ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 5, 2002, 3–11

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF THE HEAT EQUATION

A. E. Djrbashian

Glendale Community College, California, USA
e–mail : ashotd@earthlink.net

Abstract. The paper defines new classes of solutions of the heat equation in half-spaces and presents a series of integral representations for them. On the basis of these formulas boundedness of corresponding integral operators is proved.

INTRODUCTION

Consider the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \tag{1}$$

where $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, and $t > 0$. The classical Cauchy problem for (1) asks for a solution satisfying the initial data $u(x, 0) = f(x)$, where f is a bounded and continuous function.

A well-known solution is given by the formula :

$$u(x,t) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)dy, \tag{2}$$

where $c_n = (4\pi)^{-n/2}$. Solutions of the heat equation are commonly called **caloric functions**, and we will use that term throughout this paper.

Formula (2) suggests further generalizations. In fact, if we have

$$|f(x)| \leq C_1 \exp\{C_2|x|^\alpha\}, \quad \alpha < 2,$$

then the integral (2) will still be convergent and the resulting function u will satisfy the heat equation (1). In other words, formula (2) generates solutions to the heat equation in a wider class of initial value functions. A standard reference on second order parabolic equations is the book by A. Friedman [6].

In the present paper we find some integral formulas providing solutions to the equation (1). Our starting point is the case of harmonic functions [4]. In [4] we constructed the classes A_α^p based on an integral representation formula. Using the same idea of the classes A_α^p and well-known parallels between harmonic and caloric functions, we provide similar representations for the case of equation (1). Then we use these integral representations to prove boundedness of certain integral operators in weighted Lebesgue functional spaces.

Note that spaces of solutions of more general equations (elliptic and parabolic) were introduced in [2]. For some particular defining functions and certain values of p the spaces $\tilde{H}^p$ considered in [2] intersect with our A_α^p spaces of solutions of the heat equation. However, our methods and results appear totally different.

A preliminary version of this work was reported at Joint Mathematical Meeting of AMS in Baltimore (see Abstracts of Papers Presented to AMS, Issue 79, 1992, p. 93).

§1. CLASSES OF CALORIC FUNCTIONS AND THE REPRESENTING KERNEL

We consider the equation (1) in the upper half-space $(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $t > 0$. It is well-known that any caloric function is an infinitely differentiable function in any variable (see, e.g. [6]).

In analogy with the case of harmonic functions we define Hardy spaces of caloric functions as follows : a caloric function $u(x,t)$ in the half-space $\mathbb{R}_+^{n+1}$ belongs to the Hardy space CH^p, $0 < p \leq \infty$ (C stands for caloric), if

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx < \infty. \tag{3}$$

It is not difficult to see that CH^p functions possess boundary values and have integral representations given by the formula (2), where the boundary value of the given CH^p function stands for f. Moreover, the boundary function is in L^p and its L^p norm ($p > 1$) is estimated by the CH^p norm of the given function (see [2], [8] for details). The converse is also true. Indeed, let $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, and

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) f(y) dy, \tag{4}$$

where $K(x,t) = c_n t^{-n/2} \exp\{-|x|^2/4t\}$ is the heat kernel. The choice of c_n implies $\int K\, dx = 1$, hence by Hölder's inequality,

$$|u(x,t)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t) |f(y)|^p dy,$$

and our assertion is proved.
We observe, that if $u \in CH^p$, $1 \leq p \leq \infty$, then u is bounded in any half-space $t \geq c > 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Indeed, as it is mentioned above, u has the representation (4) and hence, again using Hölder's inequality we will find

$$|u(x,t)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)|f(y)|^p dy =$$

$$= Ct^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \exp\{-|x-y|^2/4t\}\, dy \leq Ct^{-n/2}\|f\|_p^p$$

or

$$|u(x,t)| \leq C\|f\|_p^{-n/2p}. \tag{5}$$

Hence, u is bounded in any half-space $t \geq c$ for any $c > 0$.
Now let us consider different spaces of caloric functions. A caloric function $u(x,t)$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ $(n \geq 1)$ belongs to the class CA^p_α, $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ (C again comes from caloric), if

$$\|u\|^p_{p,\alpha} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p t^\alpha\, dx\, dt < \infty.$$

Recall, that A^p_α functions have in general no boundary values (see [1] and [5]). The same is true for corresponding classes of caloric functions defined above, meaning that we cannot expect any integral formulas similar to (2).
One of the goals of this paper is to construct kernel functions, that produce formulas, which play a similar role. For representation formulas in A^p_α spaces of harmonic functions see [3], [4], [7].
There is no inclusion relationship between classes CH^p and CA^p_α. Indeed, let f be the characteristic function of the interval $[0,1]$ on the real line and

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} dy.$$

In that case

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\, dx = \int_0^1 dy = 1,$$

and $f \in CH^1$. At the same time,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) t^\alpha\, dx\, dt = \int_0^\infty t^\alpha\, dt = \infty.$$

Construction of an example for any p is similar. The proof of the converse is more complicated and the example will be provided by Theorem 2 later. The same theorem will also show that the classes CA^p_α are not trivial.

After these preliminary observations we turn to introduction of the main objects of the paper. For any integer $m \geq 0$ and $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ we denote

$$K_m(x,t) = \frac{(-2)^m}{m!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} K(x.t). \tag{6}$$

where $K(x,t)$ is the classical heat kernel, as before.

We will need effective estimates of this kernel in order to use it for integral representation formulas. As a first step, we calculate :

$$K(x,t) = \frac{c}{t^{n/2}} \exp\{-|x|^2/4t\}. \qquad K_0(x,t) = c_1 \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2}+2}(|x|^2 - t),$$

$$K_1(x,t) = c_2 \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2}+4}(|x|^4 - 3t|x|^2 + 2t^2).$$

Using induction, we get the following result.

Lemma 1. *For any integer $m \geq 0$ and $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ the kernels K_m satisfy the estimates*

$$|K_m(x,t)| \leq C \frac{e^{-|x|^2/4t}}{t^{n/2+2m+2}} \sum_{j=0}^{m+1} |x|^{(2m-j+1)} t^j. \tag{7}$$

To prove the integral representation formula, we need the following assertion.

Lemma 2. *For any $u \in CA^1_\alpha$, $\alpha > -1$ and any integer $m \geq 0$,*

$$N^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x, N+t) \to 0$$

uniformly for x as $N \to \infty$.

Proof : If $m = 0$ we just use (5) and the observation that functions from CA^1_α belong to CH^1 in any sub-half-space. So $u(x,t) \to 0$ uniformly for x as $t \to \infty$.

Assume now that $m > 0$. Applying integral formula (2) for the half-space $t > c > 0$ (here c is any positive constant), we get

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y,c) K(x-y, t-c)\, dy.$$

This integral converges absolutely, because of our assumption about the function u. Because u and K are smooth, we can differentiate under the integral sign and get

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y,c) \frac{\partial^m}{\partial t^m} K(x-y, t-c) dy.$$

Now, using estimates (7) from Lemma 1 we will get the desired result.

§2. INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDED PROJECTIONS

In this section we formulate and prove our main results. As we have mentioned above, the classes CA^p_α cannot have integral representations similar to those for the Hardy type spaces.

Theorem 1. *Let u be caloric in the upper half-space and let $u \in CA^p_\alpha$, $1 \leq p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$. For any integer m satisfying*

$$m \geq \alpha \quad \text{for} \quad p = 1; \quad m > (1+\alpha)/p - 1 \quad \text{for} \quad 1 < p < \infty, \tag{8}$$

the following integral representation formulas hold

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(y,\tau) K_m(x-y, t+\tau)\tau^m \, dy \, d\tau, \tag{9}$$

where

$$K_m(x,t) = \frac{(-2)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}} K(x,t).$$

Proof : First of all we show that integrals (9) are well defined. If $p = 1$ and $u \in CA^1_\alpha$, by Lemma 1,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(y,\tau)||K_m(x-y,t+\tau)|\tau^m \, dy \, d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(y,\tau)| \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp[-|x-y|^2/4(t+\tau)]}{(t+\tau)^{n/2+2m+2}} \sum_{j=0}^{m+1} |x-y|^{2(m-j+1)}(t+\tau)^j \right\} \tau^m \, dy \, d\tau.$$

Now, considering separately the possible cases $|x-y| \leq 1$, $|x-y| \geq 1$, $t+\tau \leq 1$ and $t+\tau \geq 1$, we find that

$$|K_m(x-y,t+\tau)|\tau^m \leq C \frac{\tau^m}{(t+\tau)^{n/2+m+1}},$$

where C depends on x only. It is easy to see, that if $m \geq \alpha$, then the right side of the last inequality is estimated by $C\tau^\alpha$, where C now depends on both x and t. If $1 < p < \infty$, then using Hölder's inequality and estimates like above, we see that integral (9) is finite if $m > (1+\alpha)/p - 1$.

We turn to the proof of the formula (9). Using, as in the proof of Lemma 2, the semigroup property of heat kernel we can write for any $t > 0$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y,t/2) K(x-y,t/2) \, dy. \tag{10}$$

and the integral converges absolutely. For any fixed $N > 0$ integration by parts gives

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y,t/2)K(x-y,t/2)\,dy = \frac{(-1)^m}{m!}\int_{\mathbb{R}^n} u(y,t/2)\times$$

$$\times\int_0^N \tau^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}K(x-y,t/2+\tau)\,d\tau\,dy + u(x,N+t)+\ldots+\frac{N^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial t^m}u(x,N+t). \quad (11)$$

Now we can use Lemma 2 to find the limit as $N \to \infty$. Thanks to the observations at the beginning of the proof, change of order of integration is justified because of absolute integrability of all integrals.

$$u(x,t) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty u(y,t/2)\tau^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}K(x-y,t/2+\tau)\,d\tau\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(y,t/2)\tau^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}K(x-y,t/2+\tau)\,d\tau\,dy =$$

$$= \frac{(-2)^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \tau^m\left\{\frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n} u(y,t/2)K(x-y,t/2+\tau)\,dy\right\}d\tau =$$

$$= \frac{(-2)^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \tau^m\left\{\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n} u(y,\tau)K(x-y,t+\tau)\,dy\right\}d\tau = \quad (12)$$

$$= \frac{(-2)^{m+1}}{m!}\int_0^\infty \tau^m d\tau\int_{\mathbb{R}^n} u(y,\tau)\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}K(x-y,t+\tau)\,dy =$$

$$= \frac{(-2)^{m+1}}{m!}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(y,\tau)\tau^m \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}K(x-y,t+\tau)\,dy\,d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(y,\tau)\tau^m K_m(x-y,t+\tau)\,dy\,d\tau.$$

This last chain of equalities proves our Theorem.

The integral representation formula proved in Theorem 1 allows to define certain projection operators in appropriate functional spaces. We define that spaces as follows : For $1 \le p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ denote by $L^p_\alpha = L^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ the class of all measurable functions, such that

$$\|g\|^p_{p,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |g(x,t)|^p t^\alpha\,dx\,dt < \infty.$$

It is obvious that $CA^p_\alpha \subset L^p_\alpha$. Also, it follows from the proof of the Theorem 1, that the integral in (9) remains well defined, if we replace $u \in CA^p_\alpha$, for $p \ge 1$ by any L^p_α function. Further, it is clear that

$$T_m g(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} g(y,t)K_m(x-y,t+\tau)\tau^m\,dy\,d\tau \quad (13)$$

is a caloric function, provided $g \in L^p_\alpha$, and the integer $m \ge 0$ satisfies certain conditions. Our next result describes the class of functions, to which the integral (13) belongs.

Theorem 2. *Assume $g \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $1 \le p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, and let the operator T_m be defined by the formula (13). If $m > (1+\alpha)/p - 1$, then the function $T_m g$ is caloric, $T_m g \in CA^p_\alpha$ and there exists a constant $C > 0$ depending only on p and α, such that*

$$\|T_m g\|_{p,\alpha} \le C\|g\|_{p,\alpha}. \tag{14}$$

Proof : First we treat the case $p = 1$. Let $g \in L^p_\alpha$ and denote $u = T_m g$, where $m > \alpha$. Using Fubini's theorem (see remarks at the beginning of the proof of Theorem 1), we get

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| t^\alpha \, dx\, dt \le \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} t^\alpha \, dx\, dt \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |g(y,\tau)| \cdot |K_m(x-y, t+\tau)| \tau^m \, dy\, d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |g(y,\tau)| \tau^m \, dy\, d\tau \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |K_m(x-y, t+\tau)| t^\alpha \, dx\, dt.$$

To estimate the inner integral we use Lemma 1 :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |K_m(x-y, t+\tau)| t^\alpha \, dx\, dt \le$$

$$\le C \sum_{j=0}^{m+1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\{-|x-y|^2/4(t+\tau)\}}{(t+\tau)^{n/2+2+2m}} |x-y|^{2(m+1-j)} (t+\tau)^j t^\alpha \, dx\, dt =$$

$$= C \sum_{j=0}^{m+1} \int_0^\infty \frac{(t+\tau)^j t^\alpha \, dt}{(t+\tau)^{n/2+2+2m}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t+\tau)}\right\} |x-y|^{2(m+1-j)} dx. \tag{15}$$

The inner integral on the right-hand side of (15) can be estimated using change of variable :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t+\tau)}\right\} |x-y|^{2(m+1-j)} \, dx =$$

$$= (t+\tau)^{n/2+m+1-j} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t+\tau)}\right\} \frac{|x-y|^{2(m+1-j)}}{(t+\tau)^{n/2+m+1-j}} dx =$$

$$= (t+\tau)^{n/2+m+1-j} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-|z|^2/4\} |z|^{2(m+1-j)} \, dz = C(t+\tau)^{n/2+m+1-j}.$$

So, (15) extends to

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |K_m(x-y, t+\tau)| t^\alpha \, dx\, dt \le C \int_0^\infty \frac{t^\alpha \, dt}{(t+\tau)^{m+1}} \le$$

$$\le C \int_0^\infty \frac{dt}{(t+\tau)^{m+1-\alpha}} = C\tau^{-m+\alpha}.$$

Finally, combining all these estimates yields

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| t^\alpha \, dx \, dt \le C \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |g(y,\tau)| \tau^m \tau^{-m+\alpha} \, dy \, d\tau = C \|g\|_{1,\alpha},$$

which proves Theorem in case $p = 1$. The proof of the case $1 < p < \infty$ is standard and based on the classical Schur lemma, which can be found in many books (see e.g. [5], p. 34, Lemma 2.2).

Lemma 3 (Schur). *Let μ be a positive measure on some σ-algebra of a set X, $K : X \times X \longmapsto [0, \infty)$ be a measurable function. Assume that there exists a measurable function $g : X \longmapsto [0, \infty)$ and constants a and b, such that for $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$,*

$$\int_X K(x,y)[g(y)]^q d\mu(y) \le (ag(x))^q, \quad x \in X,$$

$$\int_X K(x,y)[g(y)]^p d\mu(x) \le (bg(y))^p, \quad y \in X.$$

Then the equation

$$Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y)$$

defines a continuous operator on $L^p(d\mu)$ with $\|T\| \le ab$.

To conclude the proof of the Theorem, we need only to check the conditions of the Lemma, where $X = \mathbb{R}^{n+1}_+$, $d\mu$ is the Lebesgue measure in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $K = |K_m|$. As a test function g we can take t^δ with sufficiently small $\delta > 0$ and use estimates from the first part of the proof of the Theorem. The proof is now complete.

Concluding Remarks. 1) Theorem 2 shows that CA^p_α spaces are not empty. Indeed, any function of the form (13) with any $g \in L^p_\alpha$ is a function from CA^p_α.
2) Theorem 2 provides an example of a function, which belongs to the class CA^p_α but does not belong to Hardy-type class CH^p. Indeed, let us take a function (call it g) supported on the square $0 \le x \le 1$, $0 < t \le 1$ in the upper half-plane and zero everywhere else, and let it grow near the boundary $t = 0$ faster than t^{-1}. The function defined by formula (13) with m big enough, will obviously belong to CA^p_α (thanks to Theorem 2), but it will not belong to CH^p. We leave the details to the reader.

Резюме. В статье определяются новые классы решений уравнения теплопроводности в полупространствах и для них приводятся ряд интегральных представлений. На основе этих формул доказана ограниченность соответствующих интегральных операторов.

REFERENCES

1. S. Axler, P. Bourdon, W. Ramay, Harmonic Function Theory", Springer–Verlag, New York, Berlin, 1992.
2. A. P. Calderon, A. Torchinsky, "Parabolic maximum functions associated with a distribution", Advances in Math., vol. 16, no. 1, pp. 1 – 64, 1975, II. Ibid., vol. 24, no. 2, pp. 101 – 171, 1977.
3. R. R. Coifman, R. Rochberg, "Representation theorems for holomorphic functions in L^p", Asterisque, vol. 77, pp. 11 – 66, 1980.
4. A. E. Djrbashian, "A_α^p classes of harmonic functions in half-spaces and an analog of M. Riesz theorem" [in Russian], Izv. AN ArmSSR. Matematika, [English translation : Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), vol. 22, no. 4, pp. 386 – 398, 1987.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, Topics in the Theory of A_α^p Spaces, Teubner Texte zur Math., vol. 105, Teubner–Verlag, Leipzig, 1988.
6. A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
7. F. Ricci, M. Taibleson, "Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure", Annali Scuola Nor. Superiore – Pisa, Serie 6, vol. 10, no. 1, pp. 1 – 54, 1983.
8. E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

Поступила 29 марта 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 5, 2002, 12-26

РОСТ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

В. Лу, В. А. Мартиросян

Трирский Университет, Трир, Германия
Ереванский государственный университет
E–mails : luh@uni-trier.de ; mart@instmath.sci.am

Резюме. В статье исследуется существование мероморфных в единичном круге функций, которые универсальны относительно наперед заданных сдвигов и имеют ограниченную неванлинновскую характеристику.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Первый пример функции с универсальными сдвигами был найден Г. Д. Биркгофом [3], построившем целую функцию φ, обладающую следующим свойством : для любой целой функции f существует последовательность $\{\zeta_n\}$ комплексных чисел такая, что $\zeta_n \to \infty$ и $\varphi(z+\zeta_n) \to f(z)$ компактно на $\mathbf{C}$.

Сформулируем этот результат в равносильной форме. Сперва введем некоторые обозначения. Для компактного множества $K \subset \mathbf{C}$ обозначим через $A(K)$ семейство всех функций, непрерывных на K и голоморфных на его внутренности ; семейство $A(K)$, снабженное равномерной нормой, является банаховым пространством. Через $\mathcal{M}$ обозначим совокупность из всех компактных множеств K со связным дополнением $K^c = \mathbf{C} \setminus K$. Из теоремы Мергеляна легко следует, что функция Биркгофа имеет сдвиги, которые для всех $K \in \mathcal{M}$ плотны в $A(K)$.

Построенный Биркгофом пример функции с очень беспорядочным граничным поведением побудил интенсивные исследования в области, называемой теперь "теория универсальных функций". Например, если $G \subset \mathbf{C}$, $G \neq \mathbf{C}$ - односвязная область, то в [9] показано, что существует голоморфная на G функция φ со свойством : для каждого $K \in \mathcal{M}$, для каждого $f \in A(K)$ и каждой граничной точки $\zeta \in \partial G$ существуют последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что ($\mathcal{N}$ -

---

Исследовательская работа второго автора была поддержана Германской Академической Службой Обмена (ДААД)

множество натуральных чисел)

$$
\begin{aligned}
&a_n z + b_n \in G, \quad z \in K, \quad n \in \mathcal{N},\\
&a_n z + b_n \to \zeta,\\
&\varphi(a_n z + b_n) \to f(z) \quad \text{равномерно на } K.
\end{aligned}
$$

Много новых и важных результатов последовали в течение последней декады. За подробностями мы отсылаем к обзору К.-Г. Гроссе-Эрдманна [6], где весьма полно собрана и классифицирована литература относительно разных видов универсальности.

До сих пор очень мало известно о свойствах роста этих универсальных голоморфных функций. Первый результат по этой проблеме получен в статье [4] С. М. Диос-Руис, где были построены целые функции с универсальными сдвигами, имеющие медленный трансцендентный рост. Н. У. Аракелян и А. М. Акопян [2] доказали, что для каждого числа $\rho > 1/2$ существует целая функция φ в смысле Биркгофа такая, что ее неванлинновская характеристика удовлетворяет оценке $T(r,\varphi) = O(r^\rho)$ при $r \to \infty$.

В [7] А. М. Акопян показал, что существует голоморфная на $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функция φ с ограниченной неванлинновской характеристикой, которая универсальна относительно точки $\zeta = 1$ в следующем смысле : существуют последовательности $\{a_n\} \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$ и $\{b_n\} \subset \mathbb{D}$, $a_n \to 0$ и $b_n \to 1$ при $n \to \infty$ такие, что для всех $K \in \mathcal{M}$

$$a_n z + b_n \in \mathbb{D} \quad \text{для всех } z \in K \text{ и всех достаточно больших } n,$$

и обеспечивается плотность в $A(K)$ последовательности $\{\varphi(a_n z + b_n)\}$.

Можно ли улучшить свойства роста, если вместо голоморфных функций рассмотреть класс мероморфных функций ? В нашей предыдущей статье [11] установлено, что существует мероморфная на $\mathbf{C}$ функция φ с универсальными сдвигами (вдоль наперед заданной последовательности $\{\zeta_n\}$), чья неванлинновская характеристика удовлетворяет оценке $T(r,\varphi) = O(q(r)\log^2 r)$ при $r \to \infty$, где $q : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ – произвольно заданная возрастающая функция с $\lim\limits_{r\to\infty} q(r) = \infty$. Естественно спросить, существуют ли в областях $G \neq \mathbf{C}$ подобные универсальные мероморфные функции со свойствами относительно медленного роста. В этой заметке конструируется универсальная мероморфная в единичном круге $\mathbb{D}$ функция, имеющая минимально возможную скорость роста (измеренную неванлинновской характеристикой). Дополнительно требуем, чтобы универсальность имела место на заданных подмножествах из $\partial\mathbb{D}$ и чтобы сдвиги следовали по наперед предписанным последовательностям. Точнее, мы докажем следующую теорему (в ее формулировке $V(\{z_n\})$ означает множество всех предельных точек последовательности $\{z_n\}$).

Теорема. *Для заданных замкнутого множества $E \subset \partial\mathbb{D}$, последовательности $\{b_n\} \subset \mathbb{D}$ с $V(\{b_n\}) = E$ и последовательности $\{a_n\}$ с $0 \in V(\{a_n\})$, существует мероморфная на $\mathbb{D}$ функция F, обладающая следующими свойствами :*

(1) функция F имеет ограниченную неванлинновскую характеристику :

$$T(r, F) = O(1) \quad \text{при } r \to 1-.$$

(2) для каждого $K \in \mathcal{M}$, каждого $f \in A(K)$ и для каждого $\zeta \in E$ существуют последовательности $\{s_j\}$ и $\{t_j\}$ из $\mathcal{N}$ такие, что

$$\begin{aligned} a_{s_j} z + b_{t_j} &\in \mathbb{D} \quad \text{для всех } z \in K \text{ и всех } j \in \mathcal{N}, \\ a_{s_j} z + b_{t_j} &\to \zeta, \\ F(a_{s_j} z + b_{t_j}) &\to f(z) \quad \text{равномерно на } K. \end{aligned}$$

§2. АППРОКСИМАЦИЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В этом параграфе рассматриваем последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек $z_n \in \mathbb{D}$, для которой $V(\{z_n\}) \subset \partial\mathbb{D}$ и $|z_{n+1}| > |z_n|$ при всех $n \in \mathcal{N}$. С $\{z_n\}$ будем ассоциировать последовательность замкнутых кругов $S_n = \{z : |z - z_n| \le r_n\}$ с радиусами $r_n = \lambda_n(1 - |z_n|)$, где $\lambda_n \in (0, 1/3]$ произвольно. Предполагается, что все $A_n = \{z : |z_n| - r_n \le |z| \le |z_n| + r_n\}$, $(n \in \mathcal{N})$ попарно не пересекаются. Положим

$$S_n' = \left\{ z : |z - z_n| \le \frac{3}{4} r_n \right\}, \quad S_n'' = \left\{ z : |z - z_n| \le \frac{1}{4} r_n \right\}$$

и будем использовать следующие обозначения : $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, $S' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n'$, $S'' = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n''$. В доказательстве сформулированной выше теоремы существенным средством является Лемма 2, где рассматривается мероморфная аппроксимация функций, голоморфных на подобных множествах S. При этом оказывается важной оценка роста аппроксимирующих мероморфных функций. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любой возрастающей функции $\varphi : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция h, которая для всех $z \in S'$ с $|z| \geq \frac{1}{4}$ удовлетворяет оценкам*

$$\log\frac{1}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|-1}{3}\right) \leq \log|h(z)| \leq \log\frac{3}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|+1}{5}\right).$$

Доказательство. Пусть функция g определена на S следующим образом : $g(z) = e^{\varphi(|z_n|)}$ при $z \in S_n$. Ясно, что g голоморфна на S, и согласно аппроксимационной теореме Аракеляна [1] (см. также [5], стр. 126), существует функция h, голоморфная на $\mathbb{D}$ такая, что

$$|g(z) - h(z)| < \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad z \in S.$$

Отсюда для всех $z \in S_n$

$$\frac{1}{2}e^{\varphi(|z_n|)} \leq e^{\varphi(|z_n|)} - \frac{1}{2} \leq |h(z)| \leq e^{\varphi(|z_n|)} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}e^{\varphi(|z_n|)}.$$

При всех $z \in S'_n$ имеем

$$\frac{1}{3}(4|z|-1) \leq |z_n| \leq \frac{1}{5}(4|z|+1),$$

так что утверждение леммы вытекает из свойства возрастания функции φ.

В следующей лемме используется такое

Определение. *Предположим, что $\varphi : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ – возрастающая функция с $\lim\limits_{t\to 1-}\varphi(t) = \infty$. Последовательность кругов $\{S_n\}$ называется* **редкой относительно** φ, *если она удовлетворяет всем приведенным выше требованиям и выполняются следующие дополнительные условия :*

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_j|)} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varphi(|z_j| + \frac{3}{4}r_j)}{\varphi(|z_n|)} \leq 1, \quad n = 2, 3\cdots.$$

Из второго условия следует оценка

$$(n-1)\varphi(|z_1|) \leq \sum_{j=1}^{n-1}\varphi\left(|z_j| + \frac{3}{4}r_j\right) \leq \varphi(|z_n|),$$

откуда получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_n|)} \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\varphi(|z_1|)} < \infty.$$

Итак, первое условие вытекает из второго, если отбросить конечное число членов последовательности $\{z_n\}$. Следовательно, предположение $\sum\limits_{j=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_j|)} \le 1$ не умаляет общности.

Если последовательность кругов $\{S_n\}$ является редкой относительно φ, то любая ее подпоследовательность обладает тем же самым свойством.

Лемма 2. *Пусть $\varphi : [0,1) \longmapsto \mathbb{R}^+$ – возрастающая функция с $\lim\limits_{t\to 1-} \varphi(t) = \infty$, и $\{S_n\}$ – последовательность кругов, редкая относительно φ. Предположим, что функция f голоморфна на S и $\log^+|f(z)| = O(\varphi(|z|))$ при $z \in S'$, $|z| \to 1$. Тогда существует мероморфная на $\mathbb{D}$ функция g с полюсами только на $\partial S'$ со следующими свойствами :*

(1) $$|f(z) - g(z)| < 1 \quad \text{для всех } z \in S'',$$

(2) $$T(r,g) = O\left((1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \int_a^r \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right) dt\right), \quad r \to 1-,$$

где $a \in (0,1)$ – подходящая постоянная.

Доказательство. 1. Пусть Γ_n – положительно ориентированная граница для S_n', и $\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Из интегральной формулы Коши следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in S'.$$

Для подходящего $p \in \mathcal{N}$ выберем равномерно распределенные на Γ_n точки $\zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{np}$; $\zeta_{n,p+1} = \zeta_{n1}$ так, чтобы поддуги $\gamma_{n\nu}$, соединяющие $\zeta_{n\nu}$ с $\zeta_{n,\nu+1}$ ($\nu = 1, \ldots, p$) были попарно непересекающимися (предполагается, что $\zeta_{n\nu} \in \gamma_{n\nu}$, но $\zeta_{n,\nu+1} \notin \gamma_{n\nu}$) и чтобы $\Gamma_n = \bigcup_{\nu=1}^{p} \gamma_{n\nu}$. Число p можно выбрать независимым от n, чтобы выполнялась оценка

$$\text{длина}(\gamma_{n\nu}) < \frac{1}{8} r_n \quad \text{при} \quad \nu = 1, \dots, p, \quad n \in \mathcal{N} \tag{1}$$

(возможный выбор $p = 378$). Ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_{n\nu})^{j-1}}{(z - \zeta_{n\nu})^j}$$

равномерно сходится при $\zeta \in \gamma_{n\nu}$ и $z \in S_n'' \cup S_n^c$. Для $z \in \mathbf{C}$ и $\zeta \in \Gamma$ рассмотрим функцию

$$R(\zeta, z) = -\sum_{j=1}^{N_n} \frac{(\zeta - \zeta_{n\nu})^{j-1}}{(z - \zeta_{n\nu})^j}, \quad \zeta \in \gamma_{n\nu}, \tag{2}$$

где N_n – натуральные числа, точно определяемые позже. Из (1) и (2) для всех $\zeta \in \Gamma_n$ и $z \in S_n'' \cup S_n^c$ получим

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta, z) \right| < \frac{8}{r_n} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{N_n}. \tag{3}$$

Теперь, при $z \in \mathbb{D}$ определим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) R(\zeta, z)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} f(\zeta) R(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{4}$$

и докажем, что эта функция имеет все требуемые свойства, если числа $N_n \in \mathcal{N}$ выбраны подходящим образом.

2. а) Проверим сперва, что g мероморфна на $\mathbb{D}$. Для любого $r \in (0, 1)$ рассмотрим круг $\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ и выберем $n_0 \in \mathcal{N}$ так, чтобы $\overline{\mathbb{D}_r} \cap \bigcup_{n=n_0}^{\infty} S_n = \emptyset$. Если $L_0 = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Gamma_n$, то для всех $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Определим функцию

$$g_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} f(\zeta)R(\zeta,z)\,d\zeta.$$

Из (3), для всех $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$ имеем

$$|g_0(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} f(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta,z)\right\}d\zeta\right| \le \frac{4}{\pi}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{r_n}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_n}\int_{\Gamma_n} e^{c_1\varphi(|\zeta|)}\,|d\zeta|,$$

где c_1 – некоторая положительная постоянная (в последующем $c_2,\ldots,c_{12}$ будут означать другие положительные абсолютные постоянные). Если теперь выбрать некоторое $N_n \in \mathcal{N}$ так, чтобы

$$\frac{4}{\pi r_n}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_n}\int_{\Gamma_n} e^{c_1\varphi(|\zeta|)}\,|d\zeta| \le e^{-\varphi(|z_n|)}, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{5}$$

то для всех $z \in \overline{\mathbb{D}_r}$

$$|g_0(z)| \le \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-\varphi(|z_n|)} \le 1.$$

В силу произвольности $r \in (0,1)$ отсюда следует, что ряд (4) определяет мероморфную на $\mathbb{D}$ функцию, которая имеет полюсы только на $\partial S'$ (отметим, что этот ряд сходится компактно в $\mathbb{D}$).

b) Для всех $z \in S''$ имеем

$$|f(z) - g(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta,z)\right\}\,d\zeta\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta - z} - R(\zeta,z)\right\}\,d\zeta\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varphi(|z_n|)} \le 1. \tag{6}$$

Аналогично

$$|g(z)| \le 1, \quad z \in \mathbb{D}\setminus S. \tag{7}$$

Таким образом, функция g равномерно аппроксимирует функцию f на S'' и нуль на $\mathbb{D} \setminus S$.

3. Перейдем теперь к оценке величины

$$m(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| g(re^{i\theta} \right| d\theta.$$

Для $r \in (0,1)$ рассмотрим $C_r = \partial \mathbb{D}_r = \{z : |z| = r\}$. Если $r \notin (|z_n| - r_n, |z_n| + r_n)$ для всех $n \in \mathcal{N}$, то из (7) непосредственно следует

$$m(r, g) = 0. \tag{8}$$

Если $|z_n| - r_n < r < |z_n| + r_n$ для некоторого $n \in \mathcal{N}$, то разложим C_r на три части : $C_r^1 = C_r \setminus S$, $C_r^2 = C_r \cap S''$, $C_r^3 = C_r \cap (S \setminus S'')$. Из (7) снова получим

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^1} \log^+ |g(re^{i\theta})| \, d\theta = 0. \tag{9}$$

Согласно (6) и предположениям о f имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^2} \log^+ |g(re^{i\theta})| \, d\theta \le \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^2} \log^+ |g(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| \, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^2} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta + \log 2 \le \log 2 + c_2 \varphi(r)(1 - |z_n|). \tag{10}$$

Далее оценим интеграл

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{re^{i\theta} \in C_r^3} \log^+ |g(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Предположим, что $z = re^{i\theta} \in C_r^3 \setminus \Gamma_n$ – фиксировано. Тогда

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_n} + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_n} \right) f(\zeta) R(\zeta, z) \, d\zeta \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_n} f(\zeta)R(\zeta,z)\,d\zeta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_n} f(\zeta)\left\{R(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right\}d\zeta\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{p}\left|\int_{\gamma_{n\nu}} f(\zeta)R(\zeta,z)\,d\zeta\right| + 1 \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{N_n}\int_{\gamma_{n\nu}} |f(\zeta)|\frac{|\zeta-\zeta_{n\nu}|^{j-1}}{|z-\zeta_{n\nu}|^{j}}\,|d\zeta| + 1.$$

Введем функцию $\delta_n(z) = \min_{1\leq\nu\leq p}|z-\zeta_{n\nu}|$. Поскольку φ – возрастающая функция, то (1) влечет оценки

$$|g(z)| \leq 1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{N_n}\frac{(r_n/8)^{j-1}}{\delta_n^j(z)}\int_{\gamma_{n\nu}}|f(\zeta)|\,|d\zeta| \leq$$

$$\leq 1 + 6\exp\left(c_1\varphi(|z_n| + \frac{3}{4}r_n)\right)\sum_{j=1}^{N_n}\left(\frac{r_n}{8\delta_n(z)}\right)^j \leq$$

$$\leq 1 + 6N_n\exp\left(c_1\varphi(|z_n| + \frac{3}{4}r_n)\right)\cdot\left\{\left(\frac{r_n}{8\delta_n(z)}\right)^{N_n} + 1\right\}.$$

В силу предположений относительно r имеем $|z_n| + \frac{3}{4}r_n \leq \frac{9r+7}{16}$. Следовательно,

$$\log^+|g(re^{i\theta})| \leq c_3 + c_1\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \log N_n + N_n\log^+\frac{r_n}{8\delta_n(re^{i\theta})}. \tag{11}$$

Покажем теперь, что

$$\int_{re^{i\theta}\in C_r^3}\log^+\frac{r_n}{8\delta_n(re^{i\theta})}\,d\theta \leq c_4 r_n. \tag{12}$$

Разделим C_r^3 на две дуги, на каждой из них имеем $\delta_n(re^{i\theta}) \geq \left|re^{i\theta} - re^{i\theta_0}\right| \geq c_5|\theta-\theta_0|$, где $re^{i\theta_0}$ – точка, в которой соответствующая поддуга для C_r^3 пересекает (или ближайшая к) $\partial S_n'$. Замечая, что C_r^3 стягивает угол порядка r_n, получим

$$\int_{re^{i\theta}\in C_r^3}\log^+\frac{r_n}{8\delta_n(re^{i\theta})}\,d\theta < 2\int_0^{c_6 r_n}\log\frac{r_n}{8c_5 t}\,dt = c_4 r_n.$$

Интегрируя неравенство (11) по $re^{i\theta} \in C_r^3$ и учитывая (12), получим

$$I_3 \leq c_7 \left(\varphi \left(\frac{9r+7}{16} \right) + N_n \right) (1 - |z_n|).$$

Если выбрать

$$N_n = 1 + \left[\frac{\log 8 + \varphi(|z_n|) + c_1 \varphi(|z_n| + \frac{3}{4} r_n)}{\log 2} \right] \tag{13}$$

(где $[x]$ означает целую часть от x), то будет удовлетворяться как (5), так и оценка

$$8 \left(\frac{1}{2} \right)^{N_n} \exp \left(c_1 \varphi(|z_n| + \frac{3}{4} r_n) \right) \leq e^{-\varphi(|z_n|)}.$$

Для $re^{i\theta} \in C_r^3$ имеем $N_n \leq c_8 \varphi \left(\frac{9r+7}{16} \right)$, и следовательно получим

$$I_3 \leq c_9 (1 - r) \varphi \left(\frac{9r+7}{16} \right). \tag{14}$$

Собирая вместе (8) – (10), (14), для всех $r \in (0, 1)$ получим оценку

$$m(r, g) \leq c_{10} (1 - r) \varphi \left(\frac{9r+7}{16} \right). \tag{15}$$

4. Оценим неванлинновскую характеристическую функцию $T(r, g) = m(r, g) + N(r, g)$. Как обычно, $n(t, g)$ – число полюсов функции g из круга $|z| \leq t$, засчитываемых с учетом их кратностей. Существует $a \in (0, 1)$ такое, что g не имеет полюсов при $|z| \leq a$, и поэтому

$$N(r, g) = \int_a^r \frac{n(t, g)}{t} \, dt.$$

Из (13) получим

$$N_n \leq c_{11} \varphi \left(|z_n| + \frac{3}{4} r_n \right).$$

Предполагая сперва, что $|z_n| - \frac{3}{4}r_n \le t < |z_n| + \frac{3}{4}r_n$, будем иметь $n(t,g) \le p\sum\limits_{j=1}^{n} N_j$.

Поэтому редкость $\{S_n\}$ относительно φ влечет

$$n(t,g) \le pc_{11}\varphi\left(|z_n| + \frac{3}{4}r_n\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varphi(|z_j| + \frac{3}{4}r_j)}{\varphi(|z_n|)}\right) \le$$

$$\le 2pc_{11}\varphi\left(|z_n| + \frac{3}{4}r_n\right) \le c_{12}\varphi\left(\frac{3t+2}{5}\right).$$

Если же $|z_{n-1}| + \frac{3}{4}r_{n-1} \le t < |z_n| - \frac{3}{4}r_n$, то $n(t,g) \le p\sum\limits_{j=1}^{n-1} N_j$, и получим

$$n(t,g) \le pc_{11}\varphi\left(|z_{n-1}| + \frac{3}{4}r_{n-1}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-2}\frac{\varphi(|z_j| + \frac{3}{4}r_j)}{\varphi(|z_{n-1}|)}\right) \le$$

$$\le 2pc_{11}\varphi\left(|z_{n-1}| + \frac{3}{4}r_{n-1}\right) \le c_{12}\varphi(t).$$

В обоих случаях для всех $t \in (0,1)$ выполняется оценка $n(t,g) \le c_{12}\varphi\left(\frac{3t+2}{5}\right)$. Следовательно

$$N(r,g) = O\left(\int_a^r \varphi\left(\frac{3t+2}{5}\right)\frac{dt}{t}\right), \quad r \to 1-.$$

Отсюда и из (15) получим

$$T(r,g) = O\left((1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \int_a^r \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right)dt\right), \quad r \to 1-,$$

что завершает доказательство Леммы 2.

Замечание. Если в Лемме 2 функция роста φ принадлежит $L^1(0,1)$, то аппроксимирующая мероморфная функция g имеет ограниченную характеристику $T(r,g)$. Это следует из оценки

$$(1-r)\varphi\left(\frac{9r+7}{16}\right) + \int_a^r \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right)dt \le \int_a^1 \varphi\left(\frac{9t+7}{16}\right)dt \le \frac{16}{9}\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Предположим, что E^* – плотное подмножество для E, и пусть $\{\ell_k^*\}$ есть некоторая нумерация для E^*; предположим также, что $\{\Omega_k^*\}$ есть нумерация всех многочленов, коэффициенты которых имеют рациональные вещественные и мнимые части. Пусть $\{(\ell_k, \Omega_k)\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторое переразмещение из точек ℓ_k^* и многочленов Ω_k^*, в котором любая комбинация (ℓ_r^*, Ω_s^*) встречается бесконечное число раз.

Для любого $k \in \mathcal{N}$ очевидно существуют постоянные $c_k > 0$ и $d_k \in \mathcal{N}$ такие, что $|\Omega_k(w)| \leq c_k \max\{1, |w|^{d_k}\}$ для всех $w \in \mathbf{C}$. Возьмем $\varphi(t) = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$, $t \in [0,1)$ в качестве функции из $L^1(0,1)$.

2. Построим индукцией последовательности $\{a_{m_k}\}, \{b_{n_k}\}$ и $\{\lambda_k\}$. Предположим, что для $k \in \mathcal{N}$, $k \geq 2$ числа $m_j \in \mathcal{N}$, $n_j \in \mathcal{N}$ и $\lambda_j \in (0, 1/3]$ уже определены при всех j, $1 \leq j \leq k-1$. Положим $r_j = \lambda_j(1-|b_{n_j}|)$, $\varepsilon_j = \frac{1}{3}(1-|b_{n_j}|)$. Тогда $0 < r_j \leq \varepsilon_j$ при всех j, $1 \leq j \leq k-1$. Выберем $n_k \in \mathcal{N}$, $n_k > n_{k-1}$ достаточно большим, чтобы иметь $|b_{n_k} - \ell_k| < 1/k$, и чтобы $\varepsilon_k = \frac{1}{3}(1-|b_{n_k}|)$ удовлетворяло неравенству

$$\varepsilon_k < \min\left\{\frac{\varepsilon_{k-1}}{3k^2}, \frac{\alpha^{2d_k}}{c_k^2 k^{2d_k}}\right\} \tag{16}$$

с некоторой постоянной $\alpha > 0$. Далее, выберем $m_k \in \mathcal{N}$, $m_k > m_{k-1}$ достаточно большим, чтобы иметь $|a_{m_k}| < \frac{\varepsilon_k}{k}$. С учетом сказанного выше, найдется $\lambda_k \in (0, 1/3]$ такое, что

$$c_k\left(\frac{3\lambda_k(1-|b_{n_k}|)}{4|a_{m_k}|}\right)^{d_k} < [(1-\lambda_k)(1-|b_{n_k}|)]^{-1/2}$$

и

$$\frac{\lambda_k(1-|b_{n_k}|)}{|a_{m_k}|} \geq k. \tag{17}$$

Итак, получаем последовательности $\{a_{m_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$ и $\{\lambda_k\}$.

3. Определим $r_k = \lambda_k(1-|b_{n_k}|)$ и рассмотрим множества $S_k = \{z : |z - b_{n_k}| \leq r_k\}$, $S_k' = \{z : |z - b_{n_k}| \leq \frac{3}{4} r_k\}$, $S_k'' = \{z : |z - b_{n_k}| \leq \frac{1}{4} r_k\}$. При подходящем выборе постоянной α

$$\left|\Omega_k\left(\frac{z - b_{n_k}}{a_{m_k}}\right)\right| < \log\frac{1}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|-1}{3}\right), \quad z \in S_k'.$$

Из (17) имеем $\frac{r_k}{|a_{m_k}|} \to \infty$, а (16) легко влечет, что кольца $A_k = \{z : |b_{n_k}| - r_k \leq |z| \leq |b_{n_k}| + r_k\}$ попарно непересекающиеся и что последовательность $\{S_k\}$ редкая относительно функции φ.

4. По Лемме 1 существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция h, удовлетворяющая для всех $z \in S' = \bigcup_{k=1}^{\infty} S'_k$, $|z| \geq \frac{1}{4}$ оценкам

$$\log\frac{1}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|-1}{3}\right) \leq \log|h(z)| \leq \log\frac{3}{2} + \varphi\left(\frac{4|z|+1}{5}\right). \tag{18}$$

Функция $\Omega(z) = \Omega_k\left(\frac{z-b_{n_k}}{a_{m_k}}\right)$ при $z \in S_l$, $k \in \mathcal{N}$ голоморфна на S и удовлетворяет оценке

$$|\Omega(z)| \leq |h(z)| \quad \text{для всех} \quad z \in S'. \tag{19}$$

Согласно Лемме 2 и Замечанию, существует мероморфная на $\mathbb{D}$ функция g_1, которая голоморфна на $S'' = \bigcup_{k=1}^{\infty} S''_k$ и удовлетворяет условиям :

$$T(r, g_1) = O(1) \quad \text{при} \quad r \to 1- \tag{20}$$

и

$$|h(z) - g_1(z)| < 1 \quad \text{для всех} \quad z \in S''. \tag{21}$$

Из (18), (19) и (21) для всех $z \in S''$

$$\log^+|\Omega(z)g_1(z)| \leq \log^+|\Omega(z)| + \log^+|g_1(z)| \leq$$

$$\leq 2\log^+|h(z)| + \log 2 \leq 2\varphi\left(\frac{4|z|+1}{5}\right) + 3\log 2.$$

Последовательность $\{S''_n\}$ редкая относительно функции $\varphi\left(\frac{4t+1}{5}\right)$ и функция $\Omega(z)g_1(z)$ голоморфна на S''. Если положить

$$\tilde{S}_k = \left\{z : |z - b_{n_k}| \leq \frac{1}{16}r_k\right\}, \quad \tilde{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{S}_k,$$

то по Лемме 2 найдется мероморфная на $\mathbb{D}$ функция g, которая голоморфна на $\bar{S}$ и удовлетворяет условиям

$$T(r, g) = O(1) \quad \text{при} \quad r \to 1-, \tag{22}$$

и

$$|\Omega(z) g_1(z) - g(z)| < 1 \quad \text{для всех} \quad z \in \bar{S}. \tag{23}$$

5. Покажем, что мероморфная на $\mathbb{D}$ функция $F(z) = \frac{g(z)}{g_1(z)}$ имеет все требуемые свойства.

а) Из (18) и (21) следует

$$|g_1(z)| \geq |h(z)| - 1 \geq \frac{1}{2} \exp\left(\varphi\left(\frac{4|z| - 1}{3}\right)\right) - 1, \quad z \in \bar{S},$$

и поскольку $\lim\limits_{t \to 1-} \varphi(t) = \infty$, то из (23) получим

$$|\Omega(z) - F(z)| \leq \frac{1}{|g_1(z)|} \to 0 \quad \text{при} \quad z \in \bar{S}, \quad |z| \to 1. \tag{24}$$

Свойства (20) и (22) влекут

$$T(r, f) \leq T(r, g) + T\left(r, \frac{1}{g_1}\right) = T(r, g) + T(r, g_1) + O(1) = O(1), \quad r \to 1-.$$

итак выполняется утверждение (1) Теоремы.

b) Чтобы показать справедливость утверждения (2), зададимся произвольными компактом $K \in \mathcal{M}$, функцией $f \in A(K)$ и точкой $\zeta \in E$. По теореме Мергеляна существует подпоследовательность $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что $\{\Omega_{k_s}(z)\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к $f(z)$ равномерно на K. Из (24) и определения функции Ω имеем

$$\max_{\bar{S}_{k_s}} \left| \Omega_{k_s}\left(\frac{z - b_{n_{k_s}}}{a_{m_{k_s}}}\right) - F(z) \right| \to 0, \quad s \to \infty.$$

Отсюда при $\varrho_s = r_{k_s}/16|a_{m_{k_s}}|$ следует

$$\max_{|z| \leq \varrho_s} \left| F\left(z a_{m_{k_s}} + b_{n_{k_s}}\right) - \Omega_{k_s}(z) \right| \to 0, \quad s \to \infty.$$

Наконец, существует подпоследовательность $\{s_\nu\}$, для которой $b_{n_{k_{s_\nu}}} \to \zeta$ при $\nu \to \infty$. Так как $K \subset \{z : |z| \leq \varrho_{s_\nu}\}$ для всех достаточно больших ν, то (2) установлено. Доказательство завершено.

Abstract. The article investigates the existence of meromorphic functions in the unit disk, that are universal under prescribed translates and have bounded Nevanlinna's characteristic.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Равномерное приближение целыми функциями на замкнутых множествах", Изв. АН СССР, серия Математика, том 28, стр. 1187 – 1206, 1964.
2. N. U. Arakelian, A. M. Hakopian, "Entire functions with infinite set of deficient functions", Israel Math. Conference Proceedings, 1999.
3. G. D. Birkhoff, "Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 189, pp. 473 – 475, 1929.
4. С. М. Диос-Руис, "О существовании универсальных функций", ДАН СССР, том 268, стр. 18 – 22, 1983.
5. D. Gaier, Lectures on Complex Approximation, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1987.
6. K.-G. Grosse-Erdmann, "Universal functions and hypercyclic operators", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp. 345 – 381, 1999.
7. А. М. Акопян, "Дефектные функции ограниченного вида", Изв. НАН Армении. Математика, том 33, № 5, стр. 17 – 25, 1998.
8. W. K. Hayman, Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.
9. W. Luh, "Ueber cluster sets analytischer Funktionen", Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 33, no. 1 – 2, pp. 137 – 147, 1979.
10. W. Luh, "Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten, Aequationes Math., vol. 19, pp. 183 – 193, 1979.
11. W. Luh, V. A. Martirosian, "On the growth of universal meromorphic functions", Analysis, vol. 20, pp. 137 – 147, 2000.
12. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1936.

Поступила 11 августа 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 5, 2002, 27–39

ОЦЕНКИ СВЕРХУ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Маргарян

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Резюме. В статье рассмотрены гипоэллиптические операторы $P(D)$ с постоянными коэффициентами, и установлены оценки сверху функциональной размерности пространства решений уравнения $P(D)u = 0$. Оценки определяются по поведению символа оператора $P(D)$ в бесконечности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для заданного компакта F и $\varepsilon > 0$, Л. Понтрягиным и Л. Шнирелманом [1] была определена функция $N(\varepsilon, F)$ как минимальное число замкнутых множеств с диаметром, не превосходящим ε, покрывающих F. В [1] через $N(\varepsilon, F)$ определяется метрический порядок компакта F. Доказано, что для всех метрик компакта F, не меняющих топологию, величина

$$k(F) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon, F)}{\ln \varepsilon^{-1}}$$

равна размерности F. В частности, $k(F)$ является топологическим инвариантом. В [2] А. Колмогоровым и В. Тихомировым было доказано, что для некоторых вполне ограниченных множеств F аналитических функций, ε–энтропия $H(\varepsilon, F) = \ln N(\varepsilon, F)$ ведет себя как $\left(\ln \varepsilon^{-1}\right)^s$, при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим так называемую функциональную размерность множества A гладких функций :

$$df\, A = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln H(\varepsilon, A)}{\ln \ln \varepsilon^{-1}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS Grant No. 99-01080.

Пусть E – локально выпуклое пространство, U – окрестность нуля в E, а $A \subset E$ – некоторое множество. Для заданного $\varepsilon > 0$ множество B называется ε–сетью множества A относительно U, если $A \subset B + \varepsilon U$.

Для заданного множества $A \subset E$ обозначим через $N(A, \varepsilon U)$ наименьшее число элементов ε–сети множества A относительно U. Далее, через $M(A, \varepsilon U)$ обозначим максимальное число элементов $x_1, ..., x_m \in A$, для которых $x_i - x_j \notin \varepsilon U$ при $i \neq j$, $i, j = 1, ..., m$. Имеем (см. [2]) $M(A, 2\varepsilon U) \leq N(A, \varepsilon U)$.

Определение 1 (см. [2]). *Для заданного линейного, локально выпуклого пространства E функциональной размерностью E является*

$$df\, E = \sup_U \inf_V \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln H(V, \varepsilon U)}{\ln \ln \varepsilon^{-1}},$$

где U и V пробегают все окрестности нуля в E.

В [3] Ю. Комурой доказано, что если $P(D)$ – гипоэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то $df\, N(P) < \infty$, где $N(P) = \{u\colon\ u \in C,\ P(D)\, u = 0$ как распределение $\}$ и $df\, N(P) = n$, если $P(D)$ – эллиптический оператор от n переменных. В [4] — [7] получены оценки сверху и снизу функциональной размерности пространств решений для некоторых классов гипоэллиптических уравнений. В [8] доказано, что $df\, N(P) = n$ тогда и только тогда, когда $P(D)$ является эллиптическим оператором от n переменных.

Цель настоящей статьи найти более точные, чем полученные в [3] — [8] оценки сверху функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала приведем несколько обозначений и определений :

$\mathbb{R}^n$ = n–мерное действительное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$;

$\mathbb{E}^n$ = n–мерное действительное евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n)$;

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\, \mathbb{R}^n$; $\qquad \mathbb{R}^n_+ = \{\nu \in \mathbb{R}^n\colon \nu_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$;

N^n_+ = множество элементов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где α_k – неотрицательные целые числа ;

$\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, ..., \xi_n^{\alpha_n})$; $|\xi|^\nu = |\xi|^{\nu_1} ... |\xi|^{\nu_n}$; $\|\xi\| = \sqrt{\sum_j |\xi_j|^2}$;

$\xi^{(j)} = (\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, ..., \xi_n)$, $j = 1, ..., n$;

$\alpha^j = \alpha_1^j ... \alpha_n^j$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = -i\, \dfrac{\partial}{\partial x_j}$;

Ниже $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, где сумма берется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_+^n : \gamma_\alpha \neq 0\}$, а $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ – соответствующий полный символ.

Напомним, что минимальный выпуклый многогранник F, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, называется характеристическим многогранником дифференциального оператора P.

Определение 2. *Многогранник $\mathcal{N}$ называется вполне правильным, если компоненты внешних (относительно $\mathcal{N}$) нормалей всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathcal{N}$ положительны.*

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ через $\Lambda(\mathcal{N})$ обозначим множество всех нормалей $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$, с $\min \lambda_j = 1$. Положим $\mathcal{N}(t) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \frac{\nu}{t} \in \mathcal{N}\}$, $t > 0$, $\mathcal{N}(0) = \{0\}$, $\mathcal{N}(t) = \emptyset$, $t < 0$, $\mathcal{N}^* = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda_0) \leq 1\}$, где

$$\lambda^0 = \left(\max_j \frac{\lambda_1^j}{d_j}, ... \max_j \frac{\lambda_n^j}{d_j}\right), \quad \lambda^j \in \Lambda(\mathcal{N}), \quad d_j = \sup_{\nu \in \mathcal{N}} (\nu, \lambda^j).$$

Для многочлена P от n-переменных, натурального числа j, $1 \leq j \leq n$ и множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$D(P) = \{\zeta, \zeta \in C^n, P(\zeta) = 0\}, \quad D(P, j) = \{\zeta, \zeta \in C^n, P(\zeta) = 0, \zeta^{(j)} \in \mathbb{R}^{n-1}\},$$

$$d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in D(P)} \|\xi - \zeta\|, \quad \rho_{P,j}(\xi) = \min_{\zeta \in D(P,j)} |\xi_j - \zeta_j|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Через A_j обозначим проекцию множества A на подпространство $\{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j = 0\}$. Будем пользоваться следуюшим определением (см. [9], Определение 4.1.1 и Теорему 4.1.3).

Определение 3. *Оператор $P(D)$ называется гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих условий :*

a) $N(P) \subset C^\infty$,

b) $d_P(\xi) \to \infty$ при $\|\xi\| \to \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Заметим, что характеристический многогранник гипоэллиптического оператора вполне правильный. Для гипоэллиптического оператора $P(D)$ обозначим

$$\mathcal{M}_P = \{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^n, \text{существует}\, C_\nu > 0\, |\xi|^\nu \leq C_\nu (d_P(\xi) + 1)\, \text{для любого}\, \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Известно, что для любого дифференциального оператора P $\mathcal{M}_P \subset \{\nu, \nu \in \mathbb{R}^n_+, (\nu,\lambda) \le 1$ для любого $\lambda \in \Lambda(N(P))\}$. Для вполне правильного многогранника $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_P$ такого, что $(\nu,\lambda) \le 1$ при всех $\nu \in \mathcal{M}$ и при $\lambda \in \Lambda(\mathcal{M})$ рассмотрим функцию $h_{\mathcal{M}}(\xi) = \sum_{\nu\in\mathcal{M}^0} |\xi|^\nu$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{M}^0$ – множество вершин многогранника $\mathcal{M}$.

Будем использовать следующий результат (см. [10], Теорема 3).

Теорема (Б. С. Митягин). *Пусть ξ_β, $\beta \in N^n_+$ – последовательность чисел такая, что $1 \le \xi_\beta \to \infty$ при $\|\beta\| \to \infty$ и*

$$A_p = \{\{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^p \left(\sum_\beta |\xi_\beta\, a_\beta|^p\right)^{1/p} \le 1\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$A_\infty = \{\{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^\infty, \sup_\beta |\xi_\beta\, a_\beta| \le 1\},$$

$$B_p = \{\{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^p \left(\sum_\beta |a_\beta|^p\right)^{1/p} \le 1\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$B_\infty = \{\{a_\beta\}, \{a_\beta\} \in l^\infty \sup_\beta |a_\beta| \le 1\}.$$

Тогда $H(A_p, \varepsilon B_p) \le \chi(2/\varepsilon) \log 8/\varepsilon$, $1 \le p \le \infty$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, где $\chi(t)$ – количество мультииндексов β таких, что $\xi_\beta \le t$.

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{M}$, компакта $K \subset E^n$ и функции $U \in C^\infty(E^n)$ положим $\|U\|_K = \left(\int_K |u|^2\right)^{1/2}$, $q_{\mathcal{M},K}(U) = \sup_j \max_{\alpha\in\mathcal{M}(j)\cap N^n} \dfrac{\|D^\alpha U\|_K}{j^j}$.

Далее, пусть $L = \{x, x \in E^n, |x_j| \le l, j = 1,..,n\}$, $l > 0$; $S = \{U, \|u\|_L \le 1\}$ и $Q = \{U, U \in C^\infty, \operatorname{supp} U \subset L, q_{\mathcal{M},L}(U) \le 1\}$.

Лемма 1. *Существуют постоянная $C > 0$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*

$$H(Q, \varepsilon S) \le \operatorname{mes}\{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \le C \ln 1/\varepsilon\} \ln 8/\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $U(x) = \sum_\beta a_\beta e^{i\pi\beta x/l}$. Так как

$$\|D^\alpha U\|_L = (2l)^{n/2} \left[\sum_\beta |a_\beta|^2 (\pi\beta/l)^{2\alpha}\right]^{1/2},$$

то с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$q_{\mathcal{M},L}(U) = \sup_j \max_{\alpha\in\mathcal{M}(j)\cap N_+^n} \frac{(2l)^{n/2}\left[\sum_\beta |a_\beta|^2(\pi\beta/l)^{2\alpha}\right]^{1/2}}{j^j} \leq$$

$$\leq C_1 \sup_j (2l)^{n/2}\left[\sum_\beta |a_\beta|^2(\pi\beta/lj)^{2j}\right]^{1/2}.$$

С другой стороны, поскольку $(0,...,0)\in\mathcal{M}(j)$, $j\geq 0$, то для некоторых постоянных C_2, $\delta > 0$

$$\max_{\alpha\in\mathcal{M}(j)\cap N_+^n} |\xi|^\alpha \geq C_2\, h_{\mathcal{M}}^{j-\delta}(\xi), \quad j = 1,2,....$$

Поэтому

$$q_{\mathcal{M},L}(U) \geq C_2 \sup_j (2l)^{n/2}\left[\sum_\beta |a_\beta|^2\left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j}\right)^{2j} h_{\mathcal{M}}^{-2\delta}(\pi\beta/l)\right]^{1/2}.$$

Рассмотрим множества Q_∞ и S_∞ :

$$Q_\infty = \{\sum_\beta a_\beta\, e^{i\pi\beta x/l},\, C_2\,(2l)^{n/2}\sup_{j,\beta}\left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j}\right)^j h^{-\delta}(\pi\beta/l)|a_\beta| \leq 1\},$$

$$S_\infty = \{\sum_\beta a_\beta\, e^{i\pi\beta x/l},\, C_3 \sup_\beta |a_\beta|\, h_{\mathcal{M}}^q(\pi\beta/l) \leq 1\},$$

где $q > 0$ такое, что

$$C_3 = \left[\sum_\beta h_{\mathcal{M}}^{-2q}(\pi\beta/l)\right]^{1/2} < \infty.$$

Легко видеть, что $S_\infty \subset S$ и $Q \subset Q_\infty$. Обозначим через $m(1/\epsilon)$ количество мультииндексов β, для которых

$$\frac{1}{C_4\, h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)} \sup_j \left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j}\right)^j \leq 1/\epsilon,$$

где $C_4 = C_3/(2l)^{n/2}C_2$. По теореме Б. С. Митягина существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$m(2/\varepsilon)\ln 8/\varepsilon \geq H(Q_\infty, \varepsilon S_\infty) \geq H(Q, \varepsilon S).$$

Для $\beta \in N_+^n$ положим

$$\xi_\beta(\varepsilon) = \frac{1}{C_4}\left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{\ln 1/\varepsilon}\right)^{1/\varepsilon}\frac{1}{h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)}.$$

Поскольку

$$\xi_\beta(\varepsilon) \leq \frac{1}{C_4}\sup_j\left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{j}\right)^j\frac{1}{h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)},$$

то для любого $\beta \in N_+^n$ такого, что $\xi_\beta(\varepsilon) \leq 1/\varepsilon$, имеем

$$\frac{1}{C_4}\left(\frac{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)}{\ln 1/\varepsilon}\right)^{\ln 1/\varepsilon}\frac{1}{h_{\mathcal{M}}^{q+\delta}(\pi\beta/l)} \leq 1/\varepsilon.$$

Отсюда вытекает оценка

$$h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq \left[(C_4 1/\varepsilon)^{1/\ln 1/\varepsilon}\ln 1/\varepsilon\right]^{\dfrac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\varepsilon - (q+\delta)}} = o(\ln 1/\varepsilon). \tag{1}$$

В силу (1) существуют число $\varepsilon_1 > 0$ и постоянная $C_5 > 0$, при которых

$$h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l) \leq C_5 \ln 1/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Для завершения доказательства должны показать, что существует постоянная $C_6 > 0$ такая, что $m(1/\varepsilon) \leq \mathrm{mes}\{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq C_6 \ln 1/\varepsilon\}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Для точки $\xi \in \mathbb{R}^n$, через I_ξ обозначим n-мерный единичный куб с центром в точке ξ и сторонами, параллельными координатным гиперплоскостям. Для некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеем

$$m(1/\varepsilon) \leq \sum_{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)\leq C_5\ln 1/\varepsilon} 1 = \sum_{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)\leq C_5\ln 1/\varepsilon} \mathrm{mes}\, I_\beta =$$

$$= \mathrm{mes}\left(\cup_{h_{\mathcal{M}}(\pi\beta/l)\leq C_5\ln 1/\varepsilon} I_\beta\right) \leq \mathrm{mes}\left\{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq C_7 \ln 1/\varepsilon\right\}.$$

Доказательство Леммы 1 завершено.

Для вектора $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\rho_j \geq 1$, $j = 1, ..., n$ и вполне правильного многогранника $\mathcal{M}$ обозначим через $\Gamma^\rho(E^n)$ и $\Gamma^\mathcal{M}(E^n)$ следующие классы Жевре :

$$\Gamma^\rho(E^n) = \{U, U \in C^\infty(E^n), \forall K \subset\subset E^n, \exists C_K = C_K(U) > 0 :$$
$$\sup_K \|D^\alpha U\|_K \leq C_K^{|\alpha|+1}\, \alpha^{\rho\alpha}, \forall \alpha \in N^n_+\},$$

$$\Gamma^\mathcal{M}(E^n) = \{U. U \in C^\infty(E^n), \forall K \subset\subset E^n, \exists C_K = C_K(U) > 0 :$$
$$\|D^\alpha U\|_K \leq C_K^{j+1}\, j^j, \forall \alpha \in \mathcal{M}(j), j \geq 0\}.$$

Известно (см. [12]), что $\Gamma^\mathcal{M} = \Gamma^\rho$, если $\mathcal{M} = \{\nu, \nu \in \mathbb{R}^n_+, (\nu, \rho) \leq 1\}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне правильный многогранник такой, что $(\nu.\lambda) \leq 1$ при всех $\nu \in \mathcal{M}$ и $\lambda \in \Lambda(\mathcal{M})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция $f \in \Gamma^{\mathcal{M}^*_\varepsilon}$ и постоянная $C(\varepsilon)$ такие, что $q_{\mathcal{M}_\varepsilon, K}(fU) \leq C(\varepsilon)\, q_{\mathcal{M},K}(U)$ для любого $U \in \Gamma^\mathcal{M}(E^n)$, где $\mathcal{M}_\varepsilon = \mathcal{M}(1/(1+\varepsilon))$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathcal{M}^*_\varepsilon \subset \{\nu, \nu \in \mathbb{R}^n_+, |\nu| \leq 1/(1+\varepsilon)\}$ для любого $\varepsilon > 0$. По Лемме 5.7.1 из [9] существуют функция f и постоянная $\sigma_1 > 0$ такие, что $f \in \Gamma^{1+\varepsilon} \subset \Gamma^{\mathcal{M}^*_\varepsilon}$, $\operatorname{supp} f \subset K$, $\sup_x |D^\alpha f(x)| \leq \sigma_1 \alpha^{(1+\varepsilon)\alpha}$ для любого $\alpha \in N^n_+$. Для любого $U \in \Gamma^\mathcal{M}$

$$\max_{\alpha \in \mathcal{M}_\varepsilon(j(1+\varepsilon)) \cap N^n_+} \frac{\|D^\alpha(fU)\|_K}{[(1+\varepsilon)j]^{(1+\varepsilon)j}} = \max_{\alpha \in \mathcal{M}(j) \cap N^n_+} \frac{\|D^\alpha(fU)\|_K}{[(1+\varepsilon)j]^{(1+\varepsilon)j}} \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \in \mathcal{M}(j) \cap N^n_+} \sum_\beta \frac{C^\beta_\alpha \sup_x |D^{\alpha-\beta} f|\, \|D^\beta U\|_K}{[(1+\varepsilon)j]^{(1+\varepsilon)j}} \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \in \mathcal{M}(j)} \sum_{r=0}^{j} \sum_{\mathcal{M}(r) \setminus \mathcal{M}(r-1)} \frac{C^\beta_\alpha \sup |D^{\alpha-\beta} f|\, \|D^\beta U\|_K}{[(1+\varepsilon)j]^{(1+\varepsilon)j}}.$$

Отсюда, учитывая, что (см. [12]) $\alpha - \beta \in \mathcal{M}^*(j-r)$ при $\alpha \geq \beta$, $\alpha \in \mathcal{M}(j)$, $\beta \in \mathcal{M}(r) \setminus \mathcal{M}(r-1)$, с некоторыми постоянными $\sigma_2(\varepsilon)$, $\sigma_3(\varepsilon) > 0$ имеем

$$\max_{\alpha \in \mathcal{M}_\varepsilon[j(1+\varepsilon)] \cap N^n_+} \frac{\|D^\alpha(fU)\|_K}{[(1+\varepsilon)j]^{(1+\varepsilon)j}} \leq \sum_{r=0}^{j} \sigma_2^r(\varepsilon) \frac{[(1+\varepsilon)(j-r)]^{(1+\varepsilon)(j-r)}\, r^r\, q_{\mathcal{M},K}(U)}{[(1+\varepsilon)j]^{(1+\varepsilon)j}} \leq$$

$$\leq q_{\mathcal{M},K}(U) \sum_{r=0}^{j} \left\{ \frac{\sigma_2(\varepsilon)\, r}{[(1+\varepsilon)j]^{1+\varepsilon}} \right\}^r \leq \sigma_3(\varepsilon)\, q_{\mathcal{M},K}(U).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{M}$, удовлетворяющего утверждениям Леммы 2, обозначим через $\overline{\Gamma^{\mathcal{M}}}$ следующее пространство Фреше :

$$\overline{\Gamma^{\mathcal{M}}} = \bigcap_{K}\{U,\, U \in \Gamma^{\mathcal{M}_\epsilon},\; q_{\mathcal{M}_\epsilon, K}(U) < \infty\}.$$

Лемма 3. *Пусть E – пространство с индуцированной топологией из L_2^{loc}. Если оператор вложения E в $\overline{\Gamma^{\mathcal{M}}}$ замкнут, то*

$$df\, E \leq 1 + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \mathrm{mes}\{\xi,\, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq t\}}{\ln t}.$$

Доказательство. По теореме о замкнутом графике, для каждого $\delta > 0$ и компакта $K \subset E^n$ существуют компакт $L \supset\supset K$ и постоянная $\sigma > 0$ такие, что $q_{\mathcal{M}_\delta, K}(U) \leq \sigma \|U\|_L$ для любого $U \in E$. Пусть $M = \{x,\, x \in E^n, |x_j| \leq m, j = 1, ..., n\}$, $m < k$ и $\theta > 0$ – некоторые числа. В силу Леммы 2 существует функция f, $\mathrm{supp}\, f \subset L$ такая, что $f(x) = 1$ при $x \in K$ и

$$\{fU,\, q_{\mathcal{M}, K}(fU) \leq 1\} \subset \{V,\, q_{\mathcal{M}_{\delta+\theta}, K}(V) \leq C(\theta),\, \mathrm{supp}\, V \subset K\},$$

где $C(\theta)$ есть постоянная из Леммы 2. Для $l > k > m$ обозначим

$$B = \{U,\, \|U\|_K \leq 1\}, \quad O = \{U,\, U \in E,\, \|U\|_L \leq 1\}, \quad W = \{U,\, \|U\|_M \leq 1\},$$

$$Q = \{U,\, q_{\mathcal{M}_\delta, K}(U) \leq 1\}, \quad Q_\theta = \{U,\, q_{\mathcal{M}_{\delta+\theta}, K}(U) \leq 1,\, \mathrm{supp}\, U \subset K\}.$$

Поскольку $O \subset \sigma\, Q$ и $f\, Q \subset C(\theta)\, Q_\theta$, то

$$\begin{aligned} H(O, \varepsilon\, W) &\leq H(\sigma\, Q, \varepsilon\, W) = H(Q, \varepsilon/\sigma\, W) = H(f\, Q, \varepsilon/\sigma\, B) \leq \\ &\leq H(C(\theta)\, Q_\theta, \varepsilon/\sigma\, B) = H\left(Q_\theta, \frac{\varepsilon}{C(\theta)\,\sigma}\, B\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Следовательно, в силу Леммы 1, для некоторых постоянных $\sigma_1 > 0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ получим

$$H\left(Q_\theta, \frac{\varepsilon}{C(\theta)\,\sigma}\, B\right) \leq (\ln 8/\varepsilon)\mathrm{mes}\,\{\xi,\, h_{\mathcal{M}_{\delta+\theta}}(\xi) \leq \sigma_1 \ln 1/\varepsilon\}. \tag{3}$$

Так как при некотором $\sigma_2 > 0$ $\{\xi, h_{\mathcal{M}_{\delta+\theta}}(\xi) \leq \sigma_1 \ln 1/\varepsilon\} \subset \{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq \sigma_2(\ln 1/\varepsilon)^{1+\delta+\theta}\}$, то из (2) и (3) получим

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\ln H(O, \varepsilon W)}{\ln\ln 1/\varepsilon} \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\ln \operatorname{mes}\{\xi, h_{\mathcal{M}} \leq \sigma_2(\ln 1/\varepsilon)^{1+\delta+\theta}\}}{\ln\ln 1/\varepsilon t} =$$

$$= \overline{\lim_{t\to +\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}\{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq t\}}{\ln t/(1+\delta+\theta)}.$$

Поскольку числа δ, $\theta > 0$ произвольны, и $\varepsilon W \cap E$, $m = 1, 2, \ldots$ является базисом в E, то

$$df E \leq 1 + \overline{\lim_{t\to +\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes}\{\xi, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq t\}}{\ln t}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Предположим, что дифференциальный оператор $P(D)$ гипоэллиптичен, и в $N(P)$ задана топология, индуцированная из L_2^{loc}. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_p$ – вполне регулярный многогранник, удовлетворяющий условиям Леммы 2. Тогда вложение $N(P) \to \overline{\Gamma^{\mathcal{M}}}$ замкнуто.*

Доказательство. Поскольку топология, индуцированная из L_2^{loc} совпадает с топологией, индуцированной из C^∞ (см. [9], Замечание 4.1.2), то для каждого компакта K и любого числа r множество

$$F_r(K) = \{U, U \in N(P), \|D^\alpha U\|_K \leq r^{j+1} j^j \quad \text{для любого} \quad \alpha \in \mathcal{M}(j),\ j = 1, 2, \ldots\}$$

замкнуто. Из вложения $N(P) \subset \Gamma^{\mathcal{M}}$ вытекает $\cup_1^\infty F_r(K) = N(P)$ (см. [12]). Так как $N(P)$ является пространством Фреше, то по теореме Бэра существует $r_0 > 0$ такое, что $F_{r_0}(K)$ содержит внутреннюю точку. Поскольку $F_r(K)$ выпукло и симметрично, то $U = 0$ является внутренней точкой $F_{r_0}(K)$. Поэтому существуют число $\rho > 0$ и компакт L такие, что $F_{r_0}(K)$ содержит всякое $U \in N(P)$, L_2-норма которого по компакту L не превосходит числа δ. Следовательно, при $\left(\int_L |U|^2\, dx\right)^{1/2} \leq \rho$

$$\|D^\alpha U\|_K \leq r^{j+1}\, j^j\, \rho^{-1} \left(\int_L |U|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Очевидно, (4) имеет место для любого $U \in N(P)$. Отсюда для любого $\delta > 0$

$$q_{\mathcal{M}_\delta, K}(U) \leq \sup_j \frac{r^{j+1}\, j^j\, \rho^{-1} \left(\int_L |U|^2\, dx\right)^{1/2}}{[(1+\delta)j]^{(1+\delta)j}}.$$

С учетом замкнутости $N(P)$, завершается доказательство Леммы 4.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $P(D)$ – гипоэллиптический оператор и $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_P$ – вполне правильный многогранник, удовлетворяющий условиям Леммы 3. Тогда*

$$df N(P) \leq 1 + \max_j \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln mes\, G_j(h_{\mathcal{M}}, t)}{\ln t},$$

где максимум берется по тем j, для которых существует $\alpha \in (P)$ такое, что $|\alpha| = ord\, P$ с $\alpha_j \neq 0$ и $G(h_{\mathcal{M}}(t) = \{\xi, \xi \in \mathbb{R}^n, h_{\mathcal{M}}(\xi) \leq t\}$, где G_j – проекция G на гиперплоскость $\xi_j = 0$.

Доказательство. Пусть $\beta \in (P)$, $|\beta| = ord\, P$. Не умаляя общности можем предполагать, что $\beta = (\beta_1, 0, .., 0)$. Рассмотрим отображение

$$T : N(P) \to \overline{\Gamma^{\mathcal{M}_1}} \times ... \times \overline{\Gamma^{\mathcal{M}_1}}, \qquad (*)$$

где $\mathcal{M}_1 = \{\nu', \nu' \in \mathbb{R}^{n-1}_+, (0, \nu') \in \mathcal{M}\}$

$$T : U = \left(U(0, x'), ..., \frac{\partial^{\beta_1 - 1}}{\partial^{\beta_1 - 1}_{x_1}} U(0, x') \right), \quad U \in N(P).$$

Отображение T непрерывно, и по теореме Холмгрена существует T^{-1}. Следовательно T является непрерывным изоморфизмом. В силу Лемм 3, 4 работы [3] и равенства $h_{\mathcal{M}}(0, \xi') = h_{\mathcal{M}_1}(\xi')$, получим $df N(P) \leq df T\, N(P) \leq$

$$\leq 1 + \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \mathrm{mes}\, \{\xi', h_{\mathcal{M}_1}(\xi') \leq t\}}{\ln t} = 1 + \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln \mathrm{mes}\, G_j(h_{\mathcal{M}}, t)}{\ln t}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *В условиях Теоремы 1*

$$df N(P) \leq 1 + \max_j \sup_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{M}_j)} \frac{|\lambda|}{d_{j,\lambda}},$$

где $d_{j,\lambda} = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_j} (\nu, \lambda)$, $\mathcal{M}_j = \{\nu^{(i)}, \nu^{(j)} \in \mathbb{R}^n_+, (\nu_1, .., \nu_{j-1}, 0, \nu_{j+1}, ..., \nu_n) \in \mathcal{M}\}$, а максимум берется по тем j, для которых существует $\alpha \in (P)$ такой, что $|\alpha| = ord\, P$ с $\alpha_j \neq 0$.

Доказательство. В силу Теоремы 1, существует индекс j_0, $1 \le j_0 \le n$ такой, что

$$dfN(P) \le 1 + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes} G_{j_0}(h_{\mathcal{M}}, t)}{\ln t}.$$

По Лемме 1.1 из [13] для каждого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число $k(\varepsilon)$, векторы $\lambda^l \in \Lambda(\mathcal{M}_{j_0})$, $l = 1, ..., k(\varepsilon)$ и постоянная $C(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$h_{\mathcal{M}_{j_0}}(\xi^{(j_0)}) \ge C(\varepsilon) \min_l \|\xi^{(j_0)}, \lambda\|^{d_{j_0,\lambda^l}(1-\varepsilon)} \quad \text{для любого} \quad \xi^{(j_0)} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

где $\|\eta, \lambda\| = \left(\sum_j |\eta_j|^{2/\lambda_j}\right)^{1/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} G_{j_0}(h_{\mathcal{M}}, t) &= \{\xi^{(j_0)}, h_{\mathcal{M}}(\xi_1, ..., \xi_{j-1}, 0, \xi_{j+1}, ..., \xi_n) \le t\} \subset \\ &\subset \{\xi^{(j_0)}, \min_l \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0,\lambda^l}} \le (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\} \subset \\ &\subset \bigcup_l \{\xi^{(j_0)}, \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0,\lambda^l}} \le (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varepsilon > 0$ – произвольное, должны показать, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln \operatorname{mes} \{\xi^{(j_0)}, \|\xi^{(j_0)}, \lambda\|^{d_{j_0,\lambda^l}} \le (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\}}{\ln t} \le \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{|\lambda^l|}{d_{j_0,\lambda^l}}. \tag{5}$$

Для некоторых C_1, $C_2(\varepsilon) > 0$ $\operatorname{mes} \{\xi^{(j_0)}, \|\xi^{(j_0)}, \lambda^l\|^{d_{j_0,\lambda^l}} \le (t/C(\varepsilon))^{1/(1-\varepsilon)}\} \le$

$$\le C_1 \int_0^{a_1} ... \int_0^{a_{j-1}} \int_0^{a_{j+1}} ... \int_0^{a_n} d\xi_1 ... d\xi_{j-1}\, d\xi_{j+1} ... d\xi_n \le C_2(\varepsilon)\, t^{\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{|\lambda^l|}{d_{j_0,\lambda^l}}},$$

где

$$a_r = \left(\frac{t}{C(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{|\lambda^l_r|}{d_{j_0,\lambda^l}}}, \quad r = 1, ..., n, \quad r \ne j_0.$$

Отсюда и из (5) получим требуемый результат. Теорема 2 доказана.

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть $n = 3$ и $P(D) = D_1^{14} + D_2^{14} + D_1^4 D_2^4 (D_1 - D_2)^8 + i\, D_3$. Простые вычисления показывают, что

$$\mathcal{M}_P \supset \{\nu,\ \nu \in \mathbb{R}_+^3, \nu_1 + 2\nu_2 + 28\nu_3 \le 1, 2\nu_1 + \nu_2 + 28\nu_3 \le 1\}.$$

Отсюда, в силу Теоремы 2

$$df N(P) \le 1 + (2 + 28) = 31. \tag{6}$$

Рассмотрим множество

$$S = \bigcup_{\theta > 0} S(\theta) = \bigcup_{\theta > 0} \{\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^3,\ \theta \le \xi_3 \le 2\theta,\ \xi_3^{28} \le \xi_1 \le 2\xi_3^{28},\ \xi_3^2 \le \xi_2 \le 2\xi_3^2\}.$$

Легко проверить, что с некоторой постоянной $C > 0$ $\rho_{P,3}(\xi) \le C\,\xi_3$ для любого $\xi \in S$. Следовательно, в силу Теоремы 1 из [11]

$$df N(P) \ge 1 + \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln mes\, G_3(\rho_{P,3}, t)}{\ln t} \ge 1 + \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln mes\, S_3(t/2C)}{\ln t} = 1 + 30 = 31. \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает $df N(P) = 31$.

Пример 2. Пусть $n = 3$ и $P(D) = D_1^4 + D_2^2 + D_3^2 + (D_2 - D_3)^6$. Легко проверить, что $\{\nu, \nu \in \mathbb{R}_+^3, \frac{3}{2}\nu_1 + 3\nu_2 + 3\nu_3 \le 1\} \subset \mathcal{M}_P$. Следовательно, в силу Теоремы 2

$$df N(P) \le 1 + (3 + 3/2) = 5,5. \tag{8}$$

Рассмотрим множество $S = \bigcup_{\theta > 0} S(\theta) =$

$$= \bigcup_{\theta > 0} \{\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^3,\ \theta^3 \le \xi_2 \le 2\theta^3,\ \xi_2^{3/2} \le \xi_1 \le 2\xi_2^{3/2},\ \xi_2 + \theta \le \xi_3 \le \xi_2 + 2\theta\}.$$

Для любого $\xi \in S$ и некоторой постоянной $C > 0$ имеем $\rho_{P,3}(\xi) \le C\,\xi_2^{1/3}$ для любого $\xi \in S$. В силу Теоремы 1 работы [11] и из того, что $S_3\left(\frac{t}{2^{1/3}C}\right) \subset G_3(\rho_{P,3}, t)$, получим

$$df N(P) \ge 1 + \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln mes\, S_3(t/2^{1/3}C)}{\ln t} \ge 1 + 3 + 3/2 = 5,5.$$

Комбинируя (8) и (9), получим $df N(P) = 5,5$.

Abstract. The paper considers hypoelliptic operators $P(D)$ with constant coefficients and establishes upper bounds for functional dimension of the space of solutions of the equation $P(D)\,u = 0$. The bounds are determined by the behavior of the symbol of operator $P(D)$ at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pontrjagin, L. Schnirelman, "Sur une propriete metrique de la dimension", Ann. Math., vol. 33, pp. 156 — 162, 1921.
2. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, "ϵ-энтропия и ϵ-ёмкость множеств в функциональных пространствах", УМН, том 2 (96), стр. 3 — 86, 1959.
3. Y. Komura, "Die Nuklearitar der Losungsraume der Hypoelliptishen Gleichungen Funcialay Ekvacioj", vol. 9, pp. 313 — 324, 1966.
4. Z. Zielezni, "On the functional dimension of the space of solutions of PDE", J. Diff. Equat., vol. 18, no. 2, pp. 340 — 345, 1975.
5. M. Langenbruch, "On the functional dimension of solution spaces of Hypoelliptic partial differential operators", Math. Ann., vol. 272, pp. 217 — 229, 1985.
6. M. Langenbruch, "P-Functionale und Raudwere zu Hypoelliptischen Differentialoperatoren", Math. Ann., vol. 239, pp. 313 — 324, 1979.
7. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений", Мат. Сб., том 115 (157), стр. 614 — 631, 1981.
8. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "Оценки снизу функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических операторов", Мат. Сб., том 181 (7), стр. 910 — 922, 1990.
9. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, М., Мир, 1965.
10. Б. С. Митягин, "Аппроксимационная размерность и базис в ядерных пространствах", УМН, том 14(4), стр. 63 — 132, 1962.
11. В. Н. Маргарян, "Оценки снизу функциональной размерности пространства решений дифференциальных уравнений". Изв. НАН Армении. Математика, том 36, № 3, стр. 45 — 55, 2001.
12. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О принадлежности классам Жевре решений дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении. Математика, том 31, № 1, стр. 35 — 47, 1998.
13. V. N. Margarian, G. O. Hakobyan, "On hypoellipticity weight of Polynomials", Меж. вуз. сб. науч. трудов, том 4, стр. 108 — 122, 1986.

Поступила 22 марта 2001

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 5, 2002, 40–57

МИНИМИЗАЦИЯ РАВНОМЕРНОЙ ОШИБКИ ПОЛИНОМИАЛЬНО–ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СО СДВИНУТЫМИ УЗЛАМИ

А. Б. Нерсесян, Н. В. Оганесян

Институт математики НАН Армении

E-mails : nerses@instmath.sci.am ; nune@instmath.sci.am

Резюме. В статье рассматривается полиномиально-тригонометрическая интерполяционная схема на объединении сдвигов равномерных сеток. Основная задача – оптимальный выбор параметра сдвига сетки, минимизирующий равномерную ошибку квазипериодической интерполяции. В случае симметрично расположенных трёх сеток асимптотическая формула для равномерной ошибки получена при помощи "предельной функции", введенной Валле–Пуссеном. Показано, что при определенных значениях параметра сдвига постоянная явления Гиббса меньше классической постоянной для частных сумм ряда Фурье.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Известно (см. [1]), что аппроксимация функции $f(x) \in C[-1,1]$ N-ой частичной суммой ряда Фурье приводит при $N \to \infty$ к явлению Гиббса с постоянной $C_{ort} = 0.089...$, и, в результате "перелет", в окрестности точки $x = 1$ равен $C_{ort}(f(1) - f(-1))$. Явление Гиббса с большей постоянной $C_{int} = 0.141...$ также наблюдается при классической тригонометрической аппроксимации на равномерной сети $\{x_k\} = \left\{\dfrac{2k}{2N+1}\right\}$, $k = 0, \pm1, ..., \pm N$, $N \to \infty$ (см. [2]).

В описанных случаях, при $f(1) \neq f(-1)$, равномерная сходимость на отрезке $[-1,1]$ соответствующих аппроксимаций не имеет места, а порядок L_2-сходимости на компактах внутри интервала $(-1,1)$ выше, чем на всем интервале.

Исследование выполнено при поддержке NFSAT–CRDF Grant # CS 037-01 (# BGP 7420) и Project ISTC A-823.

В случае $f(1) = f(-1)$ ситуация, вообще говоря, аналогична. Именно, если $f(x) \in C^{p+1}[-1,1]$, $p \geq 0$, $f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1)$, $k = 0, 1, ..., p$ и $f^{(p+1)}(-1) \neq f^{(p+1)}(1)$, то хотя равномерная сходимость на $[-1,1]$ соответствующих аппроксимаций имеет место, её порядок на компактах внутри $(-1,1)$ выше чем на $[-1,1]$ (см. [1]).

Идея более точной аппроксимации кусочно-гладкой на $[-1,1]$ функции $f(x)$ на основе ее коэффициентов Фурье $\{f_n\}$, $n = 0, \pm1, ..., \pm N$, была высказана А. Н. Крыловым в 1932 г. (см. [3]). Впоследствии этот подход был усовершенствован в ряде статьей (см. [4 - 6] и литературу в них). Применяя эту аппроксимацию к функции $f(x) \in C^p[-1,1]$, $p \geq 0$, сначала строится полином $P(x)$ такой, что $f_1^{(k)}(1) = f_1^{(k)}(-1)$, $k = 0, 1, ..., p$, где $f_1(x) = f(x) - P(x)$, а затем функция f_1 аппроксимируется частичной суммой ряда Фурье.

Численная реализация этой схемы и ее обобщение на многомерный случай допускает нахождение скачков $f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)$, $k = 0, 1, ..., p$ (или их многомерных аналогов) через коэффициенты (дискретные коэффициенты) Фурье функции f (см. [4 - 7] и п. 2.1 ниже). Эта схема позволяет аппроксимировать функцию $f \in C^{p+1}$ с равномерной ошибкой порядка $o(N^{-p})$, $N \to \infty$, $p \geq 0$, где N – число членов отрезка классического ряда Фурье или, соответственно, точек интерполяции на равномерной сети.

В этой статье показываем, что при интерполяции на объединении равномерных сеток со сдвинутыми узлами можно добиться определенного уменьшения равномерной ошибки. Оказывается, что при соответствующем расположении трёх равномерных сеток постоянная явления Гиббса может быть меньше, чем в классическом случае ряда Фурье. Дополнительное уменьшение равномерной ошибки достигается путём применения так называемой "квазипериодической" интерполяции (см. §4 ниже).

Изучение асимптотического поведения равномерной ошибки основано на методе "предельной функции", предложенном Валле Пуссеном в 1908 г. (см. [9], [10]).

§2. ПОЛИНОМИАЛЬНО–ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

2.1. Лемма. При $y \in \mathbb{R}$ обозначим через $y^{\vdash} = y \pmod 2$, $0 \leq y^{\vdash} < 2$.

Лемма 1. *Пусть $x \in \mathbf{C}$, $x \neq 0, \pm1, \pm2, ...$; $q \geq -1$ – целое, $w \in R$, причем $w^{\vdash} \neq 0$ при $q = -1$. Тогда*

$$\Phi_q(w,x) \stackrel{def}{=\!=} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi ws}}{(x+s)^{q+2}} = 2i\pi \operatorname{Res}_{z=-x} \frac{e^{i\pi w^{\vdash} z}}{(1-e^{2i\pi z})(x+z)^{q+2}}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть C_N – окружность радиуса $r_N = (N + 1/2)$, $(N \geq 1)$ в комплексной z-плоскости с центром в точке $z = 0$. Контурный интеграл

$$J_N = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_N} \frac{e^{i\pi w^{\vdash} z}}{(1 - e^{2i\pi z})(x + z)^{q+2}}\,dz$$

существует, и согласно теории вычетов имеем

$$J_N = -\frac{1}{2i\pi}\sum_{s=-N}^{N} \frac{e^{i\pi w s}}{(x + s)^{q+2}} + \mathrm{Res}_{z=-x}\frac{e^{i\pi w^{\vdash} z}}{(1 - e^{2i\pi z})(x + z)^{q+2}}.$$

При достаточно больших N и $q \geq -1$

$$|J_N| \leq \frac{Const}{N^{q+1}}\max_{|z|=r_N}\left|\frac{e^{i\pi(w^{\vdash}-1)z}}{\sin(\pi z)}\right| \leq Const\, N^{-(q+1)}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $J_N \to 0$ при $N \to \infty$, если $q \geq 0$. Итак (1) выполняется. Пусть теперь $q = -1$, $w^{\vdash} \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Контур окружности C_N разделим на четыре дуги c_+, c_-, c_{up} и c_{down} : $c_+ = \{z : |z| = N + 1/2, |argz| \leq \varepsilon\}$, $c_- = \{z : |z| = N + 1/2, \pi - \varepsilon \leq argz \leq \pi + \varepsilon\}$, $c_{up} = \{z : |z| = N + 1/2, \varepsilon < argz < \pi - \varepsilon\}$, $c_{down} = \{z : |z| = N + 1/2, \pi + \varepsilon < argz < 2\pi - \varepsilon\}$. Очевидно, что $C_N = c_+ \cup c_- \cup c_{up} \cup c_{down}$. Используя оценку типа (2), интеграл по $c_\varepsilon \cup c_{\pi-\varepsilon}$, можно сделать сколь угодно малым за счет выбора ε. Для оценивания интеграла по c_{up} перейдем к полярным координатам $z = (N + 1/2)e^{i\phi}$, получим

$$\frac{(N + 1/2)}{2\pi}\left|\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{e^{i\phi}e^{\pi w^{\vdash}(N+1/2)(i\cos\phi - \sin\phi)}}{(1 - e^{2\pi(N+1/2)(i\cos\phi - \sin\phi)})(x + (N + 1/2)e^{i\phi})}\,d\phi\right| \leq$$

$$\leq \frac{(N + 1/2)}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{\left|e^{-\pi w^{\vdash}(N+1/2)\sin\phi}\right|}{\left|1 - e^{2\pi(N+1/2)(i\cos\phi - \sin\phi)}\right|\,\left|(N + 1/2) - |x|\right|}\,d\phi \leq$$

$$\leq Const\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{\left|e^{-\pi w^{\vdash}(N+1/2)\sin\phi}\right|}{\left|1 - e^{2\pi(N+1/2)(i\cos\phi - \sin\phi)}\right|}\,d\phi.$$

Поскольку $0 < w^{\vdash} < 2$ и $\sin\phi \geq \sin\varepsilon > 0$ на отрезке $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то при больших N подынтегральную функцию можно оценить через $\mathrm{Const}\, e^{-w^{\vdash}(N+1/2)\sin\varepsilon}$. Так как $\sin\phi \leq -\sin\varepsilon < 0$ на $[\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, то подынтегральную функцию можно оценить через $\mathrm{Const}\, e^{-(N+1/2)(2-w^{\vdash})\sin\varepsilon}$. Поскольку $\Phi_q(w, x)$ имеет период 2 относительно аргумента w, то получим (1).

Замечание 1. Из (1) следует, что если $w^{\vdash} \neq 0$, то $\Phi_q(w,t) \in C^{\infty}_{loc}$ как функция от w, а функция $\varphi_q(w,t) = \partial^{q+1}\Phi_q(w,t)/\partial w^{q+1}$ кусочно непрерывна со скачками в точках $w^{\vdash} = 0$. Если же $w_0^{\vdash} = 0$, то формально расходящийся ряд $\varphi_q(w_0,t)$ суммируем в смысле главного значения (т.е. если суммирование в (1) проводится в симметричных пределах $-A \leq s \leq A$, $A \to \infty$). Легко проверить, что в этом случае $\varphi_q(w_0,t) = (\varphi_q(w_0+0,t) + \varphi_q(w_0-0,t))/2$. Функция $\Phi_q(w,t) - 1/t^{q+2}$ непрерывна по $t \in (-1,1)$.

2.2. Аппроксимация по коэффициентам Фурье. Сначала применим метод, описанный в §1 для восстановления функции $f(x) \in C^{q+1}[-1,1]$ по ее коэффициентам Фурье

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, e^{-i\pi n x}\, dx, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad N \geq 1. \tag{3}$$

Известно, что ни частные суммы ряда Фурье, ни классические методы суммирования не являются лучшим аппаратом приближения с использованием $\{f_n\}$ (см. [1 - 7]).

Пусть $\{B_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система полиномов Бернулли, определенных на $[-1,1]$ по формулам

$$B_0(x) = x/2, \quad B_k(x) = \int B_{k-1}(x)\, dx, \quad \int_{-1}^{1} B_k(x)\, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Коэффициенты Фурье $\{B_{kn}\}$ полинома $B_k(x)$ имеют вид (см. [5])

$$B_{kn} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{5}$$

Для заданных целых N и q полиномиально-ортогональную аппроксимацию функции $f(x)$ определим как

$$S_{N,q}(f(x)) = \sum_{k=0}^{q} A_k(f)\, B_k(x) + \sum_{n=-N}^{N} \left(f_n - \sum_{k=0}^{q} A_k(f)\, B_{kn}\right) e^{i\pi n x}. \tag{6}$$

где $A_k(f)$ – скачки функции f и её производных на концах интервала $[-1,1]$:

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, 1, \dots, q. \tag{7}$$

В случае $q = -1$ имеем частную сумму ряда Фурье

$$S_{N,-1}(f(x)) = S_N(f(x)) = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{i\pi n x}. \tag{8}$$

Из известного асимптотического представления коэффициентов Фурье

$$f_n = \sum_{k=0}^{q+1} A_k(f) B_{kn} + o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right), \quad n \to \infty \tag{9}$$

следует (см. [4], [5]), что скачки $\{A_k(f)\}$ можно восстановить с точностью $o(N^{-q+k-1})$, $k = 0, \dots, q+1$, $N \to \infty$, решив систему уравнений с матрицей Вандермонда

$$f_{n_s} = \frac{(-1)^{n_s+1}}{2} \sum_{k=0}^{q} \frac{A_k(f)}{(i\pi n_s)^{k+1}}, \quad s = 0, 1, \dots, q,$$

для $(q+1)$ различных значений $\{n_s\}$, удовлетворяющих $const\, N \leq |n_s| \leq N$ при $N \to \infty$.

2.3. Асимптотическое поведение ошибки. Пусть $x \in [-1,1]$. Изучим асимптотическое поведение ошибки

$$R_{N,q}(f(x)) = S_{N,q}(f(x)) - f(x) \tag{10}$$

при $q = const$, $N \to \infty$ и точных значениях скачков (7). Как упомянуто в §1, вообще говоря, максимум ошибки (10) достигается вблизи концов интервала $[-1,1]$. Следовательно, естественно рассмотреть ошибку $R_{N,q}(f(x))$ в точке $x = 1 - \frac{h}{2N+1}$ или $x = -1 + h/(2N+1)$ при $h = const > 0$ и $N \to \infty$. Положим

$$Q_q(x) = -\cos(\pi x + \pi q/2) \tag{11}$$

и рассмотрим функцию

$$E_q(h) = \frac{1}{\pi^{q+2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Q_q(ht)}{t^{q+2}} + \Psi_q(h,t) \right) dt, \tag{12}$$

где

$$\Psi_q(h,t) = -\frac{\pi}{2i^q}\,\mathrm{Res}_{z=-t}\frac{e^{-i\pi z}((-1)^q e^{i\pi h t}\, e^{i\pi h^{\vdash} z} + e^{-i\pi h t}\, e^{i\pi (-h)^{\vdash} z})}{\sin(\pi z)(t+z)^{q+2}}. \qquad (13)$$

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C^{q+2}[-1,1]$, $q \geq -1$. *Тогда при* $x = 1 - h/(2N+1)$, $h = const > 0$

$$\lim_{N\to\infty} (2N+1)^{q+1} R_{N,q}(f(x)) = A_{q+1}(f)\, E_q(h). \qquad (14)$$

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай $f(x) = B_{q+1}(x)$. В силу (1) при $x = 1 - h/(2N+1)$ и $N \to \infty$ имеем

$$B_{q+1}(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+2}}\, e^{i\pi n(1-h/(2N+1))} = -\frac{1}{2(i\pi)^{q+2}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\dfrac{i\pi(n+(2N+1)s)h}{2N+1}}}{(n+(2N+1)s)^{q+2}} - \frac{1}{2(i\pi)^{q+2}} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-i\pi h s}}{((2N+1)s)^{q+2}} = \qquad (15)$$

$$= -\frac{1}{2(i\pi(2N+1))^{q+2}} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} e^{-\dfrac{i\pi n h}{2N+1}} \sum_{s=\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi h s}}{(\dfrac{n}{2N+1}+s)^{q+2}} + O\left(\frac{1}{N^{q+2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2(i\pi(2N+1))^{q+2}} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} e^{-\dfrac{i\pi n h}{2N+1}} \Phi_q\left(-h, \frac{n}{2N+1}\right) + O\left(\frac{1}{N^{q+2}}\right).$$

При $N \to \infty$ отсюда вытекает

$$R_{N,q}(B_{q+1}(x)) = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} e^{-\dfrac{i\pi n h}{2N+1}} \left(\frac{(-1)^{n+1} e^{i\pi n}}{2(i\pi n)^{q+2}} + \frac{\Phi_q\left(-h, \dfrac{n}{2N+1}\right)}{2(i\pi(2N+1))^{q+2}} \right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{N^{q+2}}\right) = \frac{1}{2(i\pi(2N+1))^{q+2}} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} e^{-\dfrac{i\pi n h}{2N+1}} \left(\frac{-1}{(\dfrac{n}{2N+1})^{q+2}} + \right. \qquad (16)$$

$$\left. + \Phi_q\left(-h, \frac{n}{2N+1}\right) \right) + O\left(\frac{1}{N^{q+2}}\right).$$

Положим $t_n = n/(2N+1)$, $\Delta t = 1/(2N+1)$ и перепишем последнюю сумму в (16) в пределах от $n = 1$ до $n = N$. Согласно Замечанию 1 эта интегральная сумма стремится (при $N \to \infty$) к соответствующему интегралу. Поскольку

$$\Phi_q(h, -t) = (-1)^q \Phi_q(-h, t), \tag{17}$$

то после некоторых упрощений получим (14).

Пусть теперь $f(x) \in C^{q+2}$. Обозначив через $\delta(f, \varepsilon)$ модуль непрерывности функции $f^{(q+2)}(x)$, из (9) и (10) получим (см. [1], том 1)

$$|R_{N,q}(f(x)) - A_{q+1}(f) R_{N,q}(B_{q+1}(x))| \le \delta(f, 1/N) \sum_{n=N}^{\infty} n^{-q-2} = o(N^{-q-1}). \tag{18}$$

Отсюда вытекает (14). Теорема 1 доказана.

§3. ПОЛИНОМИАЛЬНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СО СДВИНУТЫМИ УЗЛАМИ

3.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу полиномиально-тригонометрической интерполяции на объединении трех равномерных сеток, состоящих из нечетного количества точек, расположенных симметрично относительно начала координат. Пусть $\{x_k^\alpha\}$, $-1 \le \alpha \le 1$ – равномерная сеть на $[-1, 1]$ вида

$$x_k^\alpha = \frac{2k+\alpha}{2N+1}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N. \tag{19}$$

Обозначим через $\check{f}_n^\alpha$ обратное дискретное преобразование Фурье (с точностью до множителя) функции $f(x)$ на этой сети

$$\check{f}_n^\alpha = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k^\alpha)\, e^{-i\pi n x_k^\alpha}. \tag{20}$$

Для заданного $0 < \alpha < 1$ рассмотрим следующую интерполяцию функции f на сети из $6N+3$ точек объединения $\{x_k^0\} \cup \{x_k^\alpha\} \cup \{x_k^{-\alpha}\}$

$$I_N^\alpha(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} (\check{f}_n^0 a_n^0(x) + \check{f}_n^\alpha a_n^\alpha(x) + \check{f}_n^{-\alpha} a_n^{-\alpha}(x)), \tag{21}$$

при условии

$$I_N^\alpha(e^{i\pi px})(x) = e^{i\pi px}, \quad p = 0, \pm 1, ..., \pm(3N+1), \quad x \in [-1,1]. \tag{22}$$

При целом $n > 0$ имеем

$$\widetilde{(e^{i\pi px})}_n^\alpha = \frac{e^{i\pi\alpha(p-n)/(2N+1)}}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} e^{2i\pi k(p-n)/(2N+1)} =$$

$$= e^{i\pi\alpha(p-n)/(2N+1)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta_{p,n-(2N+1)s},$$

где $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера. Учитывая (21) и (22), получим следующую систему уравнений $|n| \le N$, $x \in [-1,1]$ относительно $\{a_n^0, a_n^\alpha, a_n^{-\alpha}\}$:

$$a_n^0(x) + a_n^\alpha(x) + a_n^{-\alpha}(x) = e^{i\pi nx}, \; a_n^0(x) + e^{i\pi\alpha}\, a_n^\alpha(x) + e^{-i\pi\alpha}\, a_n^{-\alpha}(x) = e^{i\pi(n+(2N+1))x},$$

$$a_n^0(x) + e^{-i\pi\alpha}\, a_n^\alpha(x) + e^{i\pi\alpha}\, a_n^{-\alpha}(x) = e^{i\pi(n-(2N+1))x}.$$

При фиксированных n и x получим

$$a_n^0(x) = \frac{e^{i\pi nx}}{2\sin^2(\pi\alpha/2)}(\cos((2N+1)\pi x) - \cos(\pi\alpha)),$$

$$a_n^\alpha(x) = \frac{e^{i\pi nx}}{4\sin^2(\pi\alpha/2)\cos(\pi\alpha/2} \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2} + (2N+1)\pi x\right)\right), \tag{23}$$

$$a_n^{-\alpha}(x) = \frac{e^{i\pi nx}}{4\sin^2(\pi\alpha/2)\cos(\pi\alpha/2)} \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2} - (2N+1)\pi x\right)\right).$$

Отметим, что при $\alpha = 2/3$ формула (21) является тригонометрической интерполяцией функции $f(x)$ на равномерной сети из $6N+3$ точек.

Из (21) и (23) получим

$$I_N^\alpha(f)(x) = A_\alpha((2N+1)x) \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}_n^0 e^{i\pi nx} + B_\alpha((2N+1)x) \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}_n^\alpha e^{i\pi nx} +$$

$$+ B_{-\alpha}((2N+1)x) \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}_n^{-\alpha} e^{i\pi nx}, \tag{24}$$

где

$$A_\alpha(y) = \frac{1}{2\sin^2(\pi\alpha/2)}\left(\cos(\pi y) - \cos(\pi\alpha)\right), \tag{25}$$

$$B_\alpha(y) = \frac{1}{4\sin^2(\pi\alpha/2)\cos(\pi\alpha/2)}\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi(\alpha+2y)}{2}\right)\right). \tag{26}$$

Легко проверить, что

$$A_\alpha(y) + B_\alpha(y) + B_{-\alpha}(y) = 1, \qquad 0 < \alpha < 1,\ y \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

3.2. Представление интерполяции через коэффициенты Фурье. Покажем, что коэффициенты интерполяции $\{\check{f}_n^\alpha\}$, $n = 0, \pm1, \dots, \pm N$ можно выразить через коэффициенты Фурье функции f.

Лемма 2. *Пусть $\{f_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ такие, что $|f_n| \leq const\ n^{-p-1}$, $p > 0$. Тогда при $N \geq 1$ и $-1 \leq \alpha \leq 1$ (см. (3))*

$$\check{f}_n^\alpha = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_{n+(2N+1)s} e^{i\pi\alpha s}, \quad n = 0, \pm1, \dots, \pm N. \tag{28}$$

Доказательство легко получить после подстановки абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье функции f в (20).

Следующий результат характеризует интерполяцию на равномерной сетке (19).

Лемма 3. *В условиях Леммы 2 имеет место равномерная по $x \in [-1, 1]$ оценка*

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n^\alpha e^{i\pi n x} - f(x)\right| \leq const\ N^{-p}, \quad N \geq 1. \tag{29}$$

Доказательство. В силу Леммы 2

$$\sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n^\alpha e^{i\pi n x} - f(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} f_{n+(2N+1)s} e^{i\pi\alpha s}\right) e^{i\pi n x} - \sum_{|n|>N} f_n e^{i\pi n x}.$$

Последний член имеет порядок $O(N^{-p})$ при $N \to \infty$. Получим (29), если учесть, что

$$\left| \sum_{n=-N}^{N} \left(\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} f_{n+(2N+1)s} e^{i\pi\alpha s} \right) e^{i\pi n x} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2N+1)^{p+1}} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n/(2N+1)+s|^{p+1}} \leq \frac{2}{(2N+1)^p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s-1/2)^{p+1}}.$$

Следствие 1. *В условиях Леммы 3 имеет место равномерная по* $x \in [-1,1]$ *оценка*

$$|I_N^{\alpha}(f)(x) - f(x)| \leq const N^{-p}, \quad N \geq 1. \tag{30}$$

Доказательство следует из (24), (27) и Леммы 3.

3.3. Асимптотическое поведение ошибки. Полиномиально-тригонометрическая интерполяция функции f на объединении сеток $\{x_k^0\} \cup \{x_k^{\alpha}\} \cup \{x_k^{-\alpha}\}$, $k = 0, \pm 1, ..., \pm N$ определим как

$$S_{N,q}^{\alpha}(f(x)) = \sum_{k=0}^{q} A_k B_k(x) + I_N^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{q} A_k B_k(x) \right)(x). \tag{31}$$

Положим

$$\chi_q(u,w) = 2\pi \mathrm{Res}_{z=-t} \frac{\cos(\pi(q/2+u+(1-w)z))}{\sin(\pi z)(t+z)^{q+2}}. \tag{32}$$

Следующая теорема характеризует асимптотическое поведение ошибки

$$R_{N,q}^{\alpha}(f(x)) = S_{N,q}^{\alpha}(f(x)) - f(x). \tag{33}$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in C^{q+2}[-1,1]$, $q \geq -1$. *Тогда при* $x = 1 - h/(6N+3)$ *и* $h = const > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \left[(6N+3)^{q+1} R_{N,q}^{\alpha}(f)\right] = A_{q+1}(f) D_q^{\alpha}(h), \tag{34}$$

где

$$D_q^\alpha(h) = \frac{3^{q+1}}{8\pi^{q+2}} \int_0^{1/2} (\csc^2(\frac{\pi\alpha}{2})(\chi_q(ht/3, (1+\alpha)^{\vdash}) (\cos(\pi(\alpha/2 - h/3))\times$$

$$\times \sec(\frac{\pi\alpha}{2}) + 1)\chi_q(ht/3, (1-\alpha)^{\vdash}) (\cos(\pi(\alpha/2 + h/3)) \sec(\pi\alpha/2) + 1) - \tag{35}$$

$$- 2i^{2q} (\cos(\pi h/3) + \cos(\pi\alpha))\chi_q(-q/2, 1) \cos(\pi(q/2 - ht/3))) -$$

$$- 4\chi_q(ht/3, (-h/3)^{\vdash})) \, dt.$$

Доказательство. Согласно Следствию 1 и формулам (18), (21), вместо $f_1(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{q} A_k(f)B_k(x)$ достаточно рассмотреть функцию $f_1(x) = B_{q+1}(x)$. Из (1), (5) и (28) имеем

$$(\tilde{B}_{q+1}(x))_n^\alpha = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}\Phi_q(1+\alpha, n/(2N+1))}{2(i\pi(2N+1))^{q+2}}, & n \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\substack{s=-\infty \\ s\neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^{s+1}}{(i\pi(2N+1)s)^{q+2}}, & n = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Положим

$$u(\alpha, h) \stackrel{def}{=\!=} A_\alpha((2N+1)(1 - \frac{h}{6N+3})) = -\frac{\cos(\pi h/3) + \cos(\pi\alpha)}{2\sin^2(\pi\alpha/2)},$$

$$v(\alpha, h) \stackrel{def}{=\!=} B_\alpha((2N+1)(1 - \frac{h}{6N+3})) = \frac{\cos(\pi\alpha/2) + \cos(\pi\alpha/2 - \pi h/3)}{4\sin^2(\pi\alpha/2)\cos(\pi\alpha/2)}. \tag{37}$$

Для оценки (33) при $x = 1 - h/(6N+3)$ используем (15) с $h/3$ вместо h. При

$N \to \infty$ имеем

$$R_{N,q}(B_{q+1}(x)) = S^{\alpha}_{N,q}(B_{q+1}(x)) - B_{q+1}(x) =$$

$$= \frac{1}{2(i\pi(2N+1))^{q+2}} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} e^{-\frac{i\pi nh}{6N+3}} \left(\Phi_q\left(1, \frac{n}{2N+1}\right) u(\alpha,h) + \right.$$

$$+ \Phi_q\left(1+\alpha, \frac{n}{2N+1}\right) v(\alpha,h) + \Phi_q\left(1-\alpha, \frac{n}{2N+1}\right) v(-\alpha,h) - \tag{38}$$

$$\left. - \Phi_q\left(-\frac{h}{3}, \frac{n}{2N+1}\right)\right) + O\left(\frac{1}{(2N+1)^{q+2}}\right).$$

Обозначив $t_n = n/(2N+1)$, $\Delta t = 1/(2N+1)$, получим

$$\lim_{N\to\infty} (6N+3)^{q+1} R^{\alpha}_{N,q}(B_{q+1}(x)) = \frac{3^{q+1}}{2(i\pi)^{q+2}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\frac{i\pi ht}{3}} (\Phi_q(1,t)u(\alpha,h) +$$

$$+ \Phi_q(1-\alpha,t)v(-\alpha,h) + \Phi_q(1+\alpha,t)v(\alpha,h) - \Phi_q(-(h/3),t))\, dt,$$

поскольку в силу Замечания 1 и (27), (37) подынтегральная функция непрерывна на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Переходя к интегралу по $[0, 1/2]$ и учитывая (17) и (32), завершаем доказательство.

§4. ПОЛНАЯ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

4.1. Определения. Начнем с классической поточечной интерполяции функции $f \in C[-1,1]$. Пусть $N \geq 2$ – целое, $\{x_k^N\} \subset [-1,1]$, $k = 1,2,...,N$ - множество различных точек (интерполяционных узлов) и $\{T_n^N(x)\}$ – заданная система N линейно независимых функций $T_n^N(x) \in C[-1,1]$, $n = 1,2,...,N$. Рассмотрим функцию

$$I_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n T_n^N(x), \tag{39}$$

где $a_n = a_n^N(f)$, $n = 1,2,...,N$ определены так, что

a) формула (39)– интерполяционная на сети $\{x_k^N\}$, т.е. $I_N(f)(x_k^N) = f(x_k^N)$, $k = 1,2,...,N$ при $f \in C[-1,1]$;

b) формула (39) – точная для системы $\{T_n^N(x)\}$, т.е. $I_N(T_n^N(x)) = T_n^N(x)$ при $x \in [-1,1]$, $n = 1,2,...,N$.

Определение 1 ([8]). *Интерполяция (39) называется полной, если* $\min\{x_k\} = -1$ *и* $\max\{x_k\} = 1$.

Предположим, что интерполяция (39) не является полной, т.е. $b - a < 2$, где $a = \min_k\{x_k^N\}$, $b = \max_k\{x_k^N\}$. Применим (39) к функции $f_1(x) = f((2x - a - b)/(b - a))$, которая определена на $[a, b]$, поскольку $(2x - a - b)/(b - a) \in [-1, 1]$ при $x \in [a, b]$. Обратная замена переменной $x \to (b - a)x/2 + (a + b)/2$ влечет полную интерполяционную формулу

$$\bar{I}(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \bar{T}_n^N(x) \tag{40}$$

на сети $\{(2x_k^N - a - b)/(b - a)\}$, $k = 1, 2, ..., N$, посредством системы $\{\bar{T}_n^N(x)\} = \{T_n^N((b - a)x/2 + (a + b)/2\}$, $n = 1, 2, ..., N$. Эту схему можно обобщить на случай интерполяции на m-мерном квадрате ($m \geq 2$).

Очевидно, что периодическая интерполяция не может быть полной.

Определение 2. *Интерполяция (39) называется квазипериодической, если она определена для всех* $N \geq 1$, *система* $\{T_n^N(x)\}$ *определена для всех* $x \in R$, $T_n^N \in C_{loc}$, $T_n^N(x + t_N) = T_n^N(x)$, $t_N > 2$ *и* $t_N \to 2$ *при* $N \to \infty$.

4.2. Применение к основной задаче. Применяя схему пункта 4.1 к периодической (неполной) интерполяции, получим полную интерполяцию на $[-1, 1]$ посредством системы периодических функций $\{T_n^N(x)\}$ с периодом $t_N > 2$. Если $\min\{x_k^N\} \to -1$ и $\max\{x_k^N\} \to 1$ при $N \to \infty$, то получим квазипериодическую интерполяцию.

Ниже этот подход применяется по отношению к интерполяционным формулам, рассмотренным в §§3 – 4. Таким образом, в случае интерполяции I_N^α, $0 < \alpha < 1$ (см. (21)), полная квазипериодическая интерполяция строится по следующим параметрам : $t_N = 2(1 + (1 - \alpha)/(2N + \alpha))$, а в (23) аргумент x заменяется на $(\frac{2N+\alpha}{2N+1})x$.

Преимущества перехода от периодической интерполяции к квазипериодической очевидны : функция $f(x)$ аппроксимируется точно на концах интервала $[-1, 1]$, причем равномерная ошибка существенно уменьшается. Явление Гиббса на концах отрезка $[-1, 1]$ характеризуется через величины “перелета” и “недолета”. Простой иллюстрацией к сказанному является Рис. 1, который содержит графики функции $f(x) = x$ и её интерполяции на 75 точках при $\alpha = 0.57$.

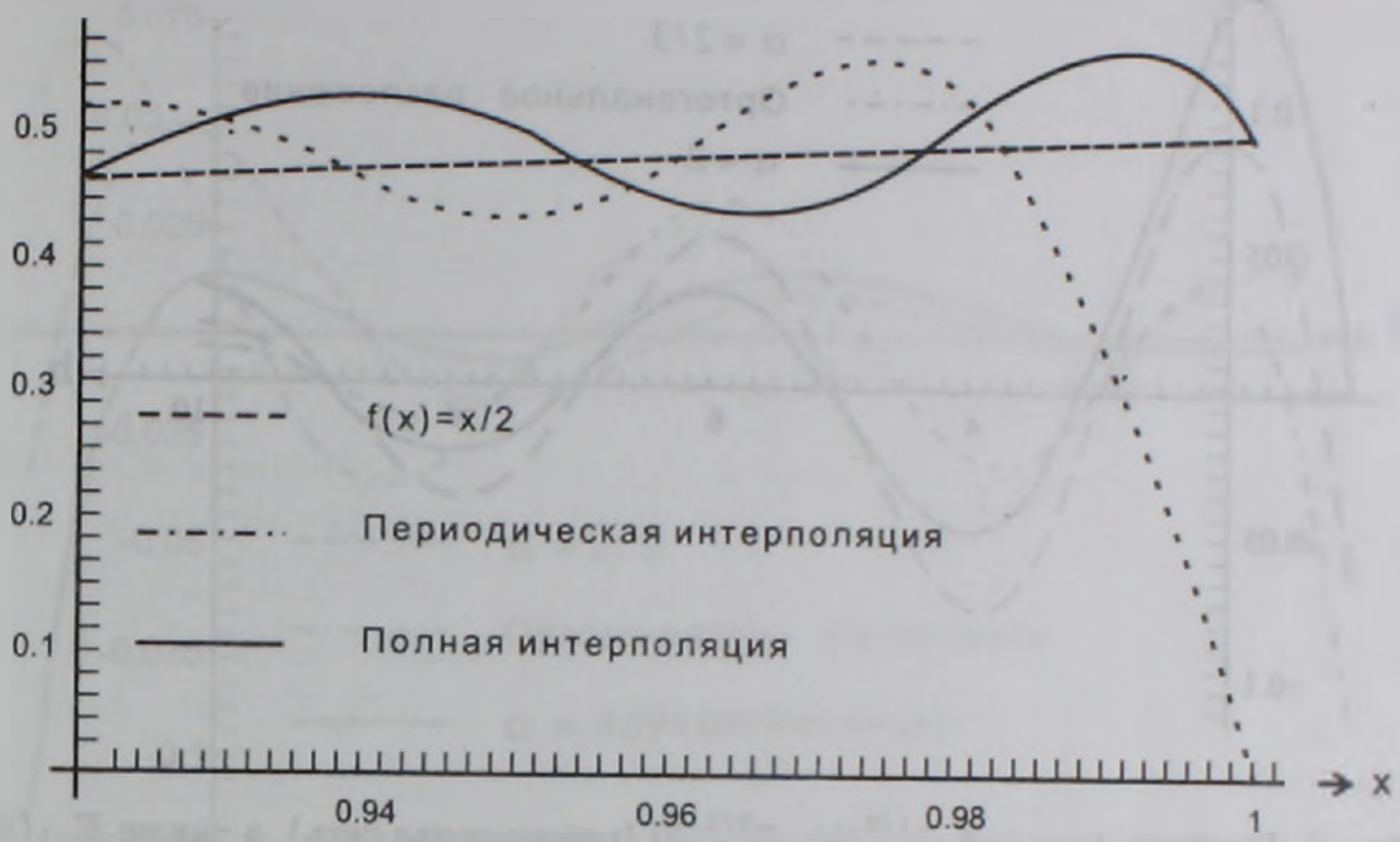

Рис.1. Графики периодической и соответствующей полной интерполяций функции $f(x) = x$ посредством формулы (21) при $\alpha = 0.57$ вблизи точки $x = 1$.

Вследствие небольшого смещения графика периодической интерполяции вправо на Рис. 1, при полной интерполяции равномерная ошибка уменьшилась с 0.5 до 0.2. Поскольку исключается интеграл, соответствующий пунктирному криволинейному треугольнику справа на Рис. 1, то L_p-ошибка ($p > 1$) также становится заметно меньше.

Легко видеть, что "недолет" явления Гиббса примерно равен 0.1, а при периодической интерполяции примерно равен 0.5. Заметим также, что на компактах внутри интервала $(-1, 1)$ при $N \gg 1$ равномерные ошибки для периодической и соответствующей полной интерполяций практически одинаковы. Это видно на Рис. 1 при $0.92 \leq x \leq 0.96$.

§5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. ОПТИМИЗАЦИЯ

5.1. Результаты §§3 и 4 ставят задачу практической минимизации равномерной ошибки интерполяции по схеме (31) при фиксированном q и $N \gg 1$ за счет оптимального выбора α и перехода к полной квазипериодической интерполяции. Сначала рассмотрим случай классического явления Гиббса ($q = -1$).

Рис.2 содержит графики функции $D^{\alpha}_{-1}(h)$ (см. (35)) при $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2/3$, и

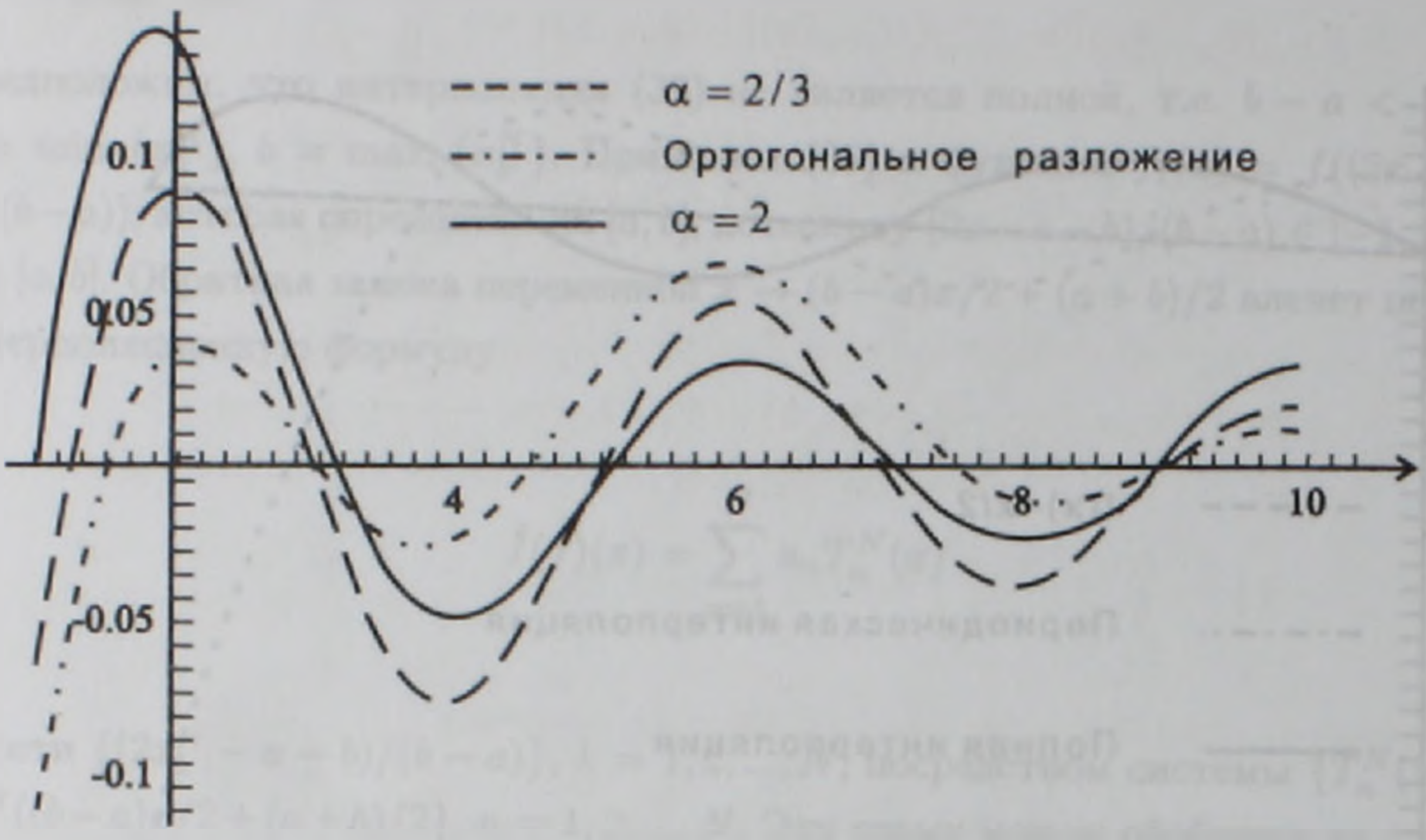

Рис.2. Графики функций $D_{-1}^{1/2}(h)$, $D_{-1}^{2/3}(h)$ (равномерная сеть), а также $E_{-1}(h)$ (ортогональное разложение), описывающие величины соответствующих явлений Гиббса ($q = -1$).

функции $E_{-1}(h)$ (см. (12)), соответствующей ортогональному разложению. Локальные экстремумы этих графиков показывают, что величина явления Гиббса при $\alpha = 1/2$ меньше соответствующих величин как для равномерной сети ($\alpha = 2/3$), так и ортогонального разложения. С другой стороны, при небольшой корректировке величины $\alpha = 1/2$ максимумы функции $D_{-1}^{\alpha}(h)$ в окрестностях точек $h = 2$ и $h = 6$ становятся равными и меньшими, чем при значении $\alpha = 1/2$ (см. Таблицу 1). Аналогичная ситуация наблюдается и при $q = 0$.

Рис. 3 содержит графики функций $D_0^{2/3}(h)$, $D_0^{0.4694}(h)$ и $E_0(h)$ при $q = 0$ (см. (12) и (35)). Заметим, что значение $\alpha = 0.4694$ является оптимальным с точностью до 10^{-5} и что (см. Таблицу 1 и Замечание 2) равномерная ошибка интерполяции в 3.5 раза меньше, чем для равномерной сети ($\alpha = 2/3$) и примерно в 15 раз меньше, чем при полиномиально-ортогональном разложении.

Таблица 1 содержит основные численные характеристики функций $D_q^{\alpha}(h)$ и $E_q(h)$ для случаев $-1 \leq q \leq 5$. В этой таблице использованы следующие обозначения : α_q – оптимальное значение α для данного q, $d_q(\alpha)$ – максимальное значение функции $|D_q^{\alpha}(h)|$, соответствующей полной квазипериодической интерполяции,

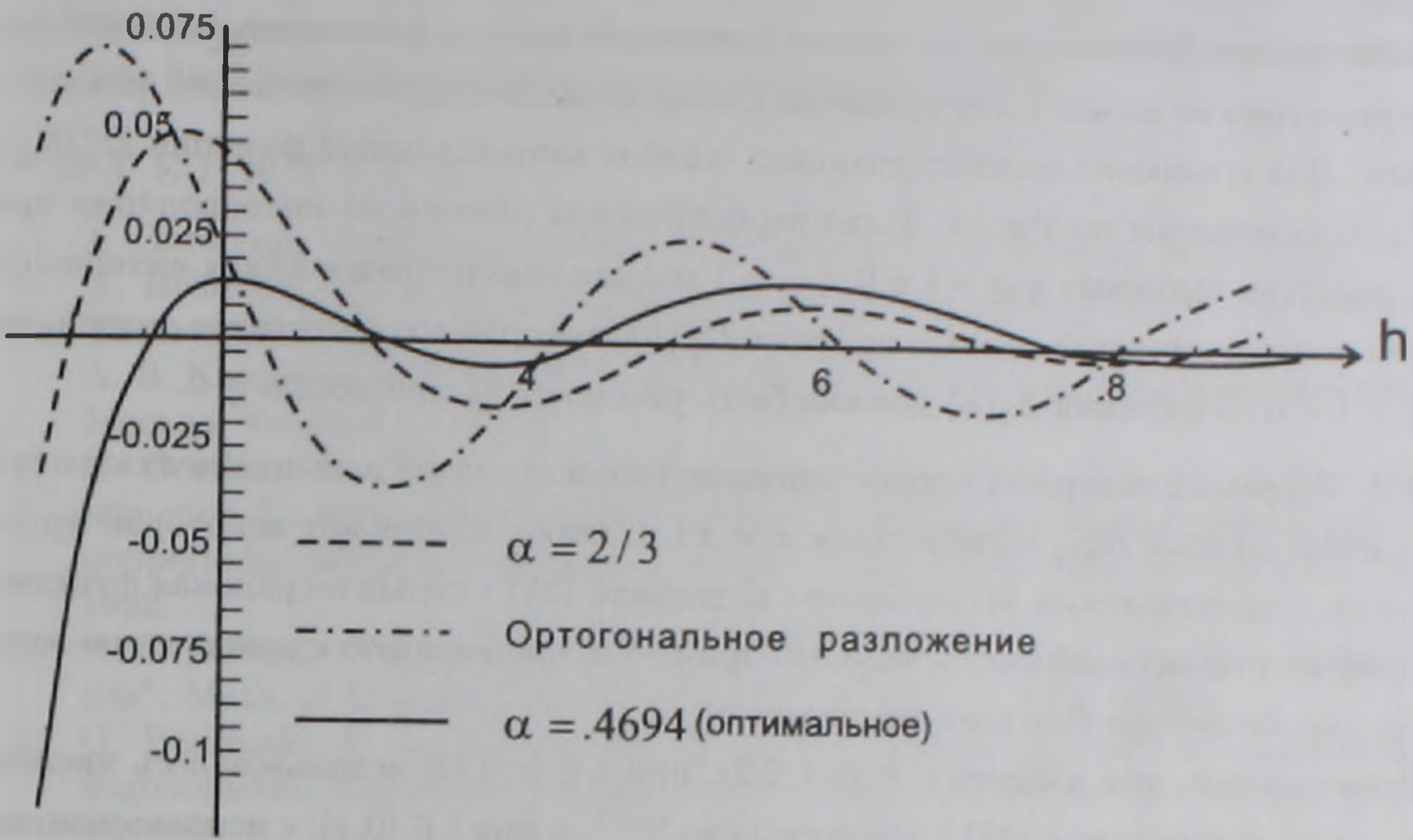

Рис.3. Графики функций $D_0^{2/3}(h)$ (равномерная сеть) и $D_0^{0.4694}(h)$ (оптимальная сеть), а также $E_0(h)$ (полиномиально-ортогональное разложение), соответствующие значению $q = 0$.

т.е. при $h \geq 1 - \alpha$, e_q есть максимальное значение $|E_q(h)|$ при $h \geq 0$.

	$q = -1$	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 5$	$q = 4$	$q = 5$
α_q	0.550415	0.469413	0.589917	0.503810	0.631282	0.536910	0.654800
$d_q(\alpha_q)$	0.061228	0.014001	0.030815	0.010654	0.010121	0.005166	0.003137
$d_q(2/3)$	0.141140	0.049408	0.045291	0.023966	0.011508	0.008813	0.003250
e_q	0.500000	0.202642	0.049529	0.027376	0.011907	0.006657	0.003383

Таблица 1. Сравнение постоянных, характеризующих асимптотическое поведение ошибок.

Таблица 1 показывает, что во всех случаях $q = -1, ..., 5$, оптимальная интерполяция точнее соответствующего ортогонального разложения (10) (в смысле равномерной сходимости). Отметим также уменьшение постоянной явления Гиббса при $q = -1$ ($d_q(\alpha_q) \simeq 0.06$ вместо $C_{ort} \simeq 0.09$).

Эти результаты показывают эффективность квазипериодической интерполяции даже в случае равномерной сети ($\alpha = 2/3$). В то же время, переход к оптимальному значению α эффективен только в пяти случаях $q = -1, 0, 1, 2, 4$.

Замечание 2. Очевидно, что выше описанный переход квазипериодической интерполяции не может быть применен к полиномиально-ортогональному разложению. Для сравнения соответствующих ошибок аппроксимаций функции $D_q^\alpha(h)$ и $E_q(h)$ приведены на Рис. 2, 3 для периодической (неполной) интерполяции при $h > 0$. При заданных $q \geq -1$ и $0 < \alpha < 1$ полная квазипериодическая интерполяция описывается той частью графика $D_q^\alpha(h)$, которая соответствует значениям $h \geq 1 - \alpha$, а функция $E_q(h)$ должна быть рассмотрена при всех $h \geq 0$.

5.2. Теорема 2 содержит точное значение главного члена асимптотического поведения ошибки $R_{N,q}^\alpha$ вблизи точек $x = \pm 1$. Однако, возникают некоторые трудности с практическим вычислением интеграла (35) : подынтегральная функция содержит неопределённость вида $0/0$ при $t \to 0$, приводящую к накоплению ошибок (особенно при больших значениях q).

Практически, для данного $\varepsilon \in (0.1, 0.2)$, при $t \in [\varepsilon, 1/2]$ использовалось численное интегрирование в (35) с точностью до 10^{-7}, а при $t \in [0, \varepsilon]$, с использованием программы Series пакета MATHEMATICA 4.1, подынтегральная функция заменялась рядом Тейлора в точке $t = 0$ с точностью до $O(t^6)$ при $t \to 0$. Этим путем была получена точность порядка , по меньшей мере, 10^{-5}.

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение интерполяционной схемы на объединении нескольких оптимально расположенных равномерных сеток и переход к полной квазипериодической интерполяции довольно перспективны. Выбор, в качестве конкретного примера, трех равномерных сеток обусловлен простотой представления. Во всех случаях получены асимптотические разложения равномерной ошибки по степеням $(6N + 3)^{-s-1}$, $s = -1, 0, 1, 2, ..., q + 1$ при $N \to \infty$, $-1 \leq q \leq \infty$. С практической точки зрения, рекомендуется брать $q \leq 10$ и поступать следующим образом : если удается находить скачки $\{A_k\}$, $k \leq p \leq 10$ с заданной точностью, то в (31) всегда полагаем $q = p$. Если $-1 \leq q \leq 2$ или $q = 4$, то выбираем оптимальное значение α_q из Таблицы 1, в противном случае пользуемся равномерной сетью ($\alpha = 2/3$). Поскольку (21) допускает одновременное применение нескольких дискретных преобразований Фурье (20), то при численной реализации удобно применить вычислительную систему параллельной архитектуры.

Abstract. The paper considers polynomial-trigonometric interpolation scheme on the union of shifts of a uniform grid. The main problem is that of optimal choice of

grid shift parameter minimizing the uniform error of quasiperiodic interpolation. In the case of symmetrically arranged three grids the asymptotic formula for the uniform error is obtained with the help of "limit function", due to Vallee–Poussin. It turns out that for certain values of the shift parameter the Gibbs phenomenon constant is less than the classic one for the Fourier series partial sums.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1 – 2, Москва, Мир, 1965.
2. G. Helmberg, "The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation", J. Approx. Theory, vol. 78, pp. 41 — 63, 1994.
3. А. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные Методы Высшего Анализа, Москва, Физматгиз, 1962.
4. D. Gottlieb, C.– W. Shu, A. Solomonoff, H. Vandeven, "On the Gibbs phenomenon I : recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of nonperiodic analytic function", J. Comp. Appl. Math., vol. 43, pp. 81 — 92, 1992.
5. K. S. Eckhoff, "On a high order numerical method for functions with singularities", Math. of Comput., vol. 67, no. 223, pp. 1063 — 1087, 1998.
6. G. Baszenski, F. J. Delvos, M. Tasche, "A united approach to accelerating trigonometric expansions", Comp. Math. Appl., vol. 30, no. 3 — 6, pp. 33 — 49, 1995.
7. А. Б. Нерсесян, А. В. Погосян, "Метод Бернулли в многомерном случае", АрмНИИНТИ, стр. 1 — 40, 09.03.00, № 20 - Ар00, 2000.
8. А. Б. Нерсесян, Н. В. Оганесян, "Квазипериодическая интерполяция", ДНАН Армении, том 101, № 2, стр. 12 — 15, 2001.
9. Ch. J. de la Vallee-Poussin, "Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes", Bull. Acad. Roy. Belgique, pp. 319 - 410, 1908.
10. G. Helmberg, "A limit function for equidistant Fourier interpolation", J. Approx. Theory, vol. 81, no. 3, pp. 389 - 396, 1995.
11. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, Численные Методы, Москва, 1987.

Поступила 11 сентября 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 5, 2002, 58–70

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СИСТЕМАМИ

Р. Л. Шахбагян

Ереванский государственный университет
e–mail : rshahba@ysu.am

Резюме. В статье рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой с распределёнными параметрами, и приведены необходимые условия существования оптимального управления.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} - u^3 = v, \tag{0.1}$$

где Δ^2 – бигармонический оператор; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ а $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ суть элементы симметрической неотрицательно определённой матрицы. Функция управления $v(x, t)$ задана. Подчиним решение $u(x, t)$ уравнения (0.1) следующим условиям :

$$u(x, 0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

$$u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \tag{0.3}$$

где $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ – боковая поверхность цилиндра Q, а ν – направление внешней нормали к границе Γ.

Переменную u можно интерпретировать как состояние некоторой системы (см. [1]), а v как переменную управления. Рассмотрим множество пар $\{v, u\}$ управление–состояние и предположим, что переменная управления v удовлетворяет условию

$$v \in U_{ad} \subset L^2(Q), \tag{0.4}$$

где U_{ad} – некоторое непустое замкнутое выпуклое множество.

Один из подходов исследования разрешимости задачи (0.1) — (0.3) заключается в сведении её к экстремальной задаче (см., например, [2]). Рассмотрим функционал

$$J(v,u) = \frac{1}{\alpha}\|u - u_d\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(Q)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}, \tag{0.5}$$

где $u_d \in L^{\alpha}(Q)$ и $N > 0$ считаются заданными, а параметр α будет уточнён ниже. Задача "оптимального управления" заключается в нахождении $\inf J(v,u)$ по решениям $\{v,u\}$ задачи (0.1) — (0.3), на множестве $U_{ad} \times L^{\alpha}(Q)$. Пара $\{v_0, u_0\}$, для которой достигается минимум функционала $J(v,u)$, называется оптимальной.

Известно (см., например, [1] и библиографию в ней), что для $v \in L^2(Q)$ нелинейная задача (0.1) — (0.3), вообще говоря, не имеет глобальных решений по времени. Итак, необходимо выбрать соответствующие функциональные пространства, в которых задача (0.1) — (0.3) корректно поставлена.

В статье исследуется задача оптимального управления, описываемая системой с распределёнными параметрами (0.1) — (0.3), и приведены необходимые условия существования оптимальных пар.

§1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Для натурального m и любого $1 < \lambda < \infty$ рассмотрим банахово пространство

$$W^{m,\lambda}(\Omega) = \{u:\ \mathcal{D}^{\alpha}u \in L^{\lambda}(\Omega), \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \le m\} \tag{1.1}$$

с нормой

$$\|u\|_{m,\lambda} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|\mathcal{D}^{\alpha}u\|^{\lambda}_{L^{\lambda}(\Omega)}\right)^{1/\lambda},$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ и $\mathcal{D}^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Обозначим через $W^{m,1,\lambda}(Q) = \{u\colon\ \mathcal{D}_x^\alpha u \in L^\lambda(Q),\quad |\alpha| \le m,\ u_t \in L^\lambda(Q)\}$ банахово пространство функций $u(x,t)$, определённых в цилиндре Q, с нормой

$$\|u\|_{m,1,\lambda} = \left(\iint_Q \left[\sum_{|\alpha|\le m} |\mathcal{D}_x^\alpha u|^\lambda + |u_t|^\lambda\right] dx\,dt\right)^{1/\lambda}.$$

Известно (см. [1], [2]), что $W^{m,1,\lambda}(Q)$ совпадает с пространством функций $u(x,t)$, удовлетворяющих $u \in L^\lambda(0,T,W^{m,1}(\Omega))$ и $u_t \in L^\lambda(0,T,L^\lambda(\Omega))$.

Теперь приведём несколько хорошо известных результатов, которые будем использовать ниже.

Теорема A ([1]). *Пространство $W^{4,1,\lambda}(Q)$ непрерывным образом вкладывается в $L^\mu(Q)$, где $1/\mu = 1/\lambda - 4/(n+4)$, $\mu > 0$, а вложение*

$$W^{4,1,\lambda}(Q) \longrightarrow L^{\mu-\varepsilon}(Q) \tag{1.2}$$

компактно при любом $\varepsilon > 0$, где n – размерность области Ω.

Обозначим через $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) =$ замыкание в норме $H^2(\Omega)$ финитных, бесконечно дифференцируемых функций, а $H^{-2}(\Omega) =$ пространство, сопряжённое $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$.

Теорема B ([3], Теорема 1). *Пусть функция $u(x,t)$, удовлетворяющая условиям*

$$u \in L^2(0,T,\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)), \qquad u_t \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega)), \quad u(x,0) = 0 \tag{1.3}$$

и (0.3), является решением линейного однородного уравнения

$$u_t + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\,u_{x_j})_{x_j} + m(x,t)\,u = 0,$$

где матрица $\|a_{ij}(x)\|$ как и во Введении, а $m \in L^{7/4}(Q)$. Тогда $u = 0$.

Теорема C ([4]). *При $3 < \alpha < 21/4$ существует оптимальная пара $\{v_0, u_0\}$ для функционала $\min J(v,u)$.*

§2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этом параграфе приведены условия, необходимые для существования оптимального управления.

Лемма 2.1. *Пусть $\{v,u\}$ – оптимальная пара для $J(v.u)$ с $v \in L^2(Q)$, $u \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$, $(\alpha > 3)$, а $p \in W^{4,1,\alpha'}(Q)$, $(1/\alpha + 1/\alpha' = 1)$ – функция такая, что*

$$p(x,T) = 0, \qquad p|_\Sigma = \left.\frac{\partial p}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0. \tag{2.1}$$

Тогда тройка $\{v,u,p\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$u_t + \Delta^2 u + \mathcal{L}u - u^3 = v, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{L}u = -\sum\limits_{i,j}((a_{ij}(x)\,u_{x_i})_{x_j}$

$$-p_t + \Delta^2 p + \mathcal{L}p - 3u^2 p = |u - u_d|^{\alpha-2}(u - u_d), \tag{2.3}$$

$$\iint_Q (p + N\,v)(w - v)\,dx\,dt \geq 0, \qquad \text{для любых} \quad v, w \in U_{ad}, \tag{2.4}$$

и выполнены условия (0.2), (0.3).

Доказательство : Пусть $\{v,u\}$ – оптимальная пара. Для производной Фреше имеем

$$I \stackrel{def}{=} \frac{d}{d\rho} J(v + \rho(w - v))\bigg|_{\rho=0} \geq 0. \tag{2.5}$$

В силу (0.5) с $\mathring{u} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ получим

$$I = \left\{\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\rho}\|u\,(v + \rho(w - v)) - u_d\|^\alpha_{L^\alpha(Q)} + \frac{N}{2}\frac{d}{d\rho}\,\|v + \rho\,(w - v)\|^2_{L^2(Q)}\right\}\bigg|_{\rho=0} =$$

$$= \iint_Q |u - u_d|^{\alpha-2}\,(u - u_d)\;\mathring{u}\,dx\,dt + N\iint_Q v\,(w - v)\,dx\,dt. \tag{2.6}$$

Из (0.1) следует, что $u(v + \rho\,(w - v))$ является решением задачи

$$\mathring{u}_t + \Delta^2\,\mathring{u} + \mathcal{L}\,\mathring{u} - 3u^2\;\mathring{u} = w - v, \tag{2.7}$$

$$\mathring{u}(x,0) = 0, \qquad \mathring{u}\Big|_\Sigma = \frac{\partial\,\mathring{u}}{\partial\nu}\bigg|_\Sigma = 0. \tag{2.8}$$

Умножая тождество (2.3) на $\mathring{u}$, интегрируя по области Q и используя (2.8) и формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\iint_Q p(\,\mathring{u}_t + \Delta^2\,\mathring{u} + \mathcal{L}\,\mathring{u})\,dx\,dt - 3\iint_Q u^2\,\mathring{u}\,p\,dx\,dt = \iint_Q |u-u_d|^{\alpha-2}\,(u-u_d)\,\mathring{u}\,dx\,dt.$$

Отсюда, в силу (2.5) и (2.7) вытекает результат. Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $7/2 < \alpha < 6$ и $\{v, u\}$ – произвольная оптимальная пара. Существует тройка $\{v, u, p\}$ с $u \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$, $p \in W^{4,1,\alpha'}(Q)$, удовлетворяющая системе (2.2) — (2.4) и условиям (0.2), (0.3) и (2.1).*

Для доказательства Теоремы 2.1 воспользуемся методом адаптированного штрафа [5]. Для этого рассмотрим штрафной функционал $J_\varepsilon(v,u)$, определённый на множестве пар $\{v, u\}$

$$J_\varepsilon(v,u) = \frac{1}{\alpha}\|u-u_d\|^\alpha_{L^\alpha(Q)} + \frac{N}{2}\,\|v\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\,\varepsilon}\,\|u_t + \Delta^2 u + \mathcal{L}u - u^3 - v\|^2_{L^2(Q)}, \quad (2.9)$$

где $v \in U_{ad} \subset L^2(Q)$, $u \in L^\alpha(Q)$ и

$$u_t + \Delta^2 u + \mathcal{L}u - u^3 \in L^2(Q), \qquad u(x,0) = u^0(x) \qquad u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0 \qquad (2.10)$$

и $\varepsilon > 0$ – параметр штрафа.

Предварительно получим ряд вспомогательных результатов.

Лемма 2.2. *Существует пара $\{v^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ такая, что $J_\varepsilon(v^\varepsilon, u^\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v,u)$, где инфимум распространяется по всем парам $\{v, u\}$, удовлетворяющим (2.10).*

Доказательство : Предположим, что множество допустимых пар $\{v, u\}$ непусто. Тогда, $\inf J_\varepsilon(v,u) < \infty$.

Пусть $\{v_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon\}$ – минимизирующая последовательность для функционала J_ε. Имеем $J_\varepsilon(v_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon) \le c$, где $c > 0$ – некоторая постоянная. Из (2.9) следует, что

$$\|v_n^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \le c, \qquad \|u_n^\varepsilon\|_{L^\alpha(Q)} \le c, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_n^\varepsilon + \mathcal{L}u_n^\varepsilon = (u_n^\varepsilon)^3 + v_n^\varepsilon. \qquad (2.12)$$

В силу (2.11) последовательность $(u_n^\varepsilon)^3 + v_n^\varepsilon$ принадлежит $L^{\alpha/3}(Q)$ и ограничена. Из (2.12) имеем $u_n^\varepsilon \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$ и

$$\|u_n^\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha/3}(Q)} \le c, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Переходя к подпоследовательностям и сохраняя обозначения, согласно (2.11), (2.12) получим слабую сходимость

$$\lim_{n\to\infty} v_n^\varepsilon = v^\varepsilon \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \quad \text{в} \quad W^{4,1,\alpha/3}(Q).$$

В силу Теоремы А (см. (1.2)), отсюда вытекает сильная сходимость в $L^2(Q)$, и, стало быть, в $L^{\alpha/3}(Q)$.

Переходя вновь к подпоследовательностям, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^\varepsilon = u^\varepsilon$ почти всюду. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n^\varepsilon)^3 = (u^\varepsilon)^3$ почти всюду. Учитывая ограниченность $\{(u_n^\varepsilon)^3\}_{n=1}^\infty$ в $L^{\alpha/3}(Q)$ заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n^\varepsilon)^3 = (u^\varepsilon)^3$ в $L^{\alpha/3}(Q)$ слабо.

Вычисляя предел в (2.12), получим

$$u_t^\varepsilon + \Delta^2 u^\varepsilon + \mathcal{L}u^\varepsilon = (u^\varepsilon)^3 + v^\varepsilon.$$

Таким образом, $\{v^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ – допустимая пара. Поскольку $\{v_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon\}$ – минимизирующая последовательность для J_ε, то $\{v^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ – оптимальная пара. Лемма 2.2 доказана. Для получения систем оптимальности используем процесс аппроксимации. Следуя работе [5], рассмотрим штрафной функционал

$$J_\varepsilon^a(v, u) = J_\varepsilon(v, u) + \frac{1}{2}\|v - v_0\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{2}\|u - u_0\|_{L^2(Q)}^2, \tag{2.14}$$

где функции v, u удовлетворяют (2.10), $J_\varepsilon(v, u)$ задаётся выражением (2.9), а $\{v_0, u_0\}$ – оптимальная пара для задачи $J(v, u)$.

Лемма 2.3. *Существует пара $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ такая, что*

$$J_\varepsilon^a(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon^a(v, u), \tag{2.15}$$

где инфимум распространяется на множество $\{v, u\}$, удовлетворяющих (2.10).

Доказательство опускаем, поскольку оно аналогично доказательству Леммы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – решение задачи (2.15) и $7/2 < \alpha < 6$. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\to v_0 \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{сильно}, \\ u_\varepsilon &\to u_0 \quad \text{в} \quad L^\alpha(Q) \quad \text{сильно}, \\ u_\varepsilon &\to u_0 \quad \text{в} \quad W^{4,1,\alpha/3}(Q) \quad \text{слабо}. \end{aligned} \tag{2.15'}$$

Доказательство : Пусть $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – решение задачи (2.15). Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что $J^\alpha_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \le c$. Действительно, из (0.5), (2.9) и (2.14) имеем

$$J^\alpha_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \le J^\alpha_\varepsilon(v_0, u_0) = J(v_0, u_0). \tag{2.16}$$

Отсюда следует

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\alpha(Q)} \le c, \qquad \|v_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \le c,$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 - v_\varepsilon \right) \right\|_{L^2(Q)} \le c. \tag{2.17}$$

Переходя к подпоследовательностям u_ε, v_ε, из (2.17) получим

$$\lim v_\varepsilon = \widetilde{v} \quad \text{в} \quad L^2(Q) \quad \text{слабо}, \qquad \lim u_\varepsilon = \widetilde{u} \quad \text{в} \quad L^\alpha(Q) \quad \text{слабо}.$$

В силу (2.17) последовательность u_ε^3 принадлежит $L^{\alpha/3}(Q)$ и ограничена. Поэтому

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 = \sqrt{\varepsilon}\, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 - v_\varepsilon \right) + v_\varepsilon, \tag{2.18}$$

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L} u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 \right\|_{L^{\alpha/3}(Q)} \le \|v_\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \sqrt{\varepsilon}\, c \le c(1 + \sqrt{\varepsilon}).$$

Следовательно, $\|u_\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha/3}(Q)} \le c_1$, где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Снова переходя к подпоследовательности, при $\varepsilon \to 0$ имеем $\lim u_\varepsilon = \widetilde{u}$ в $W^{4,1,\alpha/3}(Q)$ слабо.

Как и в доказательстве Леммы 2.2 можно выбрать подпоследовательности такие, что при $\varepsilon \to 0$

$$\lim u_\varepsilon^3 = \widetilde{u}^3 \quad \text{в} \quad L^{\alpha/3}(Q) \quad \text{слабо}.$$

Вычисляя предел в (2.18) при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\widetilde{u}_t + \Delta^2 \widetilde{u} + \mathcal{L}\widetilde{u} - \widetilde{u}^3 = \widetilde{v}.$$

Это означает, что $\{\widetilde{v}, \widetilde{u}\}$ есть допустимая пара. Для завершения доказательства осталось показать, что $\widetilde{u} = u_0$ и $\widetilde{v} = v_0$. Имеем

$$J_\varepsilon^a(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = J_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{1}{2}\|v_\varepsilon - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(Q)} \geq$$

$$\geq J(v_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{1}{2}\|v_\varepsilon - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|u_\varepsilon - u_0\|^2_{L^2(Q)}.$$

При $\alpha > 7/2$, в силу Теоремы А имеем $u_\varepsilon \to \widetilde{u}$ в $L^\alpha(Q)$. Следовательно, $u_\varepsilon \to \widetilde{u}$ также в $L^\alpha(Q)$. Учитывая (2.16) заключаем, что $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ есть минимизирующая последовательность для функционала $J(v, u)$. Следовательно, имеет место оценка

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon^a(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq J(\widetilde{v}, \widetilde{u}) + \frac{1}{2}\|\widetilde{v} - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{u} - u_0\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.19}$$

С другой стороны

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon^a(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq J(v_0, u_0). \tag{2.20}$$

Итак, из (2.19) и (2.20), $J(\widetilde{v}, \widetilde{u}) \leq J(v_0, u_0)$, и $J(\widetilde{v}, \widetilde{u}) = J(v_0, u_0)$, поскольку $\{v_0, u_0\}$ – оптимальная пара для J. В силу (2.19)

$$J(v_0, u_0) \geq J(v_0, u_0) + \frac{1}{2}\|\widetilde{v} - v_0\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|\widetilde{u} - u_0\|^2_{L^2(Q)}.$$

Отсюда вытекает $\widetilde{v} = v_0$ и $\widetilde{u} = u_0$. Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ имеем $J(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \to J(v_0, u_0)$. Поэтому последовательность $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ аппроксимирует пару $\{v_0, u_0\}$ и условие (2.15′) выполнено. Доказательство Леммы 2.4 завершено.

Теперь выпишем систему оптимальности для задачи со штрафом (2.15). Пусть $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ – некоторое решение этой задачи. Тогда необходима выполнимость следующих условий :

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon^a(v_\varepsilon, u_\varepsilon + \lambda\xi)\bigg|_{\lambda=0} = 0$$

для любого $\xi \in W^{4+1,\alpha/3}(Q)$, $\xi(x,0) = 0$, $\xi|_\Sigma = \left.\dfrac{\partial \xi}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0$ и

$$\left.\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon^\alpha(v_\varepsilon + \lambda\,(v - v_\varepsilon), u_\varepsilon)\right|_{\lambda=0} \geq 0 \tag{2.21}$$

для любого $v \in U_{ad}$. Следовательно, в силу (2.20)

$$\begin{aligned} &- \iint_Q p_\varepsilon\,(\xi_t + \Delta^2 \xi + \mathcal{L}\xi - 3\,u_\varepsilon^2\,\xi)\,dx\,dt + \\ &+ \iint_Q \left[|u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\,(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0\right]\,\xi\,dx\,dt = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где $p_\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon + \mathcal{L}u_\varepsilon - u_\varepsilon^3 - v_\varepsilon\right)$.

Интегрируя по частям первое слагаемое в (2.22) и полагая

$$p_\varepsilon(x,T) = 0, \qquad p_\varepsilon|_\Sigma = \left.\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0 \tag{2.23}$$

получим

$$\begin{aligned} &- \iint_Q p_\varepsilon\,\left(-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 p_\varepsilon + \mathcal{L}p_\varepsilon - 3\,u_\varepsilon^2\,p_\varepsilon\right)\,\xi\,dx\,dt + \\ &+ \iint_Q \left[|u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\,(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0\right]\,\xi\,dx\,dt = 0. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\xi(x,t)$ постоянна, то

$$-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 p_\varepsilon + \mathcal{L}p_\varepsilon - 3\,u_\varepsilon^2\,p_\varepsilon = |u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\,(u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0. \tag{2.24}$$

Таким образом, функция $p_\varepsilon(x,t)$ есть слабое решение задачи (2.23), (2.24). Далее, учитывая (2.21), после некоторых вычислений для любого $v \in U_{ad}$ получим

$$\iint_Q (p_\varepsilon + (N+1)\,v_\varepsilon - v_0)\,(v - v_\varepsilon)\,dx\,dt \geq 0. \tag{2.25}$$

Итак, для определения системы оптимальности для задачи (2.15) должны найти тройку $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$, удовлетворяющую уравнению (2.24) и условиям (2.10), (2.23), (2.25). Следующая Лемма содержит априорную оценку для $p_\varepsilon(x,t)$, которая будет использована в доказательстве Теоремы 2.1.

Лемма 2.5. *При $\alpha > 7/2$ существует некоторая постоянная $c > 0$, для которой*

$$\|p_\varepsilon\|_{L^{\alpha/(\alpha-3)}(Q)} \le c. \tag{2.26}$$

Прежде чем перейти к доказательству Леммы 2.5, вычислим предел в (2.24). Из (2.17) и (2.26) следует, что последовательность $u_\varepsilon^2\, p_\varepsilon$ ограничена в $L^{\alpha'}(Q)$, где $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$. Действительно, по неравенству Гёльдера

$$\iint_Q |u_\varepsilon^2\, p_\varepsilon|^{\alpha'}\, dx\, dt = \iint_Q |p_\varepsilon|^{\alpha/(\alpha-1)}\, |u_\varepsilon|^{2\alpha/(\alpha-1)}\, dx\, dt \le$$

$$\le \left(\iint_Q \left(|p_\varepsilon|^{\alpha/(\alpha-1)} \right)^{(\alpha-1)/(\alpha-3)} dx\, dt \right)^{(\alpha-3)/(\alpha-1)} \times$$

$$\times \left(\iint_Q \left(|u_\varepsilon|^{2\alpha/(\alpha-1)} \right)^{(\alpha-1)/2} dx\, dt \right)^{2/(\alpha-1)} =$$

$$= \left(\iint_Q |p_\varepsilon|^{\alpha/(\alpha-3)}\, dx\, dt \right)^{(\alpha-3/(\alpha-1)} \left(\iint_Q |u_\varepsilon|^{\alpha}\, dx\, dt \right)^{2/(\alpha-1)} \le c_1$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$. Далее, поскольку $(u_\varepsilon - u_0) \in L^\alpha(Q)$ и $\alpha > 7/2$, то имеем $(u_\varepsilon - u_0) \in L^{\alpha'}(Q)$. Отсюда, в силу Леммы 2.4, $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^{\alpha'}(Q)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Величина $3\, u_\varepsilon^2\, p_\varepsilon + |u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\, (u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0$ ограничена в пространстве $L^{\alpha'}(Q)$, откуда вытекает $p_\varepsilon \in W^{4,1,\alpha'}(Q)$ и $\|p_\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha'}} \le c_2$ с некоторой постоянной c_2.

Теперь, переходя к подпоследовательности и совершая слабый предельный переход в (2.24) заключаем, что $p_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon \in W^{4,1,\alpha'}$. Итак, тройка $\{v_0, p_o, u_0\}$ удовлетворяет системе оптимальности (2.2) — (2.4), и выполняются условия (0.2), (0.3) и (2.1).

Доказательство Леммы 2.5 : Предположим обратное, т.е. что при $\varepsilon \to 0$

$$\|p_\varepsilon\|_{L^{\alpha/(\alpha-3)}(Q)} \to \infty. \tag{2.27}$$

Положим $q_\varepsilon = \dfrac{p_\varepsilon}{\|p_\varepsilon\|_{L^{\beta'}(Q)}}$, где $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$, $\quad \beta' = \dfrac{\alpha}{\alpha - 3}$.

Уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 q_\varepsilon + \mathcal{L} q_\varepsilon = 3\, u_\varepsilon^2\, q_\varepsilon + \frac{1}{\|p_\varepsilon\|_{L^{\beta'}(Q)}} \left[|u_\varepsilon - u_d|^{\alpha-2}\, (u_\varepsilon - u_d) + u_\varepsilon - u_0 \right]. \tag{2.28}$$

Так как $\|q_\varepsilon\|_{L^{\beta'}(Q)} = 1$, то с учётом (2.28) имеем

$$\|q_\varepsilon\|_{W^{4,1,\alpha'}(Q)} \le c. \tag{2.29}$$

При $\alpha > 7/2$, $1/\beta' > (\alpha-1)/\alpha - 4/7$, по Теореме А имеем компактное вложение $W^{4,1,\alpha'}(Q) \subset L^{\beta'}(Q)$. Следовательно, переходя к подпоследовательностям, из (2.29) при $\varepsilon \to 0$ получим

$$q_\varepsilon \to q_0 \quad \text{в} \quad W^{4,1,\alpha'}(Q) \quad \text{слабо}, \qquad q_\varepsilon \to q_0 \quad \text{в} \quad L^{\beta'}(Q) \quad \text{сильно}.$$

Переходя к пределу в (2.28), с учётом (2.27) заключаем, что $q_0(x,t)$ - решение следующей линейной (относительно q_0) смешанной задачи :

$$-\frac{\partial q_0}{\partial t} + \Delta^2 q_0 + \mathcal{L} q_0 - 3\,u_0^2\, q_0 = 0, \tag{2.30}$$

$$\|q_0\|_{L^{\beta'}(Q)} = 1, \tag{2.31}$$

$$q_0(x,T) = 0, \qquad q_0|_\Sigma = \frac{\partial q_0}{\partial \nu}\bigg|_\Sigma = 0. \tag{2.32}$$

Итак, если доказать единственность сильного решения задачи (2.30) — (2.32) (см. Теорему В), будем иметь требуемое противоречие.

Лемма 2.6. *Пусть $7/2 < \alpha < 21/4$. Решение q_0 задачи (2.30) — (2.32) удовлетворяет условиям*

$$q_0 \in L^2(0,T,\mathring{H}^2(\Omega)), \qquad \frac{\partial q_0}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega)). \tag{2.33}$$

Доказательство : Покажем, что $q_0 \in L^{\beta'}(Q)$ влечёт $q_0 \in L^\infty(Q)$. Поскольку $u_0 \in W^{4,1,\alpha/3}(Q)$, то в силу Теоремы А имеем следующее непрерывное вложение

$$W^{4,1,\alpha/3}(Q) \subset L^\mu(Q), \quad \text{где} \quad \mu = \frac{7\,\alpha}{21\,\alpha - 7}. \tag{2.34}$$

Отсюда имеем $u_0^2 \in L^{\mu/2}(Q)$. В силу Теоремы А имеем непрерывное вложение

$$W^{4,1,\alpha'}(Q) \subset L^\gamma(Q), \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{7\,\alpha}{3\,\alpha - 7}. \tag{2.35}$$

Используя $q_0 \in W^{4,1,\alpha'}(Q) \subset L^{\gamma}(Q)$ покажем, что $u_0^2 q_0 \in L^{\rho}(Q)$, где $\rho = \dfrac{7\alpha}{35 - 5\alpha}$.

Действительно, поскольку $\gamma = \dfrac{\rho\mu}{\mu - 2\rho}$, ввиду (2.34) и (2.35) получим

$$\iint_Q |u_0^2 q_0|^{\rho} dx\,dt \le \left(\iint_Q \left(|u_0|^{2\rho}\right)^{\mu/(2\rho)} dx\,dt\right)^{2\rho/\mu} \times$$

$$\times \left(\iint_Q |q_0|^{\rho\mu/(\mu-2\rho)} dx\,dt\right)^{(\mu-2\rho)/\mu} = \|u_0\|_{L^{\mu}(Q)}^{2\rho} \|q_0\|_{L^{\gamma}(Q)}^{\rho} < \infty.$$

Из (2.30) следует, что $q_0 \in W^{4,1,\rho}(Q) \subset L^{\gamma_1}(Q)$, где $\dfrac{1}{\gamma_1} = \dfrac{1}{\rho} - \dfrac{4}{7}$ и $\gamma_1 = \dfrac{7\alpha}{35 - 9\alpha} > \gamma$ при $\alpha > 7/2$. Продолжая этот процесс заключаем, что $q_0 \in L^{\infty}(Q)$. Так как $u_0^2 q_0 \in L^{\mu/2}(Q)$, то используя (2.30), получим

$$q_0 \in W^{4,1,\mu/2}(Q). \tag{2.36}$$

В силу теорем вложения (см. [1], [6]) из (2.36) при $\alpha > 7/2$ имеем $W^{4,1,\mu/2}(Q) \subset L^2(0,T,H^2(\Omega))$. Учитывая (2.32), $q_0 \in L^2(0,T,\mathring{H}^2(\Omega))$, откуда следует первое утверждение из (2.33). Для завершения доказательства осталось показать, что $\dfrac{\partial q_0}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega))$. В силу (2.30) для любого $\varphi \in L^2(0,T,\mathring{H}^2(\Omega))$

$$\left|< \frac{\partial q_0}{\partial t}, \varphi >\right| \le \iint_Q |\Delta q_0|\,|\Delta\varphi|\,dx\,dt + \sum_{i,j=1}^{n} \iint_Q |a_{ij}(x)| \left|\frac{\partial q_0}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right| dx\,dt +$$

$$+ 3\iint_Q u_0^2\,|q_0|\,|\varphi|\,dx\,dt \le \|q_0\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))}\,\|\varphi\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} +$$

$$+ c_1\,\|q_0\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}\,\|\varphi\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} + c_2\,\|u_0^2 q_0\|_{L^{\infty}(Q)}\,\|\varphi\|_{L^2(Q)} \le$$

$$\le c_3\,\|\varphi\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))},$$

где $c_3 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от φ, а $< \cdot >$ – распределение.

Таким образом, доказали, что $\dfrac{\partial q_0}{\partial t} \in L^2(0,T,H^{-2}(\Omega))$. Лемма 2.6 доказана. Теперь в силу Леммы 2.6 можно применить Теорему B, чем и завершается доказательство Леммы 2.5. Наконец, Теорема 2.1 следует из Лемм 2.2 — 2.6.

Abstract. The paper considers a problem of optimal control described by a system with distributed parameters, and suggests conditions necessary for existence of optimal control.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Л. Лионс, Управление Сингулярными Распределёнными Системами, М., Наука, 1987.
2. Ж. Л. Лионс, Оптимальное Управление Системами, Описываемыми Уравнениями с Частными Производными, М., Мир, 1972.
3. Р. Л. Шахбагян, "О единственности решений параболических уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, том. 35, № 5, стр. 75 – 80, 2000.
4. Л. Г. Тоноян, "Об одной экстремальной задаче", Уч. Записки ЕГУ, № 3, стр. 7 — 11, 2002.
5. J. L. Lions, Perturbations Singuieres Dans les Problemes aux Limites et en Controle Optimal, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.
6. D. L. Russel, "Controllability and stability theory for linear partial differential equations", SIAM Review, pp. 639 – 739, 1978.

Поступила 6 мая 2002

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 5, 2002, 71–84

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

А. А. Чубарян

Ереванский государственный университет
e-mail : achubaryan@ysu.am

Резюме. Вопрос об одинаковой эффективности системы резолюций и секвенциальных систем без правила сечения ставился с 1960 г. (Кук, Рехов, Ургуарт). Задача частично была решена Н. Араи при различных ограничениях как на класс выводимых формул, так и на тип выводов. В статье доказано, что вышеупомянутые системы и две другие системы классической пропозициональной логики полиномиально эквивалентны. Описаны множества тавтологий длины n, для которых сложности выводов в вышеназванных четырёх системах равны по порядку n, n^2, n^3,..., $2^{n/2}$.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование сложности выводов в различных системах доказательств классической пропозициональной логики (КПЛ) актуально из-за непосредственной связи с основной проблемой сложности вычислений : $P \stackrel{?}{=} NP$. Куком и Реховым (см. [1]) доказано, что для существования полиномиальной ограниченной системы доказательств КПЛ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{N}P = co\mathcal{N}P$.

Суперполиномиальные нижние оценки сложности выводов получены только для "слабых" систем, в частности для системы с резолюциями $\Re$ и секвенциальной системы PK^- [2], часто используемых при автоматизированном доказательстве теорем, ввиду относительно "простой" стратегии поиска выводов.

Две другие системы КПЛ с "простой" стратегией поиска выводов были описаны автором в ([3], [4]) : система гильбертовского типа без правила сечения $\mathcal{C}$ и система $\mathcal{E}$, направленная на установление выводимости формул, заданных в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

В [3] была описана последовательность тавтологий длины n таких, что сложности их выводов в системе $\mathcal{C}$ равны по порядку n, n^2. n^3,..., $2^{n/2}$. В настоящей статье сравниваются эффективности четырёх упомянутых систем.

Каждая из систем доказательств использует некоторый формальный язык, в котором определяются различные представления пропозициональной формулы (секвенция, ДНФ, конъюнктивная нормальная форма (КНФ) и т.д.). Система доказательств Φ состоит из конечного множества схем-аксиом и конечного числа обоснованных правил выводов. Вывод в системе Φ (Φ-вывод) есть конечная последовательность формул (или их представлений), каждая из которых или аксиома Φ, или выводится из предыдущих формул по одному из правил вывода системы Φ.

Общее число символов в формуле φ называется **длиной** формулы φ и обозначается через $|\varphi|$. Определим T-сложность вывода как количество шагов в нем (= общему числу строк) и L-сложность вывода как его **длину** (= общее число символов).

Минимально возможную L-сложность (T-сложность) вывода формулы φ (или её представления) в системе Φ обозначим через L_φ^Φ (T_φ^Φ). Понятие полиномиальной сводимости (p-сводимости) было введено в [1], [2]. Пусть Φ_1 и Φ_2 суть две различные системы выводов. Система Φ_1 p-сводима к системе Φ_2, если существует такой полином $p(\ )$, что для каждой формулы φ выполняется $L_\varphi^{\Phi_2} \leq p(L_\varphi^{\Phi_1})$. Системы Φ_1 и Φ_2 называются полиномиально эквивалентными (p-эквивалентными), если они взаимно сводимы друг к другу. Аналогично p-сводимость и p-эквивалентность определяются для T-сложности.

В работе доказывается, что системы $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\Re$ и PK^- p-эквивалентны. Следовательно, упомянутая иерархия тавтологий по сложности выводов может быть построена также для $\Re$ и PK^-. Через ТАВТ будем обозначать множество всех тавтологий.

§1. p-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ $\mathcal{C}$ И $\mathcal{E}$

Напомним определения двух систем $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$, описанных в [3] – [5].

Пропозициональная формула определяется как слово, составленное по известным правилам из 1) пропозициональных переменных p_i, $i \geq 1$; 2) логических связок $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$; 3) скобок (,). Далее, под знаком $*$ будем понимать $\wedge$, $\vee$ или $\rightarrow$. Через E^n будем обозначать единичный булев куб. Как обычно, переменные и переменные с отрицанием называются **литералами** ; конъюнкт K – множество литералов, в которое ни для какой переменной p не входят и p, и $\overline{p}$.

Для каждого множества формул $\mathcal{U} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ обозначим через $\mathcal{U}^\phi$ формулу $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge (...(\wedge(\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m)...))$, которая называется ϕ-**представлением** множества $\mathcal{U}$. И обратно, для формулы $K = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge (...(\wedge(\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m)...))$ через K^s обозначим множество $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$.

Пусть φ - пропозициональная формула и $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ - множество ее различных переменных. Для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m) \in E^m$ $(1 \leq m \leq n)$ конъюнкт $\mathcal{K} = \{p_{i1}^{\sigma_1}, p_{i2}^{\sigma_2}, ..., p_{im}^{\sigma_m}\}$ называется φ-**определяющим**, если придавая каждой переменной p_{ij} $(1 \leq j \leq m)$ значение σ_j можно за реальное время определить значение формулы φ, вне зависимости от значений остальных переменных [3]. По аналогии φ-представление $\mathcal{K}^\varphi$ может быть φ-определяющим. Заметим, что если значение формулы φ есть 1 (или 0), то имеем дело с φ-1-определяющим (φ-0-определяющим) конъюнктом.

Аксиомы системы $\mathcal{C}$ задаются следующими схемами :

I $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 ... \wedge (\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m)...) \to \alpha_i$, $\qquad (m \geq 1, 1 \leq i \leq m)$.

II 1. $(K \to \alpha) \to ((K \to \neg\beta) \to (K \to \neg(\alpha \to \beta)))$;

2. $(K \to \neg\alpha) \to (K \to (\alpha \to \beta))$;

3. $(K \to \beta) \to (K \to (\alpha \to \beta))$; 4. $(K \to \alpha) \to ((K \to \beta) \to (K \to \alpha \wedge \beta))$;

5. $(K \to \neg\alpha) \to (K \to \neg(\alpha \wedge \beta))$; 6. $(K \to \neg\beta) \to (K \to \neg(\alpha \wedge \beta))$;

7. $(K \to \neg\alpha) \to ((K \to \neg\beta) \to (K \to \neg(\alpha \vee \beta)))$;

8. $(K \to \alpha) \to (K \to \alpha \vee \beta)$; 9. $(K \to \beta) \to (K \to \alpha \vee \beta)$;

10. $(K \to \alpha) \to (K \to \neg\neg\alpha)$.

III 1. $(\delta \wedge K \to \varphi) \to ((\overline{\delta} \wedge K \to \varphi) \to (K \to \varphi))$; 2. $(\gamma \to \varphi) \to ((\overline{\gamma} \to \varphi) \to \varphi)$,

где φ есть формула, для которой строится вывод ; α_i $(1 \leq i \leq m-1)$, α, β, δ – произвольные формулы, α_m и γ – литералы ; для произвольных формул β_i $(1 \leq i \leq l)$ $K = \beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge ....(\beta_{l-1} \wedge \beta_l)...)$ $(l \geq 1)$, причем β_l – литерал. Наконец, для каждой подформулы вида $K \to \psi$ аксиом группы II, множество $\mathcal{K}^s$ является ψ-1-определяющим ; В аксиомах 1 группы III $\delta \notin K^s$, $\{\delta\} \cup K^s$ является подмножеством некоторого φ-определяющего множества, и K^s не является φ-определяющим.

Правилом вывода является **modus ponens** $\dfrac{A, A \to B}{B}$. Отметим, что с учетом вышеприведенных ограничений каждая формула в $\mathcal{C}$-выводе является "подформулой" последней формулы [3].

По общепринятой терминологии любая формула в ДНФ представляется как множество конъюнктов $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_r\}$.

Аксиомы системы $\mathcal{E}$ не фиксируются. Каждый конъюнкт может быть рассмотрен как аксиома. **Правило сокращения (элиминации)** (ε-правило) задаётся следующим образом : $\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ выводится из $\mathcal{K}' \cup \{p\}$ и $\mathcal{K}'' \cup \{\overline{p}\}$, где $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$ суть конъюнкты, а p – пропозициональная переменная.

ДНФ $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_r\}$ называется **полной** (тавтология) если из аксиом $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$,..., $\mathcal{K}_r$ можно вывести пустой конъюнкт Λ, используя ϵ-правило.

Минимальное количество шагов в $\mathcal{E}$-выводе Λ из полной ДНФ $\mathcal{D}$ называется сложностью $\mathcal{D}$ и обозначается через $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}$. Соответственно, минимальную длину $\mathcal{E}$-вывода из $\mathcal{D}$ обозначим через $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}$.

Полную ДНФ $\mathcal{D}$ назовём φ-определяющей, если каждый конъюнкт из $\mathcal{D}$ является φ-определяющим.

Лемма 1.1. *Если для некоторой $\varphi \in TABT$ произвольный φ-определяющий конъюнкт содержит не менее m литералов, то*

1) $T^{\mathcal{C}}_{\varphi} \geq c \cdot 2^m$ для некоторой константы c;

2) для любой φ-определяющей ДНФ $\mathcal{D}$ $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \geq 2^{m+1} - 1$.

Определение. *Любую φ-определяющую ДНФ $\mathcal{D}$, имеющую наименьшую сложность, назовём* **минимально-определяющей** *ДНФ для формулы φ и обозначим через $\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}$.*

В [3] – [5] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Для достаточно больших n и для каждого t $(1 \leq t \leq [n \log_n 2])$ существуют тавтологии φ^t_n такие, что $\log_2 |\varphi^t_n| = \Theta(n)$ и*

1) $O(n^t) \leq \log_2 T^{\mathcal{C}}_{\varphi^t_n} \leq O(n^{t+1})$ и $O(n^{t+1}) \leq \log_2 L^{\mathcal{C}}_{\varphi^t_n} \leq O(n^{t+2})$,

2) $O(n^t) \leq \log_2 T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi^t_n}} \leq O(n^{t+1})$ и $O(n^{t+1}) \leq \log_2 L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi^t_n}} \leq O(n^{t+2})$.

Доказательство основано на Лемме 1.1 и рассмотрении формул

$$\varphi_{n,t} = \bigvee_{\sigma \in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \left(\bigvee_{i=1}^{n} p_{ij}^{\sigma_i} \right), \quad n \geq 1, m = n^t, 1 \leq t \leq [n \log_n 2].$$

Формула $\mathcal{D}^{\varphi} = \mathcal{K}^{\varphi}_1 \vee (\mathcal{K}^{\varphi}_2 \vee (... \vee (\mathcal{K}^{\varphi}_{s-1} \vee \mathcal{K}^{\varphi}_s)...))$ называется φ–представлением ДНФ $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_s\}$.

Теорема 1.2. *1) Для произвольной полной ДНФ $\mathcal{D}$, если $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \leq l$, то $L^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}^{\varphi}} \leq cl^3$ для некоторой постоянной c.*

2) Для произвольной $\varphi \in TABT$, если $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \leq l$, то $L^{\mathcal{C}}_{\varphi} \leq c_1 l^3$ для некоторой постоянной c_1.

3) Для произвольной $\varphi \in TABT$, если $L^{\mathcal{C}}_{\varphi} \leq l$ и $T^{\mathcal{C}}_{\varphi} \leq t$, то $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \leq l^2$ и $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \leq t$.

Доказательство. 1) Пусть для некоторой полной ДНФ $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_s\}$ имеем $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \leq l$. Каждая конъюнкция $\mathcal{K}_i$, $i = 1, ..., s$ является $\mathcal{D}^{\varphi}$–определяющей, а значит вывод формулы $\mathcal{D}^{\varphi}$ в системе $\mathcal{C}$ может быть построен по схеме, описанной в [3]. Каждая формула

$$(\delta \wedge \mathcal{K}_1 \to \varphi) \to \left(\left(\overline{\delta} \wedge \mathcal{K}_2 \to \varphi\right) \to (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 \to \varphi)\right)$$

$$\text{или} \quad (\mathcal{K}_1^{\varphi} \wedge \mathcal{K}_2^{\varphi} \to \varphi) \to ((\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)^{\varphi} \to \varphi)$$

выводима в $\mathcal{C}$ с $\mathcal{L}$-сложностью, не превышающей $c'l$ для некоторой постоянной c'. Очевидно, что $L^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}^*} \le c_1 s l^2 + t l^2$, где $t = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^*} < L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^*} \le l$ и c_1 – некоторая постоянная. Следовательно, $L^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}^*} \le cl^2$ для некоторой постоянной c.
Аналогично на основе $\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}$ доказывается 2).

3) Пусть $\varphi \in$ ТАВТ и $L^{\mathcal{C}}_{\varphi} \le l$, $T^{\mathcal{C}}_{\varphi} \le t$. Так как каждая конъюнкция, впервые применённая в аксиоме группы III, является φ–определяющей, а множество $\mathcal{D}$ всех таких конъюнктов является полной ДНФ, то можно построить вывод пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}$, для которого $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \le t$, и, следовательно, $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \le t$. Итак, имеем $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \le T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \cdot \left|\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}\right| \le t \cdot l \le l^2$. Теорема 1.2 доказана.

Следствие. *Системы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ p–эквивалентны.*

§2. СООТНОШЕНИЕ СИСТЕМЫ С РЕЗОЛЮЦИЯМИ И СИСТЕМЫ $\mathcal{E}$

Система $\Re$ с резолюциями направлена на доказательство опровержимости пропозициональных формул, заданных в КНФ. По обычной терминологии, формула в КНФ представляется как семейство дизъюнктов $\mathcal{K} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_s\}$, где каждый дизъюнкт понимается как множество литералов, причём ни в один дизъюнкт не входят контрарные литералы. Аксиомы в $\Re$ не фиксируются. Для некоторой КНФ $\mathcal{K} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_s\}$ каждый из дизъюнктов $\mathcal{D}_i$ может рассматриваться как аксиома. Правило резолюции означает, что $\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ выводится из $\mathcal{D}' \cup \{p\}$ и $\mathcal{D}'' \cup \{p\}$, где $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ суть дизъюнкты, а p – пропозициональная переменная.

КНФ $\mathcal{K} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_s\}$ опровержима тогда и только тогда, когда существует вывод пустого дизъюнкта из аксиом $\{\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2,\ ...,\ \mathcal{D}_s\}$. Для каждой КНФ $\mathcal{K}$ L–сложность (T–сложность) пустого дизъюнкта из $\mathcal{K}$ будем обозначать через $L^{\Re}_{\mathcal{K}}$ ($T^{\Re}_{\mathcal{K}}$).

Для любых литералов $\xi_1,\ \xi_2, ...,\ \xi_n$ конъюнкт $\mathcal{K} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ и дизъюнкт $\mathcal{D} = \{\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}, ..., \overline{\xi_n}\}$ будем называть **контрарными**. КНФ $\mathcal{K} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_s\}$ и ДНФ $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_s\}$ назовём контрарными, если для каждого $i \in \{1, ..., s\}$ дизъюнкт $\mathcal{D}_i$ и конъюнкт $\mathcal{K}_i$ контрарны. Через $\mathcal{K}(\neg\mathcal{D})$ ($\mathcal{D}(\neg\mathcal{K})$) обозначаем КНФ (ДНФ) контрарную к ДНФ $\mathcal{D}$ (КНФ $\mathcal{K}$).

Заменой в $\mathcal{E}$–выводе пустого конъюнкта Λ из ДНФ $\mathcal{D}$ на контрарный дизъюнкт, получим $\Re$–вывод пустого дизъюнкта $\emptyset$ из $\mathcal{K}(\neg\mathcal{D})$ и наоборот. Следовательно, формула, заданная в ДНФ имеет ту же сложность как $\mathcal{E}$–вывода так и $\Re$–вывода и по шагам и по длине. Отметим, что для каждого $\varphi \in$ ТАВТ в системе $\mathcal{E}$ мы используем $\mathcal{D}_\varphi^{\min}$. В системе $\Re$ строится некоторая КНФ $\mathcal{K}_\varphi^{res}$, используя эффективный метод, впервые примененный Цейтиным в [7]. Каждой подформуле формулы φ сопоставляется литерал, удовлетворяющий условиям :

1) если подформула является пропозициональной переменной, то сопоставленный литерал есть просто сама переменная ;

2) литерал, сопоставленный подформуле $\neg\alpha$ есть отрицание литерала, сопоставленного α.

Если подформула γ имеет вид $\alpha * \beta$ и p_γ, p_α, p_β суть переменные, сопоставленные γ, α, β, то строится КНФ формулы $p_\gamma \equiv p_\alpha * p_\beta$. $\mathcal{K}_\varphi^{res}$ является объединением КНФ, построенных для всех неэлементарных подформул формулы φ, плюс литерал $\overline{p}_\varphi$, где p_φ есть литерал, сопоставленный φ.

Очевидно, что $\mathcal{K}_\varphi^{res}$ опровержима тогда и только тогда, когда $\varphi \in$ ТАВТ. Будем обозначать ДНФ $\mathcal{D}(\neg\mathcal{K}_\varphi^{res})$ через $\mathcal{D}_\varphi^{res}$. Переменные ДНФ $\mathcal{D}_\varphi^{res}$ называются основными, если они являются переменными формулы φ. Очевидно, что $T_{\mathcal{K}_\varphi^{res}}^{\Re} = T_{\mathcal{D}_\varphi^{res}}^{\mathcal{E}}$ и $L_{\mathcal{K}_\varphi^{res}}^{\Re} = L_{\mathcal{D}_\varphi^{res}}^{\mathcal{E}}$.

Для сравнения сложностей $\mathcal{E}$–выводов $\mathcal{D}_\varphi^{res}$ и $\mathcal{D}_\varphi^{\min}$ опишем алгоритм преобразования $\mathcal{E}$–вывода из $\mathcal{D}_\varphi^{res}$ в $\mathcal{E}$–вывод из некоторой φ–определяющей ДНФ $\mathcal{D}$.

Определение. *$\mathcal{E}$-вывод пустого конъюнкта $\Lambda \in \mathcal{D}_\varphi^{res}$ назовём* **правильным**, *если последней элиминируется переменная p_φ.*

Лемма 2.1. *Любой $\mathcal{E}$–вывод пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}_\varphi^{res}$ может быть преобразован в правильный $\mathcal{E}$–вывод.*

Доказательство. DNF $\mathcal{D}_\varphi^{res}$ состоит из одной аксиомы p_φ и одной или двух аксиом, содержащих $\overline{p}_\varphi$. Если p_φ – элиминируется не последней, то можно использовать аксиому p_φ в конце, всюду в выводе, сохраняя литералы $\overline{p}_\varphi$.

Замечание 2.1.1. Если t и l суть соответственно T–сложность и L–сложность первоначального вывода, то для правильного вывода T–сложность равна t, а L–сложность меньше чем $l + 2t \leq 3l$.

Замечание 2.1.2. В каждом правильном $\mathcal{E}$–выводе пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}_\varphi^{res}$ можно выделить подвывод конъюнкта $\overline{p}_\varphi$ из $\mathcal{D}_\varphi^{res} \setminus \{p_\varphi\}$.

В соответствии с [7], обозначим через $\mathcal{D} \setminus \xi$ ДНФ, полученную из $\mathcal{D}$ следующим образом : выбрасываются конъюнкты, в которые входит $\overline{\xi}$, а из остальных конъюнктов вычёркивается ξ.

Лемма 2.2. *Если конъюнкт ξ выводится из некоторой ДНФ $\mathcal{D}$, то из $\mathcal{D} \setminus \xi$ выводится пустой конъюнкт Λ.*

Это утверждение аналогично Лемме 1 из [7].

Определение. *Множество формул $\mathcal{U} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ назовём* **антипродуктивным**, *если можно указать формулу α_i $(1 \le i \le n)$ и формулы $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_s}$ $(0 \le s \le n-1)$ из множества $\mathcal{U} \setminus \alpha_i$ такие, что в каждой системе доказательств КПЛ имеет место*

1) $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_s} \vdash \overline{\alpha_i}$ (или $\vdash \{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_s}\}^{\varphi} \supset \overline{\alpha_i}$),

2) ни для какой формулы α в множестве $\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_s}\}$ не присутствуют и α и $\overline{\alpha}$.

При этом формула α_i называется **определяемой**, а каждая из формул α_{j_1}, α_{j_2},..., α_{j_s} называется **определяющей**.

Формулы из множества $\mathcal{U} \setminus \{\alpha_i, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, ..., \alpha_{j_s}\}$ будем называть **нейтральными** по отношению к α_i.

Для каждого конъюнкта $\mathcal{K} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$, принадлежащего $\mathcal{E}$-выводу из $\mathcal{D}^{рез}_{\varphi}$, φ-расшифровкой назовем множество формул, которое получается из $\mathcal{K}$ заменой каждого литерала ξ_i соответствующей подформулой формулы φ, и будем впредь обозначать его через $\mathcal{K}^{dec}_{\varphi}$.

Лемма 2.3. *Если для некоторой $\varphi \in$ TABT, $\mathcal{K}$ есть конъюнкт, принадлежащий некоторому $\mathcal{E}$-выводу конъюнкта $\overline{p}_{\varphi}$ из $\mathcal{D}^{res}_{\varphi} \setminus \{p_{\varphi}\}$, то $\mathcal{K}^{dec}_{\varphi}$ является антипродуктивным множеством.*

Доказательство. Пусть последовательность $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, ..., $\mathcal{K}_t$ есть $\mathcal{E}$-вывод конъюнкта $\overline{p}_{\varphi}$ из $\mathcal{D}^{res}_{\varphi} \setminus \{p_{\varphi}\}$. Для доказательства будем использовать индукцию по t. Для $t = 1, 2$ $\mathcal{K}_t$ принадлежит $\mathcal{D}^{res}_{\varphi} \setminus \{p_{\varphi}\}$. Нетрудно видеть, что для каждого конъюнкта $\mathcal{K}$ из $\mathcal{D}^{res}_{\varphi} \setminus \{p_{\varphi}\}$, множество $\mathcal{K}^{dec}_{\varphi}$ является антипродуктивным. Предположим, что для $t > 2$ $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ получается по ε-правилу из $\mathcal{K}' \cup \{p\}$ и $\mathcal{K}'' \cup \{\overline{p}\}$. Мы должны показать, что $(\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'')^{dec}_{\varphi}$ является антипродуктивным, при условии, что $(\mathcal{K}' \cup \{p\})^{dec}_{\varphi}$ и $(\mathcal{K}'' \cup \{\overline{p}\})^{dec}_{\varphi}$ являются антипродуктивными.

Пусть α_1 и α_2 являются определяемыми для $(\mathcal{K}' \cup \{p\})^{dec}_{\varphi}$ и $(\mathcal{K}'' \cup \{\overline{p}\})^{dec}_{\varphi}$ соответственно, а α – подформула формулы φ, которой соответствует переменная p. Подформула α (или $\overline{\alpha}$) может быть :

a) одной из определяющих для α_1 (или α_2) ;

b) совпадать с α_1 (или с α_2) ;

c) быть нейтральной по отношению к α_1 (или α_2).

Случай А : α_1 не совпадает с α_2, причём ни $\mathcal{K}'$ ни $\mathcal{K}''$ не пусты. Тогда

1) если для α и $\overline{\alpha}$ выполнено условие а), причём $\mathcal{K}_1 \cup \{\alpha\} \vdash \alpha_1$ и $\mathcal{K}_2 \cup \{\overline{\alpha}\} \vdash \alpha_2$ для некоторых $\mathcal{K}_1 \subseteq (\mathcal{K}')^{dec}_{\varphi}$ и $\mathcal{K}_2 \subseteq (\mathcal{K}'')^{dec}_{\varphi}$, то следующие формулы суть тавтологии :

$$((\mathcal{K}_1 \cup \{\alpha\})^{\varphi} \to \overline{\alpha}_1) \vee ((\mathcal{K}_2 \cup \{\overline{\alpha}\})^{\varphi} \to \overline{\alpha}_2) \longrightarrow ((\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_2\})^{\varphi} \to \overline{\alpha}_1)$$

$$((\mathcal{K}_1 \cup \{\alpha\})^{\varphi} \to \overline{\alpha}_1) \vee ((\mathcal{K}_2 \cup \{\overline{\alpha}\})^{\varphi} \to \overline{\alpha}_2) \longrightarrow ((\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_1\})^{\varphi} \to \overline{\alpha}_2).$$

Следовательно, i) $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_1\} \vdash \overline{\alpha}_2$ и ii) $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \{\alpha_2\} \vdash \overline{\alpha}_1$, так что и α_1 и α_2 являются определяемыми.

Мы должны рассмотреть восемь подслучаев для Случая А. и девять подслучаев для Случая В.

Случай В. $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$ не пусты. Аналогично нужно рассмотреть случаи с пустым $\mathcal{K}'$ и (или) $\mathcal{K}''$. Читатель может проверить, что в каждом из этих случаев $(K_t)^{dec}_{\varphi}$ антипродуктивна. Лемма 2.3 доказана.

Замечание 2.3.1. Отметим, что если $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \vdash \overline{\beta}$ и для некоторого α_i $(1 \leq n)$ $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n \vdash \alpha_i$, то $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n \vdash \overline{\beta}$. Следовательно, подмножество антипродуктивного множества тоже может быть антипродуктивным.

Известно, что каждый вывод, заданный в виде последовательности строк, может быть преобразован в вывод в виде дерева (дерево–вывод). Отметим, что число различных формул в дерево–выводе равно T–сложности первоначального вывода. Для $\varphi \in$ ТАВТ рассмотрим дерево–вывод для некоторого правильного $\mathcal{E}$–вывода из $\mathcal{D}^{res}_{\varphi}$. Для каждого пути, соединяющего вершину, которой приписана конъюнкт–аксиома с вершиной, которой приписан конъюнкт $\overline{p}_{\varphi}$, **порождающим** назовём множество, являющиеся объединением всех основных литералов, принадлежащих конъюнктам, приписанным вершинам этого пути. Порождающее множество литералов называется **противоречивым**, если оно содержит пару контрарных литералов. Конъюнкт–аксиома правильного $\mathcal{E}$–вывода из $\mathcal{D}^{res}_{\varphi}$ называется **основной**, если определяющими формулами в ней являются только основные переменные.

Лемма 2.4. *В произвольном правильном дерево–выводе в системе $\mathcal{E}$ из $\mathcal{D}^{res}_{\varphi}$ ($\varphi \in$ ТАВТ), порождающее множество каждого пути, ведущего из основной конъюнкт–аксиомы в конъюнкт $\overline{p}_{\varphi}$ является φ–определяющим.*

Доказательство опирается на ту же идею, что и доказательство Леммы 2.3 и Замечания 2.3.1

$\varphi \in$ ТАВТ назовём **минимальной** тавтологией, если φ не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии.

Пусть для некоторой минимальной тавтологии φ построен минимальный (по T-сложности или по L-сложности) правильный $\mathcal{E}$-вывод пустого конъюнкта Λ из $\mathcal{D}_\varphi^{res}$. Алгоритм преобразования этого вывода в $\mathcal{E}$-вывод из некоторой φ-определяющей ДНФ заключается в следующем :

Шаг 1. В соответствующем дерево–выводе отметим все пути, удовлетворяющие следующим условиям :

a) ведут от вершин, которым приписаны основные конъюнкт–аксиомы, к вершине, которой приписан одночленный конъюнкт $\overline{p}_\varphi$,

b) порождающее множество этого пути непротиворечиво,

c) множество различных конъюнктов, приписанных вершинам этого пути, не является подмножеством множества различных конъюнктов некоторого другого пути со свойствами a) и b).

Отметим, что множество таких путей для минимальной тавтологии не пусто, и количество этих путей не превышает T–сложности первоначального вывода.

Шаг 2. Двигаясь от вершины, которой приписан конъюнкт $\overline{p}_\varphi$ вверх по этому пути, дополним множество литералов каждого встречающегося конъюнкта всеми основными литералами из множеств литералов конъюнктов, лежащих ниже. Процесс приписывания прекращается на вершине v этого пути, которая удовлетворяет следующим условиям :

a) дополненный конъюнкт вершины v содержит порождающее множество этого пути ;

b) ни одна из вершин подвывода вершины v не является вершиной иного отмеченного пути (такие вершины будем называть **начальными** вершинами).

Шаг 3. Выбирая на дереве только вершины, принадлежащие пути из начальных вершин к вершине, которой соответствует $\overline{p}_\varphi$, оставим в соответствующих конъюнктах только основные литералы (при этом вершины, получившие одинаковые пометки, отождествляются). Каждый конъюнкт, приписанный начальным вершинам после выполнения Шага 3, является φ–определяющим (см. Лемму 2.4). Литералы должны быть элиминированы в том же порядке, в котором они элиминируются в дерево–выводе. Согласно Лемме 2.2, множество всех конъюнктов, приписанных начальным вершинам, является полным и поэтому φ-определяющим ДНФ. Обозначим его через $\mathcal{D}_\varphi^{det}$. Если φ не является минимальной тавтологией, то будем действовать как в [3]. На основе описанного алгоритма преобразования и

$$T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}_\varphi^{\min}} \le T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}_\varphi^{\det}} \quad \text{и} \quad L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}_\varphi^{\min}} \le L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}_\varphi^{\det}},$$

нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Для произвольной минимальной тавтологии* φ, *если* $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{res}_{\varphi}} \leq t$ *и* $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{res}_{\varphi}} \leq l$, *то* $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{min}_{\varphi}} \leq t$ *и* $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{min}_{\varphi}} \leq l^2$.

Теорема 2.1. *1) Для произвольной полной ДНФ* $\mathcal{D}$ *(опровержимой КНФ* $\mathcal{K}$*) имеем*

$$L^{\Re}_{\mathcal{K}(\neg\mathcal{D})} = L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}, \quad T^{\Re}_{\mathcal{K}(\neg\mathcal{D})} = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}, \quad L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}(\neg\mathcal{K})} = L^{\Re}_{\mathcal{K}}, \quad T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}(\neg\mathcal{K})} = T^{\Re}_{\mathcal{K}}.$$

2) Для произвольной $\varphi \in TABT$, *если* $T^{\Re}_{\mathcal{K}^{res}_{\varphi}} \leq t$ *и* $L^{\Re}_{\mathcal{K}^{res}_{\varphi}} \leq l$, *то* $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{min}_{\varphi}} \leq t$ *и* $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{min}_{\varphi}} \leq l^3$.

Следствие. Система $\mathcal{E}$ p-сводима к системе $\Re$.

§3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ $\mathcal{E}$ И СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ PK^- БЕЗ ПРАВИЛА СЕЧЕНИЯ

Хорошо известно, что различные полные системы секвенциального исчисления без правила сечения p-эквивалентны. Зафиксируем систему PK^- [2] и сравним ее с системой $\mathcal{E}$. Используем общепринятое обозначение секвенции $\Gamma \Longrightarrow \Delta$, где Γ – антецедент, а Δ – сукцедент.

Аксиомами системы PK^- являются секвенции : 1) $p \Longrightarrow p$; 2) $\Longrightarrow T$, где p – пропозициональная переменная, а T означает "истину".

Для произвольных формул A, B, произвольных последовательностей формул Γ, Δ, логическими правилами являются следующие :

$$\to\Longrightarrow \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \Longrightarrow\to \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \to B}$$

$$\vee \Longrightarrow \frac{A, B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \Longrightarrow \vee \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\wedge \Longrightarrow \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \Longrightarrow \wedge \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \vee B},$$

$$\neg \Longrightarrow \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Longrightarrow \Delta} \qquad \Longrightarrow \neg \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, \neg A}.$$

Единственным структурным правилом вывода является

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma' \Longrightarrow \Delta'},$$

где Γ' (Δ') содержит Γ (Δ).

Длина секвенции $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ определяется как сумма длин всех формул, принадлежащих Γ и Δ. PK^--вывод рассмотрим как последовательность секвенций. Докажем, что система $\mathcal{E}$ p-сводима к системе PK^-. Параллельно рассмотрим простой случай с формулами, заданными в ДНФ, $\mathcal{E}$-выводы которых имеют вид дерева. Пусть имеем дерево-$\mathcal{E}$-вывод пустой конъюнкции Λ из ДНФ $\mathcal{D} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_s\}$. Двигаясь от Λ к каждой вершине дерева заменим ε-правило

$$\frac{\mathcal{K}' \cup \{p\} \quad \mathcal{K}'' \cup \{\overline{p}\}}{\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''} \quad \text{на} \quad \frac{\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' \cup \{p\} \quad \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'' \cup \{\overline{p}\}}{\mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''}.$$

Очевидно, что каждая аксиома-конъюнкт может быть дополнена некоторыми литералами.

Множество дополненных аксиом-конъюнктов называется дополнением ДНФ $\mathcal{D}$ и обозначается через $\overline{\mathcal{D}}$. Очевидно, что $T^{\mathcal{E}}_{\overline{\mathcal{D}}} = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}$ и $L^{\mathcal{E}}_{\overline{\mathcal{D}}} = \left(L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}}\right)^2$. Для конъюнкта $\mathcal{K} = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ запишем формулу $\mathcal{K}^{\varphi} = \xi_{i_1} \vee \left(\xi_{i_2} \vee \left(... \vee \left(\xi_{i_{m-1}} \vee \xi_m\right) ...\right)\right)$ в порядке, соответствующем элиминации переменных ξ_i в $\mathcal{E}$-выводе.

Теорема 3.1. *1) Если для некоторой полной ДНФ $\mathcal{D}$ $\mathcal{E}$-вывод пустой конъюнкции Λ из $\mathcal{D}$ имеет вид дерева, $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \le l$ и $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \le t$, то $L^{PK^-}_{\Longrightarrow(\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}} \le c_1 l^5$ и $T^{PK^-}_{\Longrightarrow(\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}} \le c_2 t$, для некоторых постоянных c_1 и c_2;*
2) Для произвольной $\varphi \in TABT$, если $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}} \le l$, то $L^{PK^-}_{\Longrightarrow\varphi} \le c \cdot l^4$ для некоторой постоянной c.

Доказательство пункта 1) опирается на следующем преобразовании заданного в обратном порядке $\mathcal{E}$-вывода конъюнкта Λ из $\mathcal{D}$ в PK^--вывод секвенции $\Longrightarrow (\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}$:

Пусть p_i – последняя элиминированная переменная. PK^--вывод начинается с двух секвенций

$$p_i \Longrightarrow p_i \quad \text{i} \quad \Longrightarrow \neg p_i, p_i \quad (\text{правило} \quad \Longrightarrow \neg).$$

Пусть задан PK^--вывод секвенции $\Longrightarrow \mathcal{K}, \Gamma$. PK^--вывод секвенции $\Longrightarrow \neg p \vee \mathcal{K}$, $p \vee \mathcal{K}$, Γ получается следующим образом :

(1) $\Longrightarrow \mathcal{K}, \Gamma$ (2) $p \Longrightarrow p$ (аксиома) (3) $\Longrightarrow \neg p, p$ (правило $\Longrightarrow \neg$)

(4) $\Longrightarrow \mathcal{K}, \Gamma, \neg p$ (следует по структурному правилу из (1))

(5) $\Longrightarrow \neg p, p, \Gamma$ (следует по структурному правилу из (3))

(6) $\Longrightarrow p \vee \mathcal{K}, \Gamma, \neg p$ (следует по правилу $\Longrightarrow \vee$ из (3) и (5))

(7) $\Longrightarrow \mathcal{K}, p \vee \mathcal{K}, \Gamma$ (следует по структурному правилу из (1))

(8) $\Longrightarrow \neg p \vee \mathcal{K}, p \vee \mathcal{K}, \Gamma.$ (следует по правилу $\Longrightarrow \vee$ из (6) и (7)).

Нетрудно видеть, что описанный метод доказывает $\Longrightarrow \overline{\mathcal{D}}$. Для доказательства $\Longrightarrow (\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}$ нужно еще применить правило $\Longrightarrow \vee$.

Если $L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}} \leq l$, то $|\mathcal{D}| \leq l$, $|\overline{\mathcal{D}}| \leq l^2$ и сумма длин всех подформул формулы $(\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}$ не превышает l^4, поэтому $L^{PK^-}_{\Longrightarrow \overline{\mathcal{D}}} \leq t\,(4 + 5\,l^4) < 4\,l + 5\,l^5$. Следовательно, $L^{PK^-}_{\Longrightarrow (\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}} \leq 4\,l + 5\,l^5 + (t-1)\,l^4 \leq c_1\,l^5$ для некоторой постоянной c_1.

Для T–сложности получим $T^{PK^-}_{\Longrightarrow (\overline{\mathcal{D}})^{\varphi}} \leq 2 + 7(t-1) + t = c_2\,t$ для некоторой постоянной c_2.

Доказательство 2). PK^-–вывод секвенции $\Longrightarrow \varphi$ можно получить на основе φ–определяющих конъюнктов из $\mathcal{D}^{\min}_{\varphi}$ следующим образом.

Пусть $\mathcal{K}_i = \{p^{\sigma_1}_{i_1}, p^{\sigma_2}_{i_2}, \ldots, p^{\sigma_m}_{i_m}\} \in \mathcal{D}^{\min}_{\varphi}$ является φ–определяющим конъюнктом, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ – возможная последовательность подформул (или их отрицаний) формулы φ, которые шаг за шагом выводятся из посылок $p^{\sigma_1}_{i_1}, \ldots, p^{\sigma_m}_{i_m}$ при выводе φ методом Кальмара доказательства тавтологий в КПЛ (α_r есть φ). Нетрудно видеть, что если $\mathcal{K}_i$ является α_j – 0–определяющим (α_j – 1–определяющим) $(1 \leq j \leq r)$, то выводится секвенция $\Gamma^0_{ij}, \alpha_j \Longrightarrow \Delta^0_{ij}$ ($\Gamma^1_{ij} \Longrightarrow \alpha_j, \Delta^1_{ij}$), где Γ^0_{ij}, Δ^0_{ij} (Γ^1_{ij}, Δ^1_{ij}) суть некоторые подмножества $\mathcal{K}_i$. При этом используются выводимые в PK^- с конечной T–сложностью вспомогательные правила вывода :

$$1)\ \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \to B}, \qquad 2)\ \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \to B}, \qquad 3)\ \frac{A, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Longrightarrow \Delta},$$

$$4)\ \frac{B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Longrightarrow \Delta}, \qquad 5)\ \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \vee B}, \qquad 6)\ \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta, B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta, A \vee B}.$$

Доказательство начинается с аксиомы $p_{i_s} \Longrightarrow p_{i_s}$, где p_{i_s} – некая переменная из подформулы α_1. Если $\mathcal{K}_i$ является α_1 – 0–определяющим (α_1 – 1–определяющим) и секвенция $\alpha_1, \Gamma^0_{i_1} \Longrightarrow \Delta^0_{i_1}$ ($\Gamma^1_{i_1} \Longrightarrow \Delta^1_{i_1}, \alpha_1$) выводится по правилам $\to \Longrightarrow$ или $\wedge \Longrightarrow$ ($\Longrightarrow \vee$), то берем вторую аксиому $p_{i_t} \Longrightarrow p_{i_t}$, где p_{i_t} – вторая переменная подформулы α_1.

Во всех остальных случаях переменную p_{i_t} можно добавить в антецеденте (сукцеденте), если $\overline{p}_{i_t} \in \mathcal{K}_i$ ($p_{i_t} \in \mathcal{K}_i$) по структурному правилу. По аналогии, при выводе секвенций с главной формулой α_j $(2 \le \alpha_j \le r)$ должны добавить новую переменную либо в аксиоме, либо по структурному правилу. **Итак**, можно вывести секвенцию $\Gamma_i' \Longrightarrow \Delta_i', \varphi$ за $c_1 |\varphi| r$ шагов для некоторой константы c_1, с длиной, не превышающей $c_1 |\varphi| r 2 |\varphi| \le c l^3$. Затем рассматриваем конъюнкт K_q, используемый с конъюнктом K_i в предпосылке при применении ε-правила. Добавляя вышеописанным методом необходимые переменные к Γ_i^1 и Δ_i^1, можем вывести секвенцию $\Gamma_{iq}^1 \Longrightarrow \Delta_{iq}^1, \varphi, \varphi$, а затем по структурному правилу получим $\Gamma_{iq}^1 \Longrightarrow \Delta_{iq}^1, \varphi$ и так далее. Так как $\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}$ полна, то количество переменных в множествах типа $\Gamma_{i,q\ldots l}^1$ и $\Delta_{i,q\ldots l}^1$ постепенно уменьшаясь сводятся к нулю. Последние два шага построенного таким образом PK^--вывода будут $\dfrac{\Longrightarrow \varphi, \varphi}{\Longrightarrow \varphi}$. Нетрудно видеть, что

$$T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}} \cdot c \cdot l^3 \le L^{\mathcal{E}}_{\mathcal{D}_{\varphi}^{\min}} \cdot c \cdot l^3 \le c \cdot l^4$$

для некоторой постоянной c. Теорема 3.1 доказана.

Основная Теорема. *Системы $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\Re$ и PK^- p-эквивалентны.*

Доказательство следует из вышеупомянутых результатов и известного факта из [2], что $\Re$ p-сводится к системе PK^-.

Для некоторой системы доказательств Φ, для любого n и t, введем следующие классы тавтологий :

$$\Phi^{\le}_{n,t} = \{\varphi: \quad \log_2 |\varphi| = \Theta(n) \quad \text{и} \quad \log_2 L^{\Phi}_{\varphi} = O(n^t)\},$$

$$\Phi^{\ge}_{n,t} = \{\varphi: \quad \log_2 |\varphi| = \Theta(n) \quad \text{и} \quad \log_2 L^{\Phi}_{\varphi} = \Omega(n^t)\}, \qquad \Phi_{n,t} = \Phi^{\ge}_{n,t} \cup \Phi^{\le}_{n,t+1}.$$

Теорема 3.2. *Для достаточно большого n и произвольного t $(1 \le t \le \lfloor n \log_n 2 \rfloor)$ имеем*

1) если Φ одна из систем $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\Re$ и PK^-, то каждый из классов $\Phi_{n,t}$ непуст ;

2) если Φ p-сводима к одной из систем $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\Re$ и PK^-, то каждый из классов $\Phi^{\ge}_{n,t}$ непуст ;

3) если какая-либо из систем $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\Re$ и PK^- p-сводима к некоторой системе Φ, то каждый из классов $\Phi^{\le}_{n,t}$ непуст.

Доказательство следует из Основной Теоремы и Теоремы 1.1.

Abstract. Comparison of the efficiency of resolution system and cut-free sequent calculus remains as an open problem since 1960 (Cook, Reckhow, Urquhart). The problem was partially solved by N. Arai for some restricted classes of formulas and proofs. The paper proves that the mentioned two systems and two other systems of classical propositional logic are polynomially equivalent. Tautologies of length n are described, for which the proofs complexities in the four systems are n, n^2, n^3,..., $2^{n/2}$ by order.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Cook, R. A. Reckhow, "The relative efficiency of propositional proof systems", Journal of Symbolic Logic, Vol. 44, pp. 36 – 50. 1979.
2. L. A. Urquhart, "The complexity of propositional proofs", the Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 1, no. 4, Decemb.', pp. 425 – 467, 1995.
3. А. А. Чубарян, "О сложности выводов в некоторой системе классического исчисления высказываний", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 16 – 26, 1999.
4. A. A. Chubaryan, "On the complexity of proofs in a Frege system", Logical Colloquium, Vienna, p. 69, 2001.
5. A. A. Chubaryan, "About the complexity of proofs in Frege systems, CSIT Conference, Yerevan, pp. 129 – 132, 2001.
6. H. Noriko Arai, "Relative efficiency of propositional proof systems : resolution VS, cut-free LK", Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 104, pp. 3 — 16, 2000.
7. Г. С. Цейтин, "О сложности вывода в исчислении высказываний", Записки науч. сем. ЛОМИ АН СССР, том 8, стр. 234 – 259, 1968.

Поступила 28 апреля 2002

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 5, 2002, 85-89

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ЭЛЛИПСООБРАЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Ирицян

Ереванский государственный университет

Пусть Γ - контур на комплексной плоскости, который задан параметрическим уравнением

$$z = R\left(t + \frac{\mu}{t - v}\right) \equiv \alpha(t), \quad t = e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{0.1}$$

где $R > 0$ - действительная постоянная, μ и v - комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям $|\mu| < 1$, $|v| < 1 - \sqrt{|\mu|}$. Функция $a = \alpha(t)$ взаимно однозначно отображает окружность $|t| = 1$ на контур Γ. При $v = 0$ контур Γ является эллипсом.

Область, ограниченную контуром Γ, назовём э–областью. В этой статье указывается эффективный метод решения задачи Римана–Гильберта для э–областей. Напомним, что решение задачи Римана–Гильберта в области D определяется как функция $\varphi(z)$, аналитичная в области D и на границе Γ удовлетворяющая условию

$$\mathrm{Re}[a(z)\,\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{0.2}$$

где $a(z)$ и действительнозначная функция $f(z)$ суть заданные функции на Γ. Предположим, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$, а $a(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют этому условию на Γ.

§1. СЛУЧАЙ $a(z) \equiv 1$

Рассмотрим сначала задачу (0.2) в частном случае $a(z) \equiv 1$:

$$\mathrm{Re}[\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Решение задачи (1.1) ищем в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\omega(\tau)\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau) - z}, \tag{1.2}$$

где $\omega(\tau)$ – аналитическая функция в круге $|\tau| < 1$ и удовлетворяет условию Гёльдера в замкнутом круге $|\tau| \leq 1$. Применив формулу Сохоцкого к интегралу (1.2), получим ([1], стр. 66)

$$\varphi(\alpha(t_0)) = \frac{1}{2}\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\omega(\tau)\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(t_0)}. \tag{1.3}$$

Подставляя $\alpha(t)$ из (0.1) в (1.3), получим

$$\varphi(\alpha(t_0)) = \frac{1}{2}\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\omega(\tau)(t_0-v)[(\tau-v)^2-\mu]\,d\tau}{(\tau-v)(\tau-t_0)[(\tau-v)(t_0-v)-\mu]}. \tag{1.4}$$

Интеграл в (1.4) понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что подынтегральная функция в (1.4) имеет особенности в точках $\tau_1 = v$, $\tau_2 = t_0$, $\tau_3 = v + \mu/(t_0 - v)$, где τ_1 и τ_3 – внутренние точки, а τ_2 – граничная точка. Вычислив последний интеграл с помощью вычетов, получим

$$\varphi(\alpha(t_0)) = \omega(t_0) - \omega(v) + \omega\left(\frac{\mu}{t_0-v} + v\right). \tag{1.5}$$

Подставляя $\varphi(\alpha(t_0))$ из (1.5) в (1.1) при $z = \alpha(t_0)$, получим

$$\mathrm{Re}\,(\omega(t_0) + \overline{\omega(\beta(\overline{t_0}))} - \omega(v)) = f(\alpha(t_0)), \quad |t_0| = 1, \tag{1.6}$$

где

$$\beta(\overline{t_0}) = \frac{\overline{t_0}\overline{\mu}}{1-\overline{v}\overline{t_0}} + \overline{v}, \tag{1.7}$$

с учётом того, что $t_0\overline{t_0} = 1$ и $\mathrm{Re}\,\overline{\omega(\beta(\overline{t_0}))} = \mathrm{Re}\,\omega(\beta(\overline{t_0}))$. Так как функция $\omega(t) + \overline{\omega(\beta(\overline{t}))} - \omega(v)$ аналитична в круге $|t| < 1$, то в силу (1.6) её можно определить, используя интеграл Шварца (см. [3], стр. 233) :

$$\omega(t) + \overline{\omega(\beta(\overline{t}))} - \omega(v) = F(t) + i\,C_0, \quad |t| < 1, \tag{1.8}$$

где

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tau+t}{\tau-t}f(\alpha(\tau))\,d\theta, \quad (\tau = e^{i\theta}), \tag{1.9}$$

и C_0 – произвольная действительная постоянная. Так как $|v| < 1 - \sqrt{|\mu|}$ и $|\mu| < 1$, то

$$|\beta(\overline{t})| \leq \frac{|\mu|}{1-|v|} + |v| < 1, \quad |t| \leq 1. \tag{1.10}$$

Следовательно, функция $\beta(t)$ отображает область $|t| \leq 1$ в себя.

В круге $|t| < 1$ рассмотрим следующие уравнения :

$$t = \beta(\bar{t}), \tag{1.11}$$

$$t = \overline{\beta(\beta(\bar{t}))}. \tag{1.12}$$

Заметим, что (1.12) является квадратным уравнением относительно комплексной переменной t. Из (1.10) следует (см. [3]), что оба уравнения (1.11) и (1.12) имеют единственные решения в круге $|t| < 1$, совпадающие друг с другом. Это решение обозначим через t_0. Аналитическую функцию $\omega(t)$ представим в виде

$$\omega(t) = c + (t - t_0)\,\omega_0(t), \tag{1.13}$$

где c – произвольная комплексная постоянная, а $\omega_0(t)$ – аналитическая функция в круге $|t| < 1$. Подставляя $\omega(t)$ из (1.13) в (1.8) и учитывая, что $t_0 = \beta(\overline{t_0})$, получим

$$(t - t_0)\,\omega_0(t) + \overline{\omega_0(\beta(\bar{t}))}(\overline{\beta(\bar{t})} - \overline{\beta(\overline{t_0})}) + \bar{c} - (v - t_0)\,\omega_0(v) = F(t) + i\,C_0. \tag{1.14}$$

В силу (1.7)

$$\overline{\beta(\bar{t})} - \overline{\beta(\overline{t_0})} = \frac{\mu(t - t_0)}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в (1.14), получим

$$(t - t_0)\,\omega_0(t) + \frac{\mu(t - t_0)}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}\overline{\omega_0(\beta(\bar{t}))} + \bar{c} - (v - t_0)\,\omega_0(v) = F(t) + i\,C_0, \tag{1.16}$$

и из (1.16)

$$\bar{c} - (v - t_0)\,\omega_0(v) = F(t_0) + i\,C_0. \tag{1.17}$$

Согласно (1.17) уравнение (1.16) можно записать в виде

$$\omega_0(t) + \frac{\mu}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}\overline{\omega_0(\beta(\bar{t}))} = F_0(t), \tag{1.18}$$

где $F_0(t) = \dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$. Поскольку $\left|\dfrac{\mu}{(1 - v\,t)(1 - v\,t_0)}\right| < 1$, то уравнение (1.8) можно решить методом последовательных приближений. Подставляя решение $\omega_0(t)$ уравнения (1.18) в (1.17), получим постоянную c.

Таким образом, частное решение задачи (1.1) определяется по (1.2), где $\omega(t)$ как и в (1.13), а постоянная c определяется по (1.17) при $C_0 = 0$, а $\omega_0(t)$ – решение уравнения (1.18). Общее решение задачи (1.1) определяется формулой

$\phi(z) = \phi_0(z) + i\,C_1$, где $\phi_0(z)$ – частное решение задачи (1.1), а C_1 – произвольная действительная постоянная. Используя стандартную технику ([4], стр. 243) общий случай сводится к случаю $a(z) \equiv 1$, т.е. задачу (0.2) можно свести к (1.1).

§2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ Э–ОБЛАСТЕЙ

Пусть D – э-область, и пусть $\Phi(z)$ – конформное отображение области D на круг $|\xi| < 1$ и удовлетворяет условию $\Phi(0) = 0$. Ясно, что функция $\Phi(z)z^{-1}$ аналитична в D и удовлетворяет условию

$$\Phi(z)z^{-1} \neq 0, \quad z \in \overline{D}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(z) = \ln\left[\frac{\Phi(z)}{z}\right], \tag{2.2}$$

где под логарифмом понимается некоторая непрерывная ветвь в D. Из (2.1) следует, что такая ветвь существует и она аналитична в D. Из (2.2) имеем

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z) = \ln\frac{|\Phi(z)|}{|z|}, \quad z \in D. \tag{2.3}$$

Так как функция $\Phi(z)$ отображает Γ на окружность $|\xi| = 1$, то имеем $|\Phi(z)| = 1$, $z \in \Gamma$. Поэтому из (2.3) получим

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z) = \ln\frac{1}{|z|}, \quad z \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Пусть $\Phi_0(z)$ – частное решение задачи (1.1) при $f(z) = \ln\dfrac{1}{|z|}$. Тогда из (2.4) имеем

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + i\,C_0, \tag{2.5}$$

где C_0 – вещественная постоянная. Из (2.2) и (2.5) получаем

$$\Phi(z) = z\,e^{\Phi_0(z)}\,e^{i\,C_0}, \tag{2.6}$$

$$z\,e^{\Phi_0(z)} = \Phi(z)\,e^{-i\,C_0}. \tag{2.7}$$

Так как функция $\Phi(z)$ конформно отображает D на круг $|\xi| < 1$, то из (2.7) следует, что функция $z\,e^{\Phi_0(z)}$ также конформно отображает область D на круг $|\xi| < 1$. Следовательно, функция $\Phi(z)$ имеет представление (2.6) с произвольной вещественной постоянной C_0.

Таким образом, чтобы определить $\Phi(z)$ достаточно найти частное решение задачи (1.1) для $f(z) = \ln\frac{1}{|z|} = \mathrm{Re}\left(\ln\frac{1}{z}\right)$. Подставляя $z = \alpha(t)$, $f(z) = \mathrm{Re}\left(\ln\frac{1}{\alpha(t)}\right)$, $|t| = 1$ в (1.1), получим

$$\mathrm{Re}\left[\varphi(\alpha(t))\right] = \mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{1-\overline{v}\,t}{R(1-\overline{v}\,t+\overline{\mu}\,t^2)}\right)\right], \quad |t| = 1. \tag{2.8}$$

Согласно (1.2) и (1.5), из (2.8) выводим (1.8), где

$$F(t) = \ln\left[\frac{1-\overline{v}\,t}{R(1-\overline{v}\,t+\overline{\mu}\,t^2)}\right]. \tag{2.9}$$

Таким образом, конформное отображение области D на круг $|\xi| < 1$ сводится к решению уравнения (1.8), где $F(t)$ функция (2.9). Отметим, что указанный метод можно использовать для решения задачи Дирихле в э–областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, М., 1962.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, М., Наука, 1973.
3. Н. Е. Товмасян, Л. З. Геворкян, "Нахождение корней некоторых классов уравнений с аналитическими функциями и его применение", Сибирский мат. журнал, том 40, № 5, 1999.
4. И. Н. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, М., 1959.

Поступила 7 мая 2002

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 37, Номер 5, 2002

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 37, No. 5, 2002

Contents