ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 2, 2002, 3-18

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ В $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет
e-mail : gmarting@ysu.am

Резюме. В статье доказывается, что для любой полной ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ существует ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty$ для любого $r > 2$, который обладает следующими свойствами : I) он универсален во всех $L^q_{[0,1]}$ при $0 < q \le 1$ одновременно относительно перестановок и частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^q_{[0,1]}$. II) он квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$ при $p \in [1, 2)$ одновременно относительно перестановок и частичных рядов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работ автора [16] – [18], посвящённым ортогональным в L^p рядам. Напомним следующие определения.

Определение 1. *Пусть $E \subseteq [0, 1]$ – некоторое измеримое множество, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$ и $\varphi_k(x) \in \bigcap_{p\in[p_1,p_2]} L^p[0, 1]$.*

1) Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) \tag{1.1}$$

называется универсальным во всех $L^p(E)$, $p_1 \le p < p_2$ относительно перестановок в смысле сходимости по метрике $L^p(E)$, если для любого $p \in [p_1, p_2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ члены ряда (1.1) можно переставить $k \to \sigma(k)$ так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)$ сходился бы по метрике $L^p(E)$ к функции $f(x)$.

2) Ряд (1.1) называется универсальным в пространстве $L^p(E)$, $p_1 \le p < p_2$ относительно частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^p(E)$, если для любого $p \in [p_1, p_2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ из ряда (1.1) можно выделить частичный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$, который сходится к функции $f(x)$ по метрике $L^p(E)$.

3) Ряд (1.1) называется универсальным в обычном смысле в пространстве $L^p(E)$, $p_1 \le p < p_2$, в смысле сходимости по метрике $L^p(E)$, если для любого $p \in [p_1, p_2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(E)$ существует последовательность возрастающих натуральных чисел n_k такая, что у ряда (1.1) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится к функции $f(x)$ по метрике $L^p(E)$.

Определение 2. *Ряд (1.1) называется квазиуниверсальным во всех $L^p(E)$, $p_1 \le p < p_2$ относительно перестановок в обычном смысле или относительно частичных рядов, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, $|E_\varepsilon| > |E| - \varepsilon$ такое, чтобы ряд (1.1) был универсальным во всех $L^p(E_\varepsilon)$, $p_1 \le p < p_2$ относительно перестановок, в обычном смысле или относительно частичных рядов, соответственно.*

Квазиуниверсальность ряда (1.1) в пространстве всех непрерывных функций $C[0,1]$ определяется аналогично.

Вопросам существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду или по мере посвящено много работ [1] – [11]. Первый тригонометрический ряд, универсальный в обычном смысле в классе всех измеримых функций, сходящийся почти всюду был построен Д. Е. Меньшовым [1] (см. также В. Я. Козлов [2]). Этот результат был распространён А. А. Талаляном [3] на произвольную ортонормальную полную систему. Им также доказано [4], что если $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$ есть произвольная ортонормированная полная система, то существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, универсальный в смысле частичных рядов в классе всех измеримых функций в смысле сходимости по мере на $[0,1]$.

Существование функциональных рядов, универсальных относительно перестановок в классе почти всюду конечных измеримых функций, сходящихся почти всюду, было доказано Орличем [10]. Отметим, что Риман доказал (см. [11], стр. 317), что любой неабсолютно сходящийся числовой ряд универсален относительно перестановок в классе всех целых чисел.

Ни при одном $p \ge 2$, ($p \ge 1$) и ни по одной ортонормированной (ограниченной ортонормированной) системе $\{\varphi_n(x)\}$ не существует ряда, универсального в $L^p[0,1]$ либо относительно перестановок, либо относительно частичных рядов в смысле сходимости по метрике $L^p[0,1]$.

В работах [17], [18] автором доказано, что если ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L^2[0,1]$ и для некоторого $p_0 > 2$, $\|\varphi_n\|_{L^{p_0}[0,1]} \le \text{const}$, то по этой системе можно построить ряд $\sum c_k \varphi_k(x)$, который квазиуниверсален в $L^p[0,1]$ при $p \in [2, p_0]$ относительно перестановок. Возникает следующий вопрос : можно ли по этой системе построить ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x)$, который квазиуниверсален в $L^p[0,1]$ относительно частичных рядов?

Отметим, что существует ортонормальная система $\{\omega_n(x)\}$, $x \in [0,1]$, по которой можно построить ряд вида (1.1), универсальный одновременно относительно перестановок и в смысле частичных рядов, в каждом $L^p[0,1]$ при $1 \le p < 2$, в смысле сходимости по метрике в $L^p[0,1]$, $1 \le p < 2$ и в классе всех измеримых функций для сходимости почти всюду. Ограниченные ортонормированные системы этим свойством не обладают. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *По произвольной полной ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty, \quad \text{при всех} \quad r > 2, \tag{1.2}$$

удовлетворяющий следующим условиям :

1) Ряд (1.2) универсален во всех $L^q_{[0,1]}$ *при* $0 < q \le 1$ *одновременно относительно перестановок и относительно частичных сумм в смысле сходимости по метрике* $L^q_{[0,1]}$.

2) Ряд (1.2) квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$ *при* $p \in [1,2)$ *одновременно относительно перестановок и относительно частичных рядов.*

Теорема 2. *По произвольной полной ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует ряд (1.2), удовлетворяющий следующим условиям :*

1) Ряд (1.2) квазиуниверсален в $C[0,1]$ *в обычном смысле.*

2) Ряд (1.2) квазиуниверсален во всех $L^p_{[0,1]}$ *при* $p \ge 2$ *в обычном смысле.*

Замечание. Утверждение 1) Теоремы 1 является усилением следующего результата А. Талаляна, см. [12] : для каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ при $p \in (0,1)$ существует ряд по любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к $f(x)$ в метрике $L^p_{[0,1]}$.

Утверждение 2) Теоремы 1 является усилением одного результата автора (см. [14], [15]) : для любой ограниченной полной ортонормированной в $L^2_{[0,1]}$ системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить ряд вида (1.2), удовлетворяющий следующему свойству : для произвольного $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что ряд (1.2) универсален относительно частичных рядов в классе $L^p_{(E)}$, $1 \le p < 2$, в смысле сходимости по метрике $L^p_{(E)}$.

В настоящей работе рассматриваемые выше вопросы исследуются в двумерном случае. Отметим, что ряд классических результатов (например, Теоремы

Л. Карлесона [19], М. Рисса [20], А. Н. Колмогорова [21]) невозможно распространить на двумерный случай (см. Ч. Фефферман [22], С. В. Конягин [23]). В этом случае сферические, прямоугольные и квадратные частичные суммы резко отличаются сходимостью в L^p, $p \geq 1$ и почти всюду (по этому поводу см. обзорные статьи Л. В. Жижиашвили [24], Б. С. Голубов [25] и М. И. Дьяченко [26]).

Теорема 3. *По любой ортонормированной полной системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует ряд вида*

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} c_{k,n}\,\varphi_k(x)\,\varphi_n(y), \qquad \sum_{k,n=1}^{\infty} |c_{k,n}|^r < \infty, \tag{1.3}$$

обладающий следующими свойствами :

1) для каждого $p \in (0,1)$ *и для каждой функции* $f(x,y) \in L^p_{[0,1]^2}$, *члены ряда (1.3) можно переставить (соответственно из ряда (1.3) можно выделить частичный ряд) так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы к* $f(x,y)$ *в метрике* $L^p_{[0,1]^2}$ *как по сферам, так и по прямоугольникам.*

2) для любого $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* E_ε *с мерой* $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$ *такое, что для всех* $f \in L^p$, $p \in [1,2)$, *члены ряда (1.3) можно переставить (соответственно из ряда (1.3) можно выделить частичный ряд) так, чтобы вновь полученный ряд сходился к* $f(x,y)$ *в метрике* $L^p_{(E)}$ *как по сферам, так и по прямоугольникам.*

Таким образом, существование ряда $\sum a_k\,\varphi_k(x)$ с указанными свойствами зависит от заданной ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}$, числа p и типа универсальности.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ – *полная ортонормированная система в* $L^2_{[0,1]}$. *Тогда для любых* $N_0 > 2$, $\varepsilon \in (0,1)$, $0 < q_1 < q_2 \leq 1$ *и для каждой ступенчатой функции* $f(x,y) = \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x)$; $\Delta_k = ((k-1)/2^n, k/2^n)$, $1 \leq k \leq 2^n = \nu_0$ *существуют измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *и полином*

$$H(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k\,\varphi_k(x), \tag{2.1}$$

удовлетворяющие условиям : 1) $|E| > 1-\varepsilon_0$, *2)* $\sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$, *3)* $\int_E |H(x) - f(x)|^2\,dx < \varepsilon^2$,

4) $$\int_0^1 |H(x) - f(x)|^q\,dx < \varepsilon^2, \quad \text{для всех} \quad q \in [q_1, q_2],$$

5) $$\max_{N_0\le m\le N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k\,\varphi_k(x)\right|^q dx \le 4\int_0^1 |f(x)|^q\,dx, \quad \text{для всех} \quad q\in[q_1,q_2),$$

6)
$$\max_{N_0\le m\le N}\left(\int_{\overline{E}}\left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k\,\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_{\overline{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \varepsilon, \text{ для всех } p\in[1,2),$$

где $\overline{E}\subset E$ – любое измеримое множество.

Доказательство. Положим

$$I_m(x)=\begin{cases} -\sqrt{m}, & x\in[0,1/(m+1)];\\ \dfrac{1}{\sqrt{m}}, & x\in(1/(m+1),1] \end{cases} \tag{2.2}$$

и при любом фиксированном m продолжим функцию $I_m(x)$ с периодом 1 с отрезка $[0,1]$ на всю ось. Очевидно, что

$$\int_0^1 I_m(x)\,dx=0, \quad m=1,2,.... \tag{2.3}$$

По лемме Фейера (см. [27], стр. 77) из (2.3) будем иметь

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^1 I_1(s\,x)\,\varphi_k(x)\,dx=0, \quad m,k=1,2,.... \tag{2.4}$$

Следовательно, в силу (2.4), можно найти натуральное число $s_1>\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1 [f(x)\cdot I_1(2^{s_1}x)]\,\varphi_k(x)\,dx\right| < \frac{\min\{\varepsilon;\int_0^1|f(x)|\,dx\}}{4\cdot\sqrt{N_0}}, \quad k=1,2,...,N_0. \tag{2.5}$$

Возьмём натуральное число $N_1>N_0$ настолько большим, чтобы

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^{N_1} a_i^{(1)}\,\varphi_i(x)-g_1(x)|^2\,dx<(\varepsilon/4)^2,$$

где $g_1(x)=f(x)\cdot I_1(2^{s_1}x)$, $a_i^{(1)}=\int_0^1[g_1(x)\varphi_i(x)dx$. Отсюда и из (2.5) вытекает

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{i=N_0}^{N_1} a_i^{(1)}\,\varphi_i(x)-g_1(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le \frac{\varepsilon}{4}+\left(\sum_{i=1}^{N_0}\left[a_i^{(1)}\right]^2\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Продолжая это рассуждение мы можем, по индукции, определить последовательности чисел $s_1<s_2<...;\ N_0<N_1<...$, функций

$$g_m(x)=f(x)\cdot I_m(2^{s_m}x); \quad m=1,2,... \tag{2.6}$$

причём

$$h_\omega(u) = \quad \text{сужение порождающей плотности} \quad h(\Omega) \quad \text{тела} \quad \mathbf{K} \quad \text{на} \quad \mathbf{S}_\omega.$$

Подчеркнём, что $h(\Omega)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В (1.1), $\lambda_{n-2}(du)$ – сферическая мера Лебега на $\mathbf{S}_\omega$ = большая $(n-2)$-подсфера с полюсом $\omega \in \mathbf{S}^{n-1}$. Обобщённая форма уравнения (1.1), не требующая дополнительных условий гладкости, полученная в [14], использует понятие порождающих распределений. В действительности, (1.1) обобщает известный результат Бляшке [8] для $n = 3$ на выпуклые тела в пространстве $\mathbb{R}^n$. Целью настоящей работы является описание подхода к исследованию уравнения (1.1), основанному на новом выражении для радиусов кривизны проекций. Для двух различных взаимно перпендикулярных направлений $\omega, \xi \in \mathbf{S}^{n-1}$, $\omega \perp \xi$ определим $R(\omega,\xi)$ = радиус кривизны $\partial\mathbf{K}(\omega,\xi)$ в точке, с направлением нормали ω, где $\mathbf{K}(\omega,\xi)$ = проекция $\mathbf{K}$ на плоскость, содержащую начало координат и направления ω и ξ. Это выражение имеет вид

$$R(\omega,\xi) = 2\int_{\mathbf{S}_\omega} \cos^2(\hat{u,\xi}) h_\omega(u)\,\lambda_{n-2}(du). \tag{1.2}$$

Отметим, что интеграл

$$\int_{\mathbf{S}_\omega} \cos^2(\hat{u,\xi}) h_\omega(u)\,\lambda_{n-2}(du)$$

часто используется в теории выпуклости, например, Вейль [30], где неотрицательность интеграла играет существенную роль. Выражение (1.2) даёт ясную геометрическую интерпретацию этого интеграла.

Уравнение (1.1) даёт начало рассмотрению задачи Функа на $\mathbf{S}^{n-1}$ для порождающей плотности $h(\Omega)$. Решение этой задачи имеет различную природу для чётных и нечётных значений n (см. Хелгасон [18]). Для чётного n и гладкой границы $\partial\mathbf{K}$ имеем (см. Теорему 4.3)

$$h(\Omega) = c_n P_n(L)\Big(\int_{\mathbf{S}_\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\omega)\,\lambda_{n-2}(d\omega)\Big), \tag{1.3}$$

где интегрирование распространяется на $(n-2)$-мерный экватор с полюсом Ω, L – оператор Лапласа-Бертрами, действующий на $\mathbf{S}^{n-1}$, P_n – некоторый многочлен, а c_n – постоянная. Мы получаем характеризационное условие для зоноидов : правая сторона уравнения (1.2) должна быть неотрицательной для всех $\Omega \in \mathbf{S}^{n-1}$. Аналогичный вопрос рассматривался в [14] в более общей формулировке.

$$H(x) = \sum_{m=l_0}^{l} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot h_m(x) = \sum_{i=m_0}^{M} c_i \varphi_i(x), \tag{2.17}$$

где

$$\begin{cases} c_i = 0, & i \in [N_0, M_0 - 1], \quad M_0 = N_{l_0-1}, \quad M = N - l; \\ c_i = m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot a_i^{(m)}, & i \in [N_{m-1}, N_m), \quad m \in [l_0, l]. \end{cases} \tag{2.18}$$

Из (2.11) и (2.16) имеем $|E| > 1 - \varepsilon$. В силу неравенства Бесселя и (2.12) имеем

$$\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left|a_i^{(m)}\right|^2 \leq \int_0^1 g_m^2(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx. \tag{2.19}$$

Отсюда и из (2.15) и (2.18) следует

$$\sum_{i=M_0}^{M} |c_i|^{2+\varepsilon_1} = \sum_{m=l_0}^{l} \left| \sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot a_i^{(m)} \right|^{2+\varepsilon_1} \leq$$

$$\leq \sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m} \left(\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left|a_i^{(m)}\right|^2 \right)^{(2+\varepsilon_1)/2} \leq \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx \right)^{(2+\varepsilon_1)/2} \sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Из (2.2), (2.6), (2.9), (2.16) и (2.17) получим

$$\left(\int_E |H(x) - f(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \leq \sum_{m=l_0}^{l} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 |h_m(x) - g_m(x)|^2\,dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_E \left| f(x) - \sum_{m=l_0}^{l} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot g_m(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \left[1 - \sum_{m=l_0}^{l} m^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon_1)}} \right] \cdot \left(\int_E f^2(x)\,dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Поскольку $f(x)/\sqrt{m} = g_m(x) - \sqrt{m} \cdot \chi_{E_m}(x) \cdot f(x) + f(x)/\sqrt{m} \cdot \chi_{E_m}(x)$, $x \in [0,1]$ (см. (2.6), (2.10), (2.2)), для любого $q \in (0,1)$ имеем

$$\int_0^1 \left| h_m(x) - \frac{f(x)}{\sqrt{m}} \right|^q dx \leq \int_0^1 |h_m(x) - g_m(x)|^q\,dx + 2m^{q/2} \cdot \int_{E_m} |f(x)|^q\,dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \right)^q + \frac{2m^{q/2}}{m} \int_0^1 |f(x)|^q\,dx.$$

Следовательно, из (2.14) - (2.18) для всех $q \in (q_1, q_2)$ получаем

$$\int_0^1 |H(x) - f(x)|^q\,dx \le \sum_{m=l_0}^{l} m^{-q/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 \left|h_m(x) - \frac{f(x)}{\sqrt{m}}\right|^q dx\right) +$$

$$+\left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{m=l_0}^{l} \frac{f(x)}{m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon_1}}}\right|^q dx\right)^{1/2} \le \sum_{m=l_0}^{l}\left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right)^{q_1} +$$

$$+2\cdot\sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m^{1-q_2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\varepsilon_1})}} \cdot \int_0^1 |f(x)|^q\,dx +$$

$$+\left[1 - \sum_{m=l_0}^{l} m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\varepsilon_1}}\right]^{q_1} \cdot \int_0^1 |f(x)|^q\,dx \lessdot \varepsilon.$$

Теперь проверим утверждения 5) и 6) Леммы 1. Прежде заметим (см. (2.13), (2.18), (2.19)), что для каждого $m \in [l_0, l]$ и для всех $N \in [N_{m-1}, N_m]$ имеет место следующее неравенство :

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{m-1}}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le \left(\left|\sum_{k=N_{m-1}}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^2\right)^{1/2} \le \tag{2.20}$$

$$\le m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\sum_{i=N_{m-1}}^{N_m-1} \left|a_i^{(m)}\right|^2\right)^{1/2} \le l_0^{-1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $N \in [M_0, M]$. Тогда для некоторого $m_0 \in [q_0, q]$ имеем $N_{m_0-1} \le N \le N_{m_0}$. Следовательно, из (2.17) и (2.18) получаем

$$\sum_{k=N_0}^{N} c_k\,\varphi_k(x) = \sum_{k=l_0}^{m_0-1} k^{-1/(2+\varepsilon_1)} h_k(x) + \sum_{m_0-1}^{N} c_k\,\varphi_k(x).$$

Отсюда и из (2.13) — (2.15), (2.9), (2.20) для всех $m_0 \in [q_0, q]$ получаем

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^q dx \le \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q/(2+\varepsilon_1)} \int_0^1 |h_m(x) - g_m(x)|^q\,dx +$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{m_0}}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^q dx + \int_0^1 \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} g_m(x)\right|^q dx \le$$

$$\leq \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q_1/(2+\varepsilon_1)} \left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right)^{q_1} + l_0^{-q_1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{q_1/2} +$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \frac{f(x)}{\sqrt{m}}\right|^q dx+$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} \left[f(x)\cdot\sqrt{m}\cdot\chi_{E_m}(x) - \frac{f(x)}{\sqrt{m}}\cdot\chi_{E_m}(x)\right]\right|^q dx \leq$$

$$\leq \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q_1/(2+\varepsilon_1)} \left(\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right)^{q_1} + l_0^{-q_1/(2+\varepsilon_1)} \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{q_1/2} +$$

$$+\left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)-1/2}\right|^{q_1} \int_0^1 |f(x)|^q\,dx+$$

$$+\sum_{m=l_0}^{m_0-1} \left(\frac{\sqrt{m}}{m^{1/(2+\varepsilon_1)}}\right)^q \cdot \int_{E_m} |f(x)|^q\,dx \leq 2\cdot\int_0^1 |f(x)|^q\,dx+$$

$$+2\cdot\sum_{m=l_0}^{l} \frac{1}{m^{1-q_2(1/2-1/(2+\varepsilon_1))}} \cdot \int_0^1 |f(x)|^q\,dx \leq 4\cdot\int_0^1 |f(x)|^q\,dx.$$

Принимая во внимание равенство $g_m(x) = f(x)/\sqrt{m}$ для $x \in E$ (см. (2.2), (2.6), (2.10), (2.16)) из (2.20), (2.14) для всех $p \in [1,2)$ и $N \in [N_0, M]$ и для любого измеримого множества $\overline{E} \subset E$ будем иметь

$$\left(\int_{\overline{E}} \left|\sum_{k=N_0}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-q/(2+\varepsilon_1)} \left(\int_{\overline{E}} |h_m(x)-g_m(x)|^p\right)^{1/p} dx+$$

$$+\left(\int_{\overline{E}} \left|\sum_{m=l_0}^{m_0-1} m^{-1/(2+\varepsilon_1)} g_m(x)\right|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{m_0}}^{N} c_k\,\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{\overline{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \sum_{m-q_0}^{q} m^{-1/(2+\varepsilon_1)-1/2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \left(\int_{\overline{E}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– полная ортонормированная система в* $L^2[0,1]$. *Тогда для любой функции* $f(x,y) \in L^2_{(T)}$ *и для любых чисел* $\varepsilon > 0$, $N > 1$, $0 < q_1 < q_2 \leq 1$, $p \in (1,2)$ *существуют измеримое множество* $E \subset T = [0,1]^2$ *и полином* $Q(x,y)$ *вида*

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\,\omega_k(x)\cdot\omega_n(y)$$

такие, что (1) $|E| > 1-\varepsilon$, 2) $\|f(x,y)-Q(x,y)\|_{L^2(E)} < \varepsilon$, 3) $\sum\limits_{k,n=N}^{M} |c_{k,n}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$,

(4)

$$\text{для всех} \quad p \in [1,2] \quad \text{и всех} \quad G \subset E, \max_{N \le \overline{k},\overline{n} \le M} \left\| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\, \omega_k(x) \cdot \omega_n(y) \right\|_{L^p(G)} +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N \le R \le \le \sqrt{2}M} \left\| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{k,n}\, \omega_k(x) \cdot \omega_n(y) \right\|_{L^p(G)} \le 2 \cdot \|f(x,y)\|_{L^p(G)} + \varepsilon,$$

(5) $$\iint_T |Q(x,y) - f(x,y)|^q \, dx\, dy < \varepsilon, \quad \text{for all} \quad q \in (q_1, q_2),$$

(6) $$\max_{N \le \overline{k},\overline{n} \le M} \iint_T \left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\, \omega_k(x) \cdot \omega_n(y) \right|^q dx\, dy +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \iint_T \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{k,n}\, \omega_k(x) \cdot \omega_n(y) \right|^q dx\, dy \le$$

$$\le 2 \cdot \iint_T |f(x,y)|^q \, dx\, dy + \varepsilon, \quad \text{для всех} \quad q \in (q_1, q_2).$$

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 3 работы [18].

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1. Рассмотрим множество пар $\{\gamma, \Delta\}$, где γ пробегает множество всех рациональных чисел, а Δ пробегает множество всех интервалов вида $\Delta_k^{(i)} = ((i-1)/2^k, i/2^k]$. Пронумировав все ступенчатые функции $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \cdot \chi_{\Delta_k}(x)$, $(\gamma_k, \Delta_k) \in \{\gamma, \Delta\}$, мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}. \tag{3.1}$$

Используя Лемму 1, можно найти последовательности множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ и полиномов вида

$$Q_k(x) = \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} c_i^{(k)} \varphi_k(x), \tag{3.2}$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная полная ортонормированная система в $L^2_{[0,1]}$, которые удовлетворяют условиям :

$$|E_k| > 1 - 2^{-2k}, \tag{3.3}$$

$$\int_{E_k} |f_k(x) - Q_k(x)|^2 \, dx < 2^{-2k}, \tag{3.4}$$

для всех $p \in [1,2]$, и всех $E \subset E_k$ имеем

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \int_E \left| \sum_{n=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)} \varphi_n(x)_n(x) \right|^p < 2 \int_E |f_k(x)|^p \, dx + 2^{-2k}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 |f_k(x) - Q_k(x)|^q \, dx < 2^{-2k}, \quad \text{при} \quad q \in \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right), \tag{3.6}$$

для всех $q \in \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right)$ имеем

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)} \varphi_n(x) \right|^q dx < 2 \int_0^1 |f_k(x)|^q \, dx + 2^{-2k}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} \left| a_n^{(k)} \right|^{2+2^{-k}} < 2^{-k}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим ряд ($a_n = a_n^{(k)}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_n^{(k)} \varphi_n(x), \; N_{k-1} \le n < N_k. \tag{3.9}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{r=1}^{\infty} |a_n|^r < \infty$ для всех $r > 2$. Покажем, что ряд (3.9) удовлетворяет требованиям Теоремы 1. Пусть $q \in (0,1)$ – произвольное число. Тогда для некоторого натурального k_0 будем иметь

$$q \in \left(\frac{1}{k_0}, 1 - \frac{1}{k_0} \right). \tag{3.10}$$

Для $f(x) \in L^q_{[0,1]}$ выберем функцию $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что $\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)|^q \, dx < 2^{-2}$, $\nu_1 > k_0$. Отсюда и из (3.6), (3.7), (3.9), (3.10) вытекает

$$\int_0^1 |f(x) - Q_{\nu_1}(x) - a_1 \varphi_1(x)|^q \, dx \le 2^{-2\nu_1} + |a_1|^q,$$

$$\max_{N_{\nu_1-1}\le N<N_{\nu_1}}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}a_n^{(\nu_1)}\varphi_n(x)\right|^q dx<2\int_0^1|f_{\nu_1}(x)|^q\,dx+2^{-k_1}.$$

Предположим, что уже определены числа $2<\nu_1<...<\nu_{q-1}$, $1=s(1),...,s(q-1)$, функции $a_{s(1)}\omega_{s(1)},...,a_{s(q-1)}\omega_{s(q-1)}$ и полиномы $Q_{\nu_n}(x)=\sum\limits_{i=N_{\nu_n-1}}^{N_{\nu_n}-1}a_i^{(\nu_n)}\omega_i(x)$, $n=1,2,...,q-1$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{j}\left[Q_{\nu_n}(x)+a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)\right]\right|^q dx<2^{-(j+3)}+|a_{s(j)}|^q,\quad 1\le j\le m-1, \tag{3.11}$$

$$\max_{N_{\nu_j-1}\le N<N_{\nu_j}}\int_0^1\left|\sum_{i=N_{\nu_j-1}}^{N}a_i^{(\nu_j)}\omega_i(x)\right|^q dx<2^{-j}+|a_{s(j-1)}|^q, \tag{3.12}$$

где $s(j)=\min\left\{n\in\mathbb{N}:n\notin\left\{\{N_{\nu_k-1},...,N_{\nu_k}-1\}_{k=1}^{j}\cup\{s(n)\}_{n=1}^{j-1}\right\}\right\}$, $s(1)\equiv 1$. Рассмотрим функцию $f_{\nu_m}(x)$, $\nu_m>\nu_{m-1}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{m-1}\left[Q_{\nu_n}(x)+a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)\right]-f_{\nu_m}(x)\right|^q dx<\frac{1}{2^{m+4}}. \tag{3.13}$$

Выбирая $\nu_m>\nu_{m-1}$, построим полином (см. (3.4)) $Q_{\nu_m}(x)=\sum\limits_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)$ и определим число

$$s(m)=\min\left\{n\in\mathbb{N}:n\notin\left\{\{N_{\nu_k-1},N_{\nu_k-1}+1,...,N_{\nu_k}-1\}_{k=1}^{m}\cup\{s(k)\}_{k=1}^{m-1}\right\}\right\}. \tag{3.14}$$

Из (3.11) и (3.13) вытекает, что $\int_0^1|f_{\nu_m}(x)|^q\,dx<2\cdot 2^{m+4}+|a_{s(m-1)}|^q$. Отсюда и из условий (3.5),(3.6), (3.13) будем иметь

$$\max_{N_{\nu_m-1}\le N<N_{\nu_m}}\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{N}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)\right|^q dx<2^{-m}+2\cdot|a_{s(m-1)}|^q, \tag{3.15}$$

$$\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{m}\left[Q_{\nu_n}(x)+a_{s(n)}\varphi_{s(n)}(x)\right]\right|^q dx<2^{-(m+3)}+|a_{s(m)}|^q. \tag{3.16}$$

Таким образом, мы можем, по индукции, из ряда (3.9) выбрать последовательности полиномов (см. (3.2), (3.14)) $Q_{\nu_m}(x)=\sum\limits_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)$, $m=1,2,...$ и функций $\left\{a_{s(m)}\varphi_{s(m)}(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$, $m=1,2,...$, $(s(1)=1)$, удовлетворяющие условиям (3.14) - (3.16) для всех $m\ge 1$. Учитывая выбор $Q_{\nu_m}(x)$ и $a_{s(m)}\varphi_{s(m)}(x)$ (см. (3.12), (3.14)) имеем, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1}a_i^{(\nu_m)}\varphi_i(x)+a_{s(m)}\varphi_{s(m)}(x)\right]$$

получается из ряда (3.11) перестановкой его членов. Обозначим его через

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x). \tag{3.17}$$

Из равенства (см. (3.8), (3.9), (3.14)) $\lim_{m\to\infty} a_{s(m)} = 0$ и из (3.15) и (3.16) вытекает, что ряд (3.17) сходится к функции $f(x)$ в метрике $L^q[0,1]$. Следовательно, ряд (3.11) универсален в $L^q[0,1]$ относительно перестановок.

Теперь покажем, что ряд (3.9) универсален в $L^q[0,1]$, $q \in (0,1)$ относительно частичных рядов. Используя (3.1), (3.2) и индукцию, мы можем для каждой функции $f(x) \in L^q_{[0,1]}$ выбрать подпоследовательности $\{f_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $Q_{\nu_k}(x) = \sum_{i=N_{\nu_{k-1}}}^{N_{\nu_k}-1} a_i^{(\nu_k)} \varphi_i(x)$, $N_{\nu_{k-1}} < N_{\nu_k - 1}$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} Q_{\nu_k}(x) - f_{\nu_n}(x) \right|^q dx < 2^{-(n+3)}, \quad n \geq 1.$$

Отсюда и из (3.6), (3.5) и (3.2) для всех $n \geq 1$ получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=N_{\nu_k-1}}^{N_{\nu_k}-1} a_i^{(\nu_k)} \varphi_i(x) - f(x) \right) \right|^q dx < 2^{-n},$$

$$\sup_{N_{\nu_n}-1 \leq N < N_{\nu_n}} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{N} a_i^{(\nu_m)} \varphi_i(x) \right|^q dx < 2^{-n}, \quad n > 1.$$

Следовательно, ряд (3.11) универсален в $L^q_{[0,1]}$ относительно частичных рядов. Этим заканчивается доказательство утверждения 1) Теоремы 1.

Теперь докажем утверждение 2). Пусть ε – произвольное положительное число. Рассмотрим множество $E_0 = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n$, где n_0 – целая часть числа $\log_{1/2} \varepsilon$. Очевидно, что $|E_0| > 1 - \varepsilon$. Учитывая неравенство (см. (3.4), (3.5))

$$\int_{E_0} |Q_k(x) - f_k(x)|^p \, dx < 2^{-k},$$

имеющее место для всех $p \in [1,2)$, получаем

$$\max_{N_{k-1} < N < N_k} \int_E \left| \sum_{i=N_{k-1}}^{N} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right|^p dx < 2 \int_{E_0} |f_k(x)|^p \, dx + 2^{-k}.$$

Используя рассуждения, приведённые при доказательстве пункта 1), завершаем доказательство пункта 2). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Пусть

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1] \tag{3.18}$$

последовательность всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами. Используя Лемму 1, можно найти последовательности множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ и полиномов

$$Q_k(x) = \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} a_n^{(k)} \varphi_n(x), \quad 1 \le N_0 < ... < N_k < N_{k+1} < ...., \quad k = 1,2,...., \tag{3.19}$$

удовлетворяющих следующим условиям :

$$\int_0^1 \left| f_k(x) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(x) \right|^{1/2} dx < 2^{-2k}, \qquad \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} \left| a_i^{(k)} \right|^{2+2^{-k}} < 2^{-k}. \tag{3.20}$$

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = \sum_{k=1} Q_k(x), \quad a_n = a_n^{(k)}, \quad N_{k-1} < n < N_k, \quad k \ge 1, \tag{3.21}$$

$$\overline{E_k} = \{x \in [0,1] : \quad |f_k(x) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(x)| < 2^{-k}\}. \tag{3.22}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^q < \infty$ для всех $q > 2$, $|\overline{E_k}| > 1 - 2^{-2k}$. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое положительное число. Рассмотрим множество

$$\overline{E} = \left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \overline{E}_k \bigcap B \right), \tag{3.23}$$

где $B \subset [0,1]$ – измеримое множество с мерой $|B| > 1 - \varepsilon/4$ такое, что все функции $\varphi_k(x)$ непрерывны на B, и n_0 – целая часть числа $\log_{1/2} \varepsilon$. Теперь рассмотрим произвольное замкнутое подмножество $E \subset \overline{E}$ с мерой $|E| > |\overline{E}| - \varepsilon/2$. Очевидно, что $E| > 1 - \varepsilon/2$. Пусть $f(x)$ – любая непрерывная функция, определённая на E. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.18) можно выбрать подпоследовательность $f_{n_\nu}(x)$ такую, что $\max\limits_{x\in E} |f(x) - f_{n_\nu}(x)| < 2^{-2k}$, $k = 1,2,....$ Отсюда и из (3.22), (3.23) получаем

$$\max_{x\in E} \left| f(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} a_i \varphi_i(x) \right| = \max_{x\in E} \left| f(x) - \sum_{i=1}^{m_\nu} \left(\sum_{i=N_{k-1}}^{N_k-1} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right) \right| \le$$

$$\le \max_{x\in E} \left(|f(x) - f_{n_\nu}(x)| + \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n_\nu} Q_k(x) \right| \right) \le 2^{-2\nu} + 2^{-2n_\nu}, \quad m_\nu = N_{n_\nu} - 1.$$

Таким образом, ряд (3.21) универсален в $C_{(E)}$, и, следовательно, квазиуниверсален в $C_{[0,1]}$. Аналогично можно доказать, что ряд (3.21) квазиуниверсален в $L^p[0,1]$ для всех $p \geq 2$. Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3. Доказательство следует из доказательства Теоремы 1, используя Лемму 2 вместо Леммы 1.

Abstract. The paper proves that for any complete orthonormal system $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ there exists a series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ for which $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty$ for any $r > 2$, possessing the properties : I) it is universal in all $L^q_{[0,1]}$ for $0 < q \leq 1$ simultaneously with respect to both rearrangements and partial series in the sense of convergence in the metric of $L^q_{[0,1]}$. II) it is quasiuniversal in all $L^p_{[0,1]}$ for $p \in [1,2)$ simultaneously with respect to both rearrangements and partial series.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "О частных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, № 2, стр. 197 — 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. Сборник, том 26, № 3, стр. 351 — 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов", Изв. АН АрмССР, Математика, том 10, № 3, стр. 17 — 34, 1975.
4. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, том 15, № 5, стр. 567 — 604, 1960.
5. В. И. Иванов, "Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов", Труды МИАН СССР, 189, стр. 34 — 77, 1989.
6. П. Л. Ульянов, "Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$", УМН, том 25, № 2, стр. 3 — 52, 1972.
7. А. М. Олевский, "О некоторых особенностях рядов Фурье в пространстве L^p, $p < 2$", Мат. Сборник, том 77, № 2, стр. 251 — 258, 1968.
8. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН Арм. ССР, том 64, № 2, стр. 72 — 76, 1976.
9. Н. Г. Погосян, "Представление измеримых функций базисами $L^p[0,1]$, $p \geq 2$", ДАН Арм.ССР, том 64, № 4, стр. 205 — 209, 1976.
10. W. Orlicz, "Über die unabhangig von der Anordnung fast uberall konvergenten Reihen", Bull de l' Academie Polonaise des Sciences, vol. 81, p. 117 — 125, 1927.
11. Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, II, Наука, Москва, 1996.
12. А. А. Талалян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$ ортогональными рядами", Acta Math., Scientiarum Hungaricae Tomus, том 21, № № 1–2, pp. 1 — 9, 1970.
13. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Сборник, том 181, № 8, стр. 1011 — 1030, 1990.

14. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, серия Матем., том 57, № 5, стр. 75 — 105, 1993.
15. M. G. Grigorian "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia. Math., vol. 134(3), pp. 207 — 216, 1999.
16. М. Г. Григорян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами", ДАН Арм.ССР, том 67, № 5, стр. 269 — 274, 1978.
17. М. Г. Григорян, "Об универсальных или квазиуниверсальных в $L^p_{[0,1]}$ ортогональных рядах", Изв. НАН Армении, серия Матем., том 35, № 4, стр. 44 — 64, 2000.
18. М. Г. Григорян, "Об одном универсальном ортогональном ряде", Изв. НАН Армении, серия Матем., том 35, № 4, стр. 44 — 64, 2000.
19. L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math., vol. 116, pp. 135 — 157, 1966.
20. M. Riesz, "Sur les functions conjugees", Math. Zeit., vol. 27, pp. 218 — 244, 1927.
21. A. N. Kolmogorov, "Sur les functions harmoniques conjugees et les de Fourier", FM., vol. 7, pp. 23 — 28, 1925.
22. C. Fefferman, "The multiple problem for the ball", Ann. Math., vol. 94, no. 2, pp. 330 — 336, 1971.
23. С. В. Конягин, "О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье", Тезисы докладов Всесоюз. шк. по Теории функций, Ереван, 1987.
24. Л. В. Жижиашвили, "О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов", УМН, том 28, № 2, стр. 65 — 119, 1973.
25. Б. И. Голубов, "Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов", УМН, том 47, № 5, стр. 97 — 162, 1992.
26. М. И. Дьяченко, "Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов", УМН, том 47, № 5, стр. 97 - 162, 1992.
27. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, М., Физматгиз, 1961.

Поступила 22 марта 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 2, 2002, 19–32

АДДИТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КОСОЭРМИТОВОГО ЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас

Институт Информатики и Задач Автоматизации НАН Армении,
Харьковский государственный университет
e-mail : rut@nikon.kharkov.ua

Резюме. Установлено соответствие между приводящими подпространствами косоэрмитового линейного пучка и аддитивным разложением характеристической функции этого пучка.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Как доказано в [1], класс функций, позитивных и аналитических в открытой правой полуплоскости, совпадает с классом характеристических функций косоэрмитовых линейных пучков операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Таким пучкам операторов ставятся в соответствие операторные Σ-узлы, вводятся понятия эквивалентности для пучков и операторных узлов, и рассматриваются преобразования, не выводящие операторные узлы из класса эквивалентности. Существование взаимно однозначного соответствия между инвариантными парами подпространств некосоэрмитового пучка $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$ и мультипликативными представлениями характеристических функций $s(\lambda)$ П-узлов установлено в [2], [3]. Мультипликативным разложениям сжимающих функций или J-сжимающих матриц-функций посвящены также работы [4] – [6].

Наряду с функциями рассеяния и передачи, аналитическая теория цепей изучает функции сопротивления (импеданс), проводимости (адмиттанс) [7] – [9] и гибридного отображения, которые обладают свойством позитивности, т.е. являются неванлинновскими в правой полуплоскости.

В настоящей статье доказано, что имеется соответствие между парами приводящих подпространств косоэрмитового пучка и аддитивными разложениями как характеристической функции $z(\lambda)$ этого пучка и соответствующего ему операторного Σ-узла, так и связанной с ним импедансной системы.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть X, Y, $\mathcal{E}$ – гильбертовы пространства с индефинитными метриками j_X, j_Y, $\mathcal{J}_\mathcal{E}$, соответственно. Для $x \in X$, $y \in Y$, $e \in \mathcal{E}$ положим $[x,x] = (j_X x, x)$, $[y,y] = (j_Y y, y)$, $[e,e] = (\mathcal{J}_\mathcal{E} e, e)$ (пространства М. Г. Крейна). Пусть $\mathcal{F}_X = X \oplus X \oplus \mathcal{E}$ – гильбертово пространство с индефинитной метрикой, задаваемое оператором Грама

$$\mathcal{J}^X = \begin{bmatrix} 0 & -j_X & 0 \\ j_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_\mathcal{E} \end{bmatrix}.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}_Y = Y \oplus Y \oplus \mathcal{E}$ определяется аналогично. Рассмотрим ортогональные проекторы, действующие в пространствах $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$:

$$P_X : \mathcal{F}_X \longmapsto X \oplus X, \quad Q_X : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{E}, \quad P_Y : \mathcal{F}_Y \longmapsto Y \oplus Y, \quad Q_Y : \mathcal{F}_Y \longmapsto \mathcal{E}.$$

Определение 2.1. *Оператор*

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$$

с ограниченными блоками называется операторным узлом, а оператор-функция комплексной переменной λ $w(V,\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L$ называется характеристической функцией операторного пучка $\lambda A + B$ и узла V.

Характеристическая функция $w(V,\lambda)$ рассматривается на множестве

$$\{\lambda : \lambda \text{ не является собственным значением пучка } \lambda A + B\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функция } \Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} L \text{ голоморфна}\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функции } (\mu A^+ + B^+)^{-1} M^+ \text{ и } (\mu A^+ + B^+)^{-1} N^+ \text{ голоморфны в } \mu = \overline{\lambda}\}.$$

Характеристическая функция $w(V,\lambda)$ операторного узла V голоморфна в области регулярности $\rho = \rho(A,B)$ операторного пучка $\lambda A + B$. Пусть $\Pi_- =$ левая полуплоскость ($\operatorname{Re} \lambda < 0$), а $\Pi_+ =$ правая полуплоскость ($\operatorname{Re} \lambda > 0$). Предположим, что пучок $\lambda A + B$ имеет хотя бы одну регулярную точку в Π_- и хотя бы одну в Π_+ (см. [1], [2]).

Будем говорить, что линейная система $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$ с входом $f \in \mathcal{E}$, с выходом $g \in \mathcal{E}$ и внутренним состоянием $x \in X$ **связана** с операторным узлом V, если векторы её состояния определяются посредством уравнений

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. *[2]. Операторный узел $\widehat{V} : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ называется Π–узлом, если он $(\mathcal{J}^X, \mathcal{J}^Y)$-унитарен : $\widehat{V}\widehat{V}^+ = I$, $\widehat{V}^+\widehat{V} = I$, $(\widehat{V}^+ = \mathcal{J}^X\widehat{V}^*\mathcal{J}^Y)$.*

Определение 2.3. *[1]. Операторный узел $V : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ называется Σ-узлом, если относительно индефинитных метрик $\mathcal{J}^X$ и $\mathcal{J}^Y$ выполняются соотношения*

$$VQ_Y + Q_XV^+ = VP_XV^+ - P_Y, \quad V^+Q_X + Q_YV = V^+P_YV - P_X. \tag{2.2}$$

В терминах блоков соотношения (2.2) эквивалентны следующим :

$$\begin{array}{ll}
1)\ AD^+ + BC^+ = I, & 7)\ D^+A + B^+C = I,\\
2)\ AB^+ + BA^+ = 0, & 8)\ C^+A + A^+C = 0,\\
3)\ CD^+ + DC^+ = 0, & 9)\ D^+B + B^+D = 0,\\
4)\ MD^+ + NC^+ = -R^+, & 10)\ D^+L + B^+R = -N^+,\\
5)\ MB^+ + NA^+ = -L^+, & 11)\ C^+L + A^+R = -M^+,\\
6)\ MN^+ + NM^+ = -(K + K^+), & 12)\ R^+L + L^+R = -(K + K^+).
\end{array} \tag{2.3}$$

Линейная система $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$, связанная с операторным Σ-узлом V, обладает передаточным отображением $z(\lambda) = w(V, \lambda)$, имеющим физический смысл импеданса, адмиттанса или гибридной матрицы электрического многополюсника [10], и называется **импедансной системой**. Операторные (матричные) коэффициенты уравнений (2.1), описывающих физическую систему на графе, явно выражаются через топологические характеристики этой системы (см. [10], [11]). Взаимная связь между П-узлами, Σ-узлами и соответствующими системами рассмотрена в работе [1].

Теорема 2.1. *[1]. В дефинитном случае ($j_X = I$, $j_Y = I$, $\mathcal{J}_\mathcal{E} = I$) характеристическая функция $z(\lambda)$ Σ-узла V позитивна всюду в Π_+ и негативна всюду в Π_- :*

$$z(\lambda) + z^*(\lambda) \begin{cases} \geq 0, & \operatorname{Re}\lambda > 0,\\ = 0, & \operatorname{Re}\lambda = 0,\\ \leq 0, & \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

В [1] рассмотрены преобразования над пучками и над Σ-узлами, которые не меняют характеристическую функцию $z(\lambda)$ и соответствующие свойства импедансной системы.

Определение 2.4. *Пучки $\lambda A + B$, $\lambda A_1 + B_1 : X \longmapsto Y$ называются унитарно эквивалентными, если существуют ограниченно обратимый оператор $Q : Y \longmapsto Y$ и унитарный оператор $U : X \longmapsto X$ такие, что при любом λ имеет место равенство*

$$\lambda A_1 + B_1 = Q(\lambda A + B)U^*. \tag{2.4}$$

Определение 2.5. *Операторные Σ-узлы $V, V_1 : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ называются унитарно эквивалентными, если их (системные) блоки связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} A_1 = QAU^*, \quad B_1 = QBU^*, \quad L_1 = QL, \\ M_1 = MU^*, \quad N_1 = NU^*, \quad K_1 = K, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $Q : Y \longmapsto Y$ – ограниченно обратимый оператор, а $U : X \longmapsto X$ – унитарный оператор.

Определение 2.6. *Операторные Σ-узлы $V : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ и $V_1 : \mathcal{F}_{X_1} \longmapsto \mathcal{F}_{Y_1}$ с одинаковыми внешними подпространствами $\mathcal{E}$ называются эквивалентными, если их характеристические функции совпадают :*

$$w(V, \lambda) = w(V_1, \lambda), \quad \lambda \in \rho(A, B) = \rho(A_1, B_1).$$

Определение 2.7. *Операторный Σ-узел V называется нормированным в точке ν, если $\nu M + N = 0$.*

Определение 2.8. *Представление оператор-функции $z(\lambda)$ в виде характеристической функции операторного узла V*

$$z(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L, \qquad Re\,\lambda > 0 \tag{2.6}$$

называется реализацией функции $z(\lambda)$ в правой полуплоскости, а представление функции $\theta(\zeta)$ в виде

$$\theta(\zeta) = S + \zeta G(I - \zeta T)^{-1}F, \quad |\zeta| < 1 \tag{2.7}$$

называется реализацией в единичном круге.

Пусть $\nu \in \Pi_+ \cap \rho(A, B)$ – фиксированная точка. Применяя преобразование $\zeta = \dfrac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}}$, в [1] доказано, что существует преобразование χ Σ-узла V в блочный оператор $\mathcal{V} : X \oplus \mathcal{E} \longmapsto X \oplus \mathcal{E}$, блоки которого являются коэффициентами реализации функции

$$\theta(\zeta) = z\left(\frac{\nu + \overline{\nu}\zeta}{1 - \zeta}\right)$$

в единичном круге. Это преобразование задаётся формулой

$$\mathcal{V} = \chi(V) = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B) & \sigma(\nu A + B)^{-1}L \\ -\sigma L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & z(\nu) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

где $\sigma = \sqrt{\nu + \overline{\nu}}$.

Теорема 2.2 [1]. *Блоки оператора $\mathcal{V} = \chi(V)$ Σ-узла V связаны соотношениями*

$$TT^* = I, \quad T^*T = I; \quad TG^* = F, \quad T^*F = G^*; \quad GG^* = F^*F = S + S^*. \tag{2.9}$$

Обратно, пусть коэффициенты реализации в единичном круге некоторой функции $\theta(\zeta)$ образуют блочный оператор

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \mathcal{E} \longmapsto X \oplus \mathcal{E} \tag{2.10}$$

и удовлетворяют соотношениям (2.9). Тогда для $\nu \in \Pi_+$ нормированный в точке ν операторный Σ-узел $V = \pi(\mathcal{V}) : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_X$

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I-T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{\overline{\nu}I+\nu T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{1}{\sigma}F \\ \dfrac{I+T}{2} & \dfrac{\overline{\nu}I-\nu T}{2} & -\dfrac{\Sigma}{2}F \\ -\dfrac{1}{\Sigma}G & \dfrac{\nu}{\sigma}G & S \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

где $\nu A + B = I$ задаёт реализацию в правой полуплоскости для функции $z(\lambda) = \theta\left(\dfrac{\lambda-\nu}{\lambda+\overline{\nu}}\right)$.

Определение 2.9. *Операторный Σ-узел V называется* **простым**, *если линейная оболочка $X_0 = \bigvee\limits_{n=-\infty}^{\infty} (T^n F\mathcal{E})$, где $T = -(\nu A+B)^{-1}(\overline{\nu}A-B)$ и $F = \sigma(\nu A+B)^{-1}L$, совпадает с основным внутренним пространством Σ-узла : $X_0 = X$.*

Лемма 2.1 [1]. *Операторы всякого косоэрмитового пучка $\lambda A + B : X \longmapsto Y$ допускают включение в некоторый простой нормированный Σ-узел.*

Теорема 2.3 [1]. *Пусть характеристические функции*

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= w(V,\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L, \\ z_1(\lambda) &= w(V_1,\lambda) = K_1 - (\lambda M_1 + N_1)(\lambda A_1 + B_1)^{-1}L_1 \end{aligned}$$

косоэрмитовых пучков $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1 : \mathcal{F}_X \longmapsto \mathcal{F}_Y$ построены по простым Σ-узлам V и V_1. Если $z(\lambda) = z_1(\lambda)$ ($Re\ \lambda > 0$), то пучки унитарно эквивалентны. Более того, если Σ-узлы V и V_1 нормированы, то эти узлы также унитарно эквивалентны.

Введённое отношение эквивалентности операторных Σ-узлов разбивает множество всех Σ-узлов на классы эквивалентности. В работе [1] представлены преобразования групп эквивалентности, не выводящие операторные Σ-узлы из своих классов эквивалентности.

Преобразование $(\pi \circ \chi)$, определяемое формулой

$$(\pi\circ\chi)V = (\pi\circ\chi)\begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \tag{2.12}$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{A}{\nu A+B} & \frac{B}{\nu A+B} & \frac{L}{\nu A+B} \\ \frac{\frac{\nu-\bar{\nu}}{2} A+B}{\nu A+B} & \frac{\nu\bar{\nu}A-\frac{\nu-\bar{\nu}}{2} B}{\nu A+B} & \frac{-\frac{\nu+\bar{\nu}}{2} L}{\nu A+B} \\ \frac{-L^{\bullet}}{\nu A^{\bullet}-B^{\bullet}} & \frac{\nu L^{\bullet}}{\nu A^{\bullet}-B^{\bullet}} & \frac{K-(\nu M+N)\,L}{\nu A+B} \end{bmatrix},
$$

преобразует операторный Σ-узел в эквивалентный Σ-узел $(\pi \circ \chi)V$, нормированный в точке $\nu \in \Pi_{+}$.

Преобразование эквивалентности $[\varphi]$, где $\varphi : Y \longmapsto \mathcal{E}$, определяется формулой

$$
[\varphi]V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \varphi & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^{+} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.13}
$$

Для любого ограниченного обратимого оператора $Q : Y \longmapsto Y$ и унитарного оператора $U : X \longmapsto X$ преобразование $\{Q, U\}$, определяемое формулой

$$
\{Q,U\}V = (Q \oplus Q^{\bullet^{-1}} \oplus I_{\mathcal{E}})V(U \oplus U \oplus I_{\mathcal{E}}), \tag{2.14}
$$

является преобразованием унитарной эквивалентности.

В работе [10] приводятся аналитические представления (2.6) в форме реализации на плоскости для гибридных операторов (матриц) линейных структур на графах. В работе [7] изучаются дробно–линейные представления таких матриц–функций и вопросы их реализаций. Аддитивные реализации рациональных вещественных симметрических матриц–функций исследуются в [8], [9] и [12].

§3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ

Представление системы в виде каскадного [4], [5] или гибридного (параллельно–последовательного) [8], [9] соединения более простых систем, отвечает множителям или слагаемым соответствующего мультипликативного или аддитивного разложения проходной или импедансной системы.

Пусть $\Phi_n = \{(f_n, x_n, y_n)\}$, $n = 1, ..., N$ – импедансные системы с одинаковыми внешними подпространствами $\mathcal{E}_{\setminus} = \mathcal{E}$, и пусть $V_n : X_n \oplus X_n \oplus \mathcal{E} \longmapsto Y_n \oplus Y_n \oplus \mathcal{E}$ – операторные Σ-узлы такие, что

$$
(\lambda A_n + B_n)x_n = L_n f_n, \quad g_n = K_n f_n - (\lambda M_n + N_n)x_n. \tag{3.1}
$$

Определение 3.1. *Сумма (или аддитивное соединение)* $\Phi = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n$ *определяется следующим образом :*

$$
\Phi = \left\{ \left(f = f_n/\forall n, \quad x = \sum_{n=1}^{N} \oplus x_n, \quad g = \sum_{n=1}^{N} g_n \right) \right\}. \tag{3.2}
$$

При равенстве входов f_n всех систем Φ_n, входом f суммарной системы Φ считается тот же вектор $f = f_n$, а выход g определяется как обычная сумма соответствующих выходов g_n в пространстве $\mathcal{E}$. Внутренним состоянием x для Φ считается ортогональная сумма внутренних состояний x_n слагаемых Φ_n. Пространство X внутренних состояний системы Φ и пространство Y определяются формулами

$$X = \sum_{n=1}^{N} \oplus X_n, \quad Y = \sum_{n=1}^{N} \oplus Y_n. \tag{3.3}$$

Индефинитные метрики в пространствах X и Y определяются прямыми суммами метрик в X_n и Y_n, соответственно :

$$[x,x] = (j_X x, x), \quad J_X = \sum_{n=1}^{N} \oplus J_{X_n}, \quad [y,y] = (j_Y y, y), \quad J_Y = \sum_{n=1}^{N} \oplus J_{Y_n}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим ортопроекторы $P_n : X \longmapsto X_n$ и $Q_n : Y \longmapsto Y_n$. Суммируя уравнения (3.1) и используя определение внутренних состояний суммарной системы $\Phi = \{(f,x,y)\}$, получим

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x, \tag{3.5}$$

где операторные коэффициенты выражаются через Σ-узлы V_n следующим образом :

$$A = \sum_{n=1}^{N} \oplus A_n, \quad B = \sum_{n=1}^{N} \oplus B_n, \quad L = \sum_{n=1}^{N} P_n L_n = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_N \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$M = \sum_{n=1}^{N} M_n P_n = [M_1 \cdots M_N], \quad N = \sum_{n=1}^{N} N_n P_n = [N_1 \cdots N_N], \quad K = \sum_{n=1}^{N} K_n. \tag{3.7}$$

По аналогии с (3.6) определим через блоки средних узлов V_n операторы $C, D \in [X,Y]$ и $R \in [\mathcal{E}, Y]$:

$$C = \sum_{n=1}^{N} \oplus C_n, \quad D = \sum_{n=1}^{N} \oplus D_n, \quad R = \sum_{n=1}^{N} Q_n R_n = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Определение 3.2. *Построенный по правилам (3.6) – (3.8) оператор*

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}$$

называется полупрямой суммой Σ-узлов V_n и обозначается символом

$$V = \sum_{n=1}^{N} \hat{+} V_n. \tag{3.9}$$

Операторные узлы V_n называются проекциями оператора V на приводящие пары подпространств (X_n, Y_n).

Так как операторы V_n являются Σ-узлами, то проверив выполнение соотношений (2.3), убеждаемся, что оператор V является Σ-узлом. Заметим, что пары подпространств (X_n, Y_n), вместе с основным пучком $\lambda A + B$, редуцируют вспомогательный пучок $\lambda C + D$ следующим образом :

$$Q_n(\lambda A + B) = (\lambda A + B)P_n, \quad Q_n(\lambda C + D) = (\lambda C + D)P_n. \tag{3.10}$$

Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть операторные Σ-узлы V_n соответствуют системе Φ_n. Тогда операторный Σ-узел $V = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n$ соответствует суммарной системе $\Phi = \sum\limits_{n=1}^{N} \Phi_n$.*

Теорема 3.2. *Пусть пары подпространств (X_n, Y_n), $n = 1, ..., N$ приводят как основной пучок $\lambda A + B \,:\, X \longmapsto Y$ некоторого Σ-узла $V = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n$, так и индефинитные метрики j_X и j_Y пространств X и Y так, что выполняются соотношения (3.3) и (3.4). Тогда система Φ, связанная с узлом V, разлагается в сумму систем Φ_n с внутренними пространствами X_n, Y_n, а передаточная функция $z(\lambda)$ системы Φ разлагается в сумму передаточных функций $z_n(\lambda)$ систем Φ_n :*

$$z(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} z_n(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A, B). \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть заданы Σ-узел V с внутренними пространствами X, Y и связанная с ним система $\Phi = \{(f, x, g)\}$. Пусть пары подпространств (X_n, Y_n) из разложений (3.3) приводят основной пучок $\lambda A + B$. Тогда выполнено первое соотношение из (3.10), а второе может и не выполняться. Следовательно, представление Σ-узла V в виде суммы (3.9) некоторых узлов–проекций V_n, вообще говоря, невозможно. Однако, мы можем заменить блок-строку $[C, D, R]$ на другую $[\widetilde{C}, \widetilde{D}, \widetilde{R}]$ так, чтобы выполнялось и второе соотношение в (3.10), а оператор

$$\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A & B & L \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & \widetilde{R} \\ M & N & K \end{bmatrix} : X \oplus X \oplus \mathcal{E} \longmapsto Y \oplus Y \oplus \mathcal{E} \tag{3.12}$$

был бы Σ-узлом. При этом, не меняется ни характеристическая функция, ни связанная с ним импедансная система. В качестве блок-строки можно взять

$$[\widetilde{C}\ \widetilde{D}\ \widetilde{R}] = [q^* q\widetilde{B} \quad q^* q\widetilde{A} \quad q^* q(-\widetilde{A}M^+ - \widetilde{B}N^+)], \tag{3.13}$$

где $q = (\nu A + B)^{-1}$, $\widetilde{B} = \frac{\nu - \overline{\nu}}{2} A + B$, $\widetilde{A} = \nu\overline{\nu} A - \frac{\nu - \overline{\nu}}{2} B$, а ν – регулярная точка пучка $\lambda A + B$. Нетрудно проверить, что блоки оператора $\widetilde{V}$ удовлетворяют условию (2.3). Теперь искомые проекции V_n Σ-узла оператора $\widetilde{V}$ на приводящие пары подпространств (X_n, Y_n) находятся согласно Определению 3.2 :

$$A_n = Q_n A P_n, \quad B_n = Q_n B P_n, \quad L_n = Q_n L, \quad C_n = Q_n \widetilde{C} P_n,$$
$$D_n = Q_n \widetilde{D} P_n, \quad R_n = Q_n \widetilde{R}, \quad M_n = M P_n, \quad N_n = N P_n.$$

Отметим, что последний угловой блок $K_n : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ проекции V_n определяется неоднозначно, так как соотношениями

$$K_n + K_n^+ = -M_n N_n^+ - N_n M_n^+ = -R_n^+ L_n - L_n^+ R_n$$

однозначно определяется лишь вещественная часть $\operatorname{Re} K_n = \frac{1}{2}(K + K^+)$, а мнимая часть оператора K_n может иметь любое значение $\operatorname{Im} K_n = \frac{1}{2i}(K - K^+)$, удовлетворяющее условию суммирования $\operatorname{Im} K = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Im} K_n$. Это обеспечивает выполнение последнего условия в (3.7) для искомых операторов $K_n = \operatorname{Re} K_n + i \operatorname{Im} K_n$.

Наконец, легко проверить, что блоки операторов V_n удовлетворяют условиям (2.3), и поэтому Σ-узел оператора $\widetilde{V}$ разлагается в сумму Σ-узлов оператора V_n. Системы–проекции $\Phi_n = \{(f_n, x_n, y_n)\}$, $n = 1, ..., N$ определяются однозначно по проекциям узлов V_n уравнениями (3.1), где $f_n = f$. По построению, характеристическая функция $z(\lambda)$ Σ-узла V равна сумме характеристических функций Σ-узлов V_n всюду в области регулярности пучка $\lambda A + B$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Легко видеть, что Σ-узел $\widetilde{V}$, определённый по (3.12), со средней строкой (3.13) получается применением к исходному Σ-узлу V преобразований χ, π, $\{Q, I\}$ и $[\varphi]$, определённых по (2.8), (2.11), (2.14) и (2.13), соответственно, причём $Q = \nu A + B$, $\varphi = (\nu M + N)(\nu A + B)^{-1}$, $\widetilde{V} = [I] \circ \{Q, I\} \circ (\pi \circ \chi)V$. Так как каждое из этих трёх преобразований в скобках не выводит Σ-узел из класса эквивалентности, то оператор $\widetilde{V}$ является Σ-узлом.

Далее в работе рассматриваются лишь дефинитные Σ-узлы ($j = I$, $\mathcal{J} = I$). Узел V называется **одномерным** (конечномерным), если $dim\ X = 1$ ($dim\ X = n < \infty$). Отметим, что всегда $dim\ y = dim\ X$, так как мы рассматриваем лишь регулярные пучки $\lambda A + B$ (т.е. пучки, у которых есть регулярные точки).

Характеристическая функция $z(\lambda)$ конечномерного Σ-узла V является рациональной матрицей-функцией, позитивной в правой полуплоскости : $z(\lambda) + z^*(\lambda) \geq 0$, $Re\ \lambda > 0$ (Теорема 2.1). В силу Теоремы 3.2, разложение функции $z(\lambda)$ в сумму простейших позитивных дробей связано с разложением Σ-узла в сумму одномерных узлов V_n.

Пусть $\nu \in \Pi_+$ – некоторая регулярная точка косоэрмитового пучка $\lambda A + B$. Покажем, что x_0 является собственным вектором косоэрмитового пучка $\lambda A + B$ тогда и только тогда, когда x_0 является собственным вектором оператора $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B)$. Действительно, пусть λ_0 – собственное значение, а x_0 – соответствующий собственный вектор, т.е. $\lambda_0 A + B x_0 = 0$. Очевидно, что имеем $(\nu A + B)x_0 = (\nu - \lambda_0)Ax_0$ и выполняются равенства

$$Ax_0 = \frac{1}{\nu - \lambda_0}(\nu A + B)x_0, \quad Bx_0 = \frac{-\lambda_0}{\nu - \lambda_0}(\nu A + B)x_0.$$

Отсюда вытекает, что x_0 – собственный вектор оператора T, отвечающий собственному значению $\xi_0 = \dfrac{\lambda_0 + \overline{\nu}}{\lambda_0 - \nu}$. Кроме того, так как $|\xi_0| = 1$, то λ_0 является мнимым числом, $\lambda_0 = i\tau_0$.

Обратно, если ξ_0 – собственное значение, и x_0 – соответствующий собственный вектор оператора T, то имеет место равенство $-(\overline{\nu}A - B)x_0 = (\nu A + B)\xi_0 x_0$. Отсюда следует, что
$$\left(\frac{\xi_0\nu + \overline{\nu}}{\xi_0 - 1}A + B\right)x_0 = 0.$$
Следовательно, число $\lambda_0 = \dfrac{\xi_0\nu + \overline{\nu}}{\xi_0 - 1}$ является собственным значением, а x_0 – соответствующим собственным вектором пучка $\lambda A + B$.

Заметим, что косоэрмитовый пучок $\lambda A + B$ не имеет присоединённых векторов, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Говоря о полноте, мы учитываем и собственные векторы x_∞, отвечающие бесконечно удалённой точке $\lambda = \infty$, аннулируемые оператором
$$A : \left(A + \frac{1}{\lambda}B\right)x_\infty = 0 \sim Ax_\infty = 0.$$

Теорема 3.3. *Для того, чтобы косоэрмитовый пучок $\lambda A + B : X \longmapsto X$ обладал бы полной системой собственных векторов, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция $z(\lambda)$, построенная по простому Σ-узлу, допускала разложение в сумму простейших позитивных дробей $z_n(\lambda)$:*
$$z(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} z_n(\lambda) = \sum_{n=1}^{N}\left[i\mathcal{B}_n + \frac{1}{\lambda - i\tau_n}\left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu - \overline{\nu}}{2}i\tau_n + \frac{\nu - \overline{\nu}}{2}\lambda - i\tau_n\lambda\right)\mathcal{A}_n\right], \tag{3.14}$$
$Re\ \lambda > 0$, где $N = dim\ X < \infty$, ν – регулярная точка пучка $\lambda A + B$, $Re\ \nu > 0$, $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n^*$, $\mathcal{A}_n \geq 0$, $rang\ \mathcal{A}_n = 1$, а сходимость понимается по норме в пространстве $[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$.

Равносильным условием является разложимость Σ-узла $\widetilde{V} = (\pi \circ \chi)V$ в сумму $\widetilde{V} = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n$ одномерных Σ-узлов V_n.

Доказательство. Необходимость. Согласно Лемме 2.1, операторы косоэрмитового пучка $\lambda A + B : X \longmapsto X$ допускают включение в простой Σ-узел V. Σ-узел $\widetilde{V} = (\pi \circ \chi)V$, пронормированный относительно точки ν, имеет вид (2.12). Его основные операторы $\widetilde{A} = (\nu A + B)^{-1}A$ и $\widetilde{B} = (\nu A + B)^{-1}B$ порождают пучок $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$, отличающийся от исходного пучка $\lambda A + B$ обратимым левым множителем. Поэтому оба пучка имеют общую систему собственных векторов. Допустим, что эта система полна в X. Тогда можно выбрать полную ортонормированную систему собственных векторов $\{h_n\}_{n=1}^{N}$, отвечающих собственным значениям λ_n пучка $\lambda A + B$.

Введём одномерные линейные оболочки $X_n = span\{h_n\}$ и ортопроекторы $P_n : X \longmapsto X_n$. По построению, включая $\lambda_n = \infty$, имеем
$$\widetilde{A}h_n = (\nu A + B)^{-1}Ah_n = \frac{1}{\nu - \lambda_n}h_n, \quad \widetilde{B}h_n = (\nu A + B)^{-1}Bh_n = \frac{-\lambda_n}{\nu - \lambda_n}h_n,$$

$$\widetilde{C}h_n = (\nu A + B)^{-1}\left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2}A + B\right)h_n = \left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2} - \lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}h_n,$$

$$\widetilde{D}h_n = (\nu A + B)^{-1}\left(\nu\overline{\nu}A - \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}B\right)h_n = \left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}\lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}h_n.$$

Следовательно, все ортопроекторы P_n перестановочны с операторами $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, и подпространства X_n приводят пучки $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$ и $\lambda\widetilde{C} + \widetilde{D}$. С учётом полноты, ортогональное разложение $X = \sum\limits_{n=1}^{N} \oplus X_n$ обладает всеми свойствами разложения (3.3). По Теореме 3.2, проекции на пространства X_n оказываются одномерными Σ-узлами V_n такими, что

$$\widetilde{V} = \sum_{n=1}^{N} \widehat{+} V_n, \quad z(\lambda) = w(V,\lambda) = \sum_{n=1}^{N} w(V_n,\lambda). \tag{3.15}$$

Пучок $\lambda A_n + B_n$ имеет единственную точку спектра – собственное значение λ_n, а операторы A_n, B_n являются скалярными в X_n :

$$\begin{aligned} &A_n = \frac{1}{\nu-\lambda_n}, \quad B_n = \frac{-\lambda_n}{\nu-\lambda_n}, \\ &C_n = \left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2} - \lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}, \quad D_n = \left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}\lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Блоки L_n и R_n являются вектор–строками, а M_n и N_n – вектор–столбцами. Из условия косоэрмитовости пучка $\lambda A_n + B_n$ следует, что собственное значение λ_n является мнимым числом : $\overline{\lambda}_n = -\lambda_n$. В силу нормированности Σ-узла V_n в точке ν и соотношений 4) и 5) из системы (2.3) выполняются соотношения $M_n = -\xi_n L_n^*$, где $\xi_n = \dfrac{\lambda_n + \overline{\nu}}{\lambda_n - \nu}$, $|\xi_n| = 1$ и $R_n = -\dfrac{\nu+\overline{\nu}}{2}L_n$. Из равенства 12) из (2.3) получаем равенство $L_n^* L_n = \frac{1}{\nu+\overline{\nu}}(K_n + K_n^*)$. Из простоты узла V (эквивалентно, из простоты узла $\widetilde{V}$) следует, что $L_n \neq 0$ при любом n. Действительно, предположим, что $L_n = 0$, т.е. $P_n\widetilde{L}_n = 0$. Оператор

$$T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B) = -(\nu\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}(\overline{\nu}\widetilde{A} - \widetilde{B})$$

приводится подпространством X_n. Поэтому при всяком k имеем равенства

$$P_n T^k F = T^k P_n (\nu A + B)^{-1} L\sigma = T^k P_n \widetilde{L} = 0.$$

Но тогда $P_n X_0 = 0$, где $X_0 = \bigvee\limits_{k,l}(T^k F e)$, $e \in \mathcal{E}$, что противоречит соотношению $P_n X_0 = X_n$, вытекающему из определения простоты Σ-узла V $(X_0 = X)$. Таким образом, одномерные Σ-узлы V_n из разложения (3.15) имеют вид

$$V_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu-\lambda_n} & \frac{-\lambda_n}{\nu-\lambda_n} & L_n \\ \left(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2} - \lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n} & \left(\nu\overline{\nu} + \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}\lambda_n\right)\frac{1}{\nu-\lambda_n} & -\frac{\nu+\overline{\nu}}{2}L_n \\ -\xi_n L_n^* & \nu\xi_n L_n^* & K_n \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\xi_n = \frac{\lambda_n + \overline{\nu}}{\lambda_n - \nu}, \quad L_n^* L_n = \frac{1}{\nu + \overline{\nu}}(K_n + K_n^*) \neq 0, \quad \lambda_n = i\tau_n = -\overline{\lambda}_n \neq \infty,$$

а соответствующие характеристические функции $z_n(\lambda) = w(V_n, \lambda)$ имеют вид слагаемых в сумме (3.14), где обозначено

$$\mathcal{B}_n = \operatorname{Im} K_n, \quad \mathcal{A}_n = L_n^* L_n, \quad rang\ \mathcal{A}_n = 1. \tag{3.18}$$

Вид одномерного Σ-узла (3.17) и вид его характеристической функции из (3.14) являются универсальными для всех собственных значений $\lambda_n = i\tau_n$ пучка $\lambda A + B$, включая $\lambda_n = \infty$.
Достаточность. Пусть функция $z(\lambda)$, представимая суммой (3.14), является характеристической функцией косоэрмитового пучка $\lambda A + B$, построенного по простому Σ-узлу V. По каждой дроби $z_n(\lambda)$ построим реализующий её одномерный Σ-узел из (3.17) $V_n : X_n \oplus X_n \oplus \mathcal{E} \longmapsto X_n \oplus X_n \oplus \mathcal{E}$, где каждое X_n является копией одномерного комплексного пространства $\mathbf{C}^1$. С учётом (3.18), вектор-строка $L_n = (\beta_n^1, \beta_n^2, ...)$ и матрица K_n размерности $dim\ \mathcal{E}$ имеют вид

$$\overline{\beta}_n^m, \beta_n^j = (\mathcal{A})_{mj}, \quad K_n = z_n(\nu) = i\mathcal{B}_n + \mathcal{A}_n. \tag{3.19}$$

Ясно, что строка L_n определяется не единственным образом. Гильбертово пространство $X = \sum\limits_{n=1}^{N} \oplus X_n$ при $N = \infty$ является комплексным пространством l_2. Построим узел $\widetilde{V}_n : \widetilde{X}_n \oplus \widetilde{X}_n \oplus \mathcal{E} \longmapsto \widetilde{X}_n \oplus \widetilde{X}_n \oplus \mathcal{E}$ как сумму узлов V_n вида (3.15). Ограниченность диагональных матричных операторов $\widetilde{A}, \widetilde{B} : \widetilde{X}_n \longmapsto \widetilde{X}_n$

$$\widetilde{A} = \sum_{n=1}^{N} \oplus \frac{1}{\nu - \lambda_n}, \quad \widetilde{B} = \sum_{n=1}^{N} \oplus \frac{-\lambda_n}{\nu - \lambda_n}, \quad \lambda_n = i\tau_n \tag{3.20}$$

следует из ограниченности последовательностей диагональных элементов. Блок $\widetilde{K}$ определяется как сумма ряда $\widetilde{K} = \sum\limits_{n=1}^{N} K_n = z(\nu)$, сходящегося по условию (3.14) в равномерной операторной топологии. Оператор $\widetilde{L} = \sum\limits_{n=1}^{N} \oplus L_n$ ограничен, так как для вектора $e = (e_1, e_2, ...) \in \mathcal{E} \subset l_2$ справедливы равенства

$$\left\|\widetilde{L}e\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} \overline{\beta}_n^m \overline{e}_m \right) \left(\sum_{j=1}^{N} \beta_n^j e_j \right) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e_m e_j \mathcal{A}_{mj} = (\mathcal{A}e, e) \leq ||\mathcal{A}|| \cdot ||e||^2.$$

Здесь учтено, что $\mathcal{A} = \sum\limits_{n=1}^{N} \mathcal{A}_n = \operatorname{Re} K \in [\mathcal{E}]$ и ряды $\mathcal{A}_{mj} = \sum\limits_{n=1}^{N} (\mathcal{A}_n)_{mj}$ сходятся.

Аналогично проверяется ограниченность оператора $\widetilde{M}^* = -\frac{1}{\nu}\widetilde{N}^* = -\sum\limits_{n=1}^{N} \oplus \xi_n L_n$.

По построению пучок $\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B}$ имеет полную в X систему $\left\{h_n\right\}_{n=1}^{N}$ собственных

векторов, равных ортам подпространств X_n. Однако, не известно является ли Σ-узел V_n простым.
Выполнив преобразование χ (2.8) над Σ-узлом V_n получаем

$$\chi(\widetilde{V}) = \mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : \widetilde{X} \oplus \mathcal{E} \longmapsto \widetilde{X} \oplus \mathcal{E},$$

где

$$T = -(\nu\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}(\overline{\nu}\widetilde{A} - \widetilde{B}), \quad F = \frac{\sqrt{\nu + \overline{\nu}}}{2}(\nu\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\widetilde{L}.$$

Унитарный оператор T имеет ту же систему собственных векторов $\{h_n\}_{n=1}^{N}$, полных в X и приводит подпространство $X_0 = \bigvee\limits_{n=-\infty}^{\infty} (T^n F\mathcal{E})$. Поэтому, в соответствии с ортогональным разложением, имеем $T = T_0 + T_1$. Индуцированный оператор T_0 обладает полной в X_0 системой собственных векторов. Кроме того, операторы F и G имеют блочную структуру :

$$F = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{E} \longmapsto X_0 \oplus X, \quad G = [\,G_0 \quad 0\,] : X_0 \oplus X_1 \longmapsto \mathcal{E}.$$

Поэтому блоки оператора

$$\mathcal{V}_0 = \begin{bmatrix} T_0 & F_0 \\ G_0 & S \end{bmatrix} : X_0 \oplus \mathcal{E} \longmapsto X_0 \oplus \mathcal{E}$$

удовлетворяют (вместе с блоками оператора $\mathcal{V}$) соотношениям (2.9). Используя преобразование π (2.11), заключаем, что блочный оператор $V_0 = \pi(\mathcal{V}_0) : X_0 \oplus X_0 \oplus \mathcal{E} \longmapsto X_0 \oplus X_0 \oplus \mathcal{E}$ является простым Σ-узлом.
Ясно, что характеристические функции Σ-узлов $\widetilde{V}$ и V совпадают : $w(\widetilde{V}, \lambda) = w(V, \lambda)$. Так как собственные векторы оператора T_0 и пучка $\lambda A_0 + B_0 : X_0 \longmapsto X_0$ совпадают, то пучок имеет полную систему собственных векторов в пространстве X_0.
Возвращаясь к исходному Σ-узлу V и пучку $\lambda A + B : X \longmapsto X$ заметим, что так как $w(\widetilde{V}, \lambda) = w(V, \lambda) = z(\lambda)$, то по Теореме 2.3 из равенства $w(V, \lambda) = w(V_0, \lambda)$ для простых Σ-узлов V и V_0 вытекает унитарная эквивалентность пучков $\lambda A + B$ и $\lambda A_0 + B_0$. Следовательно, пучок $\lambda A + B$ также обладает системой собственных векторов, полной в X. Теорема 3.3 доказана.

Abstract. A correspondence between the reduction subspaces of the skew-Hermitian linear operator pencil and the additive decomposition of the characteristic function of this pencil is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас, "Косоэрмитовые линейные пучки операторов : Операторные узлы и характеристические функции", Изв. НАН Армении. Математика, том 35, № 2, стр. 1 – 17, 2000.
2. А. Г. Руткас, "Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов", Теория функций, Функ. Анализ и их приложения, Харьков, том. 45, стр. 98 – 111, 1986.
3. А. Г. Руткас, "К теории характеристических функций линейных операторов", ДАН СССР, том 229, № 3, стр. 546 – 549, 1976.
4. А. В. Ефимов, В. П. Потапов, "J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей", Успехи Мат. Наук, том 28, № 1(169), стр. 66 – 130, 1973.
5. Т. А. Товмасян, "Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций", Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 11 – 25, 1971.
6. Д. З. Аров, "Гамма-производящие матрицы, j-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции", Мат. физика, Анализ, Геометрия, Харьков, том 2, № 1, стр. 3 – 14, 1995.
7. В. Л. Даллакян, "Обобщение теоремы Дарлингтона для вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций", Изв. НАН Армении. Математика, том 29, № 2, стр. 22 – 31, 1994.
8. Т. А. Товмасян, "Об аддитивной реализации некоторых классов рациональных матриц-функций", Учёные Записки ЕГУ, том 2, стр. 13 – 21, 1995.
9. V. L. Dallakian, "The synthesis for structural systems of signal processing", Proc. of Conf. Computer Science and Information Techn., Yerevan, pp. 283 – 286, 1999.
10. В. Л. Даллакян, "Внешний гибридный оператор линейной структуры на графе", Мат. Вопросы кибернетики и вычислительной техники, Изд. ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, том 14, стр. 87 – 101, 1985.
11. А. Г. Руткас, "Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией", ДАН СССР, том 230, № 1, стр. 38 – 40, 1976.
12. V. L. Dallakian, "On additive decomposition of the signal transmission impedance systems and their positive transfer functions", Proc. of Conf. Computer Science and Information Techn., Yerevan, pp. 307 – 310, 2001.

Поступила 10 марта 2001

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 2, 2002, 33–46

ФОРМАЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ : ОЦЕНКИ РОСТА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ

В. Н. Маргарян

Бюраканская астрофизическая обсерватория, Бюракан, Армения

Резюме. В статье найдены достаточные условия, при которых решения формально гипоэллиптических уравнений принадлежат мультианизотропным классам Жевре.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Через $\mathbb{R}^n$ обозначим n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$ – n-мерное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с неотрицательными целыми компонентами, и

$$\mathbf{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}_+^n = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \ \xi_j \geq 0, \ j = 1, ..., n\}.$$

Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}_+^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим

$$\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, ..., \xi_n^{\alpha_n}), \quad \xi\eta = (\xi_1\eta_1, ..., \xi_n\eta_n), \quad \operatorname{sign}\xi = (\operatorname{sign}\xi_1, ..., \operatorname{sign}\xi_n),$$

$$||\xi|| = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{1/2}, \quad |v| = \sum_{j=1}^n v_j,$$

$$\Pi(v) = \{\mu \in \mathbb{R}_+^n : \ \mu \neq 0, \ \mu \neq v, \text{ либо } \mu_j = v_j \text{ либо } \mu_j = 0, \ 1 \leq j \leq n\},$$

т.е. $\Pi(v)$ – множество проекций точки v на координатные гиперплоскости. Далее $D^\alpha = (D_1^{\alpha_1}, ..., D_n^{\alpha_n})$, где либо $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$.

Пусть $P(\xi)$ – ненулевой многочлен. Известно (см., например, [2]), что поведение решений уравнения $P(D)U = 0$ зависит от поведения на бесконечности функции

$$f(\xi) = \sum_{\alpha \neq 0} |P^\alpha(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|}, \quad P(\xi) \neq 0.$$

Работа поддержана грантом INTAS 99-01080

Если $f(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, то скорость убывания определяет некоторый класс Жевре, которому принадлежат решения уравнения $P(D)U = 0$. Аналогичные результаты имеют место для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, близких к операторам с постоянными коэффициентами.

Некоторые условия, при которых решения уравнения $P(x,D)U = 0$ принадлежат классам Жевре были получены И. Г. Петровским [1], Л. Хермандером [2], Ф. Тревом [3], В. И. Буренковым [4], М. Дурантом [5], Л. Родино [6]. Поведение решений гипоэллиптических уравнений рассматривалось в работах [7] – [9]. Г. О. Акопян и В. Н. Маргарян [9] определили мультианизотропные классы Жевре и доказали, что при некоторых условиях все решения уравнения $P(x,D)U = 0$ принадлежат некоторому мультианизотропному классу Жевре, который определяется оператором $P(x,D)$.

В настоящей статье аналогичный результат доказан для формально гипоэллиптических уравнений.

Определение 1. *Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^n_+$ называется* **многогранником**, *если существуют натуральное число r, векторы $\{\lambda^j\}_1^r \subset \mathbb{R}^n_+$ и неотрицательные числа $\{\rho^j\}_1^r$ такие, что $A = \{v \in \mathbb{R}^n_+ : \ (v, \lambda^j) \le \rho_j, \ 1 \le j \le r\}$. Многогранник называется* **вполне правильным**, *если $\{\lambda^j\}_1^r \subset \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{R}^n_0$, где $\mathbb{R}^n_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1, ..., \xi_n = 0\}$.*

Для многогранника A, через A^0 обозначим множество его вершин, $A(t) = \{v : v/t \in A\}$ для $t \ge 0$, $A(0) = \{0\}$ и $A(t) = \emptyset$ при $t < 0$. Известно, что многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.

Определение 2. *Выпуклое множество $B \subset \mathbb{R}^n_+$ называется* **вполне регулярным**, *если для любого $v' \in \Pi(v)$, $v \in B$ существует окрестность нуля U в $\mathbb{R}^n$ такая, что $v' + r \, sign \, v' \in B$ для всех $r \in U$.*

Легко видеть, что многогранник A является вполне регулярным тогда и только тогда, когда A является вполне регулярным множеством.

Определение 3 [2]. *Многочлен P с постоянными коэффициентами называется* **гипоэллиптическим**, *если для любого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ имеем*

$$|P^\alpha(\xi)/P(\xi)| \equiv |D^\alpha_\xi P(\xi)/P(\xi)| \to 0, \quad \alpha \ne 0, \quad P(\xi) \ne 0,$$

при $||\xi|| \to \infty$.

Для многочлена P с постоянными коэффициентами и для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим

$$D(P) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ P(\zeta) = 0\}, \quad d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in D(P)} ||\xi - \zeta||,$$

а также определим **регулярное весовое множество гипоэллиптичности** многочлена P

$$M_P = \left\{ v \in \mathbb{R}^n_+ : \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^v}{1 + d_P(\xi)} < \infty \right\}.$$

Легко проверить, что для любого многочлена P множество M_P является выпуклым. Известно, что если P является гипоэллиптическим многочленом, то существует число $\delta \in (0, 1]$ такое, что $\{v \in \mathbb{R}^n_+ : |v| \le \delta\} \subset M_P$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Для любого гипоэллиптического многочлена P с постоянными коэффициентами множество M_P является вполне регулярным.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $v' \in \Pi(v)$ и для каждого $v \in M_P$ существует число $\delta > 0$ такое, что $v' + r \, sign \, v' \in M_P$ для всех $r \in \mathbb{R}^n_+$, $|r| \le \delta$. Для простоты предположим, что

$$v' = (v_1, ..., v_k, 0, ..., 0), \quad v = (v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m, 0, ..., 0), \quad \prod_{j=1}^{m} v_j \ne 0.$$

Покажем, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует функция $\eta(\xi) \in \mathbb{R}^n$ такая, что для достаточно малых r имеем

$$|\xi|^{v' + r \, sign \, v'} \le c_1 |\xi + \eta(\xi)|^v \le c_2 (d_P(\xi + \eta(\xi)) + 1) \le c_3 (d_P(\xi) + 1), \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые постоянные. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим функции

$$\eta_j(\xi) = \begin{cases} sign \, \xi_j (||\xi||^r + 1) & \text{при } \xi_j \ne 0, \\ ||\xi||^r + 1 & \text{при } \xi_j = 0, \quad j = k+1, ..., m, \\ 0 & \text{при } j = 1, ..., k, \quad j = m+1, ..., n, \end{cases}$$

где $r \in (0, 1)$ – некоторое число, для которого

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{(|\xi| + 1)^r}{1 + d_P(\xi)} < \infty.$$

Существование такого числа r следует из гипоэллиптичности многочлена P. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $||\eta(\xi)|| \le (m - k)(||\xi|| + 1)^r \le \chi_1 (d_P(\xi) + 1)$, где $\chi_1 \ge m - k$ – постоянная. По определению $d_P(\xi)$, при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$d_P(\xi + \eta(\xi)) \le d_P(\xi) + ||\eta(\xi)|| \le (\chi_1 + 1)(d_P(\xi) + 1). \tag{2}$$

Так как $v \in M_P$, в силу неравенства (2) для некоторой постоянной χ_2 и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\chi_2|\xi + \eta(\xi)|^v \leq d_P(\xi + \eta(\xi)) + 1 \leq (\chi_1 + 2)(d_P(\xi) + 1). \tag{2'}$$

Для завершения доказательства оценки (1) нам остаётся показать, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для достаточно малого $r \in \mathbb{R}^n_+$ имеем

$$|\xi + \eta(\xi)|^v \geq \chi_3|\xi|^{v'+r\ sign\ v'},$$

где χ_3 – постоянная. Для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющего условию

$$|r| \leq r|v - v'| = r\sum_{j=k+1}^{m} v_j \neq 0$$

и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $|\xi + \eta(\xi)|^v \geq |\xi|^{v'}(|\xi| + 1)^{r|v-v'|} \geq |\xi|^{v'+r\ sign\ v'}$. Отсюда, в силу (2') вытекает (1). Этим утверждение Леммы 1 доказано.

Пусть $(P) \subset \mathbb{Z}^n_+$ – конечное множество мультииндексов, а $a_\alpha(x)$, $\alpha \in (P)$ – бесконечно дифференцируемые функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$P(x,\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad P(x,D) = \sum_{\alpha\in(P)} a_\alpha(x)D^\alpha.$$

Определение 4. *Многочлен $P(x,\xi)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами называется* **формально гипоэллиптическим** *в Ω, если*

a) $P(x,\xi)$ имеет постоянную силу в Ω (см. [2], Определение 7.1.1),

b) $P(x,\xi)$ гипоэллиптичен в некоторой точке $x^0 \in \Omega$.

Дифференциальный оператор $P(x,D)$ с формально гипоэллиптическим символом $P(x,\xi)$ называется **формально гипоэллиптическим**.

Согласно [2], Лемма 7.1.1, если многочлен $P(x,\xi)$ формально гипоэллиптический в области Ω, то для любого $x^0 \in \Omega$ имеем представление

$$P(x,\xi) = P(x^0,\xi) + \sum_{j=1}^{r(x^0)} a_j(x^0,x)P_j(\xi), \tag{3}$$

где $r(x^0)$ – натуральное число, $P(x^0,\xi)$ – гипоэллиптический многочлен, а многочлены P_j, $j = 1,\ldots,r(x^0)$ слабее $P(x^0,\xi)$ (см. [2], Определение 3.2.1). Легко видеть, что для формально гипоэллиптического многочлена $P(x,\xi)$ множество $M_{P(x,\cdot)}$ не зависит от $x \in \Omega$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне регулярный многогранник, и пусть $\{\lambda^j\}_1^k \subset \mathbb{R}^n_+$, $\min_i \lambda^j_i = 1$, $j = 1, ..., k$ – внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней A. Будем рассматривать многогранники, удовлетворяющие условию

$$1 \geq \rho_j = \sup_{v \in A}(v, \lambda^j), \quad j = 1, ..., k.$$

Обозначим

$$h_A(\xi) = \sum_{v \in A^0} \prod_{j=1}^n (1 + \xi_j^2)^{v_j/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Легко проверить, что для любого $\delta > 0$ существует постоянная $c(\delta) > 0$ такая, что при всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|h_A(\xi) - h_A(\eta)| \leq \delta h_A(\xi) + c(\delta) \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j - \eta_j|^{\max_i \rho_i/\lambda^i_j} + 1 \right]. \tag{4}$$

Предложение 1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне регулярный многогранник, $\omega \subset\subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ и P – многочлен с постоянными коэффициентами. Для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $\chi(\varepsilon) = \chi_\gamma(\varepsilon) > 0$ такая, что*

$$||h_A F(\gamma P(D)\varphi)||_{L_2} \leq \left(\sup_\omega |\gamma| + \varepsilon \right) ||h_A F(P(D)\varphi)||_{L_2} + \chi(\varepsilon) ||F(P(D)\varphi)||_{L_2}, \tag{5}$$

где $F(V)$ – преобразование Фурье функции V и $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega)$.

Доказательство. В силу равенства Парсеваля и неравенства треугольника, для любого $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned} ||h_A F(\gamma P(D)\varphi)||_{L_2} &= ||h_A [F(\gamma\psi) \times F(P(D)\varphi)]||_{L_2} \leq ||F(\gamma\psi) \times h_A F(P)(D)\varphi||_{L_2} + \\ &+ \left\| \int (h_A(\xi) - h_A(\eta)) F(\gamma\psi)(\xi - \eta) F(P(D)\varphi)(\eta)\, d\eta \right\|_{L_2} = \\ &= ||F[\gamma\psi F^{-1}(h_A F(P(D)\varphi))]||_{L_2} + \\ &+ \left\| \int (h_A(\xi) - h_A(\eta)) F(\gamma\psi)(\xi - \eta) F(P(D)\varphi)(\eta)\, d\eta \right\|_{L_2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega)$, $\psi = 1$ на *supp* φ. В силу неравенства Юнга, для любого $\delta > 0$ существует постоянная $c_1(\delta) > 0$ такая, что

$$\left\| \int (h_A(\xi) - h_A(\eta)) F(\gamma\psi)(\xi - \eta) F(P(D)\varphi)(\eta)\, d\eta \right\|_{L_2} \leq$$

$$\leq \delta ||F(\gamma\psi)||_{L_1} \times ||h_A F(P\varphi)||_{L_2} + c_1(\delta) \left\| (||\xi|| + 1) F(\gamma\psi) \right\|_{L_1} \times ||F(P(D)\varphi)||_{L_2}. \tag{7}$$

Из неравенства (6) в силу (7) получаем утверждение Предложения 1.

Замечание 1. Иногда вместо оценки (5) будем пользоваться следующей более слабой версией оценки (5) :

$$||h_A F(\gamma P(D)\varphi)||_{L_2} \leq c||h_A F(P(D)\varphi)||_{L_2}, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega), \tag{8}$$

где c – постоянная.

Замечание 2. В условиях Предложения 1, $h_A(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$. Следовательно, в силу (5), для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c(\varepsilon) = c(\varepsilon, \gamma, A) > 0$ такая, что для $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega)$ имеем

$$||h_A F(\gamma P(D)\varphi)||_{L_2} \leq \left(\sup_\omega |\gamma| + \varepsilon\right) ||h_A F(P(D)\varphi)||_{L_2} + c(\varepsilon)||F(\varphi)||_{L_2}.$$

Лемма 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярный многогранник и $P(x,D)$ – формально гипоэллиптический оператор в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для любого $x^0 \in \Omega$ существуют окрестность $\omega \subset \Omega$ точки x^0 и постоянная $c > 0$ такие, что*

$$||h_A F(P(x^0,D)\varphi)||_{L_2} \leq c\left[||h_A F(P(x,D)\varphi)||_{L_2} + ||F(\varphi)||_{L_2}\right], \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega). \tag{9}$$

Доказательство. В силу (3) оператор $P(x,D)$ можно представить в виде

$$P(x,D) = P(x^0,D) + \sum_{j=1}^{r(x^0)} a_j(x^0,x)P_j(D), \tag{3'}$$

где многочлены P_j слабее чем $P(x^0,\cdot)$ и $a_j(x^0,x)$ – бесконечно дифференцируемые функции, $j = 1,...,r(x^0)$. В силу Замечания 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $c(\varepsilon) > 0$ такая, что при всех $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\omega')$, $x^0 \in \omega' \subset\subset \Omega$

$$||h_A F(P(x,D)\varphi)||_{L_2} \geq ||h_A F(P(x^0,D)\varphi)||_{L_2} - \sum_{j=1}^{r(x^0)} ||h_A F(a_j(x^0,x)P_j(D)\varphi)||_{L_2} \geq$$

$$\geq ||h_A F(P(x^0,D)\varphi)||_{L_2} - \sum_{j=1}^{r(x^0)} \left(\sup_\omega |\gamma| + \varepsilon\right) ||h_A F(P_j\varphi)||_{L_2} - c(\varepsilon)||F(\varphi)||_{L_2}.$$

Учитывая, что $P_j < P(x^0,\cdot)$ и $a_j(x^0,x^0) = 0$ для $j = 1,...,r(x^0)$ и используя Теорему 3.2.6 из [2], завершаем доказательство.

Лемма 3. *Пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, а P – гипоэллиптический многочлен с постоянными коэффициентами. Для любого натурального m существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$* имеем

$$\sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|(\varepsilon h_A)^m F(P^{(\alpha)}(D)\varphi)\right\|_{L_2}^2 \leq c\sum_\alpha \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|(\varepsilon h_A)^{m-1} F(P^{(\alpha)}(D)\varphi)\right\|_{L_2}^2.$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству Леммы 4.4.1 из [2].

Из Леммы 3 и Теоремы 3.3.2 работы [2], непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, а P_j, $j = 0, 1, ..., k$ – многочлены с постоянными коэффициентами. Предположим, что P_0 гипоэллиптичен, а P_j, $j = 0, 1, ..., k$ – слабее чем P_0. Тогда для любого натурального m существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ и $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m P_j^{(\alpha)}(\xi) F(\varphi) \right\|_{L_2}^2 \leq c \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} P_0^{(\alpha)}(\xi) F(\varphi) \right\|_{L_2}^2.$$

Для области $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ и числа $\delta > 0$ положим $\omega_\delta = \{x \in \omega : \rho(x, \partial x) > \delta\}$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ – функция расстояния. Для натурального m и $\varepsilon \in (0,1)$ положим

$$\varphi_{j,\omega}^\varepsilon(x) = X_{\omega_{\varepsilon j} - \varepsilon/2} * (\varepsilon/2)^{-n} \varphi(2x/\varepsilon), \quad \int \varphi \, dx = 1, \quad \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(S^1),$$

где X_ω – характеристическая функция множества ω, и $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

Лемма 5. *Пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, и пусть $P(x, D)$ – формально гипоэллиптический оператор, представленный в точке $x^0 \in \Omega$ в виде (3'). Пусть $\omega \subset\subset \Omega$ – окрестность точки x^0, для которой выполняется (9). Тогда для любого натурального числа m существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого $\varepsilon \in (0,1)$, $l = 1, 2, ...$ и $U \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ имеем*

$$\sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m F(P_j^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \leq$$

$$\leq c \left[\left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F[(P(x, D)U)\varphi_{l,\omega}^\varepsilon] \right\|_{L_2}^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{|\gamma| \leq k} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P_j^{(\alpha)}(D)(U \varepsilon^\gamma D^\gamma \varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \right],$$

где $k = ord\, P$.

Доказательство. По Лемме 4

$$\sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha \neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^m F(P_j^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2 \leq$$

$$\leq c' \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\| (\varepsilon h_A)^{m-1} F(P_0^{(\alpha)}(D)(U\varphi_{l,\omega}^\varepsilon)) \right\|_{L_2}^2, \tag{10}$$

где $c' > 0$ – постоянная. Следовательно, нам требуется оценить только последнее слагаемое в правой части неравенства (10). По Лемме 2 имеем

$$\left\|(\varepsilon h_A)^{m-1}F(P_0^{(\hat\alpha)}(D)(U\varphi^\varepsilon_{l,\omega}))\right\|^2_{L_2} \le$$

$$\le \left\|(\varepsilon h_A)^{m-1}F(P(x,D)(U\varphi^\varepsilon_{l,\omega}))\right\|^2_{L_2} + \varepsilon^{2(m-1)}\left\|F(U\varphi^\varepsilon_{l,\omega})\right\|^2_{L_2}, \tag{11}$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Так как

$$P(x,D)(U\varphi^\varepsilon_{l,\omega}) = \varphi^\varepsilon_{l,\omega}P(x,D)U + \sum_{\alpha\neq 0}\delta_\alpha P^{(\alpha)}(x,D)(UD^{\alpha\varphi^\varepsilon_{l,\omega}}),$$

где δ_α – постоянные, то из оценки (11) с некоторой постоянной $c_2 > 0$ и $\varepsilon \in (0,1)$ получаем

$$\left\|(\varepsilon h_A)^{m-1}F(P_0^{(\alpha)}(D)(U\varphi^\varepsilon_{l,\omega}))\right\|^2_{L_2} \le c_2\Bigg[\left\|(\varepsilon h_A)^{m-1}F(\varphi^\varepsilon_{l,\omega}P(x,D)U)\right\|^2_{L_2} +$$

$$+ \sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|(\varepsilon h_A)^{m-1}F(P^{(\alpha)}(x,D)(U\varepsilon^{|\alpha|}D^\alpha\varphi^\varepsilon_{l,\omega}))\right\|^2_{L_2} + \left\|F(U\varphi^\varepsilon_{l,\omega})\right\|^2_{L_2}\Bigg]. \tag{12}$$

Применив оценку (8) к правой части (12), из (10) – (12) получим утверждение Леммы 5.

Следствие 1. *В условиях Леммы 5, для любого $\beta = A(m)\cap \mathbb{Z}^n_+$, $A(m) = mA$ существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого $\varepsilon \in (0,1)$, $l = 1,2,\ldots$, $U \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ имеем*

$$\varepsilon^{2m}\sum_{j=0}^{r(x^0)}\sum_\alpha \varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon l})} \le$$

$$\le c\Bigg[\sum_{|\gamma|\le mk}\left\|(\varepsilon h_A)^m F(\varepsilon^{|\gamma|}D^\gamma\varphi^\varepsilon_{l,\omega}P(x,D)U)\right\|^2_{L_2} + \tag{13}$$

$$+ \sum_{j=0}^{r(x^0)}\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P_j^{(\alpha)}(D)U\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(l-1)})}\Bigg].$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля и из неравенства $\varepsilon^m|\xi|^\beta \le (\varepsilon h_A)^m$ имеем

$$\varepsilon^{2m}\sum_{j=0}^{r(x^0)}\sum_\alpha \varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon l})} \le$$

$$\leq c_1 \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|(\varepsilon h_A)^m (P_j^{(\alpha)} F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon}))\right\|_{L_2}^2 =$$

$$= c_1 \sum_{j=0}^{r(x^0)} \left\|(\varepsilon h_A)^m P_j(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2 + \tag{14}$$

$$+ c_1 \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|(\varepsilon h_A)^m P_j^{(\alpha)}(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2 ,$$

где $c_1 > 0$ – постоянная. По Лемме 2 и того, что многочлены P_j слабее P_0, для первого слагаемого правой части неравенства (14) имеем

$$\sum_{j=0}^{r(x^0)} \left\|(\varepsilon h_A)^m P_j(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2 \leq c_2 \left\|(\varepsilon h_A)^m P(x^0,\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2 \leq$$

$$\leq c_3 \left[\left\|(\varepsilon h_A)^m F(P(x,D) U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2 + \left\|F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2\right], \tag{15}$$

где $c_2, c_3 > 0$ – постоянные. Используя Лемму 5 и неравенство $x^a < x^b + 1$, $0 \leq a \leq b$, $x \in (0,\infty)$, для второго слагаемого правой части неравенства (14), для каждого $\varepsilon \in (0,1)$, $l = 1, 2, \ldots$ и $U \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ получаем

$$\sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|(\varepsilon h_A)^m P_j^{(\alpha)}(\xi) F(U\varphi_{l,\omega}^{\varepsilon})\right\|_{L_2}^2 \leq$$

$$\leq c_4 \left[\sum_{|\gamma|\leq mk} \left\|(\varepsilon h_A)^{m-1} F(\varepsilon^{|\gamma|} D^\gamma \varphi_{l,\omega}^{\varepsilon} P(x,D) U)\right\|_{L_2}^2 + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha\neq 0} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|P_j^{(\alpha)}(D) U\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(l-1)})}^2\right],$$

где $c_4 > 0$ – постоянная. Из оценок (14) – (16) вытекает оценка (13). Этим завершается доказательство Следствия 1.

Замечание 3. Пусть выполнены условия Следствия 1. Предполагая дополнительно, что $A^0(m) \subset \mathbb{Z}_+^n$, и поскольку $\gamma - \beta \in A(m - |\beta|)$ при $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \leq \gamma$, $\gamma \in A(m)$, из оценки (13) получаем

$$\varepsilon^{2m} \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_{\alpha} \varepsilon^{-2|\alpha|} \left\|D^\beta P_j^{(\alpha)}(D) U\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon l})}^2 \leq$$

$$\leq c\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^{2i}\left\|D^vP(x,D)U\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(l-1)})}+\right. \tag{17}$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{r(x^0)}\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-2|\alpha|}\left\|P_j^{(\alpha)}(D)U\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon(l-1)})}\right].$$

Нам необходим следующий результат из [9].

Предложение 2. *Пусть $A\subset\mathbb{R}_+^n$ – вполне регулярный многогранник, вершины которого являются точки с рациональными компонентами. Пусть m – натуральное число такое, что $A^0(m)\subset\mathbb{Z}_+^n$. Тогда существует натуральное число $j_0\geq m$ такое, что для любого $j\geq j_0$ и $\alpha\in A(j)\subset\mathbb{Z}_+^n$ имеет место представление*

$$\alpha=\beta+\gamma,\quad \beta\in A(m)\subset\mathbb{Z}_+^n,\quad \gamma\in A(j-m)\subset\mathbb{Z}_+^n.$$

Для области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и вполне регулярного множества $A\subset\mathbb{R}_+^n$ положим $\Gamma^A(\Omega)=\{U\in\mathbf{C}^\infty(\Omega):$

$$\left.\forall K\subset\subset\Omega,\ \exists c>0,\ \sup_K|D^\alpha U|\leq c^{j+1}j^j,\ \alpha\in A(j)\cap\mathbb{Z}_+^n,\ j=1,2,...\right\}.$$

Предложение 3. *Для любых $f\in\Gamma^A(\Omega)$ и $\omega\subset\subset\Omega$ существует постоянная $c=c(f,\omega)$ такая, что*

$$\varepsilon^r\sup_{\omega_{\varepsilon j}}|D^\alpha f|\leq c^{r+1}r!j^{-r},\quad \alpha\in A(r),\quad r,j=1,2,...,\quad \varepsilon\in(0,1). \tag{18}$$

Доказательство. Так как ω ограничена, то $\omega_{\varepsilon j}=\emptyset$ для $\varepsilon j\geq dim\,\omega/2\equiv a<\infty$. Поэтому достаточно доказать оценку (18) для $\varepsilon j<a$. Так как $f\in\Gamma^A(\Omega)$ с некоторой постоянной $c_1=c_1(f,\omega)>0$, то имеем

$$\sup_\omega|D^\alpha f|\leq c_1^{r+1}r!,\quad \alpha\in A(r)\subset\mathbb{Z}_+^n,\quad r=1,2,...\ .$$

Следовательно, для любого $j=1,2,...$ и $\varepsilon\in(0,1)$

$$(\varepsilon j/a)^r\sup_{\omega_{\varepsilon j}}|D^\alpha f|\leq(\varepsilon j/a)^r\sup_\omega|D^\alpha f|\leq c_1^{r+1}r!,\quad \alpha\in A(r)\subset\mathbb{Z}_+^n,\quad r=1,2,...\ .$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon^r\sup_{\omega_{\varepsilon j}}|D^\alpha f|\leq c_1^{r+1}a^rr!j^{-r}\leq c_2^{r+1}r!j^{-r}.$$

Предложение 3 доказано.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для дифференциального оператора $P(x, D)$ и функции f через $N(P, f)$ обозначим множество всех решений уравнения $P(x, D)U = f$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $P(x, D)$ – формально гипоэллиптический оператор в Ω с аналитическими коэффициентами, и пусть $A \subset M_P$ – вполне регулярный многогранник, вершинами которого являются точки с рациональными компонентами. Тогда $N(P, f) \subset \Gamma^A(\Omega)$ для любого $f \in \Gamma^A(\Omega)$.*

Доказательство. Так как утверждение Теоремы носит локальный характер, то достаточно показать, что для любого $x^0 \in \Omega$ существует окрестность $\omega \subset \Omega$, для которой $N(P, f) \subset \Gamma^A(\omega)$. Пусть $\omega \subset\subset \Omega$ такая окрестность точки $x^0 \in \Omega$, для которой выполняется (9). Покажем, что для любого $U \in N(P, f)$ существует постоянная $B = B_U$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, $l = 1, 2, \dots$ и $\beta \in A(l) \cap \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\varepsilon^{l+d_0} \sum_{j=0}^{r(x^0)} \sum_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\beta P_j^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon l})} \le B^{l+1}, \tag{19}$$

где $d_0 = ord\ P$. В силу Предложения 2 существует натуральное число $j_0 \ge m$ такое, что для любого $j \ge j_0$ и $\beta \in A(j) \cap \mathbb{Z}_+^n$ имеет место представление

$$\beta = \gamma + v, \quad \gamma \in A(m) \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad v \in A(j-m) \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Оценку (19) будем доказывать индукцией по j. Так как оператор $P(x, D)$ – формально гипоэллиптический, то $N(P, f) \subset \mathbb{C}^\infty(\omega)$. Следовательно, (19) имеет место для $\beta \in A(j_0) \subset \mathbb{Z}_+^n$ и некоторой константы $B = B_{U, j_0}$. Предположим, что (19) имеет место для $l \le j$, $j \ge j_0$ и докажем, что она остаётся справедливой для $l = j+1$. Пусть $\beta \in A(j+1) \setminus A(j)$ – произвольный фиксированный мультииндекс. В силу Предложения 2 можно представить β в виде $\beta = \gamma + v$, $\gamma \in A(m) \cap \mathbb{Z}_+^n$, $v \in A(j+1-m) \cap \mathbb{Z}_+^n$. Рассмотрим выражение

$$\varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\beta P_r^{(\alpha)}(D)U \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})} =$$

$$= \varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\gamma P_r^{(\alpha)}(D)(D^v U) \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})}. \tag{20}$$

В силу оценки (17) имеем

$$\varepsilon^{j+1+d_0} \sum_{r=0}^{r(x^0)} \sum_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|} \left\| D^\gamma P_r^{(\alpha)}(D)(D^v U) \right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})} \le$$

$$\leq c\varepsilon^{j+1-m+d_0}\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^i\left\|D^\gamma P(x,D)D^vU\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}+\right. \tag{21}$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{r(x^0)}\sum_{\alpha\neq 0}\varepsilon^{-|\alpha|}\left\|P_r^{(\alpha)}(D)D^vU\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\right].$$

Поскольку $v\in A(j+1-m)\subset A(j)$, то в силу предположения индукции с некоторой постоянной $c_1>0$ и $B\geq 1$ имеем

$$\varepsilon^{j+1+d_0}\sum_{r=0}^{r(x^0)}\sum_{\alpha}\varepsilon^{-|\alpha|}\left\|P_r^{(\alpha)}(D)(D^vU)\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})}\leq c_1B^{j+1-m+1}\leq c_1B^{j+1}. \tag{22}$$

Следовательно, нам остаётся оценить выражение

$$Q\equiv\varepsilon^{j+1-m+d_0}\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^i\left\|D^\gamma P(x,D)D^vU\right\|^2_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}.$$

Так как $P(x,D)U=f$ и $D^\gamma P(x,D)D^\gamma U=D^{\gamma+v}P(x,D)U+[D^v,D^\gamma P(x,D)]U$, то имеем

$$Q\leq\varepsilon^{j+1-m+d_0}\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^i\left[\left\|D^{\gamma+v}f\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}+\right.$$

$$\left.+\left\|[D^v,D^\gamma P(x,D)]U\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\right]. \tag{23}$$

В силу Предложения 3, для первого слагаемого правой части неравенства (23) имеем

$$\varepsilon^{j+1-m+d_0}\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^i\left\|D^{\gamma+v}f\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\leq$$

$$\leq G\sum_{i=0}^{m}\Delta_1^{j+1-m+i+1}(j+1-m+i)!(1/j)^{j+1-m+i}\leq\Delta_2^{j+1}., \tag{24}$$

где G – количество мультииндексов множества $A(m)$, $\Delta_2\geq\Delta_1=\Delta_1(f,\omega)$ – постоянная. Легко видеть, что члены второго слагаемого правой части (23) имеют вид $D^\mu a_j(x^0,x)D^{\gamma+v-\mu}P_j(D)U$, $j=1,...,r(x^0)$, $0\neq\mu\leq\gamma+v$, а количество мультииндексов μ, для которых функция a_j дифференцирована k-раз, не превосходит числа $C^k_{|\gamma+v|}\leq C^k_{j+1}$, и $v+\gamma-\mu\in A(j+1-m+i-k)\subset A(j)$. Следовательно, в силу Предложения 3 и предположения индукции для $B\geq 2\Delta_3$, $B\geq 1$, где Δ_3 – постоянная, получаем

$$\varepsilon^{j+1-m+d_0}\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^i\left\|[D^v,D^\gamma P(x,D)]U\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\leq$$

$$\leq \varepsilon^{j+1-m+d_0}\sum_{i=0}^{m}\sum_{v\in(A(i)/A(i-1)\cap\mathbb{Z}_+^n)}\varepsilon^i\sum_{0\neq\mu\leq\gamma+v}C_{v+\gamma}^{\mu}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{r(x^0)}\left\|(D^\mu a_\mu)P_j(D)D^{v+\gamma-\mu}U\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon j})}\leq$$

$$\leq\sum_{r=0}^{r(x^0)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{j+1-m+i}\Delta_3^{k+1}k!j^{-k}B^{j+1-m+i-k+1}\leq$$

$$\leq(r(x^0)+1)\sum_{i=0}^{m}B^{j+1-m+i}\Delta_3^2\left(\sum_{k=1}^{j+1-m+i}(\Delta_3/B)^{k-1}\right)\leq$$

$$\leq 2(r(x^0)+1)\Delta_3^2\sum_{i=0}^{m}B^{j+1-m+i}\leq 2m(r(x^0)+1)B^{j+1}. \tag{25}$$

Из оценок (20) – (25) для $B\geq 2\Delta_3$, $B\geq 1$ имеем

$$\varepsilon^{j+1+d_0}\sum_{r=0}^{r(x^0)}\sum_{\alpha}\varepsilon^{-|\alpha|}\left\|D^\beta P_r^{(\alpha)}(D)U\right\|_{L_2(\omega_{\varepsilon(j+1)})}\leq$$

$$\leq c_1B^{j+1}+\Delta_2^{j+1}+2m(r(x^0)+1)B^{j+1}.$$

Предполагая, что $B>\max[c_1+1+2m(r(x^0)+1),\Delta_2,\Delta_3]$, получаем оценку (19) для $l=j+1$. Этим завершается доказательство оценки (19).

Пусть $L\subset\subset\omega$ – компакт. Тогда имеем $\rho(L,\partial\omega)=\delta>0$. Для любого натурального числа j положим $\varepsilon=\delta/j$ и заметим, что $L\subset\subset\omega_{\varepsilon j}$. Из оценки (19) для $\beta\in A(j)\subset\mathbb{Z}_+^n$ получим

$$(\delta/j)^{j+d_0}\sum_{r=0}^{r(x^0)}\sum_{\alpha}(j/\delta)^{(\alpha)}\left\|D^\beta P_r^{(\alpha)}(D)U\right\|_{L_L}\leq B^{j+1},$$

откуда следует утверждение Теоремы 1.

Предполагая, что $\rho_j\leq 1$, $j=1,...,k$, можно ослабить условия на коэффициенты оператора $P(x,D)$. Справедливо следующее обобщение Теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия Теоремы 1, кроме условия на коэффициенты оператора* $P(x,D)=\sum_{\alpha\in(P)}c_\alpha(x)D^\alpha$. *Предположим, что* $c_\alpha(x)\in\Gamma^{A'}(\Omega)$ *для любого* $\alpha\in(P)$, *где*

$$A'=\{v\in\mathbb{R}_+^n:\ (v,\lambda^0)\leq 1\},\quad \lambda^0=\left(\min_j\lambda_1^j/\rho_j,...,\min_j\lambda_n^j/\rho_j\right).$$

Тогда для любого $f\in\Gamma^{A'}(\Omega)$ *необходимо* $N(P,f)\subset\Gamma^A(\Omega)$.

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1.

Теми же рассуждениями доказываются следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1. Если $B \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне регулярное множество, а $A \subset B \cap M_P$ – вполне регулярный многогранник, удовлетворяющий Теореме 1, то для всех $f \in \Gamma^B(\Omega)$ необходимо $N(P, f) \subset \Gamma^A(\Omega)$.*

Теорема 4. *Пусть оператор $P(x, D)$ и вполне регулярный многогранник $A \subset M_P$ удовлетворяют условиям Теоремы 1 и $t \geq 1$ – рациональное число. Тогда для любого $f \in \Gamma^{A(1/t)}(\Omega)$ имеем $N(P, f) \subset \Gamma^{A(1/t)}(\Omega)$.*

Abstract. The paper presents sufficient conditions, under which the solutions of formally hypoelliptic equations belong to the multi-anisotropic Gevrey classes.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. G. Petrovski, "Ueber das Cauchysche Problem fuer System von parziellen differential Gleichungen", Мат. Сборник, том 2, № 44, стр. 815 – 868, 1937.
2. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.
3. F. Trev, "Operateurs differentids hypoelliptiques", Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 9, pp. 1 – 73, 1959.
4. В. И. Буренков, "Аналог теоремы Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", Сбор. Док. Совет-Чехосл. Семинара, Ереван, стр. 63 – 67, 1982.
5. M. Durand, "Redularite Gevrey dune classe d'operateurs hypoelliptiques", J. Math. Pures et Appl., vol. 57, pp. 323 – 350, 1978.
6. L. Rodino, "Gevrey hypoellipticity for a class of operators with multiple characteristics", Asterisque, vol. 889-90, pp. 249 – 262, 1981.
7. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Мат. Сборник, том 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
8. Г. О. Акопян, "Об оценках производных решений одного класса гипоэллиптических уравнений", Изв. АН Арм.ССР. Математика, том 21, № 4, стр. 338 – 353, 1986.
9. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О принадлежности классам Жевре решений гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.

Поступила 1 апреля 2000

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 2, 2002, 47-64

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДИССИПАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КАНОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

П. Э. Мелик-Адамян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматриваются сжимающие операторные функции $\theta_\pm(\lambda)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Доказывается, что они являются характеристическими функциями минимального, диссипативного и аккумулятивного расширений канонического оператора. Установлена равносильность определений характеристической функции диссипативного оператора по Надю-Фояшу и Кужелю.

ВВЕДЕНИЕ

В основном мы следуем обозначениям работы [1]. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, и $[\mathcal{H}]$ – кольцо ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$. Рассмотрим оператор $J \in [\mathcal{H}]$, обладающий свойствами $J^* = -J$ и $J^2 = -I$. Полагая $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$, имеем

$$J = iP_+ - iP_-, \quad I = P_+ + P_-, \quad P_\pm P_\mp = 0.$$

Предполагается, что размерности собственных подпространств $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$ оператора J одинаковы. Если $K \in [\mathcal{H}]$ – произвольный частично-изометрический оператор с начальным и конечным подпространствами $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ соответственно ($K^*K = P_+$, $KK^* = P_-$), то операторы $P_{\pm K} = \frac{1}{2}(I \pm K \pm K^*)$ являются взаимно дополнительными ортопроекторами такими, что $JP_{-K} = P_K J$, следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{\pm K} = P_{\pm K}\mathcal{H}$ являются гипермаксимальными $-iJ$-нейтральными подпространствами оператора $-iJ$. Унитарный оператор $U_K = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + K - K^*)$, $U_K^* = U_{-K}$ является оператором перехода от представления $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ к представлению $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{-K} \oplus \mathcal{H}_K$. В представлении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ операторы $B \in [\mathcal{H}]$ принимают блочно-матричную форму $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$. В частности

$$P_K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ & K^* \\ K & I_- \end{bmatrix}, \quad U_K = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_+ & -K^* \\ K & I_- \end{bmatrix}.$$

Операторы, определённые в гильбертовом пространстве $L_2(0, b; \mathcal{H})$ с помощью дифференциальных выражений $\sigma[f] = Jf'(r) - V(r)f(r)$, $0 \le r \le b \le \infty$ называются **каноническими**. Мы предполагаем, что операторнозначная функция $V(r)$ суммируема, $V(r) \in L_1(0, b; [\mathcal{H}])$ и обладает свойствами $V(r) = V^*(r) = V^T(r)$ $(B^T = J^* B^* J)$. Рассмотрим операторы

$$Cf = \sigma[f], \quad f \in D(C) = \{f \in L_2(0,\infty; \mathcal{H}),\ \sigma[f] \in L_2(0,\infty;\mathcal{H})\},$$

$$C_0 f = \sigma[f], \quad D(C_0) = D(C) \downarrow \{f(0) = 0\},$$

$$C_K f = \sigma[f], \quad D(C_K) = D(C) \downarrow \{P_{-K} f(0) = 0\},$$

$$C_\pm f = \sigma[f], \quad D(C_\pm) = D(C) \downarrow \{P_\pm f(0) = 0\}.$$

Отметим, что C_0 является минимальным симметрическим оператором и $C = C_0^*$. Операторы C_K и $C_\pm$ являются соответственно самосопряжённым и минимальным диссипативным и аккумулятивным расширениями C_0, причём $C_\pm^* = C_\mp$.

В настоящей статье рассматриваются сжимающие операторные функции $\theta_\pm(\lambda) \in [\mathcal{H}_\mp : \mathcal{H}_\pm]$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\Lambda^\pm = \{\lambda \in \Lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda \ge 0\}$ комплексной плоскости Λ. Доказывается, что $\theta_\pm(\lambda)$ суть характеристические функции операторов $C_\pm$. Доказательство основывается на определении характеристической функции А. Кужеля [2]. Доказательство того же результата было получено в [1] на основе модели Надя–Фояша. Следовательно, доказана равносильность определений Надя–Фояша и Кужеля для характеристической функции диссипативного оператора.

В §3 основные функции спектральной теории оператора C_K выражаются в явном виде с помощью характеристических функций $\theta_\pm(\lambda)$. В частности, для плотности спектральной функции C_K получен аналог формулы Титчмарша–Кодаира. В случае $dim\ \mathcal{H}_\pm = n < \infty$ аналогичные вопросы были рассмотрены в [3] – [5].

§1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ $E(r,\lambda)$ И $\widetilde{E}(r,\lambda)P_\mp$

Пусть $E(r, \lambda)$ – решение операторного уравнения

$$JX'(r,\lambda) = V(r)X(r,\lambda) + \lambda X(r,\lambda), \quad 0 \le r < \infty, \quad \lambda = \mu + i\nu \in \Lambda, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее условию $E(0, \lambda) = I$. Отметим, что целая операторная функция $E(r, \lambda)$ имеет следующие свойства :

$$\begin{gathered} E^*(r,\overline{\lambda})JE(r,\lambda) = J = E(r,\lambda)JE^*(r,\overline{\lambda}),\ 0 \le r < \infty, \quad \lambda \in \Lambda,\ \operatorname{Im}\lambda \ne 0, \\ (\lambda - \overline{\lambda})^{-1}\ (E^*(r,\lambda)JE(r,\lambda) - J) > 0,\ (\lambda - \overline{\lambda})^{-1}\ (E(r,\lambda)JE^*(r,\lambda) - J) > 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

и допускает оценку

$$||E(r,\lambda)|| \le \exp\left(|\operatorname{Im}\lambda| r + \int_0^\infty ||V(s)||\, ds\right). \tag{1.3}$$

Из формулы (1.2) имеем $E^{-1}(r,\lambda) = E^T(r,\overline{\lambda})$, поэтому из неравенства (1.3) получим

$$||E(r,\lambda)x|| \ge \exp^{-1}\left(|\operatorname{Im}\lambda| r + \int_0^\infty ||V(s)||\, ds\right) ||x||, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{1.4}$$

Важными для исследования случая бесконечного интервала являются следующие решения канонического уравнения (1.1). При вещественном $\mu \in \mathbb{R}$ уравнение (1.1) имеет решение $\widetilde{E}(r,\mu)$, представимое в виде (см. [6], [7])

$$\widetilde{E}(r,\mu) = e^{-J\mu r} + \int_r^\infty \widetilde{\Gamma}(r,t) e^{-J\mu t}\, dt, \quad \widetilde{E}(0,\mu) = I + \int_0^\infty \widetilde{\Gamma}(0,t) e^{-J\mu t}\, dt. \tag{1.5}$$

Очевидно, что $\widetilde{E}(r,\mu) \to e^{-J\mu r}$ при $r \to \infty$. Функция $\widetilde{E}(r,\mu)$ является J-унитарной $\widetilde{E}^*(r,\mu) J \widetilde{E}(r,\mu) = J = \widetilde{E}(r,\mu) J \widetilde{E}^*(r,\mu)$, следовательно, обозначая $A(\mu) = \widetilde{E}^{-1}(0,\mu) = \widetilde{E}^T(0,\mu)$, из (1.5) имеем

$$A(\mu) = I + \int_0^\infty e^{J\mu t} \widetilde{\Gamma}(t)\, dt, \quad \widetilde{\Gamma}(t) = \widetilde{\Gamma}^T(0,t) \in L_1(0,\infty;[\mathcal{H}]).$$

Функции $\widetilde{E}(r,\mu) P_\mp$ и $P_\pm A(\mu)$ имеют аналитические продолжения $\widetilde{E}(r,\lambda) P_\mp$ и $P_\pm A(\lambda)$ в $\Lambda^\pm$, определяемые для $\lambda \in \Lambda^\pm$ формулами

$$\widetilde{E}(r,\lambda) P_\mp = e^{\pm i\lambda r} P_\mp + \int_r^\infty e^{\pm i\lambda t} \widetilde{\Gamma}(r,t) P_\mp\, dt,$$

$$P_\pm A(\lambda) = P_\pm + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} P_\pm \widetilde{\Gamma}(t)\, dt, \quad A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_\mp = P_\mp + \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} \widetilde{\Gamma}^*(t) P_\mp\, dt.$$

Если $A(r,\lambda) = e^{J\lambda r} E(r,\lambda)$, то функции $P_\pm A(r,\lambda)$ аналитичны в $\Lambda^\pm$, и при $r \to \infty$ существуют равномерные по $\lambda \in \Lambda^\pm$ и $\mu \in \mathbb{R}$ пределы $P_\pm A(r,\lambda) \to P_\pm A(\lambda)$,

$A(r,\mu) \to A(\mu)$. Поскольку на вещественной оси имеем $\widetilde{E}(r,\mu) = E(r,\mu)A^{-1}(\mu)$, то из теорем единственности и аналитичности решений дифференциальных уравнений и теоремы единственности аналитических функций следует, что функции

$$\widetilde{E}(r,\lambda)P_{\mp} = E(r,\lambda)\widetilde{E}(0,\lambda)P_{\mp} = \pm iE(r,\lambda)JA^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{\mp}, \quad \lambda \in \Lambda^{\pm} \tag{1.6}$$

являются решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими условию $\widetilde{E}(r,\lambda)P_{\mp} \in L_2(0,\infty;[\mathcal{H}])$. Через $\mathcal{N}_{\pm}(\lambda)$ обозначим дефектные подпространства оператора C_0 в точке $\lambda \in \Lambda^{\pm}$, $Im\ \lambda \neq 0$. Роль функции $\widetilde{E}(r,\lambda)P_{\mp}$ определяется следующим фактом, вытекающим из вышеизложенного.

Предложение 1.1. $\widetilde{E}(r,\lambda)P_{\mp}\mathcal{H} = \mathcal{N}_{\pm}(\lambda)$ *для любого* $\lambda \in \Lambda^{\pm}$, $Im\ \lambda \neq 0$.

Положим

$$P_{+}A(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \Lambda^{+}, \; P_{-}A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \lambda \in \Lambda^{-}.$$

Доказательства следующих двух утверждений можно найти в [8].

Предложение 1.2. *Операторные функции* $P_{\pm}E(r,\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$ *ограниченно обратимы, соответственно, в каждой точке* $(r,\lambda) \in [0,\infty) \times \Lambda^{\pm}$.

Заметим, что утверждение остаётся верным и с заменой $E(r,\lambda)$ на $A(r,\lambda)$.

Предложение 1.3. *При* $r \to \infty$ *операторные функции* $A(r,\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$ *равномерно по* $\lambda \in \Lambda^{\pm}$ *сходятся по операторной норме к функциям* $P_{\pm}A(\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$. *Операторные функции* $P_{\pm}A(\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$, $P_{\pm}A(\lambda) \downarrow \mathcal{H}_{\pm} = A_{pp}(\lambda) \in [\mathcal{H}_{\pm}]$, $p = 1,2$ *ограниченно обратимы, соответственно, в каждой точке* $\lambda \in \Lambda^{\pm}$.

С помощью блоков матриц операторов $E(r,\lambda)$ и $A(\lambda)$ эти операторы записываются в виде :

$$E_{K1}(r,\lambda) = E_{11}(r,\lambda) + E_{12}(r,\lambda)K, \quad E_{K2}(r,\lambda) = E_{22}(r,\lambda) + E_{21}(r,\lambda)K^{*},$$

$$A_{K1}(\lambda) = A_{11}(\lambda) + A_{12}(\lambda)K, \quad A_{K2}(\lambda) = A_{22}(\lambda) + A_{21}(\lambda)K^{*}.$$

Обозначим через $\mathcal{W}^{\pm}([\mathcal{L}])$ кольца операторнозначных функций $F^{\pm}(\lambda)$, представимых в виде

$$F_{\pm}(\lambda) = F + \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t}F(t)\,dt, \quad F \in [\mathcal{L}], \quad F(t) \in L_1(0,\infty;[\mathcal{L}]), \quad \lambda \in \Lambda^{\pm}.$$

Из Предложений 1.2 и 1.3 (см. [9], стр. 26) следует, что для функций $A_{K1,2}(\lambda)$, $A_{pp}(\lambda)$, $p = 1,2$ выполняются условия теоремы Бохнера–Филлипса (см. [10]). Следовательно, эти функции и обратные к ним принадлежат, соответственно, кольцам $\mathcal{W}^{\pm}([\mathcal{L}])$.

Предложение 1.4. *Операторы $P_{\pm}P_L E(r,\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$ ограниченно обратимы для любого невещественного λ, любого $r \in [0,\infty)$ и любой пары частично–изометрических операторов K и L.*

Доказательство. Поскольку проекторы $P_{\pm}$ отображают подпространство $\mathcal{H}_L$ в $\mathcal{H}_{\pm}$, а оператор P_K отображает $\mathcal{H}_{\pm}$ в $\mathcal{H}_K$, то достаточно доказать, что оператор $P_L E(r,\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_K \in [\mathcal{H}_K : \mathcal{H}_L]$ ограниченно обратим. В силу неравенства (1.4) оператор $P_L E(r,\lambda)P_K \downarrow \mathcal{H}_K$ обратим и его область значений плотна в $\mathcal{H}_L$. Следовательно, предложение будет доказано, если покажем, что ядро сопряжённого оператора состоит только из нулевого вектора. Пусть $P_K E^*(r_0,\lambda_0)P_L x = 0$ для $x \neq 0$, т.е. $E^*(r_0,\lambda_0)P_L x = P_{-K}y \neq 0$. Поскольку $E^*(r_0,\lambda_0) = -JE^{-1}(r_0,\overline{\lambda}_0)J$ и $JP_{-K} = P_K J$, то $P_K Jy = E^{-1}(r_0,\overline{\lambda}_0)P_{-L}Jx$. Отсюда вытекает, что $E(r_0,\overline{\lambda}_0)P_K y' = P_{-L}x'$. Таким образом, функция $y(r,\overline{\lambda}_0) = E(r_0,\overline{\lambda}_0)P_K y'$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению $\overline{\lambda}_0$ самосопряжённого канонического оператора в $L_2(0,r_0;\mathcal{H})$ с областью определения

$$D = \{f \in L_2(0,r_0;\mathcal{H}),\ \sigma[f] \in L_2(0,r_0;\mathcal{H}),\ P_{-K}f(0) = 0,\ P_L f(r_0) = 0\},$$

а это противоречит тому, что $Im\ \lambda_0 \neq 0$. Предложение 1.4 доказано.

Из Предложения 1.4 и соотношения

$$U_{\pm K}P_+ = 2^{1/2}P_{\pm K}P_+, \quad U_{\pm K}P_- = 2^{1/2}P_{\mp K}P_-, \quad P_{\pm}U_K = U_K P_{\mp K}$$

следует, что операторы $P_{\pm}U_L E(r,\lambda)U_K \downarrow \mathcal{H}_{\pm} \in [\mathcal{H}_{\pm}]$ также ограниченно обратимы для любого невещественного λ, любого $r \in [0,\infty)$ и любой пары частично-изометрических операторов K и L. В частности, обратимы операторные функции

$$2P_+U_{\pm K}E(r,\lambda)U_K \downarrow \mathcal{H}_+ = E_{K1}(r,\lambda) \pm K^* E_{K2}(r,\lambda)K. \tag{1.7}$$

§2. ФУНКЦИЯ ВЕЙЛЯ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Получим аналог функции Вейля для уравнения (1.1) на полуоси $[0,\infty)$ (ср. [4]). Рассмотрим следующие самосопряжённые граничные задачи на $[0,b)$, $b < \infty$:

$$Jx'(r,\lambda) = V(r)x(r,\lambda) + \lambda x(r,\lambda),\ \ \mathrm{Im}\ \lambda \neq 0,\ P_{\mp K}x(0,\lambda) = 0,\ P_K x(b,\lambda) = 0. \tag{2.1}$$

Очевидно, что для любых $x_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ функции $x_\pm(r,\lambda) = E(r,\lambda)U_K x_\pm$ являются решениями канонического уравнения, удовлетворяющими граничным условиям $P_{\mp K}x_\pm(0,\lambda) = 0$. Если операторная функция $M(b,\lambda) \in [\mathcal{H}_+]$ такова, что

$$P_K E(b,\lambda)U_K \begin{bmatrix} M(b,\lambda) \\ I_- \end{bmatrix} = 0,$$

то она определяет линейную комбинацию $x(r,\lambda) = E(r,\lambda)U_K[M(b,\lambda)x_+ + x_-]$ решений $x_\pm(r,\lambda)$, удовлетворяющую условию $P_K x(b,\lambda) = 0$. В силу обратимости функций (1.7), имеем

$$M(b,\lambda) = [E_{K1}(b,\lambda) + K^* E_{K2}(b,\lambda)K]^{-1}[E_{K1}(b,\lambda) - K^* E_{K2}(b,\lambda)K].$$

Предложение 2.1. *Равномерно по $Im\ \lambda > 0$ существует предел*

$$\lim_{b\to\infty} M(b,\lambda) = M_+(\lambda) = [A_{11}(\lambda) + A_{12}(\lambda)K]^{-1}[A_{11}(\lambda) - A_{12}(\lambda)K]. \tag{2.2}$$

Доказательство. Поскольку $E(r,\lambda) = e^{-J\lambda r}A(r,\lambda)$ и $e^{-J\lambda r} = e^{-i\lambda r}P_+ + e^{i\lambda r}P_-$, то

$$M(b,\lambda) = \left[e^{-i\lambda b}(A_{11}(b,\lambda) + A_{12}(b,\lambda)K) + e^{i\lambda b}K^*(A_{21}(b,\lambda) + A_{22}(b,\lambda)K)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[e^{-i\lambda b}(A_{11}(b,\lambda) - A_{12}(b,\lambda)K) + e^{i\lambda b}K^*(A_{21}(b,\lambda) - A_{22}(b,\lambda)K)\right].$$

Учитывая, что при $b\to\infty$ и $Im\ \lambda > 0$ имеем $e^{i\lambda b}\to 0$, и используя Предложение 1.3, получим (2.2). Предложение 2.1 доказано.

Функция Вейля $M_+(\lambda) \in \mathcal{W}^+([\mathcal{H}_+])$ определена и непрерывна в Λ^+, и по Предложению 1.3 аналитична для $Im\ \lambda > 0$. Используя обратимость функции $A_{11}(\lambda)$, функцию $M_+(\lambda)$ можно представить в виде ($\lambda \in \Lambda^+$) :

$$M_+(\lambda) = [I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}[I_+ - \theta_+(\lambda)K], \quad \theta_+(\lambda) = A_{11}^{-1}(\lambda)A_{12}(\lambda). \tag{2.3+}$$

Аналогично, для $Im\ \lambda < 0$ получаем

$$\lim_{b\to\infty} M(b,\lambda) = -M_-(\lambda) = -K^*[A_{22}(\lambda) + A_{21}(\lambda)K^*]^{-1}[A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)K^*]K.$$

Следовательно, для $\lambda \in \Lambda^-$

$$M_-(\lambda) = K^*[I_- + \theta_-(\lambda)K^*]^{-1}[I_- - \theta_-(\lambda)K^*]K = [I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]^{-1}[I_+ - K^*\theta_-(\lambda)], \tag{2.3–}$$

где $\theta_-(\lambda) = A_{22}^{-1}(\lambda)A_{21}(\lambda)$. Ясно, что $M_-(\lambda) \in \mathcal{W}^-([\mathcal{H}_+])$.
J-унитарность функции $A(\mu)$ для вещественных μ означает, что

$$A_{11}(\mu)A_{11}^*(\mu) - A_{12}(\mu)A_{12}^*(\mu) = I_+, \quad A_{22}(\mu)A_{22}^*(\mu) - A_{21}(\mu)A_{21}^*(\mu) = I_-,$$

$$A_{11}(\mu)A_{21}^*(\mu) = A_{12}(\mu)A_{22}^*(\mu). \tag{2.4}$$

Следовательно $\theta_+(\mu) = A_{21}^*(\mu)A_{22}^{-*}(\mu)$, $\theta_-(\mu) = A_{12}^*(\mu)A_{11}^{-*}(\mu)$, $||\theta_\pm(\mu)|| < 1$, где $A^{-*} = (A^{-1})^*$. Поскольку функции $\theta_\pm(\lambda)$ и $\theta_\mp^*\left(\overline{\lambda}\right)$ непрерывны в $\Lambda^\pm$ и аналитичны для $\pm Im\ \lambda > 0$ то, соответственно, имеем $\theta_\pm(\lambda) = \theta_\mp^*\left(\overline{\lambda}\right)$, $||\theta_\pm(\lambda)|| < 1$, $\lambda \in \Lambda^\pm$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Функции $M_\pm(\lambda)$, непрерывные в $\Lambda^\pm$ и аналитичные для $\pm Im\ \lambda > 0$ соответственно, удовлетворяют условию $M_\pm(\lambda) = M_\mp^*\left(\overline{\lambda}\right)$ для любых $\lambda \in \Lambda^\pm$.*

Наряду с $E(r,\lambda)U_K P_\pm x$ рассмотрим решения $E(r,\lambda)U_{-K}P_\pm x$. Если вещественные значения μ таковы, что операторы

$$E_{K1}(b,\mu) + K^* E_{K2}(b,\mu)K, \quad E_{-K1}(b,\mu) + K^* E_{-K2}(b,\mu)K$$

не обратимы, т.е. существуют ненулевые векторы $x_+ \in \mathcal{H}_+$ такие, что

$$E_{K1}(b,\mu)x_+ = -K^* E_{K2}(b,\mu)Kx_+, \quad E_{-K1}(b,\mu)x_+ = -K^* E_{-K2}(b,\mu)Kx_+,$$

то эти значения μ являются собственными значениями граничных задач (2.1).
В [2] для регулярных диссипативных расширений симметрического оператора определена операторная функция $\chi(\lambda)$, называемая характеристической функцией и приведены методы её вычисления, в частности, для случая симметрического оператора с плотной областью определения и равными конечными индексами дефекта. Применим этот подход к расширениям $C_\pm$ плотно определённого симметрического оператора C_0 с бесконечными индексами дефекта (напомним, что $C_\pm^* = C_\mp$).
Пусть $\mathcal{N}_\pm(\lambda)$ – дефектные подпространства симметрического оператора H. Характеристическая функция $\chi(\lambda)$ диссипативного расширения T оператора H удовлетворяет соотношению (см. [2], стр. 44)

$$\chi^*(\alpha)G^{-1}\chi(\lambda) = Y(\lambda)Z(\lambda)G^{-1}, \quad Im\ \alpha < 0, \quad Im\ \lambda > 0, \tag{2.5}$$

где G – дефектный оператор, определённый формулой :

$$G = iR(\lambda,T) - iR^*(\lambda,T) + 2Im\ \lambda\ R^*(\lambda,T)R(\lambda,T).$$

Заметим, что если T – самосопряжённый, то $G = 0$.

Операторы $Y(\lambda)$ и $Z(\lambda)$ однозначно определяются условиями

$$d_- - Y(\lambda)d_+ \in D(T), \quad d_+ - Z(\lambda)d_- \in D(T^*), \tag{2.6}$$

для любых $d_+ \in \mathcal{N}_+(\lambda)$ и $d_- \in \mathcal{N}_-(\alpha)$.

Предложение 2.3. *Операторная функция* $\theta_+(\lambda) = A_{11}^{-1}(\lambda)A_{12}(\lambda)$ *является характеристической функцией оператора* C_+.

Доказательство. Пусть $x_\mp \in \mathcal{H}_\mp$. Для $\lambda \in \Lambda^\pm$ перепишем формулу (1.6) в виде

$$\widetilde{E}(r,\lambda)P_\mp x_\mp = \pm iE(r,\lambda)J(P_K + P_{-K})A^*\left(\overline{\lambda}\right)P_\mp x_\mp =$$

$$= \pm iE(r,\lambda)JP_K A^*\left(\overline{\lambda}\right)P_\mp x_\mp \pm iE(r,\lambda)JP_{-K}A^*\left(\overline{\lambda}\right)P_\mp x_\mp. \tag{2.7}$$

Непосредственными вычислениями, для $x_- \in \mathcal{H}_-$ и $\lambda \in \Lambda^+$ получим

$$2iE(r,\lambda)JP_K A^*\left(\overline{\lambda}\right)P_- x_- = \begin{bmatrix} -E_{-K1}(r,\lambda)K^*[I_- + K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)x_- \\ E_{-K2}(r,\lambda)[I_- + K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)x_- \end{bmatrix},$$

$$2iE(r,\lambda)JP_{-K} A^*\left(\overline{\lambda}\right)P_- x_- = \begin{bmatrix} E_{K1}(r,\lambda)K^*[I_- - K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)x_- \\ E_{K2}(r,\lambda)[I_- - K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)x_- \end{bmatrix}.$$

Очевидно $[I_- + K\theta_+(\lambda)]A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right) = K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]K^*A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)$. Полагая $y(\lambda) = [I_+ + \theta_+(\lambda)K]K^*A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)x_- \in \mathcal{H}_+$, $\Delta_+(\lambda) = A_{22}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right)K[I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}$, формулу (2.7) можно записать в виде

$$2\widetilde{E}(r,\lambda)P_- x_- = 2\widetilde{E}(r,\lambda)P_-\Delta_+(\lambda)y(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_{12}(r,\lambda)\Delta_+(\lambda)y(\lambda) \\ \widetilde{E}_{22}(r,\lambda)\Delta_+(\lambda)y(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -E_{-K1}(r,\lambda)y(\lambda) \\ E_{-K2}(r,\lambda)Ky(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{K1}(r,\lambda)\widetilde{M}_+(\lambda)y(\lambda) \\ E_{-K2}(r,\lambda)K\widetilde{M}_+(\lambda)y(\lambda) \end{bmatrix},$$

где функция $\widetilde{M}_+(\lambda) = [I_+ - \theta_+(\lambda)K][I_+ + \theta_+(\lambda)K]^{-1}$ совпадает с функцией Вейля $M_+(\lambda)$, определенной по (2.3+). Очевидно, что

$$\widetilde{E}(r,\lambda)P_-\Delta_+(\lambda)y(\lambda) \in \mathcal{N}_+(\lambda). \tag{2.8+}$$

Аналогично, для $x_+ \in \mathcal{H}_+$ и $\lambda \in \Lambda^-$ из формулы (2.7) получим

$$2\widetilde{E}(r,\lambda)P_+x_+ = 2\widetilde{E}(r,\lambda)P_+\Delta_-(\lambda)z(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_{11}(r,\lambda)\Delta_-(\lambda)z(\lambda) \\ \widetilde{E}_{21}(r,\lambda)\Delta_-(\lambda)z(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} E_{-K1}(r,\lambda)z(\lambda) \\ -E_{-K2}(r,\lambda)Kz(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{K1}(r,\lambda)\widetilde{M}_-(\lambda)z(\lambda) \\ E_{K2}(r,\lambda)K\widetilde{M}_-(\lambda)z(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $z(\lambda) = [I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]A_{11}^*\left(\overline{\lambda}\right)x_+ \in \mathcal{H}_+$, $\Delta_-(\lambda) = A_{11}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right)[I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]^{-1}$,

$$\widetilde{M}_-(\lambda) = [I_+ - K^*\theta_-(\lambda)][I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]^{-1} = M_-(\lambda).$$

Следовательно

$$\widetilde{E}(r,\lambda)P_+\Delta_-(\lambda)z(\lambda) \in \mathcal{N}_-(\lambda). \tag{2.8–}$$

В силу (2.8±), формулы (2.6), определяющие функции $Y(\lambda)$ и $Z(\lambda)$, в нашем случае запишутся в виде

$$P_-\left[\widetilde{E}(0,\alpha)P_+\Delta_-(\alpha) + Y(\lambda)\widetilde{E}(0,\lambda)P_-\Delta_+(\lambda)\right] = 0,$$

$$P_+\left[\widetilde{E}(0,\lambda)P_-\Delta_+(\lambda) + Z(\alpha)\widetilde{E}(0,\alpha)P_+\Delta_-(\alpha)\right] = 0. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание, что

$$\widetilde{E}(0,\lambda)P_+ = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_{11}(0,\lambda) \\ \widetilde{E}_{21}(0,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^*\left(\overline{\lambda}\right) \\ -A_{12}^*\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} = -iJA^*\left(\overline{\lambda}\right)P_+,$$

$$\widetilde{E}(0,\lambda)P_- = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_{12}(0,\lambda) \\ \widetilde{E}_{22}(0,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{21}^*\left(\overline{\lambda}\right) \\ A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} = iJA^*\left(\overline{\lambda}\right)P_-,$$

равенства (2.9) запишутся в виде

$$A_{12}^*(\overline{\alpha})\Delta_-(\alpha) - Y(\lambda)K^*A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right)\Delta_+(\lambda) = 0, \quad Y(\lambda) \in [\mathcal{H}_+],$$

$$A_{21}^*\left(\overline{\lambda}\right)\Delta_+(\lambda) - Z(\alpha)A_{11}^*(\overline{\alpha})\Delta_-(\alpha) = 0, \quad Z(\lambda) \in [\mathcal{H}_+].$$

Отсюда получим уравнения (см. определение функций $\Delta_{\pm}(\lambda)$)

$$A_{12}^{*}(\overline{\alpha})A_{11}^{-*}(\overline{\alpha})[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}-Y(\lambda)[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]^{-1}=0,$$

$$A_{21}^{*}\left(\overline{\lambda}\right)A_{22}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right)K[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]^{-1}-Z(\alpha)[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}=0,$$

имеющие решения :

$$Y(\lambda)=A_{12}^{*}(\overline{\alpha})A_{11}^{-*}(\overline{\alpha})[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K],$$

$$Z(\alpha)=A_{21}^{*}\left(\overline{\lambda}\right)A_{22}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right)K[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]^{-1}[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)].$$

Следовательно

$$Y(\lambda)Z(\alpha)=A_{12}^{*}(\overline{\alpha})A_{11}^{-*}(\overline{\alpha})[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}\times$$

$$\times[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]A_{21}^{*}\left(\overline{\lambda}\right)A_{22}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right)K[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]^{-1}[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)],$$

и окончательно имеем

$$Y(\lambda)Z(\alpha)[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]=$$

$$=A_{12}^{*}(\overline{\alpha})A_{11}^{-*}(\overline{\alpha})[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]A_{21}^{*}\left(\overline{\lambda}\right)A_{22}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right)K.$$

Сравнивая последнее равенство с (2.7) и учитывая, что

$$\theta_{+}(\lambda)=A_{11}^{-1}(\lambda)A_{12}(\lambda)=A_{21}^{*}\left(\overline{\lambda}\right)A_{22}^{-*}\left(\overline{\lambda}\right),$$

получим $\chi(\lambda)=\theta_{+}(\lambda)$, $G^{-1}=[I_{+}+K^{*}\theta_{-}(\alpha)]^{-1}[I_{+}+\theta_{+}(\lambda)K]$. Предложение 2.3 доказано.

Аналогично доказывается, что функция $\chi(\lambda)=\theta_{-}(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^{-}$ является характеристической функцией оператора C_{-}.

Замечание 2.1. В [1] доказано, что $\theta_{+}(\lambda)$ является характеристической функцией оператора C_{+} в функциональной модели Надя-Фояша. Таким образом, из Предложения 2.3 следует равносильность определений характеристической функции по Надю-Фояшу и Кужелю.

Очевидна связь между характеристической функцией и функцией Вейля :

$$\chi(\lambda)=[I-M_{+}(\lambda)][I+M_{+}(\lambda)]^{-1}K^{*},\quad\lambda\in\Lambda^{+},$$

$$\chi(\lambda)=K[I-M_{-}(\lambda)][I+M_{-}(\lambda)]^{-1},\quad\lambda\in\Lambda^{-}.$$

§3. РЕЗОЛЬВЕНТА, ОКРУЖНОСТЬ ВЕЙЛЯ И ФОРМУЛА ТИТЧМАРША–КОДАИРА

Пусть самосопряжённый оператор $C_{K,-K}$ действует в $L_2(0,b;\mathcal{H})$ по формуле $C_{K,-K}f = \sigma[f]$, где

$$f \in D(C_{K,-K}) = \{f \in L_2(0,b;\mathcal{H}),\ \sigma[f] \in L_2(0,b;\mathcal{H}),\ P_{-K}f(0) = 0,\ P_K f(b) = 0\}.$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$(C_{K,-K}f - \lambda I)x = g, \quad g(r) \in L_2(0,b;\mathcal{H}), \quad Im\lambda \neq 0,$$

т.е. неоднородную задачу

$$Jx'(r,\lambda) = V(r)x(r,\lambda) + \lambda x(r,\lambda) + g(r), \quad g(r) \in L_2(0,b;\mathcal{H}), \quad Im\lambda \neq 0, \tag{3.1}$$

$$P_{-K}x(0,\lambda) = 0, \quad x(b,\lambda) = P_K x(b,\lambda) = 0. \tag{3.2}$$

Решение этой задачи будем искать методом вариации в виде (см. [3], пункт 9.4)

$$x(r,\lambda) = E(r,\lambda)c(r,\lambda), \quad c(r,\lambda) = P_K c - J\int_0^r E^*(s,\overline{\lambda})g(s)\,ds.$$

Легко проверить, что граничные условия (3.2) будут удовлетворены, если

$$c = [P_K - P_{-K}E^{-1}(b,\lambda)]^{-1} J\int_0^b E^*(s,\overline{\lambda})g(s)\,ds.$$

Оператор $P_K - P_{-K}E^{-1}(b,\lambda)$ обратим, поскольку в противном случае найдётся вектор $c_0 \neq 0$ такой, что $E(b,\lambda)P_K c_0 = P_{-K}c_0$. Таким образом, функция $E(r,\lambda)P_K c_0$ будет собственной функцией самосопряжённого оператора $C_{K,-K}$. Используя формулу (1.2) и равенство $JP_{-K} = P_K K$, несложными преобразованиями получаем

$$c(r,\lambda) = -J\Big\{E^*(b,\overline{\lambda})P_K\left[E^*(b,\overline{\lambda})P_K - P_{-K}\right]^{-1}\int_0^r E^*(s,\overline{\lambda})g(s)\,ds +$$

$$+ P_{-K}\left[E^*(b,\overline{\lambda})P_K - P_{-K}\right]^{-1}\int_r^b E^*(s,\overline{\lambda})g(s)\,ds\Big\}. \tag{3.3}$$

Относительно следующего предложения, см. также [1], [5] и [3], §9.4.

Предложение 3.1. *Резольвентой $R(\lambda, C_{K,-K})$ оператора $C_{K,-K}$ является интегральный оператор*

$$[R(\lambda, C_{K,-K})g](r) = \int_0^b K_b(r,s,\lambda)g(s)\,ds, \quad Im\lambda \neq 0$$

с ядром

$$K_b(r,s,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} E(r,\lambda)J[\Omega_b(\lambda) - I]E^*(s,\overline{\lambda}), & s < r, \\ E(r,\lambda)J[\Omega_b(\lambda) + I]E^*(s,\overline{\lambda}), & s > r, \end{cases} \tag{3.4}$$

где

$$\Omega_b(\lambda) = [P_{-K} + E^*(b,\overline{\lambda})P_K]\cdot[P_{-K} - E^*(b,\overline{\lambda})P_K]^{-1}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Поскольку функция $E(r,\lambda)c(r,\lambda)$ является решением задачи (3.1) – (3.2), то для доказательства утверждения достаточно преобразовать к виду (3.4) слагаемые в правой части формулы (3.3). Записав первое слагаемое в виде

$$JE^*(b,\overline{\lambda})P_K\left[P_{-K} - E^*(b,\overline{\lambda})P_K\right]^{-1} = \frac{1}{2}J[\Omega_b(\lambda) - I],$$

для функции $\Omega_b(\lambda)$ получим формулу (3.5), следовательно, имеем

$$JP_{-K}\left[E^*(b,\overline{\lambda})P_K - P_{-K}\right]^{-1} = \frac{1}{2}J[\Omega_b(\lambda) + I].$$

Предложение 3.1. доказано.

Обозначая $\Omega_\pm(b,\lambda) = P_{-K} \pm E^*(b,\overline{\lambda})P_K$, имеем

$$2P_K = E^{-*}(b,\overline{\lambda})[\Omega_+(b,\lambda) - \Omega_-(b,\lambda)] = E^T(b,\lambda)[\Omega_+(b,\lambda) - \Omega_-(b,\lambda)],$$
$$2P_{-K} = [\Omega_+(b,\lambda) + \Omega_-(b,\lambda)].$$

Так как $P_{\pm K}JP_{\pm K} = 0$ и $Y_b(\lambda) = \frac{1}{2}J\Omega_+(b,\lambda)\Omega_-^{-1}(b,\lambda)$, то следуя выкладкам, приведённым в §9.8 из [3], получаем следующее утверждение (см. также [5]).

Предложение 3.2. *Для $Im\lambda > 0$ операторная функция $Y_b(\lambda)$ принадлежит операторной окружности*

$$C_b(\lambda) = \left\{Z(\lambda) \in [\mathcal{H}] : [Z(\lambda) - Z_0(\lambda)]^*P(b,\lambda)[Z(\lambda) - Z_0(\lambda)] - [P^{-1}(b,\lambda) - iJ] = 0\right\},$$

или, эквивалентно $Y_b(\lambda) \in Z_0(b,\lambda)P^{-1/2}(b,\lambda)ZP^{-1/2}(b,\lambda)[P^{-1}(b,\lambda) - iJ]^{-1/2}$, где Z – произвольный унитарный оператор а

$$P(b,\lambda) = E^*(b,\lambda)JE(b,\lambda) - J > 0, \quad Z_0(b,\lambda) = \frac{1}{2}[J + iP^{-1}(b,\lambda)].$$

Резольвенту оператора C_K получим переходом к пределу при $b \to \infty$. Имеем

$$\Omega_{\pm}(b,\lambda) = P_{-K} \pm E^*(b,\overline{\lambda})P_K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ \pm E^*_{K1}(b,\overline{\lambda}) & -[I_+ \mp E^*_{K1}(b,\overline{\lambda})]K^* \\ -[I_- \mp E^*_{K2}(b,\overline{\lambda})]K & I_- \pm E^*_{K2}(b,\overline{\lambda}) \end{bmatrix},$$

$$[P_{-K} - E^*(b,\overline{\lambda})P_K]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} [K^*E^*_{K2}(b,\overline{\lambda})K - I_+]W^{-*}(b,\overline{\lambda}) & -[E^*_{K1}(b,\overline{\lambda}) + I_+]W^{-*}(b,\overline{\lambda})K^* \\ -K[E^*_{K2}(b,\overline{\lambda}) + I_+]W^{-*}(b,\overline{\lambda}) & K[E^*_{K1}(b,\overline{\lambda}) - I_+]W^{-*}(b,\overline{\lambda})K^* \end{bmatrix},$$

где $W^*(b,\overline{\lambda}) = E^*_{K1}(b,\overline{\lambda}) + K^*E^*_{K2}(b,\overline{\lambda})K$. Следовательно, имеем

$$\Omega_b(\lambda) = \begin{bmatrix} [K^*E^*_{K2}(b,\overline{\lambda})K - E^*_{K1}(b,\overline{\lambda})]\beta & -2E^*_{K1}(b,\overline{\lambda})\beta K^* \\ -2E^*_{K2}(b,\overline{\lambda})K\beta & K[E^*_{K1}(b,\overline{\lambda}) - K^*E^*_{K2}(b,\overline{\lambda})K]\beta K^* \end{bmatrix},$$

здесь $\beta = W^{-*}(b,\overline{\lambda})$.

Рассуждениями использованными при доказательстве Предложения 2.1, для $Im\lambda > 0$ получим

$$\lim_{b\to\infty}\Omega_b(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{K^*[A^*_{22}(\overline{\lambda}) - KA^*_{21}(\overline{\lambda})]K}{[A^*_{22}(\overline{\lambda}) + KA^*_{21}(\overline{\lambda})]} & \dfrac{-2A^*_{21}(\overline{\lambda})}{[A^*_{22}(\overline{\lambda}) + KA^*_{21}(\overline{\lambda})]} \\ \dfrac{-2A^*_{22}(\overline{\lambda})K}{[A^*_{22}(\overline{\lambda}) + KA^*_{21}(\overline{\lambda})]} & \dfrac{-[A^*_{22}(\overline{\lambda}) - KA^*_{21}(\overline{\lambda})]}{[A^*_{22}(\overline{\lambda}) + KA^*_{21}(\overline{\lambda})]} \end{bmatrix}.$$

Обозначая этот предел через $\Omega(\lambda)$, окончательно имеем

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{K^*[I_- - K\theta_+(\lambda)]K}{[I_- + K\theta_+(\lambda)]} & \dfrac{-2\theta_+(\lambda)}{[I_- + K\theta_+(\lambda)]} \\ \dfrac{-2K}{[I_- + K\theta_+(\lambda)]} & \dfrac{-[I_- - K\theta_+(\lambda)]}{[I_- + K\theta_+(\lambda)]} \end{bmatrix},\ Im\lambda > 0. \qquad (3.6+)$$

Аналогичными выкладками, для $Im\lambda < 0$ получим

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{-[I_+ - K^*\theta_-(\lambda)]}{[I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]} & \dfrac{-2K^*}{[I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]} \\ \dfrac{-2\theta_-(\lambda)}{[I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]} & \dfrac{K[I_+ - K^*\theta_-(\lambda)]K^*}{[I_+ + K^*\theta_-(\lambda)]} \end{bmatrix}. \qquad (3.6-)$$

Положим

$$2P_{-K} \pm A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_- = \begin{bmatrix} I_+ & -K^* \pm A_{21}^*\left(\overline{\lambda}\right) \\ -K & I_- \pm A_{22}^*\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенство

$$[2P_{-K} - A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_-]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{I_+ - [K^* + A_{21}^*(\overline{\lambda})]\,K}{[A_{22}^*(\overline{\lambda}) + KA_{21}^*(\overline{\lambda})]} & \dfrac{-[K^* + A_{21}^*(\overline{\lambda})]}{[A_{22}^*(\overline{\lambda}) + KA_{21}^*(\overline{\lambda})]} \\ -\dfrac{K}{[A_{22}^*(\overline{\lambda}) + KA_{21}^*(\overline{\lambda})]} & -\dfrac{1}{[A_{22}^*(\overline{\lambda}) + KA_{21}^*(\overline{\lambda})]} \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

получаем

$$\Omega(\lambda) = [2P_{-K} + A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_-][2P_{-K} - A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_-]^{-1}, \quad Im\lambda > 0. \tag{3.8+}$$

Аналогично, имеем

$$\Omega(\lambda) = [2P_{-K} + A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_+][2P_{-K} - A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_+]^{-1}, \quad Im\lambda < 0. \tag{3.8-}$$

Предложение 3.3. *Резольвентой $R(\lambda, C_K)$ оператора C_K является интегральный оператор*

$$[R(\lambda, C_K)g](r) = \int_0^\infty K(r, s, \lambda) g(s)\, ds, \quad Im\lambda \neq 0$$

с ядром

$$K(r, s, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 2K_-(r, s, \lambda) = E(r, \lambda) J[\Omega(\lambda) - I] E^*(s, \overline{\lambda}), & s < r, \\ 2K_+(r, s, \lambda) = E(r, \lambda) J[\Omega(\lambda) + I] E^*(s, \overline{\lambda}), & s > r, \end{cases} \tag{3.9}$$

где функция $\Omega(\lambda)$ определяется формулами (3.8±).

Доказательство. Достаточно рассмотреть функции $g(r)$ из плотного в пространстве $L_2(0, \infty; \mathcal{H})$ линеала функций, финитных на бесконечности. Поскольку $K_-(r, r, \lambda) - K_+(r, r, \lambda) = -J$, а из формул (3.6±) имеем

$$\frac{1}{2} J[\Omega(\lambda) - I] = JA^*\left(\overline{\lambda}\right) P_-[2P_{-K} - A^*\left(\overline{\lambda}\right) P_-]^{-1},$$

$$\frac{1}{2}J[\Omega(\lambda)+I]=2JP_{-K}[P_{-K}-A^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{-}]^{-1},$$

то функция $h(r)=\int_0^r K_-(r,s,\lambda)g(s)\ ds+\int_r^\infty K_+(r,s,\lambda)g(s)\ ds$ удовлетворяет уравнению $(C_K-\lambda I)h=g$. Действительно, поскольку

$$h(0)=2JP_{-K}[2P_{-K}-A^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{-}]^{-1}\int_0^\infty E^{*}(s,\overline{\lambda})g(s)ds.$$

то $P_{-K}h(0)=0$. Используя формулу (1.6) и выбирая b достаточно большим, в силу финитности функции $g(r)$ получим

$$h(r)=\int_0^b K_-(r,s,\lambda)g(s)\ ds=E(r,\lambda)JA^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{-}[2P_{-K}-A^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{-}]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^b E^{*}(s,\overline{\lambda})g(s)\ ds=-i\widetilde{E}(r,\lambda)P_{-}[2P_{-K}-A^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{-}]^{-1}\int_0^b E^{*}(s,\overline{\lambda})g(s)\ ds.$$

Таким образом $h(r)\in L_2(0,\infty;\mathcal{H})$, и Предложение 3.3 доказано.

Пусть $\Omega_\pm(\lambda)=2P_{-K}\pm A^{*}\left(\overline{\lambda}\right)P_{-}$. Имеем $\Omega_+(\lambda)+\Omega_-(\lambda)=4P_{-K}$, $[\Omega_+(\lambda)+\Omega_-(\lambda)-4I]=-4P_K$. Отсюда следует, что

$$[\Omega_+(\lambda)+\Omega_-(\lambda)]^{*}[\Omega_+(\lambda)+\Omega_-(\lambda)-4I]+[\Omega_+(\lambda)+\Omega_-(\lambda)-4I]^{*}[\Omega_+(\lambda)+\Omega_-(\lambda)]=0. \tag{3.10}$$

Обозначим $Y(\lambda)=\frac{1}{2}J\Omega(\lambda)=\frac{1}{2}J\Omega_+(\lambda)\Omega_-^{-1}(\lambda)$.

Предложение 3.4. *Для $Im\lambda>0$ операторная функция $Y(\lambda)$ принадлежит предельной окружности Вейля*

$$C(\lambda)=\left\{Z(\lambda)\in[\mathcal{H}]:[Z(\lambda)-Z_0(\lambda)]^{*}[Z(\lambda)-Z_0(\lambda)]-P^{-1}(\lambda)=0,\ Im\ Z(\lambda)>0\right\},$$

$$Y(\lambda)\in Z_0(\lambda)+ZP^{-1/2}(\lambda),$$

где Z – произвольный унитарный оператор, а

$$P(\lambda)=[\Omega_-(\lambda)\Omega_-^{-*}(\lambda)]^{-1},\quad Z_0(\lambda)=\frac{1}{2}J[2\Omega_-^{-1}(\lambda)-I].$$

Доказательство. Формулу (3.10) не трудно преобразовать к виду

$$[\Omega(\lambda)+I-2\Omega_-^{-1}(\lambda)]^{*}[\Omega(\lambda)+I-2\Omega_-^{-1}(\lambda)]-4\Omega_-^{-*}(\lambda)\Omega_-^{-1}(\lambda)=0.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{1}{2}J\Omega(\lambda)-\frac{1}{2}J(2\Omega_-^{-1}(\lambda)-I)\right]^*\left[\frac{1}{2}J\Omega(\lambda)-\frac{1}{2}J(2\Omega_-^{-1}(\lambda)-I)\right]-\Omega_-^{-*}(\lambda)\Omega_-^{-1}(\lambda)=0.$$

Предложение 3.4 доказано.

Для центра $Z_0(\lambda)$ окружности $C(\lambda)$ из формулы (3.7) имеем

$$Z_0(\lambda)=i\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ & 0\\ 0 & I_-\end{bmatrix}-i\begin{bmatrix} \frac{[K^*+A_{21}^*(\bar\lambda)]K}{[A_{22}^*(\bar\lambda)+KA_{21}^*(\bar\lambda)]} & \frac{[K^*+A_{21}^*(\bar\lambda)]}{[A_{22}^*(\bar\lambda)+KA_{21}^*(\bar\lambda)]}\\ -\frac{K}{[A_{22}^*(\bar\lambda)+KA_{21}^*(\bar\lambda)]} & -\frac{1}{[A_{22}^*(\bar\lambda)+KA_{21}^*(\bar\lambda)]}\end{bmatrix}.$$

Отметим, что формулы (3.6±) и (3.8±) можно представить в виде :

$$\Omega(\lambda)=\begin{bmatrix} M_+(\lambda) & [M_+(\lambda)-I_+]K^*\\ -K[M_+(\lambda)+I_+] & -KM_+(\lambda)K^*\end{bmatrix},\quad Im\lambda>0, \tag{3.11+}$$

$$\Omega(\lambda)=\begin{bmatrix} -M_-(\lambda) & -[M_-(\lambda)+I_+]K^*\\ K[M_-(\lambda)-I_+] & KM_-(\lambda)K^*\end{bmatrix},\quad Im\lambda<0. \tag{3.11-}$$

Замечание 3.1. В [3], §9.5 функция $Y(\lambda)=\frac{1}{2}J\Omega(\lambda)$ называется характеристической функцией оператора C_K. Формулы (3.6±) и (3.11±) устанавливают связь между этой функцией и функциями $\theta_\pm(\lambda)$ и $M_\pm(\lambda)$, соответственно. Отметим также, что на вещественной оси множители функций $M_\pm(\lambda)$ имеют предельные значения $A_{11}(\mu)+A_{12}(\mu)K$ и $A_{22}(\mu)+A_{21}(\mu)K^*$. Они являются также множителями так-называемой S-матрицы оператора C_K, определённой по формуле

$$S_K(\mu)=K^*[A_{22}(\mu)K+A_{21}(\mu)][A_{11}(\mu)+A_{12}(\mu)K]^{-1}.$$

Эти множители таковы, что с точностью до коэффициента π, функция

$$\rho(\mu)=[(A_{11}(\mu)+A_{12}(\mu)K)^*(A_{11}(\mu)+A_{12}(\mu)K)]^{-1}=$$

$$=[(A_{22}(\mu)K+A_{21}(\mu))^*(A_{22}(\mu)K+A_{21}(\mu))]^{-1}$$

является функцией спектральной плотности оператора C_K (см. [8], [11]).

Получим формулу Титчмарша-Кодаира для функции $\rho(\mu)$. Для этого рассмотрим функции $\Sigma_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}U_{-K}J[\Omega(\lambda) \pm I]U_K$. Непосредственными вычислениями имеем

$$\Sigma_-(\lambda) = i\begin{bmatrix} M_+(\lambda) & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}, \quad Im\lambda > 0, \quad \Sigma_-(\lambda) = i\begin{bmatrix} -M_-(\lambda) & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix}, \quad Im\lambda < 0,$$

$$\Sigma_+(\lambda) = i\begin{bmatrix} M_+(\lambda) & -K^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Im\lambda > 0, \; \Sigma_+(\lambda) = i\begin{bmatrix} -M_-(\lambda) & -K^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Im\lambda < 0. \tag{3.12}$$

Обозначив $E_K(r,\lambda) = E(r,\lambda)U_K$, формулу (3.9) для ядра резольвенты можно записать в виде

$$K(r,s,\lambda) = \begin{cases} E_K(r,\lambda)\Sigma_-(\lambda)E_K^*(s,\overline{\lambda}), & s < r, \\ E_K(r,\lambda)\Sigma_+(\lambda)E^*(s,\overline{\lambda}), & s > r, \end{cases} \qquad Im\lambda \neq 0.$$

Предложение 3.5. *Имеет место формула*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2}[\Sigma_-(\mu - i\varepsilon) - \Sigma_-(\mu + i\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2}[\Sigma_+(\mu - i\varepsilon) - \Sigma_+(\mu + i\varepsilon)] = \rho(\mu), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

где пределы существуют по операторной норме.

Доказательство. Из (3.12) следует, что для любого $\mu \in \mathbb{R}$

$$\Sigma_{\pm}(\mu - i\varepsilon) - \Sigma_{\pm}(\mu + i\varepsilon) = -i\begin{bmatrix} M_-(\mu - i\varepsilon) + M_+(\mu + i\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

Существование пределов $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\Sigma_{\pm}(\mu \pm i\varepsilon) = \Sigma_{\pm}(\mu)$ является следствием того, что

$M_{\pm}(\lambda) \in \mathcal{W}^{\pm}([\mathcal{H}_+])$. Учитывая перестановочность множителей функций $M_{\pm}(\lambda)$, из (2.3±) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} M_-(\mu) + M_+(\mu) &= [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}[A_{11}(\mu) - A_{12}(\mu)K] + \\ &+ [A_{11}^*(\mu) - K^*A_{12}^*(\mu)][A_{11}^*(\mu) + K^*A_{12}^*(\mu)]^{-1} = \\ &= [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}\{[A_{11}(\mu) - A_{12}(\mu)K][A_{11}^*(\mu) + K^*A_{12}^*(\mu)] + \\ &+ [A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K][A_{11}^*(\mu) - K^*A_{12}^*(\mu)]\}[A_{11}^*(\mu) + K^*A_{12}^*(\mu)]^{-1} = \\ &= 2[A_{11}(\mu) + A_{12}(\mu)K]^{-1}[A_{11}(\mu)A_{11}^*(\mu) - A_{12}(\mu)A_{12}^*(\mu)K][A_{11}^*(\mu) + K^*A_{12}^*(\mu)]^{-1} = \\ &= 2\rho(\mu). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Последнее равенство показывает, что плотность спектральной функции можно представить с помощью характеристической функции, именно,

$$\rho(\mu) = [I_+ + \theta_+(\mu)K]^{-1}[I_+ - \theta_+(\mu)\theta_+^*(\mu)][I_+ + K^*\theta_+^*(\mu)]^{-1}.$$

Abstract. The paper considers contractive operator-valued functions $\theta_\pm(\lambda)$ analytic in the upper and lower half-plane respectively. It is proved, that they are the characteristic functions of the minimal extensions of canonical operators, that are both dissipative and accumulative. The equivalence of Nagi-Foias and Kuzhel definitions of characteristic functions of dissipative operators is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Э. Мелик-Адамян, "О характеристической функции диссипативного канонического оператора", Изв. НАН Армении. Математика, том 31, № 2, стр. 60 – 71, 1996.
2. A. Kuzhel, Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators, Kluwer Acad. Publ., 1996.
3. Ф. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Мир, Москва, 1968.
4. D. Hinton, K. Shaw, "Titchmarsh–Weyl theory for Hamiltonian systems", in Spectral Theory of Differential Operators, North-Holland Publ., Amsterdam, pp. 219 – 231, 1981.
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов", Изв. НАН Армении. Математика том 34, № 2, стр. 60 – 71, 1999.
6. Ф. Э. Мелик-Адамян, "О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве", Изв. АН Арм.ССР. Математика, том 12, № 1, стр. 11 – 31, 1977.
7. П. Э. Мелик-Адамян, "Об операторе преобразования для оператора Дирака", Уч. Записки ЕГУ, том 162, № 2, стр. 3 – 12, 1986.
8. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм.ССР. Математика, том 11, № 4, стр. 291 – 313, 1976.
9. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории S-матриц канонических дифференциальных операторов", Кандид. диссерт., Ереван, 1980.
10. S. Bochner, R. Phillips, "Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings", Ann. of Math., vol. 2, no. 43, pp. 409 – 418, 1942.
11. В. М. Адамян, "К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве", ДАН СССР, том 178, № 1, стр. 9 – 12, 1966.

Поступила 19 октября 2000

Известия НАН Армении. Математика, **37**, № 2, 2002, 65–76

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ГЛАДКИХ СЕЛЕКЦИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Р. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье доказываются теоремы существования непрерывных и локально липшицевых селекций для выпуклого многозначного отображения с графами, лежащими в банаховом пространстве. Рассмотрены также вопросы существования непрерывных и гладких селекций для многозначных отображений. Метод шатров является удобным аппаратом для исследования таких вопросов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X и Y – некоторые топологические пространства. Обозначим через 2^Y совокупность всех непустых подмножеств пространства Y. Отображение $a : X \to 2^Y$ называется многозначным отображением из X в Y.

Множества $\operatorname{gr} a = \{(x,y) \in X \times Y / \, y \in a(x)\}$ и $\operatorname{dom} a = \{x \in X / \, a(x) \neq \emptyset\}$ называются, соответственно, графиком и эффективным множеством многозначного отображения a.

Селекция для $a : X \to 2^Y$ определяется как непрерывная функция $y(\cdot) : X \to Y$ такая, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 1 [1]. *Многозначное отображение $a : X \to 2^Y$ называется* **полунепрерывно снизу** *в точке $x_0 \in X$, если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и для любой окрестности $V(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$ для любого $x \in U(x_0)$.*

В дальнейшем нам понадобится следующий результат из [5].

Теорема (Майкл, [5]). *Пусть X – метрическое, а Y – банахово пространства, и $a : X \to 2^y$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение такое, что множество $a(x)$ непусто, выпукло и замкнуто для каждого $x \in X$. Тогда a допускает селекцию, т.е. для любых x_0, $y_0 \in a(x_0)$ существует непрерывное отображение $y(\cdot) : X \to Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ при любых $x \in X$, $y(x_0) = y_0$.*

Пусть Y^* – пространство сопряжённое к Y и $y^* \in Y^*$. Через $< y^*, x >$ обозначим значение линейного функционала y^* на элементе x. Доказательства нижеследующих трёх лемм опускаются.

Лемма 1.1. *Пусть $f(x_0)$ – непрерывная функция, определённая на X. Тогда для любого фиксированного $y_0 \in Y$ многозначное отображение $a(x) \equiv \{y \in Y / \|y - y_0\| \leq f(x)\}$ полунепрерывно снизу.*

Лемма 1.2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, и $a : X \to 2^Y$ – многозначное отображение, полунепрерывное снизу в точке x_0. Если $a(x_0)$ выпукло и замкнуто, то для каждого $y_0 \in Y$ функция $f(x) = d(y_0, a(x)) \equiv inf_{y \in a(x)} \|y_0 - y\|$ полунепрерывна снизу в точке x_0.*

Лемма 1.3. *Если $gr\, a$ выпукло, то функция $f(x) = d(y_0, a(x))$ выпукла по x.*

§2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом параграфе доказывается теорема существования непрерывных и липшицевых ветвей многозначного отображения $a : X \to 2^Y$, график которого есть выпуклое замкнутое множество. Пусть $\delta > 0$ и $z_0 \in Y$. Положим $b_\delta(x) = \{y \in Y / \|y - z_0\| \leq d(z_0, a(x)) + \delta\}$, $a_\delta(x) \equiv a(x) \cap b_\delta(x)$.

Теорема 2.1. *Пусть X и Y – банаховы пространства, и $a : X \to 2^Y$ – многозначное отображение. Если $gr\, a$ выпукло и замкнуто и $dom\, a = X$, то для любых точек $x_0, y_0 \in a_\delta(x_0)$ существует непрерывное отображение $y(\cdot) : X \to Y$ такое, что $y(x) \in a_\delta(x)$ для любого $x \in X$, $y(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Известно [1], что a полунепрерывно снизу на внутренности $\mathrm{dom}\, a$. Тогда a обладает аналогичным свойством в каждой точке $x_0 \in X$.

Согласно Леммам 1.2 и 1.3 функция $f(x) = d(z_0, a(x))$ полунепрерывна снизу и выпукла. Следовательно, в окрестности точки x_0 выпуклая функция $f(x)$ ограничена сверху. Поэтому $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Для того, чтобы показать, что $a_\delta(x)$ полунепрерывна снизу, выберем $y_0 \in a_\delta(x_0)$ и $\varepsilon > 0$, и докажем, что существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U(x_0)$ существует $\overline{y}_x \in a_\delta(x) \cap (y_0 + \varepsilon B(0,1))$. Очевидно, что существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $b_\delta(x) \subseteq B(z_0, \delta_0)$ для всех $x \in U(x_0)$, где $\delta_0 = f(x_0) + 2\delta$. Предположим, что $\varepsilon < 2\delta_0$. Ясно, что если $\tau \leq 2\delta_0$, то

$$\tau B(0,1) \subseteq a(x) - b_\delta(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{2.1}$$

Положим $\alpha = \tau \cdot \varepsilon / (2\delta_0 - \varepsilon)$ и выберем τ настолько малым, что $\alpha < \varepsilon/2$. Поскольку $a(x)$ и $b_\delta(x)$ полунепрерывны снизу, то можно найти окрестность

$U_1(x_0) \subseteq U(x_0)$ такую, что для любого $x \in U_1(x_0)$ существует $y'_x \in b_\delta(x)$ такое, что $y'_x \in y_0 + B(0, \alpha/2)$. Аналогично, для каждого $x \in U_1(x_0)$ существует $y''_x \in a(x)$ такое, что $y''_x \in y_0 + B(0, \alpha/2)$. Следовательно, для каждого $x \in U_1(x_0)$ существует $y'_x \in b_\delta(x)$ такое, что

$$y'_x \in a(x) + \alpha\, B(0,1). \tag{2.2}$$

Полагая $\theta = \tau/(\alpha+\tau) < 1$, из (2.2) получаем

$$\theta\, y'_x \in \theta\, a(x) + \theta\, \alpha\, B(0,1) = \theta\, a(x) + (1-\theta)\, \tau\, B(0,1). \tag{2.3}$$

Из (2.1) следует, что $(1-\theta)\,\tau\, B(0,1) \subseteq (1-\theta)\, a(x) - (1-\theta)\, b_\delta(x)$. Отсюда и из (2.3) получим $\theta\, y'_x \in a(x) - (1-\theta)\, b_\delta(x)$. Поэтому существует элемент $y' \in b_\delta(x)$ такой, что $\theta\, y'_x + (1-\theta)\, y' \in a(x)$. Так как $y'_x,\ y' \in b_\delta(x)$, то в силу выпуклости $b_\delta(x)$ имеем $\overline{y}_x \equiv \theta\, y'_x + (1-\theta)\, y' \in b_\delta(x)$. Следовательно, $\overline{y}_x \in a_\delta(x)$.
Проверим, что $\|\overline{y}_x - y_0\| \le \varepsilon$. Действительно

$$\|y_0 - \overline{y}_x\| = \|y_0 - (\theta\, y'_x + (1-\theta)\, y')\| \le \theta\, \|y_0 - y'_x\| + (1-\theta)\, \|y_0 - y'\| \le$$
$$\le \alpha + \frac{\alpha}{\alpha+\tau}\, \delta_0 \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, мы доказали, что отображение a_δ полунепрерывно снизу. Теперь применяя Теорему Майкла, получаем требуемый результат. Теорема 2.1 доказана.

Лемма 2.1. *Многозначное отображение $a_\delta(x)$ локально липшицево, т.е. для любого z_0 существует окрестность $U(z_0)$ точки z_0 и число $L > 0$ такие, что*

$$a_\delta(z') \le a_\delta(z) + L\|z - z'\|\, B(0,1) \quad \text{для любых} \quad z', z \in U(z_0).$$

Доказательство. Так как a есть выпуклое замкнутое отображение, то для $y_0 \in a(z_0)$ существует (см. [1]) $\gamma > 0$ такое, что для любого $z \in z_0 + \gamma\, B(0,1)$ и $y \in \operatorname{Im} a$

$$d(y, a(z)) \le \frac{1}{\gamma} d(z, a^{-1}(y))(1 + \|y - y_0\|). \tag{2.4}$$

Для $z \in z_0 + \gamma\, B(0,1)$ положим $L \equiv b_\delta(z)$; $M \equiv a(z)$ и

$$F(x) = \begin{cases} x - M, & x \in L \\ \emptyset, & x \notin L. \end{cases}$$

Пусть точка $x_0 \in M$ такая, что $x_0 \in b_{\delta/2}(z)$. Очевидно, что $\frac{\delta}{2}B(0,1) \subseteq L \cap (x_0 + B(0,1)) - M$ для любого $z \in B(z_0,\gamma)$. Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве Предложения 8 из [1], стр. 139, для каждого $x \in L$, $y \in \frac{\delta}{4}B(0,1)$ и $z \in B(z_0,\gamma)$ имеем

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq \frac{4}{\delta} d_M(x-y)(1 + \|x - x_0\|).$$

В этом неравенстве положим $y = 0$, и так как $f^{-1}(0) = L \cap M$, то

$$d(x, L \cap M) \leq \frac{4}{\delta} d(x, M)(1 + \|x - x_0\|).$$

Так как $x, x_0 \in L \equiv b_\delta(z)$ и b_δ ограничено в окрестности $B(z_0,\gamma)$, то существует число $c_1 > 0$ такое, что для каждого $x \in L$ и $z \in B(z_0,\gamma)$ имеем

$$d(x, M \cap L) \leq c_1 \frac{4}{\gamma} d(x, M) = cd(x, M), \tag{2.5}$$

где $c = c_1 \cdot 4/\gamma$. Заметим, что число c не зависит от z.

Пусть теперь u – произвольная точка из Y. Тогда если $x \in L$, то

$$d(u, M \cap L) = \inf_{\nu \in L \cap M} \|u - \nu\| \leq \|u - x\| + d(x, L \cap M).$$

В силу (2.5), получим $d(u, M \cap L) \leq \|u - x\| + cd(x, M)$. Отсюда получаем, что $d(u, M \cap L) \leq d(u, L) + cd(x, M) \leq d(u, L) + c(\|x - u\| + \|u - \nu\|)$, для любого $\nu \in M$. Следовательно

$$d(u, M \cap L) \leq A(d(u, L) + d(u, M)), \quad \text{где} \quad A = c + 1. \tag{2.6}$$

Пусть теперь $z' \in B(z_0,\gamma)$ и $y \in a_\delta(z')$. Подставляя $u = y$ в (2.6) и используя (2.4), получим

$$d(y; L \cap M) \leq A\left(\frac{c}{\gamma} d(z, z') + d(y, b_\delta(z))\right). \tag{2.7}$$

С другой стороны, $d(y, b_\delta(z)) \leq |f(z') - f(z)|$.

Так как выпуклая непрерывная функция f локально липшицева, то не умаляя общности, можно предположить, что $|f(z) - f(z')| \leq L'\, d(z', z)$ для некоторого $L' > 0$ и любых $z, z' \in B(z_0,\gamma)$. Отсюда и из (2.7) получим $d(y, L \cap M) \leq L\, d(z, z')$, где $L \equiv \dfrac{Ac}{\gamma} + AL'$, т.е. $a_\delta(z') \subseteq a'_\delta(z) + L\|z - z'\|\, B(0,1)$. Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $a : X \to 2^Y$ – многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком и* $\mathrm{dom}\, a = X$. *Для любого $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}\, a$ существуют непрерывное отображение $y(x)$, определённое в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и $c > 0$ такие, что для любого $x \in U(x_0)$ имеем $y(x) \in a(x)$ и* $\|y(x) - y_0\| \le c\|x - x_0\|$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим многозначное отображение a_δ. Согласно Лемме 2.1 a_δ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Положим $F(x) = a_\delta(x) \cap B(y_0, c\|x - x_0\|)$, где $c = 2L$. Аналогичными рассуждениями, использованными в доказательстве Теоремы 2.1, многозначное отображение F полунепрерывно снизу. Применяя теорему Майкла для F завершаем доказательство. Теорема 2.2 доказана.

Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция, заданная на $X \times Y$. Предположим, что при фиксированном x функция $f(x, \cdot)$ выпукла по y. Пусть $E \subset X$ и $F \subset Y$. Обозначим $a(x) \equiv \{y \in F /\ f(x, y) < 0\}$.

Теорема 2.3. *Предположим, что $a(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in E$. Тогда существует непрерывное отображение $y(x)$, заданное на E такое, что $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in E$.*

Доказательство. Существует отображение (не обязательно непрерывное) из E в F такое, что $f(x, \overline{y}(x)) = \min\limits_{y \in F} f(x, y)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $f(\cdot, y)$ непрерывна по x, то существует окрестность $B(x, \eta(x))$ точки x такая, что $f(z, \overline{y}(x)) \le f(x, \overline{y}(x)) + \varepsilon$ для любого $z \in B(x, \eta(x))$. Так как E компактно, то оно может быть покрыто n шарами $B(x_i, \eta(x_i))$. Пусть g_i, $(i = 1, ..., n)$, соответствующее непрерывное разбиение единицы. Рассмотрим функцию $y(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)\, \overline{y}(x_i)$. Очевидно, что $y(x)$ непрерывна. Далее, поскольку $y \to f(x, y)$ выпукла, $g_i(x) \ge 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, то имеем

$$f(x, y(x)) \le \sum_{i \in I(x)} g_i(x)\, f(x, \overline{y}(x_i)),$$

где $I(x) = \{i /g_i(x) > 0,\ i = 1, 2, ..., n\}$. Отметим, что $I(x)$ непусто, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$. С другой стороны, если $g_i(x) > 0$, то x принадлежит носителю

g_i, содержащемуся в шаре $B(x_i, \eta(x_i))$. Если $g_i(x) > 0$, то $x \in B(x_i, \eta(x_i))$ и, следовательно

$$f(x, \overline{y}(x_i)) \leq f(x_i, \overline{y}(x_i)) + \varepsilon = \min_{y \in F} f(x_i, y) + \varepsilon \leq \max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x, y) + \varepsilon = V^* + \varepsilon,$$

где $V^* \equiv \max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x, y)$. Из этих предположений вытекает, что $V^* < 0$. Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$f(x, y(x)) \leq \sum_{i \in I(x)} g_i(x)(V^* + \varepsilon) = V^* + \varepsilon < 0.$$

Поскольку F выпукла, заключаем, что $y(x) \in F$. Теорема 2.3 доказана.

Следствие. *Пусть множества E, F и функция $f(x, y)$ удовлетворяют условиям Теоремы 2.3. Положим $g(x) = \min_{y \in F} f(x, y)$; $a(x) = \{y \in F / \, f(x, y) < g(x) + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $a(x) \neq \emptyset$, и следовательно существует непрерывное отображение $y(x)$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in E$.*

§3. МЕТОД ШАТРОВ

Имеет место следующее очевидное утверждение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Пусть X и Y – гильбертовы пространства, а $A : X \to Y$ – линейный непрерывный оператор такой, что $AX = Y$. Существует непрерывный линейный оператор $B : Y \to X$ такой, что $AB = I$, где I – единичный оператор.*

Теорема 3.1. *Пусть X и Y – гильбертовы пространства и $a : X \to 2^Y$ – многозначное отображение, $\operatorname{gr} a$ – подпространство и $\operatorname{dom} a = X$. Существует линейное непрерывное отображение $P : X \to Y$ такое, что $P x \in a(x)$.*

Доказательство. Пусть $H_1 = \operatorname{gr} a$ и $H_2 = H_1^{\perp}$. Существуют непрерывные линейные операторы P_1 и P_2 (проекторы) такие, что для каждого $z \in X \times Y$, $z = P_1 z + P_2 z$ и $\operatorname{Ker} P_2 = H_1$. Следовательно, для $z = (x, y) \in H_1$ имеем $0 = P_2 z = P_2 z_1 + P_2 z_2$, где $z_1 \equiv (x, 0)$, $z_2 \equiv (0, y)$. Положим $P_2 z_1 \equiv A_1 x$ и $P_2 z_2 \equiv A_2 y$. Очевидно, что $A_1 : X \to Z$, $A_2 : Y \to Z$ суть линейные непрерывные отображения. Следовательно

$$z = (x, y) \in H_1 \Longleftrightarrow A_1 x + A_2 y = 0. \tag{3.1}$$

Так как $\operatorname{dom} a = X$, то $\operatorname{Im} A_2 = H \equiv X \times 0$.

Согласно Лемме 3.1 существует правый обратный линейный непрерывный оператор $B : H \to Y$. Следовательно для каждого $x \in X$, $y = -B A_1 x$ является решением уравнения (3.1). Полагая $P = -B A_1$, получим требуемый результат. Теорема 3.1 доказана.

Определение 3.1. *Выпуклый конус $K \subset X$ называется шатром $M \subset X$ в точке $x \in M$, если существуют отображение $r(\overline{x}) : X \to X$, определенное в окрестности нуля и $\varepsilon > 0$ такие, что*

1. $\dfrac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0$ *при* $\overline{x} \to 0$;

2. $\psi(x) \equiv x + x + r(\overline{x}) \in M$ *для* $\overline{x} \in K \cap B(0, \varepsilon)$.

Шатёр K называется гладким или строго дифференцируемым, если отображение $r(\overline{x})$ обладает соответствующим свойством.

Пусть $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция. Обозначим через $f'(x_0, \overline{x})$ производную функции f в точке x_0 по направлению $\overline{x}$, а через $\partial f(x_0)$ – субдифференциал в точке x_0.

Лемма 3.2. *Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}$, где $f(x)$ – выпуклая непрерывная функция и $0 \notin \partial f(x_0)$, $x_0 \in M$. Подпространство $H = \{\overline{x} / f'(x_0, \overline{x}) \leq 0, f'(x_0, -\overline{x}) \leq 0\}$ – строго дифференцируемый шатёр для M в точке x_0, т.е. существует отображение $r(\overline{x})$ такое, что*

1) *$r(\cdot)$ строго дифференцируемо, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_1, x_2 \in B(0, \delta)$ имеет место неравенство*

$$\|r(x_1) - r(x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|,$$

2) *$x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M$, если $\overline{x} \in K \cap B(0, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Так как $0 \notin \partial f(x_0)$, то существует вектор a такой, что $f'(x_0, a) < 0$. Без ограничения общности предположим, что $x_0 = 0$ и $|f'(0, a)| = 1$, $\|a\| = 1$. При $\lambda > 0$ имеем

$$f(\lambda a) = f(0) + f'(0, \lambda a) + o(\lambda a) = \lambda(f'(0, a) + \frac{o(\lambda a)}{\lambda}).$$

При достаточно малых λ выражение в круглых скобках становится отрицательным. Следовательно, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $f(\lambda a) < 0$ при $0 < \lambda \leq \lambda_0$. Поскольку $f(x)$ непрерывна, то существует окрестность нуля $B(0, \delta_0)$ такая, что

$$f(\overline{x} + \lambda_0 a) < 0 \quad \text{при} \quad \overline{x} \in B(0, \delta_0). \tag{3.2}$$

Положим $S_{\delta_0}(0) = H \cap B(0, \delta_0)$. При $\overline{x} \in S_{\delta_0}(0)$ имеем $f(\overline{x}) - f(0) \geq < x^*, \overline{x} > \geq 0$. Отсюда следует

$$f(\overline{x}) \geq 0. \tag{3.3}$$

Обозначим $\rho(\overline{x}) = \inf\{t/\, t > 0 : \overline{x} + t\, a \in M_1\}$, где $M_1 = \{x/\, f(x) \leq 0\}$. Из (3.2) и (3.3) следует, что существует единственная точка $\xi \in [\overline{x}, \overline{x} + \lambda_0\, a]$ такая, что $f(\xi) = 0$, т.е. существует $0 \leq \theta'_x \leq 1$, такое, что $f(\overline{x} + \theta'_x \lambda_0\, a) = 0$. Полагая $\rho(x) = \theta_x\, \lambda_0$, получим $f(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a) = 0$ и $f(\overline{x} + \lambda\, a) < 0$ при $\rho(\overline{x}) < \lambda \leq \lambda_0$.

Докажем теперь, что $\rho(\overline{x})$ – выпуклая функция. Для этого положим $\operatorname{epi}\rho \equiv \{(\alpha, x)/\, \alpha \geq \rho(x)\}$ и предположим, что $(x_1, \alpha_1) \in \operatorname{epi}\rho$, $(x_2, \alpha_2) \in \operatorname{epi}\rho$. Нужно показать, что выпуклая комбинация этих точек тоже принадлежит $\operatorname{epi}\rho$. Пусть $\alpha_1 \leq \lambda_0$, $\alpha_2 \leq \lambda_0$. Имеем $\overline{x}_1 + \alpha_1\, a \in M_1$, $\overline{x}_2 + \alpha_2\, a \in M_1$. Следовательно

$$\beta(\overline{x}_1 + \alpha_1\, a) + (1-\beta)(\overline{x}_2 + \alpha_2\, a) = \beta\, \overline{x}_1 + (1-\beta)\, \overline{x}_2 + (\beta\, \alpha_1 + (1-\beta)\alpha_2)\, a \in$$
$$\in \beta\, M_1 + (1-\beta)\, M_1 = M_1.$$

По определению $\rho(\overline{x})$ отсюда следует, что $\rho(\beta\, \overline{x}_1 + (1-\beta)\, \overline{x}_2) \leq \beta\, \alpha_1 + (1-\beta)\, \alpha_2$, т.е. $(\beta\, \overline{x}_1 + (1-\beta)\, \overline{x}_2,\ \beta\, \alpha_1 + (1-\beta)\, \alpha_2) \in \operatorname{epi}\rho$.

Пусть теперь $\alpha_1 > \lambda_0$ либо $\alpha_2 > \lambda_0$. Выбирая числа $1 > t_1 > 0$ и $1 > t_2 > 0$ так, что $\rho(x_1) \leq t_1\, \alpha_1 < \lambda_0$, $\rho(x_2) \leq t_2\, \alpha_2 < \lambda_0$, и в этом случае доказательство аналогично предыдущему. Покажем теперь, что $\rho(\overline{x}) = o(\overline{x})$, т.е., $\lim_{\overline{x} \to 0} \dfrac{\rho(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} = 0$. Пусть $\overline{x} \in S_{\delta_0}(0)$. Поскольку пространство конечномерно, то имеет место неравенство (см. [4])

$$f(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a) \leq f(0) + f'(0, \overline{x} + \rho(x)\, a) + \omega(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a),$$

где $\omega(\overline{y}) \geq 0$ и $\omega(\overline{y}) = o(\overline{y})$. Следовательно, $0 = f(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a) \leq f'(0, \overline{x}) + \rho(x)\, f'(0, a) + \omega(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a)$, или $\rho(\overline{x}) \leq -\dfrac{\omega(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a)}{f'(0, a)}$. Отсюда следует, что

$$\frac{|\rho(\overline{x})|}{\|\overline{x}\|} \leq -\frac{\omega(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a)}{\|\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a\|} \cdot \frac{\|\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a\|}{\|\overline{x}\|}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\dfrac{\omega(\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a)}{\|\overline{x} + \rho(\overline{x})\, a\|} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $\|\overline{x}\| < \delta$.

Следовательно, имеем

$$\frac{\rho(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{\rho(\overline{x})}{\|\overline{x}\|}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\rho(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon < 1.$$

Мы доказали, что для $\overline{x} \in S_{\delta_0}(0)$ функция $\rho(\overline{x})$ является выпуклой и $\rho(\overline{x}) = o(\overline{x})$. Пусть P – оператор проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространство H. Обозначим $r(\overline{x}) = \rho(P(\overline{x}))\,a$; $\varphi(\overline{x}) = \rho(P(\overline{x}))$.

Для $\overline{x} \in H \cap B(0,\varepsilon)$ имеем $f(\overline{x} + r(\overline{x})) = 0$ и

$$\frac{\|r(\overline{x})\|}{\|\overline{x}\|} = \frac{|\rho(P(\overline{x}))|}{\|P(\overline{x})\|} \cdot \frac{\|P(x)\|}{\|\overline{x}\|} \leq \frac{|\rho(P(\overline{x}))|}{\|P\,\overline{x}\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \overline{x} \to 0.$$

Покажем, что $\varphi(\overline{x})$ является выпуклой функцией. Действительно

$$\varphi(\alpha_1\,\overline{x}_1 + (1-\alpha)\overline{x}_2) = \rho(P(\alpha\,\overline{x}_1 + (1-\alpha)\overline{x}_2)) = \rho(\alpha\,P\,\overline{x}_1 + (1-\alpha)P\,\overline{x}_2) \leq$$
$$\leq \alpha\,\rho(P(\overline{x}_1)) + (1-\alpha)\rho(P(\overline{x}_2) \leq \alpha\,\varphi(\overline{x}_1) + (1-\alpha)\varphi(\overline{x}_2).$$

Так как $\varphi'(0) = 0$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|r(x_1) - r(x_2)\| < \varepsilon\,\|x_1 - x_2\|$ для x_1, $x_2 \in B(0,\delta)$. В самом деле, имеем

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = < y^*, x_1 - x_2 > \tag{3.4}$$

при некотором $y^* \in \partial\varphi(\eta)$ и $\eta \in [x_1, x_2]$.

Поскольку $\partial\varphi(x)$ непрерывна снизу по x, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in B(0,\delta)$ $\partial\varphi(x) \subseteq \partial\varphi(0) + B(0,\varepsilon)$. Так как $\partial\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, то $\partial\varphi(x) \subseteq B(0,\varepsilon)$. Значит $\|y^*\| \leq \varepsilon$ для любого $y^* \in \partial\varphi(x)$. Отсюда и из (3.4) получаем

$$\|r(x_1) - r(x_2)\| \leq \|y^*\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon\,\|x_1 - x_2\|.$$

Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть X и Y – гильбертовы пространства и подпространство K – гладкий шатёр к $\mathrm{gr}\,a$ в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ для некоторого $a : X \to 2^Y$. Положим $\mathrm{dom}\,a_{z_0}(\overline{x}) = X$, где $a_{z_0}(\overline{x}) = \{\overline{y} /\ (\overline{x}, \overline{y}) \in K\}$. Тогда существует гладкое отображение $y(x)$, определённое в окрестности $U(x_0)$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in U(x_0)$ и $y(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Согласно Теореме 3.1 существует линейное непрерывное отображение $P : X \to Y$ такое, что $(\overline{x}, P\,\overline{x}) \in K$ для любого $\overline{x} \in X$. Не умаляя общности, можем предположить, что $z_0 = 0$. Так как K – гладкий шатёр к $\mathrm{gr}\,a$ в точке z_0, то существует гладкое отображение $\psi(\overline{z})$ такое, что

1) $\psi(0) = 0$,

2) $\psi'_z(0) = I_z$,

3) $\psi(\overline{z}) \in \operatorname{gr} a$ при $\overline{z} \in K \cap B(0,\varepsilon)$.

Так как $Z = X \times Y$, то $\psi(\overline{z})$ можно представить в виде $\psi(\overline{z}) = (\psi_1(x,y), \psi_2(x,y))$ и

$$\psi'_z(0) = \begin{pmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\psi'_{1x}(0,0) = I_x, \quad \psi'_{1y}(0,0) = 0, \quad \psi'_{2x}(0,0) = 0, \quad \psi'_{2y}(0,0) = I_y.$$

Положим $g(\overline{x}, r) = \psi_1(\overline{x} + r, P(x+r)) - \overline{x}$ и рассмотрим уравнение $g(\overline{x}, r) = 0$. Так как

$$g'_x(0,0) = \psi'_{1x}(0,0) + \psi'_{1y}(0,0) \cdot P - I_x = I_x - I_x = 0,$$
$$g'_r(0,0) = \psi'_{1x}(0,0) + \psi'_{1y}(0,0) \cdot P = I_x,$$

то выполнены все условия классической теоремы о неявной функции. Значит существует гладкое отображение $r(\overline{x})$ такое, что $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$ и $g(\overline{x}, r(\overline{x})) = 0$ при достаточно малых $\overline{x}$. Обозначим $z(\overline{x}) = (\overline{x} + r(\overline{x}), P\overline{x} + P\,r(\overline{x}))$. При малых $\overline{x}$ имеем $z(\overline{x}) \in K$. Следовательно, $\psi(z(\overline{x})) \in \operatorname{gr} a$. Так как $\psi(z(\overline{x})) = (\psi_1(z(\overline{x})), \psi_2(z(\overline{x}))) = (\overline{x}, \psi_2(z(\overline{x})))$, то $\psi_2(z(\overline{x})) \in a(\overline{x})$. Наконец, так как ψ_2 и z_2 суть гладкие отображения, то $y(\overline{x}) \equiv \psi_2(z(\overline{x}))$ также гладко и $y(\overline{x}) \in a(\overline{x})$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Если множество K в Теореме 3.2 – строго дифференцируемый шатёр, то используя соответствующий вариант теоремы о неявной функции (см. [2], стр. 161) можно аналогичным образом показать, что существует непрерывное отображение $y(x)$, определённое в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 такое, что $y(x) \in a(x)$ при любом $x \in U(x_0)$, $y(x_0) = y_0$, причём существует производная $y'(x_0)$ в точке x_0.

Из Теоремы 3.2 вытекает следующий результат, который обобщает классическую теорему об обратном отображении.

Теорема 3.3. *Пусть X и Y – гильбертовы пространства и $f : X \to Y$ – гладкое отображение. Пусть*

1. $f(x_0) = y_0$;

2. $\operatorname{Im} f'(x_0) = Y$.

Тогда существует гладкое отображение $g(y)$, определённое в окрестности $U(y_0)$ точки y_0 такое, что $g(y_0) = x_0$ и $f(g(y)) = y$ при любом $y \in U(y_0)$.

Теорема 3.4. *Пусть*

1) *функция $f(z) = f(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ выпукла и при фиксированном y дифференцируема по x ;*
2) *Пусть $a(x) = \{y \in Y / f(x,y) = 0\}$ и $y_0 \in a(x_0)$. Предположим, что субдифференциал $\partial_y f(x_0, y_0)$ по y выпуклой функции $y \to f(x_0, y)$ содержится в некоторой гиперплоскости, не проходящей через нуль ;*

Тогда существует непрерывное отображение $y(x)$, определённое в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 такое, что $y(x_0) = y_0$, и существует производная $y'(x_0)$ и $y(x) \in a(x)$ для любого $x \in U(x_0)$.

Доказательство. По условию теоремы существуют вектор $w \in \mathbb{R}^n$ и число $\beta \neq 0$ такие, что $< y^*, w >= \beta$ для любого $y^* \in \partial_y f(x_0, y_0)$. Следовательно, $f'_y(z_0, -w) = -f'_y(z_0, w) = -\beta$, где $f'_y(z_0, w)$ - производная выпуклой функции $y \to f(x_0, y)$ в точке y_0 в направлении w. Согласно Лемме 3.2 подпространство $K = \{\bar{z} / f'(z_0, \bar{z}) \leq 0, f'(z_0, -\bar{z}) \leq 0\}$ является строго дифференцируемым шатром для $\mathrm{gr}\, a$ в точке z_0. Очевидно

$$f'(z_0, \bar{z}) = \max_{y^* \in \partial_y f(z_0)} < y^*, \bar{y} > + < f'_x(z_0), \bar{x} >= f'_y(z_0, \bar{y}) + < f'_x(z_0), \bar{x} > .$$

Легко проверить, что вектор $\dfrac{< f'_x(z_0), \bar{x} >}{f'_y(z_0, w)} \cdot (-w)$ является решением системы уравнений $f'_y(z_0, \bar{y}) + < f'_x(z_0), \bar{x} >= 0$, $f'_y(z_0, -\bar{y}) - < f'_x(z_0), \bar{x} >= 0$ для любого $\bar{x}$. Следовательно, линейное непрерывное отображение $P\bar{x} \equiv \dfrac{< f'_x(z_0), \bar{x} >}{f'_y(z_0, w)} \cdot (-w)$ удовлетворяет условию $(\bar{x}, P\bar{x}) \in K$ для любого $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Теперь требуемый результат следует из Замечания к Теореме 3.2. Теорема 3.4 доказана.

Следующий результат, который вытекает из Теоремы 3.4, содержит условия, при выполнении которых для выпуклой (не обязательно дифференцируемой) функции, существует (локально) обратная непрерывная функция.

Теорема 3.5. (Теорема об обратной функции). *Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - выпуклая непрерывная функция и $f(x_0) = y_0$. Если субдифференциал $\partial f(x_0)$ содержится в некоторой гиперплоскости, не проходящей через нуль, то существует непрерывное отображение $g(y)$, определённое в некоторой окрестности $U(y_0)$ точки y_0, и дифференцируемое в точке y_0 такое, что $f(g(y)) = y$ для любого $y \in U(y_0)$, и $g(y_0) = x_0$.*

Abstract. The paper proves theorems on existence of continuous and locally Lipschitz selections for convex multivalued mappings with graphs lying in Banach space. Questions of existence of continuous and smooth selections for multivalued mappings are also considered. The method of tents provides an appropriate technique for approaching these questions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.-П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
2. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, М., Наука, 1979.
3. В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", УМН, том 30, № 6, стр. 3 – 55, 1975.
4. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука, 1980.
5. E. Michael, "Continuous selections", Ann. Math., vol. 63, no. 2, pp. 361 — 382, 1956.
6. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "Ограничения типа равенств в негладких задачах оптимизации", Экономика и Мат. методы, № 6, стр. 1133 — 1140, 1982.
7. Р. А. Хачатрян, "О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 23, № 2, стр. 149 — 162, 1988.
8. Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума в негладких задачах оптимального управления с дискретным временем", Кибернетика, № 3, стр. 66 — 71, 1985.

Поступила 14 февраля 2002

Известия НАН Армении. Математика, 37, № 2, 2002, 77–88

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Р. Л. Шахбагян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматривается проблема существования оптимального управления системой, описываемой корректными по Петровскому дифференциальными уравнениями в частных производных четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Доказано существование и единственность слабых решений соответствующей начально-краевой задачи в пространстве $L^\infty(O,T;L^2(\Omega))$. Из этого результата вытекает существование оптимальных пар и приведены условия, необходимые для существования оптимального управления.

§1. ВВЕДЕНИЕ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Обозначим через Q цилиндр $Q = \Omega \times (0,T)$, а через $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ – боковую поверхность Q. Для уравнения

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} = f(x,t) \tag{1}$$

с переменными коэффициентами рассмотрим начально-краевую задачу

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \tag{3}$$

где ν – направление внешней нормали к границе Σ, а $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Предположим, что матрица $\|a_{ij}(x)\|$, $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$ симметрична и для любого $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq 0. \tag{4}$$

В настоящей статье решается задача существования оптимального управления для уравнения вида (1), при этом управление осуществляется на границе Σ. С основами теории оптимального управления можно познакомиться в [1], [2].

Нам понадобятся некоторые функциональные пространства. Обозначим через $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{Z}_+$ пространство Соболева функций $u(x)$, определённых на Ω, с нормой $\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндекс, а $\mathcal{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Определим $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$ как замыкание в норме $H^s(\Omega)$ множества финитных, бесконечно дифференцируемых функций, а $H^{-s}(\Omega)$ – сопряжённое пространство к $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$. Пусть $L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))$ обозначает гильбертово пространство функций $u(x,t)$, определённых на цилиндре Q с нормой $\|u\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_s^2\, dt\right)^{1/2}$. В дальнейшем существенную роль будет играть следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию (4), а функции f, u^0 и u^1 из (1) и (2) таковы, что $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $u^0 \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $u^1 \in L^2(\Omega)$. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1) – (3). Тогда на границе области оператор Лапласа Δu принадлежит $L^2(\Sigma)$, т.е. $\Delta u|_\Sigma \in L^2(\Sigma)$.*

Доказательство. Известно (см. [7]), что решение u задачи (1) – (3) удовлетворяет условию $u \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Пусть функции $h_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$ определены на Ω и удовлетворяют условию

$$h_k \in C^2(\overline{\Omega}), \quad h_k|_\Gamma = \nu_k, \tag{*}$$

где $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$, а ν – направление внешней нормали к границе $\Gamma = \partial\Omega$. Умножая уравнение (1) на $(T-t)h_k u_{x_k}$, просуммируем по $k = \overline{1,n}$ и проинтегрируем обе его части по цилиндру Q. Имеем

$$\sum_{k=1}^n \iint_Q (T-t)\, h_k\, u_{x_k} \left[u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}\right] dx\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \iint_Q (T-t)\, h_k\, u_{x_k}\, f(x,t)\, dx\, dt. \tag{5}$$

Обозначим

$$J_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \int_0^T (T-t)\, u_{tt}\, h_k(x)\, u_{x_k}\, dt\, dx. \tag{6}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T (T-t)\, u_{tt}\, u_{x_k}\, dx\, dt &= u_t(T-t)\, u_{x_k}\big|_0^T - \int_0^T ((T-t)\, u_{x_k})_t\, u_t\, dt = \\ &= -T\, u_t\, u_{x_k}\big|_{t=0} - \frac{1}{2} \int_0^T (T-t)(u_t^2)_{x_k}\, dt + \int_0^T u_t\, u_{x_k}\, dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая (2), получим

$$\begin{aligned} J_1 = -T \sum_k \int_{\Omega} h_k(x)\, u^0_{x_k}\, u^1(x)\, dx + \sum_k \iint_Q h_k(x)\, u_t\, u_{x_k}\, dx\, dt + \\ + \frac{1}{2} \sum_k \iint_Q (T-t)\, u_t^2\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Преобразуем теперь

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_Q (T-t)\, h_k\, u_{x_k}\, \Delta^2 u\, dx\, dt. \tag{9}$$

Интегрируя по частям и учитывая (*) и (3), получим

$$\begin{aligned} J_2' &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} \Delta^2 u\, h_k\, u_{x_k}\, dx = \sum_{k,j} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u \right) h_k\, u_{x_k}\, dx = \\ &= -\sum_{j,k} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u\, \frac{\partial}{\partial x_j} (h_k\, u_{x_k})\, dx + \sum_k \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u\, \nu_k\, u_{x_k}\, d\Gamma = \\ &= \sum_k \int_{\Omega} \Delta u\, \Delta(h_k\, u_{x_k})\, dx - \sum_k \int_{\Gamma} \Delta u\, \frac{\partial}{\partial \nu} (\nu_k\, u_{x_k})\, d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma = \sum_k \int_{\Omega} \Delta u\, \Delta(h_k\, u_{x_k})\, dx - \int_{\Gamma} |\Delta u|^2\, d\Gamma. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, имеем

$$J_2'' = \sum_k \int_\Omega \Delta u\, \Delta(h_k\, u_{x_k})\, dx = \sum_k \int_\Omega \Delta u\, h_k(x)\, \frac{\partial}{\partial x_k}\, \Delta u\, dx +$$

$$+ 2\sum_{j,k} \int_\Omega \Delta u\, \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\, u_{x_j x_k}\, dx + \sum_k \int_\Omega \Delta u\, u_{x_k}\, \Delta h_k\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma |\Delta u|^2\, d\Gamma - \frac{1}{2}\sum_k \int_\Omega \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, |\Delta u|^2\, dx + 2\sum_{j,k}\int_\Omega \Delta u\, \frac{\partial h_k}{\partial x_j} u_{x_j x_k}\, dx + \qquad (10')$$

$$+ \int_\Omega \Delta u\, u_{x_k}\, \Delta h_k\, dx.$$

Подставляя (10') в (10), а затем полученное соотношение в (9), получим

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int_\Sigma (T-t)\, |\Delta u|^2\, d\Sigma - \frac{1}{2}\sum_k \iint_Q (T-t)\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, |\Delta u|^2\, dx\, dt +$$

$$+ 2\sum_{j,k}\iint_Q (T-t)\, \Delta u\, \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\, u_{x_j x_k}\, dx\, dt + \iint_Q (T-t)\, \Delta u\, u_{x_k}\, \Delta h_k\, dx\, dt. \qquad (11)$$

Далее, в силу (3)

$$J_3 = -\iint_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j}\, h_k(x)\, u_{x_k}\, dx\, dt =$$

$$= \iint_Q (T-t) \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i}\, (h_k\, u_{x_k})_{x_j}\, dx\, dt. \qquad (12)$$

Подставляя выражения, полученные для J_1, J_2 и J_3 в (5), получим

$$-T\sum_{k=1}^{n} \int_\Omega h_k(x)\, u^0_{x_k}(x)\, u^1(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \iint_Q h_k(x)\, u_t\, u_{x_k}\, dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \iint_Q (T-t)\, u_t^2\, \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\, dx\, dt - \frac{1}{2}\int_\Sigma (T-t)\, |\Delta u|^2\, d\Sigma -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_Q (T-t)\,\frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2\,dx\,dt + 2\sum_{j,k}\iint_Q (T-t)\,\Delta u\frac{\partial h_k}{\partial x_j}u_{x_j x_k}\,dx\,dt +$$

$$+\sum_{k}\iint_Q (T-t)\,\Delta u\, u_{x_k}\,\Delta h_k\,dx\,dt + \sum_{i,j,k}\iint_Q (T-t)\,a_{ij}(x)\,u_{x_i}\,(h_k\,u_{x_k})_{x_j}\,dx\,dt =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_Q (T-t)\,h_k(x)\,u_{x_k}\,f(x,t)\,dx\,dt. \qquad (13)$$

Оценим теперь слагаемые левой части (13). Имеем

$$\left|\sum_{k}\iint_Q (T-t)\,\frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\Delta u|^2\,dx\,dt\right| \le C_1\int_T \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \le C_2\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}. \qquad (14)$$

Далее

$$T\left|\sum_{k}\int_\Omega h_k(x)\,u^0_{x_k}\,u^1(x)\,dx\right| \le C_3\,\left(\|u^0\|^2_{H^1(\Omega)}+\|u^1\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \qquad (15)$$

$$\left|\sum_{j,k}\iint_Q (T-t)\,\Delta u\,\frac{\partial h_k}{\partial x_j}u_{x_j x_k}\,dx\,dt\right| \le$$

$$\le C_3'\iint_Q\left(|\Delta u|^2+\sum_{j,k}|u_{x_j x_k}|^2\right)\,dx\,dt \le C_4\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}. \qquad (16)$$

Легко проверить, что оценка (16) справедлива и для оставшихся слагаемых в левой части (13). Для правой части (13) имеем оценку

$$\left|\sum_{k}\iint_Q (T-t)\,h_k(x)\,u_{x_k}\,f(x,t)\,dx\,dt\right| \le C_5\int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\,dt \le$$

$$\le C_6\,\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \qquad (17)$$

Собирая неравенства (14) – (17), приходим к оценке

$$\int_{\Sigma}(T-t)\,|\Delta u|^2\,d\Sigma \le C_7\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))} + C_8\left(\|u^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \tag{17'}$$

$$+ C_6\,\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} < +\infty.$$

Заметим, что в приведённых оценках число T не играет существенной роли. Поэтому, взяв $T' > T$ и продолжая функцию $f(x,t)$ на $(0,T')$, сохраняя её принадлежность пространству $L^1(0,T';L^2(\Omega))$, из оценки (17') окончательно получаем

$$\int_{\Sigma}|\Delta u|^2\,d\Sigma \le C_7\,\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))} + C_8\left(\|u^0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)}\right) +$$

$$+C_6\,\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))}\cdot\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим неоднородную задачу, соответствующую задаче (1) – (3) :

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,u_{x_i})_{x_j} = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{18}$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \quad x\in\Omega, \tag{19}$$

$$u|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_\Sigma = g. \tag{20}$$

Предположим, что функция $g\in L^2(\Sigma)$. Наша цель – доказать однозначную разрешимость задачи (18) – (20) при достаточно общих предположениях, налагаемых на функции $f(x,t)$, $u^0(x)$ и $u^1(x)$. В этой связи нам необходимо ввести понятие "слабого" решения задачи (18) — (20).

Используя метод транспозиции, см. [5], [6], заключающийся в рассмотрении следующей начально–краевой задачи :

$$v_{tt} + \Delta^2 v - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,v_{x_i})_{x_j} = h(x,t), \tag{21}$$

$$v(x,T) = v'(x,T) = 0, \tag{22}$$

$$v|_{\Sigma} = \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Sigma} = 0. \tag{23}$$

Известно (см. [7]), что для $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ задача (21) — (23) однозначно разрешима. Более того, в силу Теоремы 1 имеем $\Delta v \in L^2(\Sigma)$, а также $v \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $v(0) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $v'(0) \in L^2(\Omega)$ ($'$ означает дифференцирование по переменной t, а $v(0) = v(0,x)$).

Пусть $v(x,t)$ - решение задачи (21) - (23), а $u(x,t)$ - решение задачи (18) - (20) с регулярными данными. Умножив тождество (18) на $v(x,t)$ и проинтегрировав обе его части по цилиндру Q, получим

$$\iint_Q \left[u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} \right] v\, dx\, dt = \iint_Q f\, v\, dx\, dt. \tag{24}$$

Преобразуем в отдельности слагаемые последнего тождества. С учётом условий (19) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \iint_Q u_{tt}\, v\, dx\, dt &= \int_\Omega (u_t\, v)|_0^T\, dx - \iint_Q u_t\, v_t\, dx\, dt = \\ &= -(u^1(x), v(0)) - \int_\Omega (u\, v_t)|_0^T\, dx + \iint_Q u\, v_{tt}\, dx\, dt = \\ &= -(u^1(x), v(0)) + (u^0(x), v'(0)) + \iint_Q u\, v_{tt}\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{25}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Далее, с учётом (20) и (23), имеем

$$\begin{aligned} \iint_Q \Delta^2 u\, v\, dx\, dt &= -\sum_i \iint_Q \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\, dt = -\sum_i \int_\Sigma \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\, \Delta u\, d\Sigma + \\ &+ \iint_Q \Delta u\, \Delta v\, dx\, dt = \iint_Q \Delta u\, \Delta v\, dx\, dt = \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta v\, dx\, dt - \\ &- \sum_i \iint_Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta v\, dx\, dt = \int_\Sigma g\, \Delta v\, d\Sigma + \iint_Q u\, \Delta^2 v\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{26}$$

В силу (20), (21) и симметричности матрицы $\|a_{ij}^{(x)}\|$, для последнего слагаемого в левой части (24), получаем

$$-\sum_{i,j}\iint_Q (a_{ij}\,u_{x_i})_{x_j}\,v\,dx\,dt = \sum_{i,j}\iint_Q a_{ij}(x)\,u_{x_i}\,v_{x_j}\,dx\,dt =$$

$$= -\sum_{i,j}\iint_Q u(a_{ij}\,v_{x_i})_{x_j}\,dx\,dt. \qquad (27)$$

Подставляя (25) – (27) в (24) получим

$$\iint_Q u\left[v_{tt} + \Delta^2 v - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,v_{x_i})_{x_j}\right] dx\,dt +$$

$$+(u^0(x), v'(0)) - (u^1(x), v(0)) + \int_\Sigma g\,\Delta v\,d\Sigma = \iint_Q f\,v\,dx\,dt.$$

Откуда, в силу (21), имеем

$$\iint_Q u\,h\,dx\,dt = (u^1(x), v(0)) - (u^0(x), v'(0)) + \iint_Q f\,v\,dx\,dt - \int_\Sigma g\,\Delta v\,d\Sigma. \qquad (28)$$

Определение. *Функция $u(x,t)$ называется слабым решением задачи (18) – (20), если при заданных*

$$f \in L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)), \quad g \in L^2(\Sigma), \quad u^1 \in H^{-2}(\Omega), \quad u^0 \in L^2(\Omega) \qquad (29)$$

и любого $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ выполняется тождество (28), где функция $v(x,t)$ есть решение задачи (21) – (23).

Теорема 2. *Пусть функции f, g, u^0, u^1 удовлетворяют условиям (29) и выполнены условия Теоремы 1. Тогда в пространстве $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ существует единственное слабое решение задачи (18) – (20).*

Доказательство. В условиях теоремы, как было отмечено выше, для решения $v(x,t)$ задачи (21) – (23) имеем $\Delta v \in L^2(\Sigma)$, $v \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $v(0) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $v'(0) \in L^2(\Sigma)$. Следовательно, правая часть (28) представляет собой линейный непрерывный функционал на пространстве $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Отсюда следует существование и единственность функции $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, удовлетворяющей тождеству (28). Теорема 2 доказана.

§2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим уравнение состояния

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j}(a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{30}$$

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad u_t|_{t=0} = u^1(x), \quad x \in \Omega, \tag{31}$$

$$u|_\Sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = v, \tag{32}$$

где v – управление. Предположим, что $v \in L^2(\Sigma)$. Пусть функции f, u^0, u^1 удовлетворяют условию (29). Тогда, в силу Теоремы 2 существует единственное слабое решение $u(v)$ задачи (30) – (32), принадлежащее пространству $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Такую пару $\{u,v\}$ будем называть допустимой. В силу (29), из (30) получаем $u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-4}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^{-2}(\Omega)) \cap L^1(0,T;H^{-2}(\Omega)) \subset L^1(0,T;H^{-4}(\Omega))$. Учитывая, что $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ заключаем, что отображение $u(v) : [0,T] \to L^2(\Omega)$ непрерывно.

Приведенные выше рассуждения показывают, что функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,T;v) - u_d|^2\, dx + \frac{N}{2}\int_\Sigma |v|^2\, d\Sigma, \tag{33}$$

где $u_d \in L^2(\Omega)$ фиксированно, определён на множестве допустимых пар.

Пара $\{u,v\}$ называется оптимальной, если она минимизирует $J(v)$.

Теорема 3. *Существует единственный элемент $v_0 \in U_{ad} \subset L^2(\Sigma)$ такой, что $J(v_0) = \inf J(v)$ для всех $v \in U_{ad}$.*

Доказательство. Пусть $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ – минимизирующая последовательность для функционала $J(v)$: $\lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v)$. Отсюда следует, что для некоторого постоянного $c > 0$ имеем

$$J(v_n) \le c. \tag{34}$$

Следовательно

$$\|v_n\|_{L^2(\Sigma)} \le C. \tag{35}$$

Обозначим через $u_n = u(x,T;v_n)$ решение задачи (30) – (32), отвечающее граничному условию $\left.\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\right|_\Sigma = v_n$. Из (34) следует, что $\|u_n(x,T)\|_{L^2(\Omega)} \le C$. В силу слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовых пространствах, из последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ можно выделить подпоследовательности, обозначаемые вновь через $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ такие, что

$$\begin{aligned} u_n \to_{n\to\infty} u \quad &\text{в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{слабо} \\ v_n \to_{n\to\infty} v_0 \quad &\text{в} \quad L_2(\Sigma) \quad \text{слабо.} \end{aligned} \tag{36}$$

По определению слабого обобщённого решения имеем

$$\iint_Q u_n\, h\, dx\, dt = (u^1(x), w(0)) - (u^0(x), w'(0)) + \iint_Q f(x,t)\, w\, dx\, dt - \int_\Sigma v_n\, \Delta w\, d\Sigma, \tag{37}$$

для любого $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, где $w(x,t)$ - решение задачи (21) - (23).
По Теореме 1, $\Delta w \in L^2(\Sigma)$. Учитывая (36), заключаем, что правая часть тождества (37) имеет предел при $n \to \infty$. Имеем также, что $u_n \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Переходя к пределу в (37) при $n \to \infty$, получим

$$\iint_Q u\, h\, dx\, dt = (u^1(x), w(0)) - (u^0(x), w'(0)) + \iint_Q f\, w\, dx\, dt - \int_\Sigma v_0\, \Delta w\, d\Sigma.$$

Следовательно, $\{u, v_0\}$ – оптимальная пара. Легко проверить, что пара $\{u, v_0\}$ не зависит от выбора минимизирующей последовательности. Отсюда вытекает единственность оптимального управления. Теорема 3 доказана.

§3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этом параграфе приводятся условия, необходимые для существования оптимального управления.

Теорема 4. *Пусть $\{v, u\}$ – оптимальная пара для задачи (30) – (32), $v \in L^2(\Sigma)$ и выполнены условия (29). Предположим, что $p \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$ и $p_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Тогда тройка $\{v, u, p\}$ удовлетворяет следующей системе уравнений :*

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} = f(x,t), \tag{38}$$

$$p_{tt} + \Delta^2 p - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, p_{x_i})_{x_j} = 0, \tag{39}$$

$$p(x,T)=0, \quad p_t|_{t=T}=u(x,T)-u_d, \quad x\in\Omega, \quad p|_\Sigma=\left.\frac{\partial p}{\partial\nu}\right|_\Sigma=0, \tag{40}$$

$$\int_\Sigma (\Delta p+N\,v)(w-v)\,d\Sigma\geq 0 \quad \textit{для всех} \quad w\in U_{ad}, \tag{41}$$

при этом выполнены условия (31), (32).

Доказательство. Как было отмечено выше в связи с применением метода транспозиции, в условиях теоремы задача (38) – (40) однозначно разрешима. Следовательно, остаётся установить неравенство (41).

Пусть $\{v,u\}$ – оптимальная пара для задачи (31) – (32). Тогда для производной Фреше функционала (33) имеем

$$I\overset{def}{=\!=}\frac{d}{d\rho}\,J(v+\rho(w-v))|_{\rho=0}\geq 0 \quad \text{для любого} \quad w\in U_{ad}. \tag{42}$$

Далее

$$I=\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|u(v+\rho(w-v))-u_d\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{N}{2}\frac{d}{d\rho}\|v+\rho(w-v))\|^2_{L^2(\Sigma)}\right\}\Bigg|_{\rho=0}=$$

$$=\int_\Omega (u(T;v)-u_d)\left.\frac{du}{d\rho}\right|_{\rho=0}dx+N\int_\Sigma v(w-v)\,d\Sigma\geq 0.$$

Отсюда следует, что для всех $w\in U_{ad}$ имеем

$$\int_\Omega (u(T;v)-u_d)\,(u(T;w)-u(T,v))\,dx+N\int_\Sigma v(w-v)\,d\Sigma\geq 0. \tag{43}$$

Заметим, что функция $\psi=u(w)-u(v)$ является решением следующей задачи :

$$\psi_{tt}+\Delta^2\psi-\sum_{i,j}(a_{ij}(x)\,\psi_{x_i})_{x_j}=0,$$

$$\psi|_{t=0}=0, \quad \psi_t|_{t=0}=0, \quad \psi|_\Sigma=0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_\Sigma=w-v.$$

По определению слабого обобщённого решения (см. (28)) имеем

$$0 = \iint_Q \left(p_{tt} + \Delta^2 p - \sum_{i,j} (a_{ij}(x)\, p_{x_i})_{x_j} \right) dx\, dt = -(\psi_t(T), p(T)) + (\psi(T), p_t(T)) -$$

$$- \int_\Sigma (w - v) \Delta p\, d\Sigma = (\psi(T), u(T; v) - u_d) - \int_\Sigma (w - v) \Delta p\, d\Sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\Omega (u(T; v) - u_d)(u(T; w) - u(T; v))\, dx = \int_\Sigma (w - v) \Delta p\, d\Sigma. \tag{44}$$

Подставляя правую часть тождества (44) в (43), получим $\int_\Sigma (\Delta p + N v)(w - v)\, d\Sigma \geq 0$. Доказательство Теоремы 4 завершено.

Abstract. The paper considers the problem of existence of optimal control for a system described by fourth order partial differential equations with variable coefficients under Petrovski correctness assumption. The existence and uniqueness of weak solutions of the corresponding initial boundary value problem in the space $L^\infty(O, T; L^2(\Omega))$ is proved. That result implies the existence of optimal pairs and suggests conditions necessary for existence of optimal control.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Л. Лионс, "Управление Сингулярными Распределёнными Системами", М., Наука, 1987.
2. I. Ekeland, "Sur le controle optimal de systems gouvernes par des equations ellipticues", J. Funct. Analysis, pp. 1 - 62, 1972.
3. L. Hörmander, "Uniqueness theorems for second order differential equations", Math Scand., pp. 177 – 190, 1989.
4. D. L. Russel, "Controllability and stability theory for linear partial differential equations", SIAM Review, pp. 639 – 739, 1978.
5. A. Bensounssan, J. L. Lions, R. Temam, "Methodes de decomposition", Cahiers INRIA, no. 11, pp. 5 – 190, 1972.
6. W. Chan, "Duality in the optimal control", JMMA, vol. 107, no. 2, pp. 509 – 519, 1985.
7. Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, "Неоднородные Граничные Задачи и их Приложения", М., Мир, 1971.

Поступила 14 февраля 2002

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 37, Номер 2, 2002

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 37, No. 2, 2002

Contents