ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № *4, 2002, 3–14*

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян

Ереванский государственный университет,
Бюраканская астрофизическая обсерватория
e-mail : Gaghakob@ysu.am

Резюме. В статье доказано, что решения одного класса негипоэллиптических уравнений в бесконечном цилиндре принадлежат мультианизотропным классам Жевре, если решения обращаются в нуль на бесконечности.

ВВЕДЕНИЕ

Первые общие результаты о бесконечной дифференцируемости и аналитичности решений эллиптических дифференциальных уравнений были получены С. Н. Бернштейном в работе [1]. И. Г. Петровский в работе [2] доказал, что все классические решения эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами и аналитической правой частью суть аналитические функции. Л. Хермандер в [3] дал описание дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеющих только $\mathbf{C}^\infty$-решения. Эти уравнения называются **гипоэллиптическими**. Аналогичные результаты для негипоэллиптических уравнений были получены В. И. Буренковым в [4]. Тот факт, что слабые решения уравнения $P(D)\,u = f$ принадлежат $\mathbf{C}^\infty$ важен для применения вариационных методов к дифференциальным уравнениям.

Хорошо известно (см. [3], глава 4), что регулярность решений гипоэллиптического уравнения $P(D)\,u = 0$ определяется поведением функции $d_P(\xi)$ при $|\xi| \to \infty$, где $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta \in \mathbf{C}^\infty : P(\zeta) = 0\}$.

Для гипоэллиптического оператора $P(D)$ (см. [3], Теорема 4.1.3), существуют такие положительные постоянные c и C, что $|\xi|^c \le C d_P(\xi)$, если $\xi \in \mathbb{R}^n$, а $|\xi|$ достаточно велико. Отметим, что $c \le 1$ и $c = 1$ тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ эллиптичен. Наименьшее из чисел $1/c$ называется **показателем**

гипоэллиптичности.

Многие свойства решений уравнения $P(D)u = 0$ определяются поведением функции $d_P(\xi)$ на бесконечности. В частности, принадлежность этих решений классам Жевре $G^\lambda(\Omega)$. При этом вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ определяется ростом функции $d_P(\xi)$, т.е. числом c (см. [3], Теорема 4.4.5).

В работе [5] Л. Катабрига получил алгебраические условия на гипоэллиптический оператор $P(D)$, при которых отображение $P(D) : G^d(\mathbb{R}^n) \longmapsto G^d(\mathbb{R}^n)$ для некоторого d является изоморфизмом. В работах В. Грушина [6], [7] доказано, что если $P(D)$ является гипоэллиптическим оператором и $f \in G^\gamma(\Omega)$, то все решения неоднородного уравнения $P(D)\,u = f$ принадлежат $G^\gamma(\Omega)$.

В работе [8] Г. Г. Казаряном введена некоторая функциональная характеристика, называемая **весом гипоэллиптичности**, совпадающая с функцией $h(\xi) = |\xi|$ в эллиптическом случае. Вместе с тем в работе [8] строится вес гипоэллиптичности для регулярных (невырожденных) гипоэллиптических операторов, рассмотренных С. М. Никольским в [9] и В. П. Михайловым в [10].

Для одного класса негипоэллиптических операторов, определённых в бесконечном цилиндре, В. И. Буренковым доказано, что если решение уравнения $P(D)\,u = f$ удовлетворяет некоторым априорным оценкам, то оно принадлежит $\mathbf{C}^\infty$ (см. [11], [12]). В работе [13] для операторов с постоянными коэффициентами доказано, что если решения уравнения $P(D) = f$ удовлетворяют некоторым априорным оценкам, то они бесконечно дифференцируемы по определённому набору переменных.

После введения в работе [14] понятия мультианизотропных классов Жевре стало возможным сформулировать более общую теорему, устанавливающую связь между ростом производных решений одного класса негипоэллиптических уравнений $P(D)\,u = f$ и ростом функции $f(x)$ в бесконечном цилиндре.

В настоящей работе доказано, что решения некоторых негипоэллиптических уравнений, определённых на бесконечном цилиндре, принадлежат мультианизотропным классам Жевре, если эти решения равны нулю на бесконечности.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, N_0^n – n-мерное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, и

$$\mathbf{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n_+ = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \ \xi_j \geq 0, \ j = 1, ..., n\}.$$

Для натурального $k \leq n$ положим

$$N_0^{n,k} = \{\alpha \in N_0^n : \ \alpha_{k+1} = ... = \alpha_n = 0\},$$

а для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad (\xi\eta) = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n.$$

Пусть $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где либо $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$.

Определение 1. *Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона набора мультииндексов $B = \{\lambda^j\}_1^r \subset \mathbb{R}_+^n$ называется наименьший замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}_+^n$, содержащий множество $B \cup \{0\}$.*

Определение 2. *Многогранник $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ называется вполне правильным, если $\mathcal{N}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат, и все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$ положительны.*

Для $\eta \in \mathbb{R}_+^n$ обозначим

$$H(\eta) = \{\xi \in \mathbb{R}_+^n : \xi \neq 0,\ \xi \neq \eta,\ \xi_j = \eta_j \text{ or } 0,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Определение 3. *Множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ называется вполне правильным, если для любого $\eta \in \mathcal{N}$ существует окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что*

$$(\eta - \xi) + b \cdot sign(\eta - \xi) \in \mathcal{N}, \quad \xi \in H(\eta), \quad b \in U \cap \mathbb{R}_+^n,$$

где $b \cdot sign\, \xi = (b_1\, sign\, \xi_1, ..., b_n\, sign\, \xi_n)$.

Для натуральных чисел $k \leq n$ обозначим через $G(n,k)$ множество многочленов $P(\xi)$ таких, что

a) существуют постоянные $\sigma = \sigma(P) > 0$ и $M = M(P) > 0$, для которых $|P(\xi)| \geq \sigma$ при $||\xi|| \geq M$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,

b) $D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \equiv D_\xi^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$ для $\xi \to \infty$, $P(\xi) \neq 0$, $0 \neq \alpha \in N_0^{n,k}$.

Для $k = n$ пункт a) следует из пункта b) и $G(n,k)$ состоит из всех гипоэллиптических многочленов. Как видно из следующего примера для $k < n$ из пункта b), вообще говоря, не следует пункт a).

Пример 1. Пусть $k = 1$, $n = 2$ и $P(\xi) = \xi_2^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)$. Имеем

$$\sum_{0 \neq \alpha \in N_0^{2,1}} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right| = |D_1 P(\xi)| + |D_1^2 P(\xi)|/|P(\xi)| = 2\xi_2^2(|\xi_1| + 1)/\xi_2^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) \to 0,$$

для $\xi \to \infty$, $P(\xi) \neq 0$. Однако $P(\xi_1, 0) \equiv 0$.

Для многочлена $P \in G(n,k)$, $1 \leq k \leq n$ обозначим

$$D_k(P) = \{\zeta = (\zeta', \zeta'') : \zeta' = (\zeta_1, ..., \zeta_k) \in \mathbb{C}^k, \zeta'' = (\zeta_{k+1}, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^{n-k}, P(\zeta) = 0\},$$

$$d_{P,k}(\xi) = \inf_{\zeta \in D_k(P)} ||\xi - \zeta||,\ \zeta \in \mathbb{R}^n,\ M_k(P) = \left\{ \nu \in \mathbb{R}^n_+ : \sup_\xi \frac{|\xi|^\nu}{d_{P,k}(\xi) + 1} < \infty \right\}.$$

Хорошо известно (см. Лемму 3.2 в [15]), что для любого многочлена $P(\xi)$ с постоянными коэффициентами существует постоянная $C = C(P) > 0$ такая, что

$$d_{P,k}(\xi) \sum_{0 \neq \alpha \in N_0^{n,k}} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \tag{1.1}$$

Предложение 1. *Пусть $h(\xi) \geq 0$ функция, для которой с некоторыми постоянными $C, \delta > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы условия*

a) $||\xi||^\delta \leq C(h(\xi) + 1)$,

b) $h(\xi + \eta) \leq Ch(\xi)$ *для* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *и* $||\eta|| \leq \frac{1}{2}h(\xi)$.

Тогда множество

$$M(h) = \left\{ \nu \in \mathbb{R}^n_+ : \sup_\xi \frac{|\xi|^\nu}{h(\xi) + 1} < \infty \right\}$$

является вполне правильным множеством.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\nu \in M(h)$ и $\nu' \in H(\nu)$ имеем $\nu' + r\ sign\ \nu' \in M(h)$ при $r \in \mathbb{R}^n_+$, $|r| \leq \delta|\nu - \nu'|$. Пусть

$$\eta(\xi) = C \frac{||\xi||^\delta sign\ \xi(\nu - \nu')}{4\sqrt{n}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad C > 0.$$

Предположим, что $||\xi|| \geq 1$. Так как

$$||\eta(\xi)|| \leq \frac{C}{4}||\xi||^\delta \leq \frac{1}{4}(h(\xi) + 1) \leq \frac{1}{2}h(\xi),$$

то для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$, $|r| \leq \delta|\nu - \nu'|$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$|\xi|^{\nu' + r\, sign\, \nu'} \leq |\xi|^{\nu'} \left(\frac{2\sqrt{n}}{C} \right)^{|\nu - \nu'|} |\xi + \eta(\xi)|^{|\nu - \nu'|} \leq \left(\frac{2\sqrt{n}}{C} \right)^{|\nu - \nu'|} |\xi + \eta(\xi)|^\nu \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\sqrt{n}}{C} \right)^{|\nu - \nu'|} [h(\xi + \eta(\xi)) + 1] \frac{|\xi + \eta(\xi)|^\nu}{h(\xi + \eta(\xi)) + 1} \leq C_1[h(\xi + \eta(\xi)) + 1] \leq C_1 C[h(\xi) + 1].$$

Если $||\xi|| \leq 1$, то $|\xi|^{\nu' + r\ sign\ \nu'} \leq 1 \leq h(\xi) + 1$. Следовательно, $\nu' + r\ sign\ \nu' \in M(h)$, что доказывает Предложение 1.

Следствие 1. *Для любого многочлена $P \in G(n, k)$, $1 \leq k \leq n$ множество $M_k(P)$ вполне правильное.*

Доказательство. Для $P \in G(n,k)$, $1 \le k \le n$ функция $d_{P,k}(\xi)$ удовлетворяет условиям a) и b) Предложения 1 (см. [15]). Поэтому утверждение следует из Предложения 1.

Для вполне правильного многогранника $A \subset \mathbb{R}^n_+$ обозначим через A^0 множество вершин многогранника A и

$$h_A(\xi) = \sum_{\nu \in A^0} |\xi|^\nu, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 2. *Для любого вполне правильного многогранника $A \subset \mathbb{R}^n_+$ существует $a > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ и некоторой постоянной $C_1(\delta) > 0$ имеем*

$$|h_A(\xi) - h_A(\eta)| \le \delta h_A(\xi) + C_1(\delta)(||\xi - \eta||^a + 1), \quad \xi, \eta \in \mathbf{C}^n,$$

$$|h_A(\xi) - h_A(\eta)| \le C_1(\delta) h_A(\xi) + \delta(||\xi - \eta||^a + 1), \quad \xi, \eta \in \mathbf{C}^n.$$

Число a можно взять равным 1 тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{\nu \in A}(\nu, \lambda) \le 1$ для всех $\lambda \in \Lambda^{n-1}(A)$, где $\Lambda^{n-1}(A)$ – множество внешних нормалей (относительно A) $(n-1)$-мерных некоординатных граней, для которых $\min\limits_j \lambda_j = 1$.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 2.6 из [14].

Пусть

$$sA = \begin{cases} \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \nu/s \in A\} & \text{для } s > 0, \\ \{0\} & \text{для } s = 0, \\ \emptyset & \text{для } s < 0. \end{cases}$$

Предложение 3. *Для любого вполне правильного многогранника A такого, что $A^0 \subset N^n_0$ и натурального m, существует натуральное число j_0 такое, что для $j > \max(j_0, m)$ и $\alpha \in \frac{j}{m} A \cap N^n_0$ существует $\beta \in N^n_0$, для которого $\alpha \ge \beta$ и $\alpha - \beta \in \frac{j-m}{m} A$.*

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.1 из [13].

Пусть $\Omega^k \subset \mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n$ – некоторая область. Положим

$$\Omega = \Omega^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \tag{1.2}$$

и

$$[L_2]_k(\Omega) = \{\nu \in L_2(\mathbb{R}^n) : supp\, \nu \subset \Omega\}, \quad S^k_1 = \{x^{(k)} \in \mathbb{R}^k : ||x^{(k)}|| < 1\},$$

$$\omega^k \subset\subset \Omega^k \subset \mathbb{R}^k,\ \omega = \omega^k \times \mathbb{R}^{n-k},\ \omega^k_\delta = \{x^{(k)} \in \omega^k : dist(x^{(k)}, \partial\omega^k) \ge \delta\},\ \delta > 0.$$

Для функции φ, удовлетворяющей условию

$$\varphi(x^{(k)}) > 0, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(S_1^k), \quad \int \varphi(x^{(k)})\, dx^{(k)} = 1,$$

рассмотрим

$$\varphi_j^\varepsilon(x^{(k)}) = \chi_{\omega^k_{\varepsilon j - j/2}}(x^{(k)}) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-k} \varphi\left(\frac{2x^{(k)}}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, 2, ...,$$

где $\chi_\omega(x)$ – характеристическая функция множества ω. Очевидно, что

$$\varphi_j^\varepsilon(x^{(k)}) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\omega^k_{\varepsilon j}) \subset \mathbf{C}_0^\infty(\omega^k),$$

и $\varphi_j^\varepsilon(x^{(k)}) = 1$ для $x^{(k)} \in \omega^k_{\varepsilon(j+1)}$.

Предложение 4. *Для любого натурального s существует постоянная $C(s) > 0$ такая, что*

$$\sup_{x^{(k)} \in \omega^k} |D^\alpha \varphi_j^\varepsilon| \le C(s)\varepsilon^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| \le s, \quad j = 1, 2, ..., \quad \alpha \in N_0^{n,k}.$$

Доказательство тривиально.

§2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ

Лемма 1. *Для любых натуральных s, k, $1 \le k \le n$, $P \in G(n,k)$ и вполне правильного многогранника $A \subset M_k(P)$ существует постоянная $C = C(P) > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0,1)$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$* имеет место

$$\sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A(\xi))^s P^{(\alpha)}(\xi) \widehat{\varphi} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\le C \sum_{\alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A(\xi))^{s-1} P^{(\alpha)}(\xi) \widehat{\varphi} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega, k) \cap L_2(\Omega)$, где

$$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega, k) = \{\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \; supp\, \varphi \cap \Omega^k \subset\subset \Omega^k\}.$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 4.4.1 из [3].

Лемма 2. *Для любых натуральных числе s, k, $1 \le k \le n$, $P \in G(n,k)$ и вполне правильного многогранника $A \subset M_k(P)$ существует постоянная $C = C(s, P, A) > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0,1)$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем*

$$\varepsilon^{2s} \sum_{\substack{\alpha \in N_0^{n,k} \\ \alpha \ne 0}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\beta P^{(\alpha)}(D) u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})} \le C \sum_{\substack{\alpha \in N_0^{n,k} \\ \alpha \ne 0}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D) u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(j-1)})} +$$

$$+C\sum_{i=1}^{s}\sum_{\gamma\in N_0^{n,k},|\gamma|\le(i-1)m}\left\|(\varepsilon h_A(\xi))^{s-i}(\varepsilon^{|\gamma|}\widehat{D^\gamma\varphi_j^\varepsilon})P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \qquad (2.1)$$

где $\beta\in sA\cap N_0^n$, $m = ord\ P$ и

$$u\in L_2^\infty(\Omega)=\{v\in\mathbf{C}^\infty(\Omega): D^\alpha v\in L_2(\Omega),\ \alpha\in N_0^n\}.$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 4.4.3 из [3].

Предложение 5. *Для любых натуральных чисел s,k, $1\le k\le n$, $P\in G(n,k)$ и вполне правильного многогранника $A\subset M_k(P)$ и $sA^0\subset N_0^n$ существует постоянная $C>0$ такая, что*

$$\varepsilon^{2s}\sum_{\substack{\alpha\in N_0^{n,k}\\ \alpha\neq0}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|D^\beta P^{(\alpha)}(D)u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\le C\sum_{\substack{\alpha\in N_0^{n,k}\\ \alpha\neq0}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(j-1)})}+$$

$$+C\sum_{r=0}^{s-1}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(rA\setminus(r-1)A)}\varepsilon^{2r}\|D^\mu P(D)u\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(s-1)})}.$$

Доказательство. В силу Леммы 2, достаточно оценить только второе слагаемое правой части неравенства (2.1). Имеем

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\left\|(\varepsilon h_A(\xi))^{s-i}\varepsilon^{|\gamma|}\widehat{D^\gamma\varphi_j^\varepsilon}P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le s\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\left\|(\varepsilon h_A(\xi)^s+1)\varepsilon^{|\gamma|}\widehat{D^\gamma\varphi_j^\varepsilon}P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\le 2s\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\varepsilon^{2s}\sum_{\beta\in sA^0}\left\|D^\beta(\varepsilon^{|\gamma|}D^\gamma\varphi_j^\varepsilon)\,P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+$$

$$+2s\sum_{\substack{|\gamma|\le(i-1)m\\ \gamma\in N_0^{n,k}}}\left\|(\varepsilon^{|\gamma|}D^\gamma\varphi_j^\varepsilon)\,P(D)u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть l – некоторое натуральное число и $\alpha,\beta\in N_0^n$ такие, что $|\alpha|=i$, $\alpha\le\beta$, $\beta\in lA$. Имеем $\beta-\alpha\in(l-i)A$. В силу Предложения 4 и свойств функции φ_j^ε, получаем утверждение Предложения 5.

Пусть $1\le k\le n$ и $P\in G(n,k)$. Обозначим

$$[A_2]_k(\Omega,P)=\left\{u:\|u\|_{[A_2]_k(\Omega,P)}=\|u\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\left\|P^{(\alpha)}(D)u\right\|_{L_2(\Omega)}<\infty\right\},$$

$$[A_2^{loc}]_k(\Omega, P) = \{u : \varphi u \in [A_2]_k(\Omega, P),\ \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)\}.$$

Для вполне правильного множества $A \subset \mathbb{R}_+^n$ положим $G_k^A(\Omega) =$

$$= \{u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \forall \omega^k \subset\subset \Omega_k, \exists C > 0, \sqrt{\int_\omega |D^\alpha u|^2 dx} \le C^{j+1} j^j, \alpha \in jA, j = 1, 2, ...\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le k \le n$, $P \in G(n,k)$ *и* $A \subset M_k(P)$ *– вполне правильный многогранник, вершины которого суть точки с рациональными координатами. Если* $f \in G_k^{M_k(P)}(\Omega)$, *то любое решение* $u(x)$ *уравнения* $P(D)u = f$ *из* $[A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ *принадлежит* $G_k^A(\Omega)$.

Доказательство. Очевидно, что существует натуральное l такое, что $lA^0 \subset N_0^n$. Пусть

$$\lambda = \left(\frac{1}{\mu_1}, ..., \frac{1}{\mu_n}\right), \quad \mu_i = \sup_{\nu \in M_k(P)} \nu_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Имеем (см. [14]) $G_k^{M_k(P)}(\Omega) \subset G_k^\lambda(\Omega)$. Для $f \in G_k^{M_k(P)}(\Omega) \subset G_k^\lambda(\Omega)$ решение $u \in [A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ уравнения $P(D)u = f$ бесконечно дифференцируемо (см. [12]). Следовательно, для любого $\omega^k \subset\subset \Omega_k$ и любого натурального $j_0 > l$ существует постоянная $B = B(u, \omega^k, j_0, P) > 0$ такая, что для $j \le j_0$ справедливо

$$\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2j} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\nu P^{(\alpha)}(D)u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})} \le B^{2(j+1)}, \ \nu \in j_0 A \cap N_0^n, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.2}$$

Если взять $B > 0$ достаточно большим, то для любого $j \ge j_0 \ge l$ имеем

$$\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2j} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\nu P^{(\alpha)}(D)u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})} \le B^{2(j+1)}, \quad \nu \in jA \cap N_0^n, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.3}$$

Предположим, что $dim\ \omega^k \le 1$. Неравенства (2.2) и (2.3) совпадают при $j = j_0$. Пусть (2.3) выполнено для $j \le r$, $r \ge j_0 \ge l$. Докажем, что (2.3) выполняется и для $j = r + 1$.

Из Предложения 3 следует, что для любого $\nu \in N_0^n \cap ((r+1)A \setminus rA)$ существуют $\gamma, \beta \in N_0^n$ такие, что $\beta + \gamma = \nu$, $\beta \in lA$, $\gamma \in (r + 1 - l)A$. Из Предложения 5, для некоторой постоянной $C > 0$ имеем

$$\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1)} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| D^\nu P^{(\alpha)}(D)u \right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(r+1)})} =$$

$$= \varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)} \sum_{0 \ne \alpha \in N_0^{n,k}} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A(\xi))^l P^{(\alpha)}(\xi) \varphi_j^\varepsilon \widehat{D^\gamma u} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\leq C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)D^{\gamma}u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}+$$

$$+C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2i}\left\|D^{\mu}P(D)D^{\gamma}u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}=$$

$$=C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P^{(\alpha)}(D)D^{\gamma}u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(r+1-l)})}+$$

$$+C\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1-l)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2i}\left\|D^{\mu+\gamma}f\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}.$$

По предположению индукции получаем

$$\varepsilon^{2m}\varepsilon^{2(r+1)}\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|D^{\nu}P^{(\alpha)}(D)u\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(r+1)})}\leq$$

$$\leq C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2(r+1-l+i)}\left\|D^{\mu+\gamma}f\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}\right].$$

Так как для любого $f\in G_k^{M_k(P)}(\Omega)$ с некоторой постоянной $d=d(f,\omega)\geq 1$ имеем

$$\varepsilon^{m}\left\|D^{\alpha}f\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\leq d^{m+1}m^{m}j^{-m},\quad \alpha\in mA\subset mM_k(P),$$

то

$$C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}\sum_{\mu\in N_0^{n,k}\cap(iA\setminus(i-1)A)}\varepsilon^{2(r+1-l+i)}\left\|D^{\mu+\gamma}f\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon r})}\right]\leq$$

$$\leq C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}d^{2(r+1-l+i+1)}\left(\frac{r+1-l+i+1}{r}\right)^{2(r+1-l+i+1)}\right]\leq$$

$$\leq C\left[B^{2(r+2-l)}+\sum_{i=0}^{l}(3d)^{2(r+1-l+i+1)}\right]\leq C\left[B^{2(r+1-l)}+(3d)^{2(r+3)}\right].$$

Если взять B таким, что $B\geq\sqrt{2c}$ и $B\geq(3dl)^2$, то получим (2.3) для $j=r+1$. Пусть $F\subset\subset\omega^k$. Тогда для $\delta>0$ получаем $F\subset\subset\omega^k_\delta$. Для натурального j если взять $\varepsilon<\delta/j$, то получим $F\subset\omega^k_{\varepsilon j}$. Из (2.3) вытекает

$$\sum_{0\neq\alpha\in N_0^{n,k}}\left(\int_{F\times\mathbb{R}^{n-k}}\left|D^{\beta}P^{(\alpha)}(D)u\right|^2dx\right)^{1/2}\leq B^{j+1}\left(\frac{j}{\delta}\right)^{j},\quad \beta\in jA,\ j=1,2,\ldots. \tag{2.4}$$

Так как для любого $\omega^k \subset\subset \mathbb{R}^k$ существует постоянная $C(\omega^k) > 0$ такая, что

$$||\varphi||^2_{L_2(\omega)} \leq C \sum_{\alpha \in N_0^{n,k}} \left\| P^{(\alpha)}(D)\varphi \right\|^2_{L_2(\omega)}, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega) \cap L_2(\omega),$$

то утверждение Теоремы 1 следует из (2.4).

Предложение 6. *Для любого* $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$ *и* $A \supset M_k(P)$ *существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для достаточно больших* r *справедливо*

$$\sup_{\zeta \in D_k(P),\, ||\operatorname{Im} \zeta|| \leq r} h_A(\zeta) \geq Cr.$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда $h_A(\zeta) = o(||\operatorname{Im}\zeta||)$ при $||\operatorname{Im}\zeta|| \to \infty$ и $\zeta \in D_k(P)$. Из условия $A \supset M_k(P)$ следует, что существует последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $||\xi^s|| \to \infty$ при $s \to \infty$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что

$$h_A(\xi^s) \sum_{0 \neq \alpha \in N_0^{n,k}} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right|^{1/|\alpha|} \geq C_1, \quad s = 1, 2, ...$$

Из (1.1) с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$h_A(\xi^s) \geq C_2(d_{P,k}(\xi^s) + 1, \quad s = 1, 2, ...$$

Покажем, что

$$h_A(\zeta^s) \geq C_3 h_A(\xi^s), \quad \zeta^s \in D_k(P), \quad s = 1, 2, ...,$$

где $||\xi^s - \zeta^s|| = d_{P,k}(\xi^s)$ и $C_3 > 0$ - некоторая постоянная. Согласно предположению, для любой подпоследовательности, которую мы также обозначим через $\{\zeta^s\}_1^\infty$, имеем $h_A(\zeta^s) = o(h_A(\xi^s))$ при $s \to \infty$.

Из Предложения 2 для любого $\delta > 0$ с некоторой постоянной $C(\delta) > 0$ получаем

$$h_A(\xi^s) \leq h_A(\zeta^s) + |h_A(\zeta^s) - h_A(\xi^s)| \leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s) + \delta(||\zeta^s - \xi^s|| + 1) \leq$$

$$\leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s) + \delta(d_{P,k}(\xi^s) + 1) \leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s) + \frac{\delta}{C_2} h_A(\xi^s).$$

Следовательно

$$\left(1 - \frac{\delta}{C_2}\right) h_A(\xi^s) \leq (1 + C(\delta))h_A(\zeta^s), \quad s = 1, 2, ...$$

Полученное противоречие доказывает неравенство (2.5), откуда вытекает противоречие

$$\frac{h_A(\zeta^s)}{\|\operatorname{Im}\zeta^s\|} \geq C_3 \frac{h_A(\xi^s)}{\|\operatorname{Im}\xi^s\|} \geq C_3 \frac{h_A(\xi^s)}{d_{P,k}(\xi^s)} \geq C_3 C_2 > 0.$$

Предложение 6 доказано.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество вполне правильных многогранников A, удовлетворяющих условиям : a) $A \supset M_k(P)$, b) вершины многогранника A суть точки с рациональными координатами, c) существует натуральное число $r(A)$ и векторы $\{\lambda^j\}_1^{r(A)}$, $\min_i \lambda_i^j \geq 1$ такие, что $\sup_{\nu \in A}(\nu, \lambda^j) = 1$.

Для заданного многогранника $A \in \mathcal{A}$ обозначим

$$\mathcal{N}(A) = \{u \in [A_2^{loc}]_k(\Omega, P) : \ P(D)u \in G_k^A(\Omega)\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$, $A \in \mathcal{A}$, $\omega^k \subset\subset \Omega^k$ *и* $\{M_j\}_1^\infty$ *числа, для которых при любом* $u \in \mathcal{N}(A)$ *существует такая постоянная* $C = C(u) > 0$, *что*

$$\left(\int_\omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{1/2} \leq C^{j+1} M_j, \quad \alpha \in jM_k(P) \cap N_0^n, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Тогда $M_j \geq B^j j^j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, *где* $B > 0$ *– постоянная.*

Доказательство следует из Теоремы 4.4.3 работы [3] и Предложения 6.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$, $B \subset \mathbb{R}_+^n$ *– вполне правильное множество и* $A \subset M_k(P) \cap B$ *– вполне правильный многогранник, вершины которого точки с рациональными координатами. Если* $f \in G_k^B(\Omega)$, *то любое решение уравнения* $P(D)u = f$ *из* $[A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ *принадлежит* $G_k^A(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть* $1 \leq k \leq n$, $P \in G(n,k)$ *и* $A \subset M_k(P)$ *– вполне правильный многогранник, вершины которого точки с рациональными координатами, и* $t \geq 1$. *Если* $f \in G_k^{A(1/t)}(\Omega)$, *то любое решение уравнения* $P(D)u = f$ *из* $[A_2^{loc}]_k(\Omega, P)$ *принадлежит* $G_k^{A(1/t)}(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 1.

Abstract. The paper proves that the solutions of certain nonhypoelliptic equations in an infinite cylinder belong to the multi-anisotropic Gevrey classes, provided that these solutions vanish at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein, "Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivees partielles de second", Math. Ann, vol. 59, pp. 20 – 76, 1904.
2. И. Г. Петровский, "Об аналитичности решений системы дифференциальных уравнений", Мат. Сборник, том 5, № 47, стр. 3 – 68, 1939.
3. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.
4. В. И. Буренков, "О связи между поведением решения уравнения в частных производных на бесконечности и его дифференциальными свойствами", Труды МИАН, стр. 56 – 68, 1967.
5. L. Catabriga, "Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients", Asterisque, vol. 89 – 90, pp. 129 – 151, 1981.
6. В. В. Грушин, "Об одном семействе решений гипоэллиптического уравнения", ДАН СССР, том. 137, № 4, стр. 768 – 771, 1961.
7. В. В. Грушин, "Связь между локальными и глобальными свойствами решений гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами", Мат. Сборник, том 108, № 4, стр. 525 – 550, 1965.
8. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Мат. Сборник, том 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
9. С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, том 146, № 4, стр. 767 – 769, 1961.
10. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
11. В. И. Буренков, "О бесконечной дифференцируемости и аналитичности убывающих на бесконечности решений уравнений с постоянными коэффициентами", ДАН СССР, том 174, № 5, стр. 1007 – 1010, 1967.
12. В. И. Буренков, "Аналог теоремы Хермандера о гипоэллиптичности для функций, обращающихся в нуль на бесконечности", Сборник докладов VIII Советско–Чехословацкого семинара, Ереван, стр. 63 – 67, 1982.
13. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О классе Жевре решений гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 33, № 1, стр. 35 – 47, 1998.
14. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.
15. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоэллиптичности для линейных дифференциальных операторов", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 21, № 5, стр. 453 – 470, 1986.

Поступила 26 декабря 2001

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 4, 2002, 15-30

АЛГЕБРА ПЛОСКИХ ГРАНИЧНЫХ СИМВОЛОВ

Г. Арутюнян, Б.–В. Шульце

Ереванский государственный университет,
Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Potsdam, Germany
e–mails : gohar@ysu.am schulze@math.uni-potsdam.de

Резюме. В краевых задачах для псевдодифференциальных операторов решающее значение имеют плоские элементы. В работе изучаются алгебраические свойства и совместимость с лежащей в основе главной символической структурой. Основной результат опирается на новое описание краевых символов.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для псевдодифференциальных операторов можно описать в терминах операторнозначных амплитудных функций на границе (граничных символов), действующих как операторы в направлении нормали. Эта точка зрения систематически развивалась в работах [1], [8], [9]. Интересные применения относятся к смешанным эллиптическим задачам и асимптотикам решений, ср. [2], [3], [7]. Вообще говоря, внутренние символы не обладают свойством трансмиссии на границе, и мы вправе ожидать нетривиальную асимптотику решений. Анализ разбивается на две части : негладкие плоские граничные символы и гладкие элементы с мероморфными символами Меллина.

Настоящая статья исследует алгебру плоских граничных символов, опирающихся на новые результаты работы [4], касающиеся структуры операторнозначных краевых символов. Основным результатом работы является утверждение, заключающееся в том, что эти плоские символы (со следом и потенциальными составляющими) образуют алгебру, ср. [4], Теорема 2.17, сохраняющую инвариантную относительно формального сопряжения структуру. Результат основывается на альтернативной характеризации граничных символов в смысле [4], Теорема 2.11. В Предложении 2.8 мы описываем важное подпространство, связанное с голоморфными символами Меллина. Как следствие Предложения 2.15 вытекает, что алгебраические операции совместимы с главной символической структурой.

§1. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Прежде всего напомним стандартные обозначения, касающиеся хермандеровских пространств символов $S^{\mu}_{(cl)}(U \times \mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$, для открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (через "cl" будем обозначать классические символы, а через "(cl)" как классический так и неклассический случай). Обозначим через $S^{\mu}(U \times \mathbb{R}^n) \subset C^{\infty}(U \times \mathbb{R}^n)$ оценки для символов :

$$|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)| \leq c \langle \xi \rangle^{\mu - |\beta|}, \quad \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$$

для всех $\alpha \in \mathcal{N}^m$, $\beta \in \mathcal{N}^n$, $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$, причём $K \subset\subset U$, с постоянными $c = c(\alpha, \beta, K) > 0$ ($\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел). Классические символы определяются как асимптотические суммы слагаемых $\chi(\xi) a_{(\mu-j)}(x, \xi)$, $j \in \mathcal{N}$, где

$$a_{(\mu-j)}(x, \lambda\xi) = \lambda^{\mu-j} a_{(\mu-j)}(x, \xi), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

а χ – функция срезки в $\mathbb{R}^n$. Мы будем использовать ряд модификаций и обобщений. Например, если U имеет вид $\overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \Omega$, то для открытого $\Omega \subseteq \mathbb{R}^q$ определим

$$S^{\mu}_{(cl)}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n) = S^{\mu}_{(cl)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n)|_{\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n}.$$

В этой статье **функцией срезки** является любая $\omega(t) \in C_0^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ такая, что $\omega(t) = 1$ в окрестности $t = 0$. Пусть $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, $s, \gamma \in \mathbb{R}$ определяется как пополнение $C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ в норме

$$||u||_{\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)} = \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2} - \gamma} (1 + |z|^2)^s |(Mu)(z)|^2 \, dz \right\}^{1/2},$$

причём $(Mu)(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} u(t)\, dt$ является преобразованием Меллина. Для произвольных $s, \gamma \in \mathbb{R}$ имеем $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \subset H^s_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Здесь $H^s(\mathbb{R}_+) = H^s(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}_+}$ для стандартного пространства Соболева $H^s(\mathbb{R})$. Положим

$$\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) = \{\omega u + (1 - \omega) v : u \in \mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \ v \in H^s(\mathbb{R}_+)\},$$

где ω – функция срезки. Тогда $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ не зависит от выбора ω. Пространства $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ суть гильбертовы пространства, в частности, $\mathcal{H}^{0,0}(\mathbb{R}_+) = \mathcal{K}^{0,0}(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+)$ (с мерой dt).

Отметим, что скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}_+)$ распространяется на невырожденные полубилинейные образования пар $(.,.) : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{K}^{-s,-\gamma}(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathbb{C}$. Более того, вложение $\mathcal{K}^{s',\gamma'}(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ непрерывно, если $s' \geq s$, $\gamma' \geq \gamma$. Каждому оператору $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s',\gamma'}(\mathbb{R}_+))$ соответствует формальное сопряжение $A^* \in \mathcal{L}\left(\mathcal{K}^{-s',-\gamma'}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{-s,-\gamma}(\mathbb{R}_+)\right)$ по формуле $(Au, v) = (u, A^*v)$ для всех $u, v \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Множество

$$\mathcal{K}^{s,\gamma;\varrho}(\mathbb{R}_+) = \{\langle t\rangle^{-\varrho}u(t) : u(t) \in \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)\},$$

наделяется нормой, индуцированной биекцией $\langle t\rangle^{-\varrho} : \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \longmapsto \mathcal{K}^{s,\gamma;\varrho}(\mathbb{R}_+)$, и положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+) = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+)$$

в топологии проективного предела.

Если E – гильбертово пространство и $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ сильно непрерывная группа изоморфизмов $\kappa_\lambda : E \longmapsto E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, (т.е. $\{\kappa_\lambda e\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \in C(\mathbb{R}_+, E)$ для каждого $e \in E$, и $\kappa_\lambda \kappa_{\lambda'} = \kappa_{\lambda\lambda'}$ для всех $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+$), то будем говорить, что E наделена **групповой операцией**.

Определение 1. *Пусть E и $\tilde{E}$ суть гильбертовы пространства со строго непрерывными групповыми операциями $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ и $\{\tilde{\kappa}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$, соответственно. Для заданного открытого множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^q$, пространство операторнозначных символов $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^q; E, \tilde{E})$ определяется как множество всех $a(y,\eta) \in C^\infty\left(\Omega \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}(E, \tilde{E})\right)$, причём $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ является пространством непрерывных операторов $E \longmapsto \tilde{E}$ (в топологии нормы операторов), которое удовлетворяет символьным оценкам*

$$\left\|\tilde{\kappa}^{-1}_{\langle\eta\rangle}\{D^\alpha_y D^\beta_\eta a(y,\eta)\}\kappa_{\langle\eta\rangle}\right\|_{\mathcal{L}(E,\tilde{E})} \leq c\langle\eta\rangle^{\mu-|\beta|}$$

для всех мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathcal{N}^q$, а $y \in K$ для всех $K \subset\subset \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^q$ с постоянными $c = c(\alpha, \beta, K) > 0$.

В частности, если $E = \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, определим $(\kappa_\lambda u)(t) = \lambda^{1/2}u(\lambda t)$. Для $E = \tilde{E} = \mathbf{C}$ всюду далее полагаем $\kappa_\lambda = id_{\mathbf{C}}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и восстанавливаем пространства скалярных символов.

Классические операторнозначные символы определяются как асимптотические суммы слагаемых $\chi(\eta)a_{(\mu-j)}(y,\eta)$, где χ – функция срезки в $\mathbb{R}^q$ и

$$a_{(\mu-j)}(y,\eta) \in C^\infty\left(\Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\}), \mathcal{L}(E, \tilde{E})\right), a_{(\mu-j)}(y, \lambda\eta) = \lambda^{\mu-j}\tilde{\kappa}_\lambda a_{(\mu-j)}(y,\eta)\kappa_\lambda^{-1}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и всех $\eta \neq 0$. Пространство всех классических операторнозначных символов обозначим через $S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; E, \tilde{E})$. Пространства символов также имеют смысл для пространств Фреше E или $\tilde{E}$, записанных как проективные пределы гильбертовых пространств с групповыми операциями (детали можно найти в [7]).

Обозначим через $[\eta]$ функцию $\eta \longmapsto [\eta]$ в $C^\infty(\mathbb{R}^q)$, которая строго положительна и удовлетворяет условию $[\eta] = |\eta|$ для $|\eta| \geq c$, где $c > 0$ постоянная.

Пример 1. (i) Пусть $\omega \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и $\omega_\eta = \omega(t[\eta])$. Тогда оператор умножения $\mathcal{M}_{\omega_\eta}$ на ω_η принадлежит $S^0_{cl}(\mathbb{R}^q; L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+))$ при $|\eta| \geq c$. Кроме того, для $h(y,z) \in C^\infty(\Omega, M^0_{\mathcal{O}})$ (см. нижеприведённое Определение 2) имеем

$$\mathcal{M}_{\omega_\eta} \mathrm{op}_M(h)(y) \mathcal{M}_{\tilde{\omega}_\eta} \in S^0_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)), \quad |\eta| \geq c,$$

где op_M – оператор Меллина.

(ii) Оператор умножения на t^j, $j \in \mathcal{N}$, представляет элемент в $S^{-j}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$.

Выберем функции срезки ω_0, ω_1, ω_2 так, что $\omega_0\omega_1 = \omega_1$, $\omega_1\omega_2 = \omega_2$. Тогда из псевдолокальности получаем, что

$$g(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_0(t[\eta])) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)\omega_2(t[\eta])$$

принадлежит $C^\infty(\Omega, L^{-\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^q))$. Кроме того, $\mathrm{op}(p)(y,\eta)$ равна сумме $g(y,\eta)$, причём

$$\omega_1(t[\eta])\mathrm{op}(p)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])). \qquad (1)$$

Типичный эффект получается при $t = 0$, так что полностью игнорируем второе слагаемое в (1), принадлежащее $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\delta}(\mathbb{R}_+))$ для любых $s, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, (ср. [8]). Для изучения первого слагаемого в (1) будем использовать следующее условие на оператор Меллина. Обозначим через $S^\mu_{cl}(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^q_\eta)$ класс символов Хермандера, который зависит только от копеременных τ, η. Для $\beta \in \mathbb{R}$ (**прямая с весом**) положим $\Gamma_\beta = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z = \beta\}$. Пространства $S^\mu_{(cl)}(\Gamma_\beta)$, которые соответствуют отождествлению $z = \beta + i\tau \longmapsto \tau$, $\Gamma_\beta \longmapsto \mathbb{R}$, а также $S^\mu_{(cl)}(\Gamma_\beta \times \mathbb{R}^q)$ рассматриваются в канонических топологиях Фреше. Мы будем рассматривать голоморфные функции переменной z со значениями в этих пространствах. Обозначим через $\mathcal{A}(U, E)$ пространство всех голоморфных функций в открытом множестве $U \subseteq \mathbf{C}$ со значениями в пространстве Фреше E.

Определение 2. *Для заданного $\mu \in \mathbb{R}$, обозначим через $M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q)$ подпространство всех $h(z,\eta) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}, C^{\infty}(\mathbb{R}^q))$ с $h(z,\eta) \mid_{\Gamma_\beta} \in S^{\mu}_{cl}(\Gamma_\beta \times \mathbb{R}^q)$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$, равномерно на произвольных компактных интервалах $c \leq \beta \leq c'$. Для $q = 0$ применяем обозначение $M^{\mu}_{\mathcal{O}}$. Пространства $M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q)$, $\mu \in \mathbb{R}$ — естественные пространства Фреше.*

Замечание 1. Пусть $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}})\right)$, и положим $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$. Тогда для произвольных функций срезок ω и ω_1 семейство операторов $m(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega(t[\eta])$ порождает символ $m(y,\eta) \in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$. К тому же, если $\tilde{h}$ не зависит от t и t', то имеем $m(y,\eta) \in S^0_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$.

Замечание 2. Пусть $h(y,z) \in C^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}^{-\infty}_{\mathcal{O}})$ и $\varphi \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\omega(t[\eta])\varphi(t)\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y)\omega_1(t[\eta]) \quad \text{и} \quad \omega(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y)\varphi(t)\omega_1(t[\eta])$$

принадлежат $S^0_{cl}(\mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+))$ для всех $s,\gamma \in \mathbb{R}$, $N \in \mathcal{N}$ и при любом выборе функций срезок ω, ω_1.

Замечание 3. Пусть $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ с

$$\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}})\right).$$

Тогда имеем

$$\omega(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) \in S^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))$$

для всех $s,\gamma \in \mathbb{R}$ и любого выбора функций срезок ω, ω_1.
Если $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(y,z,t\eta)$ (нет зависимости от t,t'), мы получаем классический элемент

$$\omega(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) \in S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+)).$$

Теорема 1. *Для каждого $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S^{\mu}_{cl}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ существует $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$ такое, что $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ удовлетворяет условию*

$$op(p)(y,\eta) = t^{-\mu}op^{\gamma}_M(h)(y,\eta) \quad mod \quad C^{\infty}(\Omega, L^{-\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^q)), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

В частности, если символ p не зависит от t, t', то $\tilde{h}$ может быть выбрана не зависящей от t, t'.

Этот результат был получен в [6]. Имеем $\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)u = \mathrm{op}^{\delta}_M(h)(y,\eta)u$ для любых $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $u \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}_+)$, что является простым следствием теоремы Коши.

Замечание 4. Пусть $p(t,t',y,\tau,\eta)$, фигурирующая в Теореме 1, обладает свойством $p(t,t',y,\tau,\eta) = 0$ для $t > T$, $t' > T'$ при некоторых $T, T' > 0$. Тогда соответствующая функция $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta})$ может быть найдена как функция, обращающаяся в нуль при $t > T$, $t' > T'$. Далее, специально не оговаривая, мы будем предполагать выполнимость этого свойства.

Основным операторным требованием для псевдодифференциальных символов $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S^{\mu}_{cl}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ является отображение $p(t,t',y,\tau,\eta) \longmapsto a(y,\eta)$ для

$$a(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])). \quad (2)$$

Операторное семейство (2) является операторнозначным символом в $S^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))$ для всех $s,\gamma \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *Пусть $\mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ обозначает пространство всех операторных функций $a(y,\eta)$ вида (2), где p и $\tilde{h}$ определены в Замечании 4.*

Замечание 5. Из $\tilde{f}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$ и $f(t,t',y,z,\eta) = \tilde{f}(t,t',y,z,t\eta)$ следует, что

$$\omega(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_{M}(f)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) \in \mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$$

для произвольных функций срезки ω, ω_1 и любого $\mu \in \mathbb{R}$.

§2. ГРАНИЧНЫЕ СИМВОЛЫ С ПЛОСКИМ УСЛОВИЕМ

В этом параграфе мы наделяем $E^{s,\gamma}_{\pm} = \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_\pm}$ и $S_{\pm} = \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_\pm}$ групповыми операциями $\mathrm{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_\pm}})_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$.

Определение 4. *Пространство $\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ определяется как множество всех символов*

$$g(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; E^{s,\gamma}_{-}, S_+) \quad (3)$$

таких, что

$$g^*(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} S^{\mu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; E^{s,\gamma}_{+}, S_-). \quad (4)$$

Здесь $g^*(y,\eta)$ есть поточечная формальная операция сопряжения для $g(y,\eta)$ в следующем смысле :

$$(u, g^*v)_{E^{0,0}_-} = (gu, v)_{E^{0,0}_+}, \quad u \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_-}, \quad v \in C^{\infty}_0(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}^{N_+}. \quad (5)$$

Пусть $R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 0, 0)$ (пространство верхних левых углов в $\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ для произвольных N_-, N_+). Вообще говоря, элементы $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ суть блок-матрицы $(g_{ij}(y,\eta))_{i,j=1,2}$, где $g_{11}(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Будем называть $g_{21}(y,\eta)$ (плоским) **следовым** символом и $g_{12}(y,\eta)$ (плоским) **потенциальным** символом. Пусть $\mathcal{R}^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_+)$ обозначает пространство всех плоских следовых символов, $\mathcal{R}^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-)$ – пространство всех плоских потенциальных символов, которые появляются как соответствующие входы элементов $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$. В частности, мы полагаем $R^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 1)$ и $R^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 1)$.

Замечание 6. Пространство $\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ является пространством Фреше в каноническом смысле, именно, в системах полунорм как и в условиях (3) и (4) (достаточно брать пересечения по всем $s, \gamma \in \mathbb{Z}$). В частности, пространства $\mathcal{R}^{\mu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_+)$ и $\mathcal{R}^{\mu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-)$ являются пространствами Фреше.

Пример 2. Пусть $g(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_-, S_+))$ так, что

$$g^*(y,\eta) \in \bigcap_{s,\gamma \in \mathbb{R}} C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_+, S_-))$$

$$g(y,\lambda\eta) = \lambda^{\mu} \mathrm{diag}(\kappa_{\lambda}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}}) g(y,\eta) \mathrm{diag}(\kappa_{\lambda}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})^{-1}$$

для всех $y \in \Omega$, $|\eta| \geq c$ и $\lambda \geq 1$. Тогда $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$.

Замечание 7. Для произвольного $j \in \mathcal{N}$ имеем $\mathcal{R}^{\mu-j}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+) \subset \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$. Более того

$$\mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_0, N_+) \mathcal{R}^{\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_0) \subset \mathcal{R}^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+).$$

Как и классические операторнозначные символы, однородный главный символ порядка μ определяется по формуле

$$\sigma_{\wedge}(g)(y,\eta) \in C^{\infty}(\Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\}), \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_-, S_+)),$$

где $\sigma_{\wedge}(g)(y,\lambda\eta) = \lambda^{\mu} \mathrm{diag}(\kappa_{\lambda}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}}) \sigma_{\wedge}(g)(y,\eta) \mathrm{diag}(\kappa_{\lambda}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $(y,\eta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\})$.

Аналогично формуле (5) имеем (y,η)-типа формальное сопряжение :

$$\sigma_{\wedge}(g)^*(y,\eta) = \sigma_{\wedge}(g^*)(y,\eta) \in C^{\infty}(\Omega \times (\mathbb{R}^q \setminus \{0\}), \mathcal{L}(E^{s,\gamma}_+, S_-)).$$

Предложение 1. *Для произвольных $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{R}$, $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ эквивалентно*

$$\mathrm{diag}(t^{\nu}, 1) g(y,\eta) \mathrm{diag}(t^{\rho}, 1) \in \mathcal{R}^{\mu-\nu-\rho}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+). \tag{6}$$

Более того, для любых $a(y,\eta) \in S^{\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ и $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$, имеем $a(y,\eta)g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$.

Определение 5. *Пространство* $\mathcal{R}^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *определяется как множество всех операторных функций*

$$\mathbf{a}(y,\eta) = diag(a(y,\eta), 0) + g(y,\eta)$$

для произвольных $a(y,\eta) \in \mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, $g(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$. Как и выше, положим $R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q) = \mathcal{R}^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; 0, 0)$.

Замечание 8. Имеем

$$\mathcal{R}^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+) \subset S^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q, E^{s,\gamma}_-, E^{s-\mu,\gamma-\mu}_+) \quad s, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Предложение 2. *Если* $h(t,y,z) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}})$, *то операторная функция*

$$m(y,\eta) = t^{-\mu+j}\omega(t[\eta])op^{\gamma}_M(h)(y)\eta^{\alpha}\omega_1(t[\eta])$$

принадлежит $R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ *для любых* $\alpha \in \mathcal{N}^q$, $j \in \mathcal{N}$, $|\alpha| \leq j$ *и для всех функций срезки* ω, ω_1.

Доказательство. Прежде заметим, что существует функция срезки ω_0 такая, что $m(y,\eta) = \omega_0 m(y,\eta)\omega_0$ при всех $(y,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Тогда $m(y,\eta)$ может быть записана в виде

$$t^{-\mu+j}\omega(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h_0)(y)\eta^{\alpha}\omega_1(t[\eta]) \tag{7}$$

для $h_0(t,t',y,z) = \omega_0(t)h(t,y,z)\omega_0(t')$, которая принадлежит $C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}})$ и обращается в нуль для $t, t' > T$ при некотором $T > 0$. Для построения

$$\tilde{f}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}})),$$

такой, что при $f(t,t',y,z,\eta) = \tilde{f}(t,t',y,z,t\eta)$ формула (7) принимает вид

$$t^{-\mu+j-|\alpha|}\omega(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(f)(y,\eta)\omega_1(t[\eta]) + g(y,\eta), \tag{8}$$

где $g(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, мы выбираем элемент $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и множество

$$\tilde{f}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) = h_0(t,t',y,z)\tilde{\eta}^{\alpha}\sigma(|\tilde{\eta}|^2).$$

Используя Замечание 5, получаем, что первое слагаемое в (8) принадлежит $\mathcal{A}^{\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. По построению

$$g(y,\eta) = t^{-\mu+j}\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^{\gamma}_M(h_0)\eta^{\alpha}\omega_1(t[\eta]).$$

Докажем теперь, что $g(y,\eta) \in R^{\mu+|\alpha|-j}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ (ср. Замечание 7). Согласно Предложению 1, достаточно показать, что

$$G(y,\eta) = \omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^\gamma_M(h_0)\omega_1(t[\eta]) \in \mathcal{R}^0_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q).$$

Используя разложение Тейлора для $h_0(t,t',y,z)$ по переменным t,t', получаем

$$h_0(t,t',y,z) = \sum_{i+j\le N} t^i t'^j h_{ij}(y,z) + \sum_{i+j=N} t^i t'^j \tilde{h}_{ij}(t,t',y,z),$$

где $h_{ij}(y,z) \in C^\infty(\Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}})$, $\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{-\infty}_{\mathcal{O}})$. Тогда

$$G(y,\eta) = \sum_{i+j\le N} \{t^i\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^\gamma_M(h_{ij}(y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta])\}+$$
$$+ \sum_{i+j=N} \{t^i\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^\gamma_M(\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta])\}.$$

Положим

$$g_{ij}(y,\eta) = t^i\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^\gamma_M(h_{ij}(y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta]).$$

Как и в Примере 1, имеем $g_{ij}(y,\lambda\eta) = \lambda^{-i-j}\kappa_\lambda g_{ij}(y,\eta)\kappa^{-1}_\lambda$ для всех $y \in \Omega$, $|\eta| \ge c$, $\lambda \ge 1$. Используя Замечание 2, получаем, что g_{ij} обладает свойствами, аналогичными Примеру 2. Отсюда вытекает, что

$$g_{ij} \in S^{-i-j}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)).$$

Теперь покажем, что

$$t^i\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^\gamma_M(\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z))(y)t'^j\omega_1(t'[\eta]) \in$$
$$\in S^{-N}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)),$$

для $i + j = N$, или, эквивалентно

$$\begin{aligned}&\omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}^\gamma_M(\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z))(y)\omega_1(t'[\eta]) \in \\ &\in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)).\end{aligned} \tag{9}$$

Согласно хорошо известному результату о проективных тензорных произведениях пространств Фреше, получаем

$$\tilde{h}_{ij}(t,t',y,z) = \sum_{l,l'=0}^\infty \lambda_{ll'}\varphi_l(t)\psi_{l'}(t')\tilde{h}_{ijll'}(y,z), \tag{10}$$

где $\lambda_{l,l'} \in \mathbf{C}$, $\sum\limits_{l,l'=0}^{\infty} |\lambda_{ll'}| < \infty$, $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \ni \varphi_l(t) \to 0$ при $l \to \infty$, $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \ni \psi_{l'}(t') \to 0$ при $l' \to \infty$ и $C^\infty(\Omega, M_{\mathcal{O}}^{-\infty}) \ni \tilde{h}_{ijll'}(y,z) \to 0$ при $l, l' \to \infty$ в соответствующих пространствах. Так как $\tilde{h}_{ij}$ обращается в нуль для достаточно больших t и t', мы можем умножить обе части суммы (10) на подходящие функции срезки и получить одно и то же выражение. Следовательно, коэффициенты $\varphi_l, \psi_{l'} \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ стремятся к нулю при $l, l' \to \infty$. Для доказательства (9) при $g_{ijll'}(y,\eta) = \omega(t[\eta])(1 - \sigma(t^2|\eta|^2))\mathrm{op}_M^\gamma(h_{ijll'}(y,z))(y)\omega_1(t[\eta])$, докажем сходимость $\sum\limits_{l,l'=0}^{\infty} \lambda_{ll'}\mathcal{M}_{\varphi_l} g_{ijll'}(y,\eta)\mathcal{M}_{\psi_{l'}}$ в пространстве $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{L,L;L}(\mathbb{R}_+))$ для всех $L \in \mathcal{N}$. Имеем

$$g_{ijll'}(y,\eta) \in S_{cl}^0(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{L,L;L}(\mathbb{R}_+))$$

(чётная однородность порядка 0 для больших $|\eta|$) и $g_{ijll'}(y,\eta) \to 0$ при $l, l' \to \infty$. Более того, оператор умножения $\mathcal{M}_\varphi$ на $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ непрерывен в смысле

$$C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \longmapsto S^0(\mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+)),$$

а также в смысле

$$C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \longmapsto S^0(\mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+), \mathcal{K}^{N,N;N}(\mathbb{R}_+)),$$

и мы немедленно получаем требуемую сходимость. Отсюда следует (9). Аналогичные рассуждения применимы для сопряжённых операторов. Доказательство Предложения 2 завершено.

Предложение 3. *Пусть $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}_{\tilde{\eta}}^q))$ обращается в нуль для достаточно больших t и t'. Тогда для $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ и произвольных функций срезки ω, ω_1 причём $\omega\omega_1 = \omega_1$, имеем*

$$\omega_1(t[\eta])op_M^\gamma(h)(y,\eta)(1-\omega(t[\eta])) \quad и \quad (1-\omega(t[\eta]))op_M^\gamma(h)(y,\eta)\omega_1(t[\eta])$$

принадлежат $R_{G,\mathcal{O}}^0(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Доказательство аналогично доказательству Предложения 2.

Предложение 4. [4] *Пусть $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}_{\tilde{\eta}}^q))$ и $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S_{cl}^\mu(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ обращаются в нуль для достаточно больших t и t' и удовлетворяют условиям Теоремы 1. Тогда для произвольных функций срезки ω, ω_1 операторное семейство*

$$(1-\omega(t[\eta])\{op(p)(y,\eta) - t^{-\mu}op_M^\gamma(h)(y,\eta)\}(1-\omega_1(t[\eta]))$$

принадлежит $R_{G,\mathcal{O}}^0(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Пусть $\mathbf{a}(y,\eta) \in R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, т.е. $\mathbf{a}(y,\eta) =$

$$= \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])) + g(y,\eta), \tag{11}$$

где $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ с $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$, как и $p(t,t',y,\tau,\eta) \in S^{\mu}_{cl}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^{1+q})$ обращается в нуль для достаточно больших t и t', и $g(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Теорема 2. *Пространство $R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ состоит из всех семейств операторов вида*

$$\mathbf{h}(y,\eta) = t^{-\mu}op^{\gamma}_M(h)(y,\eta) + c(y,\eta), \tag{12}$$

где $h(t,t',y,z,\eta) = \tilde{h}(t,t',y,z,t\eta)$ для некоторого $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta}) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q_{\tilde{\eta}}))$, которая обращается в нуль для достаточно больших t и t', и произвольных $c(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Более точно, если элемент $\mathbf{a}(y,\eta) \in R^{\mu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ задан в форме (11), то необходимо $c(y,\eta) = \mathbf{a}(y,\eta) - \mathbf{h}(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{h}(y,\eta)$ задана в виде (12). Выбирая функции срезки $\omega_0,\omega_1,\omega_2$ так, что $\omega_0\omega_1 = \omega_1$, $\omega_1\omega_2 = \omega_2$, получаем

$$t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) +$$

$$+(1-\omega_1(t[\eta]))t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])) + c(y,\eta) + g_1(y,\eta) + g_2(y,\eta),$$

где $g_1(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)(1-\omega_0(t[\eta]))$,

$$g_2(y,\eta) = (1-\omega_1(t[\eta]))t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_2(t[\eta]).$$

Используя Предложения 1 и 3, получаем $g_1(y,\eta), g_2(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Пусть

$$\mathbf{h}(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta]) + (1-\omega_1(t[\eta]))\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta])) +$$

$$+c(y,\eta) + g_1(y,\eta) + g_2(y,\eta) + g_3(y,\eta),$$

где $g_3(y,\eta) = (1-\omega_1(t[\eta]))\{t^{-\mu}\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta) - \mathrm{op}(p)(y,\eta)\}(1-\omega_2(t[\eta]))$.

Тогда согласно Предложению 4 имеем $g_3(y,\eta) \in R^{\mu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Отсюда следует требуемое выражение для $\mathbf{h}(y,\eta)$ и $\mathbf{a}(y,\eta)$.

Обратно, пусть $\mathbf{a}(y,\eta)$ имеет вид (11), тогда аналогичными рассуждениями получаем представление (12). Теорема 2 доказана.

Предложение 5. [4] *Пусть* $\tilde{h}(t, t', y, z, \eta) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}^q))$ *обращается в нуль для достаточно больших* t, t'. *Определим*

$$\tilde{h}_L(t, y, z, \eta) = \iint s^{i\xi}\tilde{h}(t, st, y, z + i\xi, \eta)\frac{ds}{s}\, d\xi$$

(сходимость в $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}^q)))$. *Тогда для* $h(t, t', y, z, \eta) = \tilde{h}(t, t', y, z, t\eta)$ *и* $h_L(t, y, z, \eta) = \tilde{h}_L(t, y, z, t\eta)$ *необходимо* $op_M^\gamma(h)(y, \eta) = op_M^\gamma(h_L)(y, \eta)$.

Предложение 6. [4] *Пусть* $\tilde{h}_j(t, t', y, z, \eta) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^{\mu_j}(\mathbb{R}^q))$, $j = 1, 2$ *обращается в нуль для достаточно больших* t *и* t'. *Определим*

$$\tilde{h}(t, y, z, \eta) = \iint s^{-i\xi}\tilde{h}_{1,L}(t, y, z + i\xi, \eta)\tilde{h}_{2,L}(st, y, z, s\eta)\frac{ds}{s}\, d\xi$$

(сходимость в $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M_{\mathcal{O}}^\mu(\mathbb{R}^q)))$. *Тогда для* $h_i(t, y, z, \eta) = \tilde{h}_{i,L}(t, y, z, t\eta)$, $i = 1, 2$ *и* $h(t, y, z, \eta) = \tilde{h}(t, y, z, t\eta)$ *необходимо* $op_M^\gamma(h_1)(y, \eta) op_M^\gamma(h_2)(y, \eta) = op_M^\gamma(h)(y, \eta)$.

Однородный главный краевой символ для $\mathbf{a}(y, \eta)$ определяется по формуле

$$\sigma_\wedge(\mathbf{a})(y, \eta) = \operatorname{diag}(\sigma_\wedge(a)(y, \eta), 0) + \sigma_\wedge(g)(y, \eta), \tag{13}$$

где

$$\sigma_\wedge(a)(y, \eta) = \omega_1(t|\eta|)t^{-\mu}\mathrm{op}_M^\gamma(h_0)(y, \eta)\omega_0(t|\eta|) + (1 - \omega_1(t|\eta|))\mathrm{op}(p_0)(y, \eta)(1 - \omega_2(t|\eta|))$$

с $p_0(y, \tau, \eta) = p_{(\mu)}(0, 0, y, \tau, \eta)$, $h_0(t, y, z, \eta) = \tilde{h}(0, 0, y, z, t\eta)$. Он представляет собой семейство операторов $\sigma_\wedge(\mathbf{a})(y, \eta) : E_-^{s,\gamma} \longmapsto E_+^{s-\mu,\gamma-\mu}$, для $(y, \eta) \in T^*\Omega \setminus 0$. Он однороден в смысле : $\sigma_\wedge(y, \lambda\eta) = \lambda^\mu \operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}})\sigma_\wedge(\mathbf{a})(y, \eta)\operatorname{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})^{-1}$. Полагая $\sigma_\psi(\mathbf{a})(t, y, \tau, \eta) = p_{(\mu)}(t, t', y, \tau, \eta)|_{t'=t}$ назовём $\sigma(\mathbf{a}) = (\sigma_\psi(\mathbf{a}), \sigma_\wedge(\mathbf{a}))$ **главным символом для** $\mathbf{a}(y, \eta)$.

Следующий результат носит вспомогательный характер для описания операторнозначных главных символов.

Предложение 7. *Пусть* $a(x, \xi) \in S^\mu(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *– символ такой, что*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \le c_{\alpha,\beta}(a)\langle\xi\rangle^{\mu-\beta}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{N}.$$

Тогда $A = op(a)$ *продолжается до непрерывного линейного отображения* $A : H^s(\mathbb{R}) \longmapsto H^{s-\mu}(\mathbb{R})$. *Более того*

$$||A||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}), H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} \le c \sum_{\alpha+\beta \le N} c_{\alpha,\beta}(a),$$

где постоянные c *и* $N \in \mathcal{N}$ *не зависят от* A.

Доказательство. Положим $\tilde{A} = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^{-\mu})\mathrm{op}(a)$. Имеем $\tilde{a}(x,\xi) \in S^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и поэтому $|D_x^\alpha D_\xi^\beta \tilde{a}(x,\xi)| \le \tilde{c}_{\alpha,\beta}(\tilde{a})$ для всех $x, \xi \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Используя теорему Кальдерона–Вайланкурта (см., например, [10]), получаем, что $\tilde{A} : H^s(\mathbb{R}) \longmapsto H^s(\mathbb{R})$ ограничено и

$$\left\|\tilde{A}\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^s(\mathbb{R}))} \le \tilde{c} \sum_{\alpha+\beta\le\tilde{N}} \tilde{c}_{\alpha,\beta}(\tilde{a}),$$

где постоянные $\tilde{c}$ и $\tilde{N} \in \mathcal{N}$ не зависят от $\tilde{A}$. Для $B = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^{-\mu})$ положим $A = B^{-1}\tilde{A}$. Имеем

$$||A||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} = \left\|B^{-1}\tilde{A}\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} \le$$

$$\le ||B^{-1}||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^{s-\mu}(\mathbb{R}))} \left\|\tilde{A}\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}),H^s(\mathbb{R}))} \le c \sum_{\alpha+\beta\le N} c_{\alpha,\beta}(a).$$

Предложение 7 доказано.

Предложение 8. *Для заданного* $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_\mathcal{O}(\Omega\times\mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *и любого* $u \in E_-^{s,\gamma}$ *имеем*

$$\sigma_\wedge(\mathbf{a})u = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\mu}\mathrm{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_+}})^{-1}\mathbf{a}(y,\lambda\eta)\mathrm{diag}(\kappa_\lambda, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{N_-}})u.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sigma_\wedge(a)u = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\mu}\kappa_\lambda^{-1}a(y,\lambda\eta)\kappa_\lambda u.$$

Выберем λ достаточно большим, чтобы $[\lambda\eta] = |\lambda\eta|$. Остаётся доказать, что

$$\left\|\omega_1(t|\eta|)t^{-\mu}\mathrm{op}_M^\gamma\left\{\tilde{h}\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,z,t\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\tilde{h}(0,0,y,z,t\eta)\right\}\omega_0(t|\eta|)\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+),\mathcal{H}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))} \to 0$$

и

$$\left\|(1-\omega_1(t|\eta|))\mathrm{op}\left\{\lambda^{-\mu}p\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,\lambda\xi,\lambda\eta\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta)\right\}(1-\omega_2(t|\eta|))\right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}_+),H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+))} \to 0,$$

при $\lambda \to 0$. В действительности, для фиксированных λ, y, η символ

$$q(t,t',y,\xi,\eta,\lambda) = \lambda^{-\mu}p\left(\frac{t}{\lambda},\frac{t'}{\lambda},y,\lambda\xi,\lambda\eta\right) - p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta)$$

удовлетворяет условиям Предложения 7 для $x = (t,t')$. Следовательно

$$||\mathrm{op}(q)||_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}_+),H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+))} \le c \sum_{|\alpha|+\beta\le N} c_{\alpha,\beta}(q),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}^2$. Так как

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_{\alpha,\beta}(q) = \lim_{\lambda\to\infty} \left\{ c_{\alpha,\beta} \left(p_{(\mu)} \left(\frac{t}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda}, y, \xi, \eta \right) - p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta) \right) \right\},$$

то из разложения

$$p_{(\mu)} \left(\frac{t}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda}, y, \xi, \eta) - p_{(\mu)}(0,0,y,\xi,\eta) \right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ p'_{(\mu)s} \left(s, \frac{t'}{\lambda}, y, \xi, \eta \right) \Big|_{s=\theta \frac{t}{\lambda}} + p'_{(\mu)s'}(0, s', y, \xi, \eta) \Big|_{s'=\theta' \frac{t'}{\lambda}} \right\},$$

где $\theta. \theta' \in (0,1)$, вытекает $\lim\limits_{\lambda\to\infty} c_{\alpha,\beta}(q) = 0$ для любых $\alpha \in \mathcal{N}^2$, $\beta \in \mathcal{N}$.
Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$\Bigg\| \omega_1(t|\eta|) \mathrm{op}_M^\gamma \left\{ \tilde{h} \left(\frac{t}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda}, y, z, t\eta \right) - \right.$$
$$\left. - \ \tilde{h}(0,0,y,z,t\eta) \right\} \omega_0(t|\eta|) \Bigg\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{H}^{s-\mu,\gamma-\mu}(\mathbb{R}_+))} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Предложение 8 доказано.

Задавая $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$, мы определяем поточечное формальное сопряжение $\mathbf{a}^*(y,\eta)$ по формуле

$$(\mathbf{a}(y,\eta)u, v)_{E_+^{0,0}} = (u, \mathbf{a}^*(y,\eta)v)_{E_-^{0,0}}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbf{C}^{N_-}, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbf{C}^{N_+}.$$

Аналогично мы определяем формальное сопряжение $\sigma_\wedge(\mathbf{a})^*$ к $\sigma_\wedge(\mathbf{a})$.

Теорема 3. *Из* $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *вытекает* $\mathbf{a}^*(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_+, N_-)$ *и* $\sigma(\mathbf{a}^*) = \sigma(\mathbf{a})^*$, *где* $*$ *справа обозначает покомпонентное сопряжение с* $\sigma_\psi(\mathbf{a})^*(t,y,\tau,\eta) = \overline{\sigma_\psi(\mathbf{a})(t,y,\tau,\eta)}$.

Теорема 4. *Пусть* $(\mathbf{ab})(y,\eta)$ *– поточечная композиция для* $\mathbf{a}(y,\eta)$ *и* $\mathbf{b}(y,\eta)$. *Тогда из* $\mathbf{a}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_0, N_+)$ *и* $\mathbf{b}(y,\eta) \in \mathcal{R}^\nu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_0)$ *следует, что* $(\mathbf{ab})(y,\eta) \in \mathcal{R}^{\mu+\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q; N_-, N_+)$ *и* $\sigma(\mathbf{ab}) = \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b})$ *с покомпонентной композицией.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно предполагать, что $N_- = N_0 = N_+ = 1$. Положим

$$\mathbf{a}(y,\eta) = \begin{pmatrix} a + g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}(y,\eta), \quad \mathbf{b}(y,\eta) = \begin{pmatrix} b + f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}(y,\eta),$$

где $g(y,\eta) = (g_{ij}(y,\eta))_{i,j=1,2}$ и $f(y,\eta) = (f_{ij}(y,\eta))_{i,j=1,2}$ суть плоские символы Грина порядков μ и ν, соответственно, а $a(y,\eta) \in R^\mu_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$ и $b(y,\eta) \in$

$R^{\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Для доказательства нашего утверждения достаточно установить следующие свойства :

(i) $ab \in R^{\mu+\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, (ii) $af_{11}, g_{11}b \in R^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$,

(iii) $af_{12} \in R^{\mu+\nu}_{P,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$, (iv) $g_{21}b \in R^{\mu+\nu}_{T,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$.

Свойство (i) является следствием Теоремы 2 и Предложений 5 и 6. Для доказательства соотношения (ii) рассмотрим, например, af_{11} (структура $g_{11}b$ аналогична). Согласно Предложению 1 достаточно показать, что

$$g_1(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h)(y,\eta)\omega_0(t[\eta])f_{11}(y,\eta) \in R^{\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q), \tag{14}$$

$$g_2(y,\eta) = (1-\omega_1(t[\eta])\mathrm{op}(p)(y,\eta)(1-\omega_2(t[\eta]))f_{11}(y,\eta) \in R^{\mu+\nu}_{G,\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q). \tag{15}$$

Покажем, например, (14). Так как доказательство (15) аналогично, оно опускается. Используя разложение Тейлора для $\tilde{h}(t,t',y,z,\tilde{\eta})$ по переменным t и t' в точке нуль, получаем

$$\tilde{h}(t,t',y,z,\eta) = \sum_{i+j\le N} t^i t'^j \tilde{h}_{ij}(y,z,\eta) + \sum_{i+j=N} t^i t'^j \tilde{\tilde{h}}_{ij}(t,t',y,z,\eta),$$

где $\tilde{h}_{ij}(y,z,\eta) \in C^{\infty}(\Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q))$, $\tilde{\tilde{h}}(t,t',y,z,\eta) \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, M^{\mu}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^q))$. Тогда

$$\omega_1(t[\eta])\mathrm{op}^{\gamma}_M(h(t,t',y,z,\eta))\omega_0(t[\eta]) = \sum_{i+j\le N} m_{ij}(y,\eta) + \sum_{i+j=N} \tilde{m}_{ij}(y,\eta),$$

где $m_{ij}(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^i\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{h}_{ij}(y,z,t\eta))t'^j\omega_0(t[\eta])$ и

$$\tilde{m}_{ij}(y,\eta) = \omega_1(t[\eta])t^i\mathrm{op}^{\gamma}_M(\tilde{\tilde{h}}_{ij}(t,t',y,z,t\eta))t'^j\omega_0(t[\eta]).$$

Из Замечания 1 и Предложения 1 вытекает

$$m_{ij}(y,\eta)f_{11}(y,\eta) \in S^{\nu-(i+j)}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+)).$$

Используя метод, аналогичный применённому при доказательстве Предложения 2, получаем $\tilde{m}_{ij}(y,\eta)f_{11}(y,\eta) \in S^{\nu-N}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$ для всех $i,j \in \mathcal{N}$ с $i+j=N$. Это даёт $g_1(y,\eta) \in S^{\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathcal{K}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+), \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$. Аналогичные конструкции для формальных сопряжений дают $g_1(y,\eta) \in R^{\nu}_{\mathcal{O}}(\Omega \times \mathbb{R}^q)$. Доказательство соотношения (iii) проводится аналогично. В действительности, используя $f_{12}(y,\eta) \in S^{\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathbf{C}, \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$ вместо $f_{11}(y,\eta)$ в (14) и (15), а также разложение Тейлора, легко получаем, что $a(y,\eta)f_{12}(y,\eta) \in S^{\mu+\nu}_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^q; \mathbf{C}, \mathcal{S}_{\mathcal{O}}(\mathbb{R}_+))$

и т.д. Для доказательства (iv) продолжать рассуждения в аналогичной манере, рассматривая формальное сопряжение.

Abstract. In boundary value problems for pseudo-differential operators of crucial importance are the flat elements. The paper demonstrates the algebra property and compatibility with the underlying principal symbolic structure. The main result is based on a new characterization of edge symbols.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Boutet de Monvel, "Boundary problems for pseudo-differential operators", Acta Math. vol. 126, pp. 11 – 51, 1971.
2. G. I. Eskin, Boundary Value Problems for Elliptic Pseudo-differential Equations, Math. Monographs, vol. 52, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1980.
3. Ch. Dorschfeldt, Algebras of Pseudo-differential Operators Near Edge and Corner Singularities, Math. Research, vol. 102, Akademie Verlag, Berlin, 1998.
4. J. B. Gil, B.–W. Schulze, J. Seiler, "Cone pseudodifferential operators in the edge symbolic calculus", Preprint MPI 98–26, Max-Planck Institut Bonn, Osaka, J. Math. vol. 37, pp. 219 – 258, 2000.
5. E. Schrohe, B.–W. Schulze, "Boundary value problems in Boutet de Monvel's calculus for manifolds with conical singularities I", In Advances in Partial Differential Equations (Pseudo-Differential Calculus and Mathematical Physics), pp. 97 – 209, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
6. B.–W. Schulze, "Mellin representations of pseudo-differential operators on manifolds with corners", Ann. Glob. Anal. Geometry, vol. 8, no. 3, pp. 261 – 297, 1990.
7. B.–W. Schulze, Pseudo-Differential Operators on Manifolds with Singularities, North-Holland, Amsterdam, 1991.
8. B.–W. Schulze, Pseudo-Differential Boundary Value Problems, Conical Singularities and Asymptotics, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
9. B.–W. Schulze, Boundary Value Problems and Singular Pseudo-Differential Operators, J. Wiley, Chichester, 1998.
10. M. Taylor, Pseudo-Differential Operators, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.
11. I. Witt, "Explicit algebras with the Leibniz-Mellin translation product", Preprint 99/2, Institut for Mathematics, Potsdam, 1999.

Поступила 14 февраля 2002

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 4, 2002, 31–44

КЛАССЫ ПОДПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Э. А. Мирзаханян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассмотрена задача построения бесконечномерной алгебраической топологии вещественного гильбертова пространства H, введены понятия K_0 и K–отображений и выявлены некоторые свойства и применения этих отображений. Указываются некоторые классы подмножеств пространства H, на которых K_0 и K–отображения обладают терминальными производными.

ВВЕДЕНИЕ

В задаче построения бесконечномерной алгебраической топологии вещественного гильбертова пространства H существенную роль играют допустимые отображения, принадлежащие специальным классам K_0 и K ($K_0 \subset K$), которые кратко называются K_0 и K–отображениями [1] – [7]. В случае, когда областью определения K–отображения f является открытое в H подмножество, каждая действительная непрерывная функция $\lambda_f(x)$, называемая **терминальной производной отображения** f может быть ассоциирована с f.

В данной работе (§§2, 3) описываются классы неоткрытых подмножеств пространства H, на которых K_0 и K–отображения обладают терминальными производными, и приводятся некоторые новые свойства этих отображений. Важными примерами таких подмножеств являются гильбертовы гладкие многообразия, в частности, гильбертовы шары и сферы. Частные случаи K_0–гладких многообразий и K_0–гладких отображений представляют интерес.

Основными результатами данной работы являются Теоремы 1, 2 и Лемма 2. В случае, когда множество M является K_0–гладким многообразием, а $f : M \longmapsto H$ является K_0–гладким отображением, Теорема 2 открывает путь для построения топологической степени K_0–гладкого отображения, как это делается в классической теории конечномерных гладких многообразий.

§1. ДОПУСТИМЫЕ КЛАССЫ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, а G – произвольное открытое подмножество пространства H.

Определение 1. *Будем говорить, что непрерывное отображение $f : G \longmapsto H$ принадлежит классу K (относительно H) или является K–отображением, если выполнено следующее условие :*
(K) для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство $L \subset H$ и действительное число λ такие, что из ортогональности L и $x - y$ для любых точек $x, y \in U$ вытекает

$$||f(x) - f(y) - \lambda(x - y)|| \leq \varepsilon ||x - y||. \tag{1}$$

Определение 2. *Будем говорить, что непрерывное отображение $f : G \longmapsto H$ принадлежит классу K_0 (относительно H) или является K_0–отображением, если выполнено следующее условие :*

(K_0) для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство $L \subset H$ и числа λ и δ такие, что выполнено (1), если точки $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$.

Отметим, что всякое K_0–отображение является K–отображением и локально удовлетворяет условию Липшица, т.е. для каждой точки $x_0 \in G$ существуют числа $r = r(x_0) > 0$ и $c = c(x_0) > 0$ такие, что для любых $x, y \in G$ имеем

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||,$$

как только $||x - x_0|| < r$ и $||y - x_0|| < r$. Обратно, K–отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица, является K_0–отображением (см. [1] – [5]). Важным характеризующим свойством K_0– и K–отображений является тот факт, что фигурирующее в условиях (K_0) и (K) число λ можно выбрать так, чтобы оно зависело бы лишь от точки x_0, но не от числа ε. На основе этого свойства строится единственная, непрерывная действительнозначная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, $x \in G$, которая называется **терминальной производной** отображения $f : G \longmapsto H$ (см. [1]). Композиция двух K_0–отображений $g_2 \circ g_1$ $g_1 : G_1 \longmapsto G_2$ и $g_2 : G_2 \longmapsto H$ есть K_0–отображение и

$$\lambda_{g_2 \circ g_1}(x) = \lambda_{g_1}(x) \cdot \lambda_{g_2}(g_1(x)), \quad x \in G_1.$$

Вообще говоря, композиция двух K–отображений не всегда есть K–отображение.

Пусть теперь M является произвольным подмножеством из H. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : M \longmapsto H$ является **K-отображение (соответственно K_0-отображением)**, если существует открытое множество G в H, содержащее M и K-отображение (соответственно K_0-отображение) $g : G \longmapsto H$ такое, что $f(x) = g(x)$ для любого $x \in M$. Отображение g называется **K- (соответственно K_0-) продолжением** отображения f.

Пусть теперь M и N - произвольные подмножества пространства H. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : M \longmapsto N$ является **K-отображением (соответственно K_0-отображение)**, если композиция $i \circ f : M \longmapsto H$ является K-отображением (соответственно K_0-отображением), где $i : N \longmapsto H$ является вложением. Наконец, гомеоморфизм $f : M \simeq N$ назовём **K_0-гомеоморфизмом**, если оба отображения f и f^{-1} суть K_0-отображения. Аналогично определяется K-гомеоморфизм.

§2. МНОЖЕСТВА, ДОПУСКАЮЩИЕ ТЕРМИНАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть M - произвольное подмножество из H.

Определение 3. *Будем говорить, что K-отображение $f : M \longmapsto H$ обладает* **терминальной производной**, *если ограничения на M терминальных производных $\lambda_g(x)$ всех K-продолжений $g : G \longmapsto H$ отображения f ссовпадают между собой. Вещественную непрерывную функцию $\lambda_g(x)|M$ заданную на M, назовём терминальной производной отображения f и обозначим через $\lambda_f(x)$.*

Представляют интерес такие подмножества $M \subset H$, для которых всякое K-отображение $f : M \longmapsto H$ обладает терминальной производной.

Предложение 1. *Подчиним M из H условиям :*

a) для каждой точки $x_0 \in M$, каждой окрестности $U \subset M$ точки x_0 и для каждого конечномерного линейного подпространства $L \subset H$, существует пара различных точек $x, y \in U$ таких, что $x - y \perp L$,

b) каждое K-отображение $f : M \longmapsto H$ обладает терминальной производной,

c) если K-отображения $g_i : G_i \longmapsto H$, $i = 1, 2$ совпадают на M, то их терминальные производные $\lambda_{g_1}(x)$ и $\lambda_{g_2}(x)$ также совпадают на M.

Тогда имеют место импликации $a) \Longrightarrow c) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c)$.

Доказательство. Для доказательства импликации $a) \Longrightarrow c)$ предположим противное, т.е. $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$ для некоторого $x_0 \in M$, где $\lambda_i(x) = \lambda_{g_i}(x)$, $i = 1, 2$. Положим $\varepsilon = |\lambda_1(x_0) - \lambda_2(x_0)|/3$. По определению K-отображений, существуют окрестности $U_i \subset G_i$ точки x_0 и конечномерные подпространства $L_i \subset H$ такие, что из $x - y \perp L_i$ для $x, y \in U_i$, $i = 1, 2$ вытекает

$$||g_i(x) - g_i(y) - \lambda_i(x_0)(x - y)|| \leq \varepsilon||x - y||, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Пусть L_0 – конечномерное подпространство из H, содержащее L_1 и L_2. Согласно условию а) существует пара различных точек $x, y \in M \cap U_1 \cap U_2$ таких, что $x - y \perp L_0$. Используя (2), получаем

$$|\lambda_1(x_0) - \lambda_2(x_0)| \cdot ||x - y|| = ||[\lambda_1(x_0) - \lambda_2(x_0)](x - y)|| =$$
$$= ||[g(x) - g(y) - \lambda_2(x_0)(x - y)] - [g(x) - g(y) - \lambda_1(x_0)(x - y)]|| \leq$$
$$\leq ||g(x) - g(y) - \lambda_2(x_0)(x - y)|| + ||g(x) - g(y) - \lambda_1(x_0)(x - y)|| \leq 2\varepsilon||x - y||,$$

где $g = g_1|_M = g_2|_M$. Отсюда следует, что $3\varepsilon||x - y|| \leq 2\varepsilon||x - y||$. Полученное противоречие доказывает импликацию $a) \Longrightarrow c)$. Равносильность $b) \Longleftrightarrow c)$ очевидна. Предложение 1 доказано.

Замечание 1. Если $M \subset H$ удовлетворяет условию а), то и его замыкание $\overline{M}$ принадлежит H, и любое открытое подмножество $U \subset M$ также удовлетворяет условию а). Наконец, объединение любого семейства подмножеств из H, удовлетворяющих условию а), также удовлетворяют ему. В частности, если M удовлетворяет условию а), то таким же является и $M \times [0, 1]$.

Определение 4. *Множество $M \subset H$, удовлетворяющее условию а) Предложения 1, называется множеством, допускающим терминальные производные.*

Лемма 1. *Пусть $M \subset H$ – множество, допускающее терминальные производные, и $f : M \longmapsto H$ есть K–отображение. Тогда для любой точки $x_0 \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют открытая в M окрестность $V \subset M$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что если точки $x, y \in V$ таковы, что $(x - y) \perp L$, то*

$$||f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)|| \leq \varepsilon||x - y||. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое K–продолжение $g : G \longmapsto H$ отображения f. По определению K–отображений, существуют открытая в G окрестность $U \subset G$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что из ортогональности L и $x - y$ для некоторых точек $x, y \in U$ следует (3) для g. Положим $V = M \cap U$. По Определению 4, существует пара различных точек $x, y \in V$ таких, что $(x - y) \perp L$. Следовательно

$$||f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)|| = ||g(x) - g(y) - \lambda_g(x_0)(x - y)|| \leq \varepsilon||x - y||.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $M \subset H$ – множество, допускающее терминальные производные (в частности, M может быть открытым множеством в H), $f : M \longmapsto H$ – K-отображение и $X \subset M$ – компактное подмножество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое в M подмножество $U \supset X$ и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что если точки $x, y \in U$ таковы, что $(x - y) \perp L$, то*

$$||f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x - y)|| \leq \varepsilon||x - y||. \tag{4}$$

Доказательство. По Лемме 1, для каждой точки $x_0 \in M$ существуют окрестность $V(x_0)$ в M точки x_0 и конечномерное подпространство $L(x_0) \subset H$, что если для $x, y \in V(x_0)$ имеем $(x - y) \perp L(x_0)$, то справедливо (3) с $\varepsilon/2$ вместо ε. По непрерывности функции $\lambda_f(x)$, существует окрестность $W(x_0)$ в M точки x_0 такая, что

$$|\lambda_f(x) - \lambda_f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in W(x_0). \tag{5}$$

Пусть число $\delta(x_0) > 0$ таково, что $2\delta(x_0)$-окрестность точки x_0 содержится в $V(x_0) \cap W(x_0)$. Обозначим через $U(x_0)$ $\delta(x_0)$–окрестность точки x_0. Так как X – компактно, а семейство $\{U(x)\}_{x \in X}$ является открытым покрытием X, то существует конечное множество точек $x_1, ..., x_n$ из X такое, что

$$X \subset M_0 = \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k).$$

Выберем $r > 0$ так, чтобы r–окрестность U в M множества X содержалась бы в M_0 и выполнялось неравенство $5r < \delta = \min\{\delta(x_1), ..., \delta(x_n)\}$. Так как X компактно, то существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$, что X содержится в r–окрестности (относительно H) подпространства L. При этом мы можем предположить, что L содержит все подпространства $L(x_1), ..., L(x_n)$. Теперь покажем, что U и L удовлетворяют Лемме 2. По Определению 4, существуют такие различные точки $x, y \in U$, что $(x - y) \perp L$. Обозначим через p ортопроектор H на ортогональное дополнение $L^\perp$ подпространства L. Имеем $||p(x)|| < 2r$ и $||p(y)|| < 2r$. Следовательно

$$||x - y|| = ||p(x) - p(y)|| \leq ||p(x)|| + ||p(y)|| < 4r.$$

Пусть $x' \in X$ – такая точка, что $||x - x'|| < r$, k – такой индекс $1 \leq k \leq n$, что $x' \in U(x_k)$. Имеем $||x' - x_k|| < \delta(x_k)$. Следовательно

$$||x - x_k|| \leq ||x - x'|| + ||x' - x_k|| < r + \delta(x_k) < \delta + \delta(x_k) < 2\delta(x_k).$$

Аналогично

$$||y - x_k|| \le ||y - x|| + ||x - x'|| + ||x' - x_k|| < 4r + r + \delta(x_k) < \delta + \delta(x_k) < 2\delta(x_k).$$

Таким образом, обе точки x и y принадлежат $2\delta(x_k)$-окрестности точки x_k, и, стало быть, принадлежат множеству $V(x_k) \cap W(x_k)$. Используя (3) и (5), получаем

$$||f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x-y)|| \le ||f(x) - f(y) - \lambda_f(x_k)(x-y)|| +$$

$$+||(\lambda_f(x) - \lambda_f(x_k))(x-y)|| \le \frac{\varepsilon}{2}||x-y|| + |\lambda_f(x) - \lambda_f(x_k)| \cdot ||x-y|| \le \varepsilon||x-y||.$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть $M \subset H$ – множество, допускающее терминальные производные, $f : M \longmapsto H$ – K–отображение, а $X \subset M$ – компактное подмножество такое, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f всюду отлична от нуля на X. Тогда существует конечномерное подпространство $L \subset H$ такое, что*

1) если f на X постоянно, то ортопроектор $p : H \longmapsto L$ инъективен на X, и поэтому $dim\ X < \infty$;

2) для каждой точки $x_0 \in X$ ограничение f на подмножества $X \cap H_{x_0}$ является гомеоморфизмом, где $H_x = x + L^{\perp}$.

Доказательство. Докажем 1). Так как функция $\lambda_f(x)$ непрерывна на M и всюду отлична от нуля на X, то существует такое положительное число μ, что $|\lambda_f(x)| > \mu$ для $x \in X$. Пусть $0 < \varepsilon < \mu$. Согласно Лемме 2, существуют открытое в M подмножество $U \supset X$ и конечномерное подпространство $L \subset H$ такие, что выполнено соотношение (4), если $x, y \in U$ различные точки и $x - y \perp L$. Покажем, что ограничение ортопроектора $p : H \longmapsto L$ на X инъективно. Пусть $x, y \in X$ – различные точки, однако $p(x) = p(y)$. Имеем $p(x - y) = 0$, и поэтому $x - y \perp L$. В силу (4) имеем

$$|\lambda_f(x)| \cdot ||x-y|| \le \varepsilon||x-y||. \tag{6}$$

Следовательно, $|\lambda_f(x)| \le \varepsilon$, что противоречит предположению $|\lambda_f(x)| > \mu > \varepsilon$. Так как X компакт, и L – хаусдорфово пространство, то непрерывный и инъективный ортопроектор p является гомеоморфизмом X на $p(X)$.

Теперь докажем 2). Пусть μ, ε и L – те же, что и в доказательстве пункта 1). Пусть $x, y \subset X \cap H_{x_0}$ – различные точки. Покажем, что $f(x) \neq f(y)$. Действительно, так как $x - y \perp L$, то соотношение (4) выполнено. Предполагая,

что $f(x) = f(y)$, получим (6). Следовательно, $|\lambda_f(x)| \leq \varepsilon$, что противоречит предположению $|\lambda_f(x)| > \mu > \varepsilon$.
Итак, отображение f является непрерывным и инъективным на $X \cap H_{x_0}$. Так как $X \cap H_{x_0}$ замкнуто в компакте X, и H хаусдорфово, то отображение f будет гомеоморфизмом на $X \cap H_{x_0}$. Теорема 1 доказана.

Лемма 3. *Пусть G – открытое множество в H, $f : G \longmapsto H$ – K-отображение и x_0 такая, что $\lambda_f(x_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность конечного дефекта $V \subset G$ точки x_0 такая, что f является гомеоморфизмом на V, и поэтому, существует окрестность $U \supset V$ точки x_0 такая, что $f(U)$ бесконечномерно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon < |\lambda_f(x_0)|$. Тогда существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L \subset H$, что если $x, y \in U$, $x \neq y$ и $(x - y) \perp L$, то справедливо соотношение (4). Следовательно

$$||f(x)-f(y)|| \leq ||f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)||+|\lambda_f(x)|\cdot||x-y|| \leq [|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon]\cdot||x-y||.$$

С другой стороны, $||\lambda_f(x_0)(x - y)|| \leq$

$$\leq ||f(x) - f(y)|| + ||f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)|| \leq ||f(x) - f(y)|| + \varepsilon||x - y||.$$

Поэтому имеем

$$||f(x) - f(y)|| \geq [|\lambda_f(x_0)| - \varepsilon] \cdot ||x - y||.$$

Следовательно, получаем

$$[|\lambda_f(x_0)| - \varepsilon] \cdot ||x - y|| \leq ||f(x) - f(y)|| \leq [|\lambda_f(x_0)| + \varepsilon] \cdot ||x - y||. \qquad (7)$$

Пусть $H_{x_0} = x_0 + L^{\perp}$ и $V = U \cap H_{x_0}$. Для $x, y \in V$, $x \neq y$ удовлетворяющей условию $(x - y) \perp L$, справедливо неравенство (7). Поэтому нетрудно проверить, что f гомеоморфно отображает V на $f(V)$. Таким образом, $f(U)$ бесконечномерно (содержит бесконечномерное множество $f(V)$). Лемма 3 доказана.

Теорема 2. *Пусть G – открытое множество в H, X – локально компактное подмножество из H и $f : G \longmapsto H$ – замкнутое K-отображение. Пусть, далее, для точки $x_0 \in G$, существует окрестность $U_0 \subset G$ точки x_0 такая, что $f(U_0) \in X$. Тогда $\lambda_f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда X компактно. Предполагая, что $\lambda_f(x_0) \neq 0$ и повторяя аргументы доказательства Леммы 3, получаем (7). Полагая $V = U \cap U_0$, получим окрестность $V \subset G$ точки x_0, причём имеет место (7), если $x, y \in V$, $x \neq y$ и $x - y \perp L$. Положим $W = V \cap H_{x_0}$, где

$H_{x_0} = x_0 + L^{\perp}$ и $L^{\perp}$ является ортогональным дополнением подпространства L, фигурирующего в доказательстве Леммы 3. Ясно, что W есть окрестность точки x_0 относительно гиперплоскости H_{x_0} конечного дефекта. Для точек $x, y \in W$, $x \neq y$ и $(x - y) \perp L$ справедливы неравенства (7). Поэтому легко проверить, что f гомеоморфно отображает W на $f(W)$. Рассмотрим замкнутый шар $B_r(x_0)$ конечного дефекта относительно H с центром в точке x_0 и радиусом r таким, что $B_r(x_0) \subset W$. Поскольку f – замкнутое отображение и $B_r(x_0)$ замкнуто в G, то множество $f(B_r(x_0))$ замкнуто в X, и поэтому компактно. С другой стороны, поскольку f есть гомеоморфизм $B_r(x_0)$ на $f(B_r(x_0))$, то шар $B_r(x_0)$ также будет компактным. Это противоречие завершает доказательство в случае компактного X.

Пусть теперь X локально компактное множество. Пусть W' - окрестность в X точки $y_0 = f(x_0)$ такая, что $\overline{W'}$ компактно, и пусть V' – окрестность в G точки x_0 такая, что $f(V') \subset \overline{W'}$. Поскольку $f(U_0 \cap V') \subset \overline{W'}$, то из компактности и Леммы 2, получаем $\lambda_f(x_0) = 0$. Теорема 2 доказана.

Предложение 2. *Пусть $M \subset H$ - множество, допускающее терминальные производные, а X – произвольное подмножество конечномерного линейного подпространства $L \subset H$. Если $f : M \longmapsto H$ есть K–отображение и $x_0 \in M$ - точка, обладающая окрестностью U в M, для которой $f(U) \subset X$, то $\lambda_f(x_0) = 0$. В частности, если $f(M) \subset X$, то $\lambda_f(x_0) = 0$ на M.*

Доказательство. Пусть $g : G \longmapsto H$ – K–продолжение f и $p : H \longmapsto L$ – ортопроектор. Тогда $g' = p \circ g : G \longmapsto L$ также будет K–продолжением f. По Лемме 3 $\lambda_{g'}(x) \equiv 0$ на G. С другой стороны, так как U открыто в M, то по Замечанию 1, оно является множеством, допускающим терминальные производные. Далее, так как g' является K–продолжением отображения $f_0 = f|_U$, то $\lambda_f(x_0) = \lambda_{f_0}(x_0) = \lambda_{g'}(x_0) = 0$. Предложение 2 доказано.

Замечание 2. Если для каждой точки $x_0 \in M \subset H$ любая её окрестность $U \subset M$ бесконечномерна, то M является множеством, допускающим терминальные производные.

Примеры. Следующие множества являются примерами множеств, допускающих терминальные производные :

1. Бесконечномерные линейные подпространства $M \subset H$, открытые и канонически замкнутые в M множества, в частности, бесконечномерные открытые и замкнутые шары.

2. Множества M, для каждой точки $x_0 \in M$ которого существует окрестность в M точки x_0, гомеоморфная открытому множеству бесконечномерного линейного подпространства из H. В частности, гильбертовы многообразия, моделями которых служат бесконечномерные линейные подпространства из H.

3. Гильбертов куб Q и Q-многообразия, т.е. такие подмножества $M \subset H$, для которых каждая точка $x_0 \in M$ обладает окрестностью в M, гомеоморфной открытому подмножеству из Q.

Определение 5. *Пусть M – произвольное подмножество H. Будем говорить, что K_0–отображение $f : M \longmapsto H$ обладает K_0–* **терминальной производной**, *если терминальные производные $\lambda_g(x)$ всех K_0–продолжений $g : G \longmapsto H$ отображения f совпадают на M. Вещественную непрерывную функцию $\lambda_g(x)|_M$ назовём K_0–терминальной производной отображения f и обозначим через $\lambda_f^0(x)$.* Отметим, что если множество M допускает терминальные производные, то для K_0–отображений $f : M \longmapsto H$ терминальные производные $\lambda_f(x)$ и $\lambda_f^0(x)$ совпадают.

Предложение 3. *Пусть M – подмножество H. Свойства*

a') для каждой точки $x_0 \in M$, каждой её окрестности U в M, каждого подпространства $L \subset H$ и каждого числа $\delta \in (0, \pi/2)$, существует пара различных точек $x, y \in U$ таких, что угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$,

b') каждое K_0–отображение $f : M \longmapsto H$ обладает K_0–терминальной производной,

c') если два K_0–отображения $g_i : G_i \longmapsto H$, $i = 1, 2$ совпадают на M, то их K_0–терминальные производные также совпадают на M,
допускают следующую импликационную структуру : a') $\Longrightarrow$ c') $\Longrightarrow$ b') $\Longrightarrow$ c').

Доказательство. Для доказательства импликации a') $\Longrightarrow$ c') предположим обратное, т.е. $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in M$, где $\lambda_i(x) = \lambda_{g_i}^0(x)$, $i = 1, 2$. Положим $\varepsilon = |\lambda_1(x_0) - \lambda_2(x_0)|/3$. По Определению 2 существуют окрестности $U_i \subset G_i$ точки x_0, конечномерные подпространства $L_i \subset H$ и числа $\delta_i \in (0, \pi/2)$ такие, что если $x, y \in U_i$, $x \neq y$ и угол между L_i и $x - y$ не меньше $\pi/2 - \delta_i$, $i = 1, 2$, то

$$||g_i(x) - g_i(y) - \lambda_i(x_0)(x - y)|| \leq \varepsilon ||x - y||, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и L – конечномерное подпространство H, содержащее L_1 и L_2. Согласно a') существует пара различных точек $x, y \in M \cap U_1 \cap U_2$ таких, что угол между L и $x-y$ не меньше $\pi/2-\delta$. Имеем

$$|\lambda_1(x_0)-\lambda_2(x_0)|\cdot||x-y|| = ||[\lambda_1(x_0)-\lambda_2(x_0)](x-y)|| \leq$$

$$\leq ||g_1(x)-g_1(y)-\lambda_1(x_0)(x-y)||+||g_2(x)-g_2(y)-\lambda_2(x_0)(x-y)|| \leq 2\varepsilon||x-y||.$$

Отсюда получаем $3\varepsilon||x-y|| \leq 2\varepsilon||x-y||$. Противоречие доказывает импликацию $a') \Longrightarrow c')$. Равносильность условий $b')$ и $c')$ легко проверить. Предложение 3 доказано.

Замечание 3. Факты, указанные в Замечании 1, остаются в силе для множеств $M \subset H$, удовлетворяющих условию $a')$.

Определение 6. *Множество $M \subset H$, удовлетворяющее условию $a')$ Предложения 3, называется множеством, допускающим K_0–терминальные производные.*

Леммы 1 и 2, Теорема 1 и Предложение 2 остаются в силе, если множество M, допускающее терминальные производные, K–отображение и функцию $\lambda_f(x)$, заменить множеством, допускающим K_0–терминальные производные, K_0–отображением и функцией $\lambda_f^0(x)$ соответственно. В частности, имеет место следующий результат.

Предложение 4. *Пусть $M \subset H$ – множество, допускающее K_0–терминальные производные, $f : M \longmapsto H$ – K_0–отображение и $X \subset M$ – компактное подмножество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое в M подмножество $U \supset X$, конечномерное подпространство $L \subset H$ и число $\delta \in (0, \pi/2)$ такие, что если $x, y \in U$, $x \neq y$ и угол между L и вектором $x-y$ не меньше $\pi/2-\delta$, то*

$$||f(x)-f(y)-\lambda_f^0(x)(x-y)|| \leq \varepsilon||x-y||.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое K_0–продолжение $g : G \longmapsto H$ of f. Тогда (см. [1], [5]), существуют открытое в G подмножество $V \supset X$, конечномерное подпространство $L \subset H$ и число $\delta > 0$ такие, что если $x, y \in V$, $x \neq y$ и угол между L и вектором $x-y$ не меньше $\pi/2-\delta$, то

$$||g(x)-g(y)-\lambda_g(x)(x-y)|| \leq \varepsilon||x-y||. \tag{8}$$

Положим $U = M \cap V$, тогда $U \supset X$. Если $x, y \in U$, $x \neq y$ и угол между L и вектором $x-y$ не меньше $\pi/2-\delta$, то имеет место (8). Следовательно

$$||f(x)-f(y)-\lambda_f^0(x)(x-y)|| = ||g(x)-g(y)-\lambda_g(x)(x-y)|| \leq \varepsilon||x-y||.$$

Предложение 4 доказано.

§3. МНОЖЕСТВА, ОБЛАДАЮЩИЕ ТЕРМИНАЛЬНОЙ И K_0–ТЕРМИНАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНЫМИ

Определение 7. *Множество $M \subset H$, удовлетворяющее условию c) Предложения 1 (соответственно, условию c') Предложения 3), называется множеством, обладающим терминальными (соответственно, K_0–терминальными) производными.*
Легко проверить, что если множество $M \subset H$ содержит всюду плотное подмножество M_0 (в частности, если $M = \overline{M_0}$), удовлетворяющее условию c) (соответственно, условию c')), то M также удовлетворяет условию c) (соответственно c')). Объединение любого семейства множеств, удовлетворяющих условию c) (соответственно c')) обладает тем же свойством и если M удовлетворяет c) (соответственно c')), то таким же будет $M \times [0,1]$. Отметим, что если M множество, допускающее терминальные производные, то условия c) и c') эквивалентны.

Предложение 5. *Пусть M_1 и M_2 – множества, обладающие K_0–терминальными производными, а $f_1 : M_1 \longmapsto M_2$ и $f_2 : M_2 \longmapsto H$ – K_0–отображения. Тогда*

$$\lambda^0_{f_2 \circ f_1}(x) = \lambda^0_{f_1}(x)\lambda^0_{f_2}(f_1(x)), \quad x \in M_1.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные K_0–продолжения $g_1 : G_1 \longmapsto H$ и $g_2 : G_2 \longmapsto H$ отображений $i \circ f_1$ и f_2, соответственно, где $i : M_2 \longmapsto H$ является вложением. Не умаляя общности можно считать, что $g_1(G_1) \subset G_2$ (в противном случае множество G_1 можно заменить на открытое в H множество $G_1' = g_1^{-1}(G_2)$, а отображение g_1 на $g_1|_{G_1'}$). Ясно, что отображение $g_2 \circ g_1 : G_1 \longmapsto H$ является K_0–продолжением K_0–отображения $f_2 \circ f_1$. Далее (см. §1), имеем

$$\lambda_{g_2 \circ g_1}(x) = \lambda_{g_1}(x)\lambda_{g_2}(g_1(x)), \quad x \in G_1.$$

Поэтому для $x \in M_1$ получим

$$\lambda^0_{f_2 \circ f_1}(x) = \lambda_{g_1}(x)\lambda_{g_2}(g_1(x)) = \lambda^0_{f_1}(x)\lambda^0_{f_2}(f_1(x)).$$

Предложение 5 доказано.

Предложение 6. *Пусть M – множество, обладающее K_0–терминальными производными, $f : M \longmapsto N$ – сюръективное K_0–отображение, K_0–терминальная производная $\lambda^0_f(x)$ которого тождественно не равна нулю на прообразе $f^{-1}(y)$ для каждой точки $y \in N$. Тогда N будет множеством, допускающим K_0–терминальную производную.*

Доказательство. Пусть $g_1 : G_1 \longmapsto H$ и $g_2 : G_2 \longmapsto H$ – K_0–отображения, совпадающие на N. Пусть $g : G \longmapsto H$ – некоторое K_0–продолжение отображения $i \circ f$, где i – вложение. Можно считать, что $g(G) \subset (G_1 \cap G_2)$, в противном случае можем g заменить на отображение $g_0 : G_0 \longmapsto H$, где $G_0 = g^{-1}(G_1 \cap G_2)$ и $g_0 = g|_{G_0}$. Отображения $g_1 \circ g$ и $g_2 \circ g$ суть K_0–продолжения отображений $g_1 \circ f$ и $g_2 \circ f$, соответственно. Имеем

$$\lambda_{g_1 \circ g}(x) = \lambda_g(x)\lambda_{g_1}(g(x)), \quad \lambda_{g_2 \circ g}(x) = \lambda_g(x)\lambda_{g_2}(g(x)), \quad x \in G_1. \tag{9}$$

Пусть $y_0 \in N$ и $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ такая точка, что $\lambda_f^0(x_0) \neq 0$. Поскольку M – множество, допускающее K_0–терминальную производную, имеем $\lambda_g^0(x_0) = \lambda_f^0(x_0) \neq 0$. Следовательно, из (9) вытекает

$$\lambda_{g_1 \circ g}(x_0) = \lambda_g(x_0)\lambda_{g_1}(g(x_0)) = \lambda_f^0(x_0)\lambda_{g_1}(y_0),$$

$$\lambda_{g_2 \circ g}(x_0) = \lambda_g(x_0)\lambda_{g_2}(g(x_0)) = \lambda_f^0(x_0)\lambda_{g_2}(y_0).$$

Поскольку $\lambda_{g_1 \circ g}(x_0) = \lambda_{g_2 \circ g}(x_0)$, то получаем

$$\lambda_f^0(x_0)\lambda_{g_1}(y_0) = \lambda_f^0(x_0)\lambda_{g_2}(y_0).$$

Отсюда следует $\lambda_{g_1}(y_0) = \lambda_{g_2}(y_0)$. Итак, N – множество, допускающее K_0–терминальную производную. Предложение 6 доказано.

Теорема 3. *Свойство множества обладать K_0–терминальной производной является K_0–топологическим инвариантом, т.е. если из двух K_0–гомеоморфных множеств одно допускает K_0–терминальную производную, то и другое будет таким же. Кроме того, если $f : M \simeq N$ является K_0–гомеоморфизмом, то*

$$\lambda_f^0(x) = \frac{1}{\lambda_{f^{-1}}^0(f(x))}, \quad x \in M. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $g_1 : G_1 \longmapsto H$ и $g_2 : G_2 \longmapsto H$ суть K_0–продолжения отображений f и f^{-1}, соответственно. Можно предположить, что $g_1(G_1) \subset G_2$ (см. доказательство Предложения 5). Отображение $g_2 \circ g_1$ является K_0–продолжением отображения $f^{-1} \circ f$. С другой стороны, так как M является множеством, допускающее K_0–терминальную производную, а $f^{-1} \circ f$ – вложение M в H, то будем иметь $\lambda_{f^{-1} \circ f}^0(x) = 1$ для $x \in M$. Далее

$$\lambda_{g_2 \circ g_1}(x) = \lambda_{g_1}(x)\lambda_{g_2}(g_1(x)), \quad x \in G_1.$$

Поэтому для всех $x \in M$ имеем

$$\lambda^0_{f^{-1}\circ f}(x) = \lambda_{g_2\circ g_1}(x) = \lambda^0_f(x)\lambda_{g_2}(f(x)) = 1.$$

Отсюда получаем, что $\lambda^0_f(x) = \lambda^0_f(f^{-1}(y)) \neq 0$ для каждой $y \in M$,. В силу Предложения 6, N есть множество, допускающее K_0–терминальную производную. Наконец, в силу Предложения 5 получим

$$\lambda^0_{f^{-1}\circ f}(x) = \lambda^0_f(x)\lambda^0_{f^{-1}}(f(x)) = 1, \quad x \in M.$$

Отсюда вытекает (10). Теорема 3 доказана.

Следующее утверждение следует из Предложений 5 и 6.

Предложение 7. *Пусть $M \subset H$ – множество, допускающее K_0–терминальную производную, а $f : M \longmapsto N$ – K_0–отображение, для которого существует K_0–отображение $g : N \longmapsto M$ такое, что $f \circ g = I_N$. Тогда N обладает K_0–терминальной производной тогда и только тогда, когда $\lambda^0_f(g(y)) \neq 0$ для каждой точки $y \in N$. В частности, если f – K_0–ретракт (см. [6]), то отображение $g : N \longmapsto M$ является вложением, и $\lambda^0_f(x) = 1$ для каждого $x \in M$.*

Abstract. The paper considers the problem of construction of infinite-dimensional algebraic topology in a real Hilbert space H, presents the notions of K_0 and K–mappings and some properties and applications of these mappings. Some classes of subsets of H, on which both the K_0 and K– mappings possess terminal derivatives are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский, "Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 9, № 2, стр. 107 – 120, 1974.
2. В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян, "Построение степени отображения в гильбертовом пространстве", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 9, № 5, стр. 374 – 386, 1974.
3. Э. А. Мирзаханян, "О свойствах одного класса отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм. ССР, серия Математика, том 15, № 5, стр. 349 – 356, 1980.
4. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства I", Уч. Зап. ЕГУ, № 3, стр. 21 – 28, 1990.

5. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства II", Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 3 – 10, 1991.
6. Э. А. Мирзаханян, "Модифицированные ретракты в гильбертовых пространствах", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 33, № 6, стр. 10 – 27, 1998.
7. Э. А. Мирзаханян, "О бесконечномерных аналогах некоторых классических теорем Борсука для гильбертовых пространств", Изв. Вузов, серия Математика, Казань, № 3, стр. 29 – 35, 1991.

Поступила 12 февраля 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 4, 2002, 45–62

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

К. А. Навасардян

Ереванский государственный университет,
e–mail : knavasard@ysu.am

Резюме. Насколько медленно могут стремиться к нулю коэффициенты универсальных рядов ? В работе доказано, что для любой последовательности положительных чисел a_n, монотонно стремящейся к нулю, существует универсальный относительно знаков ряд по системе Уолша (в классе почти везде конечных измеримых функций), коэффициенты которого по модулю больше чем a_n.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется **универсальным относительно знаков** в классе измеримых функций S, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность знаков $\gamma_n = \pm 1$, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится почти всюду к $F(x)$.

Ряд (1) называется **универсальным в S относительно подрядов**, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность γ_n, γ_n =0 или 1, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится почти всюду к $F(x)$. Ряд (1) называется **универсальным в S относительно перестановок**, если для любой $F(x) \in S$ члены ряда (1) можно переставить так, чтобы полученный ряд сходился бы к $F(x)$ почти всюду.

Первые примеры универсальных тригонометрических рядов были построены в работах [1] – [5]. Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно можно узнать из работ [6] и [7]. Отметим один результат, анонсированный Н. Б. Погосяном в [8].

Теорема А. *Пусть $\{\varepsilon_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ и $\{\varepsilon_n\} \notin l_2$. Тогда существует функция $f(x) \in \bigcap\limits_{p<2} L_p[0,2\pi]$ с коэффициентами Фурье*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \; |a_n| + |b_n| \le \varepsilon_n, \quad n \ge 0,$$

для которой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

в классе почти всюду конечных измеримых функций является универсальным одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов.

В работе [9] получен неполный аналог Теоремы А для кратных рядов Уолша, а в [10] доказан следующий результат.

Теорема В. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет следующим условиям : $a_n \downarrow 0$ для $n \to \infty$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 = \infty$. Тогда существует последовательность $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = \pm 1$ такая, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе почти везде конечных измеримых функций.*

Недавно Р. И. Овсепяном был получен следующий результат : *для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$, определённой на $[0,2\pi]$, существует тригонометрических ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, почти всюду сходящийся к $f(x)$, причём его коэффициенты удовлетворяют условию $\{a_n\} \notin \bigcup\limits_{p\ge 1} l^p$.* В этой связи Р. И. Овсепян задал следующий вопрос : *могут ли модули коэффициентов таких рядов находится над наперёд заданной минорантой ?* В настоящей статье даётся положительный ответ на этот вопрос для системы Уолша. Получен следующий результат.

Теорема. *Для любой последовательности $a_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ существует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ с коэффициентами $|b_n| \geq a_n$, который является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций.*

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним, что функции системы Радемахера $R_n(x)$ определяются по формулам

$$R_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0;1], \quad n = 1, 2, \dots .$$

Функции системы Уолша $W_n(x)$ выражаются через функции системы Радемахера следующим образом (см., например, [11], стр. 150) : $W_0(x) \equiv 1$ и

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^{p} R_{\nu_i+1}(x), \quad n = 2^{\nu_1} + \dots + 2^{\nu_p}, \quad \nu_1 > \dots > \nu_p.$$

Из определения системы Уолша следует, что если $k < 2^m$ и $n \geq m$, то

$$W_{2^n}(x) W_k(x) = W_{2^n+k}(x). \tag{2}$$

Известно также (см. [12]), что для любого натурального m

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k(x) = 0, \quad x > \frac{1}{2^m}, \tag{3}$$

а для любого M

$$\left| \sum_{k=0}^{M} W_k(x) \right| \leq \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, и пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ – её ряд Уолша. Обозначим через $S^*(f,x)$ мажоранту частичных сумм этого ряда, т.е.

$$S^*(f,x) = \sup_M \left| \sum_{k=0}^{M} b_k W_k(x) \right|.$$

Нижеследующий результат был получен в [13] (его можно доказать, используя метод работы [14]).

Лемма 1. *Для любого двоичного интервала* $I = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right]$, $0 \le i < 2^\sigma$ *и для любого натурального числа* $m > \sigma$, $m - \sigma$ *– чётное, существует многочлен по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k W_k(x)$$

такой, что

1) $|a_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}, 2^m \le k < 2^{m+1}$; 2) $P(x) = 1$, *если* $x \in E_1 \subset I, \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I$;

3) $P(x) = -1$, *если* $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I$; 4) $P(x) = 0$, *если* $x \notin I$;

5) $S^*(P, x) \le C$, *если* $x \in I$; 6) $S^*(P, x) \le 2^{-\frac{m-\sigma}{2}}$, *если* $x \notin I$,

где μ *– мера Лебега,* E_1 *и* E_2 *суть конечные объединения двоичных интервалов, а* C *– абсолютная постоянная.*

Лемма 2. *Для любого двоичного интервала* $I = \left[\frac{j}{2^\sigma}, \frac{j+1}{2^\sigma}\right]$, $0 \le j < 2^\sigma$ *и для любых натуральных чисел* m, n *и* i, *удовлетворяющих условиям* $m > \sigma$, $m - \sigma$ *– чётное,* $n > m$, $0 \le i < 2^{n-m}$, *существует многочлен по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^n+i2^m}^{2^n+(i+1)2^m-1} a_k W_k(x),$$

для которого выполняются условия 2) – 6) Леммы 1, а также

1′) $|a_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}$, $2^n + i2^m \le k < 2^n + (i+1)2^m$.

Доказательство следует из Леммы 1 и соотношения (2). Действительно, пусть многочлен

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k W_k(x) = W_{2^m}(x) \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{2^m+k} W_k(x) \tag{5}$$

удовлетворяет условиям Леммы 1. Тогда многочлен

$$P_1(x) = W_{2^n}(x) W_{i2^m}(x) \sum_{k=0}^{2^m-1} a_{2^m+k} W_k(x) \equiv \sum_{k=2^n+i2^m}^{2^n+(i+1)2^m-1} a_k W_k(x)$$

будет удовлетворять условиям Леммы 2.

Лемма 3. *Пусть последовательность $a_n \downarrow 0$. Тогда для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$, $l \neq 0$, $n_0 \in N$ (N – множество натуральных чисел) и для любого двоичного интервала $I \subset \left[\frac{1}{2^{n_0}};1\right]$ существует многочлен по системе Уолша $P(x) = \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} b_k W_k(x)$, удовлетворяющий условиям :*

1) $|b_k| \geq a_k$; 2) $P(x) = l$, *если* $x \in E \subset I, \mu E > (1-\varepsilon)\mu I$;

3) $P(x) = 0$, *если* $x \notin I \cup \left[0, \dfrac{1}{2^{n_0}}\right]$; 4) $S^*(P,x) < \dfrac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta + \dfrac{2|l|C}{\varepsilon}$, *если* $x \in I$;

5) $S^*(P,x) < \dfrac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta$, *если* $x \notin I \cup \left[0, \dfrac{1}{2^{n_0}}\right]$;

6) $P'(x) \equiv \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} |b_k| W_k(x) = 0$, *если* $x > \frac{1}{2^{n_0}}$; 7) $S^*(P',x) < \dfrac{2a_{2^{n_0}}}{x}$, *если* $x > \frac{1}{2^{n_0}}$;

где C – постоянная из Леммы 1.

Доказательство. Пусть n_0 – натуральное число, а I – двоичный интервал такой, что $\mu I = 2^{-\sigma}$ и

$$I \subset \left[\frac{1}{2^{n_0}};1\right]. \tag{6}$$

Подчиним $m_0 < n_1$ следующим условиям :

$$m_0 > \min\{\sigma, n_0\}, \quad m_0 - \sigma - \text{–чётное}, \tag{7}$$

$$|l|2^{-\frac{m_0-\sigma}{2}} < \delta, \quad |l|2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} \leq a_{2^{n_0}}, \tag{8}$$

$$|l|2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} \geq a_{2^{n_1}}. \tag{9}$$

Пусть

$$\bar{P}_0(x) = \sum_{k=2^{n_1}}^{2^{n_1}+2^{m_0}-1} \alpha_k W_k(x) \tag{10}$$

есть многочлен, удовлетворяющий условиям Леммы 2 при $m = m_0$, $n = n_1$, $i = 0$. Нетрудно убедится, что многочлен

$$P_0(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} b_k W_k(x) \equiv \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_{2^{n_0}} W_k(x) + l\bar{P}_0(x) + \sum_{k=2^{n_1}+2^{m_0}}^{2^{n_1+1}-1} |l|2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} W_k(x) \tag{11}$$

удовлетворяет условиям

$$|b_k| \geq a_k, \quad 2^{n_0} \leq k < 2^{n_1+1}; \tag{12}$$

$$P_0(x) = l, \quad \text{если} \quad x \in I_0^+ \subset I, \quad \mu I_0^+ = \frac{1}{2}\mu I; \tag{13}$$

$$P_0(x) = -l, \quad \text{если} \quad x \in I_0^- \subset I, \quad \mu I_0^- = \frac{1}{2}\mu I; \tag{14}$$

$$P_0(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin I \cup \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right]; \tag{15}$$

$$S^*(P_0, x) \leq \frac{2a_{2^{n_0}}}{x} + C|l|, \quad \text{если} \quad x \in I; \tag{16}$$

$$S^*(P_0, x) \leq \frac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta, \quad \text{если} \quad x \notin I \cup \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right], \tag{17}$$

где I_0^+ и I_0^- суть конечные объединения двоичных интервалов. Многочлен

$$P_0'(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} |b_k| W_k(x),$$

удовлетворяет условиям

$$P_0'(x) = 0, \quad \text{если} \quad x > \frac{1}{2^{n_0}}; \tag{18}$$

$$S^*(P_0', x) \leq \frac{2a_{2^{n_0}}}{x}. \tag{19}$$

Действительно, (12) следует из (9), (11) из пункта 1) Леммы 2. Равенства (13) – (15) и (18) получаем из (3), (6), (7), (11) и Леммы 2. Равенства (16), (17) и (19) вытекают из (4), (8), (11) и Леммы 2.

Допустим, что уже построены многочлены $P_0(x), \ldots, P_{j-1}(x)$ и

$$P_{j-1}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j+1}-1} b_k W_k(x) = -2^{j-1} l, \quad x \in I_{j-1}^-,$$

где I_{j-1}^{-} являются конечными объединениями двоичных интервалов и $\mu I_{j-1}^{-} = 2^{-j}\mu I = 2^{-j-\sigma}$. Пусть $I_{j-1}^{-} = \bigcup\limits_{i=1}^{\alpha_j} I_{ij}$, где I_{ij} - двоичные интервалы и $\mu I_{ij} = 2^{-\sigma_j}$. Ясно, что $\alpha_j = 2^{\sigma_j-\sigma-j}$. Пусть $m_j, n_{j+1} \in N$ удовлетворяют условиям

$$m_j > \min\{\sigma_j,\ n_j+1\}, \quad m_j-\sigma_j - -\text{чётное}, \tag{20}$$

$$2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} \le a_{2^{n_j+1}}, \tag{21}$$

$$2^j|l|2^{-\frac{m_j-\sigma_j}{2}} < \delta, \tag{22}$$

$$n_{j+1} > m_j+\sigma_j-\sigma-j, \tag{23}$$

$$2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} > a_{2^{n_{j+1}}}. \tag{24}$$

Для любого $i=1,\cdots,\alpha_j$, используя Лемму 2 при $m=m_j$, $n=n_{j+1}$, $i=i-1$, $I=I_{ij}$, получаем

$$\bar{P}_{ij}(x) = \sum_{k=2^{n_{j+1}}+(i-1)2^{m_j}}^{2^{n_{j+1}}+i2^{m_j}-1} \alpha_k W_k(x).$$

Рассмотрим многочлен

$$P_j(x) = \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} b_k W_k(x) = Q_1(x)+Q_2(x)+Q_3(x), \tag{25}$$

где

$$Q_1(x) = \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}}-1} a_{2^{n_j+1}} W_k(x), \quad Q_2(x) = 2^j l \sum_{i=1}^{\alpha_j} \bar{P}_{ij}(x),$$

$$Q_3(x) = \sum_{k=2^{n_{j+1}}+\alpha_j 2^{m_j}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} 2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} W_k(x).$$

В силу монотонности a_n, из (24), (25) и Леммы 2 получаем

$$|b_k| \ge a_k, \quad 2^{n_j+1} \le k < 2^{n_{j+1}+1}. \tag{26}$$

В силу (3) имеем

$$Q_1(x) = 0 \quad \text{для} \quad x > \frac{1}{2^{n_j+1}}, \tag{27}$$

и из (2) и (3) для любых $r < 2^{n_{j+1}-m_j}$ и $x > 1/2^{m_j}$ получаем

$$\sum_{k=2^{n_{j+1}}+r2^{m_j}}^{2^{n_{j+1}}+(r+1)2^{m_j}-1} 2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} W_k(x) = 2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} W_{2^{n_{j+1}}+r2^{m_j}}(x) \sum_{k=0}^{2^{m_j}-1} W_k(x) = 0.$$

Поэтому из (6), (7), (20), (25) и Леммы 2 имеем

$$Q_3(x) = 0, \quad \text{при} \quad x > \frac{1}{2^{n_0}}, \tag{28}$$

$$P_j(x) = 2^j l, \quad \text{если} \quad x \in I_j^+ \subset I_{j-1}^-, \quad \mu I_j^+ = \frac{1}{2}\mu I_{j-1}^- = 2^{-j-1}\mu I; \tag{29}$$

$$P_j(x) = -2^j l, \quad \text{если} \quad x \in I_j^- \subset I_{j-1}^-, \quad \mu I_j^- = \frac{1}{2}\mu I_{j-1}^- = 2^{-j-1}\mu I; \tag{30}$$

$$P_j(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right] \cup I_{j-1}^-. \tag{31}$$

Точно так же получаем, что

$$\begin{aligned} P_j'(x) \equiv \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} |b_k| W_k(x) = \\ = \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}}-1} a_{2^{n_j+1}} W_k(x) + 2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} W_k(x) = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

если $x \in \left[\frac{1}{2^{n_j+1}}; 1\right] \supset \left[\frac{1}{2^{n_0}}; 1\right]$. Из формул (4), (21) и (25) следует, что для любого $x \in [0; 1]$

$$S^*(Q_1, x) \le a_{2^{n_j+1}} \frac{2}{x}, \tag{33}$$

$$S^*(Q_3, x) \le 2^j|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}}\frac{2}{x} \le a_{2^{n_j+1}}\frac{2}{x}. \tag{34}$$

Пусть $x \in I^-_{j-1}$, тогда для некоторого i_0 имеем $x \in I_{i_0 j}$. В силу Леммы 2

$S^*(2^j l P_{i_0 j}, x) \le 2^j|l|C$, $S^*(2^j l P_{ij}, x) \le 2^j|l|2^{-\frac{m_j-\sigma_j}{2}}$, при $i \ne i_0$. Из (22), (25), с учётом $P_{ij}(x) = 0$, $i \ne i_0$, получаем $S^*(Q_2, x) \le \delta + 2^j|l|C$. Используя (6), (27), (28), (33) и (34) имеем

$$S^*(P_j, x) \le \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x} + \delta + 2^j|l|C, \quad x \in I^-_{j-1}. \tag{35}$$

Аналогично доказывается, что

$$S^*(P_j, x) \le \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x} + \delta, \quad \text{если} \quad x \notin \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right] \cup I^-_{j-1},$$

$$S^*(P'_j, x) \le \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x}, \quad \text{если} \quad x > \frac{1}{2^{n_0}}.$$

Пусть $q = [\log_2 \varepsilon^{-1}]$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{j=0}^{q} P_j(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{q+1}+1}-1} b_k W_k(x).$$

Из (13) – (15) и (29) – (31) следует, что $P(x) = l$, если $x \in E = I \setminus I^-_q$ и $P(x) = 0$, при $x \notin \left[0; \frac{1}{2^{n_0}}\right] \cup I$. Ясно, что $\mu E = \mu I - 2^{-q-1}\mu I \ge (1-\varepsilon)\mu I$.
Предположим, что $x \in I$ и

$$S^*(P, x) = \left|\sum_{j=0}^{i-1} P_j(x) + \sum_{k=2^{n_i}+1}^{M} b_k W_k(x)\right|$$

для некоторых $i < q$ и M. В силу (29) – (31) и (35) имеем

$$S^*(P, x) \le \left|\sum_{j=0}^{i-1} P_j(x)\right| + S^*(P_i, x) \le$$

$$\le \frac{2a_{2^{n_0+1}}}{x} + \delta + 2^q|l|(C+1) \le \frac{2a_{2^{n_0+1}}}{x} + \delta + \frac{|l|(C+1)}{\varepsilon}.$$

Остальные пункты Леммы 3 доказываются аналогично. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим множество троек $\{(\Delta, l, \varepsilon)\}$, где Δ пробегает все двоичные интервалы типа $\left[\frac{k}{2^{\sigma}}, \frac{k+1}{2^{\sigma}}\right]$, $k \neq 0$, l пробегает множество всех ненулевых рациональных чисел и $\varepsilon \in (0,1)$ – рациональное число. Пронумеровав элементы этого множества, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, l_1, \varepsilon_1),\ (\Delta_2, l_2, \varepsilon_2),\ \cdots,\ (\Delta_m, l_m, \varepsilon_m), \cdots . \tag{36}$$

В этой последовательности элементы отличны друг от друга, но параметры, стоящие в разных элементах в одинаковых местах, могут совпадать. Пусть последовательность положительных чисел такая, что

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \cdots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \infty. \tag{37}$$

Лемма 4. *Пусть $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность чисел такая, что $a_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого натурального m существуют многочлен*

$$P_m(x) = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} b_k W_k(x),$$

и множества G_m и E_m, причём $G_m \supset G_{m-1}$, $\mu G_m \to 1$ такие, что

1. $|b_k| \geq a_k$, $N_m < k \leq N_{m+1}$;

2. $P_m(x) = l_m$, если $x \in E_m \subset \Delta_m$, $\mu E_m > (1-\varepsilon_m)\mu\Delta_m$;

3. $P_m(x) = 0$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$; 4. $S^*(P_m, x) \leq \eta_m + C|l_m|/\varepsilon_m$, если $x \in \Delta_m$;

5. $S^*(P_m, x) \leq \eta_m$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$;

6. $P'_m = \sum\limits_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} |b_k| W_k(x) = 0$, если $x \in G_m$; 7. $S^*(P'_m, x) \leq \eta_m$, если $x \in G_m$,

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Пусть $\Delta_1 = \left[\dfrac{k_1}{2^{\sigma_1}}, \dfrac{k_1+1}{2^{\sigma_1}}\right]$. Выберем натуральное число $n_0 >$ σ_1 так, чтобы выполнялось условие $\sqrt{a_{2^{n_0}}} < \min\left\{2^{-\sigma_1}; \frac{\eta_1}{8}\right\}$ и рассмотрим многочлен $P_0(x) = \sum\limits_{k=0}^{2^{n_0}-1} a_0 W_k(x)$. Допустим, что $\Delta_i = \left[\dfrac{k_i}{2^{\sigma_i}}, \dfrac{k_i+1}{2^{\sigma_i}}\right]$ и уже построены многочлены

$$P_i(x) = \sum_{k=2^{n_{i-1}}}^{2^{n_i}-1} b_k W_k(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

причём числа n_i удовлетворяют условиям

$$n_i > \sigma_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{38}$$

$$\sqrt{a_{2^{n_i}}} < \min\left\{2^{-\sigma_{i+1}}, \frac{\eta_{i+1}}{8}\right\}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{39}$$

Из (38) следует, что к интервалу Δ_m можно применить Лемму 3 для $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\delta = \frac{\eta_m}{2}$, $l = l_m$, $n_0 = n_{m-1}$. В итоге получаем многочлен

$$\tilde{P}_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{r_m}-1} b_k W_k(x), \tag{40}$$

со следующими условиями : $A)\ |b_k| \geq a_k$;

$B)\ \bar{P}_m(x) = l_m, \quad x \in E_m \subset \Delta_m,\ \mu E_m > (1-\varepsilon_m)\mu\Delta_m$;

$C)\ \bar{P}_m(x) = 0, \quad$ если $\quad x \notin \Delta_m \cup [0, 2^{-n_{m-1}}]$,

$D)\ S^*(\bar{P}_m, x) \leq \dfrac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + \dfrac{\eta_m}{2} + \dfrac{|l_m|C}{\varepsilon_m}$, если $x \in \Delta_m$;

$E)\ S^*(\bar{P}_m, x) \leq \dfrac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + \dfrac{\eta_m}{2}$, если $x \notin \Delta_m \cup \left[0, \frac{1}{2^{n_{m-1}}}\right]$;

$F)\ \bar{P}'(x) \equiv \displaystyle\sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{r_m}-1} |b_k| W_k(x) = 0$, если $x > 2^{-n_{m-1}}$;

$G)\quad S^*(\bar{P}', x) < 2a_{2^{n_{m-1}}}/x$, *если* $x > 2^{-n_{m-1}}$.

Положим

$$G_m = \left[\frac{1}{2^{n_{m-1}}}, 1\right] \cap [\sqrt{a_{2^{n_{m-1}}}}, 1]. \tag{41}$$

Очевидно, что $\mu G_m \to 1$ при $m \to \infty$. Пусть $\Delta_{m+1} = \left[\dfrac{k_{m+1}}{2^{\sigma_{m+1}}}, \dfrac{k_{m+1}+1}{2^{\sigma_{m+1}}}\right]$.

Выберем $n_m > r_m$ так, чтобы $n_m > \sigma_{m+1}$ и $\sqrt{a_{2^{n_m}}} < \min\left\{2^{-\sigma_{m+1}}, \frac{\eta_{m+1}}{8}\right\}$. Рассмотрим многочлен

$$Q_m(x) = \sum_{k=2^{r_m}}^{2^{n_m}-1} a_{2^{r_m}} W_k(x). \tag{42}$$

В силу (3), (41) и учитывая, что $r_m > n_{m-1}$, получаем

$$Q_m(x) = 0, \quad \text{для} \quad x \in G_m, \tag{43}$$

а из (4) и (42) следует, что

$$S^*(Q_m, x) \le \frac{2a_{2^{r_m}}}{x} \le \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x}. \tag{44}$$

Теперь докажем, что многочлен

$$P_m(x) = \bar{P}_m(x) + Q_m(x) \tag{45}$$

удовлетворяет условиям 1 – 7 Леммы 4. Пункт 1. очевиден. Далее, из (38), (39) и (41) следует, что $\Delta_m \subset G_m$. Поэтому, учитывая также (43) и B) получаем, что

$$P_m(x) = l_m, \quad \text{если } x \in E_m \subset \Delta_m, \quad \mu E_m > (1 - \varepsilon_m)\Delta_m.$$

Аналогично получаем $P_m(x) = 0$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$. Для мажоранты частичных сумм многочлена $P_m(x)$ для $x \in \Delta_m$ имеем

$$S^*(P_m, x) \le S^*(\bar{P}_m, x) + S^*(Q_m, x) \le \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + \frac{\eta_m}{2} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m} + \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x}.$$

Следовательно, учитывая (39), (41) и $\Delta_m \subset G_m$, имеем

$$S^*(P_m, x) \le 4\sqrt{a_{2^{n_{m-1}}}} + \frac{\eta_m}{2} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m} < \eta_m + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m}.$$

Аналогично доказываются остальные пункты Леммы 4. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $\{P_m(x)\}$ – последовательность многочленов, полученных в Лемме 4, а $g(x)$ – почти всюду конечная измеримая функция, определённая на $[0,1]$. Далее, пусть для произвольного $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$ и $m \in N$, существуют натуральные числа $m_1, \dots, m_j$ и множество E, удовлетворяющие следующим условиям :*

a) $m < m_1 < m_2 < \cdots < m_j$; *b)* $E \subset [0,1]$, $\mu E > 1 - 2\varepsilon$;

c) $\left|\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}(x) - g(x)\right| < \delta$ *если* $x \in E$,

d) $S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, x\right) \le C\frac{|g(x)|}{\varepsilon} + \varepsilon$ *для всех $x \in E$, где C – абсолютная постоянная.*

Доказательство. Выберем натуральное p так, чтобы

$$\frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{46}$$

Легко видеть, что существуют конечное разбиение интервала $[2^{-p}, 1]$ на попарно непересекающиеся двоичные интервалы $\Delta'_1, \dots, \Delta'_j$, рациональные числа $l'_1, \dots, l'_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset \left[\frac{1}{2^p}, 1\right], \quad \mu E_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{47}$$

$$|g(x) - l'_i| < \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon^2}{C}\right\}, \quad x \in \Delta'_i \cap E_0, \quad i = 1, \dots, j, \tag{48}$$

где C – постоянная из Леммы 4. Для фиксированного i, $1 \le i \le j$, в последовательности (36) существует подпоследовательность вида

$$(\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_1}),\ (\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_2}), \dots, (\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_n}), \dots,$$

где

$$\varepsilon_{k_n} \ge \varepsilon, \quad n \ge 1, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_{k_n} = \varepsilon. \tag{49}$$

Пусть m_0 – выбрано настолько большим, чтобы (см. (37))

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} \eta_k < \varepsilon. \tag{50}$$

Применяя Лемму 4 при $m = k_n$ с достаточно большим индексом n и учитывая (49) и (50), легко видеть, что для $m_i = k_n > m_{i-1}$ выполняются условия :

$$\mu G_{m_i} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{51}$$

$$P_{m_i}(x) = l'_i, \quad \text{для} \quad x \in E_{m_i}, \tag{52}$$

где

$$E_{m_i} \subset \Delta'_i, \quad \mu E_{m_i} > (1 - \varepsilon_{m_i})\mu\Delta'_i > (1-\varepsilon)\mu\Delta'_i - \frac{\varepsilon}{4j}, \tag{53}$$

$$P_{m_i}(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \in G_{m_i} \setminus \Delta'_i, \tag{54}$$

$$S^*(P_{m_i},x) \le \eta_{m_i} + C\frac{|l_i'|}{\varepsilon_{m_i}} \le \eta_{m_i} + C\frac{|l_i'|}{\varepsilon}, \quad \text{если} \quad x \in G_{m_i} \cap \Delta_i', \tag{55}$$

$$S^*(P_{m_i},x) \le \eta_{m_i}, \quad \text{если} \quad x \in G_{m_i} \setminus \Delta_i'. \tag{56}$$

Положим

$$E = \left(E_0 \cap G_{m_1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i}\right)\right). \tag{57}$$

Из (46) и (53) следует, что

$$\mu \bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i} \ge \sum_{i=1}^{j} \left((1-\varepsilon)\mu\Delta_i' - \frac{\varepsilon}{4j}\right) > 1 - \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Отсюда, с учётом (47), (51) и (57) получаем, что $\mu E > 1 - 2\varepsilon$.

Пусть $x \in E$, тогда для некоторого r, $1 \le r \le j$ имеем $x \in E_{m_r}$. В силу (48), (52), (54) и (57) получаем, что

$$\left|\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}(x) - g(x)\right| = |P_{m_r}(x) - g(x)| < \delta.$$

Наконец, из (48), (50), (55) и (56) вытекает, что

$$S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, x\right) \le S^*(P_{m_r},x) + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne r}}^{j} S^*(P_{m_i},x) \le$$

$$\le \eta_{m_r} + C\frac{|l_r'|}{\varepsilon} + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne r}}^{j} \eta_{m_i} \le 2\varepsilon + C\frac{|g(x)|}{\varepsilon}.$$

Лемма 5 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть

$$\left\{P_m(x) = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} b_k W_k(x)\right\}_{m=0}^{\infty}$$

есть последовательность многочленов, построенных в Лемме 4 и $P_0(x) = \sum_{k=0}^{N_1} a_0 W_k(x)$. Для доказательства теоремы, достаточно показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) \quad . \tag{58}$$

является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций. Выберем последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}$ и натуральное число i_0 так, чтобы (см. Лемму 4)

$$1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \quad \mu G_{i_0} > 1 - \frac{\gamma_1}{4}. \tag{59}$$

Пусть $f(x)$ – почти всюду конечная измеримая функция, определённая на $[0,1]$. Тогда функция $f(x) - \sum_{m=0}^{i_0} P'_m(x)$ также почти всюду конечна. В силу Леммы 5 для $g(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{i_0} P'_m(x)$, $\varepsilon = \frac{\gamma_1}{4}$, $\delta = \frac{\gamma_2^2}{4}$, $m = i_0$ существуют многочлен $\sum_{j=0}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(x)$, $i_0 < m_1^0 < \cdots < m_{\alpha_0}^0$ и множество E_1 такие, что

$$\mu E_1 > 1 - \frac{\gamma_1}{2}, \tag{60}$$

$$\left| f(x) - \sum_{m=1}^{i_0} P'_m(x) - \sum_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(x) \right| < \frac{\gamma_2^2}{4}, \quad x \in E_1. \tag{61}$$

Возьмём $i_1 > m_{\alpha_0}^0$ так, чтобы выполнялись условия (см. (37) и Лемму 4) $\sum_{m=i_1}^{\infty} \eta_m < \gamma_2$, $\mu G_{i_1} > 1 - \frac{\gamma_2}{4}$. Положим

$$Q_1(x) = \sum_{m=1}^{i_0} P'_m(x) + \sum_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(x) + \sum_{m \in J_1} P'_m(x), \tag{62}$$

$$E_1' = E_1 \cap G_{i_0}, \quad J_1 = \{i_0+1, i_0+2, \dots, i_1\} \setminus \{m_1^0, m_2^0, \dots, m_{\alpha_0}^0\}. \tag{63}$$

Из (59), (60) и (63) имеем $\mu E_1' > 1 - \gamma_1$, а из (61), (62) и Леммы 4 получаем $|f(x) - Q_1(x)| \le \frac{\gamma_2^2}{4}$ для всех $x \in E_1'$. Пусть на p–ом шаге определено число i_p, множество E_p' и многочлен $Q_p(x)$ такие, что

$$\sum_{m=i_p}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}, \tag{64}$$

$$\mu G_{i_p} > 1 - \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \mu E_p' > 1 - \gamma_p, \quad E_p' \subset G_{i_{p-1}}, \tag{65}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{p} Q_j(x) \right| \le \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad \text{для} \quad x \in E_p'. \tag{66}$$

Положим

$$f_p(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{p} Q_p(x). \tag{67}$$

В силу Леммы 5 для $g(x) = f_p(x)$, $\epsilon = \frac{\gamma_{p+1}}{4}$, $\delta = \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}$, $m = i_p$ существуют натуральные числа $i_p < m_1^p < \dots < m_{\alpha_p}^p$ и множество E_{p+1} такие, что

$$\mu E_{p+1} > 1 - \frac{\gamma_{p+1}}{2}, \tag{68}$$

$$\left| f_p(x) - \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(x) \right| < \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}, \quad \text{для} \quad x \in E_{p+1}, \tag{69}$$

$$S^* \left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, x \right) \le \frac{4C|f_p(x)|}{\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \text{для} \quad x \in E_{p+1}, \tag{70}$$

где C – абсолютная постоянная. Используя (37) и Лемму 4, выберем число $i_{p+1} > m_{\alpha_p}^p$ так, чтобы $\sum\limits_{m=i_{p+1}}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+2}$, $\mu G_{i_{p+1}} > 1 - \frac{\gamma_{p+2}}{2}$, и положим

$J_{p+1} = \{i_p + 1, i_p + 2, \ldots, i_{p+1}\} \setminus \{m_1^p, m_2^p, \ldots, m_{\alpha_p}^p\}$,

$$Q_{p+1}(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(x) + \sum_{m \in J_{p+1}} P'_m(x), \tag{71}$$

$$E'_{p+1} = E_{p+1} \cap G_{i_p}, \quad E''_{p+1} = E'_{p+1} \cap E'_p. \tag{72}$$

Из (65), (68) и (72) следует, что

$$\mu E'_{p+1} > 1 - \gamma_{p+1}, \quad \mu E''_{p+1} > 1 - \gamma_p - \gamma_{p+1}. \tag{73}$$

В силу (69), (71), (72) и Леммы 4 имеем $|f_p(x) - Q_{p+1}(x)| \le \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}$, $x \in E'_{p+1}$. Поэтому (см. (67))

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{p+1} Q_j(x) \right| \le \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad x \in E'_{p+1}. \tag{74}$$

Из (66), (67), (70) и (72) получаем, что на множестве E''_{p+1}

$$S^*\left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, x\right) \le C\frac{4\gamma_{p+1}^2}{4\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4} < (C+1)\gamma_{p+1}, \tag{75}$$

а из Леммы 4, (64) и (72) на том же множестве E''_{p+1},

$$S^*\left(\sum_{m \in J_{p+1}} P'_m, x\right) \le \sum_{m=i_p+1}^{\infty} S^*(P'_m, x) \le \sum_{m=i_p+1}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}. \tag{76}$$

Следовательно, в силу (71), (75) и (76), получаем

$$S^*(Q_{p+1}, x) < (C+2)\gamma_{p+1}, \quad x \in E''_{p+1}. \tag{77}$$

Рассмотрим множества

$$E'_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E'_p, \quad E''_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E''_p, \quad (E'_1 = [0,1]).$$

Из (59) и (73) следует, что $\mu E_0' = \mu E_0'' = 1$. Следовательно, учитывая (74) и (77), заключаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k W_k(x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} Q_j(x)$ сходится к $f(x)$ на множестве $E_0' \cap E_0''$, $\mu(E_0' \cap E_0'') = 1$. Ясно, что $|\alpha_k| = |b_k|$. Теорема доказана.

Abstract. How slowly can the coefficients of universal series tend to zero ? The paper proves that for every sequence of positive numbers a_n monotonically tending to zero, there exists a series by Walsh system with coefficients b_n satisfying $|b_n| > a_n$, which is universal in the class of almost everywhere finite measurable functions relative to signs.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "Об универсальных тригонометрических рядах", Докл. АН СССР, том 49, стр. 79 — 82, 1945.
2. Д. Е. Меньшов, "О частных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, № 2, стр. 197 — 238, 1947.
3. А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, серия Математика, том 27, № 3, стр. 621 — 660, 1963.
4. Г. М. Мушегян, "Об универсальности рядов относительно подстановок", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 12, № 4, стр. 278 — 302, 1977.
5. Н. Б. Погосян, "Представление измеримых функций ортогональными рядами", Мат. Сборник, том 98, стр. 102 — 112, 1975.
6. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", Успехи Мат. Наук, том 15, № 5(95), стр. 77 — 141, 1960.
7. А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, "Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций", Успехи Мат. Наук, том 47, № 5(287), стр. 15 — 44, 1992.
8. Н. Б. Погосян, "Об универсальных рядах Фурье", Успехи Мат. Наук, том 38, № 1, стр. 185 — 186, 1983.
9. К. А. Навасардян, "Универсальные ряды по кратной системе Уолша", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 22 - 40, 1995.
10. Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "О рядах Уолша с монотонными коэффициентами", Изв. АН России, серия Математика, том 63, № 1, стр. 41 - 60, 1999.
11. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.
12. Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Наука, Москва, 1987.
13. К. А. Навасардян, "О нуль-рядах по двойной системе Уолша", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 29, № 1, стр. 50 - 68, 1994.
14. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 1, № 4, стр. 270 — 283, 1966.

Поступила 15 апреля 2002

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 4, 2002, 63–72

СХОДИМОСТЬ ГРИДИ АЛГОРИТМА НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

А. А. Саакян

Институт математики НАН Армении
e–mail : sart@instmath.sci.am

Резюме. В работе доказано, что для любой непрерывной функции $f(x) \in C(0,1)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$ такой, что гриди аппроксимации суперпозиции $F = f \circ \tau$ равномерно сходятся к F как по системе Уолша, так и по тригонометрической системе.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система, определённая на отрезке $[0,1]$. Для функции $f \in L^2(0,1)$ рассмотрим её ряд Фурье по системе Ψ :

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\psi_n(x), \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,dx.$$

Будем говорить, что перестановка $\rho = \{\rho(n)\}_{n=1}^{\infty}$ множества натуральных чисел убывает (для заданного f) и писать $\rho \in D(f)$, если $|c_{\rho(1)}| \ge |c_{\rho(2)}| \ge \dots$. Отметим, что такая перестановка единственная, если все коэффициенты $c_n(f)$ различны. Для натурального N определим N-тый гриди аппроксимант следующим образом :

$$G_N(f,x) = G_N^{\Psi,\rho}(f,x) = \sum_{n=1}^{N} c_{\rho(n)}(f)\psi_{\rho(n)}(x).$$

Ясно, что $G_N(f,x) = \sum\limits_{n\in\Lambda_N} c_n(f)\psi_n(x)$ для некоторого множества $\Lambda_N = \Lambda_N(f)$, при этом $\#\Lambda_N = N$ и $|c_n(f)| \ge |c_m(f)|$, если $n \in \Lambda_N$, $m \notin \Lambda_N$. Гриди аппроксимация в различных пространствах и по различным системам изучалась во многих работах (см. подробнее обзорные статьи [1] и [2]). В случае, когда Ψ – тригонометрическая система, В. Темляковым [3] было доказано существование непрерывной функции f, для которой $G_N(f)$ расходится по норме $L^p(0,1)$ при любом $p > 2$, и существование функции f, принадлежащей L^p для любого $p < 2$, для которой $G_N(f)$ расходится по мере. В работах [4] и [5] Кернер, ответив на вопрос, поставленный Л. Карлесоном и Койфманом, построил сначала функцию, принадлежащую $L^2(0,1)$, а затем непрерывную функцию $f \in C(0,1)$, для которой $G_N(f)$ расходится почти всюду. В работе С. Конягина и В. Темлякова [6] получены достаточные условия для сходимости гриди алгоритма непрерывной функции. В частности, для тригонометрической системы они доказали следующее утверждение.

Теорема A. *Если коэффициенты Фурье функции $f \in C(0,1)$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^p = o(n^{1-p})$ при $n \to \infty$, для некоторого $p > 1$, то при любом $\rho \in D(f)$ имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \|G_N^\rho(F) - F\|_C = 0$.*

В настоящей работе мы доказываем, что произвольную непрерывную функцию $f \in C(0,1)$ можно "исправить" с помощью замены переменной и добиться равномерной сходимости гриди аппроксимации как по тригонометрической системе так и по системе Уолша. В случае тригонометрической системы предполагается, что функция $f \in C(0,1)$ периодическая : $f(0) = f(1)$.

Теорема 1. *Пусть Ψ – тригонометрическая система или система Уолша. Для произвольной функции $f \in C(0,1)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$, т.е. непрерывная функция с условием*

$$0 = \tau(0) < \tau(x_1) < \tau(x_2) < \tau(1) = 1, \quad 0 < x_1 < x_2 < 1,$$

такая, что для суперпозиции $F(x) = f \circ \tau(x)$ и при любом $\rho \in D(f)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} \|G_N^\rho(F) - F\|_C = 0.$$

Аналогичный результат для последовательности $S_N(f)$ частных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе был доказан Г. Бором (см., например, [7], стр. 303). Аналог теоремы Бора для системы Уолша доказан автором в работе [8]. В работах [9] и [10] были получены разные усиления теоремы Бора. В частности, в [9] было доказано следующее утверждение.

Теорема В. *Для произвольной функции $f \in C(0,1)$ существует гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$ такой, что коэффициенты Фурье суперпозиции $F = f \circ \tau$ удовлетворяют условию*

$$|c_n(F)| = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad n \to 0. \tag{*}$$

Так как ряд Фурье непрерывной функции с коэффициентами Фурье, удовлетворяющими условию (*), равномерно сходится (см. [7], стр. 276), то из Теоремы В вытекает Теорема Бора.

Замечание 1. Легко видеть, что из условия $|c_n(F)| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ следует, что функция F удовлетворяет условиям Теоремы А для любого $p > 1$. Следовательно, для тригонометрической системы Теорема 1 непосредственно следует из Теорем А и В. Однако отметим, что приведённое ниже доказательство Теоремы 1 проходит и в случае тригонометрической системы.

Замечание 2. Сопоставляя доказательства Теорем 1 и В (см. [8], [9] и равенство (3) ниже), можно убедиться, что построенный в Теореме 1 гомеоморфизм τ такой, что для суперпозиции $F = f \circ \tau$ будем одновременно иметь равномерную сходимость ряда Фурье и последовательности $G_N(F)$ как для тригонометрической системы, так и для системы Уолша.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство Теоремы В основано на применении системы Фабера–Шаудера. Известно (см. [11], стр. 205), что каждая функция $F \in C(0,1)$ единственным образом разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе Фабера–Шаудера

$F(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{2^j} A_{j,i}\varphi_j^{(i)}(x)$, коэффициенты которого определяются следующими формулами : $A_0 = A_0(F) = F(0)$, $A_1 = A_1(F) = F(1) - F(0)$

$$A_{j,i} = A_{j,i}(F) = F\left(\frac{2i-1}{2^{j+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{i-1}{2^j}\right) + \left(\frac{i}{2^j}\right)\right]. \tag{1}$$

Следующая лемма непосредственно вытекает из Теоремы 13 главы 4, [11].

Лемма 1. *Для произвольных $i = 1, 2, \ldots, 2^j$, $j = 0, 1, \ldots$ имеем*

$$\|\varphi_j^{(i)}\|_A := \sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\left(\varphi_j^{(i)}\right)\right| < \infty. \tag{2}$$

Основную роль в доказательстве Теоремы 1 играет следующий результат.

Лемма 2. *Для произвольной функции $f \in C(0,1)$ с условием $f(0) = 0$, существуют гомеоморфизм τ отрезка $[0,1]$ и последовательности натуральных чисел $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{j_k\}_{s=k}^{\infty}$, $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$ такие, что*

A) $j_0 < j_1 < \ldots, \quad 1 \le i_k \le 2^{j_k}, \quad N_{k-1} < M_k < N_k, \quad k = 1,2,\ldots,$

B) Разложение суперпозиции $F(x) = f \circ \tau(x)$ по системе Фабера–Шаудера имеет вид

$$F(x) = A_1\varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{j_k,i_k}\phi_{j_k}^{(i_k)}(x) =: \phi_{-1}(x)) + \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(x); \tag{3}$$

C) $\displaystyle\sum_{i=-1}^{k-1}\sum_{n=M_k}^{\infty}|c_n(\phi_i)| \le \delta_k, \qquad k = 1,2\ldots;$

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{M_k}|c_n(\phi_k)| \le \delta_k, \qquad \sup_{1\le n<\infty}|c_n(\phi_k)| \le \delta_k, \quad k = 1,2\ldots;$

E) $\displaystyle\sum_{n=N_k}^{\infty}|c_n(\phi_k)| \le \delta_k, \qquad k = 0,1\ldots,$

где числа δ_k, $k = 0,1\ldots$ определены следующим образом :

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_k = \min\left\{\frac{\delta_{k-1}}{2};\ \frac{1}{8}\left|c_n\left(\sum_{i=-1}^{k-1}\phi_i\right)\right|,\ n \in \Omega_{k-1}\right\}, \quad k = 1,2\ldots,$$
$$\Omega_j = \left\{n \in [1,N_j] : c_n\left(\sum_{i=-1}^{j}\phi_i\right) \ne 0\right\}, \quad j = 0,1\ldots \tag{4}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|f\|_C \le \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Мы построим множество точек $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=0}^{\infty}$ и последовательности чисел $\{j_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$, $1 \le i_k \le 2^{j_k}$ такие, что

a) $a_0^0 = 0$, $a_0^1 = 1$, $a_j^i < a_m^l$, если $\frac{i}{2^j} < \frac{l}{2^m}$, $a_j^i = a_m^l$, если $\frac{i}{2^j} = \frac{l}{2^m}$;

b) $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le 2^j}\left(a_j^i - a_j^{i-1}\right)\right\} = 0;$

c) $f\left(a_{j+1}^{2i-1}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(a_j^{i-1}\right) + f\left(a_j^i\right)\right]$, если $(j,i) \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (j_k, i_k)$.

Если такие точки и последовательности построены, то положив

$$\tau\left(\frac{i}{2^j}\right) = a_j^i, \qquad j = 0, 1, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^j, \tag{6}$$

мы можем в силу a) и b), однозначно продолжить $\tau(x)$ до непрерывной, строго монотонной функции на всём отрезке $[0,1]$, причём $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$). Кроме того, из равенства c) и формул (1), (6) вытекает, что разложение функции $F(x) = f \circ \tau(x)$ по системе Фабера-Шаудера будет иметь вид (3).

Точки $\{a_j^i\}$ будут построены по индукции. Дополнительно нам потребуется следить за выполнением условия

d) для любой пары (m,i), $m = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$,имеет место одно из следующих двух условий :

(I) $f\left(a_m^{i-1}\right) \neq f\left(a_m^i\right)$,

(II) существует интервал $\left(\alpha_m^i, \beta_m^i\right) \subset \left(a_m^{i-1}, a_m^i\right)$ такой, что

$$f(x) = \mathrm{const} = f\left(a_m^{i-1}\right) = f\left(a_m^i\right) \quad \text{при} \quad x \in \left(\alpha_m^i, \beta_m^i\right).$$

Положим $a_0^0 = a_1^0 = 0$, $a_0^1 = a_1^2 = 1$, и выберем точку $a_1^1 \in (0,1)$ так, чтобы $f\left(a_1^1\right) \neq 0 = f(0) = f(1)$. Если это невозможно, то $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, и можно взять $\tau(x) \equiv x$. Функция τ уже определена в точках 0, 1/2, 1, и поэтому определены коэффициенты $A_0(F)$, $A_1(F)$ и $A_{0,1}(F)$, при этом $A_0(F) = A_1(F) = 0$. Теперь положим $j_0 = 0$, $i_0 = 1$, $M_0 = 0$ и выберем $N_0 > M_0$ так, чтобы имело место условие E) при $k = 0$.

Предположим теперь, что $k > 0$ и уже определены последовательности $\{M_s\}_{s=0}^{k-1}$, $\{N_s\}_{s=0}^{k-1}$, $\{j_s\}_{s=0}^{k-1}$, $\{i_s\}_{s=0}^{k-1}$, удовлетворяющие условию A), и точки $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=0}^{j_{k-1}+1}$, удовлетворяющие соотношениям a), c) и d). Тогда функция $F = f \circ \tau$ определяется равенством (6) в точках $\frac{i}{2^j}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^j$, $j = 0, 1, \ldots, j_{k-1} + 1$, В силу (1) и (4) определены функции $\phi_s = A_{j_s, i_s} \varphi_{j_s}^{(i_s)}$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$ и числа δ_k. Теперь определим числа M_k, N_k, j_k, i_k и построим множество точек $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=j_{k-1}+2}^{j_k+1}$. Сначала, учитывая Лемму 1, найдём число $M_k > N_{k-1}$ так, чтобы

$$\sum_{i=-1}^{k-1} \sum_{n=M_k}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \leq \delta_k. \tag{7}$$

Теперь учитывая, что $\|\varphi_j^{(i)}\|_{L^1(0,1)} \to 0$ при $j \to \infty$, выберем число $j_k > j_{k-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n=1}^{M_k} |c_n(\varphi_{j_k}^{(i)})| \le \delta_k, \qquad \sup_{1\le n<\infty} |c_n(\varphi_{j_k}^{(i)})| \le \delta_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^{j_k}. \tag{8}$$

Точки a_j^i мы построим индукцией по $j = j_{k-1} + 2, \ldots, j_k + 1$. Предположим, что точки $\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}$ уже построены и $j_{k-1} + 1 < j \le j_k$. Сначала положим

$$a_{j+1}^{2i} = a_j^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2^j. \tag{9}$$

Построение точек a_{j+1}^{2i-1}, $i = 1, 2, \ldots, 2^j$ разобьём на два случая.

Случай 1. $j < j_k$.

Если для пары (j, i) выполнено (I), то, учитывая непрерывность функции $f(x)$, точку a_{j+1}^{2i-1} мы выберем так, чтобы

$$a_j^{i-1} < a_{j+1}^{2i-1} < a_j^i, \quad \text{и} \quad f\left(a_{j+1}^{2i-1}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(a_j^{i-1}\right) + f\left(a_j^i\right)\right]. \tag{10}$$

Если для пары (j, i) имеет место (II), то полагаем $a_{j+1}^{2i-1} = 1/2\left(\alpha_j^i + \beta_j^i\right)$.

Случай 2. $j = j_k$. Пусть $\left(a_j^{i_k-1}, a_j^{i_k}\right)$ - наибольший из интервалов (или один из наибольших) $\left(a_j^{i-1}, a_j^i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^j$. Если $i \ne i_k$, то точка a_{j+1}^{2i-1} строится так же как в Случае 1. Если $i = i_k$, то точка a_{j+1}^{2i-1} строится следующим образом.

Если в интервале $\left(a_j^{i-1} + \frac{1}{4}(a_j^i - a_m^{i-1}), a_j^i - \frac{1}{4}(a_j^i - a_j^{i-1})\right)$ найдётся такая точка ξ, что $f(\xi) \ne f(a_j^{i-1})$, $f(\xi) \ne f(a_j^i)$, то полагаем $a_{j+1}^{2i-1} = \xi$. В противном случае $f(x) = \text{const}$ на этом интервале, причём $f(x) = f(a_j^{i-1})$ или $f(x) = f(a_j^i)$). В этом случае полагаем $a_{j+1}^{2i-1} = \frac{1}{2}\left(a_j^{i-1} + a_j^i\right)$.

В обоих случаях мы будем иметь

$$\max\left\{a_{j+1}^{2i-1} - a_{j+1}^{2i-2},\ a_{j+1}^{2i} - a_{j+1}^{2i-1}\right\} \le \frac{3}{4}\left(a_j^i - a_j^{i-1}\right). \tag{11}$$

Следовательно, точки $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=j_{k-1}+2}^{j_k+1}$ построены. Используя Лемму 1, выберем число $N_k > M_k$ так, чтобы

$$\sum_{n=N_k}^{\infty} |c_n(\varphi_{j_k}^{(i_k)})| \le \delta_k. \tag{12}$$

Продолжая указанный процесс, мы определим точки $\left\{\{a_j^i\}_{i=0}^{2^j}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Выполнение условий a), c) и d) вытекает непосредственно из построения (см., в частности, (9) и (10)). Так как для каждого $k = 1, 2, \ldots$ наибольший из интервалов $\left(a_{j_k}^{i-1}, a_{j_k}^i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{j_k}$ делится точкой $a_{j_k+1}^{2i_k-1}$ на две части, длины которых меньше $\frac{3}{4} \max\limits_{1 \le i \le 2^{j_k}} \left(a_{j_k}^i - a_{j_k}^{i-1}\right)$ (см. (11)), то условие b) также выполнено.

Следовательно, построен гомеоморфизм τ (см. (6)). Теперь проверим выполнение условий **A)** — **E)**. Условие **A)** вытекает непосредственно из построения. Условие **B)** следует из (1), (6) и свойства c) точек A_j^i. Далее, из (1) и (5) следует, что $|A_{j_k, i_k}| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$, а значит условия **C)**, **D)** и **E)** вытекают из (7), (8) и (12), соответственно. Лемма 2 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Без ограничения общности можем считать, что $f(0) = 0$. Согласно Лемме 2 достаточно показать, что если функция F имеет вид (3) и выполнены условия **A)** — **E)**, то $\lim\limits_{N \to \infty} \|G_N(F) - F\|_C = 0$. Сначала докажем, что

$$|c_n(F)| \ge \frac{3}{4} \sum_{i=-1}^{k} |c_n(\phi_k)|, \quad \text{если} \quad n \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

В силу условия **D)**, Леммы 2 и (4) имеем

$$\left| c_n \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \phi_i \right) \right| \le \sum_{i=k+1}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \le \sum_{i=k+1}^{\infty} \delta_i \le 2\delta_{k+1} \le \frac{1}{4} \left| c_n \left(\sum_{i=-1}^{k} \phi_i \right) \right|.$$

Следовательно

$$|c_n(F)| \ge \left| c_n \left(\sum_{i=-1}^{k} \phi_i \right) \right| - \left| c_n \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \phi_i \right) \right| \ge \frac{3}{4} \sum_{i=-1}^{k} |c_n(\phi_k)|.$$

Теперь докажем, что

$$|c_n(F)| < |c_m(F)|, \quad \text{если} \quad n \in \Omega_k, \quad n \ge M_k, \quad m \in \Omega_j, \ j < k. \tag{14}$$

Действительно, в силу C), D), (4) и (13) получаем

$$|c_n(F)| \le \sum_{i=-1}^{k-1} |c_n(\phi_i)| + \sum_{i=k}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \le \delta_k + \sum_{i=k}^{\infty} \delta_i \le 3\delta_k \le 3\delta_{j+1} \le$$

$$\le \frac{3}{8} \left| c_n \left(\sum_{i=-1}^{j} \phi_i \right) \right| < |c_m(F)| .$$

Рассмотрим последовательность

$$G_N(F, x) = \sum_{n \in \Lambda_N} c_n(F)\, \psi_n(x), \quad x \in [0,1], \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Положим $E_{N,k} = \Lambda_N \cap ([-N_k, N_k] \setminus (-M_k, M_k))$,

$$k_0 = \max\{k : \Omega_k \cap E_{N,k} \ne \emptyset\} . \tag{15}$$

Пусть $n_0 \in E_{N,k_0}$. Согласно (14), если $m \in \Omega_j$, $j < k_0$, то $|c_m(F)| > |c_{n_0}(F)|$. Отсюда следует, что $m \in \Lambda_N$. Поэтому имеем

$$\bigcup_{j=1}^{k_0-1} \Omega_j \subset \Lambda_N . \tag{16}$$

Учитывая (3), будем иметь

$$\begin{aligned} G_N(F, x) = \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{k=-1}^{k_0-1} c_n(\phi_k)\, \psi_n(x) + \sum_{n \in \Lambda_N} c_n(\phi_{k_0})\, \psi_n(x) + \\ + \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_n(\phi_k)\, \psi_n(x) =: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} I_1(x) = \sum_{n=1}^{N_{k_0-1}} c_n \left(\sum_{k=-1}^{k_0-1} \phi_k \right) \psi_n(x) + \\ + \sum_{n \in \Lambda_N,\, n = N_{k_0-1}+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_0-1} c_n(\phi_k)\, \psi_n(x) =: I_1'(x) + I_1''(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Согласно C), E) и (4), имеем

$$|I_1'(x) - F(x)| \le \left|I_1'(x) - \sum_{k=-1}^{k_0-1} \phi_k(x)\right| + \left|F(x) - \sum_{k=-1}^{k_0-1} \phi_k(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=-1}^{k_0-1} \sum_{n=N_{k_0-1}+1}^{\infty} |c_n(\phi_k)| + \gamma_{k_0} \le 2\delta_{k_0-1} + \gamma_{k_0}, \tag{19}$$

где $\gamma_{k_0} = \left\| F - \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \phi_{k_0} \right\|_C$. Аналогично

$$I_1''(x) \le \sum_{k=-1}^{k_0-1} \sum_{n=N_{k_0-1}+1}^{\infty} |c_n(\phi_k)| \le 2\delta_{k_0-1}. \tag{20}$$

По Лемме 1 для величины I_2 имеем следующую оценку :

$$|I_2(x)| \le \|\phi_{k_0}\|_A \le C \cdot \left|A_{j_{k_0}, i_{k_0}}\right|. \tag{21}$$

Чтобы оценить величину I_3 заметим, что из (15) следует, что если $k > k_0$ и $n \in E_{N,k}$, то $n \notin \Omega_k$, т.е. $c_n\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \phi_i\right) = 0$. Следовательно, с учётом c), получаем

$$\sum_{n \in E_{N,k}} |c_n(\phi_k)| = \sum_{n \in E_{N,k}} \left| c_n\left(\sum_{i=-1}^{k-1} \phi_i\right)\right| \le \sum_{i=-1}^{k-1} \sum_{n=M_k}^{\infty} |c_n(\phi_i)| \le \delta_k.$$

Отсюда находим, что при $k > k_0$

$$\sum_{n \in \Delta_N} |c_n(\phi_k)| \le \sum_{n=1}^{M_k-1} |c_n(\phi_k)| + \sum_{n \in E_{N,k}} |c_n(\phi_k)| + \sum_{n=N_k+1}^{\infty} |c_n(\phi_k)| \le 3\delta_k.$$

Следовательно

$$I_3 \le \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{n \in \Delta_N} |c_n(\phi_k)| \le 3 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \delta_k \le 3\delta_{k_0}. \tag{22}$$

Из (17) – (22) получим, что $\|G_N(F) - F\|_C \leq 4\delta_{k_0-1} + 3\delta_{k_0} + \gamma_{k_0} + C \cdot \left|A_{j_{k_0}, i_{k_0}}\right|$. Так как $k_0 \to \infty$ при $N \to \infty$, то из (13) и (15) получаем $\lim\limits_{N \to \infty} \|G_N(F) - F\|_{C(0,1)} = 0$. Теорема 1 доказана.

Abstract. The paper proves that for every continuous $f(x) \in C(0,1)$ there exists a homeomorphism τ of the segment $[0,1]$ such that the greedy approximations of superposition $F = f \circ \tau$ by both Walsh and trigonometric systems uniformly converge to F.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. N. Temlyakov, "Nonlinear Methods of Approximation", Industrial Mathematics Institute Research Report, 2001 :09 (preprint).
2. G. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Greedy Approximation with regard to Bases and General Minimal Systems", Industrial Mathematics Institute Research Report, 2002 :16 (preprint).
3. V. N. Temlyakov, "Greedy Algorithm and m-term Trigonometric Approximation", Constructive Approx., vol. 14, pp. 569 — 587, 1998.
4. T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Annals of Mathematics, vol. 144, pp. 167 — 180, 1996.
5. T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applicationa, vol. 5, pp. 1 — 19, 1999.
6. G. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Covergence of Greedy Approximation II, The Trigonometric System, Industrial Mathematics Institute Research Report, 2002 :09 (preprint).
7. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физ.Мат.Гиз, 1961.
8. А. А. Саакян, "О теореме Бора для кратных рядов Фурье", Мат. Заметки, том 64, № 6, стр. 913 — 924, 1998.
9. А. А. Саакян, "О свойствах коэффициентов Фурье суперпозиции функций", ДАН СССР, том 248, № 2, стр. 302 — 306, 1979.
10. J.-P. Kahane, Y. Katznelson, "Series de Fourier des functions bornees", Studies in Pure Math. a la Memoire de P. Turan, "Acad. Kiado", Budapest, pp. 395 — 410, 1983.
11. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.

Поступила 25 мая 2002

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 4, 2002, 73–80

РАЗРЕШИМОСТЬ КОНСЕРВАТИВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУОСИ

Х. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. Используя специальное факторизационное приближение, в работе получены достаточные условия для существования положительного абсолютно непрерывного решения консервативного интегрального уравнения на полуоси и изучено асимптотическое поведение этого решения в бесконечности. Получены аналогичные результаты для уравнений Вольтерра с переменными верхним и нижним пределами, а также для соответствующих однородных уравнений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения решения следующего интегрального уравнения :

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^\infty k(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

с ядром $k(x,t)$, имеющим вид

$$k(x,t) = \frac{1}{2}\int_a^b \alpha(x,s)\,e^{-\alpha(x,s)|x-t|}\,d\sigma(s). \tag{2}$$

Здесь $\alpha(x,s)$ – положительная функция на $[0,+\infty)\times[a,b)$, а $\sigma(s)$ – неубывающая функция на $[a,b)$, $(0\le a<b\le\infty)$, удовлетворяющая условию $\int\limits_a^b d\sigma(s) = 1$. Нетрудно показать, что при любом $x\in[0,+\infty)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,t)\,dt = 1.$$

Пусть $M_+ = M[0,\infty)$ и $L_1^+ = L_1[0,\infty)$ – банаховы пространства существенно ограниченных и суммируемых функций на $[0,\infty)$, соответственно.

Рассмотрим интегральный оператор $K : M_+ \to M_+$ вида

$$(K\varphi)(x) \doteq \int_0^\infty k(x,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $k(x,t)$ – как и в (2). Введём интегральные операторы $K_\pm : M_+ \to M_+$ следующего вида $(K_+\varphi)(x) = \int_0^x k_+(x,t)\,\varphi(t)\,dt$, $(K_-\varphi)(x) = \int_x^\infty k_-(x,t)\,\varphi(t)\,dt$, где

$$k_+(x,t) = \frac{1}{2}\int_a^b \alpha(x,s)\,e^{-\alpha(x,s)(x-t)}\,d\sigma(s), \quad x > t, \tag{3}$$

$$k_-(x,t) = \frac{1}{2}\int_a^b \alpha(x,s)\,e^{-\alpha(x,s)(t-x)}\,d\sigma(s), \quad x < t. \tag{4}$$

Наряду с уравнением (1) нас будет интересовать также асимптотическое поведение решений следующих интегральных уравнений Вольтерра :

$$f(x) = g(x) + \int_0^x k_+(x,t)\,f(t)\,dt, \tag{5}$$

$$F(x) = g(x) + \int_x^\infty k_-(x,t)\,F(t)\,dt. \tag{6}$$

Отметим, что уравнения (1), (5) и (6) встречаются в различных приложениях, в частности, в кинетической теории газов, в теории переноса, в теории вероятностей и т.д. (см. [1] – [4]).

Ниже будет показано, что при наложении некоторых дополнительных ограничений на $\alpha(x,s)$ имеют место нижеследующие утверждения :

- если $g \in M_+$, то уравнение (5) имеет решение, причём $f(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$,
- если $g \in L_1^+ \cap M_+$ и $g(t)$ является неотрицательной и убывающей на $[0,+\infty)$, то уравнение (6) имеет решение, причём $F(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$,
- если $g \in L_1^+ \cap M_+$, $g(x) \geq 0$, то существует положительное, абсолютно непрерывное решение уравнения (1), причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.

Наряду с уравнением (1) рассматривается также соответствующее однородное уравнение, и доказывается, что это уравнение имеет положительное, абсолютно непрерывное решение, причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.

§2. УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С ВЕРХНИМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ

Интегральное уравнение (5) с ядром (3) запишем в операторном виде $(I - K_+)f = g$, где I – единичный оператор. Пусть $V_+ : M_+ \to M_+$ – интегральный оператор следующего вида : $(V_+ f)(x) = \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)}\,f(t)\,dt$, где $\beta > 0$ – постоянная.

Рассмотрим следующую задачу факторизации : для заданного оператора K_+ найти такой оператор W_+, чтобы

$$I - K_+ = (I - W_+)(I - V_+), \tag{7}$$

т.е. выполняется равенство операторов, действующих в M_+. Обозначим через $w_+(x, y)$ искомое ядро оператора W_+. Легко убедиться, что

$$w_+(x, y) = \int_a^b [\alpha(x, s) - \beta]\, e^{-\alpha(x,s)(x-y)}\, d\sigma(s)\, \theta(x - y),$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Согласно (7) уравнение (5) сводится к последовательному решению следующих двух уравнений :

$$(I - W_+)\, \chi = g, \tag{8}$$

$$(I - V_+)\, f = \chi. \tag{9}$$

Лемма. *Пусть $h(x)$ – произвольная функция из пространства M_+. Тогда*

$$|(W_+ h)(x)| \leq \delta\, \|h\|_{M_+}, \tag{10}$$

где

$$\delta = \int_a^b \operatorname{ess} \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| 1 - \frac{\beta}{\alpha(x, s)} \right| d\sigma(s). \tag{11}$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки неравенств :

$$|(W_+ h)(x)| \leq \int_0^x |w_+(x, y)\, h(y)|\, dy \leq$$

$$\leq \|h\|_{M_+} \int_0^x dy \int_a^b e^{-\alpha(x,s)(x-y)}\, |\alpha(x, s) - \beta|\, d\sigma(s) \leq \|h\|_{M_+}\, \delta.$$

Отметим, что из условия $\delta < 1$ следует, что W_+ является сжимающим оператором в пространстве M_+. Следовательно, ряд Неймана функции $g \in M_+$ сходится абсолютно и равномерно на $[0, \infty)$, причём представляет собой решение уравнения (8) (см. [5]) :

$$\chi(x) = g(x) + (W_+ g)(x) + (W_+^2 g)(x) + ... \tag{12}$$

С учётом (10), из (12) и условия $\delta < 1$ получаем, что $|\chi(x)| \leq \|g\|_{M_+}/(1 - \delta)$, т.е.

$$\chi(x) = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{13}$$

Перепишем операторное уравнение (9) в виде

$$f(x) = \chi(x) + \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} f(t)\,dt. \tag{14}$$

Легко проверить, что решение уравнения (14) имеет вид

$$f(x) = \chi(x) + \beta \int_0^x \chi(t)\,dt. \tag{15}$$

Из (13) и (15) следует, что $f(x) = O(x)$ при $x \to \infty$. Итак, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\beta > 0$ и $\alpha(x,s)$ – положительная функция, определённая на $[0,\infty) \times [a,b)$ такая, что $\delta < 1$, где δ – как и в (11). Тогда если $g \in M_+$, то существует единственное, абсолютно непрерывное решение уравнения (5), причём $f(x) = O(x)$ при $x \in \infty$.*

§3. УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С НИЖНИМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ

Интегральное уравнение (6) с ядром (4) запишем в операторной форме $(I - K_-)F = g$, где

$$(K_-F)(x) = \int_x^\infty k_-(x,t)\,F(t)\,dt, \quad K_- : M_+ \to M_+.$$

Введём оператор $V_- : M_+ \to M_+$ по формуле :

$$(V_-F)(x) = \beta \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)}\,F(t)\,dt,$$

где β – положительная постоянная, и рассмотрим следующую задачу факторизации : найти такой оператор W_-, чтобы

$$I - K_- = (I - W_-)(I - V_-). \tag{16}$$

Легко проверить, что ядро $w_-(x,t)$ оператора W_- имеет вид

$$w_-(x,t) = \int_a^b [\alpha(x,s) - \beta]\,e^{-\alpha(x,s)(t-x)}\,d\sigma(s)\,\theta(t-x).$$

Равенство (16) сводит решение уравнения (6) к последовательному решению следующих двух операторных уравнений :

$$(I - W_-)\,\psi = g, \tag{17}$$

$$(I - V_-)\, F = \psi. \tag{18}$$

Пусть $g(x) \in L_1^+ \cap M_+$ – неотрицательная убывающая функция на $[0, +\infty)$. Мы будем искать решение $\psi(x)$ уравнения (17) в виде ряда Неймана

$$\psi(x) = g(x) + (W_- g)(x) + (W_-^2 g)(x) + \dots . \tag{19}$$

Имеем

$$\begin{gathered} |(W_- g)(x)| = \left| \int_x^\infty w_-(x,t)\, g(t)\, dt \right| \le \\ \le \int_x^\infty |w_-(x,t)|\, g(t)\, dt \le g(x) \int_x^\infty |w_-(x,t)|\, dt \le g(x)\, \delta, \end{gathered} \tag{20}$$

где δ – как и в (11). Из (19), (20) и условия $\delta < 1$ следует, что $|\psi(x)| \le g(x)/(1-\delta)$. Так как $g \in L_1^+ \cap M_+$, то имеем $\psi \in L_1^+ \cap M_+$. Из (18) следует, что $F(x) = \psi(x) + \beta \int_x^\infty \psi(t)\, dt$, т.е. $F(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$. Итак, доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\beta > 0$ и $\alpha(x, s)$ – положительная функция, определённая на $[0, \infty) \times [a, b)$ такая, что $\delta < 1$, где δ – как и в (11). Пусть $g(t) \in L_1^+ \cap M_+$ – неотрицательная убывающая функция на $[0, \infty)$. Тогда существует решение уравнения (6), причём $F(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$.*

§4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Перепишем уравнение (1) в операторной форме

$$(I - K)\, \varphi = g, \tag{21}$$

где I – единичный оператор. Рассмотрим следующую задачу факторизации : найти такой оператор Λ, чтобы

$$I - K = (I - V_-)(I - \Lambda)(I - V_+). \tag{22}$$

Обозначим через $T(x,t)$ ядро оператора Λ. После некоторых преобразований получаем

$$T(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_a^b [\alpha(x,s) - \beta]\, e^{-\alpha(x,s)(x-t)}\, d\sigma(s) + \\ + \dfrac{\beta}{2} \displaystyle\int_x^\infty \int_a^b [\alpha(y,s) - \beta]\, e^{-\alpha(y,s)(y-t)}\, d\sigma(s)\, dy, \quad \text{если} \quad x > t \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_a^b [\alpha(x,s) + \beta]\, e^{-\alpha(x,s)(t-x)}\, d\sigma(s) + \\ + \dfrac{\beta}{2} \displaystyle\int_x^t \int_a^b [\alpha(y,s) + \beta]\, e^{-\alpha(y,s)(t-y)}\, d\sigma(s)\, dy + \\ + \dfrac{\beta}{2} \displaystyle\int_t^\infty \int_a^b [\alpha(y,s) - \beta]\, e^{-\alpha(y,s)(y-t)}\, d\sigma(s)\, dy - \beta, \quad \text{если} \quad x < t. \end{cases}$$

Поскольку $g \in L_1^+ \cap M_+$ и в силу (22) получаем, что уравнение (1) сводится к последовательному решению трёх операторных уравнений

$$(I - V_-)H = g, \tag{23}$$

$$(I - \Lambda)F = H, \tag{24}$$

$$(I - V_+)\varphi = F. \tag{25}$$

Из (23) получаем $H(x) = g(x) + \beta \int_x^\infty g(t)\,dt$, т.е. $H(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$. Имеем

$$|(\Lambda\, H)(x)| = \left| \int_0^\infty T(x,t)\, H(t)\, dt \right| \le \|H\|_{M_+} \int_0^\infty |T(x,t)|\, dt. \tag{26}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha(x,s) > \beta > 0$. Имеем

$$\int_0^\infty T(x,t)\, dt = \int_0^x T_+(x,t)\, dt + \lim_{r\to\infty} \int_x^r T_-(x,t)\, dt.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T(x,t)\, dt = 1 - \frac{1}{2} \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(x,s)}\right) e^{-\alpha(x,s)\,x}\, d\sigma(s) - \\ - \frac{\beta}{2} \int_x^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) e^{-\alpha(y,s)\,y}\, d\sigma(s)\, dy + \\ + \lim_{r\to\infty} \frac{\beta}{2} \int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) e^{-\alpha(y,s)(y-r)}\, dy\, d\sigma(s) - \\ - \lim_{r\to\infty} \frac{\beta}{2} \int_x^r \int_a^b \left(1 + \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) e^{-\alpha(y,s)(r-y)}\, dy\, d\sigma(s). \end{aligned} \tag{27}$$

Заметим, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\beta}{2} \int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) e^{-\alpha(y,s)(y-r)}\, dy\, d\sigma(s) = 0, \tag{28}$$

если $\int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) dy\, d\sigma(s) < +\infty$. В силу (27) и (28) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty T(x,t)\, dt = 1 - \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \int_x^r \int_a^b \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\, e^{-\alpha(y,s)(r-y)}\, dy\, d\sigma(s) \le \\ \le 1 - \frac{\beta}{2} \lim_{r\to\infty} \int_a^b \frac{\beta}{\alpha_0^2(s)} \left[1 - e^{-\alpha_0(s)(r-x)}\right] d\sigma(s) = \\ = \int_a^b \left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha_0^2(s)}\right) d\sigma(s), \quad \text{если} \quad \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{\alpha_0^2(s)} < \infty, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\alpha_0(s) = \mathrm{ess}\sup_{x\in[0,+\infty)} \alpha(x,s). \tag{30}$$

Положим

$$\rho_1 = \int_a^b \left(1 - \frac{\beta^2}{2\,\alpha_0^2(s)}\right) d\sigma(s) < 1, \tag{31}$$

Используя (26) и (29), получаем $|(\Lambda\, H)(x)| \le \|H\|_{M_+}\,\rho_1$, т.е оператор Λ является сжимающим оператором в пространстве M_+. Из (24), (26) и (31) приходим к оценке $|F(x)| \le \|H\|_{M_+}/(1-\rho_1)$, т.е $F(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$. Из (25) легко следует, что $\varphi(x) = F(x) + \beta\int_0^x F(t)\,dt$. Следовательно, $\varphi(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены следующие условия :*

1) $\alpha(x,s) > \beta > 0$ *и* $\int_a^b \dfrac{d\sigma(s)}{\alpha_0^2(s)} < +\infty$, *где* $\alpha_0(s)$ *– как и в (30),*

2) *существует* $r_0 > 0$ *такое, что для* $r > r_0$ *имеем*

$$\int_r^\infty \int_a^b \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(y,s)}\right) dy\, d\sigma(s) < +\infty,$$

3) $g \in L_1^+ \cap M_+$ *и* $g \ge 0$.

Тогда существует положительное, абсолютно непрерывное решение уравнения (1), причём $\varphi(x) = O(x)$ *при* $x \to +\infty$.

§5. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение (21) при $g = 0$. С учётом (22) получаем

$$(I - V_-)(I - \Lambda)(I - V_+)\,\varphi = 0. \tag{32}$$

Обозначим $(I - V_+)\,\varphi = \varphi_1$ и $(I - \Lambda)\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда факторизация уравнения (32) сводит его решение к решению следующих трёх уравнений

$$(I - V_-)\,\varphi_2 = 0, \tag{33}$$

$$(I - \Lambda)\,\varphi_1 = \varphi_2, \tag{34}$$

$$(I - V_+)\,\varphi = \varphi_1, \tag{35}$$

Очевидно, что $\varphi_2(x) \equiv 1$ является решением уравнения (33). Перейдём к уравнению (34). Имеем $\varphi_1(x) = 1 + \int_0^\infty T(x,t)\,\varphi_1(t)\,dt$. В силу (31) получаем $|\varphi_1(x)| \le 1/(1-\rho_1)$, т.е.

$$\varphi_1(x) = O(1) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{36}$$

Уравнение (35) можно записать в виде $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} \varphi(t)\,dt$. Следовательно, получаем

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \beta \int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \tag{37}$$

Из (36) и (37) вытекает, что $\varphi(x) = O(x)$ при $x \to \infty$.

Теорема 4. *Если выполняются условия 1) и 2) Теоремы 3, то существует положительное, абсолютно непрерывное решение уравнения (1), причём $\varphi(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.*

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за постановку задачи и полезные советы.

Abstract. Using a special factorization approach, the paper obtains sufficient conditions for existence of positive absolutely continuous solution of a conservative integral equation on the half-line and studies the asymptotic behavior of the solution at infinity. Similar results for Volterra equations with upper and lower variable limits as well as for corresponding homogeneous equations are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свёртки в кинетической теории", Ж. Выч. математики и математической физики, том 38, № 3, стр. 466 — 482, 1998.
2. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и её Приложения, Москва, Мир, 1984.
3. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анализ, Москва, том 22, стр. 175 — 244, 1984.
4. В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, Уравнения Математической Физики, Физ. Мат. Лит., Москва, 2000.
5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Москва, Наука, 1981.
6. Р. Беллман, К. Л. Кук, Дифференциально–Разностные Уравнения, Москва, Мир, 1967.

Поступила 10 июля 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 4, 2002, 81-88

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ВАТСОНА

С. А. Акопян

Ереванский государственный университет
e-mail : sarhak@ysu.am

Резюме. Работа обобщает хорошо известную теорему Ватсона об обобщённых интегральных преобразованиях с ядрами $k(xy)$ на случай, когда ядро имеет вид $k_1(xy) + k_2(xy)$. В частности, в классе $L^2(0,+\infty)$, получено обращение интегрального преобразования с ядром $\sin(xy) + \cos(xy)$.

Хорошо известна следующая теорема Ватсона (см. [1], [2]).

Теорема A. *Пусть $\mathcal{K}(s)$ функция, определённая на линии $Re\, s = \frac{1}{2}u$ и удовлетворяющая условиям*

$$a)\, \mathcal{K}(s)\,\overline{\mathcal{K}}(1-s) = 1, \qquad b)\, |\mathcal{K}(s)| = 1,$$

а функция $\widetilde{k}(x)$ задана формулой

$$\frac{\widetilde{k}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\, l.i.m._{T\to+\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{K}(s)}{1-s}\, x^{-s}\, ds.$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L^2(0,+\infty)$ формула

$$g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\overline{\widetilde{k}}(xu)}{u}\, f(u)\, du \tag{1}$$

определяет почти всюду функцию $g(x) \in L^2(0,+\infty)$. Почти всюду имеет место двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\widetilde{k}(xu)}{u}\, g(u)\, du \tag{2}$$

причём

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |g(x)|^2\,dx. \tag{3}$$

Отметим также следствие этой теоремы :

Пусть в дополнение к условиям Теоремы А функция $\widetilde{k}(x)$ абсолютно непрерывна, причём

$$\widetilde{k}(x) = \int_0^\infty k(t)\,dt.$$

Тогда формулы (1) и (2) могут быть записаны в виде пределов в среднем :

$$g(x) = \mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to\infty} \int_0^\sigma \overline{k}(xu)\,f(u)\,du, \tag{1'}$$

$$f(x) = \mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to\infty} \int_0^\sigma k(xu)\,g(u)\,du. \tag{2'}$$

В настоящей статье рассматриваются интегральные преобразования с ядрами вида $k_1(xy) + k_2(xy)$, где функции $k_1(x)$ и $k_2(x)$ такие, что их преобразования Меллина $\mathcal{K}_1(s)$ и $\mathcal{K}_2(s)$ удовлетворяют условиям Теоремы Ватсона, т.е.

$$\mathcal{K}_1(s)\,\overline{\mathcal{K}}_1(1-s) = 1,\ \mathcal{K}_2(s)\,\overline{\mathcal{K}}_2(1-s) = 1, \quad |\mathcal{K}_1(s)| = 1,\ |\mathcal{K}_2(s)| = 1 \text{ на } \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}.$$

Введём обозначения : $\mathcal{H}_1(s) := \mathcal{K}_1(s)\,\overline{\mathcal{K}}_2(1-s)$, $\mathcal{H}_2(s) := \mathcal{K}_2(s)\,\overline{\mathcal{K}}_1(1-s)$, так что $\mathcal{H}_1(s)\,\overline{\mathcal{H}}_1(1-s) = 1$, $\mathcal{H}_2(s)\,\overline{\mathcal{H}}_2(1-s) = 1$, $|\mathcal{H}_1(s)| = 1$, $|\mathcal{H}_2(s)| = 1$, $\mathcal{H}_2(s) = \overline{\mathcal{H}}_1(1-s)$ на $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Пусть далее

$$\frac{\widetilde{k}_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{l.i.m.}_{T\to+\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{K}_1(s)}{1-s}\,x^{-s}\,ds,$$

$$\frac{\widetilde{k}_2(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{l.i.m.}_{T\to+\infty} \int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \frac{\mathcal{K}_2(s)}{1-s}\,x^{-s}\,ds,$$

$$\frac{\widetilde{h}_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{l.i.m.}_{T\to+\infty}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\frac{\mathcal{H}_1(s)}{1-s}\,x^{-s}\,ds,$$

$$\frac{\widetilde{h}_2(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{l.i.m.}_{T\to+\infty}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\frac{\mathcal{H}_2(s)}{1-s}\,x^{-s}\,ds.$$

Теорема 1. *Для любой функции $f(x)\in L^2(0,\infty)$, функции*

$$g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty\left(\frac{\overline{\widetilde{k}_1}(xy)}{y}+\frac{\overline{\widetilde{k}_2}(xy)}{y}\right)f(y)\,dy, \tag{4}$$

$$g_1(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \widetilde{h}_1(x/t)\,f(t)\,dt, \tag{4_1}$$

$$g_2(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \widetilde{h}_2(x/t)\,f(t)\,dt \tag{4_2}$$

определены почти всюду и принадлежат классу $L^2(0,+\infty)$. Имеют место почти всюду равенства

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{\widetilde{k}_1(xy)}{y}\,g(y)\,dy - g_1(x), \tag{5_1}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{\widetilde{k}_2(xy)}{y}\,g(y)\,dy - g_2(x), \tag{5_2}$$

а также

$$\int_0^\infty |g(x)|^2\,dx \le 4\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx, \tag{6}$$

$$\int_0^\infty |g_1(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |f(x)|^2\,dx, \tag{6_1}$$

$$\int_0^\infty |g_2(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |f(x)|^2\,dx. \tag{6_2}$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in L^2(0,+\infty)$ и $\mathcal{F}(s)$ – её преобразование Меллина, определённое по формуле

$$\mathcal{F}(s) = \mathrm{l.i.m.}_{\alpha\to+\infty}\int_{1/\alpha}^{\alpha} f(x)\,x^{s-1}\,dx,\qquad \mathrm{Re}\,s = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что $\mathcal{F}(s) \in L^2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$. Так как $|\mathcal{K}_1(s)| = 1$, $|\mathcal{K}_2(s)| = 1$ то функции $\overline{\mathcal{K}}_1(s)\,\mathcal{F}(1-s)$ и $\overline{\mathcal{K}}_2(s)\,\mathcal{F}(1-s)$ также принадлежат классу $L^2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$. Пусть $g(x)$ – преобразование Меллина функции $\mathcal{G}(s) := \left(\overline{\mathcal{K}}_1(s) + \overline{\mathcal{K}}_2(s)\right)\,\mathcal{F}(1-s)$. Имеем

$$\int_0^x g(t)\,dt = \frac{x}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\overline{\mathcal{K}}_1(s) + \overline{\mathcal{K}}_2(s)}{1-s}\,\mathcal{F}(1-s)\,x^{-s}\,ds.$$

В силу формулы Парсеваля для преобразования Меллина получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{\overline{\mathcal{K}}_1(s) + \overline{\mathcal{K}}_2(s)}{1-s}\,\mathcal{F}(1-s)\,x^{-s}\,ds = \int_0^\infty \frac{\bar{\bar{k}}_1(xy) + \bar{\bar{k}}_2(xy)}{xy}\,f(y)\,dy,$$

Следовательно,

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{\bar{\bar{k}}_1(xy)}{y} + \frac{\bar{\bar{k}}_2(xy)}{y}\right) f(y)\,dy.$$

Откуда следует, что почти всюду имеет место равенство (4). Легко проверяются равенства

$$\mathcal{K}_1(s)\,\mathcal{G}(1-s) = \mathcal{F}(s) + \mathcal{H}_1(s)\,\mathcal{F}(s), \qquad \mathcal{K}_2(s)\,\mathcal{G}(1-s) = \mathcal{F}(s) + \mathcal{H}_2(s)\,\mathcal{F}(s). \quad (7)$$

Рассмотрим функции $\mathcal{G}_1(s) := \mathcal{H}_1(s)\,\mathcal{F}(s)$, $\mathcal{G}_2(s) := \mathcal{H}_2(s)\,\mathcal{F}(s)$, которые принадлежат классу $L^2(1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty)$. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – функции из класса $L^2(0, +\infty)$, двойственные по Меллину функциям $\mathcal{G}_1(s)$ и $\mathcal{G}_2(s)$, соответственно. Имеем

$$x^{1-s}\,\frac{\mathcal{K}_{1,2}(s)}{1-s} = \text{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}\int_{1/\alpha}^{\alpha} \frac{\widetilde{k}_{1,2}(xy)}{g}\,y^{s-1}\,dy,$$

$$x^{1-s}\,\frac{\mathcal{H}_{1,2}(s)}{1-s} = \text{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}\int_{1/\alpha}^{\alpha} \frac{\widetilde{h}_{1,2}(xy)}{g}\,y^{s-1}\,dy,$$

$$\mathcal{F}(1-s) = \text{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}\int_{1/\alpha}^{\alpha} \frac{1}{y}\,f(1/y)\,y^{s-1}\,dy, \; \mathcal{G}_{1,2}(s) = \text{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}\int_{1/\alpha}^{\alpha} g_{1,2}(y)\,y^{s-1}\,dy,$$

здесь $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. Следовательно, по равенству Парсеваля для преобразования Меллина имеем

$$\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}\, g(y)\, dy = \int_0^x f(y)\, dy + \int_0^x g_1(y)\, dy, \quad \int_0^\infty \frac{k_2(xy)}{y}\, g(y)\, dy =$$

$$= \int_0^x f(y)\, dy + \int_0^x g_2(y)\, dy,$$

где

$$g_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\widetilde{h}_1(xy)}{y}\, \frac{1}{y}\, f(1/y)\, dy = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \widetilde{h}_1(x/t)\, f(t)\, dt,$$

$$g_2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\widetilde{h}_2(xy)}{y}\, \frac{1}{y}\, f(1/y)\, dy = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \widetilde{h}_2(x/t)\, f(t)\, dt.$$

Откуда следует, что почти всюду имеют место равенства (5_1) и (5_2). Наконец, так как $|\mathcal{G}(s)| \le 2\,|\mathcal{F}(1-s)|$, $|\mathcal{G}_1(s)| = |\mathcal{G}_2(s)| = |\mathcal{F}(s)|$, то получаем

$$\int_0^\infty |g(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}(1/2 + i\,t)|^2\, dt \le \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 - i\,t)|^2\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 + i\,t)|^2\, dt = 4 \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx,$$

$$\int_0^\infty |g_1(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}_1(1/2 + i\,t)|^2\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 + i\,t)|^2\, dt = \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx,$$

$$\int_0^\infty |g_2(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}_2(1/2 + i\,t)|^2\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}(1/2 + i\,t)|^2\, dt = \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx,$$

что завершает доказательство Теоремы 1.

Следствие. *Пусть в дополнение к условиям Теоремы 1, функции* $\widetilde{k}_1(x)$, $\widetilde{k}_2(x)$, $\widetilde{h}_1(x)$, $\widetilde{h}_2(x)$ *абсолютно непрерывны, причём*

$$\widetilde{k}_1(x)=\int_0^x k_1(t)\,dt,\ \widetilde{k}_2(x)=\int_0^x k_2(t)\,dt,\ \widetilde{h}_1(x)=\int_0^x h_1(t)\,dt,\ \widetilde{h}_2(x)=\int_0^x h_2(t)\,dt. \tag{8}$$

Тогда формулы (4) и (5) могут быть записаны в виде пределов в среднем

$$g(x)=\mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty}\int_0^\sigma(\overline{k}_1(xy)+\overline{k}_2(xy))\,f(y)\,dy, \tag{9}$$

$$g_1(x)=\mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty}\int_0^\sigma h_1\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\,f(t)\,dt, \tag{9_1}$$

$$g_2(x)=\mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty}\int_0^\sigma h_2\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\,f(t)\,dt, \tag{9_2}$$

и

$$f(x)=\mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty}\int_0^\sigma k_1(xy)\,g(y)\,dy-g_1(x)=\mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty}\int_0^\sigma k_2(xy)\,g(y)\,dy-g_2(x). \tag{10}$$

Доказательство. Обозначив

$$g(x,\sigma)=\int_0^\sigma(\overline{k}_1(xy)+\overline{k}_2(xy))\,f(y)\,dy,\quad(\sigma>0),$$

из (8) получаем

$$g(x,\sigma)=\frac{d}{dx}\int_0^\sigma\left(\frac{\overline{\overline{k}}_1(xy)}{y}+\frac{\overline{\overline{k}}_2(xy)}{y}\right)f(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$g(x)-g(x,\sigma)=\frac{d}{dx}\int_\sigma^{+\infty}\left(\frac{\overline{\overline{k}}_1(xy)}{y}+\frac{\overline{\overline{k}}_2(xy)}{y}\right)f(y)\,dy.$$

В силу неравенства (6)

$$\int_0^{+\infty} |g(x) - g(x,\sigma)|^2\, dx \le 4 \int_\sigma^{+\infty} |f(x)|^2\, dx \to 0, \quad (\sigma \to +\infty),$$

откуда следует (9). Аналогично доказываются и формулы (9_1), (9_2) и (10).

В качестве примера рассмотрим функции $k_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$, $k_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$.

Имеем

$$\mathcal{K}_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(s) \sin\frac{\pi}{2}s, \quad \mathcal{K}_2(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(s) \cos\frac{\pi}{2}s,$$

$$\mathcal{H}_1(s) = \tan\frac{\pi}{2}s, \quad \mathcal{H}_2(s) = \cot\frac{\pi}{2}s, \quad h_1(x) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{x^2-1}, \quad h_2(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-x^2}.$$

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$ функции*

$$g(x) = \text{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\sin xy + \cos xy)\, f(y)\, dy, \tag{11}$$

$$g_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\, f(t)}{x^2 - t^2}\, dt, \tag{11_1}$$

$$g_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t\, f(t)}{t^2 - x^2}\, dt \tag{11_2}$$

(интегралы в 11_1, 11_2 понимаются в смысле главного значения по Коши), принадлежат классу $L^2(0,\infty)$. Почти всюду имеют место следующие равенства :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \text{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} \int_0^\sigma \sin(xy)\, g(y)\, dy - g_1(x), \tag{12_1}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \text{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} \int_0^\sigma \cos(xy)\, g(y)\, dy - g_2(x). \tag{12_2}$$

Отметим также, что используя формулы (11_1) и (11_2), из (12_1) и (12_2) получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} \int_0^\sigma (\sin xy + \cos xy)\, g(y)\, dy - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}\, dt. \qquad (13)$$

Обращение интегрального преобразования (11) можно получить также и в другом виде.

Пусть $f(x) \in L^2(0,+\infty)$ и

$$g_\sigma(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma f(y) \sin(\frac{\pi}{2}\mu - xy)\, dy, \quad (\sigma > 0, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{5}{2}).$$

По теореме М. М. Джрбашяна (см. [2], стр. 211, Теорема 4.2), существует функция $g(x)$ из класса $L^2(0,+\infty)$ такая, что $g(x) = \mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} g_\sigma(x)$. Обратно, если обозначить

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma E_{1/2}(-x^2 y^2, \mu)(xy)^{\mu-1}\, g(y)\, dy,$$

то получаем $\mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} f_\sigma(x) = f(x)$, где $E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{z^k}{\Gamma(k/\rho+\mu)}$ – целая функция типа Миттаг–Лефлера. В этой теореме, полагая $\mu = 3/2$, получаем следующие двойственные формулы :

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} \int_0^\sigma (\sin xy + \cos xy)\, f(y)\, dy,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{l.i.m.}_{\sigma\to+\infty} \int_0^\sigma \sqrt{xy}\, E_{1/2}(-x^2 y^2, \frac{3}{2})\, g(y)\, dy.$$

Abstract. The paper extends a well-known theorem by Watson on generalized integral transformations with kernels $k(xy)$ to the case where the kernel has the form $k_1(xy) + k_2(xy)$. In particular, within the class $L^2(0,+\infty)$, an inversion of integral transformation with kernel $\sin(xy) + \cos(xy)$ is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, М. – Л., 1948.
2. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Москва, Наука, 1966.

Поступила 13 марта 2002

2002, h.37, n4

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 37, Номер 4, 2002

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 37, No. 4, 2002

Contents