ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И
ПРИБЛИЖЕНИЯ

сборник статей

под редакцией Г. Г. Геворкяна и А. А. Саакяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

Тематика "Гармонический анализ и приближения" имеет большие традиции в Армении и является одной из интенсивно развивающихся направлений. Первая международная конференция по этой тематике состоялась в Нор Амберде (Армения) с 18 по 24 сентября 1998 года. Этот и два последующих выпуска журнала содержат оригинальные статьи, представленные авторами на конференции "Гармонический анализ и приближения, II", вновь проведенной в Нор Амберде с 11 по 18 сентября 2001 года.

Организаторами конференции были :

Институт математики НАН Армении, Ереванский государственный университет, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Московский государственный университет.

Программный комитет :

А. А. Талалян (со-председатель, Армения), П. Л. Ульянов (со-председатель, Россия), Н. У. Аракелян (Армения), А. А. Гончар (Россия), П. Готье (Канада), К. С. Казарян (Армения), Б. С. Кашин (Россия), А. Кордоба (Испания), К. И. Осколков (США), З. Чисельски (Польша), Г. Шмидер (Германия).

Около 70 математиков из 11 стран были участниками конференции. Было выслушано 11 пленарных лекций :

С. М. Никольский (Россия) "Граничные задачи и алгебраические многочлены", Дж. П. Кахан (Франция) "Универсальные ряды Фурье", П. Л. Ульянов (Россия) "О теоремах Леви и Марцинкевича для рядов Фурье–Хаара", Н. У. Аракелян (Армения) и Г. Шмидер (Германия) "Аналитическое продолжение степенных рядов на плоские римановы поверхности", Е. П. Долженко (Россия) "Знакочувствительные приближения", М. Лейси (США) "О теореме Карлесона", К. С. Казарян (Армения) "О проблеме Ульянова", В. Н. Темляков (США) "Алгоритмы Грида, относящиеся к базисам", П. Войтащик (Польша) "Система Хаара и нелинейное приближение в пространстве $BV(\mathbb{R}^d)$", К. И. Осколков (США) "Уравнение Шредингера и знакопеременное преобразование Гильберта с квадратичной фазой", В. И. Коляда (Испания) "Трансплантационная теорема для ультрасферических многочленов с критическим индексом".

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА ПЛОСКИЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Н. У. Аракелян, Г. Шмидер

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

Целью этой статьи является исследование проблемы эффективного аналитического продолжения степенных рядов (аналитических элементов), в терминах их коэффициентов, на некоторые конкретные римановы поверхности. Мы используем некоторые модификации классического метода "функции коэффициентов", связанные с методами теории приближений. На этом пути получаем новые результаты необходимо-достаточного характера, расширяющие классические результаты Фабера, Лоо, Вигерта, Линделёфа, Островского и других авторов об аналитическом продолжении на римановы поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическим элементом (или просто **элементом**) называется упорядоченная пара (a, f), где $a \in \mathbf{C}$ и f – степенной ряд с центром a и положительным радиусом сходимости; для фиксированного центра a можно отождествить элемент (a, f) с рядом f. В частности, **нормализованный** аналитический элемент f это степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 1, \quad f_n \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

с центром в начале координат и единичным кругом $\mathcal{D}_0$ в качестве круга сходимости.

Основной проблемой вейерштрассовской теории аналитических функций является нахождение, используя лишь коэффициенты f_n, области голоморфности элемента (1), являющейся в общем случае некоторой римановой поверхностью $\mathcal{R}$. Весьма общей связанной с ней проблемой является следующая : дана риманова поверхность $\mathcal{R}$, содержащая (в смысле конформного вложения) круг $\mathcal{D}_0$, и нормализованный элемент (1); при каких условиях на коэффициенты f_n (предпочтительно необходимо и достаточного характера) элемент f допускает аналитическое продолжение на $\mathcal{R}$?

Разложение элемента f вокруг нового центра и повторение этого процесса к вновь образованным элементам, как было предложено Вейерштрассом для рассмотрения этих проблем, оказалось неэффективным в большинстве конкретных случаев. Проблема **эффективности** аналитического продолжения степенных рядов возникла в исследованиях последователей Вейерштрасса с целью преодоления возникших трудностей (см. [9]). Для наступления на упомянутую проблему был опробован фактически лишь один достаточно плодотворный подход, основанный на идее **интерполирования** коэффицентов f_n **функцией коэффициентов** φ, голоморфной в некоторой области (обычно в плоскости или секторе), содержащей интервал вида $[n_0, \infty)$ и удовлетворяющей условиям

$$\varphi(n) = f_n \quad \text{для} \quad n \geq n_0. \tag{2}$$

Тогда проблема аналитического продолжения в $\mathbf{C}$ элемента (1) становится эквивалентной аналитическому продолжению элемента

$$f_\varphi(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(n) z^n, \quad z \in \mathcal{D}_0, \tag{3}$$

что естественным образом можно связывать с асимптотическим поведением функции φ в бесконечности. Отметим, что вообще говоря, функция φ не единственна: единственность следует при некоторых ограничениях на рост φ в бесконечности.

Этот подход привёл к ряду результатов необходимого и достаточного характера об аналитическом продолжении (1) для областей $\mathcal{R} \subset \mathbf{C}$ из некоторых классов (см. обзор [4], а также новые результаты в [1] – [3]).

Целью этой статьи является использование метода функции коэффициентов (вовлекая функции, голоморфные в более общих областях, чем угловые) для исследования проблемы аналитического продолжения на некоторые конкретные римановы поверхности. Эта проблема ранее была рассмотрена Фабером, Лоо, Ле Роем, Линделёфом и Островским (см. [4], §7.3). Они предложили достаточные условия для неограниченного аналитического продолжения элемента (1) в терминах поведения функции φ в бесконечности. Как и в [1] – [3], наш подход использует результаты о касательном приближении целыми функциями [1] – [3]. Мы также будем заменять интерполяцию (2) **аппроксимацией**

$$\lim_{n\to\infty} |f_n - \varphi(n)|^{1/n} = 0. \tag{4}$$

Эта модификация основана на наблюдении, что для элементов f и f_φ, определённых с помощью (1), (3) и удовлетворяющих (4), разность $f - f_\varphi$ допускает аналитическое продолжение с $\mathcal{D}_0$ в $\mathbf{C}$, определяющее **целую** функцию, так что f и f_φ имеют одинаковую область голоморфности на $\mathbf{C}$. Назовём аналитическую функцию φ, удовлетворяющую (4), "приближённой" функцией коэффициентов для (1).

Раздел 1 этой статьи содержит некоторый подготовительный материал, необходимые обозначения, определения и примеры. Основные Теоремы 1 и 2 вместе с их доказательствами представлены в разделе 2.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Ниже будут использованы некоторые стандартные обозначения. Буквы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbf{C}$ обозначают, соответственно, множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел. Положим также $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ и $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (так что $\overline{\mathbb{Z}} \subset \overline{\mathbb{R}}$). Расширенная комплексная плоскость или сфера Римана будет обозначена через $\overline{\mathbf{C}}$. Дополнение множества A в $\mathbf{C}$ будем обозначать через A^c, $\mathbf{C}_{\{1\}} = \mathbf{C} \setminus \{1\}$ и $\overline{\mathbf{C}}_{\{1\}} = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{1\}$. Другие необходимые обозначения и определения будут введены в соответствующих местах.

1.1. Римановы поверхности $\mathcal{R}_\infty$, $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}^*$. Обозначим через $\mathcal{R}_\infty$ область голоморфности функции $z \longmapsto \log(z-1)$. Она состоит из бесконечного числа "**листов**" – односвязных областей $R_k = [1, +\infty)^c$, $k \in \mathbb{Z}$. Для $k \in \mathbb{Z}$, пусть $\mathcal{D}_k$ есть открытый единичный круг в R_k, а l_k^+ (соотв. l_k^-) есть множество верхних (соотв. нижних) **простых концов** границы R_k в $\mathbf{C}_{\{1\}}$. Эти множества канонически могут быть рассмотрены как интервал $(1, +\infty)$. Отождествляя соответствующие точки l_k^+ и l_{k-1}^-, получим

$$\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (R_k \cup l_k^+).$$

Отметим, что поверхность $\mathcal{R}_\infty$ допускает униформизацию с помощью глобальных полярных координат $z = 1 + \rho e^{i\theta}$ с $\rho > 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$, где $0 \in \mathcal{R}_\infty$ задана через $\rho = 1$ и $\theta = \pi$. Тогда для $z \in R_k \cup l_k^+$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем $\theta \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$.

В этих терминах голоморфная функция $z \longmapsto \log(z-1)$ задаётся на $\mathcal{R}_\infty$ через $\log(z-1) = \log\rho + i\theta$.

Каждую односвязную область $\Omega \subset \mathbf{C}_{\{1\}}$, удовлетворяющую $\Omega \cap \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, можно считать подобластью $\mathcal{R}_\infty$; в частности, можно выбрать $\Omega = L^c$, где L – жорданов путь в $\overline{\mathbf{C}}$ с начальной точкой в 1 и конечной точкой в ∞.

Определим теперь римановы поверхности

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_\infty \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \overline{\mathcal{D}}_k, \quad \mathcal{R}^* = \mathcal{R}_\infty \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\mathcal{D}}_k,$$

где $\overline{\mathcal{D}}_k$ – замыкание $\mathcal{D}_k$ в R_k. Очевидно

$$\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_\infty. \tag{1.1}$$

Те же самые полярные координаты, определённые на $\mathcal{R}_\infty$, действительны также на $\mathcal{R}_0$ и на $\mathcal{R}^*$. Кроме этого, рассмотрим область голоморфности Δ_∞ функции $z \longmapsto \log z$, имеющую структуру, аналогичную $\mathcal{R}_\infty$, с точкой ветвления в точках 0 и бесконечность. Можно использовать на Δ_∞ (и на подповерхностях $\mathcal{R}_0 \setminus [0,1)$ и $\mathcal{R}^*$) глобальную полярную параметризацию $z = re^{it}$ с $r > 0$ и $t \in \mathbb{R}$, полагая $r = 1$, $t = 0$ для $z = 1$. Голоморфная функция $z \longmapsto \log z$ определяется на Δ_∞ через $\log z = \log r + it$.

Будем обсуждать проблему аналитического продолжения элемента (1) на римановы поверхности $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}_\infty$, содержащие единичный круг $\mathcal{D}_0$. Поверхность $\mathcal{R}^*$ будет играть вспомогательную роль.

1.2. Классы $H(\mathcal{R}_0)$, $H(\mathcal{R}_\infty)$ и $H(\mathcal{R}^*)$. Это классы голоморфных функций, соответственно, на $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_\infty$ и $\mathcal{R}^*$. Они являются линейными топологическими пространствами в топологии локально-равномерной сходимости. Для заданных подобластей $\Omega_1 \subset \Omega_2$ поверхности $\mathcal{R}_\infty$ с соответствующими классами $H(\Omega_1)$, $H(\Omega_2)$ голоморфных функций можно отождествить функцию $f \in H(\Omega_2)$ с её сужением на Ω_1 и рассматривать $H(\Omega_2)$ как подкласс $H(\Omega_1)$. Таким образом, согласно (1.1)

$$H(\mathcal{R}_\infty) \subset H(\mathcal{R}_0) \subset H(\mathcal{R}^*). \tag{1.2}$$

Класс $H(\mathcal{R}_\infty)$ допускает ясное описание в терминах глобальных координат $z = 1 + \rho e^{i\theta} \in \mathcal{R}_\infty$: функция f принадлежит $H(\mathcal{R}_\infty)$ тогда и только тогда, если существует функция $F \in H(\mathbf{C})$ (целая функция) такая, что $f(z) = F(\log(z-1))$. Таким образом, функция $z \longmapsto f(z)$ (в общем случае многозначная в $\mathbf{C}_{\{1\}}$)

допускает **униформизацию** $F(w)$ с помощью голоморфной замены параметра $z = 1 + e^w$, $w \in \mathbf{C}$. В частности, можно рассматривать $H(\mathbf{C}_{\{1\}})$ как подкласс $H(\mathcal{R}_\infty)$.

Аналогично, класс $H(\mathcal{R}^*)$ имеет естественное описание в полярных координатах $z = re^{it}$, которые глобальны на $\mathcal{R}^*$: $g \in H(\mathcal{R}^*)$ тогда и только тогда, если существует функция $G \in H(\Pi^o)$ (где Π^o – открытая **правая полуплоскость**) такая, что $g(z) = G(\log z)$ для $z \in \mathcal{R}^*$, или $G = g \circ \exp$; в частности, $H(\overline{\mathcal{D}}_0^c) \subset H(\mathcal{R}^*)$. Та же самая униформизация $G = g \circ \exp$ имеет место также для функций $g \in H(\mathcal{R}_0 \setminus [0,1))$, где $G \in H(S \cup \Pi^o)$ и S – полуполоса $(-\infty, 0] \times (0, 2\pi)$.

Пусть теперь f – нормализованный аналитический элемент. Будем говорить, что f **определяет** функцию класса $H(\mathcal{R}_\infty)$ (записывая : $f \in H(\mathcal{R}_\infty)$), если f допускает аналитическое продолжение вдоль любой кривой γ в $\mathbf{C}_{\{1\}}$ (не обязательно жордановой) с начальной точкой в $z = 0$. В частности, функция $z \longmapsto \log(z-1)$ принадлежит $H(\mathcal{R}_\infty)$. Это означает, что функция $z \longmapsto \arg(z-1)$ имеет **непрерывную ветвь** $\theta(z)$ вдоль γ. Фиксируя $\theta(0) = \pi$, получим определённое значение $\theta_1 = \theta(z_1)$ для конечной точки z_1 кривой γ. Напомним, что для замкнутой кривой γ в $\mathbf{C}_{\{1\}}$, **индекс** кривой γ (относительно точки 1) является целым числом

$$Ind_\gamma(1) = (2\pi)^{-1}[\theta(z_1) - \pi].$$

Таким образом, аналитическое продолжение функции f вдоль γ **определяет** значение продолженной f в точке $z_1 = 1 + \rho_1 e^{i\theta_1} \in \mathcal{R}_\infty$. Если $\theta(z_1)$ одинакова для двух кривых γ_1 и γ_2, соединяющих 0 и z_1 (т.е. их поднятие на $\mathcal{R}_\infty$ имеет одну и ту же конечную точку), тогда по стандартной плоской топологии, γ_1 и γ_2 **гомотопны** в $\mathbf{C}_{\{1\}}$. По теореме о монодромии (см. [8]), γ_1 и γ_2 будут определять одно и то же аналитическое продолжение в обшей конечной точке z_1 и тем самым в соответствующей точке $\mathcal{R}_\infty$.

Аналогичным образом, будем говорить, что элемент f, заданный по (1), определяет функцию $f \in H(\mathcal{R}_0)$ тогда и только тогда, если f допускает аналитическое продолжение вдоль **любой** кривой γ в $\mathbf{C}_{\{1\}}$ с начальной точкой $z = 0$, удовлетворяющей следующему условию : если γ содержит поддугу l, соединяющую 0 с $z_0 \in \overline{\mathcal{D}}_0$ и $l_0 = [z_0, 0]$ – замкнутый отрезок от z_0 к 0, то $Ind_\gamma(1) = 0$ для замкнутой кривой $\gamma = l \vee l_0$ с конечной точкой $0 = z_1$.

1.3. Оператор Λ в $H(\mathcal{R}^*)$. С каждой $f \in H(\mathcal{R}^*)$ ассоциируем функцию $f^* \in H(\mathcal{R}^*)$ следующим образом. Для каждой $z \in \mathcal{R}^*$ имеем единственную полярную параметризацию $z = 1+\rho e^{i\theta}$, $\theta = \theta(z)$. Полагая $z^* = 1+\rho e^{i(\theta+2\pi)} \in \mathcal{R}^*$, определим

$$f^*(z) = f(z) - f(z^*). \tag{1.3}$$

Соответствие $f \longmapsto f^* = \Lambda f$ является непрерывным линейным преобразованием Λ на $H(\mathcal{R}^*)$, которое может быть определено и с помощью параметризации $z = re^{it}$, $r > 1$, полагая $z^* = re^{i(t+2\pi)}$. Обе параметризации, определяющие Λ, могут быть полезны в разных случаях, однако первая из них вообще говоря имеет преимущество : она показывает в частности, что

$$\Lambda(H(\mathcal{R}_\infty)) = H(\mathcal{R}_\infty). \tag{1.4}$$

Отметим некоторые другие свойства Λ. Очевидно, $\ker\Lambda = H(\overline{\mathcal{D}}_0^c)$ и

$$H(\mathcal{R}_0) \cap \ker\Lambda = H(\mathbf{C}_{\{1\}}), \tag{1.5}$$

т.е. функция $f \in H(\mathcal{R}_0)$ принадлежит $H(\mathbf{C}_{\{1\}})$ тогда и только тогда, если $\Lambda f = 0$ в $\mathcal{R}^*$. Ввиду (1.4), несколько удивительным является свойство

$$\Lambda(H(\mathcal{R}_0)) = H(\mathcal{R}^*), \tag{1.6}$$

т.е. не только $\Lambda f \in H(\mathcal{R}^*)$ для любой $f \in H(\mathcal{R}_0)$, но и обратно, для каждой $g \in H(\mathcal{R}^*)$ существует функция $f \in H(\mathcal{R}_0)$ такая, что $\Lambda f = g$. Рассмотрим некоторые случаи.

1. Пусть L – локально-спрямляемый жордановый путь в $(\overline{\mathcal{D}}_0)^c$ с исключённой начальной точкой в 1 и конечной точкой в ∞; можно рассматривать L в качестве сечения в $\mathcal{R}^*$. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и пусть функция $g_0 \in H(\mathcal{R}^*)$ удовлетворяет на L условию

$$\int_L |\zeta|^{-n_0-1}|g_0(\zeta)|\,|d\zeta| < +\infty \tag{1.7}$$

для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Тогда интеграл типа Коши

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L (z/\zeta)^{n_0}\frac{g_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{1.8}$$

сходится локально равномерно для $z \in L^c$ и определяет голоморфную функцию $f_0(z)$. Условие $g_0 \in H(\mathcal{R}^*)$ позволяет варьировать контур интегрирования в (1.8) вне произвольно малых окрестностей точки 1 (соотв. ∞) к любому контуру на $\mathcal{R}^*$ (с теми же концами) и, тем самым, продолжать f_0 на $\mathcal{R}_0$ как функцию из

$H(\mathcal{R}_0)$. Используя формулу и теорему Коши, заключаем из (1.8), что $\Lambda f_0 = g_0$ на L и по свойству единственности аналитических функций, всюду на $\mathcal{R}^*$.

2. Предположим, что функция $g \in H(\mathcal{R}^*)$ допускает разложение

$$g = g_0 + h_0 \quad \text{in} \quad \mathcal{R}^* \tag{1.9}$$

с $g_0 \in H(\mathcal{R}^*)$, удовлетворяющей условию (1.7), и $h_0 \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$. Тогда $\Lambda f_0 = g_0$ для $f_0 \in H(\mathcal{R}_0)$, определяемой по формуле (1.8). Кроме того, любая функция $h_0 \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$ имеет очевидный прообраз $f_\infty \in H(\mathcal{R}_\infty)$ (т.е. $\Lambda f_\infty = h_0$) :

$$f_\infty(z) = \frac{1}{2\pi i} h_0(z) \log \frac{1}{1-z}. \tag{1.10}$$

Для функции $f = f_0 + f_\infty \in H(\mathcal{R}_0)$ отсюда следует $\Lambda f = g$.

3. Разложение (1.9) для произвольной функции $g \in H(\mathcal{R}^*)$ может быть выведено из теоремы Т. Карлемана о касательном приближении целыми функциями на L (см. [6]). Это влечёт (1.6). Более того, можно подчинить g_0 в (1.9) более строгим ограничениям роста, чем (1.7).

Пусть $\varepsilon \in C([0,\infty))$, $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon(t) \to 0$ с $t \to \infty$. Тогда условие

$$|g_0(\zeta)| < \varepsilon(|\zeta|) \quad \text{для} \quad \zeta \in L \tag{1.11}$$

с подходящим выбором функции ε влечёт (1.7) для всех $n = n_0 \in \mathbb{N}_0$. Для доказательства, приближаем g касательным образом на некоторой дуге L вблизи точки 1 функцией $\psi_1 \in H(\overline{\mathbf{C}}_{\{1\}})$, $\psi_1(\infty) = 0$ так, чтобы $(g - \psi_1)(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 1$ на L. Тогда полагая $(g - \psi_1)(1) = 0$, приближаем $g - \psi_1$ на L функцией $\psi_2 \in H(\mathbf{C})$, чтобы удовлетворить (1.11) для $g_0 = g - h_0$ с $h_0 = \psi_1 + \psi_2$.

Из разложения (1.9) следует, что функция g_0 допускает аналитическое продолжение в точку $\mathcal{R}_\infty$ тогда и только тогда, если g допускает такое продолжение.

Для заданной функции $f \in H(\mathcal{R}_0)$ выберем в (1.9) $g = \Lambda f$ и положим $h_1 = f - f_0 - f_\infty \in H(\mathcal{R}_0)$ с f_∞, определённой согласно (1.10). Тогда $\Lambda h_1 = 0$ и по (1.5), $h_1 \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$.

Суммируя, приходим к следующему результату.

Предложение 1. Произвольная функция $f \in H(\mathcal{R}_0)$ допускает разложение $f = f_0 + f_\infty + h_1$ с $f_0 \in H(\mathcal{R}_0)$, $f_\infty \in H(\mathcal{R}_\infty)$ и $h_1 \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$, где f_0 определена по формуле (1.8) с $g_0 \in H(\mathcal{R}^*)$, удовлетворяющем условиям (1.7) и (1.11), а f_∞ определена по (1.10) с $h_0 \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$. Согласно (1.9),

$\Lambda f = g_0 + h_0$, **так что** Λf **и** g_0 **имеют одинаковые точки голоморфности на** $\mathcal{R}_\infty$.

Используя тот же аппроксимационный подход, можно получить другое разложение для функций $g \in H(\mathcal{R}^*)$.

Лемма 1. **Для** $g \in H(\mathcal{R}^*)$ **существуют** $g^-, g^+ \in H(\mathcal{R}^*)$ **с** $g^- + g^+ = g$ **в** $\mathcal{R}^*$ **такие, что** g^- **ограничена на отрезке** $[1-i, 1)$ **и** g^+ **ограничена на** $(1, 1+i]$.

Доказательство : Положим $f = g$ на $[1-i, 1)$, $f = -g$ на $(1, 1+i]$ и, по теореме Карлемана, выберем функцию $h_0 \in H(\overline{\mathbf{C}}_{\{1\}})$, удовлетворяющую условиям

$$|f(z) - h_0(z)| < 1 \quad \text{для} \quad z \in [1-i, 1+i] - \{1\}.$$

Остаётся положить $g^- = (f - h_0)/2$ и $g^+ = (f + h_0)/2$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Пусть задана функция $f \in H(\mathcal{R}_0)$. Тогда :

(a) f допускает аналитическое продолжение вдоль замкнутого пути $\gamma \subset \mathbf{C}_{\{1\}}$ такое, что $Ind_\gamma(1) = 1$ тогда и только тогда, если f^* допускает аналитическое продолжение в точку в $\mathcal{R}_\infty \setminus \mathcal{R}^*$;

(b) если f допускает аналитическое продолжение вдоль дуги γ с $1 \in \gamma$ или $\infty \in \gamma$, то $f^* = 0$ в $\mathcal{R}^*$ и по (1.5), $f \in H(\mathbf{C})$ или, соответственно, $f \in H(\overline{\mathbf{C}}_{\{1\}})$.

Отметим, что в (a) результирующий элемент в конечной точке может быть отличным от начального элемента. Первая часть утверждения (a) следует из определения соответствия $f \to f^*$; вторая часть утверждения (a) следует из существования аналитического продолжения f^*, с учётом Предложения 1, варьируя контур интегрирования в (1.8) вовнутрь $\mathcal{R}_\infty \setminus \mathcal{R}^*$. Условие (b) означает, что $f^* = 0$ в некоторой малой окрестности точки 1 (соотв. ∞), и утверждение следует из свойства единственности аналитических функций.

Следствие 1. Поверхность $\mathcal{R}_0$ будет максимальной областью голоморфности функции $f \in H(\mathcal{R}_0)$ тогда и только тогда, если единичная окружность ∂D_0 является естественной границей для соответствующей функции $f^* \in H(\mathcal{R}^*)$ (так что максимальной областью голоморфности функции f^* является $\mathcal{R}^*$ или $\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}_0$).

1.4. $\mathcal{R}_0$ как область голоморфности. Теперь представим некоторый класс нормализованных аналитических элементов f, для которых $\mathcal{R}_0$ является **максимальной** областью голоморфности. По Следствию 1, необходимым и достаточным для этого будет условие, что $\mathcal{R}^*$ является максимальной областью голоморфности для ассоциированной функции $f^* \in H(\mathcal{R}^*)$. По (1.6), любая функция $g \in H(\mathcal{R}^*)$ может служить в качестве ассоциированной функции-образа для $f \in H(\mathcal{R}_0)$, так, что $\Lambda f = g$. Таким образом, для нашего примера достаточно выбрать такую g, для которой $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}_0$ является максимальной областью голоморфности (рассматривая g в частности как функцию из $H(\mathcal{R}^*)$). Определим

$$g(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} z^{-m_k}, \tag{1.12}$$

где $\{m_k\}_1^\infty \subset \mathbb{N}$ – произвольная строго-возрастающая последовательность **нулевой плотности**, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{m_k} = 0. \tag{1.13}$$

По теореме Фабри о лакунарных степенных рядах, (1.12) определяет функцию, голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}_0$ с единичной окружностью $\partial\mathcal{D}_0$ в качестве её натуральной границы. Согласно (1.12), $g(z) = O(z^{-1})$ при $z \to \infty$, так что g удовлетворяет условию (1.7) для $L = l_0^+ = (1, +\infty)$ и $n_0 = 0$. По сказанному выше, $g = f^*$ для $f \in H(\mathcal{R}_0)$, определённой по (1.8) (с $g_0 = g$ и $f_0 = f$). Для коэффициентов f_n разложения в степенной ряд функции f в $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{R}_0$ с центром в начале координат имеем

$$f_n = (2\pi i)^{-1} \int_1^\infty t^{-n-1} g(t)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Из (1.12) интегрированием получим

$$f_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} (n + m_k)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.14}$$

Поскольку очевидно

$$(n + m_1)^{-1} < f_n < 1 \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

требуемый элемент f с коэффициентами f_n имеет радиус сходимости равный 1. Для элемента f формула (1.14) предлагает естественную "функцию коэффициентов" φ, определённую по формуле

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} (z + m_k)^{-1}, \tag{1.15}$$

удовлетворяющую условиям (2) для $n \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, φ является мероморфной функцией в $\mathbf{C}$ с простыми полюсами в точках $z = -m_k$, $k \in \mathbb{N}$, ограниченной вне любой δ-окрестности множества $\{m_k\}_1^\infty$, $\delta > 0$. Чтобы оценить рост φ в $\mathbf{C}$ в терминах её неванлинновской характеристики $T = m + N$, используем результат М. В. Келдыша (см. [10]), согласно которому неванлинновская функция приближения m функции φ вида (1.15) удовлетворяет условию $m(r, \infty) = o(1)$ при $r \to \infty$. Если теперь $n(t, \infty)$ – число полюсов функции φ в круге $|z| \le t$, то по (1.13)

$$N(r, \infty) = \int_0^r n(t, \infty) t^{-1}\, dt = o(r) \quad \text{при } r \to \infty,$$

так что $T(r) = o(r)$ при $r \to \infty$. Таким образом, φ является мероморфной функцией нулевого экспоненциального типа. Для сравнения, см. Теорему 1.3.2 Вигерта-Лоо в [4] :

Теорема. Элемент (1) определяет функцию $H(\overline{\mathbf{C}}_{\{1\}})$ тогда и только тогда, если существует целая функция φ нулевого экспоненциального типа, удовлетворяюшая (2) для $n \in \mathbb{N}$.

1.5. Некоторые обозначения и определения. Для множества A в $\mathbf{C}$ или в $\mathcal{R}_\infty$, положим

A^o = внутренность A; $\overline{A}$ = замыкание A; ∂A = граница A;

$\bar{A} = \{\bar{\zeta} : \zeta \in A\}$– сопряжённое множество к A;

$A = \bar{A}$ – самосопряжённое множество;

$\Delta_\infty = \{re^{it} : r > 0,\ t \in \mathbb{R}\}$ – область голоморфности логарифма;

$\Delta(\alpha, \beta) = \{re^{it} \in \Delta_\infty : t \in [\alpha, \beta] \cap \mathbb{R}\}$ для $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ – замкнутый угол;

$\Delta_\beta = \Delta(-\beta/2, \beta/2)$ для $\beta > 0$; отметим, что $\Delta_\infty^o = \Delta_\infty$.

Можно считать, что $\Delta_\beta \subset \mathbf{C}$, если $\beta < 2\pi$, но $\Delta_{2\pi} \subset \Delta_\infty$ и $\Delta_{2\pi}^o = (-\infty, 0]^c$.

Рассмотрим следующие множества в $\mathbf{C}$:

$D_r(a) = \{\zeta : |\zeta - a| < r\}$ – открытый круг ; $D_r = D_r(0)$; $D_1 = \mathcal{D}_0$ – единичный круг ;

$\Pi(\alpha, h) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{-i\alpha}) \ge h\}$ для $\alpha, h \in \mathbb{R}$ – замкнутая полуплоскость ;

$\Pi = \Pi(0, 0)$ – правая полуплоскость ;

$\bar{\Pi}(\alpha, h) = \Pi(-\alpha, h)$ – сопряжённая к $\Pi(\alpha, h)$ полуплоскость ;

$L_\alpha = \{\zeta = \exp(te^{i\alpha}) : t \in \mathbb{R}\}$ для $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \pi/2$ – логарифмическая спираль.

1. **Опорная функция** $K = K_A : \mathbb{R} \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ множества $A \subset \mathbf{C}$, $A \neq \emptyset$ определяется

как

$$K(t) = \sup_{\zeta \in A} \operatorname{Re}\,(\zeta e^{-it}) \quad \text{для} \quad t \in \mathbb{R},$$

и разумно положить $K \equiv -\infty$ для $A = \emptyset$. K является 2π-периодической функцией на $\mathbb{R}$, непрерывной для ограниченных множеств A и полунепрерывной снизу для неограниченных множеств. Характеристическим свойством K является её **тригонометрическая выпуклость** (см. [5]) : если $t \in (t_1, t_2)$, $t - t_1 < \pi$ и $t_2 - t < \pi$, то

$$K(t) \leq \lambda_1 K(t_1) + \lambda_2 K(t_2), \tag{1.16}$$

где

$$\lambda_1 \sin(t_2 - t_1) = \sin(t_2 - t), \quad \lambda_2 \sin(t_2 - t_1) = \sin(t - t_1).$$

2. Для угла $\Delta \subset \Delta_\infty$ и функции $\varphi \in H(\Delta \backslash B)$, где множество $B \subset \Delta$ **ограничено**, число

$$\sigma_{\varphi,\Delta} = \limsup_{z \to \infty} \left(|z|^{-1} \log^+ |\varphi(z)|\right)$$

есть **экспоненциальный тип** функции φ на Δ. Скажем, что φ **экспоненциального типа** на Δ, если $\sigma_{\varphi,\Delta} < +\infty$. Будем употреблять этот термин также для $\varphi \in H(\mathbf{C})$, заменяя Δ через $\mathbf{C}$.

3. Будем говорить, что множество $A \subset \Delta_\infty$ **асимптотично к углу** $\Delta \subset \Delta_\infty$ (в бесконечности), если для каждой пары замкнутых углов Λ_1, Λ_2, удовлетворяющих $\Lambda_1 \subset \Delta^o$ и $\Delta \subset \Lambda_2^o$, множество $(\Lambda_1 \setminus A) \cup (A \setminus \Lambda_2)$ **ограничено** (отметим, что $A \setminus \Lambda_2 = \emptyset$, если $A \subset \Delta$). Множества A_1, $A_2 \subset \Delta_\infty$ **асимптотически эквивалентны** (кратко **асимптотичны**), если A_1 и A_2 асимптотичны к одному и тому же углу Δ. Это соответствие является отношением эквивалентности, которое запишем как $A_1 \sim A_2$. В частности, $\Delta^o \sim \Delta$ и $\mathcal{R}^* \sim \Delta_\infty$.

Замечание 2. Отношение $A \sim \Delta_\beta$ влечёт существование самосопряжённой области $\Omega \subset A \cap \Delta_\beta^o$, удовлетворяющей $\Omega \sim \Delta_\beta$. Более того, в случае $\pi < \beta \leq 2\pi$ можно полагать, что множество Ω^c выпукло (вместе с $(\Delta_\beta^o)^c$).

Выберем последовательность замкнутых углов Λ_k, $k \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\Lambda_k \setminus A \subset D_{r_k}$ и $\Delta_\beta^o = \bigcup\limits_1^\infty \Lambda_k$. Определим

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\Lambda_k^o \setminus \overline{D}_{r_k}\}.$$

Отметим, что во втором случае $\Lambda_\alpha = \Pi(\alpha, 0) \setminus \{0\}$ есть замкнутый угол в Δ_β^o, если $|\alpha| < (\beta - \pi)/2$ и $(\Lambda_\alpha \setminus A) \subset D_r$ для некоторого $r = r(\alpha)$. Выберем последовательность $(\alpha_k)_0^\infty$ с $\alpha_0 = 0$, и $\alpha_k \uparrow \infty$ при $k \uparrow \infty$. Положим $\alpha_{-k} = -\alpha_k$ и $h_k = r(\alpha_k)$ для $k \in \mathbb{Z}$. Тогда определяем

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Pi^o(\alpha_k, h_k) \quad \text{с } \Omega^c = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \Pi(\pi - \alpha_k, -h_k)\}.$$

4. Для заданной области Ω, асимптотичной к Δ, скажем, что функция $\varphi \in H(\Omega)$ **локально** экспоненциального типа в Ω, если $\sigma_{\varphi,\Lambda} < +\infty$ для каждого замкнутого угла $\Lambda \subset \Delta^o$; множество всех таких функций обозначим через $\mathbb{B}_{loc}(\Omega)$. Для $\varphi \in \mathbb{B}_{loc}(\Omega)$ число $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi,\Omega} = \sup\limits_{\Lambda\subset\Delta^o} \sigma_{\varphi,\Lambda}$ (возможно бесконечное) является **внутренним** экспоненциальным типом φ на Ω. Для $\varphi, \psi \in \mathbb{B}_{loc}(\Omega)$ имеем

$$\sigma_{\varphi\psi} \le \sigma_\varphi + \sigma_\psi, \quad \sigma_{\varphi+\psi} \le \sup\{\sigma_\varphi, \sigma_\psi\}. \tag{1.17}$$

Будем писать $\varphi \in \mathbb{B}(\Omega)$, если $\sigma_{\varphi,\Omega} < +\infty$, так, что $\mathbb{B}(\Omega) \subset \mathbb{B}_{loc}(\Omega)$. Отметим, что $\mathbb{B}(\mathbb{C}) = \mathbb{B}_{loc}(\mathbb{C})$.

5. Пусть $\Omega \sim \Delta^o = \Delta^o(\alpha,\beta)$ и $\varphi \in \mathbb{B}_{loc}(\Omega)$. Тогда функция

$$\mathcal{H}_\varphi(t) = \limsup_{r\to\infty} \left[r^{-1}\log|\varphi(re^{it})|\right], \quad t \in (\alpha,\beta)$$

есть (экспоненциальная) **индикатрисса** φ. Индикатрисса является локально ограниченной сверху функцией и на (α,β) обладает свойством тригонометрической выпуклости (см. (1.16)). Отсюда следует, что либо $\mathcal{H}_\varphi$ локально ограничена снизу и непрерывна на (α,β), либо $\mathcal{H}_\varphi \equiv -\infty$. Для $\beta - \alpha > \pi$ это возможно лишь при $\varphi \equiv 0$. Отметим также, что в случае $\beta - \alpha \le 2\pi$ функцию $\mathcal{H}_\varphi$ можно рассматривать как сужение на (α,β) опорной функции некоторого замкнутого выпуклого множества I_φ :

$$I_\varphi = \bigcap_{t\in(\alpha,\beta)} \{\mathbb{C} \setminus \Pi^o(t, \mathcal{H}_\varphi(t))\},$$

называемой **индикаторной диаграммой** φ. **Сопряжённой** индикаторной диаграммой φ является множество

$$\bar{I}_\varphi = \bigcap_{t\in(\alpha,\beta)} \{\Pi^o(-t, \mathcal{H}_\varphi(t))\}^c.$$

Понятия асимптотического угла (см. [1], Опр. 1.2), функций локального и внутреннего экспоненциального типа (см. [3], Опр. 2.3), и [1], Опр. 1.1), индикатриссы и индикаторной диаграммы были полезны при описании функций коэффициентов φ, для которых элемент (1) – (2) допускает аналитическое продолжение в предписанную подобласть $\mathbf{C}$. В проблемах аналитического продолжения на римановы поверхности их роль становится даже более важной. Поскольку $\mathcal{R}^* \subset \Delta_\infty$ и $\Delta_\infty \setminus \mathcal{R}^*$ ограничено, все отмеченные понятия действительны также в $\mathcal{R}^*$ (а также в $\mathcal{R}_0$). Однако процесс униформизации функций из $H(\mathcal{R}^*)$ может превратить функцию конечного внутреннего экспоненциального типа в функцию бесконечного порядка. В связи с этим, нам нужны новые понятия.

6. Как отмечено в 2.2, каждая функция $g \in H(\mathcal{R}^*)$ допускает униформизацию $G = g \circ \exp \in H(\Pi^o)$. Будем говорить, что g имеет **локально-конечную степень** в $\mathcal{R}^*$, и полагать $g \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$, если $\delta = \delta_{g,\beta} = \sigma_{G,\Delta} < \infty$ для $\Delta = \Delta_\beta$ с $\beta \in (0, \pi)$. Тогда для $\sigma \cos(\beta/2) > \delta + \varepsilon$ и достаточно большого $r_\sigma > 0$ неравенство

$$|g(\zeta)| < \exp[(\delta + \varepsilon)|\log \zeta|] \leq |\zeta|^\sigma, \quad |\zeta| > r_\sigma \tag{1.18}$$

выполняется, если $\log \zeta \in \Delta_\beta$. Для $\zeta = re^{it}$ это означает, что $|t| \leq \tan(\beta/2) \log r$. Отметим также, что условие $g \in H(\mathbf{C}) \cap \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ влечёт, что g **многочлен**.

Аналогично, число $\delta_g = \sup\{\delta_{g,\beta} : \beta \in [0, \pi)\}$ назовём **внутренней степенью** g на $\mathcal{R}^*$ и положим $g \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^*)$, если $\delta_g < \infty$. Например, функция

$$g : z \longmapsto z^\delta [\log(z-1)]^m, \quad \delta \geq 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

голоморфная на $\mathcal{R}^*$, имеет внутреннюю степень δ. Эти понятия могут быть использованы также для функций $f \in H(\mathcal{R}_0) \subset H(\mathcal{R}^*)$. Резервируем обозначение $\mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$ для класса $H(\mathcal{R}_0) \cap \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$. Если теперь $g = f^*$ – функция, ассоциированная с f (т.е. $g = \Lambda f$; см. подраздел 2.3), то $\delta_{g,\beta} \leq \delta_{f,\beta+\varepsilon}$ для любого $\beta \in [0, \pi)$ и $\varepsilon \in (0, \pi - \beta)$; следовательно, $\mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0) \subset \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ и $\delta_g \leq \delta_f$. Вообще говоря, обратное неравенство неверно : возьмём $f \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$ с $\delta_f = \infty$, так, чтобы $g = f^* = 0$.

Для $g \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ понятия **(степенной) индикатриссы** μ_g и **индикаторной диаграммы** I_g могут быть введены, полагая просто $I_g = I_G$, если определить

$$\mu_g(\alpha) = \mathcal{H}_G(\alpha) \quad \text{для} \quad |\alpha| < \pi/2.$$

Отметим, что $I_g \neq \emptyset$, если μ_g конечнозначна, и в этом случае I_g **неограничена**. Наконец, рассмотрим дополнение замкнутого выпуклого множества $\bar{I}_g$ (=

сопряжённая индикаторная диаграмма g) :

$$\Omega_g = (\bar{I}_g)^c = \bigcup_{|\alpha|<\pi/2} \Pi^o(-\alpha, \mu_g(\alpha)). \tag{1.19}$$

Легко видеть, что Ω_g является областью, асимптотичной $\Delta^o_{2\pi}$, $\Omega_g \sim \Delta^o_{2\pi}$.

§2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ НА $\mathcal{R}_0$

Целью этого параграфа является изложение некоторых новых результатов необходимо-достаточного характера об аналитическом продолжении элемента (1) на $\mathcal{R}_0$ в терминах коэффициентов элемента. Существенной частью является построение функции коэффициентов для $f \in H(\mathcal{R}_0)$, определённой по элементу (1) при некоторых ограничениях на рост функции f на $\mathcal{R}_0$ в бесконечности.

Теорема 1. Элемент (1) определяет функцию $f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$ тогда и только тогда, если существует область Ω, асимптотичная к $\Delta^o_{2\pi}$, и функция $\varphi \in \mathbb{B}(\Omega)$ с $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$, удовлетворяющая интерполяционным условиям (2).

Замечание 3. (a) Функция φ в Теореме 1 единственна. (b) Область Ω в Теореме 1 может быть выбрана по формуле (1.19) с $g = f^* = \Lambda f$.

Утверждение (a) следует из теоремы единственности Карлсона (см. [4], стр. 11), (b) следует из доказательства Теоремы 1, представленного ниже.

Теорема 2. Элемент (1) определяет функцию $f \in H(\mathcal{R}_0)$ с $\Lambda f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ тогда и только тогда, когда существует область Ω, асимптотичная к $\Delta^o_{2\pi}$, и функция $\varphi \in \mathbb{B}(\Omega)$ с $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$, удовлетворяющая "аппроксимационному" условию (4).

Теорема 2 усиливает достаточную часть Теоремы 1. Кроме того, функция φ, удовлетворяющая условиям Теоремы 2, более не обязана быть единственной. Условие (4) (и также (2)) вместе с $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$ влечёт (теорема В. Бернштейна, [13], стр. 100), что

$$\mathcal{H}_\varphi(0) = \limsup_{n\to\infty} \log|\varphi(n)|^{1/n} = 0,$$

обеспечивая, чтобы $\mathcal{D}_0$ являлся кругом сходимости ряда (3).

Лемма 2. Для $g \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ и области $\Omega_g \sim \Delta^o_{2\pi}$ (см. (1.19)) существует функция $f_\varphi \in H(\mathcal{R}_0)$ такая, что $\Lambda f_\varphi = g$, где f_φ задана рядом (3) для некоторой $\varphi \in \mathbb{B}(\Omega_g)$, удовлетворяющей $\sigma_\varphi = 0$ в Ω_g.

Лемма 3. Пусть Ω – область, асимптотичная к $\Delta^{\circ}_{2\pi}$ и $\varphi \in \mathbb{B}(\Omega)$ с $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$. Тогда аналитический элемент $f = f_{\varphi}$, заданный по (3), определяет функцию $f_{\varphi} \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$.

Поскольку $\mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0) \subset \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$, то из Лемм 2 и 3 вытекает $\Lambda(\mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)) = \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$, уточняя утверждение (1.6) для $\mathcal{B}_{loc}$ классов.

Убедимся теперь, что Теоремы 1 и 2 непосредственно следуют из Лемм 2 и 3. Рассмотрим сначала **необходимые** части. Пусть элемент (1) определяет функцию $f \in H(\mathcal{R}_0)$ и предположим, что $g = \Lambda f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ (в Теореме 1 это следует из условия $f \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$). Рассмотрим функцию f_{φ}, определённую в Лемме 2 и удовлетворяющую $f_{\varphi} \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$ по Лемме 3. Тогда $\Lambda(f - f_{\varphi}) = 0$ и (1.5) влечёт $f - f_{\varphi} = h \in H(\mathbf{C}_{\{1\}})$. Согласно разложению Лорана функции h_1 в центре 1, $h = h_{\infty} + h_1$ с $h_{\infty} \in H(\mathbf{C})$ и $h_1 \in H(\overline{\mathbf{C}}_{\{1\}})$.

Теперь, по теореме Вигерта-Лоо (см. конец подраздела 2.4), h_1 имеет вид (3) : $h_1 = f_{\psi}$ для некоторой целой функции ψ с $\sigma_{\psi} = 0$. В результате получим $f - f_{\varphi-\psi} = h_{\infty}$, откуда следует (4) (с φ, заменённой на $\varphi - \psi$ и $\sigma_{\varphi-\psi,\Omega} = 0$ согласно (1.17)), поскольку h_{∞} является целой функцией. Это завершает необходимую часть Теоремы 2. В случае Теоремы 1, h_{∞} является многочленом, как это следует из условия $h_{\infty} \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0) \cap H(\mathbf{C})$ (см. пункт 6 подраздела 2.5).

В достаточной части, Теорема 1 следует из Теоремы 2. Пусть φ удовлетворяет условиям Теоремы 2. Тогда по Лемме 3, функция f_{φ}, заданная по (3), определяет функцию $f_{\varphi} \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}_0)$. По условию (4), $f = f_{\varphi} + h_{\infty}$, где $h_{\infty} \in H(\mathbf{C})$. Мы свели доказательство Теорем 1 и 2 к Леммам 1 и 2, которые будут доказаны ниже.

Доказательство Леммы 2 : Пусть $g^-, g^+ \in H(\mathcal{R}^*)$ – функции из Леммы 1, построенные для $g \in H(\mathcal{R}^*)$ так, что g^- ограничена на $(1 - i, 1]$, g^+ – на $(1, 1 + i]$ и $g = g^- + g^+$ – на $\mathcal{R}^*$. Выберем точку $w \in \mathcal{R}^*$ и рассмотрим два пути l^-_w и l^+_w в $\mathcal{R}^*$ с начальной точкой в 1 и конечной точкой в w так, что

$$l^-_w \cap \overline{D}_{\varepsilon}(1) = [1 - i\varepsilon, 1), \quad l^+_w \cap \overline{D}_{\varepsilon}(1) = (1, 1 + i\varepsilon]$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда функции g^- и g^+ будут ограничены, соответственно, на l^-_w и l^+_w.

Теперь для $\zeta \in \mathcal{R}^*$ и $z \in \mathbf{C}$ рассмотрим функцию $\zeta^z = \exp(z \log \zeta)$, голоморфную по (ζ, z) (поскольку функция $\zeta \longmapsto \log \zeta$ голоморфна в $\mathcal{R}^*$). Для $(z, w) \in \mathbf{C} \times \mathcal{R}^*$ определим функцию $\psi(z, w)$ по формуле

$$\psi(z, w) = (2\pi i)^{-1} \int_{l^-_w} g^-(\zeta)\zeta^{-z-1}\, d\zeta + (2\pi i)^{-1} \int_{l^+_w} g^+(\zeta)\zeta^{-z-1}\, d\zeta. \qquad (2.1)$$

Очевидно, $\psi(\cdot, w)$ является целой функцией для каждого $w \in \mathcal{R}^*$. В силу голоморфности функций g^- и g^+ в $\mathcal{R}^*$ и теоремы Коши, $\psi(\cdot, w)$ независима от конкретного выбора путей l_w^- и l_w^+, поскольку любые два пути типа l_w^- или l_w^+ гомотопны в $\mathcal{R}^* \setminus D_\varepsilon(1)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Для $z \in \mathbf{C}$ и $w, w_0 \in \mathcal{R}^*$ вместе с равенством $g = g^- + g^+$ это означает

$$\psi(z, w) = \psi(z, w_0) + (2\pi i)^{-1} \int_{w_0}^{w} g(\zeta)\zeta^{-z-1}\, d\zeta, \tag{2.2}$$

где интегрирование проводится вдоль любого пути в $\mathcal{R}^*$ с начальной точкой в w_0 и конечной точкой в w.

Рассмотрим теперь логарифмическую спираль L_α, $|\alpha| < \pi/2$, и пусть $w_{\alpha,r} = L_\alpha \cap \partial D_r$ для любого $r > 1$. Для $r > \tau > 1$ обозначим через $L_\alpha^{\tau,r}$ дугу L_α с начальной точкой $w_0 = w_{\alpha,\tau}$ и конечной точкой $w = w_{\alpha,r}$, и положим $L_\alpha^\tau = L_\alpha^{\tau,\infty}$ с $w_{\alpha,\infty} = \infty$. Выбирая интегрирование в (2.2) вдоль $L_\alpha^{\tau,r}$, получим

$$\psi(z, w_{\alpha,r}) = \psi(z, w_{\alpha,\tau}) + J_{\tau,r}(z), \quad z \in \mathbf{C}, \tag{2.3}$$

где

$$J_{\tau,\rho}(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{L_\alpha^{\tau,r}} g(\zeta)\zeta^{-z-1}\, d\zeta. \tag{2.4}$$

Отметим, что согласно (2.1) и (2.2), функция $\psi(\cdot, w_{\alpha,\rho})$ не зависит от τ, но мы будем использовать подходящий выбор τ для оценки её роста.

Сначала оценим функцию $\psi(z, w_{\alpha,\tau})$ в (2.3), используя (2.1) с $w = w_{\alpha,\tau}$. Выберем $\tau = 1 + \varepsilon^2$ с малым $\varepsilon > 0$ и подчиним пути l_w^-, l_w^+ условию $l_w^- \cup l_w^+ = \partial D_\tau^+$, где $D_\tau^+ = \Pi(0,1) \cap \overline{D}_\tau$. Существует константа $m_\tau > 0$ такая, что $|g^-| < m_\tau$ на γ_w^- и $|g^+| < m_\tau$ на γ_w^+. Поскольку

$$|\log\zeta| \le |\zeta - 1| < 2\varepsilon \quad \text{для} \quad \zeta \in D_\tau^+,$$

из (2.1) следует

$$|\psi(z, w_{\alpha,\tau})| < m_\tau \exp(2\varepsilon|z|), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{2.5}$$

Далее, положим $\Pi_\alpha = \Pi(-\alpha, \mu_g(\alpha))$. Покажем, что для любого $\tau > 1$ и $z \in \Pi_\alpha^o$ интеграл $J_{\tau,r}(z)$ сходится к $J_\tau(z) = J_{\tau,\infty}(z)$ при $r \to \infty$ локально равномерно. Пусть $h > \mu_g(\alpha)$ и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $h - \mu_g(\alpha) > 2\varepsilon$. На L_τ^α будем использовать параметризацию

$$\zeta = \exp(te^{i\alpha}), \quad \tau \le t\cos\alpha < \infty,$$

которая для $(\zeta, z) \in L_\alpha^\tau \times \Pi(-\alpha, h)$ влечёт

$$|\zeta^{-z}| = \exp\{-t \operatorname{Re}(ze^{i\alpha})\} \le \exp(-ht). \tag{2.6}$$

Кроме того, полагая $\mu = \mu_g(\alpha)$ для $g \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$, можно найти константу $M_{\alpha,\tau} < \infty$, для которой

$$|g(\zeta)| < M_{\alpha,\tau} \exp[(\mu + \varepsilon)t] \quad \zeta \in L_\alpha^\tau. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) для $(\zeta, z) \in L_\alpha^\tau \times \Pi(-\alpha, h)$ имеем

$$\left|g(\zeta)\zeta^{-z-1}\right| < M_{\alpha,\tau}|\zeta|^{-1}\exp(-\varepsilon t) < M_{\alpha,\tau}|\zeta|^{-\varepsilon-1}. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $z \in \Pi(-\alpha, h)$ и $1 < \tau \le \rho < r < \infty$. Ввиду (2.4) и (2.8) находим

$$\int_{L_\alpha^{\rho,r}} \left|g(\zeta)\zeta^{-z-1}\right| |d\zeta| < M_{\alpha,\tau} \int_{L_\alpha^{\rho,r}} |\zeta|^{-\varepsilon-1} |d\zeta| < cr^{-\varepsilon}, \tag{2.9}$$

где $M_{\alpha,\tau} = c\cos\alpha$. Из (2.9), $J_{\rho,r}(z) \to 0$ при $\rho \to \infty$ (равномерно на $\Pi(-\alpha, h)$), т.е. интеграл $J_\tau(z) = J_{\tau,\infty}(z)$ сходится абсолютно и локально равномерно на Π_α^o. Полагая для $z \in \Pi_\alpha^o$ и $\tau > 1$

$$\varphi(z) = \varphi_\alpha(z) = \lim_{r\to\infty} \psi(z, w_{\alpha,r}) = \psi(z, w_{\alpha,\tau}) + J_\tau(z), \tag{2.10}$$

получим функцию $\varphi_\alpha \in H(\Pi_\alpha^o)$, не зависящую от параметра τ. В силу (2.3) и (2.1) с $\rho = \tau$, заключаем, что выбор $\tau = 1 + \varepsilon^2$ влечёт, чтобы внутренний экспоненциальный тип функции φ_α на Π_α^o был $\le 2\varepsilon$, так, что $\sigma_{\varphi_\alpha} = 0$ на Π_α^o. Убедимся, что (2.10) фактически определяет **единую** функцию $\varphi \in H(\Omega)$ на $\Omega = \Omega_g$ (см. формулу (1.19)), т.е. φ_α является аналитическим продолжением φ_0 из Π_0^o в Π_α^o. Поскольку $(x_0, +\infty) \subset \Pi_\alpha^o \cap \Pi_0^o$ для некоторого $x_0 > 0$, достаточно показать, что

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_0(x) \quad \text{для} \quad x > x_1 \ge x_0. \tag{2.11}$$

Для этого рассмотрим для $\rho > 1$ путь

$$\gamma_\alpha^r = \{z = r\exp(it\tan\alpha) \in \mathcal{R}^* : t \in [0, \log r]\},$$

соединяющий точку $w_{0,r} = r$ с $w_{\alpha,r}$, и для $x > x_0$ положим

$$J_\alpha^r(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\alpha^r} g(\zeta)\zeta^{-x-1}\, d\zeta.$$

Тогда по (2.10) и (2.2), условие (2.11) будет следовать тогда и только тогда, когда $J_\alpha^r(x) \to 0$ при $r \to \infty$. Действительно, по условию $g \in \mathcal{B}_{loc}(\mathcal{R}^*)$ неравенство (см. (1.18)) $|g(\zeta)| < |\zeta|^\sigma$, $\zeta \in l_{\alpha,r}$ выполняется при $r > r_1$ с $\sigma\cos\alpha = \delta_{g,|\alpha|} + 1$. Кроме того, $|\zeta^{-x-1}| = |\zeta|^{-x-1}$, так что $|J_\alpha^r(x)| < |\tan\alpha| r^{\sigma - x}\log r \to 0$ при $r \to \infty$, если $x > x_1 = \max\{\sigma, x_0\}$. Это завершает построение функции φ.

Для завершения доказательства Леммы 2 остаётся ассоциировать с φ элемент f_φ вида (3), где $n_0 > \mu_g(0)$. Его радиус сходимости будет ≥ 1, поскольку $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$. Для условия $f_\varphi \in H(\mathcal{R}_0)$, выберем $n_\alpha > \max\{n_0, \mu_g(\alpha)\}$ для $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ и применим формулу (2.10) с $z = n \in \mathbb{N}$. Учитывая (2.1) с $w = w_{\alpha,r}$ и (2.4) с $r = \infty$, для $z \in \mathcal{D}_0$ (ср. с (1.8)) получим

$$f_\varphi(z) - \sum_{n=n_0}^{n_\alpha - 1} \varphi(n) z^n = f_{\varphi,r}(z) + \int_{L_\alpha^r} g(\zeta) K(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{2.12}$$

где $K(\zeta, z) = (2\pi i)^{-1}(z/\zeta)^{n_\alpha}(\zeta - z)^{-1}$ и

$$f_{\varphi,r}(z) = \int_{l_\alpha^-} g^-(\zeta) K(\zeta, z)\, d\zeta + \int_{l_\alpha^+} g^+(\zeta) K(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Отметим, что функция $f_{\varphi,r}(z)$, определённая для $z \in \mathcal{D}_0$, допускает однозначное аналитическое продолжение в $\overline{\mathbb{C}} \setminus D_r^+$, а второй интеграл в (2.12) сходится локально равномерно в $(L_\alpha^r)^c$ согласно оценке (2.9). Поскольку функция f_φ (так же как φ) не зависит от выбора параметра r, то для каждого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ имеем $f_\varphi \in H((L_\alpha)^c)$, т.е. $f_\varphi \in H(\mathcal{R}^*)$. Применяя теорему и формулу Коши к (2.12), получим (ср. с (1.8)), что $\Lambda f_\varphi = g$ на L_α^r, и по теореме единственности, $\Lambda f_\varphi = g$ на $\mathcal{R}^*$. Лемма 2 доказана.

2.2. Доказательство Леммы 3 : Исключим тривиальный случай $\varphi = 0$, для которого $f_\varphi = 0$. Тогда условие $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$ влечёт $H_\varphi(0) \in (-\infty, 0]$, так что ряд (3) сходится по крайней мере в $\mathcal{D}_0$. Без ограничения общности, в Лемме 3 возьмём множество $I = \Omega^c$ самосопряжённым, выпуклым и $(-\infty, 0] \subset I$ (см. Замечание 3). Это означает, что опорная функция $K = K_I$ неотрицательна и **чётна на $\mathbb{R}$**, будучи конечной и непрерывной на $(-\pi/2, \pi/2)$. Из (1.16)

$$K(\alpha) \geq K(0)\cos\alpha \quad \text{для} \quad \alpha \in [0, \pi/2). \tag{2.13}$$

Теперь фиксируем число $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\Pi(0, h_0) \subset \Omega$, где $h_0 := n_0 - 1/2 = K(0) + \delta$ с $\delta > 0$. Далее, для любого $\alpha \in [0, \pi/2)$ выберем $h_\alpha = h_{-\alpha} := K(\alpha) + \delta$ так, чтобы $\Pi(\pm\alpha, h_\alpha) \subset \Omega$. Тогда по (2.13)

$$x_\alpha := h_\alpha / \cos\alpha \geq h_0 (= x_0), \quad \alpha \in [0, \pi/2). \tag{2.14}$$

Очевидно, замкнутая область $\overline{\Omega}_\alpha = \Pi(\alpha, h_\alpha) \cup \Pi(0, h_0) \cup \Pi(-\alpha, h_{-\alpha})$ является подобластью Ω. Полагая $\varepsilon = \pi/2 - \alpha > 0$ и обозначая

$$\Lambda_\varepsilon = \{x_\alpha + \rho e^{i\theta} : \ \rho \geq 0, \quad |\theta| \leq \pi - \varepsilon\},$$

находим, что $\overline{\Omega}_\alpha = \Lambda_\varepsilon \cup \Pi(0, h_0)$.

Пусть γ_α – граница $\overline{\Omega}_\alpha$ с естественной ориентацией, индуцированной порядком мнимых частей её точек, в частности, γ_0 - мнимая ось. Для $\alpha \neq 0$ положим $\zeta_\alpha = x_0 + iy_\alpha$ с $y_\alpha := (x_\alpha - x_0)\cot\alpha > 0$ по (2.14), и $\rho_\alpha = |\zeta_\alpha - x_\alpha|$, Рассмотрим интервал $\gamma_0 = [\bar{\zeta}_\alpha, \zeta_\alpha] \subset \partial\Pi(0, h_0)$ и лучи $\gamma_{\pm\alpha} = \{x_\alpha - \rho e^{\mp i\varepsilon} : \ \rho \geq \rho_\alpha\}$, лежащие на $\partial\Lambda_\varepsilon \cap \gamma_\alpha$. Очевидно, $\gamma_0 \cap \gamma_{-\alpha} = \bar{\zeta}_\alpha$, $\gamma_0 \cap \gamma_\alpha = \zeta_\alpha$, $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha \cup \gamma_0 \cup \gamma_{-\alpha}$. Воспользуемся интегральным представлением элемента f_φ вида (3) для функции φ из Леммы 3, которым систематически пользовался Линделёф (известным теперь как **формула Линделёфа**) в проблемах аналитического продолжения степенных рядов и оценок роста продолженной функции (см. [11], [12], а также [7], стр. 340 – 343 и [4], Теорема 7.3. VIII). В нашем случае убедимся, что для z в подходящем подмножестве из $\mathcal{D}_0 \setminus [0, 1)$

$$f_\varphi(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(n) z^n = -\int_{\Gamma_\alpha} \varphi(\zeta)\mathcal{L}(\zeta, z)\, d\zeta := J(z), \tag{2.15}$$

где $\mathcal{L}(\zeta, z) = z^\zeta[\exp(2\pi i\zeta) - 1]^{-1}$ – ядро Линделёфа с $z^\zeta = \exp(\zeta \log z)$. Очевидно, тотально непрерывная $\mathcal{L}(\zeta, z)$ является голоморфной функцией от ζ на $\mathbb{Z}^c$ (с простыми полюсами на $\mathbb{Z}$) и аналитической от z на $\mathcal{R}_0 \setminus [0, 1)$. Фактически, (2.15) следует из теоремы о **вычетах**, поскольку вычет подынтегральной функции $g(\zeta, z) = \varphi(\zeta)\mathcal{L}(\zeta, z)$ в точках $\zeta = n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ равняется $(2\pi i)^{-1}\varphi(n)z^n$. Таким образом, чтобы подтвердить (2.15) для некоторой $z \in \mathcal{D}_0$, достаточно показать, что

$$\int_{L_{\alpha,m}} g(\zeta, z)\, d\zeta \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \tag{2.16}$$

где $L_{\alpha,m} = \partial D_{r_m}(x_\alpha) \cap \overline{\Omega}_\alpha$ для некоторой последовательности $r_m \to +\infty$. Фактически мы берём $r_m = m - x_\alpha - 1/2$ для $m \geq m_\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, где $x_\alpha + 1/2 \leq m_\alpha \in \mathbb{N}$. Чтобы обеспечить (2.16) и найти область локально равномерной сходимости интеграла J_α, представляющего аналитическое продолжение f_φ, оценим подынтегральную функцию $g(\zeta, z)$.

Отметим сперва, что $\Lambda_\varepsilon \subset \overline{\Omega}_\alpha \subset \Delta_{2(\pi-\varepsilon)}$, и по условию $\sigma_{\varphi,\Omega} = 0$

$$\log|\varphi(\zeta)| = o(|\zeta|) \quad \text{при } \zeta \to \infty, \quad \zeta \in \overline{\Omega}_\alpha. \tag{2.17}$$

Далее, выберем $0 < \delta < \min\{1/4, y_\alpha\}$ для $\alpha \neq 0$ и обозначим $\mathbb{D}_\alpha = \bigcup_{m=m_\alpha}^{\infty} D_\delta(m)$.
Пусть $\zeta - x_\alpha = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$ для $\zeta \in \Lambda_\varepsilon$. Существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\left|[\exp(2\pi i\zeta) - 1]^{-1}\right| < c\exp(\pi\eta - \pi|\eta|) \tag{2.18}$$

для $\zeta \in (\mathbb{D}_\alpha)^c$. Полагая $z = re^{it} \in \mathcal{R}_0 \setminus [0, 1)$ и $\zeta \in (\mathbb{D}_\alpha)^c$, получим

$$|\mathcal{L}(\zeta, z)| < c|z|^{x_\alpha}\exp\{\xi\log r + (\pi - t)\eta - \pi|\eta|\}. \tag{2.19}$$

Пусть теперь $\beta \in (0, \pi)$ и как выше, $\varepsilon = \pi/2 - \alpha > 0$. Фиксируем ε, считая $2\varepsilon < \min\{\pi - \beta, 1\}$, т.е. $2\alpha > \min\{\beta, \pi - 1\}$. В $\mathcal{R}_0$ рассмотрим замкнутые области

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{z \in \mathcal{R}_0 :\ \log z \in (-\varepsilon^2, +\infty) \times (\pi\varepsilon, 2\pi - \pi\varepsilon)\},$$

$$\mathfrak{R}_\beta = \{z \in \mathcal{R}_0 :\ \log z \in \Delta_\beta\}.$$

Множество $\mathcal{C}_{\varepsilon,\beta} = \mathcal{A}_\varepsilon \cup \mathfrak{R}_\beta$ будет односвязной замкнутой областью в $\mathcal{R}_0$, и объединение всех областей $\mathfrak{R}_\beta$ совпадает с $\mathcal{R}^*$.
Пусть теперь $\zeta \in \overline{\Omega}_\alpha \setminus \mathbb{D}_\alpha$ и $z = re^{it} \in \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{D}_0$. Тогда $|\pi - t| \leq \pi(1 - \varepsilon)$, и из (2.19) вытекает

$$|\mathcal{L}(\zeta, z)| < cr^{x_\alpha}\exp\{\varepsilon^2|\xi| - \pi\varepsilon|\eta|\} < cr^{x_\alpha}\exp(-\varepsilon^2\rho). \tag{2.20}$$

Из (2.17) и (2.20), для $\zeta \in L_{\alpha,m}$

$$|g(\zeta, z)| \leq c\exp\{-[\varepsilon^2 + o(1)]r_m\} \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{2.21}$$

Поскольку $L_{\alpha,m} \subset \overline{\Omega}_\alpha \setminus \mathbb{D}_\alpha$ и $|L_{\alpha,m}| < 2\pi r_m$, то (2.21) доказывает (2.16) и, следовательно, формулу (2.15) для $z \in \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{D}_0$. Здесь интеграл $J(z)$ сходится локально равномерно в $\mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{D}_0$ в смысле главного значения Коши, но фактически он сходится абсолютно и локально равномерно не только на $\mathcal{A}_\varepsilon$, но на целом $\mathcal{C}_{\varepsilon,\beta}$. Будем доказывать это, оценивая одновременно $J(z)$ для $z \in \mathfrak{R}_\beta$. Положим $J = J_{-\alpha} + J_0 + J_\alpha$ с интегралами, соответственно, вдоль $\gamma_{-\alpha}$, γ_0 и γ_α.
Пусть сначала $\zeta \in \gamma_{\pm\alpha}$ и $z = re^{it} \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Тогда в (2.19) опять $|\pi - t| \leq \pi(1 - \varepsilon)$, но на этот раз $\xi\log r \leq 0$ для $r \geq 1$, поскольку $\xi \leq 0$. Таким образом, неравенство (2.20) сохраняется и вместе с (2.17) для некоторой постоянной $k > 0$ получим

$$|g(\zeta, z)| \leq kr^{x_\alpha}\exp\{-0.5\varepsilon^2|\zeta|\}, \quad \zeta \in \gamma_{\pm\alpha}, \quad z \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

Это доказывает локально-равномерную сходимость на $\mathcal{A}_\varepsilon$ интегралов $J_{\pm\alpha}$, а также J, поскольку J_0 – конечный интеграл, являющийся голоморфной функцией на Δ_∞. Таким образом, J голоморфна по крайней мере внутри $\mathcal{A}_\varepsilon$ и представляет продолжение элемента f_φ вне единичного круга.

Рассмотрим теперь случай $\zeta \in \gamma_{\pm\alpha}$ и $z \in \mathfrak{R}_\beta$, так что $\zeta = x_\alpha - \rho e^{\mp\varepsilon}$, $\rho \geq \rho_\alpha$ и $\log z = \tau e^{i\psi}$ с $|\psi| \leq \beta/2$. Из (2.17) и (2.19) следует, что

$$|g(\zeta, z)| \leq c\tau^{x_\alpha} \exp\{-\rho\tau\cos(\varepsilon + \beta/2)\},$$

подтверждая локально-равномерную сходимость на $\mathfrak{R}_\beta$ интегралов $J_{\pm\alpha}$, и

$$|J_{\pm\alpha}(z)| = o(|z|^{x_\alpha}) \quad \text{при} \quad z \in \mathfrak{R}_\beta, \quad z \to \infty. \tag{2.22}$$

Остаётся оценить интеграл $I_0(z)$ для $z = re^{it} \in \mathfrak{R}_\beta$, т.е. при $|t| \leq (\tan\frac{\beta}{2})\log r$. Для $\zeta \in \gamma_0$ положим $\zeta = x_0 + i\tau$ с $\tau \in [-y_\alpha, y_\alpha]$ и отметим, что

$$\left|z^\zeta\right| \leq r^{x_0}\exp(y_\alpha|t|) \leq r^\sigma, \quad \sigma = x_0 + y_\alpha\tan(\beta/2).$$

Из (2.19), используя ограниченность φ на γ_0, находим $|I_0(z)| \leq O(|z|^\sigma)$ при $z \in \mathfrak{R}_\beta$, $z \to \infty$. Эта оценка вместе с (2.22) доказывает, что интеграл J имеет конечную степень на $\mathfrak{R}_\beta$. Таким образом, аналитическое продолжение элемента f_φ имеет локально-конечную степень в $\mathcal{R}^*$. Лемма 3 доказана.

ABSTRACT. The aim of this paper is to investigate the problem of efficient analytic continuation of power series (analytic elements), in terms of their coefficients, to some concrete Riemann surfaces. We use some modifications of the classical "coefficient function" method, related to approximation methods. In this way we receive new results of necessary-sufficient character, extending the classical results of Faber, Leau, Wigert, Lindelōf, Ostrovski and other authors on analytic continuation onto Riemann surfaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. U. Arakelian, "On efficient analytic continuation of power series", Math. USSR Sbornik, vol. 52, no. 1, pp. 21 – 39, 1985.
2. N. U. Arakelian, "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in Approximation Theory, pp. 295 – 313, Springer Verlag, New York, 1992.
3. Н. У. Аракелян, "Эффективное аналитическое продолжение степенных рядов с векторнозначными коэффициентами", Изв. НАН Армении. Математика, том 30, № 4, стр. 25 – 48, 1995.
4. L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung, Springer, Berlin, 1955.
5. R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.

6. T. Carleman, "Sur un théorème de Weierstrass", Arkiv Math., Astr. Fys., vol. 20, pp. 1 – 5, 1927.
7. P. Dienes, The Taylor Series, Clarendon Press, Oxford, 1931; reprint : Dover, NY, 1957.
8. O. Forster, Riemannsche Flächen, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
9. J. Hadamard, "Essai sur létude des fonctions définies par un développement de Taylor", J. Math. Pures Appl. vol. 8, no. 4, pp. 101 – 186, 1892.
10. М. В. Келдыш, "О рядах рациональных дробей", Докл. АН СССР, том 94, № 3, стр. 377 – 380, 1954.
11. E. Lindelöf, "Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor", J. Math. Pures Appl. vol. 9, no. 5, pp. 213 – 221, 1903.
12. E. Lindelöf, Le Calcul des Résidus et Ses Applications à la Théorie des Fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
13. N. Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1940.

12 июня 2001

Институт математики
НАН Армении
E-mail : arakel@instmath.sci.am

Fachbereich Mathematik, Universität Oldenburg,
Oldenburg, Germany
E-mail : schmieder@mathematik.uni-oldenburg.de

ПОДСИСТЕМЫ СИСТЕМЫ ХААРА КАК КВАЗИБАЗИСЫ В ВЕСОВЫХ L^p–ПРОСТРАНСТВАХ

К. С. Казарян, А. Торчинский

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

В статье доказано, что если подсистема $\{h_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ системы Хаара полна в линейном пространстве S_G всех измеримых, почти всюду конечных функций, заданных на измеримом множестве G, где $|G| > 0$, то существует ограниченная функция m такая, что $\{mh_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является квазибазисом в каждом из пространств L_G^p, $1 \le p < \infty$ с одной и той же допустимой системой. Та же проблема для системы $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ дает совершенно другую картину. В статье рассматривается тот же вопрос для системы Уолша–Пэли.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [9] описаны те подмножества отрезка $[0, 1]$, на которых подсистемы системы Хаара полны. Обозначая через S_D линейное пространство всех измеримых, п. в. конечных функций на измеримом множестве D, приведём этот результат.

Теорема, [9]. Пусть $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ – подсистема системы Хаара, и пусть E_n обозначает носитель функции ϕ_n, $n = 1, 2, \dots$. Тогда Φ полна в S_D, $|D| > 0$, $D \subset [0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$|D \setminus E| = 0, \quad E = \limsup_n E_n.$$

Те же авторы в [10] доказали, что если система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в S_D и $|D| > 0$, то существует ограниченная измеримая функция m такая, что система $\{mf_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L_D^2. Аналогичные доводы используются в [8] для доказательства полноты $\{f_n\}$ в пространстве L_D^p с некоторым весом.

В §3 мы доказываем более сильную версию Теоремы :

Исследование первого автора поддержано DGICYT грантом № PB97-0030.

Основная Теорема. Пусть $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ — подсистема системы Хаара, а E_n – носитель функции ϕ_n. Если

$$E = \limsup_n E_n \quad \text{и} \quad |E| > 0, \tag{1}$$

то существует ограниченная измеримая функция M, $0 \le M \le 1$ такая, что система $\{M\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является квазибазисом в пространстве L^p_E для любого $1 \le p < \infty$.

Общая схема доказательства этой теоремы следует из [8] и основывается на конкретных свойствах системы Хаара. Для других классических систем иллюстрация аналогичных свойств зависит от наличия критериев полноты для подсистем в смысле сходимости по мере.

Интересно сравнить выше сформулированный результат с тем, что мы имеем для системы $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, при предположении

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = +\infty. \tag{2}$$

Согласно классической теоремы Мюнца, χ полна в $L^p_{[0,1]}$ для любого p, $1 \le p < \infty$. Следуя общей схеме доказательства Теоремы 2 из [8], мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ и выполняется (2). Тогда существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что система χ является квазибазисом суммирования по подпоследовательностям $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ во всех пространствах $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < \infty$.

Как показано ниже, этот результат не может быть усилен :

Теорема 2. Пусть $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, и пусть выполнено условие (2). Тогда для любого p, $1 \le p < \infty$, измеримого множества $G \subset [0, 1]$, $|G| > 0$, и любой функции $M \in L^p_G$, система $\{M(x)x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$ не является квазибазисом в L^p_G.

Из результатов работ [3], [4] следует, что данная система $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ полна в S_G, $G \subset [0, 1]$, $|G| > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (2).

Задача описания подсистем тригонометрической системы и системы Уолша, которые полны в S_T, где T – тор в первом случае и интервал $[0, 1]$ во-втором, остаётся открытой. Тем не менее существуют достаточные условия полноты для подсистем Уолша и тригонометрической системы, которые позволяют доказать аналоги основной Теоремы в этих двух случаях.

Будем говорить, что подсистема $W_\Omega = \{w_k, \ \ k \in \Omega\}$ системы Уолша–Пэли удовлетворяет условию (P), если

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{l : n_i \le l \le m_i\} \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{i\to\infty}}(m_i - n_i) = +\infty. \tag{P}$$

В [11] доказано, что из условия (P) следует полнота подсистемы $\tilde{W}_\Omega$ в пространстве $S_{[0,1]}$. Из условия (P) следует аналогичный результат для любой подсистемы $T_\Omega = \{\cos nx, \sin nx\}_{n\in\Omega}$ тригонометрической системы. Полное доказательство последнего утверждения будет приведено в другой публикации. В работе [8] можно найти некоторые другие результаты, см. также [2], [6].

Теорема 3. Пусть $W_\Omega = \{w_k, \ k \in \Omega\}$ – подсистема системы Уолша–Пэли, сохраняющая порядок между элементами, причём Ω удовлетворяет условию (P). Тогда существует ограниченная измеримая функция M, $0 \le M \le 1$ такая, что $\{Mw_k : k \in \Omega\}$ является квазибазисом в пространстве $L^p_{[0,1]}$ при $1 \le p < \infty$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Функции Хаара можно определить следующим образом : пусть для любого $t \in [0,1]$, $h_1(t) = 1$, а для $k = 0,1,2,\ldots;\ j = 1,2,\ldots,2^k$

$$h_k^{(j)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если} \quad \frac{2j-2}{2^{k+1}} < t < \frac{2j-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2}, & \text{если} \quad \frac{2j-1}{2^{k+1}} < t < \frac{2j}{2^{k+1}}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и пусть $h_n = h_k^{(j)}$ для $n = 2^k + j$. Носителем функции Хаара является множество, где она отлична от нуля. Простая функция g называется **d-простой**, если она является линейной комбинацией характеристических функций двоичных интервалов.

Система Уолша–Пэли $\{w_n(t)\}$ определяется с помощью функций Радемахера :

$$r_k(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^k \pi t, \quad t \in [0,1], \quad k \in \mathcal{N},$$

где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Любое $n \in \mathcal{N}$ представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{m+1} \delta_k \cdot 2^{k-1}, \quad \delta_k = 0 \text{ или } 1, \quad \delta_{m+1} = 1,$$

где m – наибольшее неотрицательное целое, для которого $2^m \leq n$. Положим

$$w_n(t) = \prod_{k=1}^{m+1} [r_k(t)]^{\delta_k}, \quad w_0(t) \equiv 1.$$

Для заданного банахова пространства B через B^* будем обозначать его сопряжённое пространство. Система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ элементов пространства B **полна в** B, если замыкание множества всех конечных линейных комбинаций элементов из X совпадает с B. Система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является **базисом Шаудера** для B, если для любого $x \in B$ существует единственный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$, сходящийся к x по норме пространства B. Существование базиса Шаудера эквивалентно следующему условию [1] : X полна в B, существует **сопряженная система**

$$X^* = \{x_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$$

такая, что

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij}, \quad i \in \mathcal{N}, \quad j \in \mathcal{N},$$

и для всех $x \in B$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме пространства B. Опуская условие единственности коэффициентов, приходим к определению квазибазиса. Точнее, система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является **квазибазисом** для B тогда и только когда, когда существует система $\{y_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$ такая, что для всех $x \in B$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме пространства B. Такое обобщение базиса Шаудера было дано в [5], см. также [12], стр. 278, 766. Будем говорить, что система $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ является **квазибазисом суммирования по последовательностям** для B, если существует подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и система $\{y_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$ такие, что для всех $x \in B$ последовательность $\sum_{n=1}^{m_k} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме пространства B при $k \to \infty$. Система $\{y_n^* : n = 1, 2, \ldots\} \subset B^*$ называется допустимой системой.

Пространство S_E всех измеримых, п. в. конечных функций, определённых на измеримом множестве E, $|E| > 0$, будет линейным метрическим пространством, если определить расстояние $\rho(f,g)$ между двумя элементами $f, g \in S_E$ по формуле

$$\rho(f,g) = \int_E \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx.$$

Как и в случае банахова пространства, можно определить понятие полноты системы в S_E (см. [7] для результатов, касающихся полноты ортогональных систем).

Наконец, через χ_G обозначим характеристическую функцию измеримого множества G :

$$\chi_G(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in G, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

В нижеследующих леммах $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ есть подсистема системы Хаара, удовлетворяющая условию (1), $1 < p < \infty$ и

$$g = \sum_{i=1}^{2^n} \gamma_i \chi_{\Delta_n^i}, \quad \Delta_n^i = \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad i = 1, \ldots, 2^n.$$

Лемма 1. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и натурального числа m, существуют конечная сумма G двоичных интервалов и Φ–многочлен $P = \sum\limits_{k=m}^{l} b_k \phi_k$ такие, что

$$|G| < \varepsilon; \quad \{x : P(x) \neq 0\} \subset \{x : g(x) \neq 0\},$$

$$g(x) = P(x) \quad \text{для} \quad x \in D \cap E, \quad \text{где} \quad D = [0, 1] \setminus G,$$

и для всех $1 \le r \le p$

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{k=m}^{s} b_k \phi_k \right\|_{L^r_{D\cap E}} : m \le s \le l \right\} < \varepsilon + \|g\|_{L^r_{D\cap E}}. \tag{3}$$

Доказательство : Пусть $\{\nu_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{np} \nu_n\right)^{1/p} \|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Построим P как конечную сумму Φ-многочленов f_j с непересекающимися носителями, и начнём с f_1. Пусть $N \in \mathcal{N}$ – такое, что $2^{-N} < \varepsilon/2$, и пусть $\nu \in \mathcal{N}$ удовлетворяет условию

$$2^N \cdot \|g\|_{L^p_{\Delta_\nu^i}} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \nu > \max(n, N) \quad \text{для каждого } i \ (1 \le i \le 2^\nu). \tag{5}$$

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на 2^ν двоичных интервалов длины $2^{-\nu}$. Из условия (5) получаем, что каждое Δ_n^i $(1 \le i \le 2^n)$ будет разбито на $2^{\nu-n}$ интервалов. Положим

$$g(x) = \sum_{i=1}^{2^\nu} g_i(x), \quad g_i(x) = \chi_{\Delta_\nu^i}(x) \cdot g(x). \tag{6}$$

Построим Ф-многочлен f_1^1 как первое приближение к g_1 на множестве $E \cap \Delta_\nu^1$. Можно предположить, что $|E \cap \Delta_\nu^1| > 0$, в противном случае переходим к построению приближения для g_2. Пусть ϕ_{m_i} $(m_i \geq m,\ 1 \leq i \leq k_0)$ – некоторые функции из подсистемы Ф с непересекающимися носителями $\Delta_{m_1}, \dots, \Delta_{m_{k_0}}$, $\Delta_{m_i} \subset \Delta_\nu^1$ $(1 \leq i \leq k_0)$ такими, что

$$|B_0| \equiv \left|E \cap \Delta_\nu^1 - \bigcup_{i=1}^{k_0} \Delta_{m_i}\right| < \nu_1 |E \cap \Delta_\nu^1|.$$

Положим

$$f_1^1(x) = \gamma_1 \sum_{i=1}^{k_0} a_i \phi_{m_i}, \quad a_i = \|\phi_{m_i}\|_\infty^{-1}.$$

Таким образом, f_1^1 является ступенчатой функцией, принимающей значения γ_1 и $-\gamma_1$ на множествах B_{11} и B_{12}, соответственно, и по крайней мере для одного $s = 1, 2$ имеем

$$\left|E \cap B_{1s} \cap \bigcup_{i=1}^{k_0} \Delta_{m_i}\right| > \frac{1}{2}(1 - \nu_1)|E \cap \Delta_\nu^1|. \tag{7}$$

Мы можем предположить, что (7) выполняется для $s = 1$, в противном случае мы можем изменить знаки коэффициентов a_i $(1 \leq i \leq k_0)$. Отметим, что B_{11} и B_{12} суть суммы некоторых двоичных интервалов.

Теперь построим функцию f_2^1, которая равна нулю на B_{11} и такая, что $f_1^1 + f_2^1$ принимает значение γ_1 на множестве, пересечение которого с $E \cap \Delta_\nu^1$ имеет меру, приблизительно равную $\frac{3}{4}|E \cap \Delta_\nu^1|$. Возьмём функции ϕ_{m_l} $(k_0 + 1 \leq l \leq k_1)$ из подсистемы Ф системы Хаара с непересекающимися носителями $\Delta_{m_{k_0+1}}, \dots, \Delta_{m_{k_1}}$ $(m_{k_0} < m_{k_0+1} < \dots < m_{k_1})$ такими, что $\{\Delta_{m_{k_0+1}}, \dots, \Delta_{m_{k_1}}\}$ лежат в B_{12} и

$$\left|E \cap B_{12} - \bigcup_{i=k_0+1}^{k_1} \Delta_{m_i}\right| < \nu_2 |E \cap B_{12}|.$$

Положим

$$f_2^1 = \gamma_1 \sum_{i=k_0+1}^{k_1} a_i \phi_{m_i},$$

где $a_i = 2\|\phi_{m_i}\|_\infty^{-1}$ при $k_0 < i \leq k_1$. Изменяя (если необходимо) знаки коэффициентов, получаем

$$\left|E \cap B_{12} \cap \bigcup_{k_0+1}^{k_1} \Delta_{m_l}\right| > \frac{1}{2}(1 - \nu_2)|E \cap B_{12}|.$$

Очевидно, f_2^1 является ступенчатой функцией, принимающей значения $2\gamma_1$ и $-2\gamma_1$ на открытых множествах B_{21} и B_{22}, соответственно. Сумма $f_1^1 + f_2^1$

принимает значение γ_1 на $B_{11} \cup B_{21}$, так как B_{21} и B_{22} суть подмножества множества B_{12}. Кроме того

$$|E \cap (B_{11} \cup B_{21})| = |E \cap B_{11}| + |E \cap B_{21}| \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}(1-\nu_1)|E \cap \Delta_\nu^1| + \frac{1}{4}(1-\nu_1)(1-\nu_2)|E \cap \Delta_\nu^1| =$$
$$= \frac{1}{4}(1-\nu_1)(3-\nu_2)|E \cap \Delta_\nu^1| > \left[\frac{3}{4} - (\nu_1+\nu_2)\right] |\Delta_\nu^1|.$$

После N шагов, где N было определено в (3), получаем функции f_i^1 $(1 \leq i \leq N)$. Пусть

$$f_1 = \sum_{i=1}^{N} f_i^1 = \gamma_1 \cdot \sum_{i=1}^{k_{N-1}} a_i \phi_{m_i} \tag{8}$$

и

$$D_1 = \left\{ x \in E : \sum_{i=1}^{N} f_i^1(x) = \gamma_1 \right\}. \tag{9}$$

Ясно, что

$$|D_1| = \left| E \cap \bigcup_{i=1}^{N} B_{i1} \right| > \left[(1-2^{-N}) - \sum_{i=1}^{N} \nu_i \right] |E \cap \Delta_\nu^1| > |E \cap \Delta_\nu^1|(1-\varepsilon),$$

и f_1 равна нулю вне интервала Δ_ν^1. Кроме значения γ_1 единственно возможными значениями частичных сумм $\Phi-$многочлена f_1 являются 0 и $-\gamma_1 2^{k-1}$ $(1 \leq k \leq N)$. Кроме того, частичная сумма функции f_1 может равняться $-\gamma_1 2^{k-1}$ на множествах с мерой, меньшей чем $\nu_{k+1}|\Delta_{11}|$ $(1 \leq k \leq N-1)$, и $-\gamma_1 2^{N-1}$ – на множестве с мерой, меньшей чем $2^{-N}|\Delta_\nu^1|$. Таким образом, если положить

$$G_1 = B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{N-1} (B_{i2} \setminus B_{i+11}) \cup B_{2N},$$

то можно легко показать, что

$$D_1 = (E \cap \Delta_\nu^1) \setminus G_1, \quad |G_1| < \left(\sum_{i=1}^{N} \nu_i \right) |\Delta_\nu^1| + \frac{\varepsilon}{2}|\Delta_\nu^1| < \varepsilon |\Delta_\nu^1|. \tag{10}$$

Из замечания о значениях частичных сумм функции f_1 и (4), (5) получаем

$$\sup_{1<s\leq k_{N-1}} \left\| \sum_{i=1}^{s} \gamma_1 a_i \phi_{m_i} \right\|_{L^p_{\Delta_\nu^1}} \leq$$

$$\leq |\gamma_1| \left\{ |\Delta_\nu^1| + \sum_{j=1}^{N-1} 2^{p(j-1)} \nu_{j+1} |\Delta_\nu^1| + 2^{p(N-1)} 2^{-N} |\Delta_\nu^1| \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq 2^{N/p'} \|g_1\|_{L^p_{\Delta^1_\nu}} < \varepsilon, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{11}$$

В конструкции Ф-многочлена функции f_1 было использовано только условие (1), которое остаётся справедливым и после снятия из подсистемы Ф конечного числа элементов. Таким образом, получаем, что для каждой функции g_j $(1 \leq j \leq 2^\nu)$ можно найти Ф-многочлен

$$f_j = \sum_{i=\mu_{j-1}+1}^{\mu_j} a_i \phi_{m_i}, \quad m = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_{2^\nu}$$

такой, что

$$(a) \qquad f_j(x) = g_j(x), \quad x \in D_j = \left(E \cap \Delta^j_\nu\right) \setminus G_j, \quad |G_j| < \varepsilon |\Delta^j_\nu|.$$

Кроме того, $D_j \subset \Delta_{1j}$ $(1 \leq j \leq 2^\nu)$ суть суммы двоичных интервалов, а f_j обращается в нуль вне Δ^j_ν, причём

$$(b) \qquad \sup_{\mu_{j-1} < s \leq \mu_j} \left\| \sum_{i=\mu_{j-1}+1}^{s} a_i \phi_{m_i} \right\|_{L^p_{\Delta^j_\nu}} < \varepsilon.$$

Пусть

$$G = \bigcup_{j=1}^{2^\nu} G_j, \quad P = \sum_{j=1}^{2^\nu} f_j = \sum_{i=\mu_0+1}^{\mu_{2^\nu}} b_i \phi_{m_i} = \sum_{k=m}^{l} b_k \phi_k.$$

Тогда, в силу (a) и (b), $P(x) = g(x)$ для $x \in E \setminus G$, $|G| < \varepsilon$. Для любых $s, m \leq s \leq l$, можно найти j, $1 \leq j \leq 2^\nu$, такое, что $\mu_{j-1} \leq s < \mu_j$. Таким образом, имеем

$$\sum_{k=m}^{s} b_k \phi_k = \sum_{k=1}^{j-1} f_k + \sum_{i=\mu_{j-1}+1}^{s} a_i \phi_{m_i},$$

и согласно (a) и (b) непосредственно получаем оценку (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. **Для заданного**

$$K(x) = \sum_{j=1}^{2^n} \omega_j \chi_{\Delta^j_k}, \quad \omega_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, 2^k,$$

каждому положительному числу ε **и натуральному числу** m, **соответствуют конечная сумма** G **двоичных интервалов и Ф–многочлен** $P = \sum_{k=m}^{l} b_k \phi_k$ **такие, что** $|G| < \varepsilon$, $\{x : P(x) \neq 0\} \subset \{x : g(x) \neq 0\}$, $g(x) = K(x)P(x)$ **для** $x \in D \cap E$, **где** $D = [0,1] \setminus G$, **и для всех** $1 \leq r \leq p$ **имеем**

$$\sup \left\{ \left\| K \sum_{k=m}^{s} b_k f_k \right\|_{L^r_{D \cap E}} : m \leq s \leq l \right\} < \varepsilon + \|g\|_{L^r_{D \cap E}}.$$

Доказательство : Не умаляя общности можно предположить, что $n \geq k$. Применим Лемму 1 к функциям $[K]^{-1} g\chi_{\Delta_k^j}$, $1 \leq j \leq 2^k$. При подходящем выборе ε и чисел m, построенные многочлены не будут иметь общих элементов. Носители функций Хаара этих многочленов будут лежать соответственно в $\chi_{\Delta_k^j}$, $1 \leq j \leq 2^k$. Следовательно, умножение этих многочленов на K действует как умножение коэффициентов соответствующих многочленов на ω_j. Следовательно, сумма построенных многочленов, умноженная на K, доставляет требуемый многочлен. Лемма 2 доказана.

Доказательство Основной теоремы : Выберем $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ так, чтобы

$$\|h_i\|_{L_G^{n+1}} < \frac{d_n}{3}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{где} \quad |G| < \delta_n, \quad d_n = 2^{-n-2}, \quad n \in \mathcal{N}. \tag{12}$$

Построим двойную последовательность $\{P_k^{(j)}\}_{k=1,j=k}^{\infty\ \ \infty}$ Φ-многочленов

$$P_k^{(j)} = \sum_{\mu_{k-1}(j)+1}^{\mu_k(j)} a_i \phi_i$$

с $0 \leq \mu_0(1) < \mu_1(1) = \mu_0(2) < \mu_1(2) < \cdots < \mu_0(j) < \mu_1(j) < \cdots < \mu_j(j) = \mu_0(j+1) < \ldots$ и измеримую функцию $0 \leq M(x) \leq 1$, удовлетворяющую следующим условиям :

$$(\alpha) \qquad \left\| h_k - M \sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)} \right\|_{L_E^{n+1}} \leq 2d_n, \quad k, n \in \mathcal{N}, \quad k \leq n,$$

$$(\beta) \qquad \sup_s \left\{ \left\| M \sum_{i=\mu_{k-1}(n)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L_E^n} : s \leq \mu_k(n) \right\} \leq d_n, \quad k < n,$$

$$(\gamma) \qquad \sup_s \left\{ \left\| M \sum_{i=\mu_{n-1}(n)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L_E^{n+1}} : s \leq \mu_n(n) \right\} \leq d_n + \|h_n\|_{L_E^{n+1}}.$$

Требуемая функция $M(x)$ является бесконечным произведением некоторых положительных функций $M_i(x)$.

Применим Лемму 1 при $p = 2$, $g = h_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/2 \min\{d_1, \delta_1\}$ и $m = 1$. Тогда можно найти множество $G_1^{(1)}$, $|G_1^{(1)}| < \varepsilon_1$ и Φ-многочлен

$$P_1^{(1)} = \sum_{i=\mu_0(1)+1}^{\mu_1(1)} a_i \phi_i \tag{13}$$

такие, что

$$P_1^{(1)}(x) = h_1(x) \quad \text{для} \quad x \in D_1^{(1)} = E \setminus G_1^{(1)} \tag{14}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| \sum_{i=\mu_0(1)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L^2_{D_1^{(1)}}} : s \le \mu_1(1) \right\} \le \varepsilon_1 + \|h_1\|_{L^2_{D_1^{(1)}}}. \tag{15}$$

Поэтому для

$$M_1(x) = \begin{cases} c_1 & \text{если} \quad x \in G_1^{(1)}, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad c_1 = \frac{\varepsilon_1}{3}\left(\varepsilon_1 + \|h_1\|_{L^2_E}\right)^{-1}, \tag{16}$$

в силу (14) - (16) и (12) имеем

$$\left\|h_1 - M_1 P_1^{(1)}\right\|_{L^2_E} = \left\|h_1 - M_1 P_1^{(1)}\right\|_{L^2_{G_1^{(1)} \cap E}} \le \|h_1\|_{L^2_{G_1^{(1)} \cap E}} + \left\|M_1 P_1^{(1)}\right\|_{L^2_{G_1^{(1)}}} \le$$

$$\le \frac{1}{3} d_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} < \frac{1}{2} d_1.$$

Чтобы найти M_2, дважды применим Лемму 2. Сначала возьмем $p = 3$, $K = M_1$, $g = \left[h_1 - M_1 P_1^{(1)}\right]$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\min\{d_2, \delta_2,\}$, $m = \mu_1(1) + 1$, и найдем множество $G_1^{(2)}$, $|G_1^{(2)}| < \varepsilon_2$ и Ф-многочлен

$$P_1^{(2)} = \sum_{i=\mu_0(2)+1}^{\mu_1(2)} a_i \phi_{m_i}$$

такие, что

$$M_1(x) P_1^{(2)}(x) = \left[h_1(x) - M_1(x) P_1^{(2)}(x)\right], \quad \text{для} \quad x \in D_1^{(2)} = E \setminus G_1^{(2)} \tag{17}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| M_1(x) \sum_{i=\mu_0(2)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L^2_{D_1^{(2)}}} : s \le \mu_1(2) \right\} \le \varepsilon_2 + \left\|h_1 - M_1 P_1^{(1)}\right\|_{L^2_{D_1^{(2)}}} <$$

$$< \varepsilon_2 + d_1 < \frac{1}{3} d_2 + \frac{1}{2} d_1.$$

Тогда, применяя Лемму 2 с $p = 3$, $K = M_1$, $g = h_2$, $\varepsilon = 1/2\varepsilon_2$, где $m = \mu_1(2) + 1$, можно найти множество $G_2^{(2)}$, $|G_2^{(2)}| < \varepsilon_2$ и Ф-многочлен

$$P_2^{(2)} = \sum_{i=\mu_1(2)+1}^{\mu_2(2)} a_i \phi_i,$$

такой, что $M_1(x)P_2^{(2)}(x) = h_2(x)$ для $x \in D_2^{(2)} = E \setminus G_2^{(2)}$, и

$$\sup_s \left\{ \left\| M_1 \sum_{i=\mu_1(2)+1}^{s} a_i \phi_i \right\|_{L^s_{D_2^{(2)}}} : s \le \mu_2(2) \right\} \le \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \|h_2\|_{L^s_{D_2^{(2)}}}.$$

Положим

$$D_2 = D_1^{(2)} \cap D_2^{(2)}, \quad G_2 = E \cap \left(G_1^{(2)} \cup G_2^{(2)}\right) = E \setminus D_2 \tag{18}$$

и

$$M_2(x) = \begin{cases} c_2, & \text{если} \quad x \in G_2, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $c_2 > 0$ выбрано так, чтобы

$$\left\| h_1 - M_1 M_2 (P_1^{(1)} + P_1^{(2)}) \right\|_{L^s_E} = \left\| h_1 - M_1 M_2 (P_1^{(1)} + P_1^{(2)}) \right\|_{L^s(G_2)} \le$$

$$\le \|h_1\|_{L^s(G_2)} + c_2 \left(\left\| P_1^{(1)} \right\|_{L^s(G_2)} + \left\| P_1^{(2)} \right\|_{L^s(G_2)} \right) \le d_2,$$

и для $\mu_2(0) < s \le \mu_2(1)$

$$\left\| M_1 M_2 \sum_{i=\mu_2(0)+1}^{s} a_i \phi_{m_i(2)} \right\|_{L^2_E} = \left\| M_1 \sum_{i=\mu_2(0)+1}^{s} a_i \phi_{m_i(2)} \right\|_{L^2(D_2)} +$$

$$+ \left\| M_1 M_2 \sum_{i=\mu_2(0)+1}^{s} a_i \phi_{m_i} \right\|_{L^2(G_2)} \le \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 < \frac{1}{2}(d_2 + d_1).$$

Если $c_2 > 0$ достаточно мало, то справедливы неравенства

$$\left\| h_2 - M_1 M_2 P_2^{(2)} \right\|_{L^s_E} < \frac{1}{2}d_2,$$

$$\left\| h_1 - M_1 M_2 P_1^{(1)} \right\|_{L^2_E} \le \|h_1 - M_1 P_{11}\|_{L^2_{D_2}} + \|h_1\|_{L^2_{G_2}} + c_2 \left\| M_1 P_1^{(1)} \right\|_{L^2_{G_2}} <$$

$$< \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{6}d_2 \le \frac{1}{2}(d_1 + d_2),$$

и для $\mu_2(1) < s \le \mu_2(2)$

$$\left\| M_1 M_2 \sum_{i=\mu_2(1)+1}^{s} a_i \phi_{m_i} \right\|_{L^s_E} \le \frac{1}{2}d_2 + \|h_2\|_{L^s_E}.$$

Предположим, что мы окончили первые l шагов нашего построения, т.е. для каждой пары k, n с $1 \le n \le l$ и $1 \le k \le n$, имеем

$$\left\| h_k - \left(\prod_{i=1}^{l} M_i \right) \sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)} \right\|_{L^{n+1}_E} < \sum_{j=n}^{l} d_j, \tag{19}$$

$$\sup_s \left\{ \left\| \left(\prod_{i=1}^{l} M_i\right) \sum_{i=\mu_{k-1}(n)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L_E^n} : s \le \mu_k(n) \right\} \le \frac{1}{2}\sum_{j=n}^{l} d_j, \quad n > k, \tag{20}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| \left(\prod_{i=1}^{l} M_i\right) \sum_{i=\mu_{n-1}(n)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L_E^{n+1}} : s \le \mu_k(n) \right\} \le \|h_n\|_{L_E^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{j=n}^{l} d_j. \tag{21}$$

Очевидно, $M(l) = \prod_{i=1}^{l} M_i$ можно представить в виде произведения d-простых функций и характеристической функции множества E. Тогда на $(l+1)$-ом шаге мы применяем Лемму 2 $(l+1)$ раз, полагая

$$p = l+2, \quad K = M(l), \quad \varepsilon = \frac{1}{l+1}\varepsilon_{l+1}, \quad \varepsilon_{l+1} = \min\{d_{l+1}, \delta_{l+1}\},$$

и изменив функцию g и число m подходящим образом. Используя Лемму 2 k–ый раз $(k = 1, \dots, l)$, получим

$$g = H_k = \left[h_k - \left(\prod_{i=1}^{l} M_i\right) \left(\sum_{j=k}^{l} P_k^{(j)}\right) \right],$$

а для $k = l+1$ возьмем $g = H_{l+1} = h_{l+1}$. Положим $m = \mu_{k-1}(l+1)+1$. Таким образом, можно найти множества $G_k^{(l+1)}$, $|G_k^{(l+1)}| < \varepsilon_{l+1}$, $1 \le k \le l+1$ и Φ-многочлены

$$P_k^{(l+1)} = \sum_{i=\mu_{k-1}(l+1)+1}^{\mu_k(l+1)} a_i\phi_i$$

с $\mu_l(l) = \mu_0(l+1) < \mu_1(l+1) < \ldots < \mu_{l+1}(l+1)$, удовлетворяющие следующим условиям : если $1 \le k \le l$, для $x \in D_k^{(l+1)} = E \setminus G_k^{(l+1)}$ имеем

$$M(l)(x) P_k^{(l+1)}(x) = \left[h_k(x) - \prod_{i=1}^{l} M_i(x) \sum_{j=k}^{l} P_k^{(j)}(x) \right],$$

$$M(l)(x) P_{l+1}^{(l+1)}(x) = h_{l+1}(x) \quad \text{для} \quad x \in D_{l+1}^{(l+1)} = E \setminus G_{l+1}^{(l+1)}. \tag{22}$$

Кроме того, для любого $1 \le k \le l$

$$\sup_s \left\{ \left\| \prod_{i=1}^{l} M_i \sum_{i=\mu_{k-1}(l)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+1}_{D_k^{(l+1)}}} : s \le \mu_k(l) \right\} \le \varepsilon_{l+1} + \|H_k\|_{L_E^{l+1}} <$$

$$< \frac{1}{2} d_{l+1} + \sum_{j=k}^{l} d_j.$$

При $k = l + 1$, имеем

$$\sup_s \left\{ \left\| \prod_{i=1}^{l} M_i \sum_{i=\mu_l(l)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+2}_{D_k^{(l+1)}}} : s \le \mu_{l+1}(l) \right\} \le \varepsilon_{l+1} + \|h_{l+1}\|_{L_E^{l+2}}. \tag{23}$$

Теперь положим

$$D_{l+1} = \bigcap_{k=1}^{l+1} D_k^{(l+1)}, \quad G_{l+1} = \bigcup_{k=1}^{l+1} G_k^{(l+1)} \tag{24}$$

и

$$M_{l+1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in D_{l+1}, \\ c_{l+1}, & \text{если} \quad x \in G_{l+1}, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$c_{l+1} = \frac{\varepsilon_{l+1}}{3}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{l+1}\sum_{k=1}^{l} \sup_s \left\{ \left\| M(\nu) \sum_{i=\mu_\nu(k-1)+1}^{s} a_i\phi_{m_i} \right\|_{L_E^{k+1}} : s \le \mu_\nu(k) \right\}\right)^{-1}.$$

Из (22) – (25) следует, что

$$\left\| h_k - \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{j=k}^{l+1} P_k^{(j)} \right\|_{L_E^{l+2}} = \left\| h_k - \left(\prod_{i=1}^{l+1} M_i\right) \sum_{i=k}^{l+1} P_k^{(j)} \right\|_{L^{l+2}_{E\cap G_{l+1}}} \le$$

$$\le \frac{d_{l+1}}{3} + \frac{d_{l+1}}{3} < d_{l+1}. \tag{26}$$

Аналогично, для $k < l + 1$ имеем

$$\sup_{s\le\mu_k(l+1)} \left\| \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{i=\mu_{k-1}(l+1)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+1}_{D_k^{(l+1)}}} \le \|H_k\|_{L_E^{l+1}} + \frac{\varepsilon_{l+1}}{3} \le$$

$$\le \frac{1}{3}(\varepsilon_l + \varepsilon_{l+1}) < \frac{1}{3}(d_l + d_{l+1}), \tag{27}$$

и

$$\sup_s \left\{ \left\| \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{i=\mu_l(l+1)+1}^{s} a_i\phi_i \right\|_{L^{l+2}_{D_k^{(l+1)}}} : s \le \mu_{l+1}(l+1) \right\} \le \|h_{l+1}\|_{L_E^{l+2}} + \frac{\varepsilon_{l+1}}{3}.$$

Для $n \le l + 1$ и $k \le n$ имеем

$$\left\| h_k - \prod_{i=1}^{l+1} M_i \sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)} \right\|_{L_E^n} \le \left\| h_k - \left(\prod_{i=1}^{l} M_i\right) \sum_{i=k}^{n} P_k^j \right\|_{L^n_{D_{l+1}}} + \|h_k\|_{L^n_{E\cap G_{l+1}}} +$$

$$+\left\|\left(\prod_{i=1}^{l+1} M_i\right)\sum_{j=k}^{n} P_k^{(j)}\right\|_{L^n_{E\cap G_{l+1}}} \leq \sum_{j=m}^{l} d_j + \frac{d_{l+1}}{3} + \frac{d_{l+1}}{3} \leq \sum_{j=m}^{l+1} d_j. \tag{28}$$

Аналогично получим, что (20) и (21) выполняются, если заменить l на $l+1$. Мы построили последовательность функций $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые могут быть представлены как произведение d-простой функции и характеристической функции множества E. Ясно, что $0 < M_i(x) \leq 1$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\{x : M_i(x) \neq 1\}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |G_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} d_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-2} = \frac{1}{4}. \tag{29}$$

Последовательность частичных произведений $\prod_{i=1}^{l} M_i$ образует невозрастающую последовательность положительных функций. Таким образом, предел произведения

$$M(x) = \lim_{l} \prod_{i=1}^{l} M_i(x) \tag{30}$$

существует, измерим и удовлетворяет условию $0 \leq M(x) \leq 1$. Эта функция удовлетворяет условиям (α), (β) и (γ), которые получаются с помощью предельного перехода из (21), (27), (28).

С $\{M\phi_k\}$ связана система $\Psi = \{\psi_i\}$ с функциями

$$\psi_i = a_i h_k, \quad \text{для} \quad \mu_{k-1}(l) < i \leq \mu_k(l), \quad l \geq k. \tag{31}$$

Тогда для функционалов на L_E^p

$$b_i(\cdot) = \int_E (\cdot)\psi_i \, dt, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{32}$$

система $\{M\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ будет квазибазисом в L_E^p при каждом $1 \leq p < \infty$.

Пусть f – произвольный элемент из $L^p([0,1])$, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) h_k$ – его разложение по системе Хаара. Докажем, что частичные суммы $S_n(f)$ ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(f) M\phi_i$ стремятся к f по норме пространства L_E^p. Для этого покажем, что

$$\|S_{\mu_l(m)} - f\|_{L_E^p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{33}$$

Предположим, что $n \in \mathcal{N}$ есть наименьшее число такое, что $n - 1 \geq p$. Тогда для любого $m \in \mathcal{N}$, $m > n$ и $0 \leq l < m$ имеем

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{\mu_l(m)} b_i(f) M\phi_i \right\|_{L_E^p} = \left\| f - \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sum_{j=k}^{m-1} M P_k^{(j)} - \sum_{k=1}^{l} c_k M P_k^{(m)} \right\|_{L_E^p} \leq$$

$$\leq \left\| f - \sum_{k=1}^{m-1} c_k h_k \right\|_{L^p_E} + \left\| \sum_{k=1}^{l} c_k \left(h_k - \sum_{j=k}^{m} MP_k^{(j)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=l+1}^{m-1} c_k \left(h_k - \sum_{j=k}^{m-1} MP_k^{(j)} \right) \right\|_{L^p_E} \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{m-1} c_k h_k \right\|_{L^p_E} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} |c_k| \left\| h_k - \sum_{j=k}^{m} MP_k^{(j)} \right\|_{L^p} + \sum_{k=l+1}^{m-1} |c_k| \left\| h_k - \sum_{j=k}^{m-1} MP_k^{(j)} \right\|_{L^p_E} \leq$$

$$\leq \left\| f - \sum_{j=1}^{m-1} c_j h_j \right\|_{L^p_E} + 2^{-m} \sum_{k=1}^{m-1} |c_k|.$$

Последнее неравенство следует из (α), поскольку $m - 1 \geq p$.

Отсюда следует, что $\sum\limits_{j=1}^{m-1} c_j h_j$ совпадает с частичной суммой разложения Хаара функции

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для} \quad x \in E, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как система Хаара является базисом в $L^p_{[0,1]}$, то

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{m-1} c_j h_j \right\|_{L^p_E} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Далее

$$|c_j| = |c_j(f)| = \left| \int_E f h_j \, dt \right| \leq \|f\|_{L^p_E} \|h_j\|_{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

и если Δ_j обозначает носитель функции h_j, то $\|h_j\|_{p'} = |\Delta_j|^{(-1/2+1/p')} \leq j^{(1/2+1/p-1)} = j^{1/p-1/2}$. Таким образом

$$2^{-m} \sum_{j=1}^{m-1} |c_j| \leq 2^{-m+1} m^{1/2+1/p} \|f\|_{L^p_E},$$

и (33) доказана. Наконец, полагая

$$\sigma_k^{lm} = \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} b_i M\phi_i,$$

из (β), (31) и (32) для $\mu_{l-1}(m) < k < \mu_l(m)$ с $l, m \in \mathcal{N}$, и $l \leq m$, получим

$$\|\sigma_k^{lm}\|_{L^p_E} \leq |c_l| \sup_{\mu_{l-1}(m) < k < \mu_l(m)} \left\| \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^p_E} \leq$$

$$\leq |c_l| \|h_l\|_{L^p_{[0,1]}} \left(\|h_l\|_{L^p_{[0,1]}}\right)^{-1} \sup_{\mu_{l-1}(m)<k<\mu_l(m)} \left\| \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^m_E} \leq$$

$$\leq o(1) \cdot m^{1/2} d_m \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Остается оценить σ_k^{lm} для $l = m$. Из условий (γ), (31), (32), учитывая, что носитель функции σ_k^{mm} лежит в Δ_m, получаем

$$\|\sigma_k^{mm}\|_{L^p_E} = |c_m| \left\| \sum_{i=\mu_{m-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^p_E} \leq$$

$$\leq |c_m| \cdot |\Delta_m \cap E|^{(1-p/n)} \left\| \sum_{i=\mu_{l-1}(m)+1}^{k} a_i M\phi_i \right\|_{L^n_E} \leq$$

$$\leq |c_m| \cdot |\Delta_m \cap E|^{(1/p-1/n)} \left(d_m + \|h_m\|_{L^n_{\Delta_m}}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Основная теорема доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1 : По теореме Мюнца существует двойная последовательность $\{Q_{kj}\}_{k,j}^{\infty,\infty}$ многочленов

$$Q_{kj} = \sum_{\mu_{k-1}(j)+1}^{\mu_k(j)} a_i x^{\lambda_i}$$

с $0 = \mu_0(1) < \mu_1(1) = \mu_0(2) < \mu_1(2) < \cdots < \mu_0(j) < \mu_1(j) < \cdots < \mu_j(j) = \mu_0(j+1) < \ldots$ такая, что выполнено следующее условие :

$$(\alpha_1) \qquad \left\| h_k - \sum_{j=k}^{n} Q_{kj} \right\|_{L^n_{[0,1]}} \leq 2^{-n-2} \quad k, n \in \mathcal{N}, \quad k \leq n.$$

Пусть $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ суть числа $\{\mu_j(k),\ 1 \leq j \leq k\}_{k=1}^{\infty}$, перенумерованные в порядке возрастания. Системе $\{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$ соответствует система Ψ, с членами

$$\psi_i = a_i h_k, \quad \text{для} \quad \mu_{k-1}(l) < i \leq \mu_k(l), \quad l \geq k.$$

С функционалами, определёнными на $L^p_{[0,1]}$ по формуле

$$b_i(\cdot) = \int_0^1 (\cdot)\psi_i \, dt, \quad i \in \mathcal{N},$$

система $\{x^{\lambda_n}\}_{k=1}^{\infty}$ является квазибазисом суммирования по последовательности $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ в $L^p_{[0,1]}$ для каждого $1 \leq p < \infty$. Доказательство аналогично концу доказательства Основной Теоремы, где (33) доказано с использованием свойства (α). Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Доказательство Теоремы 2 : Предположим, что $\{M(x)\cdot x^{\lambda_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является квазибазисом для L_G^p при некоторых $1\le p<\infty$, $G\subset[0,1]$ и $M\in L_G^p$. Тогда существует последовательность $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\psi_i\in L_G^{p'}$ такая, что для любого $f\in L_G^p$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_G\left|\sum_{i=1}^{n}M(x)\,b_i\,x^{\lambda_i}-f(x)\right|^p\,dx=0,\tag{34}$$

где

$$b_i=b_i(f)=\int_G f(t)\psi_i(t)\,dt,\quad i\in\mathcal{N}.$$

Следовательно, для каждого $f\in L_G^p$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ix^{\lambda_i}$ сходится в S_G к $[M]^{-1}f$. Осталось показать, что

$$\lim_{n\to\infty}b_i\,x^{\lambda_i}=0\quad\text{для любого}\quad x\in G,\quad|(x,1)\cap G|>0.\tag{35}$$

Если (35) не выполняется, то для некоторого $0\neq x_0\in G$ имеем

$$|(x_0,1)\cap G|>0,\tag{36}$$

и существует возрастающая последовательность чисел i_k, $k\in\mathcal{N}$ такая, что

$$|b_{i_k}x^{\lambda_{i_k}}|>\alpha_0>0,\quad k\in\mathcal{N}.\tag{37}$$

Однако, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ix^{\lambda_i}$ сходится в S_G, то (36), (37) не имеют места. Следовательно, из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ix^{\lambda_i}$ в S_G вытекает (35). Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ix^{\lambda_i}$ сходится равномерно на интервале $(0,\beta)$, где β – наибольшее число, для которого $|(\beta,1)\cap G|>0$, что противоречит (34). Теорема 2 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Для доказательства Теоремы 3 достаточно повторить доказательство Основной Теоремы, используя вместо Леммы 2 следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $W_\Omega=\{w_k,k\in\Omega\}$ – подсистема системы Уолша–Пэли с порядком элементов, унаследованном из последней системы и Ω удовлетворяет Условию (P). Пусть $1\le p<\infty$ и

$$g=\sum_{i=1}^{2^n}\gamma_i\chi_{\Delta_n^i},\qquad\text{где}\qquad\Delta_n^i=\left(\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right),\qquad i=1,\dots,2^n.$$

Тогда, любым $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathcal{N}$ соответствуют конечная сумма G двоичных интервалов и W_Ω–многочлен $P = \sum_{k=m}^{l} b_k w_k$, где $b_k = 0$ при $k \notin \Omega$ такие, что

$$|G| < \varepsilon, \quad g(x) = P(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad D = [0,1] \setminus G$$

и

$$\sup\left\{\left\|\sum_{k=m}^{s} b_k w_k\right\|_{L^p_D} : m \le s \le l\right\} < \varepsilon + \|g\|_{L^p_D}.$$

Доказательство Леммы 3 опирается на следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $W_\Omega = \{w_k,\ k \in \Omega\}$ – подсистема системы Уолша–Пэли с порядком элементов, унаследованном из последней системы, и Ω удовлетворяет Условию (P). Пусть $1 \le p < \infty$, и $i, \nu \in \mathcal{N}$ такие числа, что $m_i - n_i \ge 3 \cdot 2^\nu$. Тогда существует k_0, $n_i \le k_0 < m_i$ такое, что

$$w_{k_0} w_k = w_{l_k}, \quad l_k \in [n_i, m_i], \quad 0 \le k \le 2^\nu - 1, \tag{38}$$

и для многочлена Уолша–Пэли $P(x) = \sum_{k=0}^{2^\nu - 1} a_k w_k(x)$ имеем

$$\|P(1 - w_{k_0})\|_{L^p_{[0,1]}} = 2^{1/p'} \|P\|_{L^p_{[0,1]}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{39}$$

Доказательство : Рассмотрим несколько случаев. Если существует натуральное число $m \ge \nu$ такое, что $n_i \le 2^m < 2^{m+1} \le m_i$, то (38) верно для $k_0 = 2^m$. Если $2^m \le n_i < 2^{m+1} \le m_i$ для некоторого $m \in \mathcal{N}$, то рассмотрим случаи a) $m_i - 2^m \ge 2^\nu$ и b) $m_i - 2^m < 2^\nu$. В случае a) положим $k_0 = 2^m$, а в противном случае $k_0 = 2^m - 2^\nu - 1$. Вообще говоря, всегда можно найти число

$$\nu_i = \sum_{j=\nu-1}^{m-1} \delta_j 2^j, \quad \text{где} \quad \delta_j = 0 \quad \text{или} \quad 1,$$

такое, что $\nu_i \le n_i < \nu_i + 2^{j_0} \le m_i$ и $\nu \le j_0 \le m$. Вновь рассмотрим два случая : $m_i - \nu_i - 2^{j_0} \ge 2^\nu$ и $m_i - \nu_i - 2^{j_0} < 2^\nu$. Соответственно, положим $k_0 = 2^{j_0} + \nu_i$ и $k_0 = 2^{j_0} + \nu_i - 2^\nu$. Непосредственной проверкой (39) доказывается Предложение 1.

Доказательство Леммы 3 : аналогично доказательству Леммы 1. Сосредоточим наше внимание на тех частях, которые различаются. Сначала вместо условия (5) возьмем условие

$$2^{N/p'} \cdot \|g\|_{L^p_{\Delta^i_\nu}} < \frac{\varepsilon}{2C_p}, \quad \nu > \max(n, N), \tag{40}$$

где $C_p > 1$ – базисная постоянная системы Уолша–Пэли (норма в L^p частичных сумм любого W-многочлена меньше или равна C_p раза L^p-норма этого многочлена). Полагая как и в доказательстве Леммы 1

$$g(x) = \sum_{i=1}^{2^\nu} g_i(x), \quad \text{где} \quad g_i(x) = \chi_{\Delta_\nu^i}(x) \cdot g(x),$$

построим W_Ω-многочлен W^1, аппроксимирующий функцию

$$g_1(x) = \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} \int_0^1 g_1(t) w_l(t)\, dt, \quad \text{где} \quad w_l(x) = \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} c_l(g_1) w_l(x)$$

на множестве Δ_ν^1. Для этого воспользуемся Предложением 1. Пусть число $i_1 \in \mathcal{N}$ такое, что $m_{i_1} - n_{i_1} \geq 3 \cdot 2^{\nu+1}$ и $n_{i_1} > 2^{\nu+1}$. Тогда по Предложению 1, можно найти k_1 ($n_{i_1} \leq k_1 < m_{i_1}$ такое, что $w_{k_1}(x) \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} c_l(g_1) w_l(x)$ будет W_Ω-многочленом и

$$\|g_1(1 - w_{k_1})\|_{L^p_{[0,1]}} = 2^{1/p'} \|g_1\|_{L^p_{[0,1]}}.$$

Таким образом, можно найти числа $k_1 < \cdots < k_N$, $k_{j+1}/k_j > 2$ такие, что

$$W^1 = \left(\prod_{j=1}^{N} (1 - w_{k_j}(x)) - 1 \right) \sum_{l=0}^{2^{\nu+1}} c_l(g_1) w_l(x)$$

будет W_Ω-многочленом и согласно условию (40)

$$\|g_1 - W^1\|_{L^p_{[0,1]}} = \left\| g_1 \prod_{j=1}^{N} (1 - w_{k_j}) \right\|_{L^p_{[0,1]}} = 2^{N/p'} \|g_1\|_{L^p_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{2C_p}.$$

Кроме того имеем, что $g_1 \prod_{j=1}^{N} (1 - w_{k_j}) \neq 0$ на множестве меры $2^{-\nu-N}$. Используя те же самые рассуждения, можно построить W_Ω-многочлены W^i ($2 \leq i \leq 2^\nu$), которые не имеют общих элементов, причём $\left\| g_i - W^i \right\|_{L^p_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{2C_p}$ и $g_i - W^i \neq 0$, $2 \leq i \leq 2^\nu$ на множестве меры $2^{-\nu-N}$. Проверкой, что $P = \sum_{i=1}^{2^\nu} W^i$ удовлетворяет условиям Леммы 3, завершается доказательство.

ABSTRACT. The paper proves that if a subsystem $\{h_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ of Haar system is complete in $S_G =$ the linear space of all measurable, a.e. finite functions on the measurable set G, where $|G| > 0$, then there exists a bounded function m such that $\{m h_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ is a quasibasis in every L^p_G, $1 \leq p < \infty$ with the same admissible system. The same problem for the system $\chi = \{x^{\lambda_i}\}_{i=1}^\infty$, $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ gives a completely different picture. The paper studies the same question for the Walsh-Paley system.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banach, Theorie des Operations Lineares, Monografje Matematczyne, Warszawa, 1932.
2. Ben-Ami Braun, "On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p, $1 < p < \infty$", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 1176, pp. 499 – 508, 1973.
3. P. Borwein, T. Erdélyi, "Müntz spaces and Remez inequalities", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 32, pp. 38 – 42, 1995.
4. P. Borwein, T. Erdélyi, "Generalizations of Müntz's theorem via a Remez-type inequality for Müntz spaces", J. Amer. Math. Soc., vol. 10, pp. 327 – 349, 1997.
5. B. R. Gelbaum, "Notes on Banach spaces and bases", Ann. Acad. Brasil., vol. 30, pp. 29 – 36, 1958.
6. C. Goffman, D. Waterman, "Basis sequences in the space of measurable functions", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 11, pp. 211 – 213, 1960.
7. S. Kaczmarz, H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Monografje Matematyczne, Warsaw – Lwów, 1935.
8. K. S. Kazarian, R. E. Zink, "Some ramifications of a theorem of Boas and Pollard concerning the completion of a set of functions in L^2", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 349, pp. 4367 – 4383, 1997.
9. J. J. Price, R. E. Zink, "On sets of completeness for families of Haar functions", Trans. Amer. Math Soc., vol. 119, pp. 262 – 269, 1965.
10. J. J. Price, R. E. Zink, "On sets of functions that can be multiplicatively completed", Ann. Math., vol. 82, pp. 139 – 145, 1965.
11. J. J. Price, "Walsh series and adjustment of functions on small sets", Illinois J. Math., vol. 13, pp. 131 – 136, 1969.
12. I. Singer, Bases in Banach Spaces, II, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

29 марта 2001

Universidad Autónoma de Madrid,
E-mail : kazaros.kazarian@uam.es

Indiana University Rawles Hall,
E-mail : torchins@indiana.edu

UNIVERSAL TRIGONOMETRIC AND POWER SERIES

J.-P. Kahane

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

An expository paper on the recent works of Nestoridis, Melas and J.-P. Kahane.

The notion of a universal trigonometric series was introduced and developed by D. Menshov in 1945 and 1947 [1], [18], [19]. As usual, a trigonometric series and its partial sums are written either

$$S = (\text{formal}) \sum_{-\infty}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad S_N(t) = \sum_{0}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

or

$$S = (\text{formal}) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad S_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{int}.$$

A trigonometric series S is called **universal** in the sense of Menshov if, given f, any Lebesgue measurable function on the circle $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, there exists an increasing sequence of integers n_j, such that

$$f(t) = \lim_{j\to\infty} S_{n_j}(t) \quad \text{a.e.} \quad (\text{almost everywhere}).$$

At a first look, it can seem paradoxical, that **one trigonometric series is able to represent all** functions. However Menshov proved the following :

$M1$. There exist Menshov universal trigonometric series.

$M2$. Given any trigonometric series, it can be written as the sum of two Menshov universal trigonometric series.

$M3$. There exist universal trigonometric series whose coefficients tend to zero.

$M4$. Given any trigonometric series whose coefficients tend to zero, it can be written as the sum of two Menshov universal trigonometric series.

The paper is divided in two parts. The first is related to $M1$ and $M2$, the second much shorter to $M3$ and $M4$. $M1$ and $M2$ can be proved and easily extended using the Baire category theorem. This theorem (easy to prove, but quite powerful) says that, given a complete metric space X any countable intersection of dense open subsets is dense (therefore, a dense G_δ set). It is convenient to say that quasi all x in X enjoy a given property if this property holds on dense G_δ subset of X.

A trigonometric series S can be identified with the sequence on the coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. The set of all (complex) trigonometric series will be identified with $C^{\mathbb{Z}}$. Let us choose $X = C^{\mathbb{Z}}$, equipped with a metric compatible with the product topology. We shall prove very easily that quasi all trigonometric series are universal in the sense of Menshov, and a little more.

Quasi all trigonometric series S have the following properties :

M' : given $f \in C(T)$, there exists a sequence n_j, such that for each $\alpha > 0$,

$$f(t) = \lim_{j\to\infty} S_{n_j}(t) \quad \textbf{uniformly on } [0, 2\pi - \alpha]$$

(therefore everywhere),

M'' : given f on T in the first class of Baire (pointwise limit of a sequence of continuous functions), there exists a sequence n_j, such that

$$f(t) = \lim_{j\to\infty} S_{n_j}(t) \quad \textbf{everywhere.}$$

M''' : given f Lebesgue measurable on T, there exists a sequence n_j, such that

$$f(t) = \lim_{j\to\infty} S_{n_j}(t) \quad \textbf{almost everywhere,}$$

the Menshov universality property.

Clearly $M' \Rightarrow M'' \Rightarrow M'''$. In order to prove M', let us consider

$$G(P, N, \varepsilon, K) = \{S \in X : \exists n > N,\ ||S_n - P||_{C(K)} < \varepsilon\},$$

where P is a trigonometric polynomial, N an integer, $\varepsilon > 0$ and K a proper compact subset of T. It is an open subset of X. Now, given any ball (Q, δ) in X, whose center Q is a trigonometric polynomial, there exists a trigonometric polynomial S, which approximates Q in X and P in $C(K)$, in such a way that S belongs both to (Q, δ) and $G(P, N, \varepsilon, K)$ (we simply chose $S_n = S$). Therefore, $G(P, N, \varepsilon, K)$ is dense in X. Choosing now for P_j a sequence of trigonometric polynomials dense in $C(T)$, a sequence $N_j \to \infty$, $\varepsilon_j \to 0$, and $K_j = [0, 2\pi - \frac{1}{j}]$. M' holds on $\bigcap_j G(P_j, N_j, \varepsilon_j, K_j)$, a dense G_δ subset of X. The proof is achieved.

Here are some variations around the statement and the proof. First, if X is a complete metric group (say, Abelian for simplicity) and if Y is a subset of X, invariant under translation, which contains a dense G_δ – *set* A, each x in X can be written as $x = y_1 - y_2$, y_1 and y_2 belonging to Y. We simply choose y_2 in $A \cap (A + x)$, hence $y_1 \in A$. Therefore, $M2$ derives from the above statement.

Secondly, the proof relies on the fact that the system $\{e^{int}\}_{|n|>N}$ is total (dense span) in $C(K)$. The same is true, if we restrict ourselves to trigonometric series S of the form

$$S = (\text{formal}) \sum_{n \in \Lambda} C_n e^{int},$$

whenever $\{e^{int}\}_{n\in\Lambda}$ is total in all spaces $C(I)$ with $|I| < 2\pi$: in other words, when there is no non-zero entire function of exponential type $< \pi$, bounded on the real line, and vanishing on Λ. An explicit description of such Λ_1 is provided by the theorem of Beurling and Malliavin. Here $X = \mathbf{C}^\Lambda$.

In particular, the statement holds for trigonometric series of the Taylor type with $X = \mathbf{C}^{\mathbb{N}}$, where $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers :

$$S = (\text{formal}) \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n e^{int},$$

therefore, with a slight change of notation, for power series

$$S = (\text{formal}) \sum_{0}^{\infty} c_n z^n.$$

But in this case we are free to choose for K not only a subset of the unit circle, but any compact subset of $\mathbf{C}$, which does not contain 0 and does not divide the plane (K^c connected). The main point is to check, that there is a countable family of such compact sets K_j, such that every K is contained in a K_j. Then the above proof applies and gives a generic Seleznev theorem.

Quasi all power series are universal in the sense of Seleznev.

S is universal in the sense of Seleznev if, given any K as above and any function $f(z)$ continuous on K and analytic in the interior of K, there exists a sequence n_j, such that

$$f(z) = \lim_{j\to\infty} S_{n_j}(z) \quad \text{uniformly on } K.$$

Mergelian's theorem says that $f(z)$ is a uniform limit of polynomials on K, and that is enough to show that the open sets $\{S : \forall N \exists n > N : \|S_n - P\| < \varepsilon\}$ are dense in X. The theorem of Seleznev (existence theorem) goes back to 1951 [22].

In the 1970's Luh, and independently Chui and Parnes, had the idea of considering Taylor series of analytic functions instead of formal power series. In the simplest case we choose now $X = H(D)$, the space of holomorphic functions in the open unit disc $D = \{z : |z| < 1\}$. Shortly afterwards Grosse-Erdmann gave a generic version of Luh's existence theorem, and universality as a generic phenomenon is explained by Grosse-Erdmann in his review paper [7] and in my expository article [8]. In the meantime, Nestoridis introduced a new notion of universality, that we shall describe now [21].

A power series S, convergent in the open unit disc D, is said to be universal (in the sense of Nestoridis) if, given any compact subset K of C, disjoint form D (that is, contained in $\{z : |z| \geq 1\}$) and not dividing the plane (K^c connected), and a function $f(z)$ continuous on K and analytic in K°, there exists a sequence n_j such that $S_{n_j}(z)$ converges to $f(z)$ uniformly on K.

The only difference with Luh, and Chui and Parnes, is that these authors considered K in the exterior of $D(\{z : |z| > 1\})$. There are more universal series in the sense of Luh (=Chui-Parnes), than in the sense of Nestoridis, but obviously universal series in the sense of Nestoridis have a closer relation with trigonometric series (because K in the unit circle is allowed).

Taking $X = H(D)$, Nestoridis proved : **Quasi all Taylor series of functions in $H(D)$ are universal (in the sense of Nestoridis).**

Here again a construction of a countable family of compact sets K_j is needed, and the Mergelian theorem is used to approximate both a polynomial in $C(K)$ and another polynomial in $H(D)$.

There are many other generic (=quasi sure) properties of $H(D)$. For example, it has been known for a long time, that quasi all Taylor series of functions in $H(D)$ are non-continuable across the circle $|z| = 1$. Consequently there are non continuable Taylor series that are N-universal (in the sense of Nestoridis). It is exactly what Nestoridis needed, in order to solve a problem of Pichorides, when he started this research.

Actually **Every N-universal Taylor series in non-continuable.**

This is a theorem of Melas and Nestoridis, that relies on a recent work of Gehlen, Luh and Müller on power series with Ostrowski gaps [5], [17]. It can be extended by introducing a new notion of universality for functions analytic in an open domain Ω (here $X = H(\Omega)$), provided Ω is simply connected and contained in the exterior of an angle. On the other hand, non-analytic continuation of universal functions is not a general fact, if non simply connected domains Ω are considered (Melas, to appear in Annales de l'Institut Fourier).

There are subtle questions about universal Taylor series in $H(\Omega)$. The first step is to define a universality property for the Taylor expansion of a function $f \in H(\Omega)$ around a point $\zeta \in \Omega$; this is done in a natural way, considering compacts sets K disjoint from Ω and not dividing the plane ; when the universality holds, we can write $f \in \mathcal{U}(\Omega, \zeta)$. How does the class $\mathcal{U}(\Omega, \zeta)$ depend on ζ ? Melas and Nestoridis exhibited a large class of sets Ω (those that we just described), such that $\mathcal{U}(\Omega, \zeta)$ does not depend on Ω and is not empty. Melas exhibited sets Ω for which $\mathcal{U}(\Omega, \zeta)$ is empty for all $\zeta \in \Omega$ except one [16], [17]. There is still much to do in that direction.

From now on $\Omega = D$. Then every N-universal Taylor series, considered on the unit circle ($z = e^{it}$), is a M (Menshov) and even an M' (see the definition above) universal trigonometric series. Is it true, that a Taylor series that is universal in the sense of Menshov (M) or in the restricted sense (M'), when considered on the unit circle is necessarily N-universal ? The answer is negative in both cases and it can be seen in many ways. The clearest way is to enlarge the universality class $\mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(D, O)$ by restricting the class of compact sets under consideration, and to see that the new class is different from $\mathcal{U}(D)$. Given $r \geq 1$, if we restrict ourselves to compact K contained in the closed annulus $1 \leq |z| \leq r$, we obtain a class $\mathcal{U}_r(D)$. Here are two statements showing that all these classes are different, and different from $\mathcal{U}(D)$:

1. $\mathcal{U}_r(D)$ is strictly decreasing as r increases. Given $r > 1$, there exists $S \in \mathcal{U}_r(D)$, such that $\lim_{n\to\infty} |S_n(z)| = \infty$ for almost all z in $\{z : |z| > r\}$.

2. There exists $S \in \mathcal{U}_1(D)$, such that the sequence of partial sums S_n is not dense in any $C(K)$, such that $K^\circ \neq \emptyset$.

Let us turn to Menshov's statement $M3$ and $M4$, about universal trigonometric series, whose coefficients c_n tend to 0, that is, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. There is no hope to extend our first statement about M' being a quasi sure property to such series for M' excludes that the coefficients tend to 0.

However, replacing $X = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ by $X = c_o(\mathbb{Z})$, we can apply Baire's theorem : **Quasi all trigonometric series, whose coefficients tend to zero are universal in the sense of Menshov.** It needs some work to replace $c_o\mathbb{Z}$ by $c_o\mathbb{N}$. However the result still holds. **Quasi all Taylor series whose coefficients tend to zero, considered on the unit circle ($z = e^{it}$), are universal in the sense of Menshov.**

There are two extensions : one consists in replacing c_o by a smaller space, for example l^p with $p > 2$ (certainly l^2 does not work!), and the other is to replace $\mathbb{N}$ by a (lacunary) subset of $\mathbb{N}$. We state only the existence theorem (to apply Baire's theorem needs a regularity condition) for the first extension.

Let $\gamma(x) = o(x^2)$ $(x \to 0)$, $\gamma(x) \geq 0$, and let $l_\gamma(\mathbb{N})$ be the set of $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, such that $\sum \gamma(|c_n|) < \infty$. There exists $(c_n) \in l_\gamma(\mathbb{N})$, such that the series $\sum_0^\infty c_n e^{int}$ is universal in the sense of Menshov. The statement on quasi all Taylor series, whose coefficients tend to zero holds true, if we restrict ourselves to series $\sum_{n \in \Lambda} c_n e^{int}$, when $\Lambda \subset \mathbb{N}$ has the following property : for each positive integer a, there exists an integer $\lambda > 2a$, such that Λ contains all points $m + \lambda n$ with $m \in \{-a, -a+1, ..., a-1, a\}$ and $n \in \{1, 2, ..., a\}$.

Here the principal tool is a lemma already used by Kahane and Katznelson in order to obtain another kind of universality of Taylor series, related to the radial behavior. Here is the result [9] : **Given γ as above and a Lebesgue-mensurable function f on the unit circle ($|z| = 1$) with values in $\{\mathbf{C}\} \cup \{\infty\}$, there exists a Taylor series $\sum_0^\infty c_n z^n$ with $(c_n) \in l_\gamma(\mathbb{N})$, such that**

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_0^\infty c_n r^n e^{int} = f(e^{it}) \quad a.e.$$

АБСТРАКТ. Объяснительная статья на недавние работы Несторидиса, Меласа и Дж.-П. Кахана.

REFERENCES

1. N. Bari, Trigonometric Series [in Russian], GIFML, Moscow, 1961.
2. C. Chui, M. N. Parnes, "Approximation by overconvergence of power series", J. Math. Anal. Appl., vol. 36, pp. 693 – 696, 1971.
3. G. Costakis, "Some remarks on universal functions and Taylor series", Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 128, pp. 157 – 175, 2000.
4. G. Costakis, A. Melas, "On the range of universal functions", Bull. Lond. Math. Soc., in print.
5. W. Gehlen W, W. Luh, J. Müller, "On the existence of O-universal functions", Complex Variables, vol, 41, pp. 81 – 90, 2000.
6. K.-G. Grosse-Erdmann, "Holomorphe Monster und universelle Funktionen", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 176, ISSN 0373-8221, 1987.
7. K.-G. Grosse-Erdmann, "Universal families and hypercyclic operators", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp. 345 – 381, 1999.

8. J.-P. Kahane, "Baire's category theorem and trigonometric series", J. Anal. Math., vol. 80, pp. 1 – 37, 2000.
9. J.-P. Kahane, Y. Katznelson. "Sur le comportement radial des fonctions analytiques", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 272, p. 718, 1971.
10. J.-P. Kahane, A. Melas, "Restricted universality of power series", Bull. London Math. Soc., vol. 33, pp. 543 – 552, 2001.
11. J.-P. Kahane, A. Melas, V. Nestoridis, "Sur les séries de Taylor universelles", C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, pp. 1003 – 1006, 2000.
12. J.-P. Kahane, V. Nestoridis, "Séries de Taylor et séries trigonométriques au sens de Menchoff", J. Maths. Pures et Appl. (in print).
13. P. Koosis, Lecons sur le Théorème de Beurling et Malliavin, CRM Montréal 1996.
14. W. Luh, "Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten", Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 88, 1970.
15. W. Luh, "Holomorphic monsters", J. Approx. Theory, vol. 53, pp. 128 – 144, 1988.
16. A. Melas, "On the growth of universal functions", J. Anal. Math., to appear.
17. A. Melas, V. Nestoridis, "Universality of Taylor series as a generic property of holomorphic functions" (submitted).
18. D. E. Menshov(Menchoff), "On universal trigonometric series" [in Russian], Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) vol. 49, pp. 79 – 82, 1945.
19. D. E. Menshov, "On partial sums of trigonometric series" [in Russian], Mat. Sbornik, vol. 20(62), pp. 197 – 237, 1947.
20. V. Nestoridis, "Universal Taylor series", Ann. Inst. Fourier Grenoble, vol. 46, pp. 1293 – 1306, 1996.
21. V. Nestoridis, "An extension of the notion of universal Taylor series", in : Computational Methods and Function Theory '97 (CMFT'97), Nicosia, Cyprus, pp. 421 – 430, 1997.
22. A. I. Seleznev, "Sur les séries de puissances universelles", Math. Sbornik (N.S.), vol. 28, pp. 453 – 460, 1951.
23. V. Vlachou, "A universal Taylor series in the doubly connected domain $\mathbf{C} \setminus \{1\}$", submitted.

8 March 2001

Université de Paris-Sud à Orsay
France

POINTWISE WAVELET CONVERGENCE IN BESOV AND UNIFORMLY LOCAL SOBOLEV SPACES

M. A. Kon and L. A. Raphael

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

The paper announces new conditions for uniform pointwise convergence rates of wavelet expansions in Besov and uniformly local Sobolev spaces.

§1. INTRODUCTION

The wide applicability of wavelet approximation methods to diverse technological problems is due to their localization in time and frequency spaces, existence of fast algorithms and, in the case of the Daubechies wavelets, orthogonality and compact support. A natural question is, where and how fast do such wavelet expansions converge?

The first results on L_2 and L_∞ convergence rates of r-regular multiresolution expansions were in [13], [14], [16]. For an overview of convergence rates of wavelet expansions in Sobolev and Besov spaces, see the text [7]. For recent results in non-linear approximation [5] and rates of convergence in threshholding algorithms for wavelet expansions, see [3]. For a study of shift invariant spaces see [2]. Our approach imposes less restrictive assumptions on the scaling function and/or wavelet, and uses different techniques. Here we summarize previous results and announce new results for Besov and uniformly local Sobolev spaces.

In [9], [10] the wavelet expansion analog of the Carleson result that Fourier series converge almost everywhere on $\mathbb{R}^d$ is shown (it is easier to prove than the corresponding Fourier series result). The main ideas of the proof involve showing that the kernels associated with the projection operators of the multiresolution analyses (MRA) are bounded by an L_1 radially decreasing convolution kernel, something which fails to hold in Fourier theory.

The techniques of [10] are used in the study of the rate of convergence of the error

---

Research partially supported by the National Science Foundation.

$||f - P_n f||_\infty$ associated with MRA projections P_n, for functions f in Sobolev spaces $H_2^s(\mathbb{R}^d)$ [11]. The MRA's are assumed to satisfy weak regularity assumptions, in the sense that the kernel of P_0 is bounded by a convolution kernel in the class [**RB**] (which consists of functions with integrable radial decreasing majorants). This situation is more general than r-regularity and occurs when the scaling function $\phi(x)$ or the logarithmically weighted wavelets $\psi^\lambda(x)\ \ln(2 + |x|)$ are in [**RB**].

In [11] it is shown that convergence rates of wavelet and multiresolution expansions depend on smoothness of the expanded function f. Specifically, if s is not larger than a fixed parameter σ and $f \in H_2^s(\mathbb{R}^d)$ then the error of approximation is $\mathcal{O}(2^{-n(s-d/2)})$, with d the dimension and n the number of scales used in the expansion. More precisely, the pointwise approximation condition can be stated as, for all $n \geq 0$,

$$||f - P_n f||_\infty \leq C\, 2^{-n(s-d/2)}\, ||f||_{H_2^s} \tag{1.1}$$

whenever $d/2 < s < \sigma$. The convergence rate of (1.1) is expected [16].

In a sequel paper [12] we show that the index σ is actually sharp and depends on the MRA used in the expansion. The upper bound σ is related to the behavior of the Fourier transform $\widehat{\psi}$ of the wavelet near the origin, a condition which is essential for the proof of (1.1). We have shown that σ can be defined in four equivalent ways, involving the operator $I - P_0$, the Fourier transform of the scaling function ϕ or of the wavelet ψ, or the scaling function's symbol m_0. For function spaces with smoothness s greater than σ the rate of convergence "freezes" and fails to improve, no matter how large s is. Such behaviors are again expected for wavelet expansions. Again the key to these proofs is the L_1 bound on the reproducing kernel of the MRA.

The natural spaces for wavelets are Besov spaces, and here we will use embedding theorems [1], [5] and our results for Sobolev spaces to derive optimal pointwise convergence rates for some classes of Besov spaces. Wavelet convergence questions in local spaces are also important because wavelets are local in nature, and we expect that global convergence properties which assume that the function f being expanded decays at infinity also hold locally, independently of the decay properties of f.

We also announce here optimal rates of convergence for other spaces of smooth functions, such as the uniformly local counterparts $H^s_{p,ul}(\mathbb{R}^d)$ of the standard Sobolev spaces H_p^s (definitions in §6), in the range $1 \leq p \leq \infty$. We show that the expected optimal rate of convergence $\sigma - d/2$ holds in these cases, but only under a decay assumption on the scaling function, namely $|\phi(x)| \leq C\,|x|^{-\sigma-d/2}$.

An overview of the organization of this paper is as follows. Basic definitions are given in §2. §3 contains known results on convergence rates of wavelet expansions for Sobolev and Besov spaces from [7]. In §4 statements of the main pointwise convergence rate results for Sobolev spaces $H_2^s(\mathbb{R}^d)$ are given in order to provide a context for new results in Besov and uniformly local Sobolev spaces given in §§5 and 6. §7 gives examples involving convergence rates for Meyer, Battle-Lemariè and Daubechies wavelets.

§2. BASIC DEFINITIONS

For detailed definitions and theory of an MRA we refer to [4]. An MRA is defined as an increasing sequence of subspaces $\{V_n\}$ of $L_2(\mathbb{R}^d)$, $(d \geq 1)$ such that $f(x) \in V_n$ if $f(2x) \in V_{n+1}$, the intersection of the spaces is $\{0\}$, the closure of their union is all of L_2, and V_0 is invariant under integer translations. It is also generally assumed (though we do not require it here) that there exists a function $\phi(x)$ (the **scaling function**) whose integer translates form an orthogonal basis (ONB) for V_0.

Let W_i be the orthogonal complement of V_i in V_{i+1}, i.e., $W_i = V_{i+1} \ominus V_i$, so that $V_{i+1} = V_i \oplus W_i$. From existence of ϕ it follows that there is a set of basic wavelets $\{\psi^\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ (with Λ a finite index set) such that $\psi_{jk}^\lambda(x) \equiv 2^{jd/2}\psi^\lambda(2^j x - k)$, $(j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d)$ form an orthonormal basis for W_j for fixed j, and form an orthonormal basis for $L^2(\mathbb{R}^d)$ as λ, j, k vary. Our results will hold for any wavelet set $\{\psi^\lambda\}_\lambda$ related to W_0 whose translations and dilations form an orthonormal basis for $L_2(\mathbb{R}^d)$, regardless of how they are constructed (see [4], Ch. 10, [14], [8]).

It follows from the above definitions that there exist numbers $\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ such that the scaling equation

$$\phi(x) = 2^d \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \phi(2x - k) \tag{2.1}$$

holds. We define

$$m_0(\xi) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e^{-ik\xi} \tag{2.2}$$

to be the **symbol** of the MRA.

Note m_0 satisfies $\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2)$, where $\widehat{}$ denotes Fourier transform where our convention for the Fourier transform is

$$\widehat{\phi}(\xi) \equiv \mathcal{F}(\phi)(\xi) \equiv (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, e^{-i\xi\cdot x}\, dx,$$

where $\xi \cdot x$ is inner product.

Definition 2.1. Define P_n to be the L_2 orthogonal projection onto V_n with kernel (when it exists) $P_n(x,y)$. We define $P_0 = P$. Given $f \in L_2$,
(i) the **multiresolution approximation** of f is the sequence $\{P_n f\}_n$;
(ii) the **wavelet expansion** of f is

$$\sum_{j;k;\lambda} a_{jk}^\lambda \, \psi_{jk}^\lambda(x) \sim f \tag{2.3a}$$

with a_{jk}^λ the L_2 expansion coefficients of f, and $\sim$ denoting convergence in L_2 ;
(iii) the **scaling-wavelet expansion** of f is

$$\sum_k b_k \, \phi_k(x) + \sum_{j\geq 0;k;\lambda} a_{jk}^\lambda \, \psi_{jk}^\lambda(x) \sim f, \tag{2.3b}$$

where the b_k, a_{jk}^λ are L_2 expansion coefficients, and $\phi_k(x) = \phi(x-k)$.
We say such sums converge in any given sense (e.g., pointwise, in L_p, etc.), if the sums are calculated in such a way that at any stage in the summation there is a uniform bound on the range (largest minus smallest) of j values for which we have only a partial sum over k, λ.

Definition 2.2. The **Sobolev space** $H_2^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$ is defined by

$$H_2^s(\mathbb{R}^d) \equiv \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^d) : ||f||_{H_2^s} \equiv \sqrt{\int |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi} < \infty \right\}.$$

The **homogeneous Sobolev space** is :

$$\widetilde{H}_2^s(\mathbb{R}^d) \equiv \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^d) : ||f||_{\widetilde{H}_2^s} \equiv \sqrt{\int |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{2s} \, d\xi} < \infty \right\}.$$

Note the spaces contain the same functions (by virtue of the fact that $\widetilde{H}_2^s$ is restricted to L^2). Only the norms differ, and the second space is incomplete as defined (its completion contains non-L_2 functions which grow at ∞).
We denote the space $\mathcal{F} H_2^s$ to be the Fourier transforms of functions in H_2^s with the analogous definition for $\mathcal{F} \widetilde{H}_2^s$. In general the **classical Sobolev space** H_p^s on $\mathbb{R}^d$ is defined by

$$H_p^s(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : (1-\Delta)^{s/2} f \in L_p(\mathbb{R}^d) \}$$

for $1 \leq p \leq \infty$, where Δ is the Laplacian, defined by

$$\mathcal{F}\Delta f(x) = -\sum_i \xi_i^2 (\mathcal{F} f)(\xi),$$

and $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ denotes the Fourier variable dual to $x = (x_1, \ldots, x_d)$. The norm is $||f||_{H_p^s(\mathbb{R}^d)} = ||(1-\Delta)^{s/2} f||_{L_p(\mathbb{R}^d)}$. Finally, the **Sobolev space** $W_p^m(\mathbb{R}^d)$ is defined as

$$W_p^m(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) : f^{(j)} \in L_p(\mathbb{R}^d),\ j = 0, 1, 2, \ldots, m \right\},$$

where $f^{(j)}$ is a weak jth derivative. The norm for this space is

$$||f||_{W_p^m(\mathbb{R}^d)} = ||f||_{L_p(\mathbb{R}^d)} + ||f^{(m)}||_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

When $s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ then $H_p^s = W_p^m$ if $1 < p < \infty$.

Definition 2.3. A multiresolution analysis (MRA) or corresponding family of wavelets ψ^λ yields **pointwise order of approximation** (or **pointwise order of convergence**) $s > 0$ in H_2^r if for any $f \in H_2^r$, the nth order approximation $P_n f$ satisfies

$$||P_n f - f||_\infty = O(2^{-ns}), \tag{2.4}$$

as n tends to infinity, if $r - d/2 > 0$ (if $r - d/2 \le 0$ the left side of (2.4) is in fact infinite for some f).
It yields **best pointwise order of approximation (or convergence)** $s > 0$ in H_2^r, if s is the largest positive number such that (2.4) holds for all $f \in H_2^r$. If the supremum s of the numbers for which (2.4) holds is not attained, then we denote the best pointwise order of convergence by s^-. By convention best order of approximation 0 means that the supremum in (2.4) fails to go to 0 ; thus $s \ge 0$ by our definitions.
The MRA yields **optimal order of approximation (or convergence)** s, if s is the best pointwise order of approximation for sufficiently smooth f, i.e. for $f \in H_2^r$ for sufficiently large r (i.e., for $r > R$ for some $R > 0$). Thus this order of convergence is the best possible order in any Sobolev space. We say $s = \infty$ if the best order of approximation in H_2^r becomes arbitrarily large for large r.
In addition, the notion of optimal order can be extended to any scale of spaces $\{X^s\}_{s>0}$ in the same way. In particular, we use this notion for the scale of uniformly local Sobolev spaces $H_{p,ul}^s$ in §6.

Definition 2.4 : A function $f(x)$ on $\mathbb{R}^d$ is **radial** if f depends on $|x|$ only. A real valued radial function is **radial decreasing** if $|f(x)| \le |f(y)|$ whenever $|x| \ge |y|$.
A function $\phi(x)$ is in the radially bounded class **[RB]** if $|\phi(x)| \le \eta(|x|)$, with $\eta(\cdot)$ a decreasing function on $\mathbb{R}^+$, and $\eta(|x|)$ integrable in x.

We say $\phi(x) \in [\mathbf{RB}(\mathrm{N})]$ if $\phi(x) \in [\mathbf{RB}]$ and in addition, we can choose a $\eta(x)$ such that

$$\int \eta(|x|)\,|x|^N\,dx < \infty.$$

With a slight abuse of terminology, a kernel $P(x,y)$ is in $[\mathbf{RB}]$ if $|P(x,y)| \leq \eta(|x-y|)$, where $\eta(|x|)$ is, as above, decreasing in $|x|$ and integrable in x.

§3. BASIC RESULTS FOR SOBOLEV AND BESOV SPACES

We cite a basic result on convergence of wavelet expansions in Sobolev spaces $W_p^m(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Theorem 3.1 [7]. For x on the real line $\mathbb{R}$, assume that the integer translates of a scaling function ϕ of an MRA generate an orthonormal system such that $\phi(x) \in [RB(N+1)]$ for an integer $N \geq 0$. Assume that one or more of the following equivalent conditions hold :

(a) $|m_0(\xi)|^2 = 1 + o(|\xi|^{2N})$ as $\xi \to 0$,

(b) $\int x^n \psi(x)\,dx = 0$ for $n = 0, 1, \ldots, N$, where ψ is the wavelet associated to ϕ,

(c) $\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi) = o(|\xi|^N)$ as $\xi \to 0$ for all $k \neq 0$.

Then $f \in W_p^{N+1}(\mathbb{R})$ if and only if

$$\|P_j f - f\|_p = O(2^{-j(N+1)}) \quad \text{as} \quad j \to \infty, \tag{3.1}$$

for any $p \in [1, \infty]$.

That is, for functions in $W_p^{N+1}(\mathbb{R})$ the rate of convergence for the multiresolution expansion in the p norm is $N+1$. In the next section we will present necessary and sufficient conditions for rates of sup-norm convergence ($p = \infty$) for functions in $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ under the more minimal assumption that $\phi \in [\mathbf{RB}]$. We remark, however, that extension of our results to H_p^s, $1 \leq p < \infty$ will be straightforward. We will also present new results for Besov and uniformly local spaces.

To define Besov spaces on $\mathbb{R}^n$, we proceed as follows ([1]). (For alternative definitions of Besov spaces see [5], [7]).

Definition 3.2. Let $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ be a multiindex with α_i non-negative integers, and define for a function f on $\mathbb{R}^n$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

We define the Schwarz space of rapidly decreasing functions on $\mathbb{R}^n$ by

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f(x) : \|(1+|x|)^b D^\alpha f\|_\infty < \infty \quad \text{for all} \quad b > 0\},$$

where $\|\cdot\|_\infty$ denotes the essential supremum norm.

It can be shown that there exists a function $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ whose support supp ϕ satisfies supp$\phi = \{\xi | 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$, and such that $\phi(x) > 0$ for $2^{-1} < |\xi| < 2$, and $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1$, $(\xi \neq 0)$. We then define functions $\phi_k(x)$ and $\psi(x)$ such that

$$\mathcal{F}\phi_k(\xi) = \phi(2^{-k}\xi), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3.1a}$$

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi). \tag{3.1b}$$

Letting S' denote the dual space, we define for $f \in S'$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$

$$\|f\|_p^{s,q} \equiv \|\psi * f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{sk}\|\phi_k * f\|_p)^q\right)^{1/q},$$

and the Besov space $B_p^{s,q}$ to be all functions for which this norm is finite.

The next theorem gives convergence rates of multiresolution approximations in Besov spaces.

Theorem 3.4 [7]. Let ϕ be a scaling function generating an MRA whose integer translates form an orthonormal system, $\phi \in [RB(N+1)]$ for some integer $N \geq 0$. Assume that ϕ is $N+1$ times weakly differentiable, and that the derivative $\phi^{(N+1)}$ satisfies ess sup$_x \sum_k |\phi^{(N+1)}(x-k)| < \infty$. Then for any $0 < s < N+1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, and any function $f \in L_p$, the following conditions are equivalent :

(a) $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$,

(b) $\|P_j f - f\|_p = 2^{-js}\varepsilon_j$ for $j = 0, 1, \ldots$, with $\{\varepsilon_j\}_j \in l_q$,

(c) $\|\beta\|_p < \infty$ and $\|\alpha_j\|_{l_p} = 2^{-j(s+1/2-1/p)}\varepsilon'_j$, $j = 0, 1, \ldots$, where $\{\varepsilon'_j\} \in l_q$, $\beta = \{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ and $\alpha_j = \{a_{jk}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ (see 2.3(b)).

In §5 we will see that our conditions for convergence rates of expansions of functions in $H_2^s(\mathbb{R}^d)$, together with Besov-Sobolev embedding theorems [5], will lead to a supremum rate of convergence for functions in Besov spaces $B_2^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ (Theorem 5.2 and Corollary 5.5).

§4. POINTWISE CONVERGENCE THEOREMS FOR SOBOLEV SPACES

The results below extend those presented in the previous section to necessary and sufficient conditions for given convergence rates, for expansions in Sobolev spaces on $\mathbb{R}^d$. We remark that these theorems deal with pointwise sup-norm (i.e. L_∞) convergence, but can be extended to convergence results of the same nature for L_p spaces.

The following theorem states that under mild assumptions on the MRA (i.e., that the scaling function or wavelet has a radially decreasing L_1 majorant), for $f \in H_2^s(\mathbb{R}^d)$ the rate of convergence to 0 of the error $||f - P_n f||_\infty$ has sharp order $2^{-n(s-d/2)}$. For the sake of brevity we have summarized four theorems into the following.

Theorem 4.1 [11]. **Given a multiresolution analysis with either**
(i) a scaling function $\phi \in$ **[RB],**
(ii) a family of basic wavelets $\psi^\lambda \in$ **[RB] or**
(iii) a kernel $P(x, y)$ **for the basic projection** P **satisfying** $|P(x,y)| \leq F(x-y)$ **with** $F \in$ **[RB],**

then the following conditions (a to e) are equivalent for $s > d/2$, **with** d **the dimension :**

(a) The multiresolution approximation yields pointwise order of approximation $s - d/2$ **in** H^s.

(b) The projection $I - P_n : \widetilde{H}_2^s \to L^\infty$ **is bounded, with** I **the identity.**

(c) For every family of basic wavelets corresponding to $\{P_n\}_n$, $\psi^\lambda \in \mathcal{F}\widetilde{H}^{-s}$ **for each** λ.

(c′) For every such family of basic wavelets and for each λ

$$\int_{|\xi|<\delta} |\widehat{\psi^\lambda}(\xi)|^2 |\xi|^{-2s} d\xi < \infty \tag{4.1a}$$

for some (or for all) $\delta > 0$.

(d) For every scaling function $\phi \in$ **[RB] corresponding to** $\{P_n\}_n$, $(1 - (2\pi)^{d/2}|\widehat{\phi}|)^{1/2} \in \mathcal{F}\widetilde{H}_2^{-s}$.

(d′) For every such scaling function

$$\int_{|\xi|<\delta} (1 - (2\pi)^{d/2}|\widehat{\phi}(\xi)|)|\xi|^{-2s} d\xi < \infty \tag{4.1b}$$

for some (or all) $\delta > 0$.

(e) For every symbol $m_0(\xi)$ corresponding to $\{P_n\}$

$$\int_{|\xi|<\delta} (1-|m_0(\xi)|^2)|\xi|^{-2s}d\xi < \infty \tag{4.1c}$$

for some (or all) $\delta > 0$.

Statements (c) and (c') are related to the vanishing moment properties of wavelets ψ^λ around the origin, while (d) and (d') are related to so-called Strang-Fix conditions on the scaling function ϕ.

For the remainder of the paper we assume that one of the following conditions holds :

(i) The projection P onto V_0 satisfies $|P(x,y)| \le F(x-y)$ for some $F \in$ [**RB**].

(ii) The scaling function $\phi \in$ [**RB**].

(iii) For a wavelet family ψ^λ, $\psi^\lambda(x)(\ln(2+|x|)) \in$ [**RB**] for all λ.

By representing the kernel of $P(x,y)$ in terms of sums of products involving ϕ or ψ^λ, it is shown in [9] that **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)** and **(iii)** $\Rightarrow$ **(i)**.

We refer to formulas (4.1a, b, c) as motivation for the following definitions.

Definition 4.2. We define for $s, c \ge 0$

$$I_s(c) \equiv \int_{1\ge|\xi|\ge c} \left(1-(2\pi)^{d/2}|\widehat{\phi}(\xi)|\right)|\xi|^{-2s}\,d\xi, \tag{4.2}$$

$$K_s(c) \equiv \sup_\lambda \int_{1\ge|\xi|\ge c} |\widehat{\psi^\lambda}(\xi)|^2|\xi|^{-2s}\,d\xi,$$

$$M_s(c) \equiv \int_{1\ge|\xi|\ge c} (1-|m_0(\xi)|^2)|\xi|^{-2s}\,d\xi.$$

In this paper an often-used consequence of Theorem 4.1 is the existence of a least upper bound σ (best Sobolev parameter) on s, depending only on the MRA, for which (b) of Theorem 4.1 holds. This motivates the following definition.

Definition 4.3. The best Sobolev parameter σ of an MRA is

$$\sigma = \sup\{s>0 \,|\, (I-P) : \widetilde{H}^s_2 \to L_\infty \quad \text{is bounded}\}. \tag{4.3}$$

By convention $\sigma = 0$ if the set in the supremum is empty.

It can be shown that if the best Sobolev parameter $\sigma \ne 0$, then $\sigma > d/2$, and the set $\Sigma \equiv \{s>0 \,|\, (I-P) : \widetilde{H}^s_2 \to L^\infty \quad \text{is bounded}\}$ satisfies $\Sigma = (d/2, \sigma]$ or $\Sigma = (d/2, \sigma)$.

From Theorem 4.1 we have immediately

Proposition 4.4. If the best Sobolev parameter $\sigma \neq 0$, then

$$\sigma = \sup\{s > 0 | I_s(0) < \infty\} = \sup\{s > 0 | K_s(0) < \infty\} = \sup\{s > 0 | M_s(0) < \infty\}. \tag{4.4}$$

In Theorem 4.1 σ is important in that all statements hold only if $s \leq \sigma$. For approximation rates in H_2^s, we have the following, which will appear in [12]. It summarizes convergence rates in all H_2^s in terms of properties of the projections P_n or of integrals involving the wavelets or scaling functions.

Theorem 4.5 [12]. Given a multiresolution approximation $\{P_n\}$,
(o) If $\sigma = 0$, there is no positive order of approximation for the MRA $\{P_n\}$ in any H_2^s, $s \in \mathbb{R}$.
If (o) does not hold then $\sigma > d/2$ and :
(i) For $0 \leq s \leq d/2$ the best pointwise order of approximation in H_2^s is 0 ;
(ii) If $d/2 < s < \sigma$, the best pointwise order of approximation in H_2^s is $r = s - d/2$;
(iii) If $s = \sigma$, the best pointwise order of approximation in H_2^s is

$$r = \begin{cases} \sigma - d/2 & \text{if} \quad I_\sigma(0) < \infty \\ (\sigma - d/2)^- & \text{if} \quad I_\sigma(0) = \infty \end{cases}$$

(iv) If $s > \sigma$, the best pointwise order of approximation in H_2^s is

$$r = \begin{cases} \sigma - d/2 & \text{if} \quad I_{\sigma+1/2}(c) = O(1/c), \quad (c \to 0) \\ (\sigma - d/2)^- & \text{otherwise} \end{cases}$$

(v) In (iii) and (iv) above, $I_s(c)$ can be replaced by $K_s(c)$ or by $M_s(c)$.

Another way to say (iv) is that if $s > \sigma$, then there exists $g \in H_2^s(\mathbb{R}^d)$ such that for all $\varepsilon > 0$, $\sup_j 2^{j(\sigma+\varepsilon-d/2)}\|g - P_j g\|_\infty = \infty$. This says the convergence rate cannot be improved for functions belonging even to very smooth Sobolev spaces, i.e. convergence rates are wavelet dependent. Moreover we note that the value $\sigma + 1/2$ used above in condition (iv) is not crucial for its statement. Equivalent conditions to those in (iv) exist in the form $I_{\sigma+\alpha/2}(c) = O(c^{-\alpha})$ for any (or all) $\alpha > 0$.

In terms of the Sobolev order s of the expanded function f and the best Sobolev parameter σ of the MRA, the diagram above gives rates for an MRA expansion in any Sobolev space (or local Sobolev space ; see §6). The rates on the boundary region $s = \sigma$ in (iii) above are not indicated in the diagram.

We now state our result for optimal pointwise orders of convergence in Sobolev spaces. Recall σ denotes the best Sobolev parameter of $\{P_n\}$, and that optimal order

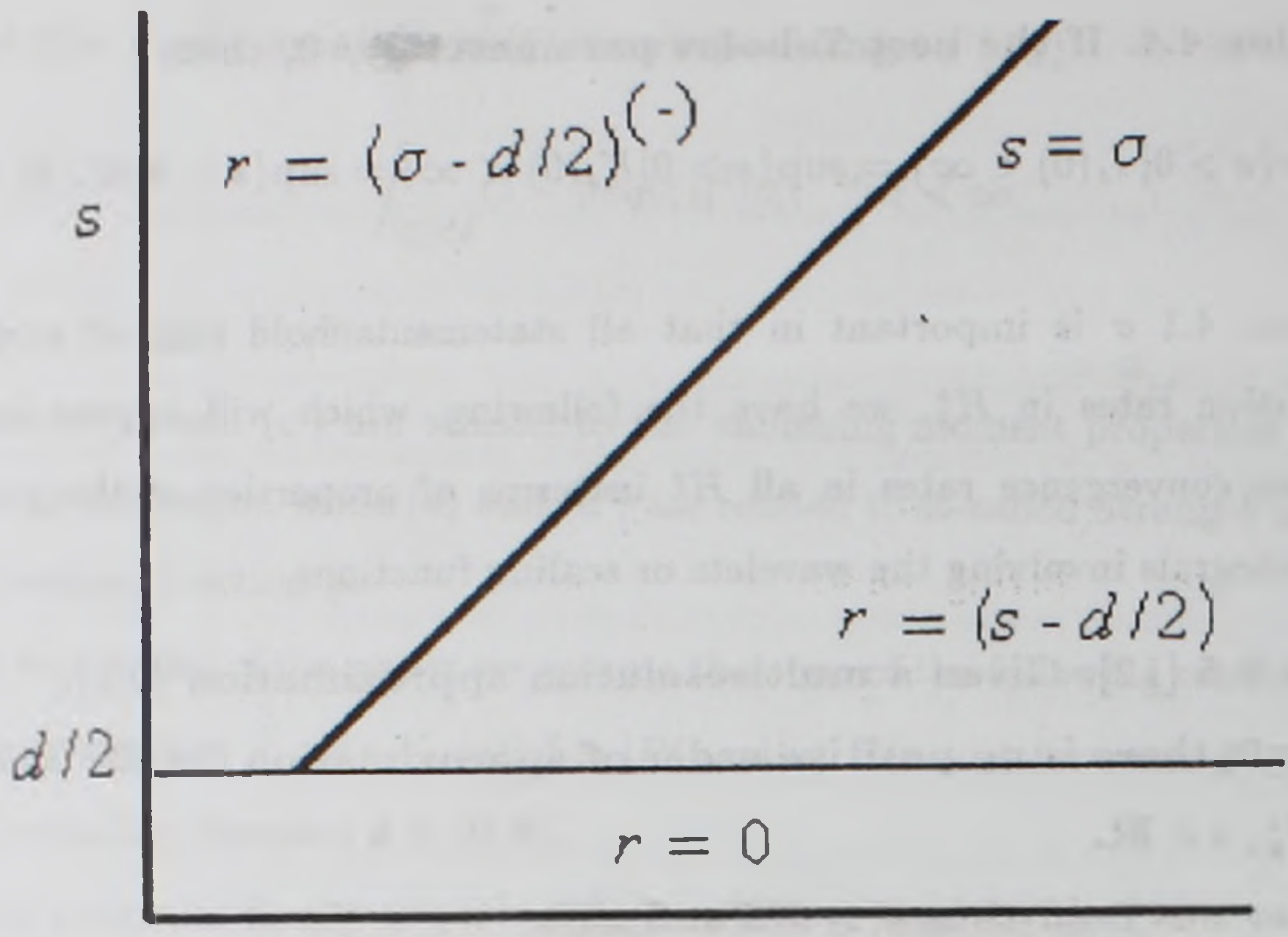

Fig. 1. Approximation rate diagram ; see Theorem 4.5 iii) for rates on the boundary $s = \sigma$. The $(-)$ in $(\sigma - d/2)^{(-)}$ indicates that the superscript $-$ is present only in some cases.

of approximation denotes the highest order of approximation in sufficiently smooth Sobolev spaces.

Corollary 4.6 [12]. If the best Sobolev parameter $\sigma \neq 0$, then the wavelet collection ψ^λ [or scaling function ϕ] yields optimal pointwise order of approximation .

(i) $\sigma - d/2$ if $K_{\sigma+1/2}(c) = O(1/c)$ [where K can be replaced by I or M], and

(ii) $(\sigma - d/2)^-$ otherwise.

This optimal order is attained for all functions f with smoothness greater than σ, i.e. for $f \in H_2^s$ with $s > \sigma$.

Corollary 4.6 gives "best possible" pointwise convergence rates, i.e. convergence rates for the smoothest possible functions. In fact this optimal rate is largely independent of how smoothness is defined, i.e. which particular scale of spaces we are working with. Such a statement is possible because when the smoothness parameter s is sufficiently large, the most used scales of "smoothness spaces" satisfy inclusion relations. For example, for s' large the space $H_2^{s'}$ is contained in the sup-norm Sobolev space H_∞^s and in other L_∞-type Sobolev spaces. Therefore, the optimal rates of convergence given here are upper bounds for convergence rates in all H_∞^s spaces, no matter how smooth.

§5. EXTENSIONS TO BESOV SPACES

Embedding theorems for Besov and Sobolev spaces can be used to extend the Sobolev results in §4 to sup-norm convergence rates for wavelet expansions of functions in Besov spaces.

The basic questions regarding embedding take the form : given a fixed Besov space $B_p^{s,q}$, where s is the smoothness parameter, is it true that every Sobolev space H_2^r is contained in this space for sufficiently large r ? Conversely given a Sobolev space H_2^s and fixed p, q, is it true that $B_p^{r,q}$ is contained in this space for sufficiently large r ? The answer is yes and follows from Sobolev embedding theorems. For such embedding theorems see [1], [5]. We now state only those embedding results for $\mathbb{R}^d$ that we need.

Theorem 5.1. For $s \in \mathbb{R}$ and $1 \leq p \leq \infty$ $B_p^{s,1} \subset H_p^s \subset B_p^{s,\infty}$ on $\mathbb{R}^d$. In particular, $B_2^{s,1} \subset H_2^s \subset B_2^{s,\infty}$.

Combined with Theorem 4.1, this yields the following (best order of approximation is defined in Definition 2.3).

Theorem 5.2. Given a multiresolution approximation $\{P_n\}$, let r be the best order of approximation of P_n in H_2^s, as given in Theorem 4.5. Then the order of approximation in the Besov space $B_2^{s,1}$ is at least r, while in $B_2^{s,\infty}$ it is at most r.

In order to obtain results on optimal orders of convergence we need the following.

Lemma 5.3. Let $2 \leq p \leq \infty$, and $q \geq 1$. Given $s \in \mathbb{R}$, for sufficiently large s_1, we have

$$H_2^{s_1} \subset B_p^{s,q}. \tag{5.1a}$$

Similarly, if $1 \leq p \leq 2$, then for sufficiently large s_1

$$B_p^{s_1,q} \subset H_2^s. \tag{5.1b}$$

In order to obtain exact optimal sup-norm orders of convergence for functions in Besov spaces we compare the scales $\{H_2^s\}_s$ and $\{B_p^{s,q}\}_s$, for fixed p and q. To this end, note that by the above inclusions we have :

Corollary 5.4. For any $1 \leq q \leq \infty$, the scales of spaces $\{H_2^s\}_{s\geq 0}$ and $\{B_2^{s,q}\}_{s\geq 0}$ are intertwined ; that is, for any fixed s and sufficiently large s_1, $H_2^{s_1} \subset B_2^{s,q}$ and $B_2^{s_1,q} \subset H_2^s$.

The next corollary allows us to find precise optimal convergence rates in the scale $\{B_2^{s,q}\}_{s\geq 0}$ for any fixed q. Since this scale intertwines with the scale $\{H_2^s\}_{s\geq 0}$, the optimal rate must be the same, namely :

Corollary 5.5. If the best Sobolev parameter $\sigma \neq 0$, then in the scale $\{B_2^{s,q}\}_{s\geq 0}$ of L_2-Besov spaces, the wavelet collection ψ^λ [or scaling function ϕ] has optimal pointwise order of approximation given by (i) $\sigma - d/2$ if $K_{\sigma+1/2}(c) = O(1/c)$ and (ii) $(\sigma - d/2)^-$ otherwise. (Here K can be replaced by I or M).

§6. POINTWISE CONVERGENCE IN UNIFORMLY LOCAL SOBOLEV SPACES

In this section we will see that the diagram in the figure in §4. Above also applies to expansions of functions in uniformly local spaces $H^s_{2,ul}$, when the decay rate t of the scaling function satisfies $t - d \geq s$ (Theorem 6.2 below). In addition, on compact subsets the rates in the diagram apply to functions in local Sobolev spaces $H^s_{2,\mathrm{loc}}$, when the wavelet has compact support.

The study of convergence properties in local rather than global Sobolev spaces is a naturally motivated pursuit, given that pointwise convergence properties should be determined strictly locally for compact wavelets, and essentially locally (i.e. with small modifications) for wavelets with rapid decay.

Definition 6.1. The **decay rate** of a function ϕ is

$$\sup\{t : |\phi(x)| \leq K|x|^{-t} \quad \text{for some} \quad K > 0\}.$$

We will assume here our decay rates t are positive unless otherwise specified.

The **local Sobolev space** $H^s_{2,\mathrm{loc}}$ is $\{f \in L_2(\mathbb{R}^d) : f\eta \in H_2^s \quad \text{for all} \quad \eta \in C_0^\infty\}$, where C_0^∞ is compactly supported C^∞-functions.

The **uniformly local Sobolev space** $H^s_{2,ul}$ is $\{f \in L_2(\mathbb{R}^d) : \|f\|_s^{ul} < \infty\}$, where the uniformly local norm $\|\cdot\|_s^{ul}$ is defined by

$$\|f\|_s^{ul} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|f\|_{s,B_x},$$

with B_x is the unit ball centered at x, where the local norm is defined by

$$\|f\|_{s,B_x} \equiv \inf_{f^*|_{B_x}=f,\, f^*\in H_2^s} \|f^*\|_{H_2^s}. \tag{6.1}$$

Similarly, the space $H_p^s \equiv \{f \in L^p : (1-\Delta)^{s/2} f \in L^p\}$ has a local version $H^p_{s,ul}$ defined analogously to the above with the norm $\|f^*\|_{H_2^s}$ in (6.1) replaced by the norm of the Sobolev space H_p^s.

As their name implies, these spaces are local versions of the global Sobolev spaces H_p^s. By definition, $f(x)$ is in the purely local space $H^p_{s,\mathrm{loc}}$ if the product $f\eta \in H_p^s$ for any compactly supported smooth function $\eta(x)$. Membership in a uniformly local space, on the other hand, requires that the size of $f\eta$ be uniformly bounded if $\eta(x)$ is translated to $\eta(x-a)$ for any $a \in \mathbb{R}^d$. Thus uniformly local spaces are not entirely local because of global sup-norm constraints on the local norms.

An important property of the scale of uniformly local spaces is that there are bi-directional inclusions among the spaces $H^s_{p,ul}$ for different values of p. Thus, for example, for any p and q (including ∞), and for sufficiently large r, the space $H^r_{p,ul}$ is contained in the space $H^s_{q,ul}$. More interestingly, this type of inclusion also includes H^s_∞ and related standard spaces of functions with bounded derivatives.

This is useful in the following way. First, if $\phi(x)$ has decay rate t (Definition 6.1) with $t - d \geq \sigma - d/2$ (which holds, for example, for all r-regular wavelets [14]), then Corollary 4.6 implies the optimal convergence rate in any scale of uniformly local spaces $H^p_{s,ul}$ (including $p = \infty$) is either $\sigma - d/2$ or $(\sigma - d/2)^-$, i.e., the same as in the Corollary. Now this result for the spaces $H^r_{p,ul}$ can be broadened to more general scales of smoothness spaces using the above inclusions. This includes spaces of functions defined by L_∞ bounds on their derivatives. The caveat, however, is that the scaling function ϕ must have the above sufficiently rapid decay.

With this motivation, we present convergence rate results for uniformly local Sobolev spaces. The results below are for the spaces $H^s_{2,ul}$ and can be extended to other scales of spaces via the above-mentioned inclusions. The results for $H^s_{2,ul}$ are essentially local versions of the above rates of convergence results, modulo the spatial uniformity assumptions on functions in $H^s_{2,ul}$. However, the uniformity conditions are not restrictive: for example, similar uniformity assumptions also hold, e.g., for L_∞ Sobolev spaces. We assume our working spaces have uniformly bounded local L_2 Sobolev norms rather than L_∞ Sobolev norms, since the latter are more difficult to work with in the present context. Our results will also directly extend to local Sobolev spaces $H^s_{2,\mathrm{loc}}$ with some caveats.

Recall from the definitions that approximation order 0 in a space X means the error $(I - P_n)f$ fails to have any positive rate of decay for some $f \in X$. Proofs of Theorem 6.2 and Corollary 6.3 will appear in [12].

Theorem 6.2 (Localization). The multiresolution or wavelet expansion

(2.3) corresponding to a scaling function $\phi \in$ [RB] has a best pointwise approximation order of at least $\min(r, t-d)$ in $H^s_{2,ul}$, with r the rate of best approximation in H^s_2 and $t > d$ the decay rate of ϕ.

The proofs of these uniform convergence results for uniformly local Sobolev spaces use embedding theorems that reduce the proof to the case $p = 2$ and write f in $H^s_{2,ul}(\mathbb{R}^d)$ as a decomposition of its local and global parts.

Corollary 6.3. If the best Sobolev parameter $\sigma \leq t - d/2$ (where t is the decay rate of ϕ), then :

(a) The optimal approximation order in the scale of spaces $H^s_{2,ul}$ is exactly $\sigma - d/2$ if $I_{\sigma+1/2}(c) = O(1/c)$ [where I can be replaced by K or M], and $(\sigma - d/2)^-$ otherwise.

(b) The same exact optimal approximation order holds in the scale of uniformly local spaces $H^s_{p,ul}$ for fixed $1 \leq p \leq \infty$, and in particular also in the scale $H^s_{\infty,ul}$ and thus H^s_∞.

Proposition 6.4. If ϕ is compactly supported, the best pointwise approximation rate for the expansion of any $f \in H^s_{2,\mathrm{loc}}$ on any compact $K \subset \mathbb{R}^d$ is the same as the rate for the global space H^s_2.

§7. EXAMPLES

To illustrate these results we briefly mention applications to some well-known wavelet approximations. Details for these rates of convergencies for $H^s_2(\mathbb{R}^1)$ will appear in [12].

7.1. Haar wavelets. By Theorem 4.5, Haar expansions in H^s_2 have best order of convergence

$$r = \begin{cases} 0, & s \leq 1/2 \\ s - 1/2, & 1/2 < s < 3/2, \\ 1^-, & s = 3/2 \\ 1, & s > 3/2. \end{cases} \tag{7.1}$$

By Corollary 4.6, the optimal approximation order for such expansions (i.e. for arbitrarily smooth functions) is 1. The optimal order in scale of Besov spaces $B^{s,q}_2$ is the same as the optimal order in the scale of L_2 Sobolev spaces H^s_2.

By Theorem 6.2 these same orders also hold in the uniformly local Sobolev spaces H^s_{ul}. Since ϕ is compactly supported, these orders of convergence for $f(x)$ hold uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}^d$, for any $f \in H^s_{2,\mathrm{loc}}$ by Proposition 6.4. By Corollary 6.3 this optimal order also holds, among others, in the scale H^s_∞ of L_∞ Sobolev spaces.

7.2. Meyer wavelets. In the case of Meyer wavelets, $\widehat{\phi} \in C_0^\infty$ and $\sigma = \infty^-$. So we have order of convergence $s - 1/2$ in every Sobolev space H_2^s, $s > 1/2$, with a convergence order of 0 for $s \leq 1/2$. Thus, $f \in \cap_s H^s$ in the intersection of all Sobolev spaces, the convergence is faster than any finite order r.

If $p = 2$, the optimal order in scale of Besov spaces is the same as the optimal order in the scale of Sobolev spaces. By Theorem 6.2 the same holds in $H_{2,ul}^s$. Thus, the optimal order of convergence is ∞, i.e. convergence rates have no wavelet-based limitations for very smooth f.

7.3. Battle Lemarié wavelets. By Theorem 4.5, Battle-Lemarié expansions (as well as order one spline expansions - note the scaling spaces V_j are the same) have order of convergence

$$r = \begin{cases} 0, & s \leq 1/2, \\ s - 1/2, & 1/2 < s < 5/2 \\ 2^-, & s = 5/2 \\ 2, & s > 5/2 \end{cases} \tag{7.2}$$

in H_2^s. Again, if $p = 2$, the optimal order in scale of Besov spaces is the same as the optimal order in the scale of Sobolev spaces.

In the uniform local spaces $H_{2,ul}^s$ the same approximation rates again hold. Analogous results hold for the higher order versions of these spline wavelets, as well as the corresponding spline expansions.

7.4. Daubechies wavelets. For standard Daubechies wavelets of order 2, by Theorem 4.5 for H_2^s, the best order of approximation is (7.2).

Similar analyses can be done for higher order Daubechies expansions. As above, if $p = 2$, the optimal order in the scale of Besov spaces is the same as the optimal order in the scale of Sobolev spaces. As before the global space H_2^s can be replaced by the uniformly local space $H_{2,ul}^s$. The optimal order of convergence for these Daubechies wavelets is 2. Since the wavelets are compactly supported, these are entirely local results, and for any $f \in H_{2,\mathrm{loc}}^s$, these exact approximation rates hold uniformly on any compact $K \subset \mathbb{R}^d$.

Acknowledgments : The first author thanks the National Science Foundation for its support. The second author is especially appreciative to the organizers of the International Armenian Conference for this opportunity to participate, and to Ronald DeVore for sharing his insights into Besov space embedding theorems.

АБСТРАКТ. В статье приведены новые условия для скоростей равномерной поточечной сходимости всплесковых разложений в бесовском и равномерно локальном соболевском пространствах.

REFERENCES

1. J. Bergh, J. Löfstrom, Interpolation Spaces, Springer, New York, 1976.
2. C. deBoor, R. DeVore, A. Ron, "The structure of shift invariant spaces and applications to approximation theory", J. Func. Anal., vol. 119, pp. 37 — 78, 1994.
3. A. Cohen, R. DeVore, G. Kerkyacherian, D. Picard, Maximal spaces and given rates of convergence for threshholding algorithms, preprint [http ://www.math.sc.edu/~devore/publications/Research/Articles.html].
4. I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM, 1992.
5. R. DeVore, Nonlinear Approximation, Acta Numerica, pp. 51 — 151, 1998.
6. R. DeVore, P. Petrushev, V. Temlyakov, "Nonlinear approximation by trigonometric sums", J. of Fourier Analysis and Applications, vol. 1, pp. 29 — 48, 1995.
7. W. Härdle, G. Kerkyacharian, D. Picard, A. Tsybakov, Wavelets, Approximation, and Statistical Applications in Lecture Notes in Statistics, vol. 129, 1998.
8. E. Hernandez, G. Weiss, First Course in Wavelets, CRC Press, 1996.
9. S. Kelly, M. Kon, L. Raphael, "Local convergence of wavelet expansions", J. Func. Anal., vol. 126, pp. 102 — 138, 1994.
10. S. Kelly, M. Kon, L. Raphael, "Pointwise convergence of wavelet expansions", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 30, pp. 87 — 94, 1994.
11. M. Kon, L. Raphael, "Convergence rates of multiresolution and wavelet expansions", to appear in Wavelet Transforms and Time-Frequency Signal Analysis, CBMS Conference Proceedings, L. Debnath, Ed., Chapter 2, pp. 37 — 65, 2001.
12. M. Kon, L. Raphael, "A characterization of wavelet convergence in Sobolev spaces", to appear, J. Applicable Analysis.
13. S. Mallat, "Multiresolution approximation and wavelets", Trans. Am. Math. Soc., vol. 315, pp. 69 — 88, 1989.
14. Y. Meyer, Ondelettes, Hermann, Paris, 1990.
15. G. Strang, G. Fix, "A Fourier analysis of the finite element variational method", Constructive Aspects of Functional Analysis, Edizioni Cremonese, Rome, 1973.
16. G. Walter, "Approximation of the delta function by wavelets", J. Approximation Theory, vol. 71, pp. 329 — 343, 1992.

26 April 2001

Boston University, USA
Howard University, USA
E-mails : mkon@bu.edu
lar@scs.howard.edu

О ТЕОРЕМАХ ЛЕВИ И МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

П. Л. Ульянов

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

Даны модуль непрерывности $\omega(\delta) \not\equiv 0$, $\delta \in [0,\infty)$, $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ и положительная последовательность $\tau = \{\tau(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Определим класс $A_{\omega,\tau}(T)$ как множество функций $f \in L(0,2\pi)$ с конечной "нормой" $\|f\|_{\omega,\tau} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(c_n(f))\,\tau(n)$. В статье доказываются теоремы типа Леви–Марцинкевича для класса $A_{\omega,\tau}(T)$.

Пусть E – линейное множество функций $f(t)$, определённых на отрезке $[0,2\pi]$ (или на $[0,1]$). В случае отрезка $[0,2\pi]$ функции $f(t)$ предполагаются 2π-периодическими. Будем говорить, что множество E является банаховой алгеброй, если E есть банахово пространство и из $f,g \in E$ следует

$$f \cdot g \in E \quad \text{и} \quad \|f \cdot g\|_E \le \|f\|_E \cdot \|g\|_E.$$

Пусть $T = \{e^{int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – тригонометрическая система на $[0,2\pi]$, а $\varphi = \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормальная система на $[0,1]$. Пусть $f \in L(0,2\pi)$, $\alpha \in (0,2)$ и

$$A_\alpha = A_\alpha(T) = \{f : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^\alpha < \infty\}, \quad \text{где} \quad c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

В 1932 году Винер доказал в связи тауберовыми теоремами, что если $f \in C(0,2\pi)$ и $f(t) \ne 0$ при всех $t \in [0,2\pi]$, то из $f \in A_1(T)$ следует $1/f \in A_1(T)$. Винер также доказал, что класс $A_1(T)$ есть банахова алгебра с нормой

$$\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|.$$

В 1934 году П. Леви (см. [1], стр. 640) доказал, что если $f \in A_1(T)$, а F аналитична на множестве $f([0,2\pi])$, то $F(f) \in A_1(T)$. Здесь считаем, что

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00062) и научной школы (проект 00-15-96143).

функция f непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $f([0, 2\pi])$ обозначает множество всех значений функции $f(t)$, когда t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$.

В связи с этим, Леви поставил задачу : какие функции F действуют внутри класса $A_1(T)$.

Нам понадобится определение.

Для заданного число $\beta > 0$ и интервала $I = (a, b)$, будем говорить, что функция F принадлежит классу Жеврея $J_\beta(I)$, если на любом компакте $K \subset (a, b)$

$$|F^{(n)}(t)| \leq B^n \; n^{n\,\beta} \quad \text{при всех} \quad t \in K, \quad n = 1, 2, ..,$$

где $B = B(F, K)$.

Согласно теореме Принсгейма, при $\beta = 1$ класс Жеврея $J_1(I)$ совпадает с классом аналитических функций на $I = (a, b)$. Кроме того, классы $J_\beta(I)$ увеличиваются при возрастании β.

В 1958 году Кацнельсон (см. [2], стр. 92) доказал обратное утверждение к теореме Леви : если F определена на отрезке $[A, B]$ и для всякой функции $f \in A_1(T)$ такой, что $f([0, 2\pi]) \subset [A, B]$, функция $F(f)$ принадлежит $A_1(T)$, то F аналитична на $[A, B]$. Соединение теорем Леви и Кацнельсона влечёт

Теорема A (Леви, Кацнельсон). Лишь аналитические функции F действуют из класса $A_1(T)$ в класс $A_1(T)$, т.е. $F(f) \in A_1(T)$, если $f \in A_1(T)$.

В 1940 году Марцинкевичем [3] было доказано, что если $f \in A_\alpha(T)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и $F \in J_{1/\alpha}(a, b)$ на интервале $(a, b) \supset f([0, 2\pi])$, то $F(f) \in A_1(T)$.

Позднее было замечено, что в теореме Марцинкевича функция $F(f)$ принадлежит классу $A_\alpha(T)$.

В 1966 году Ривьер и Сагер [4] установили следующий результат : если функция F определена на интервале $I = (a, b)$ и для любой функции $f \in A_s(T)$, $s \in (0, 1]$ такой, что $f([0, 2\pi]) \subset (a, b)$, функция $F(f)$ принадлежит $A_p(T)$ с $p < 2$ (p зависит от f), то $F \in J_{1/s}(I)$.

Для случая $s = 1$ этот результат был рассмотрен Хелсоном, Каханом, Кацнельсоном и Рудиным (см. [2]). Таким образом, из результатов Марцинкевича, Ривьера и Сагера получаем следующую теорему.

Теорема B. Если $\alpha \in (0, 1)$, то лишь функции F из класса Жеврея $J_{1/\alpha}$ действуют из класса $A_\alpha(T)$ в класс $A_\alpha(T)$.

Для заданного модуля непрерывности $\omega(\delta) \not\equiv 0$, $\delta \in [0, \infty)$, $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ и положительной последовательности $\tau = \{\tau(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, определим класс $A_{\omega,\tau}(T)$

как множество функций $f \in L(0, 2\pi)$ с конечной "нормой"

$$\|f\|_{\omega,\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(c_n(f))\,\tau(n).$$

Попытаемся установить теоремы типа Леви–Марцинкевича для класса $A_{\omega,\tau}(T)$. Мы не знаем окончательных результатов даже для случая $\tau(n) = 1$ (некоторые сведения можно найти в [2] и [7]).

Рассмотрим теперь ряды по системе Хаара $\chi = \{\chi_m\}_{m=1}^{+\infty}$, где указанные выше вопросы разработаны нами более обстоятельно (см. [5], [6], [8–10]). Для формулировки окончательного результата для системы Хаара нам понадобятся некоторые определения.

Для нетривиального модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $\delta \in [0, \infty)$ с условием $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ и положительной последовательности $\tau = \{\tau(m)\}_{m=1}^{\infty}$ определим классы функций

$$A_{\omega,\tau} = A_{\omega,\tau}(\chi) = \{f : f \in L(0,1), A_{\omega,\tau}(f) < \infty\},$$

где

$$A_{\omega,\tau}(f) = \sum_{m=2}^{\infty} \omega(a_m(f))\,\tau(m) \quad \text{и} \quad a_m(f) = \int_0^1 f(t)\,\chi_m(t)\,dt.$$

При $\tau(m) \equiv 1$ положим $A_\omega = A_{\omega,\tau}$ и $A_\alpha = A_{\delta^\alpha}$ с $0 < \alpha \le 1$, т.е. для случая $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 \le \delta < \infty$ (здесь мы имеем $\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)|^\alpha < \infty$).

Обычно последовательность $\{\tau(m)\}_{m=1}^{\infty}$ задаётся через функцию $\tau(t)$, определённую на $[1, \infty)$. В дальнейшем нам понадобится функция $F(t)$, заданная на прямой $(-\infty, \infty)$ и принадлежащая классу $\mathrm{Lip}_M 1$, т.е.

$$|F(t_1) - F(t_2)| \le M|t_1 - t_2| \quad \text{при всех } t_1 \text{ и } t_2 \text{ из } (-\infty, \infty).$$

Для системы Хаара нами была доказана следуюшая теорема (см. [5] и [6]).

Теорема С. Пусть даны число $\alpha \in (0, 1]$ и конечная функция $F(t)$, определённая на $(-\infty, +\infty)$. Тогда необходимым и достаточным условием для $F(f) \in A_\alpha$ при всех $f \in A_\alpha$ является существование числа M, для которого $F \in \mathrm{Lip}_M 1$. Более того, справедлива оценка

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(F(f))|^\alpha \le \gamma_\alpha M^\alpha \sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)|^\alpha \quad \text{при всех} \quad f \in A_\alpha,$$

где

$$\gamma_\alpha = \frac{2^{\alpha/2} + 2^\alpha}{2^\alpha - 1}.$$

Ясно, что условия налагаемые на функцию F не зависят от величины α и, они более общи, чем для тригонометрической системы, где предполагалось, что F или аналитична ($\alpha = 1$), или принадлежит классу Жеврея ($0 < \alpha < 1$).

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения.

Конечная положительная функция $\varphi(t)$, определённая на интервале (a, b), называется почти возрастающей с постоянной $C_1 > 0$, если $\varphi(t_1) \le C_1 \varphi(t_2)$ при любых t_1 и t_2, удовлетворяющих условию $a < t_1 < t_2 < b$. Аналогично, $\varphi(t)$ называется почти убывающей, если существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что $\varphi(t_1) \ge C_2 \varphi(t_2)$ при любых t_1 и t_2, удовлетворяющих условию $a < t_1 < t_2 < b$. Аналогичные определения вводятся для отрезков, для прямой и полупрямой.

Будем говорить, что почти возрастающая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию на $[1, \infty)$, если существует положительная постоянная C_3 такая, что $\varphi(2t) \le C_3 \varphi(t)$ при всех $t \in [1, \infty)$. Аналогично, будем говорить, что почти убывающая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию на $[1, \infty)$, если существует положительная постоянная C_4 такая, что $\varphi(t) \le C_4 \varphi(2t)$ при всех $t \in [1, \infty)$. Ниже всегда C_i $(i = 1, 2, \ldots)$ обозначают положительные постоянные. Если проанализировать наши рассуждения в статьях [8–10], то убедимся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, а $\tau(t)$ – почти возрастающая (или почти убывающая) функция, удовлетворяющая Δ_2-условию. Тогда неравенство

$$A_{\omega,\tau}(F(f)) \le C_{\omega,\tau,F}\, A_{\omega,\tau}(f), \tag{1}$$

выполнено при всех $f \in L(0,1)$ и всех $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ для некоторой постоянной $C_{\omega,\tau,F}$, тогда и только тогда, когда неравенство

$$\int_{\alpha_n}^{1} \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\, \tau(2^n\, t^2)\, dt \le C_5\, \tau(2^n)\, \omega(\delta) \tag{2}$$

выполняется для всех $\delta > 0$, $\alpha_n = 2^{-n/2}$ и $n = 1, 2, \ldots$.

С помощью простых рассуждений из неравенства (2) выводится ряд интересных следствий.

Предложение 1. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства

$$A_\omega(F(f)) \le C_{\omega,F}\, A_\omega(f) \tag{3}$$

при всех $f \in L(0,1)$ и всех $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ является следующее условие :

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt \le C_6\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad 0 < \delta < \infty. \tag{4}$$

Доказательство : Положим в Теореме 1 функцию $\tau(t) = 1$ при всех $t \ge 1$. Тогда из (1) и (2) получаем, что неравенство (3) выполняется при всех $f \in L(0,1)$ и всех $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при } \delta > 0 \text{ и } n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Так как (5) выполнено при всех $n = 1, 2, \ldots$, то оно эквивалентно (переходя к пределу при $n \to \infty$) следующему неравенству :

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta > 0. \tag{6}$$

Делая замену переменной $\delta\, t = u$, получаем

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u}\,du \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta > 0.$$

Из вышесказанного следует, что неравенство (3) эквивалентно условию (4). Предложение 1 доказано.

Отметим, что условие вида (4) было у Н. К. Бари в 1955 г., для случая $\delta \in (0,\pi]$, а ещё ранее в 1953 г. в наших работах (см. об этом [11] и [12]), но в другой форме.

Предложение 2. Пусть $\tau_\alpha = \tau_\alpha(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$. Для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ неравенство

$$A_{\omega,\tau_\alpha}(F(f)) \le C_{\omega,\tau_\alpha,F}\, A_{\omega,\tau_\alpha}(f) \tag{7}$$

выполняется при всех $f \in L(0,1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$.

Доказательство : В силу Теоремы 1 для выполнения неравенства (7) необходимо и достаточно, чтобы (см. (2))

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t} t^{2\alpha}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0 \text{ и } n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Переходя к пределу в (8) при $n \to \infty$, получаем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t^{1-2\alpha}}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0. \tag{9}$$

Так как всякий модуль непрерывности удовлетворяет неравенству $\omega(\delta\, t) \le \omega(\delta)$ при $0 \le t \le 1$, то для $\alpha > 0$ имеем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t^{1-2\alpha}}\,dt \le \omega(\delta) \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-2\alpha}} = \frac{\omega(\delta)}{2\alpha},$$

т.е. неравенство (9) выполнено для любых модулей непрерывности. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности и $\tau_\beta = \tau_\beta(t) = (\log 2t)^\beta$, $\beta > 0$. Тогда неравенство

$$A_{\omega,\tau_\beta}(F(f)) \le C_{\omega,\tau_\beta,F}\, A_{\omega,\tau_\beta}(f) \tag{10}$$

выполнено при всех $f \in L(0,1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ тогда и только тогда, когда справедливо (4). (Здесь и ниже логарифмы берутся по основанию 2).

Доказательство : Необходимость условия (4). В силу Теоремы 1 для выполнения (10) необходимо, чтобы

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t} \log^\beta(2^{n+1}t^2)\, dt \le C_5 \log(2^{n+1})^\beta\, \omega(\delta) \tag{11}$$

при всех $\delta > 0$ и $\alpha_n = 2^{-n/2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для произвольного натурального n_0 из (11) имеем

$$\int_{\alpha_{n_0}}^1 \frac{\omega(\delta t)}{t} \left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta dt \le C_5\, \omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0 \text{ и } n \ge n_0. \tag{12}$$

Но на отрезке $[\alpha_{n_0}, 1]$ имеют место оценки

$$1 \ge \left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta \ge \left(\frac{n+1-n_0}{n+1}\right)^\beta = \left(1 - \frac{n_0}{n+1}\right)^\beta \quad \text{при} \quad n \ge n_0.$$

Следовательно, функции

$$\left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta$$

сходятся равномерно к 1 на отрезке $[\alpha_{n_0}, 1]$ при $n \to \infty$. Поэтому из (12) следует (при $n \to \infty$)

$$\int_{\alpha_{n_0}}^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\, dt \le C_5\, \omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0.$$

Так как n_0 произвольно, то из этого неравенства получаем (6), что влечёт (4).

Достаточность условия (4). Если выполнено (4), то выполнено и неравенство (11), так как

$$\left(\frac{\log(2^{n+1}t^2)}{\log 2^{n+1}}\right)^\beta \le 1 \quad \text{при } \beta > 0 \text{ и } \alpha_n \le t \le 1\ ),$$

т.е. $2 \le 2^{n+1t^2} \le 2^{n+1}$. Но в силу Теоремы 1 условие (11) достаточно для (10), что и требовалось доказать.

Предложение 4. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, а $\tau_\gamma = \tau_\gamma(t) = t^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Тогда неравенство

$$A_{\omega,\tau_\gamma}(F(f)) \le C_{\omega,\tau_\gamma,F}\, A_{\omega,\tau_\gamma}(f) \tag{13}$$

выполняется при всех $f \in L(0,1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t^{1+2\gamma}}\,dt \le C_6\,\delta^{-2\gamma}\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0. \tag{14}$$

Доказательство : По Теореме 1 для выполнения неравенства (13) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\alpha_n}^\delta \frac{\omega(\delta\, t)}{t}\,\frac{1}{2^n\, t^{2\gamma}}\,dt \le C_5\,\frac{1}{2^{n\gamma}}\,\omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0 \text{ и } n = 1, 2, \ldots.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, t)}{t^{1+2\gamma}}\,dt \le C_5\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0.$$

Делая в интеграле подстановку $\delta\, t = u$, получаем

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u^{1+2\gamma}}\,du \le C_5\,\delta^{-2\gamma}\,\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta > 0,$$

т.е. (14). Предложение 4 доказано.

Замечание 1. Для $\gamma \ge 1/2$ условие (14) выполняется лишь при $\omega(\delta) \equiv 0$, так как в противном случае всегда $\omega(\delta) \ge C_7\,\delta$ при $0 < \delta \le 1$ $(C_7 > 0)$. Следовательно, в этом случае интеграл в (14) расходится и (14) не выполняется. Поэтому условие (14) имеет содержательный смысл при $0 < \gamma < 1/2$.

Замечание 2. Условие (2) в некоторых случаях можно преобразовать. Например, пусть $\tau(t)$ почти возрастает и удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда

$$\tau(2^n\, t^2) \le C_1\,\tau(2^n) \quad \text{при} \quad \alpha_n \le t \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Если выполнено условие (4), то имеем

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta\, u)}{u}\,du \le C_6\,\omega(\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta > 0.$$

Следовательно (см. (15)), получаем

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, u)}{u}\,\tau(2^n\, u^2)\,du \le C_1\,C_6\,\tau(2^n)\,\omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому из Теоремы 1 вытекает, что условие

$$\int_{\alpha_n}^1 \frac{\omega(\delta\, u)}{u}\,\tau(2^n\, u^2)\,du \le C_8\,\tau(2^n)\,\omega(\delta) \quad \text{при всех } \delta > 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

достаточно для (1). Поэтому, из условия (4) всегда вытекает (1).

Замечание 3. Если функция $\tau(t)$ почти возрастающая и удовлетворяет Δ_2-условию, то её рост не быстрее, чем At^σ для некоторых положительных чисел A и σ, т.е. $\tau(t)$ возрастает не быстрее чем степенная функция. Кроме того, для целых $p \in [1, 2^n]$ и $n \in N$ имеем

$$\frac{1}{C_1 C_3} \le \frac{\tau(2^n+p)}{\tau(2^{n+1})} \le C_1,$$

т.е. в пачке $[2^n+1, 2^n+2, \dots, 2^{n+1}]$ функция $\tau(m)$ растёт в ограниченных пределах, не зависящих от n.

Тем не менее справедлива следующая теорема (см. [8, [9]).

Теорема 2. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, а $\tau(t)$ – почти возрастающая функция на $[0,\infty)$ и

$$\tau(2^{n+1}) \le C_9\, \tau(2^n) \quad \text{при} \quad n = 0, 1, \dots. \tag{16}$$

Тогда, чтобы выполнялось (1) при всех $f \in L(0,1)$ и $F \in \mathrm{Lip}_M 1$ необходимо и достаточно выполнение условия (2).

Здесь Δ_2-условие заменено на (16). Отметим, что условие (16) ограничивает изменение $\tau(m)$ только в n-ой пачке $[2^n+1, 2^n+2, \dots, 2^{n+1}]$, но не ограничивает их рост по разным пачкам.

Заметим, что по системе Хаара даже множество A_1 не является алгеброй, так как существует $f \in A_1$, для которого $f^2 \notin A_1$. В связи с этим, нужны какие-то ограничения. Положим $A_\omega^{(\infty)} = A_\omega \cap L^\infty$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Для того, чтобы $A_\omega^{(\infty)}$ была алгеброй и имело место неравенство $A_\omega(f^2) \le C_\omega\, A_\omega(f)$ для $f \in A_\omega^{(\infty)}$, с $\|f\|_\infty = 1$, необходимо и достаточно выполнения условия (4) при $\delta \in (0,1]$.

Теорема 4. Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности. Тогда, чтобы $A_\omega^{(\infty)}$ была алгеброй и имело место неравенство $A_\omega(f^2) \le C_\omega\, A_\omega(\|f\|_\infty \cdot f)$ для всех $f \in A_\omega^{(\infty)}$ необходимо и достаточно выполнения условия (4) при $0 < \delta < \infty$.

Замечание 4. Автору не известны по рассматриваемой тематике окончательные результаты для различных одномерных или кратных ортогональных систем (тригонометрическая, Уолша, Франклина, Чисельского, всплески и др.).

ABSTRACT. Given a modulus of continuity $\omega(\delta) \not\equiv 0$, $\delta \in [0,\infty)$, $\omega(-\delta) = \omega(\delta)$ and a positive sequence $\tau = \{\tau(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, define the class $A_{\omega,\tau}(T)$ as the set of functions $f \in L(0,2\pi)$ with finite "norm" $\|f\|_{\omega,\tau} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \omega(c_n(f))\,\tau(n)$. The paper attempts to prove Levy–Marcinkiewicz type theorems for the class $A_{\omega,\tau}(T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
2. Ж.- П. Кахан, Абсолютно Сходяшиеся Ряды Фурье, Мир, Москва, 1976.
3. J. Marcinkiewicz, "Sur la convergence absolue des series de Fourier", Mathematica, Cluj, vol. 16, pp. 66 — 73, 1940.
4. N. M. Riviere, Y. Sagher, "The converse of Wiener-Levy-Marcinkiewicz theorem", Studia Math., vol. 28, pp. 133 — 138, 1966.
5. П. Л. Ульянов, "Абсолютная сходимость рядов Фурье-Хаара от суперпозиций функций", Analysis Math., том 4, № 3, стр. 225 — 236, 1978.
6. П. Л. Ульянов, "Некоторые результаты о рядах по системе Хаара", ДАН СССР, том 262, № 3, стр. 542 — 545, 1982.
7. П. Л. Ульянов,"Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье", Докл. РАН, том 322, № 2, стр. 253 — 258, 1992.
8. П. Л. Ульянов, "О рядах Фурье от суперпозиций функций", Докл. РАН, том 350, № 1, стр. 25 — 28, 1996.
9. П. Л. Ульянов,"О модулях непрерывности и рядах Фурье-Хаара", Докл. РАН, том 355, № 5, стр. 612 — 615, 1997.
10. П. Л. Ульянов, "О свойствах рядов по системе Хаара", Докл. РАН. том 361, № 1, стр. 31 — 34, 1998.
11. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, "Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций", Труды Моск. Мат. об-ва, том 5, стр. 483 — 522, 1956.
12. П. Л. Ульянов,"О модулях непрерывности и коэффициентах Фурье", Вестник МГУ, Мат-ка и Механика, № 1, стр. 37 — 52, 1995.

22 марта 2001

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

ОБОБЩЁННЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ

Н. Н. Холщевникова

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 4, 2001

Рассматривается обобщенный тригонометрический интеграл, позволяющий считать рядами Фурье тригонометрические ряды, сходящиеся вне некоторых специальных множеств единственности.

Следующие два примера привели к хорошо известным обобщениям интеграла Лебега. Первый пример : функция

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{для } x\neq 0\\ 0, & \text{для } x=0\end{cases}$$

имеет конечную производную $f(x)$ в каждой точке

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & \text{для } x\neq 0\\ 0, & \text{для } x=0.\end{cases}$$

Итак, $F(x)$ есть примитивная для $f(x)$ на $[-1,1]$, но f не суммируема на $[-1,1]$. Второй пример : ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ сходится всюду, но его сумма не суммируема на $[0,2\pi]$.

Проблема интегрирования функций, имеющих примитивные, решается интегралом Данжуа в узком смысле, или эквивалентным ему интегралом Перрона (см. [1] - [3]).

Второй пример приводит к двум проблемам : интегрировать суммы сходящихся тригонометрических рядов и сделать эти ряды рядами Фурье в смысле этого интеграла. В 1973 году В. А. Скляренко [4] построил тригонометрический ряд, который всюду сходится к конечной интегрируемой по Данжуа-Хинчину функции, но не является рядом Фурье-Данжуа-Хинчина. Сходящиеся всюду тригонометрические ряды являются рядами Фурье в смысле тотализаций Данжуа, P^2

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00428.

-интеграла Джеймса [5] и ряда других интегралов (см. обзор [3]). Как было показано П. Л. Ульяновым [6] (см. также [7]), ряды по синусам или косинусам с монотонно убывающими коэффициентами A-интегрируемы.

В своей диссертации "Интеграл и тригонометрический ряд", опубликованной в 1915 году, см. [8], Н. Н. Лузин писал "Одной из главнейших целей обобщения понятия интеграла является расширение идеи ряда Фурье... Интегрирование как операция определения коэффициентов тригонометрического ряда по его сумме."

Напомним некоторые определения.

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется **множеством единственности**, кратко U-**множеством**, если из сходимости тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Если E не является U-множеством, оно называется M-**множеством** (кратным множеством).

Г. Кантор доказал в 1870 году, что конечные множества являются U-множествами и в 1872 году, что всякое счётное множество конечного ранга Кантора-Бендиксона является U-множеством. В. Юнг в 1909 году показал, что всякое счётное множество есть U-множество. Д. Е. Меньшов в 1916 году построил замкнутое M-множество меры нуль и это явилось большим сюрпризом для математиков того времени. В 1922 – 1923 годах А. Райхман и Н. К. Бари независимо открыли классы совершенных U-множеств.

Пусть S – тригонометрический ряд, сходящийся к функции $f(x)$ на множестве $[0, 2\pi) \setminus E$. Если E является M-множеством, то существует много различных тригонометрических рядов, сходящихся к f на $[0, 2\pi) \setminus E$. Таким образом, если мы знаем f только на $[0, 2\pi) \setminus E$, мы не можем восстановить S однозначно. Пусть теперь E есть U-множество. Если два тригонометрических ряда S_1 и S_2 сходятся к $f(x)$ на $[0, 2\pi) \setminus E$, то $S_1 = S_2$. Следовательно, такой тригонометрический ряд однозначно определяется по своей сумме на $[0, 2\pi) \setminus E$. Можем ли мы рассматривать такой тригонометрический ряд как ряд Фурье в каком-либо смысле?

Существует много открытых вопросов в этой области даже в случае, когда f суммируемая функция. В 1911 году Ш. Ж. Валле-Пуссеном (см. [7]) доказана

Теорема (Валле-Пуссен). Если тригонометрический ряд сходится к конечной суммируемой функции f всюду за исключением, быть может, счётного множества E, то этот ряд есть ряд Фурье функции f.

В 1923 году И. И. Привалов [9] доказал, что мы можем взять замкнутое множество единственности в качестве исключительного множества E в теореме Валле-Пуссена.

В 1996 году Н. Н. Холщевникова [10] доказала, что в качестве исключительного множества E в теореме Валле-Пуссена можно взять $E_0 \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, где E_0 – замкнутое U-множество, а E_i – специальные замкнутые U-множества, в частности, H-множества или $H^{(s)}$-множества, введённые А. Райхманом и И. И. Пятецким-Шапиро.

Вопрос о том, можно ли в теореме Валле–Пуссена в качестве исключительного множества E взять произвольное U-множество (и даже произвольное F_σ-множество) или нет, открыт. Из результатов Р. И. Овсепяна (см. [11]) следует, что условие конечности функции, к которой сходится тригонометрический ряд вне множества E в теореме Валле-Пуссена, существенно.

Напомним теперь определения P и P^2-интегралов.

Пусть $f(x)$ – функция, определённая на $[a, b]$. Функции $M(x)$ и $m(x)$ называются, соответственно, **P-мажорантой и P-минорантой** для f на $[a, b]$, если

1) $M(x)$ и $m(x)$ непрерывны на $[a, b]$,

2) $M(a) = m(a) = 0$,

3) $\underline{D}M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}m(x)$ почти всюду на $[a, b]$,

4) $\underline{D}M(x) \neq -\infty$, $\overline{D}m(x) \neq +\infty$, для всех x из $[a, b]$ за исключением, быть может, счётного множества E.

Если $\sup_m m(b) = \inf_M M(b) = I$, то f называется **интегрируемой по Перрону** и $(P)\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Если f интегрируема по Перрону на $[a, b]$, то для всякого $x \in [a, b]$

$$\sup_m m(x) = \inf_M M(x) = (P)\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

и $F(x)$ называется **P-примитивной** для f на $[a, b]$.

Интеграл Перрона шире интеграла Лебега и несобственного интеграла Римана, он восстанавливает функцию по её точной производной. Но сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда может быть не интегрируемой по Перрону.

Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$. Для P^2-интеграла Джеймса функции $M(x)$ и $m(x)$ называются, соответственно, **P^2-мажорантой P^2-минорантой** для f на $[a,b]$, если

1) $M(x)$ и $m(x)$ непрерывны на $[a,b]$,

2) $M(a) = M(b) = m(a) = m(b) = 0$,

3) $\underline{D}^2 M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}^2 m(x)$ почти всюду на $[a,b]$,

4) $\underline{D}^2 M(x) \neq -\infty$, $\overline{D}^2 m(x) \neq +\infty$ для всех x из $[a,b]$ за исключением, быть может, счётного множества E, на котором $M(x)$ и $m(x)$ гладкие, т.е. для $x \in E$ имеем

$$\lim_{h\to 0} \frac{M(x+h) + M(x-h) - 2M(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + m(x-h) - 2m(x)}{h} = 0.$$

Функция f называется **P^2-интегрируемой** на (a,x,b), где $a < x < b$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют P^2-мажоранта и P^2-миноранта $M(x)$ и $m(x)$ такие, что $0 \leq m(x) - M(x) < \varepsilon$. Если f P^2-интегрируема на (a, x_0, b) для некоторого $a < x_0 < b$, то f P^2-интегрируема на (a,x,b) для всякого $a < x < b$, и функция

$$\Phi(x) = \sup_m m(x) = \inf_M M(x)$$

называется **неопределённым P^2-интегралом** или **P^2-примитивной** для f.

Следующие достаточные условия для множеств единственности получены И. И. Пятецким-Шапиро (см. [7], стр. 813).

Теорема A (Пятецкий-Шапиро). Пусть для $E \subset [0, 2\pi]$ существует последовательность функций

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(n)} e^{ikx}, \tag{2}$$

удовлетворяющая условиям

$$f_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in E; \tag{3}$$

$$\sum_k |a_k^{(n)}| \leq C; \quad \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 0, \quad k \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_0^{(n)} = 1; \tag{4}$$

$$\sum_k |k\, a_k^{(n)}| < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Тогда E является U-множеством.

Заметим, что если E удовлетворяет условиям этой теоремы, то то же имеет место и для замыкания множества E.

Определение. Если для множества E существует последовательность неотрицательных функций (2) со свойствами (3) - (5), то E называется "достаточным" U-множеством.

Известно, что всякое H-множество и всякое H^s-множество являются "достаточными" U-множествами. Через F_σ^{SU} обозначим класс всех множеств, которые являются объединениями счётного числа "достаточных" U-множеств. В частности, объединение счётного числа H-множеств и объединение счётного числа H^s-множеств принадлежат F_σ^{SU}. Дадим определение некоторого тригонометрического интеграла.

Определение. Непрерывные функции $M(x)$ и $m(x)$ называются T^2-мажорантой и T^2-минорантой для $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, если

1) $M(x) = a\,x^2 + M_1(x)$ и $m(x) = b\,x^2 + m_1(x)$, где $M_1(x)$ и $m_1(x)$ суть 2π-периодические функции с коэффициентами Фурье порядка $o(1/n^2)$,

2) $M(2\pi) = m(2\pi) = 0$.

3) $\underline{D}^2 M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}^2 m(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$,

4) $\underline{D}^2 M(x) \neq -\infty$ и $\overline{D}^2 m(x) \neq +\infty$ для всех $x \in [0, 2\pi]$ за исключением, быть может, множества $E \in F_\sigma^{SU}$.

Функция $f(x)$ называется T^2-интегрируемой на $[0, 2\pi]$, если

$$\sup_M M(0) = \inf_m m(0) = I \quad \text{и} \quad (T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = -\frac{I}{\pi}.$$

Нам необходима Лемма из [10] в следующей форме.

Лемма А. Пусть $F(x)$ – функция вида 1) и $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ для $x \in (a, b) \setminus E$, где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $F(x)$ выпукла на (a, b).

Из Леммы А вытекает

Лемма 1. Пусть $M(x)$ и $m(x)$ суть T^2-мажоранта и T^2-миноранта для $f(x)$. Тогда функция $M(x) - m(x)$ неположительна и выпукла на $[-2\pi, 2\pi]$. Если для некоторого $x_0 \in (-2\pi, 2\pi)$ имеем $\sup_M M(x_0) = \inf_m m(x_0)$, то $\sup_M M(x) = \inf_m m(x)$ для всякого $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

Доказательство : Для всех $x \in [-2\pi, 2\pi]$ с возможным исключением множества $E \in F_\sigma^{SU}$

$$\underline{D}^2(M(x) - m(x)) \geq \underline{D}^2 M(x) - \overline{D}^2 m(x) \geq 0.$$

По Лемме A функция $M(x) - m(x)$ выпукла, и $m(x) - M(x) \geq 0$ на $[-2\pi, 2\pi]$, поскольку в силу 1) и 2) имеем $M(2\pi) = M(-2\pi) = m(2\pi) = m(-2\pi) = 0$. Лемма 1 доказана.

Определение. Пусть $M(x)$ и $m(x)$ – T^2-мажоранта и T^2-миноранта для $f(x)$. Если $F(x) = \sup_M M(x) = \inf_m m(x)$ на $[0, 2\pi]$, то $F(x)$ называется неопределённым T^2-интегралом или T^2-примитивной для f.

Из Леммы 1 следует, что если f T^2-интегрируема, то f имеет T^2-примитивную.

Следствие Леммы 1. Если $M(0) = m(0)$ для некоторой T^2-мажоранты и T^2-миноранты функции $f(x)$, то $f(x)$ T^2-интегрируема и

$$(T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = -\frac{M(0)}{\pi}.$$

Ясно, что T^2-интеграл является линейным функционалом. Если $f(x)$ T^2-интегрируема и $g(x) = f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$, то $g(x)$ тоже T^2-интегрируема и их T^2-интегралы совпадают.

Теорема 1. Если $f(x)$ P-интегрируема на $[0, 2\pi]$ и её коэффициенты Фурье-Перрона стремятся к нулю, то $f(x)$ T^2-интегрируема и

$$(T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = (P)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Доказательство : Предположим сначала, что $(P)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. Пусть $M(x)$ есть P-мажоранта, $m(x)$ есть P-миноранта для f и пусть $F(x)$ – примитивная Перрона для f. Функции $M(x) - m(x)$, $F(x) - m(x)$, $M(x) - F(x)$ суть возрастающие, а $F(x)$ есть ACG^*-функция. Скляренко [13] доказал, что можно считать, что $m(x)$ и $M(x)$ являются ACG^*-функциями. Так как ACG^*-функции обладают N-свойством Лузина, то в силу теоремы Банаха-Зарецкого, $M(x) - F(x)$ и $F(x) - m(x)$ абсолютно непрерывны и следовательно, коэффициенты Фурье функций $M(x) - F(x) - \dfrac{M(2\pi)}{2\pi}x$ и $F(x) - m(x) + \dfrac{m(2\pi)}{2\pi}x$ имеют порядок $o(1/n)$. Пусть

$$M_1(x) = \int_0^x \left(M(t) - \frac{M(2\pi)}{2\pi}x - \frac{\alpha}{2}\right)dt,$$

$$m_1(x) = \int_0^x \left(m(t) - \frac{m(2\pi)}{2\pi}x - \frac{\beta}{2}\right)dt,$$

где

$$\pi\alpha = \int_0^{2\pi}\left(M(x) - \frac{M(2\pi)}{2\pi}x\right)dx, \quad \pi\beta = \int_0^{2\pi}\left(m(x) - \frac{m(2\pi)}{2\pi}x\right)dx.$$

Функции $M_1(x)$ и $m_1(x)$ имеют коэффициенты Фурье порядка $o(1/n^2)$. Положим $M_2(x) = M_1(x) + \dfrac{M(2\pi)}{2\pi}\dfrac{x^2}{2} - \pi M(2\pi)$ и $m_2(x) = m_1(x) + \dfrac{m(2\pi)}{2\pi}\dfrac{x^2}{2} - \pi m(2\pi)$. Тогда $M_2(2\pi) = m_2(2\pi) = 0$, при этом

$$\underline{D}^2 M_2(x) \geq \underline{D}M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}m(x) \geq \overline{D}^2 m_2(x).$$

Следовательно, $M_2(x)$ и $m_2(x)$ являются T^2-мажорантой и T^2-минорантой для $f(x)$, соответственно. Поскольку $M_2(0) = -\pi M(2\pi)$ и $m_2(0) = -\pi m(2\pi)$, $F(2\pi) = 0$, то функция $f(x)$ T^2-интегрируема и $(T^2)\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. Если $(P)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$, то $g(x) = f(x) - a_0/2$ относится к рассмотренному случаю. Следовательно, как T^2-мажоранту и T^2-миноранту для $f(x)$ можно взять $M_3(x) = M_2(x) + a_0 x^2/4 - a_0\pi^2$ и $m_3(x) = m_2(x) + a_0 x^2/4 - a_0\pi^2$, где $M_2(x)$ и $m_2(x)$ суть T^2-мажоранта и T^2-миноранта для $g(x)$. Тогда $(T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = (P)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$. Теорема 1 доказана.

Так как P-интеграл шире, чем интеграл Лебега, то всякая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция T^2-интегрируема.

Теорема 2. Пусть тригонометрический ряд (1) со сходящимися к нулю коэффициентами суммируется методом Римана к конечной функции $f(x)$ для всех x из $[0, 2\pi]$ за исключением, быть может, множества E, где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $f(x)$, $f(x)cosnx$ и $f(x)sinnx$ T^2 - интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и

$$a_n = \frac{1}{\pi}(T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{6}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{7}$$

Доказательство : Нетрудно видеть, что функция Римана тригонометрического ряда

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2} - a_0\pi^2,$$

равная нулю в точке 2π, является T^2 - мажорантой, T^2 - минорантой и T^2 - примитивной для f(x). Следовательно

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(T^2)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Если наш тригонометрический ряд умножить на $\cos nx$ или на $\sin nx$, то мы получим новый тригонометрический ряд, который суммируется методом Римана к конечной функции $f(x)\cos nx$ или $f(x)\sin nx$ на $[0, 2\pi) \setminus E$. Следовательно, формулы (6) и (7) выполняются. Теорема доказана.

Если множество E в Теореме 2 счетно, то $f(x)$ P^2 - интегрируема и ее P^2 - интеграл по $(-2\pi, 0, 2\pi)$ равен ее T^2 - интегралу. Следующая теорема является следствием Теоремы 2.

Теорема 3. Пусть тригонометрический ряд (1) сходится к конечной функции $f(x)$ для всех x из $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, множества E, где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $f(x)$, $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ T^2 - интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и формулы (6), (7) выполняются.

ABSTRACT. The paper suggests a concept of generalized trigonometric integral valid for integration of the sums of trigonometric series that converge everywhere beyond certain special sets.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Сакс, Теория Интеграла, Москва, 1949.
2. И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, Наука, Москва, 1974.
3. И. А. Виноградова, В. А. Скворцов, "Обобщенные интегралы и ряды", Итоги науки. Матем. анализ, ВИНИТИ, Москва, 1970.
4. В. А. Скляренко, "Об интегрируемых по Данжуа суммах всюду сходящихся тригонометрических рядов", ДАН СССР, том 225, стр. 533 — 536, 1973.
5. R. D. James, "A generalized integral II", Canad. J. Math., vol. 76, pp. 297 — 306, 1950.
6. П. Л. Ульянов, "Применение A-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов", Матем. сборник, том 35, стр. 469 — 490, 1954.
7. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
8. Н. Н. Лузин, Собрание Сочинений, том 1, Издат. АН СССР, Москва, 1953.
9. И. И. Привалов, "Обобщение теоремы Paul du Bois-Reymond'a", Мат. сборник, том 31, стр. 229 — 231, 1923.
10. Н. Н. Холщевникова, "К теореме Валле-Пуссена о единственности представления функции тригонометрическим рядом", Матем. сборник, том 187, стр. 143 — 160, 1996.
11. Д. Е. Меньшов, Избранные Труды (Комментарий Талаляна А.А. и Овсепяна Р.И.), Факториал, Москва, 1997.
12. И. И. Пятецкий-Шапиро, дополнение к работе "К проблеме единственности разложения функции в тригонометрический ряд", Учёные записки МГУ. Математика, том 7, № 165, стр. 79 — 97, 1954.
13. В. А. Скляренко, "Об интегрировании по частям в SCP-интеграле Беркилля", Матем. сборник, том 112, стр. 630 — 646, 1980.

21 марта 2001

Московский государственный технологический университет "Станкин", Россия
E-mail : kholsh@stanmat.mian.su

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 36 НОМЕР 4 2001

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сборник статей

Страницы