

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն. Հ. Առաքելյան
Գ. Գ. Գևորգյան
Վ. Ս. Զաքարյան
Ա. Ա. Թալալյան
Ն. Ե. Թովմասյան
Վ. Ա. Մարտիրոսյան

Ս. Ն. Մերգելյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Ա. Բ. Ներսիսյան
Ռ. Լ. Շախբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Ա. Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян
Г. Г. Геворкян
В. С. Закарян
А. Г. Камалян
В. А. Мартиросян
С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян
А. Б. Нерсесян
А. А. Талалян
Н. Е. Товмасян
Р. Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief R. V. Ambartzumian

N. U. Arakelyan
G. G. Gevorkyan
A. G. Kamalian
V. A. Martirosian
S. N. Mergelyan
B. S. Nahapetian

A. B. Nersesyan
R. L. Shakhbagyan (Associate Editor)
A. A. Talalyan
N. E. Tovmasian
V. S. Zakarian

Executive Secretary M. A. Oganessian

ИНДЕКС И КОИНДЕКС УНИТАРНОГО ПОЛИНОМА НАД ПОЛУПРОСТОЙ КОММУТАТИВНОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРОЙ

Б. Т. Батикян

Институт математики НАН Армении

e-mail : bag@instmath.sci.am

Резюме. В статье показано, что индекс и коиндекс унитарного полинома $p \in A[t]$ характеризуют алгебраическое расширение $A[t]/(p)$ алгебры A и соответствующее накрытие π_p спектра A .

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть A и B – коммутативные банаховы алгебры с единицей. Алгебра B называется расширением алгебры A , если алгебру A можно непрерывно вложить в B в качестве замкнутой подалгебры, имеющей с B общую единицу. В дальнейшем будем отождествлять алгебру A с соответствующей подалгеброй расширения B . Расширение B называют алгебраическим, если каждый элемент алгебры B алгебраичен над A , т.е. если для каждого $b \in B$ найдутся такие элементы $a_0, a_1, \dots, a_m$ из A , что

$$a_m b^m + \dots + a_1 b + a_0 = 0.$$

В настоящей статье рассматривается важный специальный класс алгебраических расширений : конечные расширения вида $A[t]/(p)$, порождённые унитарными полиномами. Впервые подобного рода расширения банаховых алгебр исследовались в работе [1], и поэтому называются расширениями Аренса–Гофмана. Мы определяем и изучаем две алгебраические величины, которые тесно связаны с расширениями Аренса–Гофмана.

Пусть p – унитарный полином над полупростой банаховой алгеброй A , и пусть $\text{Rad}(p)$ – радикал главного идеала в $A[t]$, образованного полиномом p . Минимум степеней унитарных полиномов, содержащихся в $\text{Rad}(p)$ называется A -индексом полинома p и обозначается через $i_A(p)$. Всякий унитарный полином

из $\text{Rad}(p)$, степень которого равна $i_A(p)$, будем называть минимальным полиномом для p . Минимум степеней всех ненулевых полиномов из $\text{Rad}(p)$ называется A -коиндексом полинома p и обозначается через $l_A(p)$.

Мы докажем (Теорема 3.2), что индекс и коиндекс характеризуют A -модульную структуру алгебры преобразований Гельфанда расширения $B = A[t]/(p)$. Если $i_A(p) = l_A(p)$, то либо сам полином p является минимальным, и тогда расширение B есть полупростая алгебра, либо минимальный полином делит p , а алгебра $\widehat{B}$ изоморфна алгебраическому расширению A , порождённому минимальным полиномом (Теоремы 2.2 и 3.4).

Хорошо известно (см. [2]), что расширение $A[t]/(p)$ индуцирует конечнолистное и, вообще говоря, разветвлённое накрытие π_p спектра алгебры A . В работе показано, что индекс и коиндекс полинома p существенно зависят от топологических инвариантов этого накрытия. В частности, условие $i_A(p) = 1$ эквивалентно гомеоморфности отображения π_p (Теорема 2.3). Согласно результатам из [3] “предельное” значение индекса полинома p можно интерпретировать как индекс ветвления в точке накрытия π_p . В ряде интересных случаев (Теорема 3.5) равенство $i_A(p) = l_A(p)$ обеспечивает совпадение множества точек ветвления спектра полинома p с множеством кратных точек его минимального полинома. Часть результатов настоящей работы была анонсирована в [3].

§1. ПОЛИНОМЫ НАД БАНАХОВОЙ АЛГЕБРОЙ

Настоящий параграф содержит необходимые сведения относительно расширений Аренса–Гофмана и конечнолистных накрытий.

Спектр полинома. Пусть A – коммутативная банахова алгебра с единицей, и пусть X – спектр алгебры A (X – компактное пространство максимальных идеалов). Рассмотрим алгебру $A[t]$ всех полиномов над A от независимой переменной t . Всякому такому полиному

$$q(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad (1.1)$$

степени $\deg q = n \geq 1$ можно сопоставить непрерывную на $X \times \mathbb{C}$ функцию

$$\bar{q}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \widehat{a_k}(x) \lambda^k, \quad (1.2)$$

где $\widehat{a_k}$ – преобразование Гельфанда элемента $a_k \in A$, и полином

$$q_r(t) = \sum_{k=0}^n \widehat{a_k}(x) t^k$$

с комплексными коэффициентами ($q_x \in \mathbb{C}[t]$), где x – произвольная точка из X .

Множество

$$S(q) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{C} : q_x \neq 0 \text{ и } \bar{q}(x, \lambda) = 0\}$$

называется спектром полинома q . Если точка $y = (x, \lambda)$ принадлежит $S(q)$, то число λ является корнем полинома q_x степени меньше или равной n . Кратность λ как корня уравнения $q_x(t) = 0$ называется кратностью точки y и обозначается через $\omega(y)$.

Полином (1.1) называется унитарным, если его старший коэффициент a_n есть единичный элемент алгебры A . Совокупность всех унитарных полиномов над алгеброй A будет обозначаться через $A_U[t]$. Понятно, что если p – унитарный полином, то его спектр $S(p)$ компактен и непуст.

Всякий полином $p \in A_U[t]$ определяет непрерывное отображение

$$\pi_p : (x, \lambda) \mapsto x$$

спектра $S(p)$ на X . Ясно, что для каждого $x \in X$ прообраз $\pi_p^{-1}(x)$ содержит не более $\deg p$ точек. Согласно важной теореме Линдберга ([2], Теорема 1.2), отображение π_p открыто, т.е. π_p представляет собой конечнолистное покрытие. Более того, справедливо следующее утверждение [2] (см. также [4]).

Лемма 1.1. Если $x_0 \in X$ и $\pi_p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_m\}$, то существуют окрестность U точки x_0 и попарно непересекающиеся окрестности $V_1, V_2, \dots, V_m$ точек $y_1, y_2, \dots, y_m$ такие, что

$$(i) \quad \pi_p^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^m V_j;$$

$$(ii) \quad \pi_p(V_j) = U, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$(iii) \quad \text{для всякого } x \in U \text{ сумма кратностей точек множества } \pi_p^{-1}(x) \cap V_j \text{ равна } \omega(y_j).$$

В этом случае будем говорить, что окрестность U правильно накрыта отображением π_p .

Дискриминант $\mathcal{D}(p)$ унитарного полинома p , т.е. результат p и его формальной производной по t является элементом алгебры A . Если преобразование Гельфанда дискриминанта $\mathcal{D}(p)$ не обращается в нуль в точке x , то

$$\text{card } \pi_p^{-1}(x) = \deg p, \tag{1.3}$$

и кратность любой точки слоя $\pi_p^{-1}(x)$ равна 1.

Пусть q и p – полиномы из $A[t]$, соответственно, степеней n и m ($n \geq m$). Согласно алгоритму деления полиномов (см. [5], стр. 43) существуют полиномы r и s такие, что $\deg s < m$ и

$$c_m^k q = pr + s, \quad (1.4)$$

где c_m – старший коэффициент полинома p , а $k = n - m + 1$. Если полином p унитарен, то полиномы r и s определяются однозначно.

Алгебраическое расширение банаховой алгебры. Пусть

$$p(t) = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0 \quad (1.5)$$

есть унитарный полином степени $n \geq 1$ над алгеброй A . Через (p) обозначим главный идеал в $A[t]$, образованный полиномом p .

Алгебраическим расширением алгебры A , порождённым полиномом p , называется фактор-алгебра $B = A[t]/(p)$. Возникающий канонический эпиморфизм $\tau: A[t] \rightarrow B$ сопоставляет каждому полиному q его остаток s из равенства (1.4).

Алгебра B реализуется как алгебра полиномов от t степени не выше $n - 1$, произведение которых подчинено соотношению

$$t^n = -c_{n-1} t^{n-1} - \dots - c_1 t - c_0.$$

Отождествляя полиномы нулевой степени с элементами алгебры A , можем считать, что A является подалгеброй алгебры B . Норма в алгебре B определяется равенством

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \|a_k\| \delta^k,$$

где δ – произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $\delta^n \geq \|c_{n-1}\| \delta^{n-1} + \dots + \|c_1\| \delta + \|c_0\|$. Эта норма согласована с исходной нормой в A и превращает B в коммутативную банахову алгебру [1], содержащую A в качестве замкнутой подалгебры. Спектр алгебры B совпадает с компактом $Y = S(p)$ [1], а определённое выше накрытие $\pi_p: Y \rightarrow X$ есть отображение спектров, двойственное к вложению A в B . Преобразование Гельфанда $\tilde{b}(x, \lambda)$ элемента $b = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$, $n \geq 1$ алгебры B совпадает с сужением $\tilde{b}(x, \lambda)$ на $S(p)$ (см. (1.2)).

Алгебраическое расширение как A -модуль. Всякое расширение алгебры A естественным образом приобретает структуру A -модуля. В частности, если B есть алгебраическое расширение A , порождённое полиномом (1.5), то элементы $t^{n-1}, \dots, t, 1$ являются образующими A -модуля B . Очевидно, что эти образующие линейно независимы над A , так что B – конечный и свободный A -модуль.

Пусть M – некоторый конечный A -модуль. Рангом $\text{rg } M$ модуля M называется максимальное число линейно независимых элементов из M . Корангом $\text{cg } M$ модуля M называется минимальное число образующих этого модуля M .

Для любого конечного A -модуля M имеем $\text{rg } M \leq \text{cg } M < \infty$, однако, вообще говоря, $\text{rg } M \neq \text{cg } M$ (см. [6], стр. 264). Так как расширение $B = A[t]/(p)$ есть свободный A -модуль, то имеем $\text{rg } B = \text{cg } B = \deg p$.

Пусть банаховы алгебры B_1 и B_2 являются расширениями алгебры A . Гомоморфизм расширений $\Phi : B_1 \rightarrow B_2$ называется A -гомоморфизмом или линейным гомоморфизмом, если сужение Φ на A есть тождественное отображение, т.е. если Φ является также гомоморфизмом A -модулей. Наличие линейного гомоморфизма из $A[t]/(p)$ в A эквивалентно разрешимости в A уравнения $p(t) = 0$.

Пусть банаховы алгебры B и D суть расширения алгебр A и C , соответственно. Гомоморфизм $\Phi : B \rightarrow D$ называется полулинейным, если Φ изоморфно отображает A на C (ср. [7], стр. 303).

Кратные точки и точки ветвления. Точка y спектра алгебраического расширения $B = A[t]/(p)$ коммутативной банаховой алгебры A (или спектра полинома $p \in A[t]$) называется

- (i) кратной точкой, если $\omega(y) > 1$;
- (ii) точкой ветвления, если y не обладает окрестностью V такой, что $\pi_p|_V$ инъективно, и простой точкой, если y обладает подобной окрестностью, т.е., если π_p локально гомеоморфно в y .

Согласно Лемме 1.1 всякая точка ветвления является кратной точкой. Множество $\mathcal{R}(p)$ точек ветвления замкнуто, так как множество простых точек, очевидно, открыто. Множество $\mathcal{K}(p)$ всех кратных точек также замкнуто, как множество нулей преобразования Гельфанда формальной производной p' полинома p .

Покажем, что множество точек ветвления нигде не плотно.

Лемма 1.2. Пусть U – открытое подмножество компактного множества X , и $\sigma_U(p) = \max\{\text{card } \pi_p^{-1}(x) : x \in U\}$. Если $x_0 \in U$ и $\text{card } \pi_p^{-1}(x_0) = \sigma_U(p)$, то все точки слоя $\pi_p^{-1}(x_0)$ суть простые точки.

Доказательство. Предположим, что $\pi_p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_m\}$, где $m = \sigma_U(p)$, и окрестность $U_0 \subset U$ точки x_0 правильно накрыта отображением π_p . Согласно Лемме 1.1, имеем $\pi_p^{-1}(U_0) = \bigcup_{j=1}^m V_j$ и $\pi_p(V_j) = U_0$. В силу максимальной $\sigma_U(p)$ накрытие π_p инъективно на каждой окрестности V_j . Доказательство завершено.

Следствие 1.1. Множество $\mathcal{R}(p)$ нигде не плотно в Y .

Доказательство. Так как π_p является открытым отображением, достаточно доказать, что компакт $\pi_p(\mathcal{R}(p))$ нигде не плотен в X . Пусть $x_0 \in \pi_p(\mathcal{R}(p))$ и U – её произвольная окрестность. Тогда существует точка $x \in U$ такая, что $\text{card } \pi_p^{-1}(x) = \sigma_U(p)$. По Лемме 1.2 эта точка не принадлежит $\pi_p(\mathcal{R}(p))$. Следствие 1.1 доказано.

Таким образом, $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ есть открытое и всюду плотное подмножество X . Заметив, что в силу Леммы 1.1 отображение

$$\pi_p : Y \setminus \pi_p^{-1}(\pi_p(\mathcal{R}(p))) \rightarrow X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$$

является безграничным неразветвлённым накрытием, определим величины

$$\sigma(p) = \max\{\text{card } \pi_p^{-1}(x) : x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon(p) = \min\{\text{card } \pi_p^{-1}(x) : x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}.$$

Для всякого целого l такого, что $\varepsilon(p) \leq l \leq \sigma(p)$, определим открытое множество

$$W_l = \{x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)) : \text{card } \pi_p^{-1}(x) = l\}. \quad (1.7)$$

Ясно, что $W_l \cap W_k = \emptyset$ при $l \neq k$ и $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)) = \bigcup W_l$. В частности, если множество $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ связно, то $\varepsilon(p) = \sigma(p)$. Заметим, что в (1.6) множество $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ можно заменить на X , а $\min\{\text{card } \pi_p^{-1}(x) : x \in X\}$, вообще говоря, меньше $\varepsilon(p)$.

Выше уже отмечалось, что имеют место следующие включения :

$$\mathcal{R}(p) \subset \mathcal{K}(p) \subset \pi_p^{-1}(\mathcal{N}(p)), \quad (1.8)$$

где $\mathcal{N}(p) = \{x \in X : \mathcal{D}(p)(x) = 0\}$ – дискриминантное множество.

Покажем, что все включения в (1.8), вообще говоря, строгие.

Пример 1.1. Пусть Δ – открытый круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на комплексной плоскости, и пусть $A(\bar{\Delta})$ – стандартная равномерная алгебра всех тех непрерывных на замкнутом круге $\bar{\Delta}$ функций, которые голоморфны внутри Δ .

Рассмотрим замкнутую подалгебру $A = \{f \in A(\bar{\Delta}) : f'(0) = 0\}$ и её алгебраическое расширение B , порожденное унитарным полиномом $p(t) = t^3 - 12z^2t + 16z^3$ из $A[t]$. Понятно, что p неприводим над A , хотя его дискриминант есть нулевой элемент алгебры A . Заметим также, что спектры алгебры A и $A(\bar{\Delta})$ совпадают с $\bar{\Delta}$. Теперь, если $z \in \bar{\Delta}$ и $z \neq 0$, то $p_z(t) = (t - 2z)^2(t + 4z)$. Следовательно, слой $\pi_p^{-1}(z)$ состоит из двух точек : $(z, 2z)$ – кратности 2 и $(z, -4z)$ – кратности 1. Согласно Лемме 1.2 эти точки простые. Точка $(0, 0) = \pi_p^{-1}(0)$ кратности 3 является единственной точкой ветвления.

§2. ИНДЕКС И КОИНДЕКС УНИТАРНОГО ПОЛИНОМА

Начиная с этого параграфа будем предполагать, что A – полупростая коммутативная банахова алгебра, реализованная как алгебра непрерывных функций на своём спектре X . Заметим, что тогда всякий полином степени $n \geq 1$ над A имеет непустой спектр.

Пусть p – унитарный полином над A степени $n \geq 1$, и пусть (p) – главный идеал алгебры $A[t]$, образованный полиномом p . Напомним ([8], стр. 15), что множество

$$\text{Rad}(p) = \{q \in A[t] : q^k \in (p) \text{ для некоторого } k > 0\}$$

называется радикалом идеала (p) . Радикал $\text{Rad}(p)$ также образует идеал в $A[t]$ и содержит (p) . Если полином r принадлежит $\text{Rad}(p)$, то его некоторая степень делится на p , и поэтому функция $\bar{r}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $S(p)$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $r(t)$ – ненулевой полином над A такой, что $\bar{r}(x, \lambda) = 0$ при $(x, \lambda) \in S(p)$. Тогда для любого $k > 0$ полином $r^k p^{(k)}$ принадлежит идеалу (p) .

Здесь и далее $p^{(k)}$ означает формальную производную полинома p порядка k .

Доказательство. Мы должны доказать, что полином $r^k p^{(k)}$ степени не меньше n делится на p . Согласно алгоритму деления полиномов, существуют полиномы $q(t)$ и $s(t)$ такие, что $\deg s < n$ и $r^k p^{(k)} = pq + s$. Следовательно, для всякого $x \in X$ имеем

$$r_x^k p_x^{(k)} = p_x q_x + s_x. \quad (2.1)$$

Если $r_x^k = 0$, то $s_x = 0$. Предположим, что r_x^k – ненулевой полином над $\mathbb{C}$ и пусть $\pi_p^{-1}(x) = \{(x, \lambda_1), \dots, (x, \lambda_m)\}$. Ясно, что если кратность ω_i точки (x, λ_i) больше чем k , то λ_i есть корень полинома $p_x^{(k)}$ кратности $\omega_i - k$. Согласно условию теоремы каждое из λ_i является корнем полинома r_x^k кратности не менее k . Отсюда и из (2.1) вытекает, что s_x имеет n корней, с учетом кратностей

Определение. Пусть p – унитарный полином над полупростой коммутативной банаховой алгеброй A . Целое число

$$i_A(p) = \min\{\deg w: w \in A_U[t] \cap \text{Rad}(p)\}$$

называется A -индексом p , а всякий унитарный полином w , на котором достигается этот минимум, назовём минимальным полиномом полинома p .

Величина

$$l_A(p) = \min\{\deg r: r \in \text{Rad}(p), r \neq 0\},$$

где минимум берётся по всем (не обязательно унитарным) ненулевым полиномам радикала $\text{Rad}(p)$, называется A -коиндексом полинома p .

Замечание 2.1. В теории расширений полей понятию индекса полинома соответствует понятие степени алгебраического элемента, определяющего простое расширение поля (см. [9], стр. 142). Именно поэтому в [3] число $i_A(p)$ названо степенью алгебраического расширения $B = A[t]/p$. На наш взгляд предлагаемое выше название “ A -индекс полинома” более адекватно и предваряет понятие A -индекса ветвления точки.

Перечислим теперь некоторые свойства индекса и коиндекса унитарного полинома.

- (а) Так как A – полупростая алгебра, то $\text{Rad}(p)$ не содержит полиномов нулевой степени. Поэтому

$$1 \leq l_A(p) \leq i_A(p) \leq \deg(p).$$

- (b) Если полином w принадлежит $A_U[t] \cap \text{Rad}(p)$, то всегда найдется точка $x \in X$ такая, что полином $w_x(t)$ имеет не менее $\sigma(p)$ корней, где $\sigma(p)$ из (1.6). Это означает, что $\deg w \geq \sigma(p)$. Таким образом, индекс полинома p удовлетворяет неравенству

$$\sigma(p) \leq i_A(p) \leq \deg(p). \quad (2.2)$$

- (c) Если дискриминант $\mathcal{D}(p)$ полинома p есть ненулевой элемент A , то согласно (1.3) имеем $\sigma(p) = i_A(p) = \deg p$.
- (d) Если w – минимальный полином для p , то $i_A(w) = i_A(p)$.
- (e) Пусть p_1 и p_2 – унитарные полиномы над алгеброй A . Если $S(p_1) \subset S(p_2)$, то $i_A(p_1) \leq i_A(p_2)$ и $l_A(p_1) \leq l_A(p_2)$. В частности, если спектры полиномов p_1 и p_2 совпадают, то $i_A(p_1) = i_A(p_2)$ и $l_A(p_1) = l_A(p_2)$.

(f) Пусть $\beta: A \rightarrow C$ – гомоморфизм полупростых коммутативных банаховых алгебр, сохраняющий единицу. Тогда β единственным образом продолжается до гомоморфизма $\bar{\beta}: A[t] \rightarrow C[t]$, задаваемого отображением

$$\bar{\beta}: \sum_{k=0}^m a_k t^k \mapsto \sum_{k=0}^m \beta(a_k) t^k.$$

При этом, если $w \in A_U[t] \cap \text{Rad}(p)$, то $\bar{\beta}(w) \in C_U[t] \cap \text{Rad}(\bar{\beta}(p))$ и $\deg w = \deg \bar{\beta}(w)$. Следовательно, $i_C(\bar{\beta}(p)) \leq i_A(p)$. Если гомоморфизм β инъективен, то $l_C(\bar{\beta}(p)) \leq l_A(p)$.

Пример 2.1. Пусть алгебра A та же, что и в Примере 1.1. Рассмотрим унитарный и неприводимый над A полином

$$p(t) = t^4 - 6z^2 t^2 + 8z^3 t - 3z^4 = (t - z)^3(t + 3z). \quad (2.3)$$

Дискриминант $\mathcal{D}(p)$ равен нулю. Так как $(0, 0)$ – единственная точка ветвления в $S(p)$, имеем $\epsilon(p) = \sigma(p) = 2$. Легко видеть, что $\text{Rad}(p)$ не может содержать полиномы степени 1 и унитарных полиномов степени 2. В то же время, согласно Следствию 2.1 полиномы $r(t) = z^2 t^2 + 2z^3 t - 3z^4$ и $w(t) = t^3 - 7z^2 t + 6z^3$ принадлежат $\text{Rad}(p)$. Другими словами, $l_A(p) = 2$ и $i_A(p) = 3$. Отметим также, что вместе с $w(t)$ полином $w(t) + r(t)$ также минимален.

Рассмотрим теперь (2.3) как полином над $A(\bar{\Delta})$. В этом случае минимальным будет полином $(t - z)(t + 3z)$. Следовательно, $i_{A(\bar{\Delta})}(p) = l_{A(\bar{\Delta})}(p) = 2$.

Этот пример показывает, что минимальный полином определяется не единственным образом, и вообще говоря, не является делителем p .

Теорема 2.2. Пусть p – унитарный полином над полупростой алгеброй A . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $i_A(p) = l_A(p)$;
- (ii) полином p обладает единственным минимальным полиномом;
- (iii) $\text{Rad}(p)$ является главным идеалом.

Следствие 2.4. Пусть p — неприводимый полином над A . Тогда следующие утверждения эквивалентны :

- (i) $i_A(p) = l_A(p)$;
- (ii) $\text{Rad}(p) = (p)$.

Доказательство. Условие (i) эквивалентно утверждению, что $\text{Rad}(p)$ является главным идеалом алгебры $A[t]$, образованным минимальным полиномом w . Поскольку полином p неприводим, то $w = p$.

Следствие 2.5. Если $i_A(p) = l_A(p)$, то минимальный полином делит p .

Замечание 2.2. Обратное к Следствию 2.5 утверждение не верно. Действительно, пусть полином p из Примера 1.1. Легко видеть, что p есть минимальный полином для p^2 , т.е. $i_A(p^2) = i_A(p) = 3$. С другой стороны, $l_A(p^2) = l_A(p) = 2$.

Теперь приведем описание унитарных полиномов A -индекса 1.

Теорема 2.3. Для унитарного полинома p степени n над полупростой алгеброй A следующие условия эквивалентны :

- (i) $i_A(p) = 1$;
- (ii) существует $a \in A$ такое, что $p(t) = (t - a)^n$;
- (iii) отображение $\pi_p: S(p) \rightarrow X$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. (i) $\implies$ (ii). Если $\text{Rad}(p)$ содержит унитарный полином $t - a$, то по Следствию 2.3 $p(t) = (t - a)^n$.

(ii) $\implies$ (iii). Если $p(t) = (t - a)^n$, то для всякого $x \in X$ слой $\pi_p^{-1}(x)$ содержит ровно одну точку $(x, a(x))$. Следовательно, непрерывное отображение π_p компактных пространств инъективно, и поэтому является гомеоморфизмом.

(iii) $\implies$ (i). Рассмотрим унитарный полином $w = p^{(n-1)}/((n-1)!)$ степени 1. Если для всякого x слой $\pi_p^{-1}(x)$ одноточечен, то все точки $S(p)$ имеют кратность n . Поэтому функция $\bar{w}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $S(p)$. Учитывая Следствие 2.1 заключаем, что $w \in \text{Rad}(p)$. Теорема 2.3 доказана.

У

Таким образом, равенство $i_A(p) = 1$ является универсальным свойством индекса унитарного полинома. Покажем, что коиндекс $l_A(p)$ не обладает этим свойством.

Пример 2.2. Пусть A_0 – алгебра таких непрерывных функций f , определенных на компакте

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_1| \leq 1, |z_2| = 1\}, \quad (2.4)$$

что при любом фиксированном $z_2^0, |z_2^0| = 1$ функция $f(z_1, z_2^0)$ голоморфно зависит от z_1 в круге $\{(z_1, z_2^0) \in \mathbb{C}^2: |z_1| \leq 1\}$, а $f(0, z_2)$ допускает голоморфное продолжение внутрь круга

$$\{(0, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_2| \leq 1\}. \quad (2.5)$$

Согласно результатам [10], спектр X алгебры A_0 состоит из заполненного тора (2.4) и замкнутого круга (2.5) склеенных по окружности $\{(0, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_2| = 1\}$. Рассмотрим унитарный полином $p(t) = t^2 - z_1^2$ над A_0 . Поскольку функция z_1 не обращается в нуль на границе Шилова алгебры A_0 , имеем $l_{A_0}(p) = 2$. Рассмотрим с другой стороны полином $r(t) = gt$ над $C(X)$, где g – непрерывная функция на X , которая отлична от нуля в точке $(0, 0)$ и обращается в нуль на заполненном торе (2.4). Так как функция $\tilde{r}$ равна нулю на $S(p)$, то $l_{C(X)}(p) = 1$.

§3. РАДИКАЛ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

Хорошо известно, что алгебраическое расширение $B = A[t]/(p)$ полупростой алгебры может обладать нетривиальным радикалом, т.е. могут существовать ненулевые элементы $b \in B$, преобразования Гельфанда $\hat{b}(x, \lambda)$ которых обращаются в нуль всюду на Y . Так в Примере 1.1 радикал $\text{Rad}(B)$ алгебры B состоит из элементов вида $h\tau$, где $h \in A(\bar{\Delta})$ и $r(t) = z^2 t^2 + 2z^3 t - 8z^4$.

Согласно результатам Аренса-Гофмана [1] и Линдберга [11] радикал алгебры B нетривиален в том и только том случае, когда дискриминант $\mathcal{D}(p)$ полинома p либо равен нулю, либо есть делитель нуля в A . В [11] также доказано, что радикал алгебры B всегда

Из нильпотентности радикала алгебры B следует, что $\text{Rad}(B)$ совпадает с образом $\text{Rad}(p)$ при естественном эпиморфизме $\tau : A[t] \rightarrow B$. В частности, алгебра B полупроста тогда и только тогда, когда $\text{Rad}(p) = (p)$ (или $l_A(p) = \deg p$). Поэтому результаты §2 описывают свойства радикала алгебры B . Так, согласно Теореме 2.1, если $r \in \text{Rad}(B)$, то $r^k p^{(k)} = 0$ для любого $k > 0$. В силу Следствия 2.4, если расширение B порождено неприводимым полиномом p , то полупростота алгебры B равносильна равенству $i_A(p) = l_A(p)$.

Начнем с теоремы, устанавливающей точные оценки для коиндекса $l_A(p)$ (ср. с (2.2)).

Теорема 3.1. *Если p – унитарный полином над полупростой банаховой алгеброй A , то*

$$\epsilon(p) \leq l_A(p) \leq \sigma(p). \quad (3.1)$$

Доказательство. Покажем, что если $r(t)$ принадлежит $\text{Rad}(p)$ и $\deg r = l_A(p) = l$, то найдётся точка $x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ такая, что полином $p_x(t)$ имеет ровно l различных корней (без учета кратностей).

Обозначим через a_l старший коэффициент полинома r и положим $U = \{x \in X : a_l(x) \neq 0\}$. Согласно алгоритму деления полиномов (см. (1.4)) существуют полиномы q и s такие, что

$$a_l^k p(t) = r(t) q(t) + s(t), \quad k = n - l + 1, \quad \deg s < l.$$

Поскольку полином s обязан принадлежать $\text{Rad}(p)$, неравенство $\deg s < l$ невозможно и поэтому $s = 0$. Это означает, что для всякого $x \in U$ полиномы $p_x(t)$ и $r_x(t)$ имеют одинаковое число корней (без учёта кратностей).

Пусть A' обозначает (не банахову) алгебру непрерывных функций на U , порождённую элементами $A|U$ и функцией a_l^{-1} . Каждый элемент алгебры A' может быть представлен в виде дроби f/a_l^m , где $f \in A|U$ и $m \geq 0$. (Заметим, что A' есть алгебра частных алгебры $A|U$ относительно мультипликативной системы $\{a_l^m\}_{m \geq 0}$ (см. [8], стр. 51). Если функция a_l обратима в $A|U$, то <

Согласно критерию Аренса-Гофмана-Линдберга найдётся точка $x \in U$ такая, что дискриминант $\mathcal{D}(\tau')$ отличен от нуля в x . Следовательно, полином τ'_x , а поэтому и τ_x , имеет ровно l различных корней. Наконец, поскольку множество $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ плотно, можно предположить, что $x \in U \cap (X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)))$. Доказательство Теоремы 3.1 завершено.

В частном случае, когда A – аналитическая или регулярная алгебра, оценки (3.1) допускают уточнения. Напомним, что полупростая банахова алгебра A называется аналитической, если всякая функция из A , равная нулю на непустом открытом подмножестве X , тождественно равна нулю. В частности, максимальные антисимметричные алгебры аналитичны. Полупростая банахова алгебра A называется регулярной, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и произвольной точки $x \notin F$ алгебра A содержит функцию a такую, что $a|_F = 0$ и $a(x) \neq 0$. Многие стандартные алгебры являются регулярными.

Следствие 3.1. Если p – унитарный полином над аналитической алгеброй A , то $\varepsilon(p) = l_A(p) = \sigma(p)$.

Доказательство. Пусть как и выше $\tau \in \text{Rad}(p)$, $\deg \tau = l_A(p)$ и U – дополнение к множеству нулей старшего коэффициента a_l полинома τ . Пусть $l_A(p) < \sigma(p)$. Тогда, если $x \in U$ и $\text{card } \pi_p^{-1}(x) = \sigma(p)$, то $\tau_x = 0$. Но это невозможно, так как в нашем случае множество $U \cap W_{\sigma(p)}$, где $W_{\sigma(p)}$ определяется равенством (1.7), непусто. Если $l_A(p) > \varepsilon(p)$, то дискриминант унитарного полинома $\tau' = a_l^{-1}\tau$, принадлежащего $A'[t]$, обращается в нуль на $U \cap W_{\varepsilon(p)}$, а поэтому и всюду на U , что невозможно. Следствие 3.1 доказана.

Замечание 3.2. Для регулярной алгебры (так же как и для всякой не аналитической алгебры) равенство $\varepsilon(p) = \sigma(p)$ может не выполняться. Тем не менее можно показать, что коиндекс полинома p над регулярной алгеброй всегда равен $\varepsilon(p)$.

Можно доказать также, что если p – унитарный полином над антисимметричной и максимальной равномерной алгеброй A , граница Шилова которой есть собственное подмножество спектра X , то $\varepsilon(p) = l_A(p) = \sigma(p) = i_A(p)$.

Рассмотрим алгебру $\widehat{B} = B/\text{Rad}(B)$, являющуюся образом гельфандовского представления расширения B , которая реализуется как бана

принадлежащий $\text{Rad}(p)$. Имеем

$$a_k \hat{t}^k = -a_{k-1} \hat{t}^{k-1} - \dots - a_0.$$

Тогда существует целое $m > 0$ такое, что $a_k^m \hat{B} \subset M$. Рассмотрим множество $V = \{y \in Y: a_k(y) \neq 0\}$ и гомоморфизм сужения $\rho: \hat{b} \mapsto \hat{b} \mid V$ на это множество. Ясно, что $\rho(\hat{B})$ и $\rho(M)$ являются $\rho(A)$ -модулями. Отметим, что $\rho(M)$, образованный функциями $\rho(\hat{t}^{k-1}), \dots, \rho(\hat{t}), \rho(1)$, является свободным модулем. Действительно, предположим обратное, что существуют функции $f_{k-1}, \dots, f_1, f_0$ из A такие, что хотя бы одна из них отлична от нуля на V и

$$\rho(f_{k-1} \hat{t}^{k-1} + \dots + f_1 \hat{t} + f_0) = 0.$$

Тогда

$$a_k f_{k-1} \hat{t}^{k-1} + \dots + a_k f_1 \hat{t} + a_k f_0 = 0$$

всюду на Y и хотя бы одна из функций $a_k f_j$ отлична от нуля. Это означает, что $\text{Rad}(p)$ содержит ненулевой полином степени меньше $l_A(p)$, но это невозможно. Пусть теперь $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k, \hat{b}_{k+1}$ – произвольные функции из $\hat{B}$. Функции $\rho(a_k^m \hat{b}_1), \dots, \rho(a_k^m \hat{b}_k), \rho(a_k^m \hat{b}_{k+1})$ принадлежат свободному модулю $\rho(M)$ ранга k и поэтому линейно зависимы (см. [7], стр. 434). Но отсюда, как мы показали, следует, что $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k, \hat{b}_{k+1}$ линейно зависимы. Следовательно, $\text{rg } \hat{B} \leq k$. Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.2. Пусть A и C – полупростые коммутативные банаховы алгебры, и пусть B и D – алгебраические расширения этих алгебр, порожденные унитарными полиномами p и q , соответственно. Пусть Φ – полулинейный гомоморфизм расширения $\hat{B}$ алгебры A в расширение $\hat{D}$ алгебры C . Тогда

- (i) если гомоморфизм Φ сюръективен, то $i_C(q) \leq i_A(p)$,
- (ii) если гомоморфизм Φ инъективен, то $l_A(p) \leq l_C(q)$,
- (iii) если Φ является изоморфизмом, то $i_A(p) = i_C(q)$ и $l_A(p) = l_C(q)</$

первой теореме Нстер об изоморфизмах будем иметь

$$\widehat{B} = (A[t]/(p))/(\text{Rad}(p)/(p)) \cong A[t]/\text{Rad}(p) = A[t]/(w).$$

Обратно, пусть $\widehat{B}$ есть A -изоморфный образ некоторого расширения Аренса-Гофмана алгебры A . Тогда $\widehat{B}$ – свободный A -модуль и поэтому $\text{sg } \widehat{B} = \text{rg } \widehat{B}$. Остаётся воспользоваться Теоремой 3.2. Теорема 3.4 доказана.

Следствие 3.3. Если $i_A(p) = l_A(p)$, то дискриминант $\mathcal{D}(w)$ минимального полинома отличен от нуля и не является делителем нуля в A .

Следствие 3.4. Пусть $i_A(p) = l_A(p)$. Если $\mathcal{D}(p)$ равен нулю или является делителем нуля, то полином p приводим над A .

Доказательство. Действительно, согласно Следствию 3.3 минимальный полином отличен от p , и по Следствию 2.5 является делителем p .

Замечание 3.3. Пример 2.1 показывает, что условие $i_A(p) = l_A(p)$ в Теореме 3.4 и в Следствиях 3.3 и 3.4 существенно.

Теорема 3.4 влечет следующую характеристику множества $\mathcal{R}(p)$ точек ветвления спектра алгебраического расширения регулярной или аналитической алгебры.

Теорема 3.5. Пусть p – унитарный полином над регулярной или аналитической алгеброй A . Если $i_A(p) = l_A(p)$, то $\mathcal{R}(p)$ совпадает с множеством $\mathcal{K}(w)$ кратных точек минимального для p полинома w .

Доказательство. Полином w , как мы знаем, определяется однозначно и по Следствию 2.5 делит p . Поэтому $S(p) = S(w)$ и $\pi_p = \pi_w$. Следовательно, достаточно доказать, что $\mathcal{R}(w) = \mathcal{K}(w)$. По Следствию 3.3 дискриминант полинома w не может быть нулем или делителем нуля в A . Из условий теоремы вытекает, что дополнение $X \setminus \mathcal{N}(w)$ дискриминантного множества всюду плотно в X .

Пусть теперь $y_0 \in \mathcal{K}(w)$ и V – окрестность точки y_0 такая, что $\pi_p(V)$ содержится в правильно накрытой окрестности. Тогда существует точка

$\mathcal{R}(p) = \{(0, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2| = 1\}$. Пример 1.1 показывает, что условие $i_A(p) = l_A(p)$ также существенно.

Abstract. The paper shows that the index and coindex of a monic polynomial $p \in A[t]$ characterize the algebraic extension $A[t]/(p)$ of an algebra A and the corresponding covering map π_p of the spectrum of A .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, K. Hoffman, "Algebraic extensions of normed algebras", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 7, pp. 203 — 210, 1956.
2. J. A. Lindberg, "Factorization of polynomials over Banach algebras", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 112, pp. 358 — 368, 1964.
3. Б. Т. Батикян, "О точках ветвления спектра алгебраического расширения равномерной алгебры", Функ. Анал. и прил., том 36, № 2, стр. 77 — 80, 2002.
4. J. Verdera, "Finitely generated projective extensions of uniform algebras", Pacif. J. Math, vol. 100, pp. 203 — 215, 1982.
5. О. Зарисский, П. Самуэль, Коммутативная Алгебра, том 1, М., ИЛ, 1963.
6. Г. Грауэрт, Р. Реммерт, Аналитические Локальные Кольца, М., Наука, 1988.
7. Н. Бурбаки. Алгебра, Алгебраические Структуры, Линейная и Полилинейная Алгебра, М., Наука, 1962.
8. М. Атья, И. Макдональд, Введение в Коммутативную Алгебру, М., Мир, 1972.
9. Б. Л. Ван дер Варден, Алгебра, М., Мир, 1976.
10. Б. Т. Батикян, Е. А. Горин, "Замечание о нелокальных алгебрах", Зап. Науч. Семина. ЛОМИ, том 65, стр. 172 — 177, 1976.
11. J. A. Lindberg, "Algebraic extensions of commutative Banach algebras", Pacif. J. Math, vol. 14, pp. 559 — 583, 1964.

Поступила 16 апреля 2002

ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ В МОДЕЛИ $M|G|1|\infty$

И. Э. Даниелян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматривается консервативная модель очереди $M|G|1|\infty$ с параметром поступления $a > 0$ и функцией распределения (ФР) времени обслуживания $B(x)$, $B(+0) = 0$. Обозначим через $\rho_1 = a \int_0^\infty x dB(x)$ загрузку модели, через $\Pi(x)$ – ФР периода занятости, а через $W(x)$ – ФР стационарного времени ожидания. Доказаны следующие утверждения: При $\rho_1 \leq 1$, $1 - B(t)$ правильно меняется при $t \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $1 - \Pi(t)$ правильно меняется. Аналогичные результаты получены $1 - W(t)$ в случае дисциплины LIFO. Доказано существование $W(x)$ в одном классе консервативных дисциплин.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Правильно меняющиеся функции одной действительной переменной применяются в теории очередей (см. [1] – [4]). Как показано в [3] – [6], из условий правильного изменения хвостов функций распределения (ФР) времён обслуживания вытекают предельные теоремы и правильное изменение хвостов ФР для некоторых важных характеристик. В настоящей статье рассматривается так называемая консервативная (см. [7], стр. 137) модель $M|G|1|\infty$ с параметром поступления $a > 0$ и ФР $B(x)$, $B(+0) = 0$ времени обслуживания вызовов [5], и изучается асимптотическое поведение ФР хвоста для случайного периода занятости ξ и стационарного времени ожидания w .

Определение. Измеримая на $(0, +\infty)$ функция $R(t) > 0$ правильно меняется при $t \rightarrow +\infty$ с показателем $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, если функция $L(t) = t^{-\alpha} R(t)$, $t > 0$, медленно меняется при $t \rightarrow +\infty$, т.е. для любого $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1. \quad (1)$$

В дальнейшем $L(t)$ обозначает медленно меняющуюся функцию.

1°. Асимптотический анализ основан на тауберовой теореме, доказанной в [8], стр. 109 – 111. Пусть $E(t)$ – ФР, определённая на $[0, +\infty)$. Положим

$$e_n = \int_0^\infty x^n dE(x), \quad n \geq 1, \quad e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dE(x),$$

$$e^{[n]}(s) = e(s) - \sum_{i=0}^n \frac{(-s)^i}{i!} e_i, \quad s \geq 0,$$

и при нецелом α , $n < \alpha < n+1$, $n \geq 0$, обозначим

$$C_{\alpha,n} = \frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^n \pi}{\Gamma(\alpha) \sin \pi \alpha},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

Теорема 1 ([8]). При $n < \alpha < n+1$, $n \geq 0$, асимптотические соотношения

$$1 - E(t) \sim t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (2)$$

и

$$e^{[n]}(s) \sim (-1)^{n+1} C_{\alpha,n} s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0 \quad (3)$$

эквивалентны.

2°. Отметим, что распределение периода занятости ξ зависит от величины загрузки $\rho_1 = a\beta_1$ модели, где $\beta_1 = \int_0^\infty x dB(x)$. Загрузка ρ_1 интерпретируется как среднее время обслуживания поступающих за единицу времени в модель вызовов. Пусть $\pi(s) = Ee^{-s\xi}$, $s \geq 0$, где E – знак математического ожидания. Следующие утверждения хорошо известны (см., например, [4], стр. 497).

1. При $0 < \rho_1 < +\infty$ функция $\pi(s)$ есть с минимальным абсолютным значением корень уравнения

$$\pi(s) = \beta(s + a - a\pi(s)), \quad s \geq 0, \quad (4)$$

где $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$.

2. Корень $\pi(s)$ уравнения (4) есть преобразование Лапласа–Стилтьеса для некоторого распределения $\Pi(x)$, которое либо собственное (т.е. $\Pi(+\infty) = \pi(0) < 1$) при

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$ – нецелое. Тогда при $\rho_1 < 1$ асимптотические соотношения

$$1 - B(t) \sim t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (6)$$

и

$$1 - \Pi(t) \sim [(1 - \rho_1) t]^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (7)$$

эквивалентны.

Каждая правильно меняющаяся функция $(1 - B(t))^{-1}$ с показателем $\alpha > 0$ эквивалентна некоторой строго возрастающей, абсолютно непрерывной, правильно меняющейся функции $R(t)$. Поэтому существует строго возрастающая, абсолютно непрерывная функция $M(t) = t^{1/\alpha} L_1(t)$, $t \geq 0$, обратная к $R(t)$ (см. [9], §1.2).

Теорема 3. Пусть $1 < \alpha < 2$. Тогда при $\rho_1 = 1$ асимптотические соотношения (6) и

$$1 - \Pi(t) \sim \frac{\beta_1^{1+\alpha^{-1}}}{\Gamma(1 - \alpha^{-1}) \cdot C_{\alpha,n}^{1/\alpha}} \frac{t^{-1/\alpha}}{L_1(t)}, \quad t \rightarrow +\infty \quad (8)$$

эквивалентны.

3°. Пусть $w(t)$ – виртуальное время ожидания в момент t , и пусть $\omega(s, t) = Ee^{-s w(t)}$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. По теореме непрерывности для преобразования Лапласа–Стилтьеса (см. [4], стр. 484 – 486), из существования конечного невырожденного предела

$$\omega(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(s, t), \quad s \geq 0, \quad (9)$$

вытскает существование стационарной ФР $W(x) = P(w < x)$, $x \geq 0$, где $\omega(s) = Ee^{-s w} = \int_0^\infty e^{-s x} dW(x)$, $s \geq 0$.

Например, для дисциплин FIFO (first in-first out) и LIFO (last in-first out), соответствующие ФР $W_{\text{FIFO}}(t)$ и $W_{\text{LIFO}}(t)$ существуют тогда и только тогда, когда $\rho_1 < 1$ и $\rho_1 \leq 1$, соответственно. Более того, имеем (см. [10], стр. 85)

$$\omega_{\text{FIFO}}(s) = \frac{(1 - \rho$$

В §3 с помощью Теорем 1 – 3 и (11) установлены следующие результаты.

Теорема 5. Для нецелого $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$ асимптотические соотношения (6) и

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)^{\alpha-2}} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1)\beta_1} t^{-(\alpha-1)} L(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (13)$$

эквивалентны.

Теорема 6. Для $1 < \alpha < 2$ и $\rho_1 = 1$ соотношения (6) и

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{C_{\alpha,n}}{\beta_1}\right)^{1/\alpha} t^{(1/\alpha)-1} L_1(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (14)$$

эквивалентны.

4°. В консервативной модели $M|G|1|\infty$ обозначим через $0 < t_1 < t_2 < \dots$ последовательные моменты завершения периодов занятости. Случайные величины $z_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, $t_0 = 0$, независимы и одинаково распределены (НОР), т.е. $\{z_n\}$ образует процесс восстановления. Для многих консервативных дисциплин, например, FIFO, LIFO, RS (случайное обслуживание), случайный процесс $\{w(t): t \geq 0\}$ является процессом регенерации ([4], стр. 446), а моменты $t_1, t_2, \dots$ суть моменты регенерации. Обозначим через **C** класс консервативных дисциплин, для которых случайный процесс $\{w(t): t \geq 0\}$ является регенерирующим с моментами регенерации $t_1, t_2, \dots$

В §5 доказано существование стационарного времени ожидания w в классе **C** при $\rho_1 < 1$. Кроме того, при $\rho_1 < 1$ доказано следующее неравенство :

$$\omega_{\text{FIFO}}(s) \leq \omega(s) \leq \omega_{\text{LIFO}}(s), \quad s \geq 0. \quad (15)$$

В §5, основываясь на неравенствах (15) и Теоремах 1, 4, 5, получено следующее утверждение.

Пусть $1 < \alpha < 2$ или $2 < \alpha < 3$ и имеет место (2). Если для заданной дисциплины из класса **C** и для $\rho_1 < 1$ функция $1 - W(t)$ правильно меняется при $t \rightarrow +\infty$, то</

1°. Лемма 1. При $\rho_1 \leq 1$ и $s \geq 0$ справедливо равенство

$$\pi(s - a + a\beta(s)) = \beta(s). \quad (18)$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\mu = \mu(s) = s + a - a\pi(s), \quad \tau = \tau(s) = s - a + a\beta(s), \quad s \geq 0. \quad (19)$$

При $\rho_1 \leq 1$ и $s \geq 0$ имеем

$$\tau'(s) = 1 - a \cdot \int_0^\infty x e^{-sx} dB(x) > 1 - a \cdot \int_0^\infty x dB(x) = 1 - \rho_1 \geq 0$$

(дифференцирование по s под знаком интеграла допустимо, так как $\beta_1 < +\infty$). Поэтому $\tau(s)$ при $s > 0$ строго возрастает. При этом, $\tau(s)$ непрерывна и $\tau(0) = 0$. Следовательно, при $\tau(s)$ в $[0, +\infty)$ существует строго возрастающая, непрерывная обратная функция. Покажем, что функция $\mu(s)$ обладает теми же свойствами. Очевидно, что $\mu(s)$ непрерывна, строго возрастает в $[0, +\infty)$ и $\mu(0) = 0$. Из (4) получаем, что $\mu(\tau(s)) = s$ для $s \geq 0$.

Подставляя $s + a - a\pi(s) = S$ в (4) при $\rho_1 \leq 1$, получаем $s = S - a + a\beta(S)$. Поэтому для определения $\pi(s)$ можно использовать (18). Отметим, что случаи $\rho_1 < 1$ и $\rho_1 = 1$ различны и будут рассмотрены отдельно.

2°. Доказательство Теоремы 2. Пусть выполнено соотношение (6). По Теореме 1, при $n < \alpha < n + 1$ имеем

$$\beta^{[n]}(s) = (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha, n} \cdot s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0, \quad (20)$$

где $\beta_n = \int_0^\infty x^n dB(x)$, $n \geq 1$. Из (18) – (20) получаем

$$\pi(\tau) = \sum_{i=0}^n \frac{(-s)^i}{i!} \beta_i \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha, n} \cdot s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (21)$$

Из уравнения (4) следует, что условия $\beta_n < +\infty$ и $m_n = \int_0^\infty x^n d\Pi(x) < +\infty$ эквивал

Поэтому, при $n \geq 1$ имеем

$$s = \frac{\tau}{1 - \rho_1} \cdot \left(1 + \rho_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-\tau)^k}{k!} \cdot \frac{m_{k+1}}{(k+1)m_1} + o(\tau^{n-1}) \right), \quad \tau \downarrow 0. \quad (23)$$

Теперь существование предела

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{L(1/s)}{L(1/\tau)} = 1 \quad (24)$$

следует из асимптотического равенства $s = \frac{\tau}{1 - \rho_1} (1 + o(1))$, $\tau \downarrow 0$ и из равномерной сходимости в (1). В силу (23) – (24) разложение (21) представимо в виде

$$\pi(\tau) - \sum_{i=0}^n \frac{(-\tau)^i}{i!} d_i \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \tau^\alpha L(1/s), \quad \tau \downarrow 0,$$

где d_i , $i = 1, \dots, n$ – некоторые постоянные. Тогда $d_i = m_i$, $i = 0, \dots, n$, с $m_0 = 1$. Получаем

$$\pi^{[n]}(\tau) \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{\tau^\alpha}{(1 - \rho_1)^\alpha} L(1/\tau), \quad \tau \downarrow 0. \quad (25)$$

По Теореме 1, асимптотическое разложение (25) эквивалентно (7). Обратно, пусть выполнено (7). По Теореме 1 имеет место асимптотическое разложение (25). Из (4), (19) и (25) получаем

$$\beta(s) - \sum_{i=0}^n \frac{(-\tau)^i}{i!} m_i \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot \frac{\tau^\alpha}{(1 - \rho_1)^\alpha} L(1/\tau), \quad \tau \downarrow 0. \quad (26)$$

При $n < \alpha < n + 1$ имеем $\beta^{[n]}(s) = o(s^n)$, $s \downarrow 0$. Отсюда и из (19) получаем

$$\begin{aligned} \tau = s - a + a\beta(s) &= s \cdot \left(1 - \rho_1 \cdot \frac{1 - \beta(s)}{s\beta_1} \right) = \\ &= s(1 - \rho_1) \cdot \left(1 + \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-s)^k}{k!} \frac{\beta_{k+1}}{(k+1)\beta_1} + o(s^{n-1}) \right), \quad s \downarrow 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Равенство (27) используется для доказательства

$[1 - B(M(t))]^{-1} \sim t$, $t \rightarrow +\infty$. Предположим, что выполнено (6). По Теореме 1 при $\rho_1 = 1$ имеем

$$\tau = s - a + a\beta(s) = s \cdot \left(1 - \frac{1 - \beta(s)}{s\beta_1}\right) \sim \frac{1}{\beta_1} C_{\alpha,n} \cdot s^\alpha L(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (28)$$

В силу Леммы 1 справедливо равенство $1 - \pi(\tau) = 1 - \beta(s) = s\beta_1 \cdot (1 + o(1))$, $s \downarrow 0$, что, с учётом (28), даёт $1 - \pi\left(\frac{1}{\beta_1} C_{\alpha,n} \cdot s^\alpha L(1/s)\right) = s\beta_1 \cdot (1 + o(1))$, $s \downarrow 0$. Используя определение медленно меняющихся функций, последнее равенство запишем в виде

$$1 - \pi(s^\alpha L(1/s)) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot s\beta_1(1 + o(1)), \quad s \downarrow 0. \quad (29)$$

При $t \geq 0$ рассмотрим функцию $p = \pi(1/t)$. Подставляя $1/t$ вместо s в (29), получаем

$$1 - p(t^\alpha \cdot L(t)) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\beta_1}{t} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, подставляя $t = M(t)$, получаем $1 - p(t) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \frac{\beta_1}{M(t)} (1 + o(1))$, $t \rightarrow +\infty$. Имеем

$$1 - \pi(s) = \left(\frac{\beta_1}{C_{\alpha,n}}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\beta_1}{M(1/s)} (1 + o(1)), \quad s \downarrow 0. \quad (30)$$

Используя формулу 5.22 из [4], стр. 503, и разложение (30), получаем (8). Обратное утверждение доказывается аналогично. Теорема 3 доказана.

§3. СТАЦИОНАРНОЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ ПРИ ДИСЦИПЛИНЕ LIFO

В этом параграфе мы доказываем Теоремы 5 и 6.

1°. Пусть $g(s) = \frac{1 - \pi(s)}{s m_1} = (1 - \rho_1) \cdot \frac{1 - \pi(s)}{s\beta_1}$, $s \geq 0$ (см. (5)). Функция $g(s)$ является преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции распределения $G(x) = \frac{$

Доказательство. Используя формулу (11), получаем

$$\omega_{\text{LIFO}}(s) = 1 - \rho_1 + \frac{a m_1 \cdot g(s)}{1 + a m_1 \cdot g(s)} = 1 - \rho_1 + \frac{\rho_1 \cdot g(s)}{1 - \rho_1 \cdot (1 - g(s))}, s \geq 0.$$

Далее имеем $1 - \omega_{\text{LIFO}}(s) = \rho_1 \left(1 - \frac{g(s)}{1 - \rho_1 \cdot (1 - g(s))} \right) = \frac{\rho_1 (1 - \rho_1) (1 - g(s))}{1 - \rho_1 \cdot (1 - g(s))}$, $s \geq 0$. Отсюда следует (31).

Согласно доказательству Теоремы 2, соотношения (6) и (25) эквивалентны при $n < \alpha < n + 1$. Покажем, что соотношения (13) и

$$\omega_{\text{LIFO}}^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha, n} \cdot \frac{\rho_1}{\beta_1 (1 - \rho_1)^{\alpha-2}} s^{\alpha-1} L(1/s), \quad s \downarrow 0 \quad (32)$$

эквивалентны. Действительно, рассмотрим медленно меняющуюся функцию $L_2(t)$, удовлетворяющую условию

$$\rho_1 \cdot L(t) = \beta_1 (\alpha - 1) (1 - \rho_1)^{\alpha-2} L_2(t), \quad (33)$$

где $L(t)$ из (6). Тогда, в силу (13), имеем

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim t^{-(\alpha-1)} L_2(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (34)$$

По Теореме 1 равенство (34) при $n < \alpha < n + 1$, $n \geq 1$ эквивалентно следующему :

$$\omega_{\text{LIFO}}^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha-1, n-1} \cdot s^{\alpha-1} L_2(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (35)$$

Подставляя значение $L_2(1/s)$ из (33) в (35) и учитывая, что при $n < \alpha < n + 1$

$$\frac{C_{\alpha-1, n-1}}{\alpha - 1} = \frac{\Gamma(\alpha - n) \Gamma(n + 1 - \alpha)}{(\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)} = \frac{\Gamma(\alpha - n) \Gamma(n + 1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} = C_{\alpha, n},$$

получим (32). Таким образом, Теорема 5 может быть сформулирована в следующем эквивалентном виде.

Так как $\mu(0) = 0$ при $\rho_1 < 1$, то по формуле Лейбница k -кратное ($k \geq 2$) дифференцирование обеих частей (36) в нуле даёт

$$(1 - \rho_1) m_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k!}{i! (k-i)!} w_i \cdot m_{k-i}, \quad k = 2, \dots, n,$$

и требуемое утверждение выводится индукцией.

Пусть теперь $n < \alpha < n+1$ и справедливо (25). В силу (5) соотношение (25) эквивалентно следующему :

$$g^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot C_{\alpha, n} \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{\beta_1 (1 - \rho_1)^{\alpha-1}} L(1/s), \quad s \downarrow 0. \quad (37)$$

Запишем (37) в виде

$$1 - g(s) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!} g_i + (-1)^{n-1} \cdot C_{\alpha, n} \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{\beta_1 (1 - \rho_1)^{\alpha-1}} L(1/s) (1 + o(1)), \quad s \downarrow 0$$

и подставим в (31). Получим

$$\omega_{\text{LIFO}}(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!} d_i + (-1)^n \cdot C_{\alpha, n} \cdot \frac{\rho_1 s^{\alpha-1}}{\beta_1 (1 - \rho_1)^{\alpha-1}} L(1/s) (1 + o(1)), \quad s \downarrow 0. \quad (38)$$

Очевидно, $d_0 = 1$ и $d_i = w_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n-1$. Следовательно, (38) и (32) совпадают.

Обратно, пусть $n < \alpha < n+1$, $n \geq 1$, $\rho_1 < 1$ и справедливо (32). Имеем $w_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n-1$, что влечёт $m_k < +\infty$, $k = 1, \dots, n$, т.е. $g_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n-1$.

Поэтому

$$1 - g(s) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-s)^i}{i!} g_i + \varphi_n(s), \quad s \geq 0, \quad (39)$$

где

$$\varphi_n(s) =$$

3°. Доказательство Теоремы 6. Сначала докажем, что соотношения

$$1 - \pi(s) \sim \beta_1 \cdot \left(\frac{\beta_1 \cdot s}{C_{\alpha,n}} \right)^{1/\alpha} \cdot (L_1(1/s))^{-1}, \quad s \downarrow 0 \quad (42)$$

и

$$1 - \omega_{\text{LIFO}}(s) \sim \left(\frac{C_{\alpha,n}}{\beta_1} \right)^{1/\alpha} s^{1-(1/\alpha)} L_1(1/s), \quad s \downarrow 0 \quad (43)$$

эквивалентны, где $L_1(t) = t^{-1/\alpha} M(t)$.

Рассмотрим медленно меняющуюся функцию $L_3(t)$, удовлетворяющую условию $\beta_1^{1/\alpha} \cdot L_3(t) = \Gamma(1 - (1/\alpha)) \cdot C_{\alpha,n}^{1/\alpha} \cdot L_1(t)$, $t > 0$. Соотношение (8) эквивалентно следующему :

$$1 - \Pi(t) \sim \frac{t^{-1/\alpha}}{L_3(t)}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (44)$$

Согласно Теореме 1 соотношения (44) и $1 - \pi(s) \sim \Gamma(1 - (1/\alpha)) s^{1/\alpha} (L_3(1/s))^{-1}$, $s \downarrow 0$, (или (42)) эквивалентны. Учитывая Теорему 3 и эквивалентность (8) и (43), заключаем :

$$\text{при } \rho_1 = 1 \text{ и } 1 < \alpha < 2 \text{ соотношения (6) и (42) эквивалентны.} \quad (45)$$

Далее, рассмотрим правильно меняющуюся функцию $L_4(t)$, удовлетворяющую условию $L_1(t) = L_4(t) \Gamma(1 - (1/\alpha)) \cdot (\beta_1/C_{\alpha,n})^{1/\alpha}$, $t > 0$. При $\rho_1 = 1$ и $1 < \alpha < 2$ соотношение (14) и

$$1 - W_{\text{LIFO}}(t) \sim t^{(1/\alpha)-1} (L_4(t))^{-1}, \quad t \rightarrow +\infty \quad (46)$$

эквивалентны. Согласно Теореме 1 соотношения (46) и

$$1 - \omega_{\text{LIFO}}(s) \sim \Gamma(1 - (1/\alpha)) s^{1-(1/\alpha)} L_4(1/s)^{-1}, \quad s \downarrow 0$$

(или (43)) эквивалентны. Следовательно

§4. СТАЦИОНАРНОЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ В КЛАССЕ С

В этом параграфе доказываются неравенства (15).

1°. Лемма 3. Для любой дисциплины из С и $\rho_1 < 1$ существует стационарное время ожидания w .

Доказательство. Пусть $\rho_1 < 1$ и $t_1, t_2, \dots$ суть последовательные моменты завершений периодов занятости. Тогда $z_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$, $t_0 = 0$ образует последовательность НОР случайных величин. При этом, любое z_n , $n \geq 1$ является суммой экспоненциально распределенного промежутка с показателем $a > 0$ и периода занятости. Следовательно, при $\rho_1 < 1$ и $n \geq 1$ имеем

$$Ez_n = \frac{1}{a} + E\xi = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \rho_1} < +\infty. \quad (49)$$

Вначале покажем, что для любого $x > 0$ при $\rho_1 < 1$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(w(t) < x) \stackrel{\text{def}}{=} W(x). \quad (50)$$

Для этого рассмотрим процесс с непрерывным временем $\{\theta(t): t \geq 0\}$:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } w(t) < x, \\ 1, & \text{если } w(t) \geq x. \end{cases}$$

Согласно теореме из [4], стр. 430 и (49), существуют пределы $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(\theta(t) = i)$, $i = 0, 1$, откуда следует (50). Поэтому, остается показать, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - W(t)) = 0. \quad (51)$$

Обозначим через $\xi(u)$, $u \geq 0$, период занятости с задержкой u . Известно (см. [12], стр. 83), что

$$\pi(u, s) = Ee^{-s\xi(u)} = e^{-\mu(s)u}, \quad u \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (52)$$

В силу (52)

$$Ee^{-s\pi(w_{\text{FIFO}}(t))} = \omega_{\text{FIFO}}(\mu(s), t), \quad s \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (53)$$

Обозначим $\omega_0(s, t) = Ee^{-s w_0(t)}$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Из результатов теории восстановления (см. [13], стр. 149 – 150) при $\rho_1 \leq 1$ следует существование предела

$$Ee^{-s w_0} = \omega_0(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_0(s, t) = 1 - \rho_1 + \rho_1 \frac{1 - \beta(s)}{s \cdot \beta_1}, \quad s \geq 0. \quad (55)$$

2°. Докажем, что при $\rho_1 < 1$ справедливы неравенства

$$a(1 - \beta(s)) \cdot \varphi(s, t) \leq \omega_{\text{FIFO}}(s, t) - \omega_0(s, t) \leq a(1 - \beta(s)) \cdot \varphi(\tau(s), t), \quad s \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (56)$$

где

$$\varphi(s, t) = \int_0^t e^{s y} dy \cdot \int_y^\infty e^{-s u} d_u P(w(t - s) < u).$$

Период занятости $\xi(w_{\text{FIFO}}(t))$ начинается с момента t и в момент $t + \xi(w_{\text{FIFO}}(t))$ модель впервые после момента t освобождается от вызовов. Внутри периода занятости $\xi(w_{\text{FIFO}}(t))$ может происходить следующее: а) $w_{\text{FIFO}}(t)$ может прерываться некоторыми вызовами, поступающими после момента t ; б) $\xi(w_0(t))$ может прерываться некоторыми вызовами, поступающими до момента t .

Пусть $u_1 < u_2 < \dots < u_\eta$ – последовательные моменты начал обслуживаний вызовов, поступивших до момента t и обслуженных после момента $t + w_0(t)$, где η – случайное число таких вызовов. Имеем $t + w_0(t) \leq u_1$ и $u = t + \xi(w_{\text{FIFO}}(t))$. Обозначим через $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_\eta$ соответствующие длительности обслуживания и рассмотрим периоды занятости

$$\xi^{(1)}(\hat{\beta}_1), \quad \xi^{(2)}(\hat{\beta}_2), \dots, \xi^{(\eta)}(\hat{\beta}_\eta) \quad (57)$$

с задержками $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_\eta$, соответственно. Отметим, что величины (57) – НОР случайные величины с распределением $\xi(\beta)$, где β – случайная длительность обслуживания одного вызова. Имеем

$$\xi(w_{\text{FIFO}}(t)) \stackrel{d}{=} \xi(w_0(t)) +$$

Здесь $u_0 = t$, $\widehat{\beta}_0 = w_0(t)$. Отметим, что при $s \geq 0$ и $t \geq 0$ имеем

$$\sum_{n \geq 0} P(A_{n0}(s, t)) = e^{-st} (1 - \omega_0(s, t)), \quad \sum_{n \geq 0} P(B_{n0}(s, t)) = e^{-st} (1 - \omega_0(\mu(s), t)). \quad (58)$$

При $k \geq 1$ рассмотрим события $C_{nk}(s, t) = \{\eta = n, \text{ за } [0, u_k) \text{ нет катастроф}\}$. Положим

$$A_k(s, t) = \bigcup A_{nk}(s, t), \quad B_k(s, t) = \bigcup B_{nk}(s, t), \quad C_j(s, t) = \bigcup B_{nj}(s, t), \quad j \geq 1.$$

В силу (59), при $k \geq 0$ получим

$$P(A_k(s, t)) = e^{-st} (1 - \omega_0(s, t)) + (1 - \beta(s)) \cdot P(C_k(s, t)), \quad (60)$$

$$P(B_k(s, t)) = e^{-st} (1 - \omega_0(\mu(s), t)) + (1 - \beta(\mu(s))) \cdot P(C_k(s, t)), \quad (61)$$

где $P(C_0(s, t)) \equiv 0$. Легко проверить, что

$$e^{-st} (1 - \omega_{\text{FIFO}}(s, t)) \geq \sum_{k \geq 0} P(A_k(s, t)), \quad (62)$$

$$e^{-st} (1 - \omega_{\text{FIFO}}(\mu(s), t)) \geq \sum_{k \geq 0} P(B_k(s, t)). \quad (63)$$

Далее, по Лемме 1, $\mu(s)$ и $\tau(s)$ – взаимно-обратные функции при $\rho_1 < 1$. Подставляя $\tau(s)$ вместо s в (63), в силу (59) – (63) имеем

$$e^{-st} (\omega_0(s, t) - \omega_{\text{FIFO}}(\mu(s), t)) \geq (1 - \beta(s)) \cdot \sum_{k \geq 1} P(C_k(s, t)), \quad (64)$$

$$e^{-\tau(s)t} (\omega_0(s, t) - \omega_{\text{FIFO}}(\mu(s), t)) \leq (1 - \beta(s)) \cdot \sum_{k \geq 1} P(C_k(\tau(s), t)). \quad (65)$$

Очевидно

$$P(A \$$

3°. Лемма 4. В классе $\mathbf{C}$ и при $\rho_1 < 1$

$$a \cdot \frac{1 - \beta(s)}{s} (1 - \omega(s)) \leq \omega_0(s) - \omega_{\text{FIFO}}(s) \leq a \cdot \frac{1 - \beta(s)}{\tau(s)} (1 - \omega(\tau(s))), \quad s \geq 0. \quad (66)$$

Доказательство. Согласно Лемме 3 при $\rho_1 < 1$ существуют стационарные времена ожидания. Поэтому (66) можно получить из (56), устремив $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} I(s) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{st} \int_0^t e^{-s\nu} d\nu \cdot \int_{t-\nu}^\infty e^{-su} d_u P(w < u) = \\ &= \int_0^\infty \int_{t-u}^t e^{s(t-\nu)} \cdot e^{-su} d\nu dP(w < u) = \frac{1 - \omega(s)}{s}, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (56) следует (66).

Покажем теперь, что из Леммы 4 вытекают неравенства (15). Действительно, в силу (10) и (55), при $s \geq 0$

$$\omega_0(s) - \omega_{\text{FIFO}}(s) \leq a \frac{1 - \beta(s)}{\tau(s)} \left(1 - \frac{(1 - \rho_1)s}{s - a + a\beta(s)} \right) = a \cdot \frac{1 - \beta(s)}{\tau(s)} (1 - \omega_{\text{FIFO}}(s)). \quad (67)$$

Подставляя (67) в (66), получим первое неравенство в (15). Далее, имеем

$$\frac{\tau(s)}{s} - (1 - \rho_1) \leq 1 - \omega(\tau(s)), \quad s \geq 0.$$

Заменяя $\tau(s)$ на s , получим (см. (11)):

$$\omega(s) \leq 1 - \rho_1 + \left(1 - \frac{s}{\mu(s)} \right) = 1 - \rho_1 + \frac{a(1 - \pi(s))}{s + a - a\pi(s)} = \omega_{\text{LIFO}}(s), \quad s \geq 0,$$

откуда вытекает второе неравенство (15). Доказательство неравенств (15) завершено.

§5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Из неравенств (15) вытекает ряд интересных выводов. Например, для любой дисциплины из $\mathbf{C}$

и (32) ($n = 1$ и $n = 2$), соответственно. Существование (при $2 < \alpha < 3$) или отсутствие (при $1 < \alpha < 2$) Ew_{FIFO} и Ew_{LIFO} влекут существование или отсутствие Ew_{FIFO} и Ew_{LIFO} для любой дисциплины из $\mathcal{C}$. Ясно, что $1 - W(t)$ может правильно меняться с показателем $\beta \in (1, 2)$ или $\beta \in (2, 3)$. Тогда по Теореме 1, при $n = 1$ и $n = 2$ имеем

$$\omega^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot A_\beta \cdot s^{\beta-1} L_5(1/s), \quad s \downarrow 0, \quad (71)$$

где A_β – постоянная. В силу неравенств (15) при $n = 1$ и (69) при $n = 2$, отсюда следует, что $\beta = \alpha$. Таким образом, в (71) можно подставить $L_5(t) \equiv L(t)$, и как следствие этого, выполнено (17). Применением Теоремы 1 завершается доказательство (16).

Автор выражает благодарность рецензенту и редактору за полезные замечания.

Abstract. The paper considers the $M|G|1|\infty$ conservative queuing model with entry parameter $a > 0$ and service time distribution function (DF) $B(x)$, $B(+0) = 0$. Notation : $\rho_1 = a \int_0^\infty x dB(x)$ – traffic intensity of the model, $\Pi(x)$ – the busy period DF, $W(x)$ – the stationary waiting time DF. The following statements are proven : For $\rho_1 \leq 1$, $1 - B(t)$ varies regularly as $t \rightarrow \infty$ if and only if so does $1 - \Pi(t)$. Similar statements are established for $1 - W(t)$ in case of LIFO discipline. The existence proof of $W(x)$ for a class of conservative disciplines is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно Меняющиеся Функции, Москва, Наука, 1985.
2. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugles, Regular Variation, Cambridge University Press, 1987.
3. N. H. Bingham, "Regular variation in probability theory", Publications de L'Institut Mathe'matique, vol. 48, (62), p. 169 — 180, 1990.
4. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Её Приложения, том 2, Москва, Мир, 1984.
5. J. W. Cohen, "On the tail of stationary waiting time distribution and limit theorems for the $M|G|1$ queue", Ann. Inst. H. Poincare', vol. 8, p. 255 — 263, 1972.
6. А. А. Боровков, "Факторизационные тождества и свойства распределений супремумов последовательных сумм", Теор. вер. и её Прим., том 15, стр. 359 — 402, 1970.

9. L. De Haan, On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes, Mathematical Centre Tracts, no. 32, Mathematical Centrum, Amsterdam, 1970.
10. В. Ф. Матвеев, В. Г. Ушаков, Системы Массового Обслуживания, Москва, МГУ, 1984.
11. J. W. Cohen, "Asymptotic relations in queuing theory", Stochastic Processes and their Applications, vol. 1, no. 2, p. 107 — 124, 1973.
12. N. U. Prabhu, Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, Applications of Mathematics, 15, 1980.
13. В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин, Справочник по Теории Вероятностей и Математической Статистике, Москва, Наука, 1985.

Поступила 14 апреля 2002

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматриваются так называемые линейные соотношения и даётся описание их спектральных функций, а также ортогональных спектральных функций. Описываются спектральные функции граничных задач с распадающимися граничными условиями.

ВВЕДЕНИЕ

Произвольный сингулярный оператор J в n -мерном унитарном пространстве $N = \mathbb{C}^n$, удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$, можно представить в виде $J = iP_+ - iP_-$, где $P_{\pm} = 2^{-1}(I_n \mp iJ)$ суть взаимно-дополнительные ортопроекторы: $P_{\pm}^* = P_{\pm} = P_{\pm}^2$. Возьмем ортогональное разложение $N = N_+ \oplus N_-$, $N_{\pm} = P_{\pm}N$, и рассмотрим операторы, действующие в N в виде 2×2 блочных матриц. Например

$$I_n = \begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} iP_+ & 0 \\ 0 & -iP_- \end{bmatrix}.$$

Для определенности предположим, что $\dim N_+ \geq \dim N_-$. Пусть A_r и B_r – последовательности операторов в N , удовлетворяющие условиям

$$A_r^* J A_r = 0, \quad B_r^* J B_r = J, \quad B_r^* J A_r = C_r \geq 0, \quad r = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Это равносильно тому, что для произвольных комплексных λ и μ выполняется равенство:

$$(\mu A_r + B_r)^* J (\lambda A_r + B_r) - J = (\lambda - \bar{\mu}) C_r, \quad C_r = B_r^* J A_r \geq 0, \quad r = 0, 1, \dots \quad (1')$$

Легко проверить, что из (1') вытекает равенство

$$(\lambda A_r + B_r) J (\mu A_r + B_r)^* - J = (\lambda - \bar{\mu}) D_r, \quad D_r = A_r J B_r^* \geq 0, \quad r = 0, 1, \dots$$

Рекуррентные соотношения вида

$$y_{r+1} = (\lambda A_r + B_r)y_r, \quad r = 0, 1, \dots \quad (2)$$

были рассмотрены в [1] (гл. 3), где введено понятие граничной задачи и ее спектральной функции. Отметим, что конечно-разностное уравнение матричной проблемы моментов n -ого порядка

$$c_r y_{r+1} + d_r y_r + c_{r-1} y_{r-1} = \lambda h_r y_r, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где c_r – эрмитовы обратимые матрицы, d_r – эрмитовы матрицы и h_r – неотрицательные матрицы, можно свести к уравнению (2). В самом деле, достаточно рассмотреть матрицы

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad A_r = \begin{bmatrix} c_r^{-1} h_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} -c_r^{-1} d_r & -c_r^{-1} \\ c_r & 0 \end{bmatrix}, \quad r = 0, 1, \dots$$

и убедиться, что они удовлетворяют условиям (1).

В настоящей работе даётся полное описание всех спектральных функций рекуррентного соотношения (2).

§1. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим уравнение (2) как дискретный аналог канонического дифференциального уравнения

$$J \frac{dx(r)}{dr} - \lambda H(r)x(r) = 0 \quad (0 < r < l).$$

Будем использовать метод, развитый в работе [2]. Положим $U_0(\lambda) = I_n$ и определим последовательно матричные многочлены $U_r(\lambda)$ степени r из рекуррентного соотношения

$$U_{r+1}(\lambda) = (\lambda A_r + B_r)U_r(\lambda), \quad r = 0, 1, \dots, m-1.$$

Легко проверить, что

$$U_{r+1}^*(\mu)JU_{r+1}(\lambda) - U_r^*(\mu)JU_r(\lambda) = (\lambda - \bar{\mu})U_r^*(\mu)C_rU_r(\lambda).$$

Отсюда приходим к тождеству Кристоффеля–Дарбу

Следовательно, матричные многочлены $U_r(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$U_r^*(\bar{\lambda})JU_r(\lambda) = J = U_r(\lambda)JU_r^*(\bar{\lambda}) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \quad (4)$$

$$\frac{U_r^*(\lambda)JU_r(\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} \geq 0, \quad \frac{U_r(\lambda)JU_r^*(\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} \geq 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \quad (5)$$

Из тождества (3) следует, что векторные решения

$$\{x_r\}_{r=0}^{m-1} = \{U_r(\mu)x_0\}_{r=0}^{m-1}, \quad \{y_r\}_{r=0}^{m-1} = \{U_r(\lambda)y_0\}_{r=0}^{m-1}$$

уравнения (2) удовлетворяют условию

$$(Jx_m, y_m) - (Jx_0, y_0) = (\lambda - \bar{\mu}) \left(\sum_{r=0}^{m-1} (C_r U_r(\lambda)x_0, U_r(\mu)y_0) \right) = (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{r=0}^{m-1} (C_r x_r, y_r). \quad (6)$$

В дальнейшем будем полагать, что при некотором m

$$U_m(0) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(0)C_r U_r(0) > 0. \quad (7)$$

Определение 1. Будем говорить, что элементы $x = \{x_r\}_{r=0}^{m-1}$ и $f = \{f_r\}_{r=0}^{m-1}$ ($x_r, f_r \in N$) пространства $N^m = N \oplus \dots \oplus N$ находятся в линейном отношении W , и обозначать $\{x, f\} \in W \subset N^m \oplus N^m$, если

$$x_{r+1} = B_r x_r + A_r f_r, \quad r = 0, 1, \dots, m-1.$$

В пространстве N^m введём новое скалярное произведение по формуле

$$(x, y)_C = \left(\{x_r\}_{r=0}^{m-1}, \{y_r\}_{r=0}^{m-1} \right)_C = \sum_{r=0}^{m-1} (C_r x_r, y_r). \quad (*)$$

Для произвольного $\{y, f\} \in W$ имеем

$$(Jy_{r+1}, y_{r+1}) = (J(B_r y_r + A_r$$

$$2 \operatorname{Im} \omega(\lambda) \geq (\omega(\lambda) + J) \{iV_m(\bar{\lambda}, \bar{\lambda})\} (\omega^*(\lambda) - J) \quad (13')$$

$$\begin{pmatrix} 2 \operatorname{Im} \omega(\lambda) = (\omega^*(\lambda) + J) \{-iV_m(\lambda, \lambda)\} (\omega(\lambda) - J) \\ 2 \operatorname{Im} \omega(\lambda) = (\omega(\lambda) + J) \{iV_m(\bar{\lambda}, \bar{\lambda})\} (\omega^*(\lambda) - J) \end{pmatrix}.$$

Круг $\Omega(\lambda, m)$ (окружность $\Omega_0(\lambda, m)$) допускает параметрическое представление

$$\omega(\lambda) = C + (iV_m(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}))^{-1/2} Z(-iV_m(\lambda, \lambda))^{-1/2}, \quad Z \in \Theta \quad (Z \in \Theta_0), \quad (14)$$

где $C = J - V_m^{-1}(\lambda, \lambda) = V_m^{-1}(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) - J$ "центр", а $(iV_m(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}))^{-1/2}$ и $(-iV_m(\lambda, \lambda))^{-1/2}$ суть "полурадиусы" круга.

Отметим, что последнее утверждение следует из $V_m^{-1}(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) + V_m^{-1}(\lambda, \lambda) = 2J$, которое является следствием тождества

$$V_m(\mu, \lambda) = V_m(\mu, \nu) + V_m(\bar{\nu}, \lambda) - 2V_m(\mu, \nu)JV_m(\bar{\nu}, \lambda).$$

Пусть теперь $U_m(\lambda)$ и $U_n(\lambda)$ – полиномиальные матрицы и $m < n$. Тогда для произвольного фиксированного $\lambda \in C_+$ имеем

$$-iV_m(\lambda, \lambda) = \operatorname{Im} \lambda \sum_{r=0}^{m-1} (U_r^*(\lambda)C_r U_r(\lambda)) \leq \operatorname{Im} \lambda \sum_{r=0}^{n-1} (U_r^*(\lambda)C_r U_r(\lambda)) = -iV_n(\lambda, \lambda).$$

Отсюда и из (13) вытекает вложение $\Omega(\lambda, m) \supset \Omega(\lambda, n)$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ существует предельное множество $\Omega(\lambda, \infty)$. Если при этом оба "полурадиуса" предельного множества $\Omega(\lambda, \infty)$ невырождены, что равносильно

$$-iV_\infty(\lambda, \lambda) = \operatorname{Im} \lambda \sum_{s=0}^{\infty} U_s^*(\lambda)C_s U_s(\lambda) < \infty, \quad \lambda \in C_+,$$

$$iV_\infty(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) = \operatorname{Im} \lambda \sum_{s=0}^{\infty} U_s^*(\bar{\lambda})C_s U_s(\bar{\lambda$$

Теорема 2. При $\operatorname{Im} \lambda > 0$ существуют по крайней мере $n_- = \dim N_-$ линейно-независимых решений $\{y_r = (\Phi_r(\lambda)\Xi_-(\lambda) - \Psi_r(\lambda))x_-\}_{r=0}^\infty$, $x_- \in N_-$ рекуррентного соотношения (2), принадлежащих пространству l_C^2 , т.е. удовлетворяющих

$$(\{y_r\}_{r=0}^\infty, \{y_r\}_{r=0}^\infty)_C = \sum_{r=0}^\infty (C_r y_r, y_r) < \infty.$$

При $\operatorname{Im} \lambda < 0$ существуют $n_+ = \dim N_+$ линейно независимых решений $\{y_r = (\Phi_r(\lambda) - \Psi_r(\lambda)\Xi_+^*(\bar{\lambda}))x_+\}_{r=0}^\infty$, $x_+ \in N_+$ соотношения (2), принадлежащих пространству l_C^2 .

§3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Преобразование $F(\lambda, f)$ элементов $f = \{f_r\}_{r=0}^{m-1} \in N^m$ определяется по формуле

$$F(\lambda, f) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda}) C_r f_r.$$

Ясно, что $F(\lambda, f)$ является полиномом порядка $\leq m$ с векторными коэффициентами. Обозначим через L множество таких преобразований и определим в L скалярное произведение равенством

$$(F(\lambda, f), F(\lambda, g))_L \equiv (f, g)_C, \quad f, g \in N^m.$$

Тогда L становится эвклидовым пространством с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\bar{\lambda}) C_r U_r(\bar{\mu}) = \frac{U_m^*(\bar{\lambda}) J U_m(\bar{\mu}) - J}{\bar{\mu} - \lambda} = \frac{2V(\bar{\lambda}, \bar{\mu})}{\bar{\mu} - \lambda}. \quad (15)$$

Это означает, что имеет место тождество

$$(F(\lambda), \Phi(\lambda, \mu)x)_L = (F(\mu), x)_N, \quad F \in L, \quad x \in N, \quad (16)$$

и поэтому множество $\{\Phi(\lambda, \mu_k)x\}_{k=1}^{m+1}$, $x \in N$, $\mu_k \in \mathbb{C}$ плотно в L . Следовательно, система векторов $\{U_m(\mu_k)x\}_{k=0}^m$,

Отсюда следует, что $\text{rang } P_n \leq \kappa_n$. Покажем теперь, что $P_n = \sum_{p=1}^{\kappa_n} x_p x_p^*$. Для этого заметим, что

$$y_r(p, \lambda_n) = (\lambda_n - \lambda) \sum_{r=0}^{m-1} R(r, s; \lambda) y_s(p, \lambda_n).$$

В окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ ядро $R(r, s; \lambda)$ имеет представление

$$R(r, s; \lambda) = (\lambda_n - \lambda)^{-1} U_r(\lambda_n) P_n U_s^*(\lambda_n) C_s + \dots,$$

поэтому, устремляя λ к λ_n , получим

$$y_r(p, \lambda_n) = U_r(\lambda_n) P_n \sum_{r=0}^{m-1} U_s^*(\lambda_n) C_s y_s(p, \lambda_n).$$

Отсюда следует, что

$$x_p = P_n \sum_{r=0}^{m-1} U_s^*(\lambda_n) C_s U_s(\lambda_n) x_p,$$

т.е. $U_m^{1/2} x_p = (U_m^{1/2} P_n U_m^{1/2}) U_m^{1/2} x_p$. Поскольку $\{U_m^{1/2} x_p\}_{p=1}^{\kappa_n}$ образует ортонормированную систему в N , заключаем, что $U_m^{1/2} P_n U_m^{1/2}$ является ортопроектором на подпространство $U_m^{1/2} P_n$. Следовательно

$$U_m^{1/2} P_n U_m^{1/2} = \sum_{p=1}^{\kappa_n} (U_m^{1/2} x_p) (U_m^{1/2} x_p)^*.$$

Таким образом, ортогональная спектральная функция $\sigma(\xi)$ уравнения (1) представляется в виде

$$\sigma(\xi) = \sum_{\lambda_n \in Sp W_K < \xi} P_n,$$

а система u -функций

$$y(p, \lambda_n) = \{U_r(\lambda_n) x_p\}_{r=0}^{m-1}, \quad p = 1, \dots, \kappa_n, \quad \lambda_n \in Sp W_K$$

образует ортонормированный базис в пространстве N^m .

Чтобы найти резольвентное ядро рассмотрим $(2n \times n)$ матричные функции

$$\Phi_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \phi_r^1(\lambda) \\ \phi_r^2(\lambda) \end{bmatrix} = U_r(\lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \psi_r^1(\lambda) \\ \psi_r^2(\lambda) \end{bmatrix} = U_r(\lambda) \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$R_K(r, s, \lambda) = \begin{cases} (\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda))\Phi_s^*(\bar{\lambda})C_s, & 0 \leq s \leq r-1, \\ \Phi_r(\lambda)[\Psi_s^*(\bar{\lambda}) + \omega_+(\lambda)\Phi_s^*(\bar{\lambda})]C_s, & r \leq s \leq m-1. \end{cases}$$

Множество $\Omega(\lambda)$ матриц $\omega(\lambda)$ ($\lambda \in C_+$) задаётся неравенством

$$\frac{2 \operatorname{Im} \omega(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} \geq (\omega^*(\lambda) + J) \sum_{r=0}^{m-1} U_r^*(\lambda) C_r U_r(\lambda) (\omega(\lambda) - J).$$

Тогда матрицы $\omega_+(\lambda)$ заполняют круг $\Omega(\lambda, K_0)$, задаваемый неравенством

$$\frac{2 \operatorname{Im} \omega_+(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} \geq \sum_{r=0}^{m-1} [\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)]^* C_r [\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)].$$

Окружность $\Omega_0(\lambda, K_0)$ задается равенством

$$\frac{2 \operatorname{Im} \omega_+(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \sum_{r=0}^{m-1} [\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)]^* C_r [\Psi_r(\lambda) + \Phi_r(\lambda)\omega_+(\lambda)],$$

когда K_m пробегает множество унитарных операторов.

Положим $A = \operatorname{Im} \lambda \sum_{r=0}^{m-1} \Phi_r^*(\lambda) C_r \Phi_r(\lambda)$, $B = \operatorname{Im} \lambda \sum_{r=0}^{m-1} \Phi_r^*(\lambda) C_r \Psi_r(\lambda)$, $D = \operatorname{Im} \lambda \sum_{r=0}^{m-1} \Psi_r^*(\lambda) C_r \Psi_r(\lambda)$. Теперь рассматриваемый круг можно представить в виде

$$\omega_+^*(\lambda) A \omega_+(\lambda) + \omega_+^*(\lambda) (B - iI_+) + (B^* + iI_+) \omega_+(\lambda) + D \leq 0,$$

