обратное.

Задача (0.4) – (0.5) в полуплоскости при $\operatorname{Re} a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$ была рассмотрена в [1], где доказано существование и единственность решений для некоторых классов функций. При $a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$ и односвязности областей эта задача сводится в [2] и [3] к сингулярным интегральным уравнениям нормального типа. Задача усложняется при $a_j \neq 0$, $j = 1, ..., 2n$ и для многосвязных областей. Основная трудность связана с представлением и единственностью общего решения уравнения (0.4) в терминах аналитических функций и произвольных постоянных (см. [2] – [4]).

В настоящей статье задача (0.4) – (0.5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и выводятся условия, обеспечивающие единственность решения. Статья составлена следующим образом : в §§1, 2 изучается общее решение уравнения (0.4) в многосвязных областях. В §3 получены явные интегральные представления аналитических функций. В §4 задача (0.4) – (0.5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В §5 предлагается эффективный метод конструкции общего решения задачи Дирихле для уравнения (0.4) в круге при $a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$ и выводятся необходимое и достаточное условие единственности решения в терминах коэффициентов, а также определяются дефектные числа этой задачи.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ, СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Результаты этого параграфа будут использованы в §2 для получения общего решения уравнения (0.4) в многосвязных областях.

Пусть D – $(m+1)$–связная область, и пусть $z_1 = x_1 + iy_1, ..., z_m = x_m + iy_m$ – фиксированные точки, охватываемые контурами $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно. Пусть γ_j, $j = 1, ..., m$ – некоторые непрерывные гладкие линии внутри D без пересечений с концами на Γ_0 и Γ_j. Предположим, что $\gamma_1, ..., \gamma_m$ не имеют общих точек, и пусть $D_0 = D \setminus (\cup\gamma_j)$ (D_0 – односвязная область). Ниже $\ln(\zeta)$ означает некоторую непрерывную в D_0 ветвь логарифма.

Сначала рассмотрим однородное эллиптическое уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mu\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{1.1}$$

где μ и b – постоянные, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$. Пусть D_μ – образ области D при отображении $\zeta = \xi + i\eta = x + \mu y$, $x + iy \in D$. Ясно, что D_μ $(m+1)$-связна. Заменой переменной $u(z) = e^{-by}v(z)$, из (1.1) получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \mu\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{1.2}$$

Общее решение однородного уравнения (1.2) есть (см. [3]) $v(z) = \varphi(x + \mu y)$, $z = x + iy \in D$, где $\varphi(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция, определенная в D_μ. Следовательно, общее решение уравнения (1.1) определяется формулой

$$u(z) = e^{-by}\varphi(x + \mu y), \quad z = x + iy \in D. \tag{1.3}$$

Теперь рассмотрим неоднородное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mu\frac{\partial u}{\partial x} + bu = e^{-ay}\varphi_0(x + \lambda y), \quad x + iy \in D, \tag{1.4}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ – аналитическая функция, определенная в D_λ, a, μ и λ – постоянные, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, $\mu \neq \lambda$. Ищем частное решение уравнения (1.4) в виде

$$u(z) = e^{-ay}\psi_0(x + \lambda y) + \sum_{k=1}^{m} c_k\omega_k(z), \quad z = x + iy \in D, \tag{1.5}$$

где $\psi_0(\zeta)$ – искомая функция, аналитическая в D_λ, $c_1, ..., c_m$ – искомые постоянные

$$\omega_k(z) = \exp(-by + \nu(x + \mu y))\left[\ln(x + \lambda y - x_k - \lambda y_k) - \right.$$

$$-sign(\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\mu)\ln(x+\mu y-x_k-\mu y_k)\big], \tag{1.6}$$

$$\nu \doteq \frac{a-b}{\lambda-\mu}. \tag{1.7}$$

Ясно, что функции $\omega_k(z)$, $k=1,...,m$ бесконечно дифференцируемы в D. Из (1.7) следует, что

$$\exp(-by+\nu(x+\mu y)) = \exp(-ay+\nu(x+\lambda y)). \tag{1.8}$$

Подставляя $u(z)$ из (1.5) в (1.4) и учитывая (1.8), получаем

$$\psi_0'(\zeta)-\nu\psi_0(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu} - e^{\nu\zeta}\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{\zeta-x_k-\lambda y_k}, \quad \zeta\in D_\lambda. \tag{1.9}$$

Произведя замену переменной $\psi_0(\zeta)=e^{\nu\zeta}\psi_1(\zeta)$, из (1.9) получим

$$\psi_1'(\zeta) = \frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu}e^{-\nu\zeta} - \sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{\zeta-x_k-\lambda y_k}. \tag{1.10}$$

Первое слагаемое в правой части (1.10) можно представить в виде

$$\frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu}e^{-\nu\zeta} = \varphi_1'(\zeta) + \sum_{k=1}^{m}\frac{d_k}{\zeta-x_k-\lambda y_k}, \tag{1.11}$$

где $\varphi_1(\zeta)$ аналитична в D_λ, $\varphi_1(0)=0$ и $d_1,...,d_m$ – некоторые постоянные. Из (1.11) следует, что в качестве решения уравнения (1.10) можно взять $\psi_1(\zeta)=\varphi_1(\zeta)$ с $c_1=d_1$,..., $c_m=d_m$. Таким образом, частное решение (1.4) задается по (1.5) с

$$\psi_0(x+\lambda y)=\varphi_1(x+\lambda y)\exp(\nu(x+\lambda y)), \quad c_k=d_k, \quad k=1,...,m,$$

где φ_1 и d_k из (1.11) и $\varphi_1(0)=0$.

Теперь предположим, что функция φ_0 в (1.4) удовлетворяет дополнительным условиям $\varphi_0^{(j)}(0)=0$, $j=0,1,...,l-1$, где l – некоторое натуральное число. В этом случае (1.11) для $\zeta\in D_\lambda$ принимает вид

$$\frac{\varphi_0(\zeta)}{\lambda-\mu}e^{-\nu\zeta} = \varphi_1'(\zeta) + \sum_{k=1}^{m}d_k\left(\frac{1}{\zeta-x_k-\lambda y_k} - \sum_{p=0}^{l-1}\frac{\zeta^p}{(x_k+\lambda y_k)^{p+1}}\right), \tag{1.12}$$

где $\varphi_1(\zeta)$ аналитична в D_λ и удовлетворяет условиям $\varphi_1^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., l$, а $d_1, ..., d_m$ – некоторые постоянные. Используя (1.12) заключаем, что

$$u(z) = e^{-ay}\varphi_1(x + \lambda y) + \sum_{k=1}^{m} d_k u_k(z), \quad z = x + iy \in D \tag{1.13}$$

является частным решением уравнения (1.4), где $\varphi_1(\zeta)$ и d_k из (1.12),

$$u_k(z) = \omega_k(z) - \sum_{p=0}^{l} \frac{(z + \lambda y)^p}{p(x_k + \lambda y_k)^p} \exp(-ay + \nu(x + \lambda y)), \tag{1.14}$$

а ω_k определяются по (1.6).

Рассмотрим теперь неоднородное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \mu\frac{\partial u}{\partial x} + bu = F(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{1.15}$$

где $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, а F – функция из класса $H(\overline{D})$. Построим частное решение уравнения (1.15) методом, описанным в [5]. Делая замену переменной $u(z) = e^{-by}v(z)$, из (1.15) получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \mu\frac{\partial v}{\partial x} = F_1(x, y) = e^{by}F(x, y), \quad x + iy \in D. \tag{1.16}$$

Заменой переменной $\zeta = \xi + i\eta = x + \mu y$, из (1.16) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{\zeta}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + i\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{i}{2\operatorname{Im}\mu}F_1\left(\xi + \frac{\operatorname{Re}\mu}{\operatorname{Im}\mu}\eta, \frac{\eta}{\operatorname{Im}\mu}\right) \equiv F_2(\xi, \eta), \quad \zeta \in D_\mu. \tag{1.17}$$

Частное решение уравнения (1.17) определяется формулой (см. [5]) :

$$v(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_\mu} \frac{F_2(t, \tau)}{t + i\tau - \zeta}\, dt\, d\tau, \quad \zeta \in D_\mu. \tag{1.18}$$

Возвращаясь к переменной z заключаем, что

$$u(z) = e^{-by}v(x + \mu y), \quad z = x + iy \in D \tag{1.19}$$

является частным решением уравнения (1.15).

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ, СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Пусть D – $(m+1)$-связная область (см. Введение), а L_j – операторы из (0.1). Рассмотрим уравнение

$$L_1 \cdots L_p u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{2.1}$$

где p – целое число, $1 \le p \le 2n$.

Лемма 2.1. *В области D общее решение уравнения (2.1) можно представить в виде*

$$u(z) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k u_k(z), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.2}$$

где $l_{pm} = p(p-1)m/2$, c_k – произвольные постоянные, φ_j, $j = 1, ..., p$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_k^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, ..., k-2, \quad k = 2, ..., p,$$

$u_k(z)$, $k = 1, ..., l_{pm}$ – некоторые частные решения уравнения (2.1). Функции φ_j, $j = 1, ..., p$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., l_{pm}$ определяются через решения $u(z)$ единственным образом.

Доказательство. При $p = 1$ Лемма 2.1 следует из (1.3) с $\mu = \lambda_1$ и $b = a_1$. Чтобы доказать общий случай, используем индукцию по p, т.е. предполагая, что Лемма 2.1 справедлива для некоторого p, докажем утверждение для $p+1$. Так как операторы $L_1, ..., L_{p+1}$ перестановочны, то уравнение (2.1) при $p+1$ можно записать в виде

$$L_2 \cdots L_{p+1} V = 0, \quad V = L_1 u. \tag{2.3}$$

Следовательно, $V = L_1 u$ является решением уравнения (2.3). Используя предположение, общее решение уравнения (2.3) можно записать в виде

$$V(z) = \sum_{j=2}^{p+1} e^{-a_j y}\Phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_k(z), \tag{2.4}$$

где c_k – произвольные постоянные, Φ_j, $j = 2, ..., p+1$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., j-3, \quad j = 3, ..., p+1, \tag{2.5}$$

$v_k(z)$, $k = 1, ..., l_{pm}$ – некоторые частные решения уравнения (2.3). Однако, функции φ_j, $j = 2, ..., p+1$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., l_{pm}$ определяются через решение $V(z)$ единственным образом. Из (2.3) и (2.4) имеем

$$L_1 u = \sum_{j=2}^{p+1} e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_k(z), \quad z = x + iy \in D. \tag{2.6}$$

Обозначим через $u_{j0}(z)$ частное решение уравнения

$$L_1 u(z) = e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y), \quad x + iy \in D, \quad j = 2, ..., p+1, \tag{2.7}$$

а через $v_{k0}(z)$ – частное решение уравнения

$$L_1 v(z) = v_k(z), \quad z \in D, \quad k = 1, ..., l_{pm}. \tag{2.8}$$

Так как $v_k(z)$ – решение уравнения (2.3), а $v_{k0}(z)$ – решение уравнения (2.8), то функция $v_{k0}(z)$ является решением (2.1) при $p+1$. В силу (1.3), общее решение однородного уравнения $L_1 u = 0$ есть

$$u(z) = e^{-a_1 y} \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D,$$

где φ_1 – произвольная аналитическая функция, определенная в D_{λ_1}. Следовательно, общее решение уравнения (2.6) определяется формулой

$$u(z) = \sum_{j=2}^{p+1} u_{j0}(z) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_{k0}(z) + \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D. \tag{2.9}$$

В качестве частного решения уравнения (2.7) берем частное решение (1.4) при $\mu = \lambda_1$, $b = a_1$, $a = a_j$, $\lambda = \lambda_j$ и $\varphi_0 = \Phi_j$, построенное в §1. Согласно (1.13) это частное решение можно записать в виде

$$u_{j0}(z) = e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{\alpha=1}^{m} d_{j\alpha} u_{j\alpha}(z), \tag{2.10}$$

где φ_j – аналитическая функция в D_{λ_j}, удовлетворяющая условиям $\varphi_j^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ..., j-2$, $d_{j\alpha}$ – некоторые постоянные, а функции $u_{j\alpha}(z)$ определяются по (1.6) при $j = 2$ и по (1.14) при $j > 2$, где

$$\mu = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_j, \quad k = \alpha, \quad \nu = \nu_j = \frac{a_j - a_1}{\lambda_j - \lambda_1}, \quad l = j - 2.$$

Функции $u_{j\alpha}$ удовлетворяют уравнению $L_1 L_j u = 0$, поэтому они удовлетворяют также

$$L_1 \cdots L_{p+1} u(z) = 0, \quad z \in D. \tag{2.11}$$

В качестве частного решения уравнения (2.8) берем частное решение (1.15) при $\mu = \lambda_1$, $b = a_1$ и $F = v_k(z)$ (см. (1.19)). Подставляя $u_j(z)$ из (2.10) в (2.9), получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{p+1} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{j=2}^{p+1} \sum_{\alpha=1}^{m} d_{j\alpha} u_{j\alpha}(z) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_{k0}(z). \tag{2.12}$$

Таким образом, любое решение $u(z)$ уравнения (2.11) представляется в виде (2.12). С другой стороны, любая функция вида (2.12) удовлетворяет (2.11). Следовательно, общее решение уравнения (2.11) определяется через (2.12), где φ_j, $j = 1, \ldots, p+1$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям $\varphi_j^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, j-2$, $j = 2, \ldots, p+1$, а c_k, $k = 1, \ldots, l_{pm}$ и $d_{j\alpha}$, $j = 2, \ldots, p+1$, $\alpha = 1, \ldots, m$ – произвольные постоянные.

Ясно, что (2.12) совпадает с (2.2) при $p+1$. Чтобы доказать единственность представления (2.12), положим там $u(z) \equiv 0$. Применяя оператор L_1 к (2.12), получим

$$\sum_{j=2}^{p+1} e^{-a_j y} \Phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{l_{pm}} c_k v_k(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{2.13}$$

где

$$\Phi_2(\zeta) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\nu_2 \zeta} \left[\frac{d}{d\zeta} (\varphi_2(\zeta) e^{-\nu_2 \zeta}) - \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{d_{2\alpha}}{\zeta - x_\alpha - \lambda_2 y_\alpha} \right], \quad \zeta \in D_{\lambda_a},$$

$$\Phi_j(\zeta) = (\lambda_j - \lambda_1) e^{\nu_j \zeta} \left[\frac{d}{d\zeta} (\varphi_j(\zeta) e^{-\nu_j \zeta}) - \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{d_{j\alpha}}{\zeta - x_\alpha - \lambda_j y_\alpha} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{j-3} \frac{d_{j\alpha} \zeta^j}{(x_\alpha - \lambda_j y_\alpha)^{j+1}} \right) \right], \tag{2.14}$$

$\zeta \in D_{\lambda_j}$, $j = 3, \dots, p+1$. Так как функции φ_j удовлетворяют условиям $\varphi_j^{(k)}(0) = 0$, то из (2.14) следует, что функции Φ_j удовлетворяют (2.5). Из (2.13) и единственности представления (2.4) имеем

$$\Phi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0, \quad x + iy \in D, \quad j = 2, \dots, m+1, \quad c_k = 0, \quad k = 1, \dots, l_{pm}. \quad (2.15)$$

В силу (2.14) и (2.15)

$$\varphi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0, \quad x + iy \in D, \quad d_{j\alpha} = 0, \quad j = 2, \dots, p+1, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (2.16)$$

Из (2.12) при $u \equiv 0$ и (2.15), (2.16) получим $\varphi_1(x + \lambda_1 y) \equiv 0$, $x + iy \in D$. Следовательно, имеет место единственность представления (2.12). Лемма 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} B_k \frac{\partial^{2n} v(x,y)}{\partial y^k \partial x^{2n-k}} = 0, \quad (x,y) \in D, \quad (2.17)$$

где B_k – комплекснозначные постоянные, $B_{2n} \neq 0$. Предположим, что корни $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ характеристического уравнения

$$B_0 + B_1 \lambda + \dots + B_{2n} \lambda^{2n} = 0$$

удовлетворяют условиям (0.2) и (0.3). Отсюда следует, что уравнение (2.17) правильно эллиптическое. Уравнение (2.17) можно записать в виде (0.4) при $a_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2n$. Поэтому общее решение уравнения (2.17) можно записать в виде (2.2) с $p = 2n$ и $a_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2n$. В этом частном случае функции $u_k(z)$, входящие в (2.2), можно записать в явном виде. Положим $v_{lkj}(x,y) = (x - x_l + \lambda_j(y - y_l))^k \ln(x - x_l + \lambda_j(y - y_l))$, $j = 1, \dots, 2n$, $l = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, 2n-2$.

Лемма 2.2. *Общее решение уравнения (2.17) имеет вид*

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{2n} c_{lkj} v_{lkj}(x,y), \quad (2.18)$$

где φ_j, $j = 1, \dots, 2n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, j-2, \quad j = 2, \dots, 2n, \quad (2.19)$$

c_{lkj} *– произвольные постоянные, удовлетворяющие при* $q = 0, 1, \ldots, k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$, $l = 1, \ldots, m$ *условиям*

$$\sum_{j=1}^{n} c_{lkj}\lambda_j^q - \sum_{j=n+1}^{2n} c_{lkj}\lambda_j^q = 0. \tag{2.20}$$

Функции φ_j *и постоянные* c_{lkj} *определяются с помощью* $v(x,y)$ *единственным образом.*

Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.1.

Теперь используя Лемму 2.2, общее решение уравнения (2.17) запишем в виде (2.2), где функции $u_k(z)$ задаются с помощью алгебраической системы (2.20). Из (0.3) следует, что ранг основной матрицы системы (2.20) относительно искомых постоянных $c_{lk1}, \ldots, c_{lk2n}$ (при фиксированном l и k) равен $k+1$. Поэтому (2.20) имеет ровно $2n-k-1$ линейно независимых решений, которые обозначим через $c_{plk1}, \ldots, c_{plk2n}$, $p = 1, \ldots, 2n-k-1$.

Подставляя общее решение системы (2.20) в (2.18), получим

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{p=1}^{2n-k-1} b_{plk} w_{plk}(x,y), \tag{2.21}$$

где b_{plk} – произвольные постоянные и

$$w_{plk}(x,y) = \sum_{j=1}^{2n} c_{plkj} v_{lkj}(x,y). \tag{2.22}$$

Функции φ_j в (2.21) удовлетворяют (2.19), причём как эти функции, так и постоянные b_{plk} определяются через $v(x,y)$ единственным образом. Число функций $w_{plk}(x,y)$ в (2.21) равно $mn(2n-1)$, и они линейно независимы. Так как $(c_{plk1}, \ldots, c_{plk2n})$ является решением уравнения (2.20), то функции $w_{plk}(x,y)$ являются бесконечно дифференцируемыми решениями уравнения (2.17). Таким образом, получен следующий результат.

Лемма 2.3. *Общее решение уравнения (2.17) в* $(m+1)$*-связной области* D *задается формулой (2.21), где* φ_j, $j = 1, \ldots, 2n$ *– произвольные аналитические функции в* D_{λ_j}*, удовлетворяющие условиям (2.19), а* b_{lkp} *– произвольные постоянные. Функции* φ_j *и постоянные* b_{lkp} *определяются через* $v(x,y)$ *единственным образом.*

В отличие от (2.2), функции $w_{plk}(x,y)$ в (2.21) непосредственно выражаются через линейно независимые решения алгебраической системы (2.20).

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе приводится интегральное представление аналитических функций, которое отсутствует в [6] - [8], и некоторые простые леммы.

Пусть ограниченная G_1 и неограниченная G_2 суть односвязные области на плоскости с достаточно гладкими границами γ_1 и γ_2, соответственно. Предположим, что G_2 содержит окрестность бесконечности. Положительным направлением на γ_k считается то, которое оставляет G_k слева, $k = 1, 2$.

Пусть $\alpha_k(z)$ и $\beta_k(z)$, $k = 1, 2$ - функции из класса $H(\gamma_k)$ такие, что $\alpha_k(z) \neq 0$ и $\beta_k(z) \neq 0$ при $z \in \gamma_k$, $k = 1, 2$. **Индекс** функции $\alpha(z)$ на контуре γ определяется как приращение аргумента функции $\alpha(z)$, деленное на 2π, когда точка z пробегает контур γ один раз в положительном направлении. Предположим, что индексы функций $\alpha_1(z)$ и $\beta_1(z)$ на γ_1 равны 1 и 0, а индексы функций $\alpha_2(z)$ и $\beta_2(z)$ на γ_2 равны -1 и 0, соответственно.

Пусть λ и μ - постоянные, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\mu < 0$. Через $G_k(\mu)$ обозначим образ области G_k при отображении $x + iy \longmapsto x + \mu y$. Пусть $\Phi_k \in H(\overline{G}_k(\lambda))$ и $\omega_k \in H(\overline{G}_k(\mu))$ - аналитические функции, заданные на $G_k(\lambda)$ и $G_k(\mu)$, соответственно, $k = 1, 2$ такие, что

$$\Phi_2(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \Phi_2(z) = 0, \quad \omega_2(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \omega_2(z) = 0.$$

Лемма 3.1. *Имеют место следующие интегральные представления :*

$$\Phi_k(x + \lambda y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{\chi_k(t)}{\alpha_k(t)(\xi + \lambda\eta - x - \lambda y)}\, d(\xi + \lambda\eta), \quad x + iy \in G_k, \tag{3.1}$$

$$\omega_k(x + \mu y) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{\chi_k(t)}{\beta_k(t)(\xi + \mu\eta - x - \mu y)}\, d(\xi + \mu\eta), \quad x + iy \in G_k, \tag{3.2}$$

где функции $\chi_k(t) \in H(\gamma_k)$ определяются через Φ_k и ω_k, $k = 1, 2$ единственным образом. В (3.1) и (3.2) переменная интегрирования $t = \xi + i\eta$ пробегает контур γ_k в положительном направлении.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу :

$$\alpha_k(t)\varphi_k(\xi + \lambda\eta) + \beta_k(t)\psi_k(\xi + \mu\eta) = f_k(t), \quad t = \xi + i\eta \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \tag{3.3}$$

где φ_k и ψ_k - искомые функции, аналитические в $G_k(\lambda)$ и $G_k(\mu)$, соответственно, $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ из (3.1) и (3.2), $f_k(t) \in H(\gamma_k)$, $k = 1, 2$, $\varphi_k \in H(\overline{G}_k(\lambda))$ и

$\psi_k \in H(\overline{G}_k(\mu))$, $k = 1, 2$. Задача (3.3) при $k = 1, 2$ имеет единственное решение, см. [8], стр. 129. Сначала докажем (3.1) и (3.2) при $k = 1$. Ищем решение задачи (3.3) в виде

$$\varphi_1(x + \lambda y) = M_1(\chi_1), \quad \psi_1(x + \mu y) = M_2(\chi_1), \quad x + iy \in G_1, \tag{3.4}$$

где $M_1(\chi_1)$ и $M_2(\chi_1)$ – правые части (3.1) и (3.2) при $k = 1$, соответственно. Пусть $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$. Обозначим через $\varphi_1(\xi_0 + \lambda\eta_0)$ и $\psi_1(\xi_0 + \mu\eta_0)$ пределы интегралов $M_1(\chi_1)$ и $M_2(\chi_1)$ при $z = x + iy \to t_0$ изнутри области D. Согласно формуле Сохоцкого-Племеля (см. [6], стр. 66), имеем

$$\varphi_1(\xi_0 + \lambda\eta_0) = \frac{\chi_1(t_0)}{\alpha_1(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\chi_1(t)}{\alpha_1(t)(\xi + \lambda\eta - \xi_0 - \lambda\eta_0)}\, d(\xi + \lambda\eta), \tag{3.5}$$

$$\psi_1(\xi_0 + \mu\eta_0) = \frac{\chi_1(t_0)}{\beta_1(t_0)} - \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\chi_1(t)}{\beta_1(t)(\xi + \mu\eta - \xi_0 - \mu\eta_0)}\, d(\xi + \mu\eta). \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) при $k = 1$, и используя (3.5) и (3.6), для $\chi_1(t)$ получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма :

$$\chi_1(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} K(t_0, t)\chi_1(t)\, dt = \frac{1}{2} f_1(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.7}$$

где

$$K(t_0, t) = \frac{\alpha'(t)\alpha_1(t_0)}{\alpha_1(t)(\alpha(t) - \alpha(t_0))} - \frac{\beta'(t)\beta_1(t_0)}{\beta_1(t)(\beta(t) - \beta(t_0))},$$

$$\alpha(t) = \xi + \lambda\eta, \quad \beta(t) = \xi + \mu\eta, \quad \alpha'(t) = \lim_{\tau\to t}\frac{\alpha(\tau) - \alpha(t)}{\tau - t}, \quad t, \tau \in \gamma_1.$$

В [6], стр. 573 доказано, что

$$K(t_0, t) = \frac{\overline{K}(t_0, t)}{|t - t_0|^s}, \quad 0 \le s = const < 1, \tag{3.8}$$

а $\overline{K}(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на γ_1 относительно t и t_0.

Доказательство существования и единственности решения интегрального уравнения (3.7) аналогично доказательству для уравнения (7) в [6], стр. 574. Следовательно, решение задачи (3.3) можно представить в виде (3.4). Теперь берём

$$f_1(t_0) = \alpha_1(t_0)\Phi_1(\xi_0 + \lambda\eta_0) + \beta_1(t_0)\omega_1(\xi_0 + \mu\eta_0).$$

Тогда функции $\varphi_1 = \Phi_1$ и $\psi_1 = \omega_1$ удовлетворяют (3.3) при $k = 1$. Так как любое решение задачи (3.3) при $k = 1$ допускает представление (3.4), то заключаем, что имеют место (3.1) и (3.2) при $k = 1$.

Доказательство единственности представлений (3.1) и (3.2) при $k = 1$ можно свести к единственности решения задачи (3.3) при $k = 2$, см. [6], стр. 573. Доказательство Леммы 3.1 при $k = 1$ завершено. При $k = 2$ доказательство аналогично. Лемма 3.1 доказана.

Теперь докажем некоторые леммы, которые будут использованы для сведения задачи (0.4) – (0.5) к интегральному уравнению Фредгольма. Пусть области G_1 и G_2 с границами γ_1 и γ_2 те же, что и раньше, область G_1 содержит начало координат. Пусть q и n – натуральные числа, $c_1, ..., c_q$ – некоторые постоянные, а $\Phi(\zeta)$ – аналитическая функция в $G_1(\lambda)$ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), удовлетворяющая условиям $\Phi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n + q - 1$.

Лемма 3.2. *Функцию Φ и постоянные $c_1, ..., c_q$ можно представить в следующем виде*

$$\Phi(x + \lambda y) = \psi(x + \lambda y) - \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}(x + \lambda y)^k, \quad c_j = \psi^{(n+j-1)}(0), \quad j = 1, ..., q, , \tag{3.9}$$

где ψ – аналитическая функция в $G_1(\lambda)$, удовлетворяющая условиям $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n - 1$. Функция ψ с помощью функции Φ и постоянных $c_1, ..., c_q$ определяются единственным образом.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\psi(x + \lambda y) = \Phi(x + \lambda y) + \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{c_{k-n+1}}{k!}(x + \lambda y)^k.$$

Из условий $\Phi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n + q - 1$ следует, что $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., n - 1$. Поэтому имеет место представление (3.9). Если в (3.9) $\Phi(x + \lambda y) = 0$ и $c_j = 0$, $j = 1, ..., q$, то $\psi(x + \lambda y) = 0$. Лемма 3.2 доказана.

Пусть теперь $\Phi(\zeta)$ – аналитическая функция в $G_2(\lambda)$ такая, что в окрестности бесконечности

$$|\Phi(x+\lambda y)| \le c|z|^{-n}, \quad z = x + iy \in G_2, \tag{3.10}$$

где c – некоторая положительная постоянная, а $n \ge 2$ - натуральное число.

Лемма 3.3. *Функцию Φ и постоянные $c_1, ..., c_{n-1}$ можно представить в виде*

$$\Phi(x+\lambda y) = \psi(x+\lambda y) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{(x+\lambda y - x_0 - \lambda y_0)^k},$$

$$c_k = -\frac{sign(\,Im\,\lambda)}{2\pi i}\int_{\gamma_2} (\xi + \lambda\eta - x_0 - \lambda y_0)^{k-1}\psi(\xi+\lambda\eta)\, d(\xi+\lambda\eta),$$

где $x_0 + iy_0$ – фиксированная точка внутри области G_2, а ψ аналитична в $G_2(\lambda)$ и удовлетворяет условию $\psi(\infty) = 0$. Для заданных Φ и постоянных $c_1, ..., c_{n-1}$ функция ψ определяется единственным образом.

Доказательство. аналогично Лемме 3.2.

Пусть D – $(m+1)$-связная область (см. Введение), $D_0^+, D_1^+, ..., D_m^+$ – конечные области, ограниченные контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, а $D_0^-, D_1^-, ..., D_m^-$ – дополнения замкнутых областей $\overline{D_0^+}, \overline{D_1^+}, ..., \overline{D_m^+}$ относительно полной комплексной плоскости. Через $D_j^{\pm}(\lambda)$ обозначим образ $D_j^{\pm}$ при отображении $x + iy \longmapsto x + \lambda y$. Пусть $\varphi(\zeta)$ – аналитическая функция в D_λ ($\mathrm{Im}\ \lambda \ne 0$), удовлетворяющая условиям $\varphi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, ..., k$, где k – некоторое неотрицательное целое число.

Лемма 3.4. *Функцию φ можно представить в виде*

$$\varphi(x+\lambda y) = \varphi_0(x+\lambda y) + \sum_{j=1}^{m}\left[\varphi_j(x+\lambda y) - \sum_{l=0}^{k}\frac{\varphi_j^{(l)}(0)}{l!}(x+\lambda y)^l\right],$$

где φ_0 – аналитическая функция в $D_0^+(\lambda)$, а φ_j, $j = 1, ..., m$ аналитичны в $D_j^-(\lambda)$ и удовлетворяют условиям

$$\varphi_0^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, ..., k, \quad \varphi_j(\infty) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m.$$

Для заданной функции φ, функции φ_j, $j = 0, 1, ..., m$ определяются единственным образом.

Доказательство. аналогично доказательству Леммы 3.2.

Пусть D – $(m+1)$-связная область в комплексной плоскости, ограниченная достаточно гладкими, замкнутыми непересекающимися контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, и пусть Γ_0 содержит все остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Пусть A – $n \times n$ матрица с постоянными элементами, $det\ A \neq 0$, E_n – n-мерная единичная матрица, $z_1, ..., z_m$ – фиксированные точки внутри контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно, а l_0 – длина контура Γ_0. Рассмотрим сингулярное уравнение для искомой n-мерной действительнозначной вектор-функции $\mu(t)$:

$$\operatorname{Re}\left[A\mu(t_0) + \frac{A}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-t_0}\,dt + \left(E_n - \frac{2A}{l_0}\right)\int_{\Gamma_0}\mu(t)\,ds\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\ln|t_0 - z_k|\int_{\Gamma_k}\mu(t)\,ds = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.11}$$

где $t \in \Gamma$, а ds – длина дуги на Γ. Здесь и ниже все векторы предполагаются вектор-столбцами.

Лемма 3.5. *Уравнение (3.11) имеет единственное решение в классе $H(\Gamma)$.*

Доказательство. Левая часть (3.11) является граничным значением на Γ гармонической в D функции

$$u(z) = \operatorname{Re}\left[\frac{A}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-z}\,dt + \left(E_n - \frac{2A}{l_0}\right)\int_{\Gamma_0}\mu(t)\,ds\right] + \sum_{k=1}^{m}\ln|z - z_k|\int_{\Gamma_k}\mu(t)\,ds. \tag{3.12}$$

Пусть $\mu(t)$ – решение однородного уравнения (3.11). Так как гармоническая функция $u(z)$ стремится к нулю на Γ, то имеем $u(z) \equiv 0$. Из (3.12) при $u(z) \equiv 0$ получаем (см. [6], стр. 255)

$$\frac{A}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-z}\,dt + \left(E_n - \frac{2A}{l_0}\right)\int_{\Gamma_0}\mu(t)\,ds = ic, \quad z \in D, \tag{3.13}$$

$$\int_{\Gamma_k}\mu(t)\,ds = 0, \quad k = 1, ..., m, \tag{3.14}$$

где c – некоторый действительный n-мерный постоянный вектор. Из (3.13) (см. [6], стр. 255) следует, что вектор $\mu(t)$ является постоянным на каждом из контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Обозначим эти постоянные через $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_m$, соответственно.

В силу (3.13) и (3.14) получим $\mu_k = 0$, $k = 1, ..., m$ и $l_0\mu_0 = ic$. Так как μ_0 и c действительны, то $\mu_0 = c = 0$. Следовательно, однородное уравнение (3.11) имеет только нулевое решение. Так как индекс (3.11) равен нулю, то отсюда следует существование решения уравнения (3.11) для любой вектор-функции $f(t) \in H(\Gamma)$ (см. [6], стр. 509 – 510). Лемма 3.5 доказана.

Для уравнения (0.4) рассмотрим граничные условия Дирихле

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.15}$$

где $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная по внешней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – достаточно гладкие функции, заданные на Γ. Задача (0.4), (3.15) при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**.

Лемма 3.6. *Если*

$$\lambda_{n+k} = \overline{\lambda}_k, \quad a_{n+k} = -\overline{a}_k, \quad k = 1, ..., n \tag{3.16}$$

то однородная задача (0.4), (3.15) имеет только нулевое решение.

Доказательство. Пусть выполнено (3.16), и $u(z)$ является решением задачи (0.4), (3.15) для $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Уравнение (0.4) можно записать в виде

$$L_{n+1} \cdots L_{2n} V(z) = 0, \quad V(z) = L_1 \cdots L_n u(z).. \tag{3.17}$$

По формуле Грина и (3.15) имеем

$$\iint_D L_{n+1} \cdots L_{2n} V \overline{u(z)}\, dx\, dy = (-1)^n \iint_D V(z) M_{n+1} \cdots M_{2n} \overline{u(z)}\, dx\, dy, \tag{3.18}$$

где M_k – дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$M_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} - \lambda_k \frac{\partial \omega}{\partial y} - a_k \omega, \quad k = n+1, ..., 2n,$$

а $\overline{u}$ – комплексное сопряженное к u. Из (3.16) следует, что

$$M_{n+1} \cdots M_{2n} \overline{u(z)} = \overline{V(z)}, \quad z \in D. \tag{3.19}$$

Из (3.17) – (3.19) получим $V(z) = 0$, $z \in D$. Следовательно, функция $u(z)$ удовлетворяет условию

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D. \tag{3.20}$$

Полагая $L_2 \cdots L_n u(z) = W(z)$, уравнение (3.20) можно записать в виде $L_1 W = 0$. Из (3.15) при $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ имеем $W(z) = 0$, $z \in \Gamma$. Общее решение $L_1 W = 0$ есть

$$W(z) = e^{-a_1 y}\varphi(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D, \tag{3.21}$$

где φ – произвольная аналитическая функция, определенная в D_{λ_1}. Так как $W(z) = 0$, $z \in \Gamma$, то из (3.21) следует, что функция φ непрерывна в замкнутой области $\overline{D_{\lambda_1}}$ и стремится к нулю на Γ. Поэтому $\varphi(\zeta) = 0$ для $\zeta \in D_{\lambda_1}$. Отсюда следует, что $L_2 \cdots L_n u(z) = 0$, $z \in D$. Аналогичными рассуждениями получим $u(z) = 0$, $z \in D$. Лемма 3.6 доказана.

Для заданной вектор-функции $f(t)$ и $\omega_k(t)$ рассмотрим уравнение для искомой n-мерной действительнозначной вектор-функции $\mu(t) \in H(\Gamma)$:

$$\mu(t_0) + \int_\Gamma K(t_0, t)\mu(t)\, ds + \sum_{k=1}^{p} c_k \omega_k(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.22}$$

где $K(t_0, t)$ – действительная $(n \times n)$-матрица с элементами вида (3.8), а $c_1, ..., c_p$ – искомые действительные постоянные. Решением уравнения (3.22) является вектор вида $(\mu_1(t), ..., \mu_n(t), c_1, ..., c_p)$, где $\mu_1(t), ..., \mu_n(t)$ – компоненты $\mu(t)$. Уравнение (3.22) при $f(t) \equiv 0$ называется **однородным**. Наряду с уравнением (3.22), рассмотрим систему уравнений

$$\chi(t_0) + \int_\Gamma K(t, t_0)\chi(t)\, ds = 0, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.23}$$

$$\int_\Gamma \chi(t)\omega_k(t)\, ds = 0, \quad k = 1, ..., p \tag{3.24}$$

для искомой n-мерной вектор-строки $\chi(t) \in H(\Gamma)$. Система (3.23), (3.24) называется **союзным однородным уравнением к уравнению** (3.22).

Лемма 3.7. *Уравнение (3.22) разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Gamma \chi(t) f(t)\, ds = 0,$$

где $\chi(t)$ – произвольное решение союзного однородного уравнения (3.23), (3.24).

Лемма 3.8. *Разность числа линейно независимых решений однородного уравнения (3.22) и числа линейно независимых решений союзного однородного уравнения (3.23), (3.24) равна p.*

Леммы 3.7 и 3.8 могут быть доказаны по стандартной схеме, описанной в [6] (стр. 223 и 230), и поэтому доказательства опускаются. Метод решения уравнения (3.22) с неизвестными постоянными существенно не отличается от метода из [6], стр. 292 (где нет постоянных).

Пусть γ – гладкая простая замкнутая кривая и G^- – область вне γ. Предположим, что $0 \notin G^- \cup \gamma$. Для фиксированного $\tau \in \gamma$ через $\ln(1-\tau/\zeta)$ обозначим некоторую непрерывную ветвь логарифма в G^-, которая стремится к нулю в $\zeta = \infty$.

Лемма 3.9. *Для любого натурального $n \geq 2$*

$$\frac{1}{(n-2)!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left[(\zeta-\tau)^{n-2}\ln\left(1-\frac{\tau}{\zeta}\right)\right] = \frac{1}{\zeta-\tau} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{\tau^k}{\zeta^{k+1}}, \quad \zeta \in G^-, \quad \tau \in \gamma.$$

Доказательство. проводится с помощью метода математической индукции по n.

Рассмотрим функцию

$$h_n(\zeta,\tau) = \frac{1}{(n-2)!}(\zeta-\tau)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\tau^k}{\zeta^k}, \tag{3.25}$$

где $n \geq 3$ – натуральное число.

Лемма 3.10. *Для некоторых полиномов $P_k(\tau)$ комплексной переменной τ*

$$\frac{d^{n-2}h_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}} = \sum_{k=n-1}^{2n-4}\frac{P_k(\tau)}{\zeta^k}, \quad \zeta \neq 0. \tag{3.26}$$

Доказательство. Подставляя $h_n(\zeta,\tau)$ из (3.25) в (3.26) и приравнивая коэффициенты при ζ^k, получим полиномы $P_k(\tau)$. Лемма 3.10 доказана.

Рассмотрим функцию

$$\beta_n(\zeta,\tau) = \sum_{k=n-1}^{2n-4}\frac{(-1)^n(k+1-n)!P_k(\tau)}{(k-1)!\zeta^{k+2-n}}, \quad n \geq 3, \tag{3.27}$$

где $P_k(\tau)$ – полиномы из (3.26). Из (3.26) и (3.27) имеем

$$\frac{d^{n-2}h_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\beta_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}}, \quad \zeta \neq 0. \tag{3.28}$$

Положим

$$P_k(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{kj}x^j y^{n-1-j}, \quad k = 0,1,...,n-1,$$

где c_{kj} – действительные постоянные, и обозначим через C матрицу с элементами c_{kj}.

Лемма 3.11. *Полиномы $P_0(x,y),...,P_{n-1}(x,y)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $det\ C \neq 0$.*

Доказательство. очевидно.

Для любого $\alpha \in [0,2\pi]$ полиномы

$$Q_k(x,y) = (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^k(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^{n-1-k}, \quad k = 0,1,...,n-1$$

линейно независимы и допускают представление

$$Q_k(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{kj}(\alpha)x^j y^{n-1-j}, \quad k = 0,1,...,n-1, \tag{3.29}$$

где $c_{kj}(\alpha)$ – некоторые полиномы относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с действительными коэффициентами. Обозначим через $C(\alpha)$ матрицу с элементами c_{kj}. В силу Леммы 3.11 имеем

$$det\ C(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in [0,2\pi]. \tag{3.30}$$

§4. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА

Для простоты сначала рассмотрим задачу

$$L_1L_2L_3L_4u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} = f_0(z), \qquad \frac{\partial u(z)}{\partial y} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{4.2}$$

где L_j – операторы, заданные по формуле (0.1), и

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 < 0.$$

Область D является двусвязной и ограниченной контурами Γ_0 и Γ_1, Γ_0 охватывает контур Γ_1, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Согласно Лемме 2.1 общее решение уравнения (4.1) можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4} e^{-a_j y}\varphi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{k=1}^{6} c_k u_k(z), \quad z = x+iy \in D, \tag{4.3}$$

где c_k – произвольные постоянные, φ_j, $j = 1,2,3,4$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = 0, \quad \varphi_4(0) = \varphi_4'(0) = \varphi_4''(0) = 0, \tag{4.4}$$

и $u_1(z),\dots,u_6(z)$ – некоторые частные решения уравнения (4.1). Функции φ_j, $j = 1,\dots,4$ и постоянные c_k, $k = 1,\dots,6$ определяются через решение $u(z)$ единственным образом.

Пусть D_0^+ – ограниченная и D_1^- – неограниченная области с контурами Γ_0 и Γ_1, соответственно. Согласно Лемме 3.4, функции φ_j из (4.3) при $j = 1,2,3,4$ можно представить в виде

$$\varphi_j(x+\lambda_j y) = \varphi_{j0}(x+\lambda_j y) + \varphi_{j1}(x+\lambda_j y) - \sum_{k=0}^{j-2} \frac{\varphi_{j1}^{(k)}(0)}{k!}(x+\lambda_j y)^k, \tag{4.5}$$

где φ_{j0} – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$, а φ_{j1}, $j = 1,2,3,4$ аналитичны в $D_j^-(\lambda)$ и удовлетворяют условиям

$$\varphi_{20}(0) = 0, \quad \varphi_{30}(0) = \varphi_{30}'(0) = 0, \quad \varphi_{40}(0) = \varphi_{40}'(0) = \varphi_{40}''(0) = 0,$$

$$\varphi_{10}(\infty) = \cdots = \varphi_{40}(\infty) = 0. \tag{4.6}$$

Представим φ_{10} в виде

$$\varphi_{10}(x+\lambda_1 y) = \phi_{10}(x+\lambda_1 y) + c, \tag{4.7}$$

где ϕ_{10} – аналитическая функция в $D_0^+(\lambda_1)$, удовлетворяющая условию $\phi_{10}(0) = 0$, а c – постоянная.

Применяя Лемму 3.2 для $n = 2$, $q = 1$, находим

$$\varphi_{40}(x + \lambda_4 y) = \phi_{40}(x + \lambda_4 y) - \frac{\phi''_{40}(0)}{2}(x + \lambda_4 y)^2, \tag{4.8}$$

где ϕ_{40} – аналитическая функция в $D_0^+(\lambda_4)$, удовлетворяющая условию

$$\phi_{40}(0) = \phi'_{40}(0) = 0. \tag{4.9}$$

В силу (4.7) и (4.8)

$$\varphi_{10}(x + \lambda_1 y) = \phi_{10}(x + \lambda_1 y) + \phi''_{40}(0). \tag{4.10}$$

Таким образом, функции φ_{10} и φ_{40} допускают представления (4.8) и (4.10), где функции ϕ_{10} и ϕ_{40} удовлетворяют условиям $\phi_{10}(0) = 0$ и (4.9).
Из (4.6) следует, что функции $\varphi'_{j1}(x+\lambda_j y)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяют (3.10) при $n = 2$ в окрестности бесконечности. Следовательно, для любой фиксированной точке $x_1 + iy_1$ внутри Γ_1 функции

$$(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^{-1}\varphi'_{j1}(x + \lambda_j y), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

удовлетворяют (3.10) при $n = 3$. Пусть $c_1, ..., c_6$ – постоянные из (4.3). Применяя Лемму 3.3 к $(\varphi'_{j1}(x+\lambda_j y), c_j)$ при $j = 1, 2$, $n = 2$ и к $((x+\lambda_3 y - x_1 - \lambda_3 y_1)^{-1}\varphi'_{31}(x+\lambda_3 y), c_3, c_4)$ и $((x + \lambda_4 y - x_1 - \lambda_4 y_1)^{-1}\varphi'_{41}(x + \lambda_3 y), c_5, c_6)$ при $n = 3$, получим

$$\varphi'_{j1}(x + \lambda_j y) = \phi_j(x + \lambda_j y) + \frac{c_j}{x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1}, \quad j = 1, 2, \tag{4.11}$$

$$(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^{-1}\varphi'_{j1}(x + \lambda_j y) = \phi_j(x + \lambda_j y) -$$

$$-\sum_{k=1}^{2} \frac{d_{jk}}{(x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^k}, \quad j = 3, 4. \tag{4.12}$$

$$c_3 = d_{31}, \quad c_4 = d_{32}, \quad c_5 = d_{41}, \quad c_6 = d_{42}, \tag{4.13}$$

где

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \phi_j(\xi + \lambda_j \eta)\, d(\xi + \lambda_j \eta), \quad j = 1, 2,$$

$$d_{jk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} (\xi + \lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1)^{k-1} \phi_j(\xi + \lambda_j\eta)\, d(\xi + \lambda_j\eta), \quad j = 3,4, \quad k = 1,2,$$

а ϕ_j – аналитические функции в $D_1^-(\lambda_j)$, удовлетворяющие $\phi_j(\infty) = 0$, $j = 1,2,3,4$. Положим

$$\psi_1(\zeta) = \phi'_{10}(\zeta), \quad \psi_2(\zeta) = \varphi'_{20}(\zeta), \quad \psi_3(\zeta) = \varphi'_{30}(\zeta), \quad \psi_4(\zeta) = \phi'_{40}(\zeta). \tag{4.14}$$

В силу (4.4) и (4.9) имеем

$$\psi_3(0) = 0, \quad \psi_4(0) = 0. \tag{4.15}$$

Так как $\phi_{10}(0) = \varphi_{20}(0) = \varphi_{30}(0) = \varphi_{40}(0) = 0$, то из (4.14)

$$\phi_{j0}(x + \lambda_j y) = \int_0^{x+\lambda_j y} \psi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1,4,$$
$$\varphi_{k0}(x + \lambda_k y) = \int_0^{x+\lambda_k y} \psi_k(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 2,3, \tag{4.16}$$

где ψ_j – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$, $j = 1,2,3,4$, удовлетворяющие (4.15). Из (4.11) и (4.12) при $j = 1,2,3,4$ получаем

$$\varphi_{j1}(x + \lambda_j y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g_j \phi_j(\xi + \lambda_j\eta) \ln\left(1 - \frac{\xi + \lambda_j\eta - \zeta_j}{x + \lambda_j y - \zeta_j}\right) d(\xi + \lambda_j\eta), \tag{4.17}$$

где

$$\zeta_j = x_1 + \lambda_j y_1, \quad g_j = \begin{cases} -1 & \text{для} \quad j = 1,2 \\ \zeta_j - \xi - \lambda_j\eta & \text{для} \quad j = 3,4. \end{cases}$$

Таким образом, используя (4.5), (4.8), (4.10), (4.13) и (4.16), можем представить функции φ_j, $j = 1,2,3,4$ и постоянные c_k, $k = 1, \dots, 6$, входящие в (4.3), с помощью функций ϕ_j и ψ_j, $j = 1,2,3,4$, удовлетворяющих условиям $\phi_j(\infty) = 0$ и (4.15). Рассмотрим вектор-функции $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4)$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_4)$. Подставляя $u(z)$ из (4.3) в (4.2) и используя указанные преобразования для определения функций ϕ_j и ψ_j, $j = 1,2,3,4$, получим граничную задачу

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j^k e^{-a_j y} \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^k e^{-a_j y} \phi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{j=3}^{4} \lambda_j^k e^{-a_j y} (x + \lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1) \times$$

$$\times\phi_j(x+\lambda_j y) + M_k(\psi,\phi)(z) = f_k(z), \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k=0,1, \tag{4.18}$$

где

$$M_k(\psi,\phi)(z) = \sum_{j=1}^{4}\left[\int_{\Gamma_0} h_{kj}(z,t)\psi_j(\xi+\lambda_j\eta)\,dt + \int_{\Gamma_1}\gamma_{kj}(z,t)\phi_j(\xi+\lambda_j\eta)\,dt\right]. \tag{4.19}$$

В (4.19) $t = \xi + i\eta$ – точка интегрирования, а $\gamma_{kj}(z,t)$ и $h_{kj}(z,t)$ – функции вида (3.8). Из (4.15) заключаем, что функции $\zeta^{-1}\psi_3(\zeta)$ и $\zeta^{-1}\psi_4(\zeta)$ аналитичны в $D_0^+(\lambda_3)$ и $D_0^+(\lambda_4)$, соответственно.

Рассмотрим функции ($j = 1,2$)

$$\alpha_j(t) = (\xi+\lambda_j\eta)e^{-a_j\eta}, \quad t = \xi+i\eta \in \Gamma_0,$$

$$\beta_j(t) = (\xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1)e^{-a_j\eta}, \quad t = \xi + i\eta \in \Gamma_1.$$

Согласно Лемме 3.1 имеем представления

$$\psi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{a_j\eta}\chi_j(t)}{\xi+\lambda_j\eta - x - \lambda_j y}\,d(\xi+\lambda_j\eta), \tag{4.20}$$

$$(x+\lambda_{j+2}y)^{-1}\psi_{j+2}(x+\lambda_{j+2}y) =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\chi_j(t)}{\alpha_{j+2}(t)(\xi+\lambda_{j+2}\eta - x - \lambda_{j+2}y)}\,d(\xi+\lambda_{j+2}\eta), \tag{4.21}$$

$$\phi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{a_j\eta}\chi_j(t)}{\xi+\lambda_j\eta - x-\lambda_j y}\,d(\xi+\lambda_j\eta), \tag{4.22}$$

$$\phi_{j+2}(x+\lambda_{j+2}y) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\chi_j(t)}{\beta_{j+2}(t)(\xi+\lambda_{j+2}\eta - x - \lambda_{j+2}y)}\,d(\xi+\lambda_{j+2}\eta), \tag{4.23}$$

где $j = 1,2$ и $\chi_j(t)$ – функции из класса $H(\Gamma)$. Уравнение (4.18) можно записать в виде

$$\lim_{x+iy\to t_0}\left[\sum_{j=1}^{4}\lambda_j^k e^{-a_j\eta_0}\psi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{j=1}^{2}\lambda_j^k e^{-a_j\eta_0}\phi_j(x+\lambda_j y) + \right.$$

$$+\sum_{j=3}^{4}\lambda_j^k e^{-a_j i\eta_0}(\xi_0+\lambda_j\eta_0-x_1-\lambda_j y_1)\phi_j(x+\lambda_j y)\Bigg]+ \tag{4.24}$$

$$+M_k(\psi,\phi)(t_0)=f_k(t_0),\quad t_0=\xi_0+i\eta_0\in\Gamma,\quad k=0,1,$$

где $M_k(\psi,\phi)$ определяется через (4.19). Подставляя ϕ_j и ψ_j из (4.20) – (4.23) в (4.24) и используя (3.5) и (3.6), получим

$$A\chi(t_0)+\frac{B}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt+\int_\Gamma h(t,t_0)g(t)\,dt=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma, \tag{4.25}$$

где $f(t)=(f_0(t),f_1(t))$, а $\chi(t)=(\chi_1(t),\chi_2(t))$ – искомый вектор-столбец,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ \lambda_1+\lambda_3 & \lambda_2+\lambda_4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda_1-\lambda_3 & \lambda_2-\lambda_4\end{pmatrix},$$

и $h(t,t_0)$ – (2×2)-матрица с элементами вида (3.8).

Заметим, что интеграл в левой части (4.25) понимается в смысле главного значения Коши. Так как

$$det(A+B)\neq 0,\quad det(A-B)\neq 0, \tag{4.26}$$

то сингулярное интегральное уравнение (4.25) является уравнением нормального типа. Обозначим через A_0 и B_0 обратные матрицы к матрицам $A+B$ и $A-B$ соответственно и рассмотрим сингулярные операторы

$$M_0\chi=A\chi(t_0)+\frac{B}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt,$$

$$M\chi=\frac{A_0+B_0}{2}\chi(t_0)+\frac{A_0-B_0}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\chi(t)}{t-t_0}\,dt.$$

Так как A и B суть постоянные матрицы, то из (4.26) следует, что $MM_0=E$, и уравнение $M\chi=0$ имеет только нулевое решение (см. [5], стр. 194). Применяя оператор M к (4.25), получим уравнение Фредгольма

$$\chi(t_0)+\int_\Gamma K(t_0,t)\chi(t)\,dt=Mf, \tag{4.27}$$

где $K(t_0, t)$ – (2×2)-матрица с элементами, допускающими представление (3.8). Так как уравнение $M\chi = 0$ имеет только нулевое решение, то уравнения (4.24) и (4.27) эквивалентны. Таким образом, задача (4.1) – (4.2) сводится к уравнению Фредгольма (4.27). Из единственности представлений, использованных при получении (4.27) следует, что число линейно независимых решений однородной задачи (4.1) – (4.2) ($f_0 = f_1 = 0$) и задачи (4.27) ($f = 0$) совпадают. Следовательно, задача (4.1) – (4.2) фредгольмова.

Используя результаты §§2, 3, можно свести задачу (0.4), (0.5) к интегральному уравнению Фредгольма в общем случае. Отсюда и из Леммы 3.6 вытекает следующий результат.

Теорема 4.1. *Задача (0.4) – (0.5) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма. При условии (3.16) последнее уравнение имеет единственное решение.*

§5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРУГЕ

Пусть D – круг $|z| < 1$ и Γ – окружность $|z| = 1$, и $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u(z)}{\partial y^k \partial x^{2n-k}} = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial r^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.2}$$

где A_k – комплексные постоянные, $A_{2n} \neq 0$, $u(z)$ – искомая функция из $C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\overline{D})$, $\dfrac{\partial u(z)}{\partial r}$ – производная по радиусу, $f_k(z)$ – некоторые функции, заданные на Γ.

Задача (5.1) – (5.2) при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**. Уравнение (5.1) называется **эллиптическим**, если его характеристическое уравнение

$$A_0 + A_1 \lambda + \cdots + A_{2n} \lambda^{2n} = 0 \tag{5.3}$$

не имеет действительных корней. Уравнение (5.1) называется **правильно эллиптическим**, если числа корней с $\operatorname{Im} \lambda > 0$, и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ равны. Предположим, что все корни $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ суть простые и удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n+j} < 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{5.4}$$

Предположим также, что функции $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ и ее производные по $s = arg\ z$ непрерывны на Г. Задача (5.1) – (5.2) является частным случаем задачи (0.1), (4.28), поэтому она фредгольмова, и ее индекс равен нулю.

В [2] для $n = 1$ доказано, что задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение в любой односвязной или многосвязной области D. В [10] установлено, что при $n \geq 2$ этот результат остается верен, когда коэффициенты A_k в (5.1) действительны. Если $n = 2$ и коэффициенты A_k в (5.1) комплексны, то однородная задача (5.1), (5.2) может иметь ненулевое решение в круге (см. [11] – [13]).

В этом параграфе сводим задачу (5.1) – (5.2) в круге или эллипсе к системе алгебраических уравнений и определяем ее дефектные числа. Начнем с некоторых вспомогательных результатов. Пусть $f_k(z)$ – функции из (5.2). Положим

$$u_0(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(r-1)^k}{k!} f_k(e^{i\theta}), \quad r = |z|, \quad \theta = arg\ z, \tag{5.5}$$

где (r, θ) – полярные координаты точки z.

Лемма 5.1. *Условие (5.2) эквивалентно следующим условиям :*

$$\frac{\partial^{n-1} u(z)}{\partial x^{n-1-k} \partial y^k} = \frac{\partial^{n-1} u_0(z)}{\partial x^{n-1-k} \partial y^k}, \quad z = x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^{k+l} u(z)}{\partial x^k \partial y^l} = \frac{\partial^{k+l} u_0(z)}{\partial x^k \partial y^l}, \quad z = 1, \quad k + l \leq n-2. \tag{5.7}$$

Доказательство. Из (5.5) имеем

$$\frac{\partial^k u_0(z)}{\partial r^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Поэтому (5.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial^k v(z)}{\partial r^k} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.8}$$

где $v(z) = u(z) - u_0(z)$. В силу (5.8)

$$\frac{\partial^{k+j} v(z)}{\partial r^k \partial \theta^j} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k + j \leq n-1. \tag{5.9}$$

В любой точке z производные функции $v(z)$ по x и y до порядка $n-1$ выражаются линейной комбинацией производных по r и θ до порядка $n-1$. Поэтому из (5.9) получаем

$$\frac{\partial^{k+j}v(z)}{\partial x^k \partial y^j} = 0, \quad z \in \Gamma, \quad k+j \leq n-1. \tag{5.10}$$

Таким образом, из (5.8) следуют (5.6) и (5.7). Пусть теперь имеют место условия (5.6) и (5.7). Их можно записать в виде

$$\frac{\partial^{n-1}v(z)}{\partial x^{n-1-k}\partial y^k} = 0, \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial^{k+j}v(z)}{\partial x^k \partial y^j} = 0, \quad z = 1, \quad k+j \leq n-2. \tag{5.12}$$

Известно, что если $\omega(z)$ – непрерывно дифференцируемая функция в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет условию

$$\omega(z_0) = 0, \quad \frac{\partial \omega(z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega(z)}{\partial y} = 0, \quad z \in \Gamma,$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка на Γ, то $\omega(z) = 0$ для любого $z \in \Gamma$. Применяя это утверждение к функции

$$\omega_k(z) = \frac{\partial^{n-2}v(z)}{\partial x^{n-2-k}\partial y^k}, \quad z = x+iy, \quad k = 0, 1, ..., n-2,$$

и учитывая (5.11) и (5.12), получим $\omega_k(z) = 0$, $k = 0, 1, ..., n-2$. Продолжая аналогично, получим (5.10) и (5.8). Лемма 5.1 доказана.

Пусть λ – комплексная постоянная такая, что $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Положим

$$\mu = \begin{cases} \lambda, & \text{для } \operatorname{Im}\lambda > 0, \\ -\lambda, & \text{для } \operatorname{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\xi + i\eta)}{\xi + \mu\eta - x - \lambda y}\, d(\xi + \mu\eta), \quad z = x+iy \in D, \tag{5.13}$$

где $\omega(z)$ аналитична в D и удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$.

Пусть точка $z = x+iy$ стремится к $z_0 = x_0+iy_0 \in \Gamma$, оставаясь внутри области D. Обозначим через $\psi^+(z_0)$ соответствующее граничное значение интеграла (5.13). Доказательство следующей леммы можно найти в [2], стр. 169.

Лемма 5.2. *Граничное значение интеграла (5.13) определяется формулой*

$$\psi^+(z_0) = \begin{cases} \omega(z_0) + \omega(\nu\overline{z}_0) - \omega(0), & \text{для } Im\,\lambda > 0, \\ \omega(\overline{z}_0) + \omega(\nu z_0) - \omega(0), & \text{для } Im\,\lambda < 0, \end{cases} \qquad \nu = \frac{i-\mu}{i+\mu}.$$

Так как $Im\,\mu > 0$, *то имеем* $|\nu| < 1$.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ – корни характеристического уравнения (5.3). Обозначим через D_{λ_j} образ области D при отображении $z = x+iy \in D \longmapsto \zeta = x + \lambda_j y \in D_{\lambda_j}$, $j = 1, ..., 2n$. Так как D есть круг, то D_{λ_j} является внутренностью некоторого эллипса с центром 0. Точка 1 находится на границе всех областей D_{λ_j}, $j = 1, ..., 2n$.

Пусть φ_j, $j = 1, ..., 2n$ – аналитические в D_{λ_j} функции комплексных переменных, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{5.14}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) = 0, \quad x + iy \in D. \tag{5.15}$$

Лемма 5.3. *Уравнение (5.15) имеет ровно $n_0 = n(n+1)/2$ линейно независимых решений.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $L_j = \dfrac{\partial}{\partial y} - \lambda_j \dfrac{\partial}{\partial x}$. Применяя оператор $L_1 \cdots L_{2n-1}$ к (5.15), получим $\varphi_{2n}^{(2n-1)}(\zeta) = 0$ при $\zeta \in D_{\lambda_{2n}}$. Аналогично, $\varphi_j^{(2n-1)}(\zeta) = 0$, $\zeta \in D_{\lambda_j}$, $j = 1, ..., 2n$. Следовательно, $\varphi_1, ..., \varphi_{2n}$ – полиномы от комплексных переменных порядка не выше $2n-2$. Из (5.14) имеем

$$\varphi_j(\zeta) = \sum_{k=n-1}^{2n-2} c_{jk}(\zeta - 1)^k, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{5.16}$$

где c_{jk} – некоторые постоянные. Подставляя φ_j из (5.16) в (5.15), получим

$$\sum_{k=n-1}^{2n-2} \sum_{j=1}^{2n} c_{jk}(x - 1 + \lambda_j y)^k = 0.$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{j=1}^{2n} c_{jk}\lambda_j^l = 0, \quad l = 0, 1, ..., k, \quad k = n-1, ..., 2n-2. \tag{5.17}$$

При фиксированном k, $n-1 \le k \le 2n-2$ система (5.17) относительно $c_{1k}, ..., c_{2n,k}$ имеет ровно $2n-k-1$ линейно независимых решений. Поэтому эта система относительно c_{jk} имеет ровно $n(n+1)/2$ линейно независимых решений. Лемма 5.3 доказана.

Теперь вернемся к задаче (5.1) – (5.2). Как и раньше, $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ – корни характеристического уравнения (5.3). Известно (см. [3]), что общее решение уравнения (5.1) можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y), \quad z = x + iy \in D, \tag{5.18}$$

где φ_j, $j = 1, ..., 2n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}. Представим φ_j в виде

$$\varphi_j(\zeta) = \psi_j(\zeta) + \sum_{k=1}^{n-2} c_{jk}(\zeta - 1)^k, \quad j = 1, ..., 2n, \tag{5.19}$$

где c_{jk} – некоторые постоянные, ψ_j, $j = 1, ..., 2n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условиям

$$\psi_j^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., 2n. \tag{5.20}$$

Подставляя φ_j из (5.19) в (5.18), получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{2n} \psi_j(x + \lambda_j y) + P_{n-2}(x, y), \quad z = x + iy \in D. \tag{5.21}$$

где $P_{n-2}(x,y)$ – полином относительно действительных переменных x и y порядка не выше $n-2$. С другой стороны, при произвольном полиноме $P_{n-2}(x,y)$ порядка не выше $n-2$ функция (5.21) удовлетворяет (5.1).

В представлении (5.21) полиномы $P_{n-2}(x,y)$ единственным образом определяются через $u(z)$, причём это представление не единственное, поскольку согласно Лемме 5.3 функции ψ_j, $j=1,...,2n$ не определяются с помощью $u(z)$ единственным образом. Это создает некоторые трудности при вычислении дефектных чисел задачи (5.1) – (5.2). Однако, используя (5.21), можно свести задачу (5.1) – (5.2) к системе алгебраических уравнений.

Согласно Лемме 5.1 граничные условия (5.2) можно записать в виде (5.6) и (5.7). Подставляя (5.21) в (5.6) и (5.7), получим

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k \Phi_j(x+\lambda_j y) = g_k(z), \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k = 0,1,...,n-1, \tag{5.22}$$

$$P_{n-2}(x,y) = \sum_{j+l\leq n-2} \frac{1}{j!l!} \frac{\partial^{j+l} u_0(1)}{\partial x^j \partial y^l} (x-1)^j y^l, \tag{5.23}$$

где

$$\Phi_j(x+\lambda_j y) = \psi_j^{(n-1)}(x+\lambda_j y), \quad j=1,...,2n, \tag{5.24}$$

$$g_k(z) = \frac{\partial^{n-2} u_0(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}}, \quad z = x+iy \in \Gamma, \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{5.25}$$

В силу (5.20) и (5.24)

$$\psi_j(\zeta) = \frac{1}{(n-2)!} \int_1^\zeta (t-1)^{n-2} \Phi_j(t)\, dt, \quad \zeta \in D_{\lambda_j}, \tag{5.26}$$

где интегрирование идет от точки 1 до точки ζ по прямой. Положим

$$\mu_j = \begin{cases} \lambda_j, & \text{для} \quad j=1,...,n, \\ -\lambda_j, & \text{для} \quad j=n+1,...,2n. \end{cases}$$

Как доказано в [2], стр. 45, функции Φ_j можно записать в виде

$$\Phi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\omega_j(\xi+i\eta)}{\xi+\mu_j\eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi+\mu_j\eta), \quad z = x+iy \in D, \tag{5.27}$$

где $\omega_j(z)$ аналитичны в D и удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$. Функции ω_j, $j = 1, ..., 2n$ определяются через $\Phi_j(z)$ единственным образом.

Подставляя (5.27) в (5.22), получим

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k \Phi_j^+(x_0 + \lambda_j y_0) = g_k(z_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0 \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.28}$$

где $\Phi_j^+(x_0 + \lambda_j y_0)$ - граничное значение интеграла (5.27) при $z \to z_0$. Согласно Лемме 5.2

$$\Phi_j^+(x_0 + \lambda_j y_0) = \begin{cases} \omega_j(z_0) + \omega_j(\nu_j \overline{z}_0) - \omega_j(0), & \text{для} \quad j = 1, ..., n, \\ \omega_j(\overline{z}_0) + \omega_j(\nu_j z_0) - \omega_j(0), & \text{для} \quad j = n+1, ..., 2n, \end{cases} \tag{5.29}$$

где

$$\nu_j = \frac{i - \mu_j}{i + \mu_j}, \quad |\nu_j| < 1, \quad j = 1, ..., 2n.$$

Подставляя Φ_j^+ из (5.29) в (5.28), для $k = 0, 1, ..., n-1$ получим

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \big[\omega_j(z_0) + \omega_j(\nu_j \overline{z}_0) - \omega_j(0)\big] + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j^k \big[\omega_j(\overline{z}_0) + \omega_j(\nu_j z_0) - \omega_j(0)\big] = g_k(z_0). \tag{5.30}$$

Рассмотрим разложение Тейлора функции $\omega_j(z)$:

$$\omega_j(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jl} z^l, \quad j = 1, ..., 2n. \tag{5.31}$$

Так как $\omega_j(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в $\overline{D}$, то ряд (5.31) равномерно сходится в круге $|z| \leq 1$. Разложим функцию $g_k(z)$ в ряд Фурье :

$$g_k(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{kl} z^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.32}$$

где

$$b_{kl} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g_k(t)}{t^{l+1}}\,dt. \qquad (5.33)$$

Подставляя (5.31), (5.32) в (5.30) и приравнивая коэффициенты при z_0^k, получим

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k c_{j0} = b_{k0}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \qquad (5.34)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k c_{jl} + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j^k \nu_j^l c_{jl} = b_{kl}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad l \geq 1, \qquad (5.35)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \nu_j^l c_{jl} + \sum_{j=n+1}^{2n} \lambda_j^k c_{jl} = b_{k,-l}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad l \geq 1. \qquad (5.36)$$

Таким образом, задача (5.1), (5.2) сводится к системе (5.34) – (5.36) алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения (5.31). Система (5.34) всегда разрешима относительно коэффициентов $c_{10}, ..., c_{2n,0}$, а соответствующая однородная система имеет ровно n линейно независимых решений.

Пусть B_l, $l \geq 1$ – основная матрица системы (5.35), (5.36) относительно $c_{1l}, ..., c_{2n,l}$. Так как корни $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ суть простые и $|\nu_j| < 1$, то предел B_∞ последовательности B_l при $l \to \infty$ существует и $det\ B_\infty \neq 0$. Поэтому существует число l_0 такое, что

$$det\ B_l \neq 0 \quad \text{для всех} \quad l > l_0. \qquad (5.37)$$

Это означает, что для $l > l_0$ система (5.35), (5.36) имеет единственное решение. Чтобы решить систему (5.34) зададим произвольные постоянные $c_{n+1,0}, ..., c_{2n,0}$. Тогда постоянные $c_{10}, ..., c_{n0}$ определяются единственным образом. Решая систему (5.35), (5.36) при каждом фиксированном l, найдем все коэффициенты разложения (5.31).

Из (5.34) следует, что функции $g_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ имеют непрерывные производные до порядка $n+1$. Следовательно, из (5.33) имеем

$$|b_{kl}| \leq \frac{c}{l^{n+1}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad l \geq 1, \qquad (5.38)$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от k и l. В силу (5.37) и (5.38) решение системы (5.35), (5.36) при $l > l_0$ удовлетворяет неравенству

$$|c_{jl}| \leq \frac{c_0}{l^{n+1}}, \quad j = 1, ..., 2n, \quad l > l_0, \tag{5.39}$$

где c_0 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от j и l. Следовательно, чтобы получить нужную точность решения задачи (5.1), (5.2), достаточно решить систему (5.35), (5.36) для некоторого $l \leq l_1$, заменяя коэффициенты в (5.31) при $l > l_1$ нулем. Выбор l_1 зависит от (5.39) и точности приближенного решения.

Пусть r_j – ранг матрицы B_j. Число κ_0 линейно независимых решений однородной системы (5.34) – (5.36) (для $b_{kl} = 0, k = 0, 1, ..., n-1, l \geq 1$) определяется формулой

$$\kappa_0 = n + \sum_{l=1}^{\infty}(2n - r_l). \tag{5.40}$$

Из (5.37) следует, что слагаемые в (5.40) равны нулю при достаточно больших l.

Теперь, используя (5.40) и Лемму 5.3, определим число линейно независимых решений однородной задачи (5.1) – (5.2). Согласно (5.21) – (5.24), решение однородной задачи (5.1) – (5.2) определяется формулой (5.18), где φ_j, $j = 1, ..., 2n$ – общее решение задачи

$$\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j^k \varphi_j^{(n-1)}(x + \lambda_j y) = 0, \quad x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5.41}$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi_j^{(l)}(1) = 0, \quad l = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., 2n. \tag{5.42}$$

Так как задачу (5.41), (5.42) можно свести к однородным уравнениям (5.34) – (5.36) при помощи представлений (5.26), (5.27) и (5.31), и эти представления единственным образом определяются по исходным функциям, то число линейно независимых решений однородной задачи (5.41), (5.42) и однородной системы (5.34) – (5.36) совпадают.

Пусть $\varphi_{1p}, ..., \varphi_{2n,p}$ $(p = 1, ..., \kappa_0)$ – линейно независимые решения задачи (5.41), (5.42), где κ_0 определяется формулой (5.40). Ясно, что решение уравнения (5.15) удовлетворяет (5.41), (5.42). Согласно Лемме 5.3 уравнение (5.15) имеет ровно $n_0 = n(n+1)/2$ линейно независимых решений. Следовательно, в качестве первых n_0 решений задачи (5.41), (5.42), можем взять линейно независимые решения уравнения (5.15). Имеем

$$\sum_{k=1}^{2n} \varphi_{kp}(x + \lambda_k y) = 0, \quad x + iy \in D, \quad p = 1, ..., n_0. \tag{5.43}$$

Подставляя общее решение задачи (5.41), (5.42) в (5.18) и используя (5.43), получим

$$u(z) = \sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k u_k(z), \tag{5.44}$$

где

$$u_k(z) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_{jk}(x + \lambda_j y), \quad k = n_0 + 1, ..., \kappa_0,$$

а c_k – произвольные постоянные. Предположим, что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k u_k(z) \equiv 0, \quad z \in D.$$

Тогда вектор-функция

$$\sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k \big(\varphi_{1k}(x + \lambda_1 y), ..., \varphi_{2n,k}(x + \lambda_{2n} y)\big)$$

является решением уравнения (5.15). Поэтому

$$\sum_{k=n_0+1}^{\kappa_0} c_k \big(\varphi_{1k}(x+\lambda_1 y), ..., \varphi_{2n,k}(x+\lambda_{2n} y)\big) = \sum_{k=1}^{n_0} c_k \big(\varphi_{1k}(x+\lambda_1 y), ..., \varphi_{2n,k}(x+\lambda_{2n} y)\big), \tag{5.45}$$

где $c_1, ..., c_{\kappa_0}$ – некоторые постоянные. С другой стороны, поскольку вектор-функции $(\varphi_{1k}, ..., \varphi_{2n,k})$, $k = 1, ..., \kappa_0$ линейно независимы, то из (5.45) вытекает $c_k = 0$, $k = 1, ..., \kappa_0$. Поэтому функции $u_k(z)$, $k = n_0+1, ..., \kappa_0$ линейно независимы. Учитывая (5.44) заключаем, что $\kappa_0' = \kappa_0 - n_0$, где κ_0' – число линейно независимых решений однородной задачи (5.1), (5.2). Из Леммы 5.3 и (5.40) получим

$$\kappa_0' = \sum_{l=1}^{\infty}(2n - r_l) - \frac{n(n-1)}{2}. \tag{5.46}$$

Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема 5.1. *Неоднородная задача (5.1) – (5.2) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система алгебраических уравнений (5.34) – (5.36). Число κ_0' линейно независимых решений однородной задачи (5.1) – (5.2) определяется формулой (5.46).*

Из фредгольмовости задачи (5.1) – (5.2) вытекают следующие утверждения.

Следствие 5.1. *Для любых $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ задача (5.1) – (5.2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{l=1}^{\infty}(2n - r_l) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{5.47}$$

Следствие 5.2. *Если выполнено условие (5.47), то неоднородная система (5.34) – (5.36) всегда разрешима для любых b_{kl} из (5.33).*

Если коэффициенты уравнения (5.1) действительны, то задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение (см. [10]). Поэтому в этом случае, система (5.34) – (5.36) также разрешима для любых b_{kl} из (5.33).

Замечание 5.1. Так как $g_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – функции специального вида и правые части системы (5.34), (5.35) определяются по формуле (5.33), то для некоторых номеров $l = l_1, ..., l_m$ детерминант матрицы B_l равен нулю. Однако, для таких правых частей система (5.34), (5.35) всегда разрешима.

Замечание 5.2. Если задача (5.1) – (5.2) имеет единственное решение, то для ее решения достаточно найти одно решение системы (5.34) – (5.36).

Abstract. The paper considers the properly elliptic equations in multiply connected domains. An effective solution of Dirichlet problem is proposed by reduction to Fredholm integral equation of the second kind. Conditions ensuring unique solvability are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1995.
2. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
3. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
4. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Гостехиздат, Москва, 1945.
5. Н. П. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, Наука, Москва, 1959.
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
7. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений и Некоторые Краевые Задачи, Наука, Москва, 1970.
8. Г. С. Литвинчук, Краевые Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения со Сдвигом, Наука, Москва, 1977.
9. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
10. К. Морен, Методы Гильбертова Пространства, Москва, Мир, 1965.
11. А. О. Бабаян, "О единственной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.
12. Е. А. Буряченко, "К вопросу о нарушении единственности решения задачи Дирихле для уравнения с частными производными четвертого порядка", Труды ИПММ НАН Украины, том 4, стр. 4 – 15, 1999.
13. Е. А. Буряченко, "О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях", Труды ИПММ НАН Украины, том 10, стр. 44 – 49, 2000.

Поступила 21 марта 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 6, 2002, 41–70

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. Краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений в многосвязных областях сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Получено общее решение однородной задачи, и вычисляется индекс задачи для неоднородного случая. Доказана фредгольмовость задачи для 2-связных областей.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья дополняет предыдущую статью [7] рассмотрением случая неправильно эллиптического уравнения. Задача поставлена для $(m+1)$–связных областей D в комплексной плоскости, содержащих начало координат и ограниченных достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Как и в [7], Γ_0 состоит из всех остальных контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, и пусть $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_k$. Положительное направление на Γ оставляет область слева. Пусть L_j, $j = 1, ..., n$ суть дифференциальные операторы первого порядка

$$L_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., n, \tag{0.1}$$

где λ_j и a_j – постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., n, \tag{0.2}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., n \tag{0.3}$$

(n необязательно чётное, как было в [7], и теперь все λ_j принадлежат верхней полуплоскости).

Рассмотрим следующую краевую задачу : найти в D решение $u(z)$ уравнения

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \tag{0.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\operatorname{Re}\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{0.5}$$

где $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная в направлении внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – достаточно гладкие функции, определенные на Γ. Задача (0.4) – (0.5) для $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**.

Через $H(\overline{D})$ обозначим класс функций $u(z)$, удовлетворяющих условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Аналогично, $H(\Gamma)$ является классом Гёльдера на Γ. Ищем решения задачи (0.4) – (0.5) в классе функций, которые n-раз непрерывно дифференцируемы в D, и $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{D}$.

Предположим, что функции $\dfrac{d^j f_k(z)}{ds^j}$, $j = 0, 1, ..., n-1-k$ (дифференцирование по длине дуги s) принадлежат классу $H(\Gamma)$ (все функции и постоянные предполагаются комплекснозначными, пока неоговорено обратное). Из (0.2) следует, что уравнение (0.4) является неправильно эллиптическим порядка n. Задача (0.4) – (0.5) в полуплоскости при $\operatorname{Re} a_j = 0$, $j = 1, ..., n$ рассмотрена в [1], где доказано существование и единственность решения некоторых классах функций. Для $a_j = 0$, $j = 1, ..., n$ и для конечных односвязных областей эта задача в [2] и [3] сводится к сингулярному интегральному уравнению нормального типа. Как указано в [3] – [5], для $a_j \neq 0$, $j = 1, ..., n$ и многосвязных областей существуют сложности, связанные с представлением общего решения уравнения (0.4) через аналитические функции и произвольные постоянные.

Настоящая статья сводит задачу (0.4) – (0.5) к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Вычисляется индекс задачи (0.4) – (0.5) в неоднородном случае, и получено общее решение однородной задачи (0.4) – (0.5). Для двусвязной области доказано, что задача (0.4) – (0.5) фредгольмова.

В §1 исследуется общее решение неправильно эллиптических уравнений в многосвязных областях. В §§2, 3 задача (0.4), (0.5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма. В §4 исследуются краевые задачи для более общих неправильно эллиптических уравнений.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Для простоты, в этом параграфе рассмотрим случай двусвязной области $r < |z| < R$, а в конце параграфа сформулируем полученные результаты для многосвязных областей.

Пусть D – кольцо $r < |z| < R$, D_0 – окружность $|z| < R$, а $D_1 = D\backslash$ – отрезок $r < x < R$, $y = 0$. Сначала рассмотрим в D_1 дифференциальное уравнение

$$\varphi^{(n)}(z) + a_1(z)\varphi^{(n-1)}(z) + \cdots + a_n(z)\varphi(z) = f(z), \tag{1.1}$$

где $a_1(z), ..., a_n(z)$ – аналитические функции в D_0, $f(z)$ – аналитическая функция в D, а $\varphi(z)$ – искомая функция, определенная на D_1.

Лемма 1.1. *Любое решение уравнения (1.1) можно представить в виде*

$$\varphi(z) = \omega(z) \ln z + \psi(z), \tag{1.2}$$

где $\omega(z)$ – некоторое решение однородного уравнения (1.1) (при $f(z) \equiv 0$), а $\psi(z)$ – некоторая аналитическая функция в D. В (1.2) $\ln z$ означает некоторую непрерывную в D_1 ветвь логарифма.

Доказательство. Начнем с частного случая

$$\varphi_0'(z) = f_0(z), \quad z \in D_1, \tag{1.3}$$

и обозначим

$$b = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f_0(z)\, dz, \quad \psi_0(z) = \int_{z_0}^{z} \left(f_0(\zeta) - \frac{b}{\zeta}\right) d\zeta, \tag{1.4}$$

где z_0 – фиксированная точка из D_1. Из (1.4) следует, что $\psi_0(z)$ аналитична в D. Интегрируя обе части (1.3), получим

$$\varphi_0(z) = b \ln z + \psi_0(z) + c, \tag{1.5}$$

где c – произвольная постоянная. Решая (1.1) методом вариации постоянных (см. [6], стр. 152) и используя (1.5), получим (1.2). Лемма 1.1 доказана.

Замечание 1.1. Пусть λ – комплексное число, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, и пусть G – некоторая область. Обозначим через $(G)_\lambda$ образ области G при отображении

$$z = x + iy \in G \longmapsto \zeta = x + \lambda y \in (G)_\lambda.$$

Утверждение Леммы 1.1 остается справедливым при замене $(D)_\lambda$, $(D_0)_\lambda$ и $(D_1)_\lambda$ на D, D_0 и D_1, соответственно.

Пусть L_j – дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} + a_j I, \quad j = 1, ..., p,$$

где I – единичный оператор, λ_j и a_j – комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., p_0, \quad \operatorname{Im}\lambda_j < 0, \quad j = p_0 + 1, ..., p, \tag{1.6}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., p.$$

Чтобы построить общее решение уравнения

$$L_1 \cdots L_p u(z) = 0, \quad z = x + iy \in D \tag{1.7}$$

в многосвязной области, используем Лемму 1.1. Пусть $u(x, y)$ – решение уравнения (1.7) в двусвязной области D. Ясно, что $u(x, y)$ удовлетворяет (1.7) в односвязной области D_1. Согласно Лемме 2.1 из [7] имеем

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\varphi_j(x + \lambda_j y), \quad x + iy \in D_1, \tag{1.8}$$

где φ_j, $j = 1, ..., p$ – некоторые аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_j}$. Положим

$$a_{kj} = a_j - a_k, \quad b_{kj} = \frac{a_{kj}}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad j, k = 1, ..., p,$$

$$N_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} L_j, \quad M_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \left(\frac{d}{d\zeta} + b_{kj}I\right), \quad k = 1, ..., p.$$

Применяя дифференциальный оператор N_k к обеим частям (1.8), получим

$$M_k\varphi_k(\zeta) = d_k e^{a_k y} N_k u(x, y), \quad (x, y) \in D_1, \quad \zeta = x + \lambda_k y \in (D_1)_{\lambda_k}, \quad k = 1, ..., p,$$

где d_k – некоторые постоянные. Так как $u(x, y)$ удовлетворяет (1.7) в D, то функция $N_k u(x, y)$ непрерывна в D. С другой стороны, функция $M_k\varphi_k(\zeta)$ аналитична в области $(D_1)_{\lambda_k}$, поэтому она непрерывна в $(D)_{\lambda_k}$. Следовательно ([9], стр. 93)

$$M_k\varphi_k(\zeta) = f_k(\zeta), \quad \zeta \in (D_1)_{\lambda_k}, \quad k = 1, ..., p, \tag{1.9}$$

где f_k, $k = 1, ..., p$ – некоторые аналитические функции в $(D)_{\lambda_k}$. Заметим, что D_1 и $(D_1)_{\lambda_k}$ многосвязны, а D и $(D)_{\lambda_k}$ являются двусвязными.

Рассмотрим однородную версию уравнения (1.9) :

$$M_k\omega_k(\zeta) = 0, \quad k = 1, ..., p, \tag{1.10}$$

где ω_k – искомая аналитическая функция во всей комплексной плоскости. Согласно Лемме 1.1, любое решение уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\varphi_k(\zeta) = \omega_k(\zeta)\ln\zeta + \Phi_k(\zeta), \quad \zeta \in (D_1)_{\lambda_k}, \quad k = 1, ..., p, \tag{1.11}$$

где $\omega_k(\zeta)$ – некоторое решение однородного уравнения (1.10), а $\Phi(\zeta)$ – некоторая аналитическая функция в $(D)_{\lambda_k}$. Подставляя $\varphi_k(\zeta)$ из (1.11) в (1.8), получим

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\left[\Phi_j(x+\lambda_j y) + \omega_j(x+\lambda_j y)\ln(x+\lambda_j y)\right], \quad x + iy \in D_1. \tag{1.12}$$

Обозначим через $u^+_{kj}(x)$ и $u^-_{kj}(x)$ предельные значения функции $\dfrac{\partial^{k+j}u(x,y)}{\partial x^j \partial y^k}$ при $y \to \pm 0$. Поскольку решение $u(x,y)$ уравнения (1.5) бесконечно дифференцируемо в D, то имеем

$$u^+_{k0}(x) = u^-_{k0}(x), \quad r < x < R, \quad k = 0, 1, ..., p-2. \tag{1.13}$$

Подставляя $u(z)$ из (1.12) в (1.13), получим для $k = 0, 1, ..., p-2$

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=1}^{p} \frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda_j^l(-a_j)^{k-l} sign(\operatorname{Im}\lambda_j)\omega_j^{(l)}(x) = 0, \quad r < x < R. \tag{1.14}$$

Выше было доказано, что (1.14) является необходимым условием того, чтобы функция вида (1.12) была бы бесконечно дифференцируема в области D. Теперь докажем, что условие (1.14) является также достаточным. Предположим, что имеет место (1.14). Ясно, что функция (1.12) удовлетворяет (1.13). Из (1.12) следует, что $u^+_{kj}(x)$ и $u^-_{kj}(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $r < x < R$ и

$$u^+_{kj}(x) = \frac{d^j u^+_{k0}(x)}{dx^j}, \quad u^-_{kj}(x) = \frac{d^j u^-_{k0}(x)}{dx^j}, \quad r < x < R, \quad k, j = 0, 1, ... \tag{1.15}$$

В силу (1.13) и (1.15) имеем

$$u_{kj}^{+}(x) = u_{kj}^{-}(x), \quad r < x < R, \quad j = 0, 1, ..., \quad k = 0, 1, ..., p-2. \tag{1.16}$$

Рассмотрим функцию $v(x,y) = L_1...L_{p-1}u(x,y)$, где $u(x,y)$ функция (1.12). Учитывая, что ω_p является решением уравнения (1.10) при $k = p$, заключаем, что $v(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области D. Из (1.16) следует, что

$$u_{p-1,j}^{+}(x) = u_{p-1,j}^{-}(x), \quad r < x < R, \quad j = 0, 1, ... \tag{1.17}$$

В силу (1.12)

$$L_1...L_p u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_1. \tag{1.18}$$

Используя (1.16) – (1.18), получим $u_{kj}^{+}(x) = u_{kj}^{-}(x)$ для $r < x < R$ и любых целых k и j. Следовательно, условия (1.14) необходимы и достаточны, чтобы функция (1.12) была бесконечно дифференцируема в области D. Отметим, что если $u(x,y)$ бесконечно дифференцируема в D, и удовлетворяет (1.18) в D_1, то $u(x,y)$ необходимо удовлетворяет (1.18) в области D. Таким образом, доказали следующий результат.

Лемма 1.2. *Общее решение уравнения (1.7) в области D определяется формулой (1.12), где $\omega_1, ..., \omega_p$ – произвольное решение системы (1.10), (1.14), а $\Phi_1, ..., \Phi_p$ – произвольные аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_1}, ..., (D_1)_{\lambda_p}$, соответственно.*

Рассмотрим функцию

$$u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\Phi_j(x + \lambda_j y),$$

где Φ_j, $j = 1, ..., p$ из (1.12). Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ – фиксированная точка из D.

Лемма 1.3. *Функцию $u_0(x,y)$ можно представить в виде*

$$u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\psi_j(x + \lambda_j y), \quad x + iy \in D_1,$$

где ψ_j, $j = 1, ..., p$ – аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_j}$, удовлетворяющие условиям

$$\psi_j^{(k)}(x_0 + \lambda_j y_0) = 0, \quad k = 1, ..., j-2, \quad j = 2, ..., p. \tag{1.19}$$

Доказательство. следует из Леммы 2.1 в [7].

Пусть

$$\{\omega_{l1}(\zeta), ..., \omega_{lp}(\zeta)\}, \quad l = 1, ..., \nu \tag{1.20}$$

является полной системой линейно независимых решений задачи (1.10), (1.14). Обозначим

$$u_l(x, y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \omega_{lj}(x + \lambda_j y) \ln(x + \lambda_j y).$$

Подставляя общее решение задачи (1.10), (1.14) в (1.12) и учитывая Лемму 1.3, получим следующий результат.

Теорема 1.1. *Общее решение уравнения (1.7) определяется формулой*

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{\nu} c_p u_p(x, y), \quad x + iy \in D_1, \tag{1.21}$$

где $c_1, ..., c_\nu$ – произвольные постоянные, а $\psi_1, ..., \psi_p$ – произвольные аналитические функции в $(D_1)_{\lambda_1}, ..., (D_1)_{\lambda_p}$, соответственно, удовлетворяющие (1.19).

Теперь докажем единственность представления (1.21). Пусть в (1.21) $u(x, y) \equiv 0$. Применяя оператор $L_1 ... L_{p-1}$ к обеим частям (1.21) заключаем, что функция

$$\varphi_p(\zeta) = \psi_p(\zeta) + \sum_{l=1}^{\nu} c_l \omega_{lp}(\zeta) \ln \zeta, \quad \zeta \in (D)_{\lambda_p} \tag{1.22}$$

является решением уравнения (1.10) при $k = p$. Поэтому $\varphi_p(\zeta)$ аналитична во всей комплексной плоскости. Из (1.22) следует, что функция $\sum\limits_{l=1}^{\nu} c_l \omega_{lp}(\zeta) \ln \zeta$ аналитична в области $(D)_{\lambda_p}$. Отсюда вытекает, что $\sum\limits_{l=1}^{\nu} c_l \omega_{lp}(\zeta) \equiv 0$. Аналогично

$$\sum_{l=1}^{\nu} c_l \omega_{lk}(\zeta) \equiv 0, \quad k = 1, ..., p. \tag{1.23}$$

Так как вектор-функции (1.20) линейно независимы, то из (1.23) получим $c_l = 0$, $l = 1, ..., \nu$. Следовательно

$$\sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y} \psi_j(x + \lambda_j y) = 0, \quad x + iy \in D. \tag{1.24}$$

Из Леммы 2.1 работы [7] и (1.19), (1.24) получаем $\psi_j(x + \lambda_j y) = 0$. Этим завершается доказательство единственности представления (1.21).

Следствие 1.1. Функции $u_1, ..., u_\nu$ из (1.21) линейно независимы.

Теорема 1.2. *Число ν линейно независимых решений задачи (1.10), (1.14) определяется формулой $\nu = p(p-1)/2$.*

Доказательство. следует из Леммы 2.1 работы [7] и Теоремы 1.1.

Теперь укажем простой метод решения задачи (1.10), (1.14). Пусть $\delta_{k1}(\zeta), ..., \delta_{k,p-1}(\zeta)$ – линейно независимые решения уравнения (1.10) при фиксированном $k = 1, ..., p$. Отметим, что $\delta_{kj}(\zeta) = e^{-\lambda_{kj}\zeta} \zeta^{\nu_{kj}}$, $k = 1, ..., p$, $j = 1, ..., p-1$, где λ_{kj} – одно из чисел b_{kl} ($l = 1, ..., p$, $l \neq k$), а ν_{kj} – некоторое целое число. Общее решение уравнения (1.10) определяется формулой

$$\omega_k(\zeta) = \sum_{j=1}^{p-1} c_{kj} \delta_{kj}(\zeta), \quad k = 1, ..., p, \tag{1.25}$$

где c_{kj} – произвольные постоянные.

Пусть $\mu_1, ..., \mu_q$ – нерекуррентная последовательность чисел b_{kj} ($k, j = 1, ..., p$, $j \neq k$). Подставляя $\omega_j(\zeta)$ из (1.25) в (1.14) и приравнивая нулю коэффициенты соответствующих членов $x^j e^{\mu_k x}$, получим

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p-1} a_{njk} c_{jk} = 0, \quad n = 1, ..., n_0, \tag{1.26}$$

где n_0 – некоторое целое число, а a_{njk} – некоторые постоянные.

Согласно Теореме 1.2 система уравнений (1.26) имеет ровно $p(p-1)/2$ линейно независимых решений. Поэтому ранг основной матрицы системы (1.26) равен $p(p-1)/2$. Подставляя линейно независимые решения алгебраической системы

(1.26) в (1.25), получим линейно независимые решения системы (1.10), (1.14). Таким образом, вопрос сводится к решению алгебраической системы (1.26).

Пусть теперь D – $(m+1)$–связная область (см. Введение). Пусть $x_\alpha + iy_\alpha$, $\alpha = 1, ..., m$ – фиксированные точки внутри соответствующих контуров Γ_α. Положим

$$u_{l\alpha}(x,y) = \sum_{j=1}^{p} e^{-a_j y}\omega_{lj}(x+\lambda_j y)\ln(x - x_\alpha + \lambda_j(y-y_\alpha)), \quad p = 1, ..., \nu, \quad \alpha = 1, ..., m,$$

где $\{\omega_{p1}(\zeta), ..., \omega_{pp}(\zeta)\}$ из (1.20), $\nu = p(p-1)/2$.

Теорема 1.3. *Общее решение уравнения (1.7) в $(m+1)$–связной области D представляется в виде*

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x+\lambda_j y) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu} c_{l\alpha}u_{l\alpha}(x,y), \quad x+iy \in D,$$

где $c_{l\alpha}$ – произвольные постоянные, а $\psi_1, ..., \psi_p$ – произвольные аналитические функции в $(D)_{\lambda_1}, ..., (D)_{\lambda_p}$, соответственно, удовлетворяющие (1.19). Функции ψ_j и постоянные $c_{l\alpha}$ определяются через $u(x,y)$ единственным образом.

Доказательство. аналогично доказательствам Теорем 1.1 и 1.2.

§2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{2.1}$$

где L_j – дифференциальные операторы вида

$$L_j u = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ..., n,$$

λ_j и a_j суть постоянные, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$, $j = 1, ..., n$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$. Зададим граничные условия

$$\operatorname{Re}\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.2}$$

где $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – достаточно гладкие функции, определенные на Γ.
Пусть область D и контуры Γ_k, $k = 0, 1, ..., m$ – те же, что и во Введении, а $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_k$. Обозначим через D_0^+ конечную, а через $D_1^-, ..., D_m^-$ – бесконечные области, ограниченные контурами Γ_0 и $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно.
Основная цель данного параграфа – свести задачу (2.1), (2.2) к интегральному уравнению Фредгольма. Задача (2.1), (2.2) при $f_k(z) \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется однородной.
Для двусвязных областей ($m = 1$) общее решение уравнения (2.1) определяется формулой (1.21) при $p = n$. Положим

$$\alpha_j = \frac{\operatorname{Im} a_j}{\operatorname{Im} \lambda_j}, \quad \beta_j = \frac{\operatorname{Re} \lambda_j \operatorname{Im} a_j - \operatorname{Re} a_j \operatorname{Im} \lambda_j}{\operatorname{Im} \lambda_j}, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Заменив в (1.21) функцию $\varphi_j(\zeta)$ на $\varphi_j(\zeta)e^{\alpha_j\zeta}$, при $p = n$ получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j x + \beta_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=1}^{\nu} c_k u_k(z), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.4}$$

где φ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, причём

$$\varphi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., j-2, \quad j = 2, ..., n. \tag{2.5}$$

Сначала рассмотрим задачу (2.1), (2.2) в односвязной области D ($m = 0$). Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j x + \beta_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.6}$$

где функции φ_j удовлетворяют (2.5). Из (2.5) вытекает представление

$$\varphi_j(x + \lambda_j y) = \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{k=j-1}^{n-2} c_{jk}(x + \lambda_j y)^k, \quad j = 1, ..., n, \tag{2.7}$$

где c_{jk} – произвольные комплексные постоянные и ψ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_j}, удовлетворяющие условию

$$\psi_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.8}$$

Положим $\psi_j^{(n-1)}(\zeta) = \phi_j(\zeta)$. В силу (2.8) имеем

$$\psi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^{x+\lambda_j y}(x+\lambda_j y-\zeta)^{n-2}\phi_j(\zeta)\,d\zeta, \quad j=1,...,n. \tag{2.9}$$

Представим функции ϕ_j в виде (см. [8], стр. 254)

$$\phi_j(x+\lambda_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu_j(\xi+i\eta)}{\xi+\lambda_j\eta-x-\lambda_j y}\,d(\xi+\lambda_j\eta)+id_j, \quad j=1,...,n, \tag{2.10}$$

где $\mu_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, d_j – действительные постоянные. Функции μ_j и постоянные d_j определяются через ϕ_j единственным образом.

Заменим переменные в (2.10), полагая $\nu_j(t) = \mu_j(t)e^{\alpha_j\xi+\beta_j\eta}$, $t=\xi+i\eta$, $j=1,...,n$. Представления (2.7) и (2.10) содержат n^2 произвольных постоянных, которые обозначим через c_j, $j=1,...,n^2$. Подставляя (2.6) в (2.2), ввиду (2.7) – (2.10), при $t_0\in\Gamma$ получаем

$$\mathrm{Re}\left[A\nu(t_0)+\frac{A}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\nu(t)}{t-t_0}\,dt\right]+\int_\Gamma K_1(t_0,t)\nu(t)\,ds+\sum_{j=1}^{n^2}c_jb_j(t_0)=f(t_0), \tag{2.11}$$

где $\nu(t) = (\nu_1(t),...,\nu_n(t))$ есть n-мерная действительная вектор-функция, c_j – действительные постоянные, $b_j(t)$, $j=1,...,n^2$ вполне определяются n-мерными действительнозначными вектор-функциями из класса $H(\Gamma)$, $f(t) = (f_0(t),...,f_{n-1}(t))$ есть n-мерная вектор-функция, A есть матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix},$$

и $K_1(t_0,t)$ – $(n\times n)$-матрица, допускающая представление

$$K_1(t_0,t)=\frac{\overline{K}(t_0,t)}{|t-t_0|^\rho},\quad 0\le\rho=const<1. \tag{2.11'}$$

а $\overline{K}(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Из уравнения (2.11) определим $\nu(t)$ и постоянные c_j, $j = 1, ..., n^2$. Рассмотрим оператор

$$Mg = \operatorname{Re}\left[\frac{B}{2}g(t_0) + \frac{B}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t_0)}{t - t_0}\,dt + \left(E_n - \frac{B}{l_0}\right)\int_\Gamma g(t)\,ds\right],$$

где B – матрица, обратная к A, E_n – n-мерная единичная матрица, l_0 – длина контура Γ, и $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))$.

Согласно Лемме 3.5 из [7], $\nu(t)$ можно единственным образом представить в виде $\nu(t) = Mg(t)$. Подставляя $\nu = Mg$ в (2.11) и применяя формулу умножения сингулярных операторов ([8], стр. 508), получим

$$g(t_0) + \int_\Gamma K(t_0, t)g(t)\,ds + \sum_{j=1}^{n^2} c_j b_j(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2.12}$$

где $K(t_0, t)$ – некоторая $(n \times n)$-матрица с действительными элементами, допускающие представление (2.11').

Таким образом, задача (2.1), (2.2) сводится к интегральному уравнению (2.12) относительно n-мерного действительнозначного вектора $g(t)$ и постоянных c_j, $j = 1, ..., n^2$. Это уравнение аналогично (3.22) из [7]. Поскольку все использованные представления единственны, то числа линейно независимых решений однородной задачи (2.1), (2.2) и однородного уравнение (2.12) (при $f \equiv 0$) совпадают. Согласно Леммам 3.7 и 3.8 из [7], индекс задачи (2.1), (2.2) в односвязной области D равен n^2.

Пусть теперь D – двусвязная область, т.е. $m = 1$. Граница Γ области D состоит из двух гладких замкнутых контуров Γ_0 и Γ_1. Функции φ_j из (2.4) представим в виде (2.7) с функциями ψ_j, удовлетворяющими (2.8). Согласно Лемме 3.4 из [7], при $j = 1, ..., n$ имеем

$$\psi_j(x + \lambda_j y) = \psi_{j0}(x + \lambda_j y) + \psi_{j1}(x + \lambda_j y) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\psi_{j1}^{(k)}(0)}{k!}(x + \lambda_j y)^k, \tag{2.13}$$

где ψ_{j0} – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$, а ψ_{j1}, $j = 1, ..., n$ аналитичны в $D_1^-(\lambda)$ и удовлетворяют условиям

$$\psi_{j0}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \quad \psi_{j1}(\infty) = 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.14}$$

Представления (2.4) при $m = 1$ и (2.7) содержат в совокупности $n(n-1)$ произвольных комплексных постоянных, которые обозначим через α_{jk}, $j = 1,...,n$, $k = 1,...,n-1$. Из (2.14) и Леммы 3.3 из [7] следует, что

$$\psi_{j1}^{(n-1)}(x+\lambda_j y) = \omega_j(x+\lambda_j y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_{jk}}{(x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1)^k}, \tag{2.15}$$

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1)^{k-1}\omega_j(\xi+\lambda_j\eta)\, d(\xi+\lambda_j\eta), \tag{2.16}$$

где $x_1 + iy_1$ – фиксированная точка внутри Γ_1, а ω_j аналитичны в $D_1^-(\lambda_j)$ и удовлетворяют условию $\omega_j(\infty) = 0$, $j = 1,...,n$.
Для $z = x + iy \in D_1^-$ и $t = \xi + i\eta \in \Gamma_1$ положим

$$\gamma_{nj}(z,t) = \frac{1}{(n-2)!}(x+\lambda_j y - \xi - \lambda_j\eta)^{n-2}\ln\left(1 - \frac{\xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1}{x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1}\right),$$

$$\delta_{nj}(z,t) = h_n(x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1, \xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1), \quad n \geq 3,$$

$$\sigma_{nj}(z,t) = \beta_n(x+\lambda_j y - x_1 - \lambda_j y_1, \xi+\lambda_j\eta - x_1 - \lambda_j y_1), \quad n \geq 3,$$

$$\delta_{2j}(z,t) \equiv 0, \quad \sigma_{2j}(z,t) \equiv 0, \quad j = 1,...,n,$$

где

$$h_n(\zeta,\tau) = \frac{1}{(n-2)!}(\zeta-\tau)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\tau^k}{\zeta^k},$$

$$\beta_n(\zeta,\tau) = \sum_{k=n-1}^{2n-4}\frac{(-1)^n(k+1-n)!P_k(\tau)}{(k-1)!\zeta^{k+2-n}}, \quad n \geq 3.$$

$P_k(\tau)$ суть полиномы из (3.26) в [7]. В [7] доказано, что

$$\frac{d^{n-2}h_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}} = \frac{d^{n-2}\beta_n(\zeta,\tau)}{d\zeta^{n-2}}, \quad \zeta \neq 0.$$

Поэтому, в силу (2.15), (2.16) и Лемм 3.9, 3.10 из [7] имеем

$$\psi_{j1}(x+\lambda_j y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}[\gamma_{nj}(z,t) - \delta_{nj}(z,t) + \sigma_{nj}(z,t)]\omega_j(\xi+\lambda_j\eta)\, d(\xi+\lambda_j\eta). \tag{2.17}$$

Обозначим $\phi_j = \psi_{j0}^{(n-1)}$, $j = 1, ..., n$. Ясно, что ϕ_j – аналитические функции в $D_0^+(\lambda_j)$. Из (2.14) имеем

$$\psi_{j0}(x + \lambda_j y) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{x+\lambda_j y} (x + \lambda_j y - \zeta)^{n-2} \phi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.18}$$

Представим функции ϕ_j и ω_j в виде ([8], стр. 254)

$$\phi_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu_j(\xi + i\eta)}{\xi + \lambda_j \eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi + \lambda_j \eta) + i d_j, \quad x + iy \in D_0^+, \tag{2.19}$$

$$\omega_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\mu_j(\xi + i\eta)}{\xi + \lambda_j \eta - x - \lambda_j y}\, d(\xi + \lambda_j \eta), \quad x + iy \in D_1^-, \tag{2.20}$$

где $\mu_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, d_j – действительные постоянные, $j = 1, ..., n$. Функции $\mu_j(t)$, $t \in \Gamma_0$ и постоянные d_j определяются единственным образом через ϕ_j, а функции $\mu_j(t)$, $t \in \Gamma_1$ определяются через ϕ_j с точностью до постоянного действительного слагаемого. Предположим, что

$$\int_{\Gamma_1} \mu_j(t)\, dt = d_j, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.21}$$

Сделаем замену переменных :

$$\nu_j(t) = \mu_j(t) e^{\alpha_j \xi + \beta_j \eta}, \quad t = \xi + i\eta, \tag{2.22}$$

$$\nu_j(t_0) = \operatorname{Re}\left[\frac{B}{2} g(t_0) + \frac{B}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t - t_0}\, dt + \left(E_n - \frac{B}{l_0}\right) \int_{\Gamma_0} g(t)\, ds\right] +$$

$$+ \ln|t_0 - x_1 + iy_1| \int_{\Gamma_1} g(t)\, ds, \tag{2.23}$$

где B – матрица, обратная к A, l_0 – длина контура Γ_0, а $g(t)$ – n-мерный действительный вектор из класса $H(\Gamma)$. Подставляя (2.4) (при $m = 1$) в (2.2) и используя (2.7), (2.13), (2.15), (2.17) - (2.23), аналогично (2.12) получим

$$g(t_0) + \int_\Gamma K_1(t_0, t) g(t)\, ds = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{2.24}$$

где $K_1(t_0, t)$ – некоторая $(n \times n)$-матрица с элементами, допускающими представление (2.11'). Здесь также число линейно независимых решений однородной задачи (2.1), (2.2) и однородного уравнения (2.24) (при $f \equiv 0$) совпадают. Итак, для $m = 1$ доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. *Задача (2.1) – (2.2) фредгольмова в двусвязной области и сводится к интегральному уравнению вида (2.24) с ядром, элементы которого имеют представление (2.11').*

Аналогично, в случае $(m+1)$-связной области задачу (2.1) – (2.2) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, а ее индекс κ определяется формулой

$$\kappa = (1-m)n^2. \tag{2.25}$$

Пусть теперь граничные условия имеют вид

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} + \sum_{j+l\le n-2} A_{kjl}(z)\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial y^j \partial x^l}\right] = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.26}$$

Аналогично, (2.1), (2.26) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма, и доказать, что его индекс равен $(1-m)n^2$. В §3 покажем, что граничные условия

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.27}$$

где $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная по внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$, всегда можно свести к граничным условиям вида (2.26). Следовательно, индекс задачи (2.1), (2.27) также равен $(1-m)n^2$.

§3. ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть D – $(m+1)$-связная область (см. Введение). Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-k}} = 0, \quad z \in D. \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.2}$$

где A_k – комплексные постоянные, $\dfrac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производные по внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ – заданные на Γ достаточно гладкие действительные функции. Задача (3.1), (3.2) при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$ называется **однородной**. Предположим, что корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения

$$A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_n\lambda^n = 0$$

удовлетворяют условиям $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, ..., n$. Ниже покажем, что задача (3.1), (3.2) является частным случаем задачи (2.1), (2.27).

Задача (3.1), (3.2) исследована в [1] и [2] в односвязных областях, где она сводится к сингулярному интегральному уравнению нормального типа. В данной работе применяется другой подход, который позволяет улучшить результаты работ [1] и [2]. Однородная задача (3.1), (3.2) сводится к системе алгебраических уравнений. Условия разрешимости и частное решение соответствующей неоднородной задачи выписываются при помощи решения некоторого однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Теорема 3.1. *Число κ_0 линейно независимых решений однородной задачи (3.1), (3.2) равно n^2, число κ_0' линейно независимых условий разрешимости соответствующей неоднородной задачи равно mn^2. Общее решение однородной задачи (3.1), (3.2) имеет вид*

$$u(x, y) = iP(x, y), \tag{3.3}$$

где $P(x, y)$ – произвольное действительное решение уравнения (3.1) в классе полиномов порядка не выше $2n-2$.

Доказательство. Для $m = 0$ доказательство можно найти в [1], стр. 194. Поэтому докажем Теорему 3.1 для $m \geq 1$. С этой целью рассмотрим дифференциальный оператор

$$Mv(z) = \frac{dv(z)}{ds} + v(z), \quad z \in \Gamma,$$

где s – дуговая абсцисса контура Γ в точке z. Рассмотрим уравнение

$$Mv(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{3.4}$$

где $g(z)$ – непрерывная функция, а неизвестная функция $v(z)$ является непрерывно дифференцируемой действительной функцией на Γ. Уравнение (3.4) имеет единственное решение. Применив оператор M^{n-1-k} к (3.2), получим

$$\operatorname{Re}\left[M^{n-1-k}\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k}\right] = g_k(z) = M^{n-1-k}f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.5}$$

Ясно, что

$$\frac{\partial u(z)}{\partial s} = \frac{\partial u(z)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(z)}{\partial y}\sin\alpha, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = -\frac{\partial u(z)}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial u(z)}{\partial y}\cos\alpha, \quad z = x + iy. \tag{3.7}$$

где α – угол между x-осью и касательной к Γ в точке $z \in \Gamma$. В силу (3.6) и (3.7), граничные условия (3.5) для $k = 1, ..., n-1$ можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}(\alpha)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial x^j \partial y^{n-1-j}} + \sum_{j+l\le n-2} c_{kjl}(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial x^j \partial y^l} = g_k(z), \quad z \in \Gamma, \tag{3.8}$$

где постоянные $c_{kj}(\alpha)$ суть некоторые многочлены относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с действительными коэффициентами, а $c_{kjl}(z)$ – некоторые действительные функции из класса $H(\Gamma)$. Пусть $C(\alpha)$ – матрица с элементами $c_{kj}(\alpha)$, $j, k = 1, ..., n-1$, а $C^{-1}(\alpha)$ – обратная матрица к $C(\alpha)$. Существование матрицы $C^{-1}(\alpha)$ следует из Леммы 3.11 [7]. Умножая (3.8) на $C^{-1}(\alpha)$, получим

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial x^k \partial y^{n-1-k}} + \sum_{j+l\le n-1} d_{kjl}(z)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial x^j \partial y^l} = \mu_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

где $d_{kjl}(z)$ – некоторые действительные функции из класса $H(\Gamma)$, и

$$\mu(z) = C^{-1}(a)g(z), \quad \mu(z) = (\mu_0(z), ..., \mu_{n-1}(z), \quad g(z) = (g_0(z), ..., g_{n-1}(z).$$

Уравнение (3.1) можно записать в виде

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{3.9}$$

где

$$L_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x}, \quad z = x + iy, \quad j = 1, ..., n.$$

В §2 доказано, что индекс $\kappa = \kappa_0 - \kappa_0'$ задачи (3.2), (3.9) определяется формулой (2.25). Докажем теперь, что $\kappa_0 = n^2$. Действительно, пусть $u(z)$ является решением однородной задачи (3.2), (3.9) (при $f_k \equiv 0$, $k = 0, 1, ..., n-1$). В силу (3.9) имеем $\overline{L}_1 \cdots \overline{L}_n \overline{u} = 0$, где

$$\overline{L}_j u(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\lambda}_j \frac{\partial u}{\partial x}, \quad j = 1, ..., n.$$

Из (3.2) и (3.9) следует, что $w(z) = u(z) + \overline{u(z)}$ удовлетворяет условиям

$$L_1 \cdots L_n \overline{L}_1 \cdots \overline{L}_n w(z) = 0, \quad z \in D, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^k w(z)}{\partial N^k} = 0, \quad z \in \Gamma. \tag{3.11}$$

Применяя Лемму 3.6 из [7] к (3.10), (3.11), получим $w(z) = 0$. Следовательно,

$$u(z) = i\omega(z), \quad z \in D, \tag{3.12}$$

где $\omega(z)$ – действительное решение уравнения (3.1) в D. Так как $0 \in D$, то функция $\omega(z)$ также является действительным решением уравнения (3.1) в окрестности нуля. Как доказано в [1], стр. 214 – 220, такое решение является полиномом порядка не выше $2n-2$ относительно переменных x и y. С другой стороны, каждое решение вида (3.12) удовлетворяет (3.2). Следовательно, имеет место (3.3). Из (3.3) следует, что κ_0 не зависит от связанности области D. Поэтому в многосвязных областях также имеем $\kappa_0 = n^2$. Подставляя $\kappa_0 = n^2$ в (2.25) ($\kappa = \kappa_0 - \kappa_0'$), получим $\kappa_0' = mn^2$. Теорема 3.1 доказана.
Согласно (3.3), решение однородной задачи (3.1), (3.2) будем искать в виде

$$u(x,y) = iP_{n-1}(x,y) + i\sum_{l=n}^{2n-2}\sum_{j=0}^{l} a_{lj}x^j y^{l-j}, \tag{3.13}$$

где $P_{n-1}(x,y)$ – произвольный действительный полином порядка не выше $n-1$ относительно действительных переменных x и y, а a_{lj} – действительные постоянные. Подставляя $u(x,y)$ из (3.13) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при соответствующих членах $x^p y^q$, получим

$$\sum_{j=0}^{l} A_{lmj}a_{lj} = 0, \quad m = 1, ..., l-n+1, \quad l = n, ..., 2n-2, \tag{3.14}$$

где A_{lmj} – некоторые комплексные постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения (3.1). Систему уравнений (3.14) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{l} B_{lmj} a_{lj} = 0, \quad m = 1, ..., 2(l - n + 1), \quad l = n, ..., 2n - 2, \tag{3.15}$$

где $$B_{lmj} = \begin{cases} \operatorname{Re} A_{lmj}, & m = 1, ..., l - n + 1, \\ \operatorname{Im} A_{lmj}, & m = l - n + 2, ..., 2(l - n + 1). \end{cases}$$

Подставляя общее решение уравнения (3.15) в (3.13), получим общее решение однородной задачи (3.1), (3.2).

Пусть r_l – ранг основной матрицы системы (3.15) при фиксированном l, $n \leq l \leq 2n - 2$. Ясно, что $0 \leq r_l \leq 2(l - n + 1)$. Из (3.13) и (3.15) следует, что для однородной задачи (3.1), (3.2)

$$\kappa_0 = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{l=n}^{2n-2} (l + 1 - r_l). \tag{3.16}$$

С другой стороны, $\kappa_0 = n^2$. Так как $r_l \leq 2(l - n + 1)$, то имеем (3.16) при $\kappa_0 = n^2$ тогда и только тогда, когда $r_l = 2(l - n + 1)$. Это показывает, что все уравнения в (3.15) при фиксированном l, $n \leq l \leq 2n - 2$ линейно независимы. Таким образом, решение однородной задачи (3.1), (3.2) сводится к решению алгебраической системы (3.15) при $l = n, ..., 2n - 2$.

Осталось найти условия разрешимости и некоторые частные решения задачи (3.1), (3.2). Для этого, рассмотрим задачу Дирихле :

$$LL^* v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^k v(x, y)}{\partial N^k} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n - 1, \tag{3.18}$$

где $v(x, y)$ – искомая действительная функция, L и L^* – дифференциальные операторы

$$L = \sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}}, \quad L^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{A}_k \frac{\partial^n}{\partial y^k \partial x^{n-k}}, \qquad k = 0, 1, ..., n - 1.$$

A_k – коэффициенты из (3.1), $\overline{A}_k$ – комплексно сопряженное к A_k, а f_k – правая часть (3.2). Уравнение (3.17) для $(x, y) \in D$ можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_n \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - \overline{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y} - \overline{\lambda}_n \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, y) = 0. \tag{3.19}$$

По Теореме 4.1 из [7] задача (3.18), (3.19) однозначно разрешима. Согласно Лемме 2.3 из [7], общее решение уравнения (3.19) можно записать в виде

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{p=1}^{2n-k-1} b_{plk} w_{plk}(x, y), \tag{3.20}$$

где $\lambda_{n+j} = \overline{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, n$. В этом параграфе будем предполагать, что $\lambda_{n+j} = \overline{\lambda}_j$. Согласно Теореме 4.1 из [7], решение задачи (3.17), (3.18) определяется формулой (3.20), где функции φ_j и постоянные b_{plk} выражаются через решение некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма. Подставляя $w_{plk}(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} c_{plkj} v_{lkj}(x, y)$ в (3.20) (см. (2.22) в [7]), получим

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{2n} c_{lkj} v_{lkj}(x, y), \tag{3.20'}$$

где c_{plk} суть некоторые постоянные. Так как решение $v(x, y)$ задачи (3.17), (3.18) является действительным, то $v(x, y) = \operatorname{Re} v(x, y)$. Подставляя $v(x, y)$ из (3.20'), получим

$$v(x, y) = \operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{n} \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{j=1}^{n} a_{lkj} v_{lkj}(x, y)\right], \tag{3.21}$$

где $\psi_j(x + \lambda_j y) = \varphi_j(x + \lambda_j y) + \overline{\varphi_{n+j}(x + \lambda_{n+j} y)}$, $j = 1, \ldots, n$, $a_{lkj} = c_{lkj} + \overline{c}_{lk,n+j}$, $k = 2, \ldots, 2n - 2$, $l = 1, \ldots, m$. Так как $\lambda_{n+j} = \overline{\lambda}_j$, то функции ψ_j, $j = 1, \ldots, n$ аналитичны в D_{λ_j}. Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема 3.2. *Общее решение задачи (3.17), (3.18) определяется формулой (3.21), где* $v_{lkj}(x, y) = \left(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)\right)^k \ln\left(x - x_l + \lambda_j(y - y_l)\right)$, $j = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, \ldots, 2n - 2$, ψ_j, $j = 1, \ldots, n$ *суть аналитические функции в* D_{λ_j}, *а* a_{lkj} *– некоторые постоянные. Функции* ψ_j *и постоянные* a_{lkj} *выражаются через решения некоторого однозначно разрешимого уравнения Фредгольма.*

Теорема 3.3. *Задача (3.1), (3.2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия :*

$$Re \sum_{j=1}^{n} a_{lkj}\lambda_j^p = 0, \quad p = 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., n-2, \tag{3.22}$$

$$Im \sum_{j=1}^{n} a_{lkj}\lambda_j^p = 0, \quad p = k+1, ..., 2n-1, \quad l = 1, ..., m, \quad k = n-1, ..., 2n-2, \tag{3.23}$$

Если (3.22) и (3.23) выполняются, то частное решение задачи (3.1), (3.2) определяется формулой

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x + \lambda_j y) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n} a_{lkj}v_{lkj}(x,y), \tag{3.24}$$

где ψ_j, v_{lkj} и a_{lkj} суть величины из формулы (3.21).

Доказательство. Пусть $u_0(x,y)$ является решением задачи (3.1), (3.2). Тогда Re $u_0(x,y)$ является решением задачи (3.17), (3.18). Из единственности решения задачи (3.17), (3.18) следует

$$v(x,y) = \text{Re}\, u_0(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{3.25}$$

где $v(x,y)$ задаётся по формуле (3.21). В силу (3.21) и (3.25) имеем Re $[u_1(x,y) - u_0(x,y)] = 0, \quad (x,y) \in D$, где $u_1(x,y)$ – функция в квадратных скобках в формуле (3.21).

Функция $u_1(x,y) - u_0(x,y)$ является чисто мнимым решением уравнения (3.1), т.е. многочленом от x и y порядка не выше $2n-2$. Следовательно,

$$u_1(x,y) = u_0(x,y) + P_{2n-2}(x,y), \tag{3.26}$$

где $P_{2n-2}(x,y)$ – некоторый многочлен порядка не выше $2n-2$.

Так как $u_0(x,y)$ бесконечно дифференцируема в D, то в силу (3.26) функция $u_1(x,y)$ также является бесконечно дифференцируемой. С другой стороны, $u_1(x,y)$ бесконечно дифференцируема в D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lkj}\lambda_j^q = 0, \quad q = 0, 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., 2n-2. \tag{3.27}$$

Из (3.27) при $k = 0, 1, ..., n-2$ получим (3.22), а при $k = n-1, ..., 2n-2$ имеем

$$a_{lkj} = 0, \quad j = 0, 1, ..., n, \quad l = 1, ..., m. \tag{3.28}$$

Наконец, из (3.28) получим (3.23). Таким образом, (3.22) и (3.23) являются необходимыми условиями для разрешимости задачи (3.1), (3.2).

Предположим теперь, что имеют место условия (3.22) и (3.23). Докажем, что задача (3.1), (3.2) разрешима. Так как функция $v(x, y)$, определенная формулой (3.21), является решением задачи (3.17), (3.18), то она бесконечно дифференцируема в D. С другой стороны, функция вида (3.21) бесконечно дифференцируема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} a_{lkj} \lambda_j^q = 0, \quad q = 0, 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., 2n-2. \tag{3.29}$$

Из (3.22) и (3.29) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lkj} \lambda_j^q = 0, \quad q = 0, 1, ..., k, \quad l = 1, ..., m, \quad k = 0, 1, ..., n-2. \tag{3.30}$$

Из (3.23) и (3.29) следует (3.28). Следовательно, (3.21) можно записать в виде $v(x, y) = \operatorname{Re} u(x, y)$, $(x, y) \in D$, где $u(x, y)$ определяется формулой (3.24). Из (3.30) следует, что $u(x, y)$ является бесконечно дифференцируемым решением уравнения (3.1) в D. Так как $v(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (3.18) и $v(x, y) = \operatorname{Re} u(x, y)$, то функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (3.2). Таким образом, (3.22), (3.23) являются необходимыми и достаточными условиями для разрешимости задачи (3.1), (3.2), и ее частное решение определяется формулой (3.24). Доказательство Теоремы 3.3 завершено.

§4. ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть D – односвязная область, содержащая начало координат, ограниченная простым, замкнутым, достаточно гладким контуром Γ. Пусть L_j – дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} + a_j I, \quad j = 1, ..., n,$$

где I - единичный оператор, λ_j и a_j – комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{Im}\,\lambda_j > 0, \quad j = 1, ..., p, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{Im}\,\lambda_j < 0, \quad j = p+1, ..., n, \tag{4.2}$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., n. \tag{4.3}$$

Для определенности будем считать, что $2p \geq n$, $n, p \geq 2$.

Рассмотрим следующую задачу : найти в D решение $u(z)$ уравнения

$$L_1 \cdots L_n u(z) = 0, \quad z \in D, \tag{4.4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{j+l\leq p-1} a_{kjl}(z)\frac{\partial^{j+l}u(z)}{\partial y^j \partial x^l}\right] = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 1, ..., n, \tag{4.5}$$

где $a_{kjl}(z)$ – комплекснозначные, а $f_k(z)$ – некоторые действительные функции на Γ.

Предположим, что функции $a_{kjl}(z)$, $f_k(z)$ и их производные по дуговой абсциссе s до порядка $n-p-1$ принадлежат $H(\Gamma)$. Ищем решения задачи (4.4), (4.5) в классе функций, которые n-раз непрерывно дифференцируемы в D и $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{D}$. При $2p = n$ уравнение (4.4) является правильно эллиптическим, а при $2p \neq n$ оно является неправильно эллиптическим. Рассмотрим задачу (4.4), (4.5) для неправильно эллиптического уравнения (4.4), т.е. при $2p \geq n$ и $p \geq 2$. Обозначим

$$\alpha_{kj}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{q+l=p-1} a_{kql}(z)\lambda_j^q, & j = 1, ..., p, \\ \sum\limits_{q+l=p-1} \overline{a_{kql}}(z)\overline{\lambda}_j^q, & j = p+1, ..., n, \end{cases} \quad k = 1, ..., n. \tag{4.6}$$

Пусть $A(z)$ - $(n \times n)$-матрица с элементами α_{kj}, $k, j = 1, ..., n$. Предположим, что задача (4.4), (4.5) является задачей **нормального типа**, т.е. что

$$det\ A(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \tag{4.7}$$

Основная цель данного параграфа свести задачу (4.4), (4.5) к сингулярному интегральному уравнению нормального типа и вычислить ее индекс. Как и раньше линейная зависимость понимается над полем действительных чисел. Обозначим

$$\mu_k = \begin{cases} \lambda_k, & k = 1, ..., p, \\ \overline{\lambda}_k, & k = p+1, ..., n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Из (4.1) – (4.3) и (4.8) следует, что $\operatorname{Im}\mu_j > 0$, $j = 1, ..., n$ и

$$\mu_j \neq \mu_k, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, ..., p,$$

$$\mu_j \neq \mu_k, \quad j \neq k, \quad j, k = p+1, ..., n.$$

Согласно (2.6), общее решение уравнения (4.4) в односвязной области можно записать в виде

$$u(z) = u_1(z) + \overline{u_2(z)}, \tag{4.9}$$

где

$$u_1(z) = \sum_{j=1}^{p} e^{\alpha_j x + \beta_j y}(x + \mu_j y)^{j-1}\psi_j(x + \mu_j y), \quad z = x + iy \in D,$$

$$u_2(z) = \sum_{j=p+1}^{n} e^{\alpha_j x + \beta_j y}(x + \mu_j y)^{j-1}\psi_j(x + \mu_j y), \quad z = x + iy \in D,$$

причём ψ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{μ_j}, определяемые по $u(z)$ единственным образом. Ясно, что

$$\operatorname{Re}\left[a_{kjl}(z)\frac{\partial^{j+l}\overline{u_2(z)}}{\partial y^j \partial x^l}\right] = \operatorname{Re}\left[\overline{a_{kjl}(z)}\frac{\partial^{j+l}u_2(z)}{\partial y^j \partial x^l}\right]. \tag{4.10}$$

Подставляя $u(z)$ из (4.9) в (4.5) и учитывая (4.10), получим следующую граничную задачу для определения функций ψ_j :

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{p-1}\beta_{kjl}(t)\psi_j^{(l)}(\xi + \mu\eta)\right] = f_k(t), \quad t = \xi + i\eta \in \Gamma, \quad k = 1, ..., n, \tag{4.11}$$

где $\beta_{kjl}(t)$ – некоторые функции такие, что $\beta_{kjp-1}(t) = e^{\alpha_j\xi + \beta_j\eta}(\xi + \mu_j\eta)^{j-1}a_{kj}(t)$, а функции $a_{kj}(t)$ определены в (4.6).

При $\mu_j = i$, $j = 1, ..., n$ задача (4.11) исследована в [8], стр. 282. Общий случай может быть исследован аналогично. Поэтому мы остановимся только на основных моментах исследования задачи (4.11). Используя интегральное представление Векуа (см. [8], стр. 275), имеем

$$(-1)^{p-1}(p-2)!\pi i\psi_j(x+\mu_j y) = \int_\Gamma g_j(t)\left(1-\frac{x+\mu_j y}{\xi+\mu_j\eta}\right)^{p-2}\ln\left(1-\frac{x+\mu_j y}{\xi+\mu_j\eta}\right)ds+$$

$$+\int_\Gamma g_j(t)\,ds + ic_j, \quad t=\xi+i\eta, \quad j=1,...,n, \tag{4.12}$$

где $g_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, c_j – действительные постоянные, $j = 1, ..., n$. Функции $g_j(t)$ и постоянные c_j, определяются через ψ_j единственным образом.

Пусть точка $z = x + iy$ стремится к $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$, оставаясь внутри D. Обозначим через $\psi_j^{(l)}(\xi_0 + \mu_j\eta_0)$ соответствующую граничную функцию $\psi_j^{(l)}(x + \mu_j y)$. Из (4.12) получим

$$\psi_j(\xi_0+\mu_j\eta_0) = \int_\Gamma K_{0j}(t_0,t)g_j(t)\,ds + \frac{(-1)^{p-1}c_j}{\pi(p-2)!}, \tag{4.13}$$

$$\psi_j^{(l)}(\xi_0+\mu_j\eta_0) = \int_\Gamma K_{0j}(t_0,t)g_j(t)\,ds, \quad l=1,...,p-2, \tag{4.14}$$

$$\psi_j^{(p-1)}(x+\mu_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)\,ds}{(\xi+\mu_j\eta)^{p-2}(\xi+\mu_j\eta-x-\mu_j y)}, \quad x+iy\in D, \tag{4.15}$$

где функции $K_{lj}(t_0, t)$ допускают представление (2.11'). Пусть $\theta(t)$ – угол между x-осью и касательной к контуру Γ в точке $t \in \Gamma$, и пусть

$$b_j(t) = \cos\theta(t) + \mu_j\sin\theta(t), \quad j=1,...,2n, \tag{4.16}$$

$$t'_s = \frac{dt}{ds} = \cos\theta(t) + i\sin\theta(t),$$

где s – дуговая абсцисса точки $t \in \Gamma$. Поскольку $\operatorname{Im}\mu_j > 0$, то при $t \in \Gamma$ имеем $b_j(t) \neq 0$. Уравнение (4.15) при $t \in \Gamma$ можно переписать в виде

$$\psi_j^{(p-1)}(x+\mu_j y) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)\,d(\xi+\mu_j\eta)}{(\xi+\mu_j\eta)^{p-2}b_j(t)(\xi+\mu_j\eta-x-\mu_j y)}, \quad x+iy\in D. \tag{4.17}$$

Переходя к пределу в (4.17) при $z \to t_0$ изнутри области D и используя формулу Сохоцкого-Племеля (см. [8], стр. 66), получим

$$\psi_j^{(p-1)}(\xi_0 + \mu_j\eta_0) = \frac{g_j(t_0)}{(\xi_0 + \mu_j\eta_0)^{p-2}b_j(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)\,dt}{(\xi + \mu_j\eta)^{p-2}(\xi + \mu_j\eta - \xi_0 - \mu_j\eta_0)}, \tag{4.18}$$

где $b(t)$ – функции (4.16). Для $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$ и $t = \xi + i\eta \in \Gamma$ функция

$$K_j(t_0, t) = \frac{t - t_0}{(\xi + \mu_j\eta)^{p-2}(\xi + \mu_j\eta - \xi_0 - \mu_j\eta_0)}, \quad j = 1, ..., n \tag{4.19}$$

принадлежит $H(\Gamma)$ по обеим переменным t и t_0 (см. [8], стр. 288). Из (4.19) имеем

$$K_j(t_0, t_0) = \lim_{t\to t_0} K_j(t_0, t) = \frac{\cos\theta(t_0) + i\sin\theta(t_0)}{(\xi_0 + \mu_j\eta_0)^{p-1}b_j(t_0)}. \tag{4.20}$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что

$$\psi_j^{(p-1)}(\xi_0 + \mu_j\eta_0) = \frac{g_j(t_0)}{(\xi_0 + \mu_j\eta_0)^{p-2}b_j(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g_j(t)K_j(t_0, t)}{t - t_0}\,dt. \tag{4.21}$$

Положим $\gamma_j(t) = e^{\alpha_j\xi + \beta_j\eta}(\xi + \mu_j\eta)^{j-p+1}(b_j(t))^{-1}$, $t = \xi + i\eta \in \Gamma$, $j = 1, ..., n$, и рассмотрим диагональную матрицу $\gamma(t)$ с элементами $\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)$. Обозначим

$$A_1(t) = \operatorname{Re}\,(A(t)\gamma(t)), \quad B_1(t) = i\operatorname{Im}\,(A(t)\gamma(t)), \tag{4.22}$$

$$\mu(t) = (\mu_1(t), ..., \mu_n(t)), \quad f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t)), \quad c = (c_1, ..., c_n).$$

Подставляя функции ψ_j из (4.12) в (4.11) и учитывая (4.13), (4.14), (4.20) (4.21), получим сингулярное интегральное уравнение :

$$A_1(t_0)\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma K(t_0, t)\mu(t)\,dt + \beta(t_0)c = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{4.23}$$

где $K(t_0, t)$ и $\beta(t)$ – действительные $(n \times n)$-матрицы, а $K(t_0, t)$ имеет вид

$$K(t_0, t) = \frac{B_1(t_0)t'_s}{i(t - t_0)} + K_0(t_0, t),$$

где $K_0(t_0, t)$ – $(n \times n)$-матрица вида (2.11'). Из (4.22), следует что характеристическое уравнение, соответствующее (4.23), имеет вид (см. [8], стр. 506)

$$A_1(t_0)\mu(t_0) + \frac{B_1(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-t_0}\,dt = f(t_0). \qquad (4.24)$$

Из (4.22) имеем

$$A_1(t) + B_1(t) = A(t)\gamma(t), \quad A_1(t) - B_1(t) = \overline{A(t)\gamma(t)}, \qquad (4.25)$$

$$det(A_1(t) + B_1(t)) = det\, A(t)\, det\, \gamma(t), \quad det(A_1(t) - B_1(t)) = det\overline{A(t)}\, det\, \overline{\gamma(t)}. \qquad (4.26)$$

Пусть $a(t)$ – непрерывная функция, определенная на Γ. **Индексом** функции $a(t)$ на Γ называется приращение аргумента $a(t)$ деленное на 2π, когда t обходит контур Γ один раз в положительном направлении. Обозначим через κ_1 индекс функции $det\, A(t)$ на Γ.

Так как $\operatorname{Im}\mu_j > 0$, $j = 1, ..., n$ и $0 \in D$, то функции $b_j(t)$ и $\xi + \lambda_j\eta$, $j = 1, ..., n$ отличны от нуля при $t = \xi + i\eta \in \Gamma$, и их индексы на Γ равны 1. Для индекса κ_2 функции $det\, \gamma(t)$ на Γ имеем

$$\kappa_2 = \frac{n(n+1)}{2} - pn. \qquad (4.27)$$

Из (4.7), (4.25) и (4.26) следует, что функции $det(A_1(t)+B_1(t))$ и $det(A_1(t)-B_1(t))$ отличны от нуля при $t \in \Gamma$, и их индексы на Γ равны κ_1 и κ_2, соответственно (4.24) является уравнением нормального типа, и его индекс κ_0 равен $-2(\kappa_1 + \kappa_2)$ (см. [8], стр. 507 – 510).

Таким образом, доказали, что задача (4.4), (4.5) эквивалентна уравнению (4.23). Уравнение (4.23) с $c_k = 0$, $k = 1, ..., n$ является уравнением нормального типа, и его индекс равен κ_0. Поэтому индекс κ уравнения (4.23) с $c_k \neq 0$, $k = 1, ..., n$ равен $\kappa_0 + n$ (см. [8]). В силу (4.27)

$$\kappa = n(2p - n) - 2\kappa_1. \qquad (4.28)$$

Частные случаи. Рассмотрим несколько частных случаев граничных условий вида (4.5), для которых выполняется условие нормальности (4.7). Рассмотрим граничные условия

$$\frac{\partial^{p-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{p-1-k}} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-p-1, \qquad (4.29)$$

$$\operatorname{Re}\left[a_k(z)\frac{\partial^{p-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{p-1-k}}\right] = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = n-p, ..., p-1, \tag{4.30}$$

где $a_k(z)$ – комплекснозначные функции, а $f_k(z)$ – комплекснозначные при $k = 0, 1, ..., n-p-1$ и действительные при $k = n-p, ..., p-1$. Предположим, что функции $a_k(z)$ и $f_k(z)$, $k = n-p, ..., p-1$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и соответствующие функции из (4.5), и $a_k(z) \neq 0$. Заметим, что (4.29) и (4.30) можно записать в виде (4.5). Рассмотрим матрицу $A(t)$, соответствующую задаче (4.4), (4.29), (4.30) с элементами из (4.6). Имеем

$$det\, A(t) = c a_{n-p}(t) \cdots a_{p-1}(t), \quad c \neq 0, \tag{4.31}$$

где c – некоторая ненулевая постоянная. Из (4.28), (4.31) и утверждения $a_k(z) \neq 0$ следует, что задача (4.4), (4.29), (4.30) удовлетворяет условию нормальности (4.7), а её индекс κ равен $\kappa = n(2p-n) - 2(\kappa_{n-p} + \cdots + \kappa_{p-1})$, где κ_j – индекс функции $a_j(z)$ на Γ. Полученные результаты остаются в силе, если (4.29) и (4.30) содержат в качестве слагаемых производные функции $u(z)$ до порядка $p-2$ с произвольными гладкими коэффициентами.

Теперь установим основные результаты для задачи (4.4), (4.5), предполагая условие нормальности, т.е. (4.7), и что D является $(m+1)$–связной областью на комплексной плоскости, содержащей начало координат и ограниченной простыми контурами Γ_0, Γ_1, ..., Γ_m, Γ_0 содержит все остальные контуры Γ_1, ...,Γ_m, $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$ есть граница области D. Пусть $D_0^+, D_1^-, ..., D_m^-$ – области, определенные в начале §2, а $\mu_1, ..., \mu_n$ суть постоянные из (4.8). Согласно Лемме 2.1 из [7], общее решение уравнения (4.4) в D можно представить в виде

$$u(z) = v_1(z) + \overline{v_2(z)}, \quad z \in D, \tag{4.32}$$

$$\text{где} \quad v_1(z) = \sum_{j=1}^{p}(x+\mu_j y)^{j-1}\psi_j(x+\mu_j y) + \sum_{k=1}^{l_{nm}} c_k u_k(z), \quad z = x+iy \in D,$$

$$v_2(z) = \sum_{j=p+1}^{n}(x+\mu_j y)^{j-1}\psi_j(x+\mu_j y), \quad z = x+iy \in D, \tag{4.33}$$

причём $l_{nm} = n(n-1)m/2$, c_k – произвольные комплексные постоянные, ψ_j, $j = 1, ..., n$ – произвольные аналитические функции в D_{μ_j} и $u_k(z)$, $k = 1, ..., l_{nm}$ –

функции из (2.2) при $p = n$. Функции ψ_j, $j = 1, ..., n$ и постоянные c_k, $k = 1, ..., l_{nm}$ определяются по $u(z)$ единственным образом.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, ..., z_m = x_m + iy_m$ – произвольные точки, лежащие внутри контуров $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно. Имеем

$$\psi_j(x + \mu_j y) = \psi_{j0}(x + \mu_j y) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\psi_{jk}(x + \mu_j y)}{x + \mu_j y - x_k - \mu_j y_k}, \quad j = 1, ..., n, \tag{4.34}$$

где ψ_{j0} – аналитические функции в $D_0^+(\mu_j)$, а ψ_{jk} аналитичны в $D_k^-(\mu_j)$ и ограничены в окрестности бесконечности. Отметим, что в (4.34) функции ψ_{jk} определяются по ψ_j единственным образом (см. [9], стр. 64).

Для $z = x + iy$ и $t = \xi + i\eta$ обозначим

$$\delta_{j0}(z,t) = 1 - \frac{x + \mu_j y}{\xi + \mu_j \eta}, \quad \delta_{jk}(z,t) = 1 - \frac{\xi + \mu_j \eta - x_k - \mu_j y_k}{x + \mu_j y - x_k - \mu_j y_k}, \quad k = 1, ..., m.$$

Из интегрального представления Векуа (см. [8], стр. 275) при $j = 1, ..., n$ следует, что

$$\psi_{jk}(x + \mu_j y) = \int_{\Gamma_k} g_j(t)\delta_{jk}^{p-1}(z,t) \ln \delta_{jk}(z,t)\, ds + \int_{\Gamma_k} \mu_j(t)\, ds + ic_{jk}, \quad k = 0, 1, ..., m, \tag{4.35}$$

где $g_j(t)$ – действительные функции из класса $H(\Gamma)$, c_{jk} – действительные постоянные, определенные через ψ_{jk} единственным образом. Под $\ln \delta_{j0}(z,t)$ подразумевается непрерывная ветвь в D_0^+, обращающаяся в нуль при $z = 0$, а $\ln \delta_{jk}(z,t)$ при $k \geq 1$ – непрерывная ветвь в D_k^-, обращающаяся в нуль при $z = \infty$.

Подставляя $u(z)$ из (4.32) в (4.5) и используя (4.33) – (4.35), получим сингулярное уравнение вида (4.23), содержащее $n(1 + mn)$ произвольные действительные неизвестные постоянные, для которых функции $g_j(t)$ и постоянные c_j и c_{jk}, $j = 1, ..., n$, $k = 0, 1, ..., m - 1$ могут быть определены. Ввиду (4.7) это уравнение является уравнением нормального типа. Аналогично (4.28) для индекса κ задачи (4.4), (4.5) получим

$$\kappa = n(2p - n)(1 - m) - 2\kappa_1, \tag{4.36}$$

где κ_1 - индекс $det\ A(t)$ на Γ. В частности, из (4.36) следует, что если $a_{kjl}(z)$ постоянны при $j + l = n$, то в двусвязных областях задача (4.4), (4.5) фредгольмова. Этот принцип распространяется на m-связные области.

Abstract. The paper reduces the boundary value problem for improperly elliptic equations in multiply connected domains to a Fredholm integral equation of the second kind. The index of the problem in the nonhomogeneous case is calculated, and the general solution of homogeneous problem obtained. For doubly connected domains Fredholmness of the problem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
2. П. А. Солдатов, "Методы теории функций в краевых задачах на плоскости", Изв. АН СССР, сер. матем., том 55, № 5, стр. 1070 – 1100, 1991.
3. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1963.
4. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Гостехиздат, Москва, 1948.
5. Н. П. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, Наука, Москва, 1959.
6. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
7. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях", Изв. АН Армении. серия Математика, том 37, № 6, стр. 5 – 42, 2002.
8. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
9. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.

Поступила 29 марта 2002

Известия НАН Армении. Математика. 37, № 6, 2002, 71–88

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье описываются эффективные методы разрешимости задачи Римана–Гильберта в полуплоскости для классов функций, бесконечно дифференцируемых и обращающихся в нуль на бесконечности. Результаты применяются к краевым задачам для эллиптических уравнений в полуплоскости.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, $z = x + iy$, Γ – действительная ось, а $\overline{D}$ – замкнутая полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ (без бесконечно удалённой точки). В области D рассмотрим задачу Римана–Гильберта : найти функцию $\varphi(x)$, аналитичную в D, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re}\left(a(x)\,\varphi(x)\right) = f(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{0.1}$$

где $a(x)$ и $f(x)$ – некоторые бесконечно дифференцируемые функции, заданные на Γ, а $f(x)$ – действительная функция.

Предположим, что функция $a(x)$ имеет отличные от нуля пределы $a(+\infty)$ и $a(-\infty)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $a(x) \neq 0$ при $x \in \Gamma$.

Определение 0.1. *Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in \Gamma$ принадлежит классу N, если $f(x)$ бесконечно дифференцируема на Γ и в некоторых окрестностях $+\infty$ и $-\infty$ удовлетворяет условиям*

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \frac{c_k}{|x|^{\alpha_k}}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где c_k и α_k – некоторые положительные постоянные, зависящие от f.

Определение 0.2 *Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ принадлежит классу N^+, если $\varphi(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, бесконечно дифференцируема в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, и в окрестности бесконечности ($\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z| \geq R$) удовлетворяет условию*

$$\left|\varphi^{(k)}(z)\right| \leq \frac{c_k}{|z|^{\alpha_k}}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где c_k и α_k – некоторые положительные постоянные.

Аналогично определяется класс функций N^- с $\operatorname{Im} z < 0$ вместо $\operatorname{Im} z > 0$.

Пусть $\beta(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, определенная на Γ, равная 0 и 1 в окрестностях $+\infty$ и $-\infty$, соответственно. Предположим, что функции $f(x)$ и $a(x) - \beta(-x)\,a(-\infty) - \beta(x)\,a(+\infty)$ принадлежат классу N, а функция $\varphi(z)$ принадлежит N^+. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$|a(x)| = 1, \qquad x \in \Gamma. \tag{0.2}$$

При $f \equiv 0$ задача (0.1) называется однородной. Линейную зависимость или независимость функций будем понимать над полем действительных чисел.

В случае, когда $a(+\infty) = a(-\infty)$, задача (0.1) исследована в [1] и [2] в классах ограниченных функций и в N^+, соответственно. В задаче (0.1) возникают трудности, если $a(+\infty) \neq a(-\infty)$ (этот случай исследован в [1] для класса функций, допускающих слабую особенность в точках $z = \pm\infty$).

В данной статье полностью решается задача (0.1) в классе N^+ при $a(+\infty) \neq a(-\infty)$. Для формулировки основных результатов статьи напомним, что индекс $\varkappa$ функции $a(x)$ на Γ определяется как отношение приращения аргумента функции $a(x)$ к 2π, когда x пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Ниже $[m]$ будет означать целую часть m.

Теорема 0.1. *Для любой функции $f \in N$ задача (0.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $0 \leq \varkappa < 1/2$.*

Теорема 0.2. *Однородная задача (0.1) имеет ровно $k_0 = \max(0, -[2\varkappa])$ линейно независимых решений. Неоднородная задача (0.1) разрешима тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g_j(x)\,dx = 0, \qquad j = 1, \dots, k_0',$$

где $k_0' = \max(0, [2\varkappa])$ и $g_1(x), \dots, g_{k_0'}$ – некоторые линейно независимые бесконечно дифференцируемые действительные функции, не зависящие от f.

Работа составлена следующим образом : в §1 приводятся несколько вспомогательных результатов, в §2 задача (0.1) приводится к каноническому виду, в §3 указывается простой метод решения задачи (0.1) и доказываются Теоремы 0.1 и 0.2, в §4 основные результаты применяются к задаче типа Римана–Гильберта для класса эллиптических уравнений и уравнений составного типа.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для заданной в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функции $f(z) \in N$ и $0 < \alpha_0 < 2$ рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = (z+i)^{\alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0}(t-z)}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее под $(z+i)^{\alpha_0}$ при $\operatorname{Im} z \geq 0$ подразумевается следующая ветвь: $(z+i)^{\alpha_0} = \exp(\alpha_0 \ln(z+i))$, $\ln(z+i) = \ln|z+i| + i \arg(z+i)$, $0 \leq \arg(z+i) \leq \pi$. Ясно, что функции $(z+i)^{\alpha_0}$ и $\ln(z+i)$ аналитичны в $\operatorname{Im} z > 0$.

Лемма 1.1. *При $0 \leq \alpha_0 < 1$ функция $\varphi(z)$ принадлежит классу N^+.*

Доказательство. При $\alpha_0 = 0$ доказательство можно найти в [2]. При $0 < \alpha_0 < 1$ лемма доказывается аналогично.

Лемма 1.2. *При $1 \leq \alpha_0 < 2$ функция $\varphi(z)$ принадлежит классу N^+ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0}} = 0. \tag{1.2}$$

Доказательство. Из (1.1) имеем $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, где

$$\varphi_1(z) = -(z+i)^{\alpha_0-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0}}, \quad \varphi_2(z) = (z+i)^{\alpha_0-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{\alpha_0-1}(t-z)}.$$

Согласно Лемме 1.1, $\varphi_2(z) \in N^+$. Поэтому $\varphi(z) \in N^+$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1(z) \in N^+$. Теперь утверждение следует из (1.2).

Лемма 1.3. *Любую функцию $\Phi(z) \in N^+$ можно представить в виде*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k (z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + \frac{(z-i)^m}{(z+i)^m} \Phi_0(z), \tag{1.3}$$

где m – натуральное число, c_k – некоторые комплексные постоянные, а $\Phi_0(z) \in N^+$. Функция $\Phi_0(z)$ и постоянные $c_0, \ldots, c_{m-1}$ определяются через $\Phi(z)$ единственным образом.

Доказательство. Пусть $\Phi(z) \in N^+$. Решим уравнение (1.3) относительно $\Phi_0(z)$ и $c_0, \ldots, c_{m-1}$. Подставляя $z = i$ в (1.3), определим c_0. Дифференцируя (1.3) и подставляя $z = i$, определим c_1. Аналогично можно определить все постоянные $c_0, ..., c_{m-1}$. Ясно, что функция

$$F(z) \equiv \Phi(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k\,(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} \tag{1.4}$$

удовлетворяет условиям

$$F^{(k)}(i) = 0, \qquad k = 0, ..., m-1. \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.4) имеем

$$\Phi_0(z) = \frac{(z+i)^m\,F(z)}{(z-i)^m}. \tag{1.6}$$

Так как $\Phi(z) \in N^+$, то согласно (1.4) – (1.6) функции $F(z)$ и $\Phi_0(z)$ также принадлежат классу N^+. Лемма 1.3 доказана.

Пусть $\beta(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, определенная на Γ такая, что $\beta(x) = 1$ при $x \geq 2$ и $\beta(x) = 0$ при $x \leq 1$. В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ рассмотрим аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right] \beta(t)\,dt. \tag{1.7}$$

Лемма 1.4. *Функция $\Psi(z)$ представима в виде*

$$\Psi(z) = c - \ln(z+i) - \Psi_0(z), \qquad Im\, z \geq 0, \tag{1.8}$$

где

$$\Psi_0(z) = \int_1^2 \beta'(t)\,\ln\left(1 - \frac{t+i}{z+i}\right) dt, \tag{1.9}$$

$$c = \Psi_0(0) + i\,\frac{\pi}{2}. \tag{1.10}$$

В (1.9) берем ветвь логарифма, которая при фиксированном t ($1 \leq t \leq 2$) обращается в нуль при $z = \infty$.

Доказательство. Из (1.7) имеем

$$\Psi'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta(t)\,dt}{(t-z)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta'(t)\,dt}{t-z}. \tag{1.11}$$

Равенство (1.11) можно записать в виде

$$\Psi'(z) = -\frac{1}{z+i}\int_1^2 \beta'(t)\,dt + \int_1^2 \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{z+i}\right) \beta'(t)\,dt.$$

Поскольку $\beta(1) = 0$ и $\beta(2) = 1$, то имеем $\int_1^2 \beta'(t)\,dt = 1$. Интегрируя (1.11) относительно z, получим представление (1.8) с некоторой постоянной c. Подставляя $z = 0$ в (1.8) получим (1.10). Лемма 1.4 доказана.

Отметим, что из (1.9) вытекает, что $\Psi_0(z) \in N^+$. Рассмотрим функции

$$\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + (z-i)^m\,\varphi_k(z), \qquad \frac{i\,(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + (z-i)^m\,\Psi_k(z), \quad k = 0,...,m-1, \tag{1.12}$$

где $\varphi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$, $k = 0,...,m-1$ – некоторые аналитические функции в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Очевидны следующие две леммы.

Лемма 1.5. *Функции семейства (1.12) линейно независимы в* $\operatorname{Im} z > 0$.

Лемма 1.6. *Функции*

$$\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + (z-i)^m\,\varphi_k(z), \qquad \frac{i\,(z-i)^j}{(z+i)^{j+1}} - \frac{i}{z+i} + (z-i)^m\,\Psi_j(z),$$

где $k = 0,...,m-1$, $j = 1,...,m-1$, $\varphi_k(z)$ *и* $\Psi_j(z)$ *– некоторые аналитические функции в* $\operatorname{Im} z > 0$, *линейно независимы.*

§2. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть $a(x)$ – функция из (1.1), удовлетворяющая условию (0.2), и κ – её индекс на Г. Не умаляя общности можно предположить, что $a(-\infty) = 1$. Представим индекс запишем в виде $\kappa = n + \alpha$, где n – целое число, $0 \le \alpha < 1$ и

$$a_0(x) = a(x)\,\frac{(x+i)^n}{(x-i)^n}. \tag{2.1}$$

Пусть κ_0 – индекс функции $a_0(x)$ на Г. Из (2.1) и $\kappa = n+\alpha$ получим $\kappa_0 = \kappa - n = \alpha$. Полагая

$$\theta_0(x) = \arg a_0(x) \tag{2.2}$$

и учитывая (0.2), (2.1), (2.2) и $a(-\infty) = 1$, получим $|a_0(x)| = 1$, $x \in \Gamma$, $a_0(-\infty) = 1$ и

$$a_0(x) = \exp(i\,\theta_0(x)). \tag{2.3}$$

Подберем $\arg a_0(x)$ так, чтобы $\theta_0(t)$ была непрерывна на Γ. Так как $a_0(-\infty) = 1$, то можно взять $\arg a_0(-\infty) = 0$. Тогда $\theta_0(-\infty) = 0$, $\theta_0(+\infty) = 2\pi\kappa_0 = 2\pi\alpha$. Представим функцию $\theta_0(x)$ в виде

$$\theta_0(x) = 2\pi\alpha\beta(x) + \theta_2(x), \tag{2.4}$$

где $\beta(x)$ – функция из Леммы 1.4. Ясно, что $\theta_2(x) \in N(\Gamma)$.
Рассмотрим аналитические функции

$$\varphi_1(z) = -2\alpha i\,\Psi(z), \qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta_2(t)\,dt}{t-z}, \qquad z \in D,$$

где $\Psi(z)$ определена в (1.7). Для аналитической в D функции $\varphi_0(z)$ и $t_0 \in \Gamma$ обозначим $\varphi_0^+(t_0) = \lim\varphi_0(z)$ при $z \to t_0$, $\operatorname{Im} z > 0$.
Согласно формуле Сохоцкого–Племеля (см. [1], стр. 66)

$$\varphi_1^+(t_0) = 2\pi\alpha\beta(t_0) - 2\alpha i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t}\right)\beta(t)\,dt, \tag{2.5}$$

$$\varphi_2^+(t_0) = \theta_2(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\theta_2(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{2.6}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения Коши ([1], стр. 50).
Поскольку $\beta(x)$ и $\theta_2(x)$ – действительные функции, определённые на Γ, то из (2.5) и (2.6) имеем

$$\operatorname{Re}\varphi_1^+(t_0) = 2\pi\alpha\beta(t_0), \qquad \operatorname{Re}\varphi_2^+(t_0) = \theta_2(t_0). \tag{2.7}$$

Из (2.4), (2.7) и $\varphi_1(z) = -2\alpha i\,\Psi(z)$ следует, что

$$\theta_0(t_0) = \operatorname{Re}\left(-2\alpha i\,\Psi^+(t_0) + \varphi_2^+(t_0)\right), \qquad t_0 \in \Gamma \tag{2.8}$$

или

$$\theta_0(x) = -2\alpha i\,\Psi^+(x) + \varphi_2^+(x) - i\operatorname{Im}\left(-2\alpha i\,\Psi^+(x) + \varphi_2^+(x)\right), \qquad x \in \Gamma. \tag{2.9}$$

Подставляя $\theta_0(x)$ в (2.3), получим

$$a_0(x) = A(x)\,B(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.10}$$

где

$$A(x) = \exp(2\,\alpha\,\Psi^+(x) + i\,\varphi_2^+(x)), \tag{2.11}$$

$$B(x) = \exp\,\mathrm{Im}\,(-2\,\alpha\,i\,\Psi^+(x) + \varphi_2^+(x)). \tag{2.12}$$

Согласно Лемме 1.4

$$\Psi^+(x) = c - \ln(x+i) - \Psi_0^+(x), \tag{2.13}$$

где $\Psi_0(z)$ и c определены в (1.9) и (1.10), соответственно.

Подставляя $\Psi^+(x)$ из (2.13) в (2.11), получим

$$A(x) = \frac{1}{(x+i)^{2\alpha}}\,\exp\omega^+(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.14}$$

где

$$\omega(z) = 2\,\alpha\,c - 2\,\alpha\,\Psi_0(z) + i\,\varphi_2(z). \tag{2.15}$$

Из Леммы 1.1 и (1.9) следует, что $\Psi_0(z) \in N^+$, $\varphi_2(z) \in N^+$. Поэтому $\omega(z) \in N^+$ и $\omega^+(x) \in N$. В силу (2.1) и (2.10) – (2.14), граничное условие (0.1) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(x-i)^n\Phi^+(x)}{(x+i)^n(x+i)^{2\alpha}}\right] = \frac{f(x)}{B(x)}, \qquad x \in \Gamma, \tag{2.16}$$

где

$$\Phi(z) = \varphi(z)\,\exp\omega(z). \tag{2.17}$$

Из (2.10) и (2.14) имеем

$$B^{-1}(x) = \frac{A(x)}{a_0(x)} = \frac{\exp\omega^+(x)}{(x+i)^{2\alpha}\,a_0(x)}. \tag{2.18}$$

Подставляя $B^{-1}(x)$ в (2.16) получим

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(x-i)^n\Phi^+(x)}{(x+i)^n(x+i)^{2\alpha}}\right] = \frac{f_0(x)}{(x+i)^{2\alpha}}, \qquad x \in \Gamma, \tag{2.19}$$

где $f_0(x) = \dfrac{f(x)\exp\omega^+(x)}{a_0(x)}$. Поскольку $f(x) \in N$, $\omega^+(x) \in N$, $a_0(x) \in N$, $|a_0(x)| = 1$ при $x \in \Gamma$ и $f_0(x)(x+i)^{-2\alpha} = f(x)\,B^{-1}(x)$, то заключаем, что $f_0(x) \in N$ и функция $f_0(x)\,(x+i)^{-2\alpha}$ действительна на Γ.

Из (2.15) и (2.17) следует, что $\varphi(z) \in N^+$ тогда и только тогда, когда $\Phi(z) \in N^+$. Таким образом, задача (0.1) в классе N^+ сводится к задаче (2.19) в том же классе и называется канонической задачей Римана-Гильберта в классе N^+.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

В этом параграфе исследуем задачу (2.19) в классе N^+.

1. Случай $n = 0$. В этом случае (2.19) принимает вид

$$\operatorname{Re}\Phi_0^+(x) = \frac{f_0(x)}{(x+i)^{2\alpha}}, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{3.1}$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{\Phi^+(x)}{(x+i)^{2\alpha}}. \tag{3.2}$$

Так как $\alpha \geq 0$, то $\Phi_0(z) \in N^+$. Сначала решим задачу (3.1) относительно $\Phi_0(z)$ в классе N^+. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^{2\alpha}(t-z)}\,dt. \tag{3.3}$$

При $\alpha \geq 0$ имеем $f_0(t)(t+i)^{-2\alpha} \in N$, поскольку $f_0(t) \in N$. Поэтому, согласно Лемме 1.1, $\Psi_0(z) \in N^+$. С другой стороны, $\Psi_0(z)$ удовлетворяет (3.1). Ясно, что однородная задача (3.1) (для $f_0 \equiv 0$) имеет только нулевое решение в классе N^+. Следовательно, решение задачи (3.1) в классе N^+ определяется формулой

$$\Phi_0(z) = \Psi_0(z). \tag{3.4}$$

В силу (3.2) и (3.4)

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha}\,\Psi_0(z). \tag{3.5}$$

Таким образом, любое решение задачи (3.1), если оно существует, определяется формулой (3.5). Если $0 \leq \alpha < 1/2$, то согласно Лемме 1.1, $\Phi(z)$ принадлежит классу N^+. Если же $1/2 \leq \alpha < 1$, то по Лемме 1.2 $\Phi(z)$ принадлежит классу N^+ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}} = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.1. *Если $0 \leq \alpha < 1/2$, то задача (3.1) имеет единственное решение. Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то однородная задача (3.1) имеет только нулевое решение, а неоднородная задача (3.1) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.6).*

2. Случай $n \geq 1$. Аналогично предыдущему, если $\Phi(z)$ является решением задачи (2.19), то необходимо имеем

$$\Phi(z) = \frac{(z+i)^n\,(z+i)^{2\alpha}}{(z-i)^n}\,\Psi_0(z), \tag{3.7}$$

где $\Psi_0(z)$ определяется формулой (3.3).

Отметим, что (3.7) аналитична в точке $z = i$ тогда и только тогда, когда

$$\Psi_0^{(j)}(i) = 0, \qquad j = 0, ..., n-1. \tag{3.8}$$

Подставляя $\Psi_0(z)$ из (3.3) в (3.8) и выделяя действительные и мнимые части, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^{2\alpha}}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{(t-i)^k}\,dt = 0, \qquad k = 1, ..., n, \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{(t+i)^{2\alpha}}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(t-i)^k}\,dt = 0, \qquad k = 1, ..., n. \tag{3.10}$$

Здесь мы учли, что $f_0(t)\,(t+i)^{-2\alpha}$ есть действительная функция на Γ. Эту функцию можно представить в виде

$$f_0(t)\,(t+i)^{-2\alpha} = f(t)\,f_1(t), \tag{3.11}$$

где $f_1(t)$ – действительная, ограниченная функция и $f_1(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Легко проверить, что условия (3.9) и (3.10) линейно независимы. При $0 \leq \alpha < 1/2$, в силу Леммы 1.1. $\Psi_0(z)\,(z+i)^{2\alpha} \in N^+$. Из (3.7), (3.9) и (3.10) следует, что $\Phi(z) \in N^+$. Таким образом, доказали следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если $n \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1/2$, то однородная задача (2.19) имеет только нулевое решение, а соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.9) и (3.10).*

Пусть теперь $1/2 \leq \alpha < 1$. Согласно (3.7) имеем

$$\frac{(z-i)^n}{(z+i)^n}\,\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha}\,\Psi_0(z). \tag{3.12}$$

Если $\Phi(z) \in N^+$, то (3.12) принадлежит N^+. Согласно Лемме 1.2 это возможно тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.6). Следовательно, при $1/2 \leq \alpha < 1$ имеет место

Теорема 3.3. *Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то однородная задача (2.19) имеет только нулевое решение, а соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (3.6), (3.9) и (3.10).*

Отметим, что условия в (3.6), (3.9) и (3.10) также линейно независимы. Если полученные условия разрешимости выполняются, то при $0 \leq \alpha < 1$, $n \geq 1$ решение задачи (2.19) определяется формулой (3.7).

Пусть $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1$. Согласно Лемме 1.3 функцию $\Phi(z)\,(z+i)^{-2\alpha}$ можно представить в виде

$$\frac{\Phi(z)}{(z+i)^{2\alpha}} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k\,\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + \frac{(z-i)^m}{(z+i)^m}\,\Phi_0(z), \tag{3.13}$$

где $m = -n$, $c_0,\dots,\ c_{m-1}$ – произвольные комплексные постоянные, а $\Phi_0(z)$ аналитична в D и принадлежит классу N^+. Ясно, что

$$\operatorname{Re}\left[\frac{c_k(x+i)^{m-k-1}}{(x-i)^{m-k}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\bar{c}_k\,(x-i)^{m-k-1}}{(x+i)^{m-k}}\right], \tag{3.14}$$

где $\bar{c}_k$ – комплексно сопряжённое к c_k.

Подставляя $(z+i)^{-2\alpha}\,\Phi(z)$ из (3.13) в (2.19) и учитывая (3.14), получим

$$\operatorname{Re}\Phi_1(x) = \frac{f_0(x)}{(x+i)^{2\alpha}}, \qquad x \in \Gamma, \tag{3.15}$$

где

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k \frac{(z-i)^{m-k-1}}{(z+i)^{m-k}}. \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что функция $\Phi_1(z)$ аналитична в D и принадлежит классу N^+. Согласно (3.15)

$$\Phi_1(z) = \Psi_0(z), \tag{3.17}$$

где $\Psi_0(z)$ - функция (3.3). Из (3.13), (3.16) и (3.17) получаем

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \left(c_k \frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \bar{c}_k \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) + \frac{(z-i)^m (z+i)^{2\alpha}}{(z+i)^m} \Psi_0(z). \tag{3.18}$$

Таким образом, если при $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1$ решение задачи (2.19) существует, то оно определяется формулой (3.18), а c_k, $k = 0, ..., m-1$ - некоторые комплексные постоянные.

Пусть теперь $0 \leq \alpha < 1/2$. В силу Леммы 1.1, $(x+i)^{2\alpha}\Psi_0(z) \in N^+$. Поэтому $\Phi(z)$, определенная формулой (3.18), принадлежит классу N^+ при любых комплексных постоянных c_k, $k = 0, ..., m-1$. Следовательно, в этом случае решение задачи (2.19) определяется формулой (3.18), где c_k, $k = 0, ..., m-1$ - произвольные комплексные постоянные, а общее решение однородной задачи (2.19) можно представить в виде

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{m-1} b_k i \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} + \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) \right], \tag{3.19}$$

где a_k и b_k - произвольные действительные постоянные ($a_k = \operatorname{Re} c_k$, $b_k = \operatorname{Im} c_k$). Из Леммы 4.5 и (3.19) следует, что при $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1/2$ однородная задача (2.19) имеет ровно $(-2n)$ линейно независимых решений. Пусть теперь $1/2 \leq \alpha < 1$. Функцию (3.3) представим в виде

$$\Psi_0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z). \tag{3.20}$$

где

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{\pi i\,(z+i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}}, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{\pi i\,(z+i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha-1}\,(t-z)}.$$

В силу (3.18) и (3.20)

$$\Phi(z) = \Phi_3(z) + \Phi_4(z)\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^m}, \tag{3.21}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_3(z) = (z+i)^{2\alpha-1}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(c_k\,\frac{(z-i)^k}{(z+i)^k} - \bar{c}_k\,\frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k-1}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{(z-i)^m}{\pi i\,(z+i)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}}\right],\end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\Phi_4(z) = \frac{(z+i)^{2\alpha-1}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha-1}\,(t-z)}.$$

Поскольку $0 \le 2\alpha - 1 < 1$, то согласно Лемме 1.1, $\Phi_4(z) \in N^+$. Поэтому второе слагаемое в (3.22) также принадлежит N^+. Следовательно, функция $\Phi(z)$, заданная формулой (3.21), принадлежит N^+ тогда и только тогда, когда $\Phi_3(z) \in N^+$. Так как $1 \le 2\alpha < 2$, то имеем $\Phi_3(z) \in N^+$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{m-1}(c_k - \bar{c}_k) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}} = 0. \tag{3.23}$$

Поскольку функция $f_0(t)\,(t+i)^{-2\alpha}$ действительна, то (3.23) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2\,\mathrm{Im}\,c_k + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(t)\,dt}{(t+i)^{2\alpha}} = 0. \tag{3.24}$$

При подходящем подборе постоянных $c_0, \ldots, c_{m-1}$ условие (3.24) выполняется, и, следовательно, неоднородная задача разрешима.

Из (3.21), (3.22) и (3.24) следует, что общее решение однородной задачи (3.21) определяется формулой

$$\Phi(z) = (z+i)^{2\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \, i \left(\frac{(z-i)^k}{(z+i)^{k+1}} - \frac{1}{z+i} + \frac{(z-i)^{2m-k-1}}{(z+i)^{2m-k}} - \frac{(z-i)^{2m-1}}{(z+i)^{2m}} \right) \right], \tag{3.25}$$

где a_k и b_k – произвольные действительные постоянные ($a_k = \operatorname{Re} c_k$, $b_k = \operatorname{Im} c_k$). Из (3.25), Леммы 1.6 при $n \leq -1$ и $1/2 \leq \alpha < 1$ следует, что однородная задача (2.19) имеет ровно $k_0 = -2n - 1$ линейно независимых решений. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. *Если $n \leq -1$ и $0 \leq \alpha < 1$, то неоднородная задача (2.19) всегда разрешима. Число k_0 линейно независимых решений соответствующей однородной задачи равно $k_0 = -2n$ при $n \leq -1$, $0 \leq \alpha < 1/2$ и $k_0 = -2n - 1$ при $n \leq -1$, $1/2 \leq \alpha < 1$.*

Из Теорем 1.1 – 1.4 следуют Теоремы 0.1 и 0.2.

§4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

Пусть D_0 – плоскость $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, а Γ - действительная x-ось ($t = 0$, $-\infty < x < +\infty$). Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \, \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^k \, \partial x^{n-k}} = 0, \qquad (x,t) \in D_0, \tag{4.1}$$

где A_0, A_1, ...,A_n – комплексные постоянные, $A_n \neq 0$ (ниже также все функции и постоянные предполагаются комплексными, пока не оговорено обратное). Рассмотрим характеристическое уравнение, соответствующее (4.1) :

$$A_0 + A_1 \lambda + \ldots + A_n \lambda^n = 0.$$

Пусть p, q и r – число корней (с учётом кратностей) характеристического уравнения с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda = 0$, соответственно.

Уравнение (4.1) называется эллиптическим, если $r = 0$ и называется уравнением составного типа, если $1 \leq r < n$. Не умаляя общности будем считать, что $p \geq q$.

Краевые условия для уравнения (4.1) задаём в виде

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+q-1, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Re}\left[a_k(x)\,\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right] = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = r+q, .., r+p-1, \tag{4.3}$$

где $a_k(x)$ и $f_j(x)$ $(k = r+q, ..., r+p-1,\ j = 0, ..., r+p-1)$ определены на Γ, причём $f_k(x)$, $k = r+q, ..., r+p-1$ – действительные функции. При $p = q$ отсутствуют условия (4.3).

Предположим, что функции $f_k(x) \in N$ $(k = 0, ..., r+p-1)$ и $a_k(x)$ $(k = r+q, ..., r+p-1)$ обладают такими же свойствами, что и $a(x)$ в (0.1). Ищем решение задачи (4.1) - (4.3) в классе M : $u(x,t) \in M$, если она бесконечно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D}_0 = D_0 + \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial^{j+k} u(x,t)}{\partial x^j\, \partial y^k}\right| \le \frac{c_{jk}\,(1+|t|)^{\beta_{jk}}}{(1+|x|)^{\alpha_{jk}}}, \quad 0 \le j+k < \infty, \quad (x,t) \in \overline{D}_0,$$

где c_{jk}, α_{jk} и β_{jk} – некоторые положительные постоянные, зависящие от u.

Задача (4.1) - (4.3) при $f_k \equiv 0$ $(k = 0, ..., r+p-1)$ называется однородной. Здесь также линейная зависимость или независимость понимается над полем действительных чисел.

Пусть κ_k – индекс функции $a_k(x)$ $(k = r+q, ..., r+p-1)$ на Γ. В случае всех $\kappa_k = 0$ задача (4.1) - (4.3) исследована в [2], где доказано существование и единственность решения этой задачи для всех $f_k^{(x)} \in N$. Исследование задачи (4.1) - (4.3) осложняется, если среди κ_k есть нецелые. Обозначим

$$m_0 = \sum_{k=q+r}^{p+r-1} \max(-[2\,\kappa_k], 0), \qquad m_0' = \sum_{k=q+r}^{p+r-1} \max(0, [2\,\kappa_k]). \tag{4.4}$$

В этом параграфе мы сводим задачу (4.1) – (4.3) к задаче (0.1) и доказываем следующие теоремы.

Теорема 4.1. *При любых $f_k(x) \in N$, $k = 0, ..., r+p-1$ задача (4.1) – (4.3) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $0 \le \kappa_k < 1/2$ при $k = r+q, ..., r+p-1$.*

Теорема 4.2. *Однородная задача (4.1) – (4.3) имеет ровно m_0 линейно независимых решений. Соответствующая неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда функции $f_k(x)$ $(k = 0, ..., r+p-1)$ удовлетворяют следующим m_0' линейно независимым условиям*

$$\sum_{j=0}^{q+r-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (a_{kj}(x)\, Re\, f_j(x) + b_{kj}(x)\, Im\, f_j(x)\, dx + \sum_{j=q+r}^{p+r-1} \int_{-\infty}^{+\infty} c_{kj}(x)\, f_j(x)\, dx = 0,$$

$j = 1, .., m_0'$, где c_{kj}, a_{kj} и b_{kj} – некоторые бесконечно дифференцируемые действительные функции на Γ, не зависящие от $f_k(x)$ $(k = 0, ..., r+p-1)$.

Для доказательства Теорем 4.1 и 4.2 нам понадобятся функциональные классы M^+ и M^- (см. [2]). Будем говорить, что функция $u(x,t) \in M^+$, если $u(x,t) = \omega(x,t)$, где $\omega(z,t)$ аналитична по комплексной переменной $z = x + i\,y$ при $\mathrm{Im}\, z > 0$, бесконечно дифференцируема по z и t и удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial^{k+j} \omega(z,t)}{\partial z^k j\, \partial t^j} \right| \le c_{jk}\, \frac{(1+|t|)^{\beta_{kj}}}{(1+|z|)^{\alpha_{kj}}}, \quad 0 \le k+j < \infty, \quad 0 \le t < +\infty, \quad \mathrm{Im}\, z \ge 0,$$

где c_{kj}, α_{kj} и β_{kj} – некоторые положительные постоянные, зависящие от ω. Аналогично определяется класс M^- в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z < 0$.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – корни характеристического уравнения $A_0 + A_1\,\lambda + ... + A_n\,\lambda^n = 0$, и пусть $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$, $j = 1, ..., r$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{r+j} > 0$, $j = 1, ..., p$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{r+p+j} < 0$, $j = 1, ..., q$.

Рассмотрим дифференциальные операторы

$$Q_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) ... \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_r \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$Q_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{r+1} \frac{\partial}{\partial x}\right) ... \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{r+p} \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$Q_2 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_{r+p+1} \frac{\partial}{\partial x}\right) ... \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_n \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Уравнение (4.1) можно записать в виде

$$Q_0\, Q_1\, Q_2\, u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_0, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{Q}_0\, \mathcal{Q}_1\, u_1(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_0, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{Q}_0\, \mathcal{Q}_2\, u_2(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_0. \tag{4.7}$$

В [2] (стр. 16) доказано, что общее решение (4.5) можно представить в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \tag{4.8}$$

где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – произвольные решения уравнений (4.6) и (4.7), принадлежащие классам M^+ и M^-, соответственно, и функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ определяются через $u(x,t)$. Пусть $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ аналитичны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно, и пусть $t \in \Gamma$. Обозначим через $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ пределы функций $\varphi(z)$ и $\Psi(z)$ при $z \to t$, $\operatorname{Im} z > 0$ и $z \to t$, $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно. Из определения классов M^+ и M^- следует, что

$$\frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t^k} = \varphi_k^+(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+p-1, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t^k} = \Psi_k^-(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+q-1, \tag{4.10}$$

где $\varphi_k(z)$ $(k = 0, ..., r+p-1)$ и $\Psi_k(z)$, $(k = 0, ..., r+q-1)$ аналитичны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно, а $\varphi_k(z) \in N^+$ и $\Psi_k(z) \in N^-$. В [2] (стр. 48) доказано, что если функции $\varphi_k^+(x)$ и $\Psi_k^-(x)$ удовлетворяют вышеприведенным условиям, то задачи Коши (4.6), (4.9) и (4.7), (4.10) имеют единственное решение в классах M^+ и M^-, соответственно. Следовательно, для решения задачи (4.1), (4.2) достаточно определить аналитические функции $\varphi_k(z)$ и $\Psi_j(z)$ $(k = 0, ..., r+p-1,\ j = 0, ..., r+q-1)$.

Подставляя $u(x,t)$ из (4.8) в (4.2) и учитывая (4.9) и (4.10), для аналитических функций $\varphi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$, $k = 0, ..., r+q-1$ получим следующую задачу сопряжения :

$$\varphi_k^+(x) - \Psi_k^-(x) = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., r+q-1. \tag{4.11}$$

Поскольку $\varphi_k(z) \in N^+$, $\Psi_k(z) \in N^+$ и $f_k(z) \in N$, $(k = 0, ..., r+q-1)$, то решение задачи (4.11) определяется так (см. [2], стр. 18) :

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)\,dt}{t-z}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad k = 0, ..., r+q-1, \tag{4.12}$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)\,dt}{t-z}, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad k = 0, ..., r+q-1. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{q+r} u_2(x,t)}{\partial t^{q+r}} + \sum_{k=0}^{q+r-1} b_k \frac{\partial^{q+r} u_2(x,t)}{\partial t^k \, \partial x^{q+r-k}} = 0, \tag{4.14}$$

где b_k $(k = 0, ..., q + r - 1)$ – некоторые постоянные. Из (4.14) и (4.10) получим

$$\frac{\partial^{q+r} u_2(x,0)}{\partial t^{q+r}} = - \sum_{k=0}^{q+r-1} b_k \frac{d^{q+r-k} \Psi_k^-(x)}{dx^{q+r-k}}. \tag{4.15}$$

Дифференцируя (4.14) по t j-раз и учитывая (4.10) и (4.15), получим все производные функции $u_2(x,t)$ по t в точке $(x,0)$. Поскольку функции $\Psi_k^-(z)$ $(k = 0, ..., r + q - 1)$ принадлежат N, то все эти производные при $t = 0$ принадлежат N. Подставляя $u(z)$ из (4.8) в (4.3) и учитывая (4.9), получим

$$\operatorname{Re}\left(a_k(x)\, \varphi_k^+(x)\right) = g_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = q + r, ..., p + r - 1, \tag{4.16}$$

где

$$g_k(x) = f_k(x) + \operatorname{Re}\left(a_k(x) \frac{\partial^k u_2(x,0)}{\partial t^k}\right), \quad x \in \Gamma, \quad k = q + r, ..., p + r - 1. \tag{4.17}$$

Отметим, что функции $g_k(z)$ принадлежат классу N. Таким образом, задача (3.1) – (4.3) сводится к задаче Римана–Гильберта (4.16) относительно аналитических в $\operatorname{Im} z > 0$ функций $\varphi_k(z)$ $(k = q + r, ..., p + r - 1)$ из класса N^+. Эта задача полностью исследована в предыдущих параграфах. Пусть $\varphi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$ при $k = 0, ..., r + q - 1$ определяются формулами (4.12) и (4.13), а $\varphi_k(z)$ при $k = q + r, ..., r + p - 1$ является решением задачи (4.16) в классе N^+. Подставляя эти функции в (4.9) и (4.10) и решая задачи Коши (4.6), (4.9) и (4.7), (4.10) определим функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Таким образом, доказали, что задача (4.1) – (4.3) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (4.16) и число линейно независимых решений однородных задач совпадает. Применяя Теоремы 0.1 и 0.2 к задаче (4.16), завершаем доказательство Теорем 4.1 и 4.2.

Рассмотрим теперь задачу Римана–Гильберта для более общего уравнения

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n} + \sum_{\substack{k+j \le n \\ k < n}} \alpha_{kj} \frac{\partial^{k+j} u(x,t)}{\partial t^k \, \partial x^j} = 0, \qquad (x,t) \in D. \tag{4.18}$$

где α_{kj} – некоторые постоянные.

Для заданного $x \in \Gamma$ обозначим через $\rho(x)$ число корней уравнения

$$\lambda^n + \sum_{\substack{k+j\leq n \\ k<n}} \alpha_{kj} \, (-i\,x)^j \, \lambda^k = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{4.19}$$

с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ (с учётом кратностей). Предположим, что

$$\rho(x) = \rho_1 \quad \text{при} \quad x > 0, \quad \text{и} \quad \rho(x) = \rho_2 \quad \text{при} \quad x < 0, \tag{4.20}$$

где ρ_1 и ρ_2 – некоторые неотрицательные числа. Отметим, что для уравнения (4.1) при $\rho_1 = p + r$ и $\rho_2 = q + r$ условия (4.20) выполняются. Не ограничивая общности будем предполагать, что $\rho_1 \geq \rho_2$.

Граничное условие для уравнения (4.18) имеет вид

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k} = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 0, ..., \rho_2 - 1, \tag{4.21}$$

$$\operatorname{Re}\left[a_k(x)\, \frac{\partial^k u(x,0)}{\partial t^k}\right] = f_k(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = \rho_2, ..., \rho_1 - 1, \tag{4.22}$$

где функции $a_k(x)$ и $f_k(x)$ обладают теми же свойствами, что и в (4.2) и (4.3). Будем искать решение в классе M.

В случае, когда индексы функций $a_k(x)$ на Γ равны нулю, задача (4.18), (4.21), (4.22) исследована в [2] (Гл. 1), где доказано существование и единственность решения. Аналогично задаче (4.1) – (4.3), задачу (4.18), (4.21), (4.22) можно свести к задаче (0.1) и доказать Теоремы 4.1 и 4.2. Числа $p + r$ и $q + r$ в (4.4) нужно заменить числами ρ_1 и ρ_2, соответственно.

Полученные результаты остаются в силе при условии, что (4.20) имеет место всюду, кроме конечного числа точек.

Abstract. The paper describes efficient methods of resolution of Riemann–Hilbert problem in the half-plane for classes of functions that are infinitely differentiable and tend to zero at infinity. The results are applied to boundary value problems for elliptic equations in the half-plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. N. E. Tovmasyan, Nonregular Differential Equations and Calculation of Electromagnetic Fields, Singapore, "World Scientific", 1998.

Поступила 18 ноября 2001

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 37, Номер 6, 2002

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 37, No. 6, 2002

Contents

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 37 НОМЕРА 1 — 6 2002

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика