

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Առաքելյան
Գ.Գ. Գևորգյան
Վ.Ս. Զարարյան
Ա.Ա. Թալալյան
Ն.Ե. Թովմասյան
Վ.Ա. Մարտիրոսյան

Ս.Ն. Սրգելյան
Բ.Ս. Նահապետյան
Ա.Բ. Ներսիսյան
Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Մ.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян
Г. Г. Геворкян
В. С. Закарян
А. Г. Камалян
В. А. Мартиросян
С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян
А. Б. Нерсисян
А. А. Талалян
Н. Е. Товмасян
Р. Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь М. А. Оганесян

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛИТТЛВУДА-ПЭЛИ В $\mathbb{R}^n$

К. Л. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 3, 2001

В статье определены так называемые функции типа Литтлвуда-Пэли и установлены связанные с ними L^p -неравенства. Основные Теоремы 1 и 2 обобщают некоторые результаты Стейна и Флетта на дробные производные произвольного порядка $\alpha > 0$. Они могут быть применены в теории весовых классов в верхнем полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $dx = dx_1 \dots dx_n$. Обозначим через $\mathbb{R}_+^{n+1}$ верхнее полупространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Точки этого полупространства будем представлять как $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$.

И. Стейн в [1] распространил классическую g -функцию Литтлвуда-Пэли [2] на $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и привёл ряд приложений к ней. Для интеграла Пуассона $f(x, y)$ функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, g -функция Литтлвуда-Пэли в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ определяется как нелинейный оператор

$$g(f)(x) = \left(\int_0^{+\infty} y |\nabla f(x, y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где ∇ – градиент.

Теорема А (Стейн [1], Гл. IV). Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $g(f)(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, причём существуют положительные постоянные C_1 и C_2 , не зависящие от f такие, что

$$C_1 \|f\|_{L^p} \leq \|g(f)\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{L^p}. \quad (2)$$

Стейн [1] отметил, что g -функция и неравенства (2) могут быть обобщены на градиенты более высокого целого порядка $k > 1$. Изучение различных весовых пространств голоморфных и гармонических функций приводит к обобщениям g -функции и Теоремы А на производные произвольного (дробного) порядка $\alpha > 0$. Такое обобщение дал Флетт [3] для голоморфных в единичном круге функций.

В настоящей статье введены функции $g_{q,\alpha}(f)$ типа Литтлвуда-Пэли и обобщена Теорема А для полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$, используя дробные производные произвольного порядка $\alpha > 0$.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для заданной измеримой комплекснозначной в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ функции $f(x, y)$ рассмотрим оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля $\mathcal{D}^{-\alpha} \equiv \mathcal{D}_y^{-\alpha}$ (потенциал Рисса) относительно y :

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} f(x, y + \sigma) d\sigma,$$

$$\mathcal{D}^0 f = f, \quad \mathcal{D}^\alpha f(x, y) = (-1)^m \mathcal{D}^{-(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x, y),$$

где $\alpha > 0$, а m – целое, определённое из условия $m - 1 < \alpha \leq m$.

Ниже

$$P(x, y) = k_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \quad k_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}}$$

есть ядро Пуассона в верхнем полупространстве, $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α будут обозначать положительные постоянные. Для любого p , $1 \leq p \leq \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряжённый индекс (полагаем $1/+\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$). Пусть $\mathbb{Z}_+^{n+1}$ – множество всех мультииндексов с неотрицательными целыми координатами $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$. Пусть $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$ и

$$\partial^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\lambda_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\lambda_n} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\lambda_{n+1}}.$$

Для комплекснозначной функции $f(x, y)$ используем $\mathbb{C}^{n+1}$ -норму для вычисления $|\nabla f|$. Для $\alpha > 0$, $0 < q \leq \infty$ и $f(x, y)$, заданной в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, введём g -функцию типа Литтлвуда-Пэли (ср. [1-3]) :

$$g_{q,\alpha}(x) \equiv g_{q,\alpha}(f)(x) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty y^{\alpha q-1} |\mathcal{D}^\alpha f(x, y)|^q dy \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \text{ess sup}_{y>0} y^\alpha |\mathcal{D}^\alpha f(x, y)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = 1$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g -функции (1) (с производной по y вместо градиента). Для формулировки основного результата нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Для $\alpha > 0$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ справедливы следующие оценки :

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x, y)| \leq C(\alpha, n) \frac{1}{(|x| + y)^{\alpha+n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0,$$

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x, y)| \leq C(\lambda, n) \frac{1}{(|x| + y)^{\lambda+n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0.$$

В частности, для $\alpha \geq 1$

$$|\mathcal{D}^\alpha P(x, y)| \leq C(\alpha, n) \frac{P(x, y)}{y^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0.$$

Доказательство, осуществляемое прямыми вычислениями, опускается.

Лемма 2. Если $f(x, y)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$, то

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x, y)| \leq C(p, q, \alpha, n) \frac{\|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p}}{y^{\alpha+n/p}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0.$$

Доказательство является стандартным и сводится к неравенству Гёльдера, субгармоническому поведению функции $|u|^p$ (u гармонично, $p > 0$) и неравенству Харди–Литтлвуда–Феффермана–Стейна

$$|u(x, y)|^p \leq \frac{C_p}{|B|} \iint_B |u(\xi, \eta)|^p d\xi d\eta, \quad (3)$$

где B – шар объёма $|B|$ с центром в (x, y) . Подробности мы опускаем.

Следующая лемма показывает, что функция $g_{q, \alpha}(f)(x)$ “существенно” возрастает по α .

Лемма 3. Пусть $\beta > 0$ и $f(x, y)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ такая, что $\mathcal{D}^\beta f(x, y) = o(1)$ при $y \rightarrow +\infty$ равномерно в $\mathbb{R}^n$. Если $1 \leq p \leq q < \infty$, $\alpha > 1/p - 1/q$ либо $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$, то

$$g_{q, \beta}(f)(x) \leq C(\alpha, \beta, p, q) g_{p, \beta+\alpha}(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Неравенство (4) аналогично известному неравенству Харди (см., например, [1]) и позволяет свести оценки функции $g_{q, \alpha}(f)$ к случаю целых α . Доказательство получается из Теоремы В из [3], применяя замену переменных. Отметим, что условие на $\mathcal{D}^\beta f(x, y)$ в Лемме 3 обеспечивает обратимость оператора $\mathcal{D}^\alpha$.

Лемма 4. Пусть $f(x, y)$ – гармоническая функция в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$, и пусть $f_\delta^*(x) = \sup\{|f(\xi, \eta)|; (\xi, \eta) \in \Gamma_\delta(x)\}$ – её некасательная максимальная функция, где $\Gamma_\delta(x) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^{n+1}; |\xi - x| < \delta \eta\}$ – конус Лузина с вершиной в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x, y)| \leq C(\alpha, \delta) \frac{f_\delta^*(x)}{y^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0. \quad (5)$$

Доказательство : Расстояние от точки $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ до границы конуса $\Gamma_\delta(x)$ равно $\delta y / \sqrt{1 + \delta^2}$. Рассмотрим интеграл Пуассона от f в шаре $B = B_R$ с центром в (x, y) и радиусом $R = \delta y / 2\sqrt{1 + \delta^2}$:

$$f(x, y) = \int_{\partial B} P_B(x, y, \zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta),$$

где P_B — ядро Пуассона в шаре B , а m_n — поверхностная мера Лебега на сфере ∂B . Дифференцируя с порядком α и используя оценки ядра Пуассона, получаем неравенство (5).

Лемма 5 (см. [1]). Пусть $\delta > 0$, $1 < p < \infty$ и $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\|f_\delta^*\|_{L^p} \leq C(\delta, p) \|f\|_{L^p}$.

Рассмотрим вариант интеграла площадей Лузина :

$$S_\delta(f)(x) = \left(\iint_{\Gamma_\delta(x)} \eta^{1-n} \left| \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\delta > 0$, а $u(x, y)$ обозначает интеграл Пуассона функции $f(x)$. Рассмотрим также функцию

$$g_\lambda^*(f)(x) = \left[\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\eta}{|\xi| + \eta} \right)^{\lambda n} |\nabla u(x + \xi, \eta)|^2 \eta^{1-n} d\xi d\eta \right]^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Следующая лемма доказана в [1] для случая $k = \delta = 1$.

Лемма 6. При любых целых $k \geq 1$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$ справедливы следующие оценки :

$$g_{2,k}(f)(x) \leq C(n, k, \delta) S_\delta(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

$$S_\delta(f)(x) \leq C(\lambda, \delta) g_\lambda^*(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

$$\|S_\delta(f)\|_{L^p} \leq C(n, \delta, p) \|f\|_{L^p}, \quad (8)$$

$$\|g_{2,k}(f)\|_{L^p} \leq C(n, k, p) \|f\|_{L^p}. \quad (9)$$

Доказательство : Рассмотрим шар $B = B_R$ с центром в (x, y) и радиусом $R = \delta y / 2\sqrt{1 + \delta^2}$. Неравенство

$$|\partial^k u(x, y)|^2 \leq \frac{C(n, k, \delta)}{y^{n+2k-1}} \iint_{B_R} |\partial^1 u(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0$$

является следствием неравенства Харди-Литтлвуда-Феффермана-Стейна (3), (см. [1]). Здесь полагаем $\partial^1 = \partial/\partial\xi$ или $\partial^1 = \partial/\partial\eta$. Отсюда

$$y^{2k-1} |\partial^k u(x, y)|^2 \leq C(n, k, \delta) \iint_{\substack{|\xi-x| < R \\ |\eta-y| < R}} |\partial^1 u(\xi, \eta)|^2 \frac{d\xi d\eta}{\eta^n}.$$

Интегрируя по y , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y^{2k-1} |\partial^k u(x, y)|^2 dy &\leq \\ &\leq C(n, k, \delta) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \chi_{|\xi| < R(\xi)} \chi_{|\eta-y| < R(\eta)} dy \right) |\partial^1 u(x + \xi, \eta)|^2 \frac{d\xi d\eta}{\eta^n}, \end{aligned}$$

где χ — характеристическая функция множества, указанного в индексе. Ясно, что

$$\int_0^{+\infty} \chi_{|\xi| < R(\xi)} \chi_{|\eta-y| < R(\eta)} dy \leq \begin{cases} C(\delta) \eta, & \text{если } |\xi| < \frac{\delta \eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta}, \\ 0, & \text{если } |\xi| \geq \frac{\delta \eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta}. \end{cases}$$

Далее, (6) следует из неравенств

$$\frac{\delta \eta}{2\sqrt{1+\delta^2}-\delta} < \delta \eta,$$

$$\int_0^{+\infty} y^{2k-1} |\partial^k u(x, y)|^2 dy \leq C(n, k, \delta) \iint_{|\xi| < \delta \eta} \eta^{1-n} |\partial^1 u(x + \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta.$$

Неравенство (7) очевидно ввиду $\frac{\eta}{|\xi| + \eta} \geq \frac{1}{\delta + 1}$, $(\xi, \eta) \in \Gamma_\delta(0)$. Неравенства (8), (9) получаются из (6), (7) и (см. [1]) $\|g_\lambda^*(f)\|_{L^p} \leq C(\lambda, p) \|f\|_{L^p}$, $\lambda > 1$, $p > 2/\lambda$.

Таким образом, доказательство Леммы 6 завершено.

§3. ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИТТЛВУДА-ПЭЛИ

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $2 \leq q < \infty$, и $f(x, y)$ — интеграл Пуассона функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}. \quad (10)$$

Доказательство : В силу Леммы 3 достаточно дать доказательство лишь для $\alpha \geq 1$. Применяя оператор $\mathcal{D}^\alpha$ к $f(x, y)$, по Лемме 1 имеем

$$|\mathcal{D}^\alpha f(x, y)| \leq \frac{C}{y^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} P(x-t, y) |f(t)| dt.$$

Используя хорошо известные теоремы об интеграле Пуассона и максимальной функции Харди-Литтлвуда

$$M f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|\xi-x|<r} |f(\xi)| d\xi$$

(ω_n обозначает объём n -мерного единичного шара), получим (см. [1], Гл. I и III)

$$\|g_{\infty,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq C \|M f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}. \quad (11)$$

С другой стороны, по Лемме 6 неравенство

$$\|g_{2,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p} \quad (12)$$

справедливо для целых α и, следовательно, по Лемме 3 справедливо для всех $\alpha \geq 1$. Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса-Торина для пространств со смешанной нормой (см. [5], стр. 316) неравенства (11) и (12) влекут (10) для всех q , ($2 \leq q \leq \infty$) и $\alpha \geq 1$, что доказывает теорему. Отметим, что (10) выполняется при $\alpha \geq 1$ и $q = \infty$.

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ и стремится к нулю при $y \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, и $g_{q,\alpha}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ для $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$ и $0 < q \leq 2$, то $f(x, y)$ является интегралом Пуассона некоторой функции $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, причём

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}. \quad (13)$$

Доказательство : Пусть сперва $1 < q \leq 2$. Для произвольного фиксированного $y > 0$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, порождённый функцией $f(x, y)$:

$$T_f(v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) v(x) dx, \quad v(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

Если $v(x, y)$ – интеграл Пуассона функции $v(x)$, то для произвольного $\delta > 0$

$$T_f(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha+\gamma-1} \mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x, y + \sigma) d\sigma \right] v(x) dx. \quad (14)$$

После применения теоремы Фубини преобразование внутреннего интеграла даёт

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \mathcal{D}^{\alpha+\gamma} f(x, y + \sigma) dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \left[\mathcal{D}^\gamma \int_{\mathbb{R}^n} P(x-t, y + \sigma/2) \mathcal{D}^\alpha f(t, \sigma/2) dt \right] dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^\alpha f(t, \sigma/2) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^\gamma P(x-t, y + \sigma/2) v(x) dx \right] dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}^\alpha f(t, \sigma/2) \mathcal{D}^\gamma v(t, y + \sigma/2) dt. \end{aligned}$$

Подставляя в (14) получим

$$T_f(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha+\gamma-1} \mathcal{D}^\alpha f(x, \sigma/2) \mathcal{D}^\gamma v(x, y + \sigma/2) d\sigma \right] dx.$$

Обозначая

$$h_{q', \gamma}(x, y) = \left(\int_0^{+\infty} \sigma^{\gamma q' - 1} |\mathcal{D}^\gamma v(x, y + \sigma/2)|^{q'} d\sigma \right)^{1/q'}$$

и дважды применяя неравенство Гёльдера, а затем Теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} |T_f(v)| &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} g_{q, \alpha}(f)(x) h_{q', \gamma}(x, y) dx \leq C \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p} \|h_{q', \gamma}(x, y)\|_{L^{p'}(dx)} \leq \\ &\leq C \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

В силу двойственности $(L^{p'})^* = L^p$ имеем

$$\|f(x, y)\|_{L^p(dx)} = \sup \{ |T_f(v)|; \|v\|_{L^{p'}} = 1 \} \leq C \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p}.$$

Теперь пусть $0 < q < 1$ (при $q = 1$ теорема очевидна). По Лемме 4

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} |\mathcal{D}^\alpha f(x, y + \sigma)| d\sigma \leq \\ &\leq C (f_\delta^*(x))^{1-q} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}}{(y + \sigma)^{\alpha(1-q)}} |\mathcal{D}^\alpha f(x, y + \sigma)|^q d\sigma, \end{aligned}$$

где $f_\delta^*(x)$ – некасательная максимальная функция функции f . Применяя неравенство Гёльдера с индексами $1/q$ и $1/(1-q)$, получим $\|f(x, y)\|_{L^p(dx)}^p \leq C \|f_\delta^*\|_{L^p}^{p(1-q)} \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p}^{pq}$. Итак, по Лемме 5 $\|f\|_{L^p} \leq C \|f_\delta^*\|_{L^p}^{1-q} \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p}^q \leq C \|f\|_{L^p}^{1-q} \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p}^q$. Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper introduces so called Littlewood–Paley type functions and establishes related L^p -inequalities. The main Theorems 1 and 2 generalize some results of Stein and Flett to fractional derivatives of arbitrary order $\alpha > 0$. They can be applied in the theory of weighted classes on the upper half-space $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Стейн, Сиггулярные Интегралы и Дифференциальные Свойства Функций, Мир, М., 1973.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том II, Мир, М., 1965.
3. Т. М. Flett, "Mean values of power series", Pacific J. Math., vol. 25, pp. 463 — 494, 1968.
4. С. Fefferman, E. M. Stein, " H^p spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, pp. 137 — 193, 1972.
5. А. Benedek, R. Panzone, "The spaces L^p with mixed norm", Duke Math. J., vol. 28, pp. 301 — 324, 1961.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Г. М. Айрапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 3, 2001

В статье рассматривается задача Дирихле в весовом пространстве $L^1(\rho)$, где весовая функция ρ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Достаточное условие разрешимости получено для весовых функций, обращающихся в нуль в конечном числе точек. Это условие необходимо, если порядок нуля весовой функции меньше чем 1. При предположении, что задача разрешима, вычисляется соответствующий индекс.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\rho(t)$ -- измеримая неотрицательная функция, определённая на единичной окружности $T = \{t : |t| = 1\}$, отличная от нуля во всех точках $t \in T$, $t \neq 1$. Рассмотрим следующую задачу типа Дирихле в весовом пространстве $L^1(\rho)$. Требуется определить действительную, гармоническую в $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию $u(z)$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|u(re^{i\phi}) - f(e^{i\phi})\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad (0.1)$$

где $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$ -- действительная функция.

Краевые задачи (0.1) в классах аналитических функций в L^1 рассмотрены в [1]. В классической постановке граничная задача Римана для классов $L^p(\rho) \subset L^1$, $1 < p < \infty$ исследовалась многими авторами (см. [2] -- [6]). Для степенных весовых функций нётеровость этой задачи была установлена в работе [2]. Как доказано в [7] (см. также [8]), для нормальной разрешимости задачи Римана в классах $L^p(\rho)$, $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы весовая функция ρ удовлетворяла условию Макенхаупта

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \rho(t) |dt| \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\rho(t))^{-\frac{1}{p-1}} |dt| \right)^{p-1} < B_p \quad (0.2)$$

для любого интервала $I \subset T$, где $|I|$ – длина интервала I . При $1 \leq p < \infty$, $L^p(\rho)$ -оценкам гармонических функций, допускающих представление в виде интеграла Пуассона посвящена работа [9]. В [9] показано, что (0.2) является необходимым и достаточным условием для равномерной ограниченности $L^p(\rho)$ -нормы функции $u(rt)$. Та же задача рассматривалась в работе [10] для функций, допускающих интегральные представления с помощью ядер вида

$$K_r(x, t) = P_r(t - x) - \sum_{i=1}^s \sum_{\lambda_i=0}^{\alpha_i-1} P_r^{(\lambda_i)}(t - x_i) T(x_i, \lambda_i, x), \quad (0.3)$$

где $-\pi \leq x_1 < \dots < x_s < \pi$, а $T(x_i, \lambda_i, x)$ – специальные интерполяционные полиномы, возникающие при суммировании по Абелю подсистем тригонометрической системы. Используя ядра (0.3), в работе [11] описаны весовые функции, имеющие особенности в конечном числе точек, для которых задача (0.1) разрешима для любых $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$.

В настоящей работе исследуется задача Дирихле (0.1) для весовых функций, RO -меняющихся (см. ниже) в особой точке и выводится достаточное условие разрешимости для любой $f(e^{i\phi}) \in L^1(\rho)$.

Следуя [12], вещественную, положительную и измеримую на $(0, \pi)$ функцию $g(\phi)$ будем называть RO -меняющейся в точке $\phi = 0$ справа, если её можно представить в виде

$$g(\phi) = \exp \left(g_1(\phi) + \int_{\phi}^{\alpha} \frac{g_2(t)}{t} dt \right), \quad \phi \in (0, \pi], \quad (0.4)$$

где α – некоторое число из $(0, \pi]$, а $g_1(\phi)$ и $g_2(\phi)$ – измеримые и ограниченные на $(0, \pi)$ функции.

Аналогично определяется класс RO -меняющихся функций в точке $\phi = 0$ слева. Функция $g(\phi)$ называется RO -меняющейся в точке $\phi = 0$, если она RO -меняющаяся в точке $\phi = 0$ и слева и справа. Будем говорить, что весовая функция $\rho(t)$ принадлежит классу R_{α} , если

$$\alpha = \sup \{ \beta : \rho(t) |1 - t|^{-\beta} \in L^{\infty}(T) \} < \infty, \quad (0.5)$$

а функция

$$\rho_1(t) = \rho_1(e^{i\theta}) = |1 - e^{i\theta}|^{-\alpha} \rho(e^{i\theta}) \quad (0.6)$$

является RO -меняющейся в нуле, причём функция g_2 из представления (0.4) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \overline{\lim} g_2(\phi) < \{\alpha\}, \quad \underline{\lim} g_2(\phi) > \{\alpha\} - 1, \quad \phi \rightarrow 0, \quad \text{если } \alpha - \text{нецелое,} \\ \overline{\lim} g_2(\phi) < 1, \quad \underline{\lim} g_2(\phi) \geq 0, \quad \phi \rightarrow 0, \quad \text{если } \alpha - \text{целое,} \end{aligned} \quad (0.7)$$

где $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α .

Для произвольного неотрицательного числа λ положим

$$\lambda' = \begin{cases} 1 - \{\lambda\}, & \text{если } \lambda - \text{нецелое,} \\ 0, & \text{если } \lambda - \text{целое.} \end{cases} \quad (0.8)$$

Наконец, если специально не оговорено, все постоянные будем обозначать буквами $C, A, A_k, k = 1, 2, \dots$

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Теорема А. Пусть $\rho(t) \in R_\alpha, \alpha \geq 0$ и $M(\cdot)$ – максимальная функция Харди–Литтлвуда. Если

$$M(|1 - e^{i\theta}|^{-\alpha'} \rho_1(e^{i\theta})) < C |1 - e^{i\theta}|^{-\alpha'} \rho_1(e^{i\theta}), \quad (0.9)$$

то задача (0.1) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$, где $u_1(z)$ – общее решение однородной задачи, а

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(1-z)^\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta}) (1 - e^{i\theta})^\gamma e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta + \frac{z^{\gamma+1}}{(1-z)^\gamma} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta}) (1 - e^{i\theta})^\gamma}{e^{i\gamma\theta} (e^{i\theta} - z)} d\theta \right),$$

где $\gamma = [\alpha] + 1$, если α – нецелое и $\gamma = \alpha$, если α – целое, α' определяется формулой (0.8), $[\alpha]$ – целая часть числа α .

Теорема В. Неравенство (0.9) является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (0.1) для любой $\rho(t) \in R_\alpha, \alpha \in (0, 1)$ и $f \in L^1(\rho)$.

Теорема С. Пусть $\rho(t) \in R_0$ и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \rho_1(e^{i\theta}) d\theta < \infty. \quad (0.10)$$

Если для некоторого $\delta \in (0, 1)$ функция $|1 - e^{i\theta}|^{-\delta} \rho(e^{i\theta})$ не удовлетворяет условию (0.9), то существует $f \in L^1(\rho)$ такая, что задача (0.1) не разрешима.

В §2 доказывается, что однородная задача (0.1) имеет $\gamma + 1$ линейно независимых решений, и эти решения выписываются в явном виде.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Если $m > 0$, то

$$\left| \frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m} \right| < C \frac{(1-r)((1-r)^{m-1} + |1-t|^{m-1})}{|1-rt|^{2m}}, \quad (1.1)$$

где C — постоянная, не зависящая от r и t . Если $|1-t| \geq 2m(1-r)$, то

$$\left| \frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m} \right| > a \frac{1-r}{|1-rt|^{m+1}}, \quad (1.2)$$

где $a > 0$ — постоянная, не зависящая от r и t .

Доказательство : Пусть $|1-t| > 1-r$. Тогда имеем $|1-rt| \leq 2(1-t)$ и $|1-r^{-1}t| \leq 2(1-t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m} \right| &\leq \frac{1-r^2}{|1-rt|^2} \sum_{k=1}^{m-1} |1-rt|^k |1-r^{-1}t|^{m-1-k} \leq \\ &\leq \frac{2^m(m-1)(1-r^2)}{|1-rt|^{2m}}. \end{aligned}$$

Если $|1-t| \leq 1-r$, то $|1-rt| \leq 2(1-r)$ и $|1-r^{-1}t| \leq 2(1-r)$. Поэтому

$$\left| \frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m} \right| \leq \frac{2^m(m-1)(1-r^2)(1-r)^{m-1}}{|1-rt|^{2m}}.$$

Тем самым (1.1) доказано. Предположим теперь, что $|1-t| > 2m(1-r)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m} \right| &= \frac{1-r^2}{|1-rt|^{m+1}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1-r^{-1}t}{1-rt} \right)^k \right| = \\ &= \frac{1-r^2}{|1-rt|^{m+1}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{1-r^{-1}t}{1-rt} \right|^k [\cos k\phi + i \sin k\phi] \right| \geq \\ &\geq \frac{1-r^2}{|1-rt|^{m+1}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{1-r^{-1}t}{1-rt} \right|^k \cos k\phi \right|, \end{aligned}$$

где $\phi = \arg(1-r^{-1}t) - \arg(1-rt)$. Из условия $|1-t| > 2m(1-r)$ следует, что $\cos k\phi \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Следовательно, неравенство (1.2) также выполнено.

Лемма 1 доказана.

Функция $g(\phi)$ называется почти монотонно возрастающей, если существует постоянная $A > 0$ такая, что $g_1(\phi) < Ag_2(\phi)$ для любого $\phi_1 < \phi_2$. Аналогично определяются почти монотонно убывающие функции.

Лемма 2. Пусть $\rho(e^{i\theta}) \in R_\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения :

а) Если α – нецелое, то функция $\phi^{\{\alpha\}} \rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно возрастает на $(0, \pi]$ и почти монотонно убывает на $[-\pi, 0)$. Следовательно, $\phi^{-(1-\{\alpha\})} \rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает на $(0, \pi]$ и почти монотонно возрастает на $[-\pi, 0)$.

б) Если α – целое, то функция $\phi \rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно возрастает на $(0, \pi]$ и почти монотонно убывает на $[-\pi, 0)$, причём для любого $\delta > 0$ функция $\phi^{-\delta} \rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает на $(0, \pi]$ и почти монотонно возрастает на $[-\pi, 0)$.

Доказательство : Пусть α – нецелое. Согласно (0.4) и (0.7), функцию $\rho_1(e^{i\phi})$ можно представить в виде

$$\rho_1(\phi) = g_1(\phi) \exp \left(\int_{\phi}^a \frac{g_2(t)}{t} dt \right), \quad (1.3)$$

где $g_1(\phi) > m > 0$ – измеримая, ограниченная сверху функция на $(0, \pi]$, а $g_2(\phi) < \{\alpha\}$. При $0 < \phi_1 < \phi_2$ из (1.3) получаем

$$\frac{\phi_1^{\{\alpha\}} \rho_1(e^{i\phi_1})}{\phi_2^{\{\alpha\}} \rho_1(e^{i\phi_2})} < A \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^{\{\alpha\}} \exp \left(\{\alpha\} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{dt}{t} \right) < A.$$

С учётом второго соотношения из (0.7), получаем

$$\frac{\phi_2^{-(1-\{\alpha\})} \rho_1(e^{i\phi_1})}{\phi_1^{-(1-\{\alpha\})} \rho_1(e^{i\phi_2})} < A \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^{1-\{\alpha\}} \exp \left(-(1-\{\alpha\}) \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{dt}{t} \right) = A.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\rho(e^{i\phi}) \in R_\alpha$ и $\mu = \{\alpha\}$, если α – нецелое и $\mu = 1$, если α целое. Тогда функция

$$\Phi(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi$$

почти монотонно возрастает на $(0, \pi]$ и почти монотонно убывает на $[-\pi, 0)$.

Доказательство : С учётом (1.3), не нарушая общности, можно предположить, что $\rho_1(e^{i\phi}) \in C(0, 2\pi)$. Пусть $0 < h_1 < h_2$. Используя теорему о среднем значении и Лемму 2, получаем

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi < \frac{A_1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi &< \frac{1}{h_2} \left[\int_0^{h_1} \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi + A \int_{h_1}^{h_2} \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi \right] < \\ &< \frac{A}{h_2} \int_0^{h_2} \phi^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что если $h_1 < h_2 < 0$, то

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} |\phi|^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi > \frac{a}{h_2} \int_0^{h_2} |\phi|^\mu \rho_1(e^{i\phi}) d\phi,$$

где $a > 0$ – постоянная. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть выполняется условие (0.9). Тогда справедливо соотношение

$$a \int_{-\theta_0}^0 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta \leq \int_0^{\theta_0} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta \leq A \int_{-\theta_0}^0 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta, \quad (1.4)$$

где A и a ($A > a > 0$) суть постоянные, не зависящие от $\theta_0 > 0$, а α' определяется формулой (0.8).

Доказательство : С учётом (1.3), не нарушая общности, можно предположить, что $\rho_1(e^{i\phi}) \in C(0, 2\pi)$. Предположим, что (1.4) не выполняется. Тогда для некоторой последовательности $\theta_k \rightarrow 0$ будем иметь

$$\int_0^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta = c_k \int_{-\theta_0}^0 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta, \quad (1.5)$$

где $c_k \rightarrow 0$. Пусть $\theta'_k \in (0, \theta_k]$ – точка, для которой имеет место равенство

$$\frac{\rho_1(e^{i\theta'_k})}{|1 - e^{i\theta'_k}|^{\alpha'}} = \frac{1}{\theta_k} \int_0^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta. \quad (1.6)$$

Из (1.5) следует, что

$$\int_{-\theta_k}^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta = \left(1 + \frac{1}{c_k}\right) \int_0^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta. \quad (1.7)$$

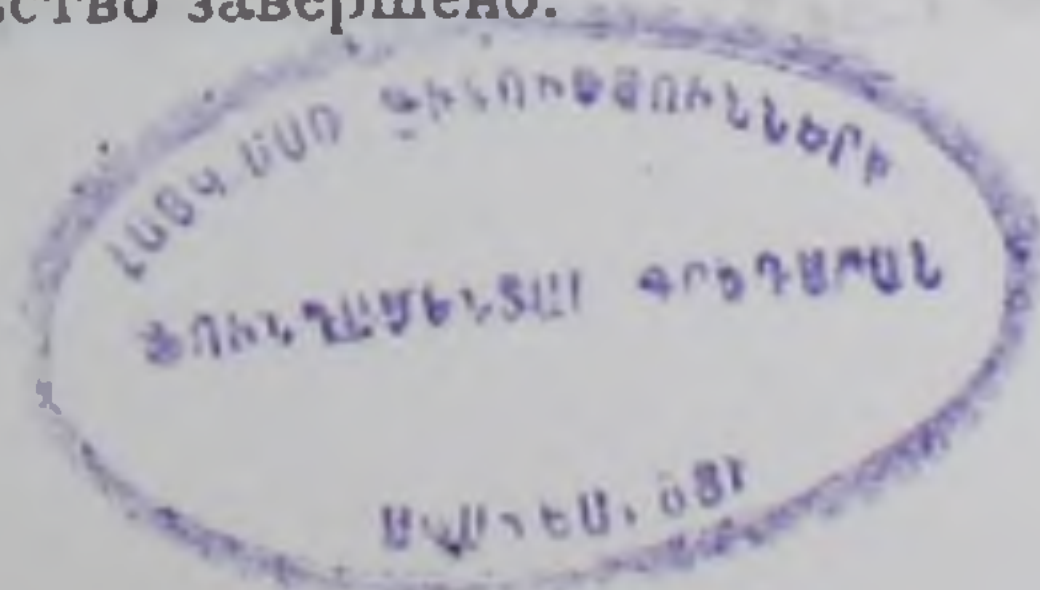
Так как

$$M \left(\left| 1 - e^{i\theta'_k} \right|^{-\alpha'} \rho_1(e^{i\theta'_k}) \right) \geq \frac{1}{4\theta_k} \int_{-\theta_k}^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta,$$

то используя (1.6) и (1.7), получаем

$$\begin{aligned} M \left(\left| 1 - e^{i\theta'_k} \right|^{-\alpha'} \rho_1(e^{i\theta'_k}) \right) &\geq \left(1 + \frac{1}{c_k}\right) \frac{1}{4\theta_k} \int_0^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}} d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{c_k}\right) \frac{\rho_1(e^{i\theta'_k})}{|1 - e^{i\theta'_k}|^{\alpha'}}, \end{aligned}$$

что противоречит условию (0.9). Доказательство завершено.



Лемма 5. Пусть

$$g(\phi) = \exp \left(\int_{\phi}^{\theta} \frac{g_2(t)}{t} dt \right),$$

где $g_2(t)$ — функция, ограниченная на $(0, \pi]$. Тогда для любого $\lambda \in (0, 1]$ и $\phi \in (\lambda\theta, \lambda^{-1}\theta)$ имеем

$$\left| \frac{g(\phi) - g(\theta)}{\phi - \theta} \right| < A_{\lambda} \frac{g(\theta)}{\theta},$$

где A_{λ} — постоянная, не зависящая от θ , но, возможно, зависящая от λ .

Доказательство : Из определения функции $g(\phi)$ имеем

$$\frac{g(\phi) - g(\theta)}{\phi - \theta} = \frac{g(\theta)}{\phi - \theta} \left(1 - \exp \int_{\phi}^{\theta} \frac{g_2(t)}{t} dt \right).$$

Так как $\phi \in (\lambda\theta, \lambda^{-1}\theta)$, то

$$\left| \int_{\phi}^{\theta} \frac{g_2(t)}{t} dt \right| < M_{\lambda} \frac{|\phi - \theta|}{\theta},$$

где M_{λ} — постоянная. Следовательно

$$\left| \frac{g(\phi) - g(\theta)}{\phi - \theta} \right| < A M_{\lambda} \frac{g(\theta)}{\theta}.$$

Лемма 5 доказана.

Пусть

$$\rho'_1(e^{i\phi}) = \rho_1(e^{i\phi}) g_1^{-1}(\phi), \quad (1.8)$$

$$H(\phi, \theta) = \frac{1}{|\theta - \phi|} |1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha'} |\rho'_1(e^{i\phi}) - \rho'_1(e^{i\theta})|,$$

где $g_1(\phi)$ определена по формуле (1.3).

Лемма 6. Пусть $\theta \in (0, \pi)$, $\rho(t) \in R_{\alpha}$ и выполняется условие (0.9). Тогда

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 H(\phi, \theta) d\phi < A \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}}, \quad (1.9)$$

где α' определена формулой (0.8).

Доказательство : Для $\lambda \in (0, 1)$ рассмотрим случаи $h < \lambda\theta$ и $h > \lambda\theta$. Пусть $h < \lambda\theta$. По Лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 H(\phi, \theta) d\phi &< \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \frac{|\phi|^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\phi})}{|\theta - \phi|} d\phi + \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \frac{1}{\theta} |\phi|^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\theta}) d\phi < \\ &< \frac{A_1}{\lambda\theta} \int_{-\lambda\theta}^0 \frac{1}{\theta} |\phi|^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\phi}) d\phi + \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < \frac{A_1}{\lambda\theta} \int_{-\lambda\theta}^0 \frac{\rho'_1(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}} d\phi + \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}. \end{aligned}$$

В силу Леммы 4 имеем

$$\frac{1}{\lambda\theta} \int_{-\lambda\theta}^0 \frac{\rho'_1(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}} d\phi < A_2 \frac{1}{\lambda\theta} \int_0^{\lambda\theta} \frac{\rho'_1(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}} d\phi < 2A_2 M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} \right).$$

Отсюда и из условия (0.9), получаем (1.9) при $h < \lambda\theta$. Теперь пусть $h > \lambda\theta$.

Используя неравенство

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \frac{|\phi|^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\theta})}{|\theta - \phi|} d\phi < \frac{\rho'_1(e^{i\theta})}{h} \int_{-h}^0 \frac{d\phi}{|\phi|^{\alpha'}} < A_3 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 H_1(\phi) d\phi &< \frac{1}{h} \int_{-h}^{-\lambda\theta} \frac{\rho'_1(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}} d\phi + A_5 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < \\ &< \frac{2\theta + 2h}{h} \frac{1}{2\theta + 2h} \int_{-h}^{2\theta+h} \frac{\rho'_1(e^{i\phi})}{|\phi|^{\alpha'}} d\phi + A_5 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < A_4 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}, \end{aligned}$$

где $H_1(\phi) = \frac{1}{|\theta - \phi|} |1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\phi})$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Если $\theta \in (0, \pi)$, $\rho(t) \in R_\alpha$, $\alpha \geq 0$ и выполняется условие (0.9), то

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_0^h H(\phi, \theta) d\phi < A \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{\alpha'}}, \quad (1.10)$$

где α' определяется формулой (0.8).

Доказательство : Пусть $\lambda \in (0, 1)$ и $h < \lambda\theta$. Применяя Лемму 3, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h H(\phi, \theta) d\phi &< \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\phi})}{|\theta - \phi|} d\phi + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\theta})}{\theta} d\phi < \\ &< \frac{A_1}{h} \int_0^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\phi})}{\theta} d\phi + \frac{A_1}{h} \int_0^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\theta})}{\theta} d\phi < \\ &< \frac{A_2}{\lambda\theta} \int_0^{\lambda\theta} \frac{|\phi|^{1-\alpha'} \rho'_1(e^{i\phi})}{\theta} d\phi + \frac{A_1 h^{2-\alpha'} \rho_1(e^{i\theta})}{h\theta} < \\ &< \frac{A_2}{\lambda\theta} \int_0^{\lambda\theta} \frac{\rho'_1(e^{i\phi})}{\phi^{\alpha'}} d\phi + A_1 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} < A_2 M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} \right) + A_1 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}. \end{aligned}$$

Учитывая условие (0.9), получаем (1.10) при $h < \lambda\theta$. Пусть теперь $h > \lambda\theta$. Имеем

$$\frac{1}{h} \int_0^h H(\phi, \theta) d\phi < \frac{1}{h} \int_0^{\lambda\theta} H(\phi, \theta) d\phi + \frac{1}{h} \int_{\lambda\theta}^h H(\phi, \theta) d\phi.$$

Первое слагаемое в правой части равномерно ограничено величиной

$A\rho_1(e^{i\theta})|1 - e^{i\theta}|^{-\alpha'}$. Оценим второе слагаемое

$$\frac{1}{h} \int_{\lambda\theta}^h H(\phi, \theta) d\phi < \frac{1}{h} \int_{\lambda\theta}^{\lambda^{-1}\theta} \frac{\phi^{1-\alpha'} |\rho'_1(e^{i\phi}) - \rho'_1(e^{i\theta})|}{|\theta - \phi|} d\phi +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_{\lambda^{-1}\theta}^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho_1'(e^{i\phi})}{|\theta - \phi|} d\phi + \frac{1}{h} \int_{\lambda^{-1}\theta}^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho_1'(e^{i\theta})}{|\theta - \phi|} d\phi.$$

Учитывая Лемму 5, будем иметь

$$\frac{1}{h} \int_{\lambda\theta}^{\lambda^{-1}\theta} \frac{\phi^{1-\alpha'} |\rho_1'(e^{i\phi}) - \rho_1'(e^{i\theta})|}{|\theta - \phi|} d\phi < \frac{A_3}{h} \int_{\lambda\theta}^{\lambda^{-1}\theta} \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho_1'(e^{i\theta})}{\theta} d\phi < A_4 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\lambda^{-1}\theta}^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho_1'(e^{i\phi})}{|\theta - \phi|} d\phi &< \frac{A_5}{h} \int_{\lambda^{-1}\theta}^h \frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{\phi^{\alpha'}} d\phi < \frac{A_6 2\theta}{h} \frac{1}{2\theta} \int_{2\theta-h}^h \frac{\rho_1'(e^{i\phi})}{\phi^{\alpha'}} d\phi < \\ &< 2A_6 M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}} \right) < A_7 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{h} \int_{\lambda^{-1}\theta}^h \frac{\phi^{1-\alpha'} \rho_1'(e^{i\theta})}{|\theta - \phi|} d\phi < \frac{A_8}{h} \int_{\lambda^{-1}\theta}^h \frac{\rho_1'(e^{i\theta})}{\phi^{\alpha'}} d\phi < A_9 \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{\theta^{\alpha'}}.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть τ — произвольная точка на единичной окружности T , а $\mu \in [0, 1]$. Тогда

$$\sup_{\tau \in T} \frac{|1 - \tau|^{1-\mu}}{2\pi} \int_T \frac{|1 - t|^\mu (1 - r)}{|1 - \tau t|^2 |\tau - r^{-1}t|} |dt| < \infty. \quad (1.11)$$

Доказательство : Так как

$$||1 - \tau|^{1-\mu} - |\tau - r^{-1}t|^{1-\mu}| < C|1 - \tau t|^{1-\mu}, \quad |1 - t| < 2|1 - \tau t|,$$

то

$$\begin{aligned} &\frac{|1 - \tau|^{1-\mu}}{2\pi} \int_T \frac{|1 - t|^\mu (1 - r)}{|1 - \tau t|^2 |\tau - r^{-1}t|} |dt| < \frac{1}{\pi} \int_T \frac{|1 - \tau|^{1-\mu} (1 - r)}{|1 - \tau t|^{2-\mu} |\tau - r^{-1}t|} |dt| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_T \frac{||1 - \tau|^{1-\mu} - |\tau - r^{-1}t|^{1-\mu}| (1 - r)}{|1 - \tau t|^{2-\mu} |\tau - r^{-1}t|} |dt| + \frac{1}{\pi} \int_T \frac{(1 - r)}{|1 - \tau t|^{2-\mu} |\tau - r^{-1}t|^\mu} |dt| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_T \frac{(1 - r)}{|1 - \tau t|^2} |dt| + \frac{1}{\pi} \int_T \frac{(1 - r)}{|\tau - r^{-1}t|^2} |dt| + C \int_T \frac{(1 - r)}{|1 - \tau t| \cdot |\tau - r^{-1}t|} |dt| < 2 + 2\pi C. \end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполняется неравенство (0.9). Тогда

$$\sup_{\tau \in T} \frac{|1 - \tau|^{\alpha'}}{\rho_1(\tau)} \int_T \frac{|1 - t|^{1-\alpha'} (1 - r) \rho_1(t)}{|1 - \tau t|^2 |\tau - r^{-1}t|} |dt| < \infty, \quad (1.12)$$

где α' определяется формулой (0.8).

Доказательство : Так как представление (1.3) выполняется, то достаточно доказать, что

$$\sup_{\tau \in T} \frac{|1 - \tau|^{\alpha'}}{\rho_1'(\tau)} \int_T \frac{|1 - t|^{1-\alpha'}(1 - r)\rho_1'(t)}{|1 - \tau t|^2|\tau - r^{-1}t|} |dt| < \infty.$$

Учитывая Лемму 8, нужно показать, что

$$\sup_{\tau \in T} \frac{|1 - \tau|^{\alpha'}}{\rho_1'(\tau)} \int_T \frac{|1 - t|^{1-\alpha'}(1 - r)|\rho_1'(t) - \rho_1'(\tau)|}{|1 - \tau t|^2|\tau - r^{-1}t|} |dt| < \infty.$$

Для произвольного $\tau \in T$, $\tau \neq 1$ имеем (см. [7])

$$\begin{aligned} & \int_T \frac{|1 - t|^{1-\alpha'}(1 - r)|\rho_1'(t) - \rho_1'(\tau)|}{|1 - \tau t|^2|\tau - r^{-1}t|} |dt| < \\ & < A_1 \sup \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \frac{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha'}|\rho_1'(e^{i\phi}) - \rho_1'(e^{i\theta})|}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|} d\phi. \end{aligned}$$

Используя Леммы 6 и 7 завершаем доказательство.

Лемма 10. Пусть $\rho(e^{i\theta}) \in R_\alpha$ и $0 \leq \alpha < 1$. Тогда

$$\sup_{\tau \in T} \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_T \frac{|1 - e^{i\phi}|^\alpha(1 - r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi < \infty, \quad \tau \in (0, 1).$$

Доказательство : Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Так как

$$|1 - e^{i\phi}| \leq 2|1 - re^{i\phi}|, \quad 1 - r < |e^{i\theta} - re^{i\phi}|, \quad 1 - r < |1 - re^{i\phi}|,$$

для любого $\theta \in (0, \pi)$, то имеем

$$\frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_T \frac{|1 - e^{i\phi}|^\alpha(1 - r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi < C \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_T \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi.$$

Из определения класса R_α следует, что

$$\rho_1(e^{i\phi})|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha} \in L^1(T), \quad \sup |1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}(\rho_1(e^{i\theta}))^{-1} < \infty.$$

Таким образом, для $\alpha \in (0, 1)$ доказательство завершено. Пусть теперь $\alpha = 0$. По определению класса R_α существует $\delta > 0$ такое, что $\theta^{-(1-\delta)}\rho_1(e^{i\theta})$ ограничено снизу положительным числом. Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{|1 - e^{i\theta}|}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_T \frac{(1 - r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^2|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi = \\ & = \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\delta}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_T \frac{(1 - r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^{2-\delta}|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\delta}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_T \frac{(1-r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^{2-\delta} |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} \left(\left| \frac{1 - e^{i\theta}}{1 - re^{i\phi}} \right|^\delta - 1 \right) d\phi < \\
& < A_1 \left(\int_T \frac{(1-r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^{2-\delta} |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi + \int_T \frac{(1-r)^3 \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{2-\delta}} d\phi \right) < \\
& < A_2 \left(\int_T \frac{(1-r) \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^{2-\delta}} d\phi + \int_T \frac{(1-r) \rho_1(e^{i\phi})}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{2-\delta}} d\phi \right).
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера будем иметь

$$\int_T \frac{(1-r) \rho_1(e^{i\phi})}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{2-\delta}} d\phi < \|\rho_1\|_p \left(\int_T \frac{(1-r)^q}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{q(2-\delta)}} d\phi \right)^{1/q}.$$

Пусть $q < (1 - \delta)^{-1}$. Тогда $q(2 - \delta) < q + 1$ и

$$\int_T \frac{(1-r)^q}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{q(2-\delta)}} d\phi < A_2, \quad \int_T \frac{(1-r) \rho_1(e^{i\phi})}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{2-\delta}} d\phi < A_3 \|\rho_1\|_p.$$

Аналогично получаем

$$\int_T \frac{(1-r) \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^{2-\delta}} d\phi < A_4 \|\rho_1\|_p.$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и $\alpha \in [0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \sup_{\theta \in [-\pi, \pi], r < 1} \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \times \\
& \times \int_{T_{a,\theta}} \frac{|1 - e^{i\phi}|^\alpha (1 - r^2) (\tau |1 - e^{i\theta}| + (1 + r^2) |1 - e^{i\phi}|) \rho_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi < \infty,
\end{aligned}$$

где $T_{a,\theta} = \{\phi : |1 - e^{i\phi}| > a|1 - e^{i\theta}|, a > 0\}$.

Доказательство : Достаточно показать, что

$$\sup_{\theta \in [-\pi, \pi], r < 1} \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho'_1(e^{i\theta})} \int_{T_{a,\theta}} H_2(\phi) d\phi < \infty, \quad (1.13)$$

где

$$H_2(\phi) = \frac{|1 - e^{i\phi}|^{1+\alpha} (1 - r^2) \rho'_1(e^{i\phi})}{|1 - re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2},$$

а ρ'_1 определяется формулой (1.8). Пусть для определённости $\theta > 0$. Выражение в (1.13) представим в виде суммы $I_1(r, \theta) + I_2(r, \theta)$, где

$$I_k(r, \theta) = \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho'_1(e^{i\theta})} \int_{T_{a,\theta}^k} H_2(\phi) d\phi < \infty, \quad k = 1, 2,$$

$$T_{a,\theta}^1 = \{\phi : a|1 - e^{i\theta}| < |1 - e^{i\phi}| < |1 - e^{i\theta}|\}, \quad T_{a,\theta}^2 = \{\phi : |1 - e^{i\phi}| > |1 - e^{i\theta}|\}.$$

Так как $2|1 - re^{i\phi}| > |1 - e^{i\phi}|$ и функция $|1 - e^{i\phi}|^{-(1-\alpha)} \rho'_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывающая на $(0, \pi)$, то

$$I_2(r, \theta) < A_1 \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho'_1(e^{i\theta})} \frac{\rho'_1(e^{i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2)}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi < A_1.$$

Оценим $I_1(r, \theta)$. В силу Леммы 9, достаточно оценить функцию

$$I'_1(r, \theta) = \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho'_1(e^{i\theta})} \int_{T_{a,\theta}^2} \frac{|1 - e^{i\phi}|^{1+\alpha} (1 - r^2) |\rho'_1(e^{i\phi}) - \rho'_1(e^{i\theta})|}{|1 - re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} d\phi.$$

Учитывая неравенство $2|e^{i\theta} - re^{i\phi}| > |e^{i\theta} - e^{i\phi}|$, в силу Леммы 6 получим

$$\begin{aligned} I'_1(r, \theta) &< \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho'_1(e^{i\theta})} \int_{T_{a,\theta}^2} \frac{|\rho'_1(e^{i\phi}) - \rho'_1(e^{i\theta})|}{|1 - re^{i\phi}| \cdot |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi < \\ &< \frac{A_2}{|1 - e^{i\theta}|^\alpha} \int_{T_{a,\theta}^2} \frac{d\phi}{|1 - re^{i\phi}|^{1-\alpha}} < A_3. \end{aligned}$$

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$, $\alpha \in [0, 1)$ и для некоторой последовательности $t_k = e^{i\theta_k} \in T$ имеем

$$M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^\mu} \right) \geq c_k \frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^\mu}, \quad (1.14)$$

где $c_k \rightarrow \infty$, $\mu = 1 - \alpha$ если $\alpha \neq 0$ и $\mu \in (0, 1)$ произвольное, если $\alpha = 0$.

Тогда семейство функций

$$A_r(\theta) = \frac{|1 - e^{i\theta}|^\mu}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1 - e^{i\phi}|^2 (1 - r^2)}{|1 - re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^\mu} d\phi, \quad r \in (0, 1)$$

не является ограниченным по r для $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство : Пусть $\alpha > 0$. Для любых a, d , $0 < a < d$ будем иметь

$$\begin{aligned} A_r(\theta) &\geq \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \frac{a^2}{2} \int_{T_{a,d,r,\theta}} \frac{(1 - r^2)}{|e^{i\theta} - re^{i\phi}|^2} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi \geq \\ &\geq \frac{|1 - e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \frac{a^2 d}{2(1 + d^2)} \frac{1}{2d(1 - r)} \int_{T_{a,d,r,\theta}} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$T_{a,d,r,\theta} = \{\phi : |1 - e^{i\phi}| > a(1 - r), |\phi - \theta| < d(1 - r)\}.$$

Для определённости предположим, что $\theta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть r_k — числа, удовлетворяющие равенству

$$M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}} \right) = \frac{1}{2d(1 - r_k)} \int_{|\phi - \theta_k| < d(1 - r_k)} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi. \quad (1.16)$$

Так как функция $|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha} \rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает, то можно предположить, что $|\theta_k|(1 - r_k)^{-1} \rightarrow 0$. Положим

$$M^+(\theta_k) = \frac{1}{2d(1 - r_k)} \int_{0 < \phi - \theta_k < d(1 - r_k)} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi,$$

$$M^-(\theta_k) = \frac{1}{2d(1 - r_k)} \int_{-d(1 - r_k) < \phi - \theta_k < 0} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi.$$

Из (1.14) следует, что для заданного $k = 1, 2, \dots$ имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$M^+(\theta_k) \geq \frac{c_k}{2} \frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}, \quad (1.17)$$

$$M^-(\theta_k) \geq \frac{c_k}{2} \frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}. \quad (1.18)$$

Предположим сначала, что имеет место (1.17). Из (1.15) будем иметь

$$A_{r_k}(\theta_k) \geq \frac{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \frac{a^2 d}{4} \frac{1}{2d(1 - r_k)} \left[\int_{T_d} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi - \int_{T_a} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi \right] \geq \frac{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \frac{a^2 d}{4} \left[M^+(\theta_k) - \frac{a}{d} M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}} \right) \right],$$

где $T_d = \{\phi : 0 < \phi - \theta_k < d(1 - r_k)\}$. Предполагая, что $d > 4a$ и учитывая (1.12) и (1.16), получаем $A_{r_k}(\theta_k) > a^2 d c_k / 8$.

Предположим теперь, что выполнено (1.18). Возможны два случая. Пусть множества $|\phi - \theta_k| < d(1 - r_k)$ и $|\phi| < a(1 - r_k)$ не пересекаются. Согласно (1.15) и (1.16) будем иметь

$$A_{r_k}(\theta_k) > \frac{a^2 d c_k}{1 + d^2} \frac{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}} \right) \geq \frac{a^2 d c_k}{1 + d^2}.$$

Пусть теперь множества $|\phi - \theta_k| < d(1 - r_k)$ и $|\phi| < a(1 - r_k)$ пересекаются. Выберем числа a и d так, чтобы $d > 4a$. Для $1 - r'_k = 3(1 - r_k)$ из формулы (1.12) получаем

$$\begin{aligned} A_{r'_k}(\theta_k) &> \frac{a^2 |1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{6(1 + d^2) \rho_1(e^{i\theta_k}) (1 - r_k)} \int_{|\phi| > a(1 - r_k), |\phi - \theta_k| < d(1 - r_k)} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi \geq \\ &\geq \frac{a^2 d}{3(1 + d^2)} \frac{|1 - e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \left[\frac{1}{6d(1 - r_k)} \int_{-3d(1 - r_k) + \theta_k}^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2d(1 - r_k)} \int_{-a(1 - r_k)}^{\theta_k} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1 - e^{i\phi}|^{1-\alpha}} d\phi \right] \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{a^2 d}{3(1+d^2)} \frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \left[\frac{1}{3} M^-(\theta_k) - \frac{\theta_k + a(1-r_k)}{d(1-r_k)} M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}} \right) \right].$$

Учитывая теперь, что $\theta_k(1-r_k)^{-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и неравенство $d > 4a$, получаем

$$\frac{\theta_k + a(1-r_k)}{d(1-r_k)} < \frac{1}{8}.$$

Следовательно, в силу (1.14) и (1.18) имеем

$$A_{r_k}(\theta_k) > \frac{a^2 d}{3(1+d^2)} \frac{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) M \left(\frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}} \right) \geq mc_k,$$

где m — постоянная, не зависящая от k . Это доказывает результат для $\alpha > 0$.

Пусть теперь $\alpha = 0$ и $\theta > 0$. Так как функция $|1-e^{i\phi}|^{-\mu} \rho_1(e^{i\phi})$ почти монотонно убывает на $(0, \pi)$, то

$$M^+(\theta, \mu) = \frac{1}{2d(1-r_k)} \int_{|\phi-\theta_k| < d(1-r_k)} \frac{\rho_1(e^{i\phi})}{|1-e^{i\phi}|^\mu} d\phi < A \frac{\rho_1(e^{i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}},$$

где A — постоянная. Из этой оценки и из (1.14) будем иметь

$$M^-(\theta, \mu) \geq a_1 c_k \frac{\rho_1(e^{i\theta_k})}{|1-e^{i\theta_k}|^{1-\alpha}}, \quad a_1 > 0.$$

Имеем также

$$\begin{aligned} A_{r_k}(\theta_k) &> \frac{|1-e^{i\theta_k}|}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \frac{a}{2} \int_{a(1-r) < |\phi| < \theta} \frac{(1-r_k^2) \rho_1(e^{i\phi}) d\phi}{|1-r_k e^{i\phi}| |e^{i\theta_k} - r_k e^{i\phi}|^2} > \\ &> \frac{|1-e^{i\theta_k}|^\mu}{\rho_1(e^{i\theta_k})} \frac{a^2 d}{2(1+d^2)} \frac{1}{2d(1-r_k)} \int_{T'_{a,d}} \frac{\rho_1(e^{i\phi}) d\phi}{|1-e^{i\phi}|^\mu}, \end{aligned}$$

где $T'_{a,d} = \{\phi : a(1-r_k) < |\phi| < \theta_k, \theta_k - d(1-r_k) < \phi < \theta_k\}$. Повторяя эти рассуждения, можно получить результат и для $\alpha = 0$. Лемма 12 доказана.

§2. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В $L^1(\rho)$

Пусть $\Phi^+(z)$ — аналитическая функция в $D^+ = \{z : |z| < 1\}$. Положим $D^- = \{z : |z| > 1\}$ и рассмотрим функцию $\Phi(z)$, определённую на $D^+ \cup D^-$ по формуле

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{при } z \in D^+, \\ \overline{\Phi^+(\bar{z}^{-1})}, & \text{при } z \in D^-. \end{cases}$$

Для произвольной аналитической функции $\Phi(z)$ в $D^+ \cup D^-$ обозначим через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- , соответственно. Условие (0.1) можно записать в виде

$$\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t) - 2f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0. \quad (2.1)$$

Задачи (0.1) и (2.1) эквивалентны в том смысле, что если $u(z)$ является решением (0.1), то представляя $u(z)$ в виде $u(z) = \operatorname{Re} \Phi^+(z)$ и доопределив функцию на D^- как и выше, мы получаем решение задачи (2.1). Верно и обратное: если $\Phi(z)$ является решением задачи (2.1), то

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z}^{-1})} \right), \quad z \in D^+ \quad (2.2)$$

является решением задачи (0.1). Следовательно, задачи (0.1) и (2.1) одновременно обладают свойством нётеровости. Мы будем исследовать задачу (2.1) в классе аналитических функций $f(e^{i\theta}) \in L^1(\rho)$, а затем сформулируем соответствующие результаты для задачи (0.1).

Теорема 1. Для любого $\rho(t) \in R_\alpha$ справедливы следующие утверждения:

а) Если α — нецелое, то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad \gamma = [\alpha] + 1, \quad (2.3)$$

где $P(z)$ — произвольный полином порядка γ .

б) Если α — целое и функция $\rho_1(e^{i\theta})$ в представлении (0.6) удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \rho_1(e^{i\theta}) d\theta = 0, \quad (2.4)$$

то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде (2.3).

с) Если α — целое и условие (2.4) не имеет места, то общее решение однородной задачи (2.1) можно представить в виде (2.3), причём $\gamma = \alpha$.

Доказательство: Пусть $\Phi(z)$ — ограниченное на бесконечности решение однородной задачи (2.1). Имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow 1-0} \left\| \Phi^+(\tau t)(1-t)^\gamma + \Phi^-(\tau^{-1}t)(1-t)^\gamma \right\|_{L^1} = 0.$$

Положим

$$f_\tau(t) = \Phi^+(\tau t)(1-t)^\gamma + \Phi^-(\tau^{-1}t)(1-t)^\gamma.$$

Функции $\Phi^+(\tau z)(1-z)^\gamma$ и $\Phi^-(\tau^{-1}z)(1-z)^\gamma$ принадлежат классу Гёльдера, причём функция $\Phi^-(\tau^{-1}z)(1-z)^\gamma$ имеет порядок γ на бесконечности. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi^+(\tau z)(1-z)^\gamma &= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_\tau(t)}{t-z} dt + P_\tau(z), \\ \Phi^-(\tau^{-1}z)(1-z)^\gamma &= \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_\tau(t)}{t-z} dt + P_\tau(z), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $P_r(z)$ — главная часть функции $\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma$ на бесконечности. Переходя к пределу в (2.5) и учитывая, что $f_r(t) \rightarrow 0$ в L^1 , получаем (2.3).

Теперь приведём условия, при которых функция (2.3) является решением однородной задачи (2.1). Сначала предположим, что α — нецелое число. Докажем, что функция (2.3) удовлетворяет условию (2.1) для любого полинома $P(z)$ порядка γ . Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $P(z) \equiv 1$. В этом случае имеем $\Phi(z) = (1-z)^{-\gamma}$ и

$$\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_T \left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| |1-t|^{\alpha-\epsilon} dt,$$

где $\epsilon > 0$ достаточно мало, а C — постоянная, зависящая от ϵ . При $|1-t| < 1-r$ имеем

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \int_{|1-t| < 1-r} \left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| |1-t|^{\alpha-\epsilon} |dt| \leq \\ &\leq C_1 \int_{|1-t| < 1-r} \frac{(1-r)^\gamma}{|1-rt|^{2\gamma}} |1-t|^{\alpha-\epsilon} |dt| \leq C_2 \int_T \frac{(1-r)^{\gamma+\alpha-\epsilon}}{|1-rt|^{2\gamma}} |dt| \leq \\ &\leq C_2 \int_T \frac{(1-r)^{1+\{\alpha\}-\epsilon}}{|1-rt|^2} |dt| = C_2 2\pi (1-r)^{\{\alpha\}-\epsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $\epsilon < \{\alpha\}$, то $I_1(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$. Предположим теперь, что $|1-t| > 1-r$. Имеем $|1-t| > 2^{-1}|1-rt|$ и

$$\left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| < C_3 \frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}} |1-t|^{\gamma-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_2(r) &= \int_{|1-t| > 1-r} \left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| |1-t|^{\alpha-\epsilon} |dt| \leq \\ &\leq C_4 \int_T \frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}} |1-t|^{\gamma+\alpha-\epsilon-1} |dt| \leq \\ &\leq C_2 \left(\int_T \frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}} |1-rt|^{\gamma+\alpha-\epsilon-1} |dt| + \int_T \frac{(1-r)^{\gamma+\alpha-\epsilon}}{|1-rt|^{2\gamma}} |dt| \right) \leq \\ &\leq C_3 \int_T \frac{(1-r)}{|1-rt|^{\gamma-\alpha+1-\epsilon}} dt. \end{aligned}$$

Если $\epsilon > 0$ достаточно мало, то $\gamma - \alpha + 1 - \epsilon < 2$. Следовательно $I_2(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$. Тем самым утверждение а) теоремы доказано. Рассмотрим случай, когда α целое. Используя Лемму 1, получаем

$$\|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_T \left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| |1-t|^{\gamma-1} \rho_1(t) |dt| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\int_T \frac{(1-r)^\gamma}{|1-rt|^{2\gamma}} |1-t|^{\gamma-1} \rho_1(t) |dt| + \int_T \frac{(1-r)}{|1-rt|^{2\gamma}} |1-t|^{2\gamma-2} \rho_1(t) |dt| \right) \leq \\ &\leq 2C \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} \rho_1(t) |dt| \leq 2C \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} \rho_1(t) |dt|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Предположим, что $\rho_1(t)$ удовлетворяет условию (2.4). Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы из неравенства $|h| < \delta$ следовало бы

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \rho_1(e^{i\theta}) d\theta < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Далее, представим функцию $\rho_1(t)$ в виде $\rho_1(t) = \rho_2(t) + \rho_3(t)$, где

$$\rho_2(t) = \begin{cases} \rho_1(t) & \text{при } |\arg t| < \delta, \\ 0 & \text{при } \delta < |\arg t| < \pi. \end{cases}$$

Из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} &\leq C \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} (\rho_2(t) + \rho_3(t)) |dt| \leq \\ &\leq CM(\rho_2(1)) + \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} \rho_3(t) |dt|. \end{aligned}$$

Так как по (2.7) имеем $M(\rho_2(1)) < \varepsilon$ и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} \rho_3(t) |dt| = 0,$$

то окончательно

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) + \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Тем самым доказано утверждение б). Перейдём к доказательству утверждения с). Предположим, что

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \rho_1(e^{i\theta}) d\theta > 0. \quad (2.8)$$

Покажем, что функция $(1-z)^{-\gamma}$ не удовлетворяет условию (2.1). Для этого заметим, что функции

$$g_1(h) = \frac{1}{h} \int_0^h \rho_1(e^{i\theta}) d\theta > 0, \quad g_2(h) = \frac{1}{h} \int_h^{2h} \rho_1(e^{i\theta}) d\theta$$

одновременно стремятся или не стремятся к нулю. Действительно, если $g_1(h) \rightarrow 0$, то $0 < g_2(h) < 2g_1(2h)$ и поэтому $g_2(h) \rightarrow 0$. Обратно, если $g_2(h) \rightarrow 0$, то $g_2(h)$ ограничена в некоторой окрестности нуля и

$$0 < g_1(h) = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h}{2^n} g_2\left(\frac{h}{2^n}\right) < \max_{t \in [0, h]} g_2(t),$$

то $g_1(h) \rightarrow 0$. Далее

$$\begin{aligned} & \int_T \left| \frac{1}{(1-\tau t)^\gamma} - \frac{1}{(1-\tau^{-1}t)^\gamma} \right| |1-t|^{\gamma-1} \rho_1(t) |dt| \geq \\ & \geq \int_{|\theta|>h} \frac{1-\tau}{|1-\tau e^{i\theta}|^{\gamma+1}} |\theta|^{\gamma-1} \rho_1(e^{i\theta}) |d\theta| \geq \\ & \geq \int_{|\theta|>h} \frac{1-\tau}{|1-\tau e^{i\theta}|^2} \rho_1(e^{i\theta}) |d\theta| \geq \frac{2}{5h} \int_{h \leq |\theta| < 2h} \rho_1(e^{i\theta}) |d\theta| = \frac{2}{5} g_2(h), \end{aligned}$$

где $h = \gamma(1-\tau)$. Из (2.8) следует, что $g_1(h)$ не стремится к нулю, поэтому и $g_2(h)$ не стремится к нулю. Теорема 1 доказана.

Из Теоремы 1 и (2.2) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\rho(t) \in A_\alpha$, $\alpha \geq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения :

а) Если α – нецелое, то общее решение однородной задачи Дирихле (0.1) можно представить в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad \gamma = [\alpha] + 1, \quad (2.9)$$

где коэффициенты многочлена $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_\gamma z^\gamma$ удовлетворяют условию $a_k = \overline{a_{\gamma-k}}$, если γ – нечётное число, и $a_k = -\overline{a_{\gamma-k}}$, если γ – чётное.

б) Если α – целое и функция $\rho(t)$ удовлетворяет условию (2.4), то общее решение однородной задачи Дирихле (0.1) можно представить в виде (2.9).

с) Пусть α – целое, а функция $\rho(t)$ не удовлетворяет условию (2.4), тогда общее решение однородной задачи Дирихле (0.1) имеет представление вида (2.9) для $\gamma = \alpha$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А

Вначале рассмотрим случай, когда α – нецелое. Пусть функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (2.1). Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \Phi^+(rt)(1-t)^\gamma + \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^\gamma - 2f(t)(1-t)^\gamma \right\|_{L^1} = 0.$$

Полагая $\Phi_r^+(z) = \Phi^+(rz)(1-z)^\gamma$, при $|z| < 1$, $\Phi_r^-(z) = \Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma$, при $|z| > 1$, и $\Phi_r^+(t) - \Phi_r^-(t) = f_r(t)$, имеем

$$\Phi^+(rz)(1-z)^\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t)}{t-z} dt + P_r(z), \quad z \in D^+,$$

$$\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t)}{t-z} dt + P_r(z), \quad z \in D^-,$$

где $P_r(z)$ – главная часть функции $\Phi_r^-(z)$ на бесконечности. Переходя к пределу и учитывая, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|f_r(t) - 2f(t)(1-t)^\gamma\|_{L^1} = 0,$$

получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\gamma} \int_T \frac{f(t)(1-t)^\gamma}{t-z} dt + \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}. \quad (3.1)$$

Для доказательства теоремы необходимо установить, что для любой $f(t) \in L^1(\rho)$ функция $\Phi(z)$, определённая по (3.1), удовлетворяет (2.1). Учитывая Теорему 1, достаточно доказать, что функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\gamma} \int_T \frac{f(t)(1-t)^\gamma}{t-z} dt \quad (3.2)$$

удовлетворяет (2.1). Для этого докажем неравенство

$$\|\Phi_1^+(rt) - \Phi_1^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \leq A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}, \quad (3.3)$$

где A – постоянная. Из (3.2) имеем

$$\Phi_1^+(rt) - \Phi_1^-(r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t), \quad (3.4)$$

где

$$I_1(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right) \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma}{\tau - r^{-1}t} d\tau,$$

$$I_2(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1-rt)^\gamma} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma(1-r^2)}{\tau|\tau-rt|^2} d\tau.$$

Учитывая Лемму 1, будем иметь $\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho)} =$

$$\begin{aligned} &= \sup_{\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})} \leq 1} \left| \int_T \left(\frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right) \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma}{\tau - r^{-1}t} d\tau \overline{g(t)} |dt| \right| \leq \\ &\leq C \int_T f(\tau)\rho(t) \frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} \int_T \left| \frac{1}{(1-rt)^\gamma} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\gamma} \right| \frac{|1-t|^\alpha \rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|} |dt| |d\tau| \leq \\ &\leq C \int_T f(\tau)\rho(t) \frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} \times \\ &\times \int_T \left| \frac{(1-r^2)((1-\tau)^{\gamma-1} + |1-t|^{\gamma-1})}{|1-rt|^{2\gamma}} \right| \frac{|1-t|^\alpha \rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|} |dt| |d\tau| \leq \\ &\leq C \int_T f(\tau)\rho(t) \frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} \int_T \frac{(1-r^2)}{|1-rt|^2} \frac{|1-t|^{\{\alpha\}} \rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|} |dt| |d\tau|. \end{aligned}$$

Применяя Лемму 9, получим

$$\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho)} \leq A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}. \quad (3.5)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \|I_2(r, t)\|_{L^1(\rho)} &\leq \int_T \frac{|1-t|^\alpha \rho_1(t)}{|1-rt|^\gamma} \int_T \frac{f(\tau)|1-\tau|^\gamma(1-r^2)}{|\tau-rt|^2} |d\tau| |dt| \leq \\ &\leq \int_T f(\tau)\rho(\tau) \frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(\tau)} \int_T \frac{(1-r^2)}{|\tau-rt|^2} \frac{|1-t|^{\{\alpha\}}\rho_1(t)}{|1-rt|} |dt| |d\tau| \leq \\ &\leq A_1 \int_T f(\tau)\rho(\tau) \frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} M\left(\frac{\rho_1(\tau)}{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}\right) |d\tau|. \end{aligned}$$

Используя условие (0.9), получаем $\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho)} \leq A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}$. Это доказывает (3.3) для нецелого α .

Теперь используя (3.3), покажем, что функция $\Phi_1(z)$, определённая по (3.2), удовлетворяет условию (2.1). Для произвольной функции $f(t) \in L^1(\rho)$ рассмотрим последовательность функций $\{f_n(t)\}$, определённых следующим образом :

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } |t-1| > n^{-1}, \\ 0, & \text{при } |t-1| < n^{-1}. \end{cases}$$

Имеем

$$\|f_n(t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Полагая

$$\Phi_{n,1}^+(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\gamma} \int_T \frac{f_n(t)(1-t)^\gamma}{t-z} dt, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi_{n,1}^+(rt) - \Phi_{n,1}^-(r^{-1}t) - f_n(t)\|_{L^1(\rho)} = 0. \quad (3.7)$$

Используя (3.2), получаем $\|\Phi_1^+(rt) - \Phi_1^-(r^{-1}t) - f_n(t)\|_{L^1(\rho)} \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \|(\Phi_1^+(rt) - \Phi_{n,1}^+(rt)) - (\Phi_1^-(r^{-1}t) - \Phi_{n,1}^-(r^{-1}t))\|_{L^1(\rho)} + \\ &+ \|\Phi_{n,1}^+(rt) - \Phi_{n,1}^-(r^{-1}t) - f_n(t)\|_{L^1(\rho)} + \|f_n(t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} \leq \\ &\leq C\|f_n(t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} + \|\Phi_{n,1}^+(rt) - \Phi_{n,1}^-(r^{-1}t) - f_n(t)\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что $\Phi_1(z)$, определённая по (3.2), удовлетворяет (2.1).

Пусть теперь α – целое. Из (0.9) следует, что функция $\rho_1(t)$ ограничена снизу некоторым положительным числом. Поэтому, если функция $\Phi(z)$ удовлетворяет (2.1), то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt)(1-t)^\gamma - \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^\gamma - 2f(t)(1-t)^\gamma\|_{L^1} = 0.$$

Повторяя рассуждения, использованные выше, будем иметь

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i(1-z)^\alpha} \int_T \frac{f(t)(1-t)^\alpha}{t-z} dt, \quad z \in D^+ \cup D^-, \quad (3.8)$$

где $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи (2.1). Учитывая Теорему 1, достаточно установить, что условию (2.1) удовлетворяет функция

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)^\alpha} \int_T \frac{f(t)(1-t)^\alpha}{t-z} dt, \quad z \in D^+ \cup D^-. \quad (3.9)$$

Докажем неравенство

$$\|\Phi_2^+(rt) - \Phi_2^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \leq A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) имеем $\Phi_2^+(rt) - \Phi_2^-(r^{-1}t) = I_3(r, t) + I_4(r, t)$, где

$$I_3(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{(1-rt)^\alpha} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\alpha} \right) \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\alpha}{\tau - r^{-1}t} d\tau,$$

$$I_4(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1-rt)^\alpha} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\alpha(1-r^2)}{\tau|\tau-rt|^2} d\tau.$$

Применяя Лемму 1, будем иметь $\|I_3(r, t)\|_{L^1(\rho)} \leq$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_T f(\tau) \frac{\rho(t)}{\rho_1(t)} \int_T \left| \frac{1}{(1-rt)^\alpha} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^\alpha} \right| \frac{|1-t|^\alpha \rho_1(t)}{|\tau - r^{-1}t|} |dt| |d\tau| \leq \\ &\leq C \int_T f(\tau) \frac{\rho(t)}{\rho_1(t)} \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} \frac{|1-t| \rho_1(t)}{|\tau - rt|} |dt| |d\tau|. \end{aligned}$$

По Лемме 9

$$\sup_{r \in T, r < 1} \frac{1}{\rho_1(t)} \int_T \frac{1-r}{|1-rt|^2} \frac{|1-t| \rho_1(t)}{|\tau - rt|} |dt| < \infty.$$

Следовательно, $\|I_3(r, t)\|_{L^1(\rho)} < A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \|I_2(r, t)\|_{L^1(\rho)} &\leq \int_T \frac{|1-t|^\alpha \rho_1(t)}{|1-rt|^\alpha} \int_T \frac{f(\tau)|1-\tau|^\alpha(1-\tau^2)}{|\tau-rt|^2} |d\tau| |dt| \leq \\ &\leq C \int_T f(\tau) \frac{\rho(\tau)}{\rho_1(\tau)} \int_T \frac{(1-\tau^2)}{|\tau-rt|^2} \rho_1(t) |dt| |d\tau| \leq \\ &\leq C \int_T f(\tau) \frac{\rho(\tau)}{\rho_1(\tau)} M(\rho_1(\tau)) |d\tau| \leq A\|f(t)\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (3.10) доказано. Аналогично получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi_2^+(rt) - \Phi_2^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Таким образом, общее решение задачи (2.1) представимо в виде (3.2). Учитывая (2.2), завершаем доказательство Теоремы А.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ В И С

Доказательство Теоремы В. Достаточность следует из Теоремы А. Нам остаётся доказать необходимость. Так как согласно Лемме 12 семейство функций $A_r(\theta)$ не является равномерно ограниченным, то существует функция $f_0(t) \geq 0$, $f_0(t) \in L^1(\rho)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) A_r(\theta) \rho(e^{i\theta}) d\theta = \infty. \quad (4.1)$$

Положим $f_1(t) = f_0(t) \exp(-i \arg(1 - e^{i\theta}))$. Покажем, что задача (2.1) при $f(t) = f_1(t)$ не имеет решения. Допуская обратное, решение этой задачи для функции $f_1(t)$ как и при доказательстве Теоремы А, представим в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(1-z)} \int_T \frac{f_1(t)(1-t)}{t-z} dt + \Phi_0(z), \quad z \in D^+ \cup D^-, \quad (4.2)$$

где $\Phi_0(z)$ – некоторое решение однородной задачи (2.1). По Теореме 1 функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет однородному условию (2.1). Поэтому из (4.2) при $\Phi_0(z) = 0$ получаем $\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_T f_1(\tau)(1-\tau) \frac{r^2((1-r^{-1}t)(\tau-r^{-1}t) - (1-rt)(\tau-rt))}{t^2\tau|1-rt|^2|\tau-rt|^2} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(e^{i\theta})(1-e^{i\theta}) \frac{(1-r^2)((1-r^2) + r(1-e^{i\theta}) - (1+r^2)(1-e^{i\phi}))}{e^{i\phi}|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} &= \sup_{\|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)((1-r)^2 + r(1-e^{i\theta}) - (1+r^2)(1-e^{i\phi}))|1-e^{i\phi}|^\alpha}{e^{i\phi}|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} g(e^{i\phi}) d\phi d\theta. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя в (4.3) функцию $g(e^{i\phi}) = ie^{i\phi}$, получаем

$$\begin{aligned} &\|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \geq \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{Re} iA_1(r, \theta, \phi) |1-re^{i\phi}|^\alpha \rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} d\phi d\theta \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{Re} iA_1(r, \theta, \phi) + A_{a,b}(r, \theta, \phi)) |1-re^{i\phi}|^\alpha \rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2|e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} d\phi d\theta + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_{a,b}(r, \theta, \phi) |1-re^{i\phi}|^\alpha \rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} d\phi d\theta, \quad (4.4)$$

где $A_1(r, \theta, \phi) = (1-r^2)((1-r)^2 + r(1-e^{i\theta}) - (1+r^2)(1-e^{i\phi}))$ и

$$A_{a,b}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} a|1-e^{i\theta}| + b|1-e^{i\phi}|, & \text{при } a|1-e^{i\theta}| \leq |1-e^{i\phi}|, \\ 0, & \text{при } a|1-e^{i\theta}| > |1-e^{i\phi}|. \end{cases}$$

Отметим, что числа $a, b > 0$ можно выбрать так, чтобы имела место оценка

$$\operatorname{Re} iA_1(r, \theta, \phi) + A_{a,b}(r, \theta, \phi) > c|1-e^{i\phi}|, \quad (4.5)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ϕ . Из (4.4) и (4.5) получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} &\geq \frac{c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) A_r(\theta) \rho(e^{i\theta}) d\theta + \\ &+\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) \frac{|1-e^{i\theta}|^{1-\alpha}}{\rho_1(e^{i\theta})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_{a,b}(r, \theta, \phi) |1-re^{i\phi}|^\alpha \rho_1(e^{i\phi})}{|1-re^{i\phi}|^2 |e^{i\theta}-re^{i\phi}|^2} d\phi d\theta. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое согласно Лемме 11 равномерно ограничено. Из (4.1) получаем

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} = \infty.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что функция $f_1(t)$ является вещественной и положительной. Рассмотрим подмножество $L_0 \subset L^1(\rho)$, состоящее из вещественных функций класса $L^1(\rho)$ и обращающихся в ноль в некоторой окрестности $t = 1$. Так как задача Дирихле (0.1) разрешима для любой $f(t) \in L_0$ и класс L_0 всюду плотен в $L^1(\rho)$, то Теорема В доказана.

Доказательство Теоремы С. Ясно, что функция $\rho(t)$ удовлетворяет условиям Леммы 12. Если функция $\Phi_0(z)$ из (4.2) удовлетворяет (0.10), то

$$\sup \|\Phi_0^+(rt) - \Phi_0^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} < \infty.$$

Следовательно, доказательство аналогично доказательству необходимости в Теореме В.

ABSTRACT. The paper considers Dirichlet problem in the weight space $L^1(\rho)$, where the weight function ρ satisfies some regularity properties. A sufficient condition of solvability is obtained for weight functions, that vanish at a finite number of points. That condition is necessary, if the order of zero of the weight function is less than 1. Assuming the problem is solvable, the corresponding index is computed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 ", Изв. АН Армении, серия Математика, том 25, № 1, стр. 3 – 20, 1990.
2. Б. В. Хведелидзе, "О разрывной задаче Римана-Привалова для нескольких функций", Сообщение АН Гр.ССР, том 17, № 10, стр. 865 – 872, 1956.
3. Б. В. Хведелидзе, "Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Совр. Пробл. Матем., том 7, Москва, 1975.
4. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинёв, 1973.
5. З. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Мир, Москва, 1979.
6. Н. Е. Товмасян, "О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе", Сибир. Матем. Журнал, том 2, № 2, стр. 25 – 57, 1961.
7. R. A. Hunt, B. Muckenhaupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176, pp. 227– 251, 1973.
8. Дж. Гарнет, Ограниченные Аналитические Функции, Мир, Москва, 1984.
9. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$ ", TAM Soc., vol. 165, pp. 326– 342, 1962.
10. К. С. Казарян, "Суммирование по Абелю подсистем тригонометрической системы в пространствах $L_p(d\mu)$ ", Докл. АН Арм.ССР, том 71, № 5, стр. 257 – 261, 1980.
11. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia Math., vol. 86, pp. 97 – 130, 1987.
12. Е. Сенета, Правильно Меняющиеся Функции, Наука, Москва, 1985.

17 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет

РАДИАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

Т. Л. Гарибян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В статье исследуются граничные свойства аналитических в круге (конечном или бесконечном) функций, представимых лакунарными степенными рядами. Получены достаточные условия на лакуны, гарантирующие как несуществование радиальных граничных значений (Теоремы 1, 2) так и существование достаточно произвольных радиальных граничных значений (Теоремы 3, 4). Доказательства опираются на новейшие результаты и методы комплексных приближений, касающихся возможности аппроксимации лакунарными полиномами.

§0. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основы теории граничных свойств аналитических функций были заложены в классических работах П. Пенлеве и П. Фату конца XIX и начала XX веков. В дальнейшем эта теория интенсивно развивалась и теперь является одной из основных ветвей современного математического анализа (см. К. Носиро [9] и Э. Коллингвуд и А. Ловатер [4]).

Граничные свойства аналитических функций, представимых лакунарными степенными рядами, были исследованы в [8], где получены лакунарные аналоги двух известных результатов Ф. Багемила, В. Сейдела [1] и В. Рудина [10]. Настоящая статья развивает начатое в [8] изучение граничных свойств аналитических функций, представимых лакунарными степенными рядами.

Будем использовать следующие обозначения. Для множества E из конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $C(E)$ (соответственно, $H(E)$) множество всех непрерывных (голоморфных) на E функций. Для всех $R \in [0, +\infty]$ положим $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, и предположим, что $D_0 = \emptyset$ и $D_\infty = \mathbb{C}$.

Обозначим через L^a логарифмическую спираль, которая в полярных координатах

(r, ϕ) задаётся уравнением $\phi = a \log r$, $r \in (0, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$. В круге D_R определим кривую L следующим образом :

- 1) при $R = +\infty$ положим $L = L^a \setminus \overline{D_r}$, где $a \in \mathbb{R}$ и $r \in (0, \infty)$ произвольны ;
- 2) при $R \in (0, \infty)$ рассмотрим возрастающую последовательность положительных чисел $\{r_n\}$, которая стремится к R при $n \rightarrow \infty$, и положим $L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k^{a_k}$, где $L_k^{a_k}$ – единственный виток спирали L^{a_k} , соответствующий (r_k, r_{k+1}) , а последовательность $\{a_n\}$ или неограниченно возрастает или неограниченно убывает при $n \rightarrow \infty$.

$\mathcal{N}$ означает множество натуральных чисел и ноль.

Следующие теоремы являются основными результатами данной статьи.

Теорема 1. Пусть $Q = \{q_n\}_0^{\infty}$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty. \quad (1)$$

Тогда существует функция $h \in H(D_R)$, ограниченная на кривой $L \subset D_R$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n, \quad h_n = 0 \text{ при } n \notin Q \quad (2)$$

и не имеющая граничных значений вдоль всех радиусов.

Теорема 2. Пусть $Q = \{q_n\}_0^{\infty}$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$ и $M \subset D_R$ – произвольное счётное множество радиусов. Тогда существует функция $h \in H(D_R)$, которая представима в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и не имеет граничных значений вдоль всех радиусов из M .

Теорема 3 является обобщением результата из [8].

Теорема 3. Пусть $Q = \{q_n\}_0^{\infty}$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} = 1, \quad (3)$$

и $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ – семейство взаимно непересекающихся радиальных отрезков из круга D_R с концами на границе ∂D_R , где E_k , $k = 0, 1, \dots$ – нигде не плотные множества. Тогда для любой функции $f \in C(D_R)$ существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным

рядом вида (2) такая, что для каждого $re^{i\varphi} \in E$ с фиксированным φ $f(re^{i\varphi}) - g(re^{i\varphi}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow R - 0$. Отметим, что Теорема 3 является лакунарным аналогом результата Багемила, Сейдела и Рудина (см. [1], [10] и [4], стр. 163). Доказательство этой теоремы аналогично доказательству её частного случая из [8]. Следующая теорема является некоторой модификацией Теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} = 1, \quad (4)$$

и $M \subset D_R$ – произвольное счётное множество радиусов вида

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k = \{z = te^{i\theta_k} : 0 \leq t < R\}, \quad \frac{\theta_k}{2\pi} \in Q,$$

где $0 \leq \frac{\theta_1}{2\pi} < \dots < \frac{\theta_k}{2\pi} < \dots < 1$ – рациональны. Тогда для любой $f \in C(D_R)$ существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) такая, что для каждого $te^{i\varphi} \in M$ с фиксированным φ имеем $f(te^{i\varphi}) - g(te^{i\varphi}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow R - 0$.

Следующая теорема вытекает из Теоремы 1.

Теорема 5. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию (3). Тогда для заданных двух функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$, определённых на $(0, 2\pi)$, допускающих значения $\pm\infty$, существует функция $g \in H(D_1)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) такая, что для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} g(re^{i\varphi}) = a(\varphi) + ib(\varphi).$$

Отметим, что частный случай Теоремы 5, когда $Q = \mathcal{N}$, был одновременно установлен Ф. Багемилом и В. Сейделем [2] и О. Лехто [6]. Доказательство Теоремы 5 в общем случае аналогично доказательству частного случая, но основано на Теореме 3 (см. [5], стр. 186).

§1. ВЛИЯНИЕ ЛАКУН НА НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом параграфе собраны результаты о лакунарных степенных рядах, не имеющих радиальных граничных значений, и доказываются Теоремы 1 и 2.

Обозначим через Π_a полуплоскость $\Pi_a = \{z = x + iy : x - ay \geq 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая (1), и $f \in H(\Pi_0)$ – функция экспоненциального типа, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(iy)|}{1+y^2} dy < \infty.$$

Тогда для любого φ ($|\varphi| < \pi/2$)

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \log |f(re^{i\varphi})| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} \log |f(q_n re^{i\varphi})|.$$

В частном случае, когда $\varphi = 0$, Лемма 1 совпадает с Теоремой 10.7.4 из [3].

Доказательство Леммы 1 аналогично доказательству этой теоремы.

Рассмотрим компактное множество K комплексной плоскости :

$$K = \overline{D_r} \cup \gamma, \quad \gamma = L^a \cap (\overline{D_\rho} \setminus D_r), \quad 0 < r < \rho < \infty.$$

Обозначим через $A(K)$ банахово пространство функций, непрерывных на K и голоморфных на его внутренности K^0 с нормой $\|f\| = \sup |f|(K)$.

Лемма 2. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию (1). Тогда для любой функции $f \in A(K)$, представимой в окрестности нуля степенным рядом вида (2), и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида

$$p(z) = \sum_{n=0}^m p_n z^n, \quad p_n = 0 \text{ при } n \notin Q, \quad (5)$$

такой, что $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ при $z \in K$.

Доказательство : Без ограничения общности можем предполагать, что K содержится в круге D_1 . Согласно теоремам Хана-Банаха и Рисса, достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля μ на K , удовлетворяющей соотношениям

$$\int_K z^{q_n} d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

выполняется условие

$$\int_K f(z) d\mu(z) = 0, \quad (7)$$

где $f \in A(K)$ – произвольная функция, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2). Рассмотрим преобразование Коши

$$G(t) = \int_K \frac{d\mu(z)}{t-z}, \quad t \in \overline{C} \setminus K.$$

Ясно, что $G(t)$ голоморфна по $t \in \bar{C} \setminus K$. Для каждого $t \in \bar{C} \setminus K$, достаточно большого по модулю ($|t| > \rho$), степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n = \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-1}$$

равномерно сходится для всех $z \in K$. Следовательно, интегрируя почленно этот ряд по мере μ и учитывая (6), получим

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-p_n-1} \int_K z^{p_n} d\mu(z), \quad |t| > \rho, \quad (8)$$

где $\{p_n\}$ — последовательность, дополнительная к Q относительно $\mathcal{N}$. Докажем теперь, что степенной ряд (8) сходится в действительности при $|t| > r$. С этой целью рассмотрим функцию

$$F(w) = \int_{\gamma} z^w d\mu(z), \quad z^w = \exp[w(\log t + ia \log t)], \quad w \in C.$$

Ясно, что $F(w)$ — целая функция. Для $w = x + iy$ имеем $|z^w| = \exp[(x - ay) \log t]$, $r \leq t \leq \rho$. Так как по предположению $\rho < 1$, получим

$$|F(w)| \leq \int_{\gamma} d|\mu|(z) = M, \quad z \in \Pi_a.$$

В силу (6) имеем

$$F(q_n) = - \int_{\bar{D}_r} z^{q_n} d\mu(z), \quad n = 0, 1, \dots,$$

откуда следует оценка $|F(q_n)| \leq r^{q_n} M_1$, $n = 0, 1, \dots$, где M_1 — положительная постоянная. Следовательно

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} \log |F(q_n)| \leq \log r.$$

Пусть $\tan \phi = -a$ и $|\phi| < \pi/2$. Применяя Лемму 1 к функции $F(\zeta e^{-i\phi})$ и к лучу $\arg \zeta = \phi$, получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |F(n)| \leq \log r. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\int_K z^{p_n} d\mu(z) = \int_{\bar{D}_r} z^{p_n} d\mu(z) + F(p_n),$$

из (9) получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n} \log \left| \int_K z^{p_n} d\mu(z) \right| \leq \log r.$$

В силу формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда, отсюда следует, что ряд (8) сходится при $|t| > r$. Применяя теорему единственности для аналитических функций и преобразование Коши заключаем, что мера μ сосредоточена на круге $\bar{D}_r$. Теперь для вывода (7) из (6) остаётся отметить, что средние арифметические для частичных сумм степенного ряда произвольной функции $f \in A(\bar{D}_r)$ сходится к f равномерно на $\bar{D}_r$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условию (1), $f(z)$ и $\varepsilon(z)$ – произвольные функции, непрерывные на кривой $L \subset D_R$. Тогда существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{при} \quad z \in L. \quad (10)$$

Доказательство : Пусть множество $L \cap (0, R)$ – возрастающая к R последовательность положительных чисел $\{r_n\}_1^\infty$. Обозначим $\gamma_n = L \cap (\overline{D_{r_{n+1}}} \setminus D_{r_n})$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ такую, что $\delta_n < \inf\{\varepsilon(z) : z \in \gamma_n\}$, $\delta_n \downarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. По индукции, построим подходящую последовательность $\{p_n(z)\}_0^\infty$ многочленов вида (5). Положим $p_0(z) \equiv 0$. Сперва рассмотрим функцию

$$h_1(z) = \begin{cases} p_0(z), & \text{при } z \in \overline{D_{r_1}}, \\ f(z) - \frac{r_2 - z}{r_2 - r_1} [f(r_1) - p_0(r_1)], & \text{при } z \in \gamma_1. \end{cases}$$

Так как $h_1 \in A(\overline{D_{r_1}} \cup \gamma_1)$, то в силу Леммы 2 существует многочлен $p_1(z)$ вида (5) такой, что $|h_1(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in \overline{D_{r_1}} \cup \gamma_1$. Здесь и ниже $\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2}$. Отсюда следует, что $|p_0(z) - p_1(z)| < \alpha_1$ при $z \in \overline{D_{r_1}}$ и

$$|f(z) - p_1(z)| < \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } z = r_2, \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \text{при } z \in \gamma_1. \end{cases}$$

Предположим, что уже построены многочлены $p_n(z)$ вида (5) такие, что

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D_{r_n}}, \quad (11)$$

$$|f(z) - p_n(z)| < \begin{cases} \alpha_n & \text{при } z = r_{n+1}, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при } z \in \gamma_n. \end{cases} \quad (12)$$

Многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) построим следующим образом. Рассмотрим функцию

$$h_{n+1}(z) = \begin{cases} p_n(z) & \text{при } z \in \overline{D_{r_{n+1}}}, \\ f(z) - \frac{r_{n+2} - z}{r_{n+2} - r_{n+1}} [f(r_{n+1}) - p_n(r_{n+1})] & \text{при } z \in \gamma_{n+1}, \end{cases}$$

так, что $h_{n+1} \in A(\overline{D_{r_{n+1}}} \cup \gamma_{n+1})$. Согласно Лемме 2 существует многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) такой, что $|h_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| < \alpha_{n+1}$ при $z \in \overline{D_{r_{n+1}}} \cup \gamma_{n+1}$. Отсюда следуют оценки типа (11) и (12) с заменой n на $n+1$. Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} [p_{n+1}(z) - p_n(z)], \quad z \in D_R.$$

В силу (11), последний полиномиальный ряд сходится абсолютно и локально-равномерно на D_R . Следовательно, $g \in H(D_R)$ и в окрестности нуля $g(z)$ представляется степенным рядом вида (2). Пусть $z \in L$. Предположим, например, что $z \in \gamma_n$. Из (11) и (12) имеем

$$|f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1}, \quad |g(z) - p_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} [p_{k+1}(z) - p_k(z)] \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, $|f(z) - g(z)| < \sum_{k=n-1}^{\infty} \alpha_k = \delta_n$. С учётом выбора чисел δ_n получим (10). Лемма 3 доказана.

Доказательство Теоремы 1. Построим функцию f на L следующим образом. Пронумировав витки кривой L , на витках с номерами $4n + 1$ положим $f = 0$, а на витках с номерами $4n + 3$ положим $f = 1$. На остальных витках зададим f ограниченным и непрерывным продолжением на L . Далее рассмотрим произвольную непрерывную на L функцию $\varepsilon(z) > 0$ такую, что $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow R$. Согласно Лемме 3, существует функция $h \in H(D_R)$, имеющая в окрестности нуля разложение вида (2) и удовлетворяющая (10). Очевидно, что функция h удовлетворяет всем требованиям нашей теоремы. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В случае, когда $R = +\infty$, условие (1) в Теореме 1 необходимо. Действительно, пусть h — произвольная целая функция, удовлетворяющая Теореме 1. Предполагая, что h удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty$, согласно теореме Макинтайра [7] получим $h \equiv \text{const}$, что является очевидным противоречием.

Рассмотрим теперь компактное множество K вида $K = \overline{D_r} \cup \{z_1, \dots, z_m\}$, $r < |z_1| < \dots < |z_m|$.

Лемма 4. Пусть $Q = \{q_n\}_0^{\infty}$ — подпоследовательность из $\mathcal{N}$. Тогда для произвольной функции $f \in A(K)$, представимой в окрестности нуля степенным рядом вида (2), и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида (5) такой, что $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ при $z \in K$.

Доказательство : Аналогично доказательству Леммы 2, достаточно показать, что произвольная комплексная мера Бореля μ на K , удовлетворяющая (6), сосредоточена на круге $\overline{D_r}$. С этой целью, запишем (6) в виде

$$\sum_{k=1}^m c_k z^{q_k} + \int_{\overline{D_r}} z^{q_n} d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где c_k – атом меры μ в точке z_k , $k = 1, \dots, m$. Разделив обе части (13) на $z_m^{q_n}$ и устремив n к ∞ , заключаем, что $c_m = 0$. Аналогично, из (13) получим $c_k = 0$ при $k = 1, \dots, m$. Следовательно, мера μ сосредоточена на $\overline{D_r}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ – подпоследовательность из $\mathcal{N}$, $E = \{z_m\}_1^\infty$ – последовательность из D_R такая, что $0 < |z_m| \uparrow R$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда для произвольных функций $f(z)$ и $\varepsilon(z) > 0$, определённых на E , существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{при} \quad z \in E. \quad (14)$$

Доказательство аналогично доказательству Леммы 3, поэтому мы его опускаем.

Доказательство Теоремы 2. Обозначим $M = \{\alpha_n\}_1^\infty$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{r_n\}_0^\infty$ такую, что $r_n \uparrow R$ при $n \rightarrow \infty$, и множества $E_n = \{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}\}$, $r_{n-1} < |z_1^{(n)}| < \dots < |z_n^{(n)}| \leq r_n$, $z_k^{(n)} \in \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. На $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ определим функцию f следующим образом: $f = 0$ при $z \in E_{2n-1}$, и $f = 1$ при $z \in E_{2n}$, $n = 1, 2, \dots$. Согласно Лемме 5 существует функция $g \in H(D_R)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и удовлетворяет (14) для любой функции $\varepsilon > 0$ на E такой, что $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow R$. Из (14) следует, что функция $h = g$ не имеет граничных значений вдоль всех радиусов из M . Теорема 2 доказана.

§2. ЛАКУНЫ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом параграфе приводятся результаты о лакунарных степенных рядах, имеющих наперёд заданные радиальные граничные значения, доказываются Теорема 4 и необходимость условия (3) в Теореме 3.

Замечание 2. Для любого числа $\delta \in [0, 1)$ существует подпоследовательность $\{q_n\}_0^\infty \subset \mathcal{N}$, $n/q_n \rightarrow \delta$ при $n \rightarrow \infty$, для которой утверждения Теоремы 3 не верны.

Доказательство : Пусть сперва $\delta = p/q \in (0, 1)$ – рациональное число. Рассмотрим множество

$$E = \bigcup_{k=0}^{q-1} E_k, \quad E_k = \left\{ z : \arg z = \frac{2\pi}{q}k, \quad 0 \leq |z| < R \right\},$$

и последовательность $\{q_n\}_0^\infty \subset \mathcal{N}$ вида

$$0, q, q+1, \dots, q+p-1, \dots, kq, kq+1, \dots, kq+p-1, \dots, \quad k \in \mathcal{N}.$$

Легко проверить, что $n/q_n \rightarrow p/q$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что каждую функцию $g \in H(D_R)$, представимую в окрестности нуля степенным рядом вида (2), можно записать в виде

$$g(z) = g_0(z^q) + zg_1(z^q) + \dots + z^{p-1}g_{p-1}(z^q), \quad (15)$$

где $g_k \in H(D_R)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$. Обозначив $\omega = \exp(2\pi i/q)$, получим линейную систему

$$g(z) = g_0(z^q) + zg_1(z^q) + \dots + z^{p-1}g_{p-1}(z^q),$$

$$g(\omega z) = g_0(z^q) + z\omega g_1(z^q) + \dots + z^{p-1}\omega^{p-1}g_{p-1}(z^q),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$g(\omega^{p-1}z) = g_0(z^q) + z\omega^{p-1}g_1(z^q) + \dots + z^{p-1}\omega^{(p-1)^2}g_{p-1}(z^q).$$

Из этой системы видно, что функции $g_0(z^q), g_1(z^q), \dots, g_{p-1}(z^q)$ для $z \in D_R$ однозначно выражаются через значения $g(z), g(\omega z), \dots, g(\omega^{p-1}z)$ функции g , поскольку определитель Вандермонда чисел $1, \omega, \dots, \omega^{p-1}$ отличен от нуля.

Предположим, что функции f и g удовлетворяют Теореме 3 и имеют конечные радиальные пределы на лучах $E_0, E_1, \dots, E_{q-2}$, а на луче E_{q-1} они стремятся к $+\infty$ быстрее произвольного многочлена. Из условия $p < q$ вытекает $p-1 \leq q-2$. Следовательно, функции $g_0(z^q), g_1(z^q), \dots, g_{p-1}(z^q)$ имеют конечные радиальные пределы при $z \in E_0$. Более того, в силу периодичности, каждая из них имеет один и тот же конечный радиальный предел на E :

$$g_k(z^q) \rightarrow a_k \quad \text{при } r \rightarrow R-0, \quad z = r\epsilon^{i\varphi} \in E, \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

для любого фиксированного φ . Таким образом, из (15) вытекает, что на E_{q-1} функция g имеет не более чем полиномиальный рост, и приходим к противоречию.

Пусть теперь $\delta \in (0, 1)$ – иррациональное или $\delta = 0$. Рассмотрим рациональное число $p/q \in (\delta, 1)$. Рассуждая как и выше, построим подпоследовательность $\{q_n\}_0^\infty \subset \mathcal{N}$, для которой $n/q_n \rightarrow p/q$ при $n \rightarrow \infty$, и утверждение Теоремы 3

не верно. Выделяя из $\{q_n\}_0^\infty$ подпоследовательность с плотностью δ , получим требуемую подпоследовательность. Утверждение Замечания 2 доказано.

Рассмотрим теперь компактное множество K вида

$$K = \overline{D_r} \cup \left(\bigcup_{s=1}^k I_s \right), \quad I_s = \{z = te^{i\theta_s} : r \leq t \leq \rho\}, \quad \frac{\theta_s}{2\pi} \in Q,$$

где $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_k < 2\pi$, а Q — множество всех рациональных чисел.

Лемма 6. Пусть $Q = \{q_n\}_0^\infty$ — подпоследовательность из $\mathcal{N}$, удовлетворяющая (4). Тогда для произвольной функции $f \in A(K)$, представимой в окрестности нуля степенным рядом вида (2), и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен p вида (5) такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in K. \quad (16)$$

Доказательство : Обозначим через m наименьший общий знаменатель рациональных чисел $\theta_s/2\pi$, $s = 1, \dots, k$. Без ограничения общности можем предположить, что $\theta_s/2\pi = s/m$, где $s = 0, 1, \dots, m-1$. Соответствующий компакт обозначим через K^* . Заметим сперва, что из (4) следует

$$\sum_{q_n \in Q_s} q_n^{-1} = +\infty, \quad Q_s = \{q_n \in Q : q_n \equiv s \pmod{m}\}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1.$$

Произвольную функцию $f \in A(K^*)$ можно представить суммой

$$f(z) = \sum_{s=0}^{m-1} f_s(z), \quad z \in K^*, \quad (17)$$

где функции $f_s \in A(K^*)$ удовлетворяют условию

$$f_s(z\omega) = \omega^s f_s(z), \quad \omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{m}\right), \quad z \in K^*. \quad (18)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$f_s(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z\omega^k) \omega^{-ks}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1.$$

Из (18) следует, что $f_s(0) = 0$ при $s = 1, \dots, m-1$. Поскольку в окрестности нуля функция f представляется степенным рядом вида (2), то в окрестности нуля функции f_s можно представить степенным рядом вида (2) с заменой Q на Q_s .

Следовательно, применяя Лемму 2 к каждой функции f_s и последовательности Q_s , находим многочлен p_s вида (5) с заменой Q на Q_s такой, что

$$|f_s(z) - p_s(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{при} \quad z \in \overline{D_r} \cup [r, \rho]. \quad (19)$$

Ясно, что каждый многочлен p_s удовлетворяет (18) с заменой f_s на p_s . Следовательно, полагая $p(z) = \sum_{s=0}^{m-1} p_s(z)$, $z \in \mathbb{C}$ и учитывая (17) — (19) заключаем, что $p(z)$ — многочлен вида (5), удовлетворяющий (16) на K^* . Лемма 6 доказана.

Доказательство Теоремы 4. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{r_n\}_0^\infty$ такую, что $r_n \uparrow R$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon(z) > 0$ — произвольная функция из $C[0, R)$, убывающая к нулю. Выберем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}_0^\infty$ так, чтобы $\delta_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\delta_n < \inf\{\varepsilon(|z|) : r_{n-1} \leq |z| \leq r_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Полагая $\alpha_n = \delta_{n+1} - \delta_{n+2}$, построим индукцией подходящую последовательность $\{p_n(z)\}_0^\infty$ многочленов вида (5). Согласно теореме Мюнца, существует многочлен $p_0(z)$ вида (5) такой, что $|f(z) - p_0(z)| < \alpha_0$ при $z \in \overline{D_{r_0}} \cap I_1$. Предположим, что уже построены многочлены $p_n(z)$ вида (5), удовлетворяющие

$$|p_{n-1}(z) - p_n(z)| < \alpha_n \quad \text{при} \quad z \in \overline{D_{r_{n-1}}}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} |f(z) - p_n(z)| < \alpha_n + \alpha_{n-1} & \text{при} \quad z \in (\overline{D_{r_n}} \setminus D_{r_{n-1}}) \cap \bigcup_{s=1}^n I_s, \\ |f(z) - p_n(z)| < \alpha_n & \text{при} \quad z \in \overline{D_{r_{n-1}}} \cap \bigcup_{s=1}^n I_s. \end{cases} \quad (21)$$

Многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) построим следующим образом. Обозначим через $z_1^{(n)}, \dots, z_{n+1}^{(n)}$ элементы множества $\overline{D_{r_n}} \cup \bigcup_{s=1}^{n+1} I_s$, и рассмотрим функцию

$$h_{n+1}(z) = \begin{cases} p_n(z) & \text{при} \quad z \in \overline{D_{r_n}}, \\ f(z) - \frac{z_s^{(n+1)} - z}{z_s^{(n+1)} - z_s^{(n)}} [f(z_s^{(n)}) - p_n(z_s^{(n)})] & \text{при} \quad z \in I_s, \end{cases}$$

$s = 1, \dots, n+1$. Ясно, что $h_{n+1} \in A\left(\overline{D_{r_n}} \cup \bigcup_{s=1}^{n+1} I_s\right)$. Тогда, по Лемме 6 существует многочлен $p_{n+1}(z)$ вида (5) такой, что

$$|h_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| < \alpha_{n+1} \quad \text{при} \quad z \in \overline{D_{r_n}} \cup \bigcup_{s=1}^{n+1} I_s.$$

Отсюда следуют оценки типа (20) и (21) с заменой n на $n+1$. Таким образом, требуемая последовательность $\{p_n(z)\}_0^\infty$ многочленов вида (5) построена.

Рассмотрим теперь полиномиальный ряд

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = p_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} [p_{n+1}(z) - p_n(z)], \quad z \in D_R.$$

Поскольку последовательность $\{r_n\}_0^\infty$ возрастает, то в силу (20) последний ряд сходится абсолютно и локально-равномерно на D_R . Следовательно, $g \in H(D_R)$ и в окрестности нуля $g(z)$ представляется степенным рядом вида (2). Обозначим $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus D_{r_{n-1}})$. При $z \in F$ и некотором $m \geq n$ имеем $z \in (\overline{D_{r_m}} \setminus D_{r_{m-1}}) \cap I_n$. В силу (20) и (21)

$$|f(z) - p_m(z)| < \alpha_m + \alpha_{m-1}, \quad |g(z) - p_m(z)| = \left| \sum_{k=m}^{\infty} [p_{k+1}(z) - p_k(z)] \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k+1}.$$

Следовательно, $|f(z) - g(z)| < \sum_{k=m-1}^{\infty} \alpha_k = \delta_m$. С учётом выбора δ_m получим (14) при $z \in F$. Остаётся отметить, что каждый радиус из множества M , за исключением конечного числа, содержится в множестве F . Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates the boundary properties of functions, analytic in a disk (finite or infinite) and representable by lacunary power series. Sufficient conditions on lacunas are obtained, which guarantee both nonexistence of radial boundary values (Theorems 1, 2) and existence of rather arbitrary radial boundary values (Theorems 3, 4). The proofs are based on new results in complex approximations concerning possibility of approximation by gap polynomials.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. F. Bagemihl, "Some boundary properties of analytic functions", Math. Zeit. vol. 61, pp. 186 – 199, 1954.
2. F. Bagemihl, W. Seidel, "Regular functions with prescribed measurable boundary values almost everywhere", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 740 – 743, 1955.
3. R. Boas, Entire Functions, Academic Press, NY, 1954.
4. E. Collingwood, A. Lohwater, The Theory of Cluster Sets, Cambridge Univ. Press, 1966.
5. D. Gaier, Vorlesungen ueber Approximation in Komplexen, Birkhauser-Verlag, Basel, 1980.
6. O. Lehto, "On the first boundary value problem for functions harmonic in the unit circle", Ann. Acad. Sci. Finn, ser. A.I., no. 210, 1955.
7. A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", Proc. London Math. Soc. (3), vol. 2, pp. 286 – 296, 1952.
8. В. А. Мартиросян, "О равномерно – касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана", Изв. НАН Армении. Математика, том 30, № 4, стр. 59 – 67, 1995.
9. K. Noshiro, Cluster Sets, Springer Verlag, Berlin, 1960.
10. W. Rudin, "Radial cluster sets of analytic functions", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 60, pp. 455, 1954.

30 октября 2000

Ереванский государственный университет,
Институт математики НАН Армении

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 36, № 3, 2001

В статье рассматриваются гипозэллиптические операторы $P(D)$ с постоянными коэффициентами. Получены оценки снизу для функциональной размерности пространства решений дифференциального уравнения $P(D)u = 0$. Оценки определяются по поведению символа оператора $P(D)$ на бесконечности.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была определена функция $N(\epsilon, F)$, зависящая от компакта F и $\epsilon > 0$, равная минимальному числу замкнутых множеств с диаметрами, не превосходящими ϵ , покрывающих F . Через функцию $N(\epsilon, F)$ в [1] определяется метрический порядок компакта F . Доказано, что для всех метрик компакта F , не меняющих его топологию, величина

$$k(F) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon, F)}{\ln(1/\epsilon)}$$

равна размерности компакта F . В частности, $k(F)$ является топологическим инвариантом.

В работе [2] доказано, что для некоторых вполне ограниченных множеств F аналитических функций, функция $H(\epsilon, F) = \ln N(\epsilon, F)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ ведёт себя как $(\ln 1/\epsilon)^s$. Для сравнения массивностей множеств A гладких функций естественно рассмотреть следующую числовую характеристику, называемую функциональной размерностью множества A :

$$\text{df}A = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H(\epsilon, A)}{\ln \ln(1/\epsilon)}.$$

Исследования, представленные в данной работе, выполнены при поддержке гранта ИНТАС 99-01080.

Пусть E – локально выпуклое пространство, U – окрестность нуля в E и $A \subset E$ – некоторое множество. Для заданного $\varepsilon > 0$ множество B называется ε -сетью множества A относительно U , если $A \subset B + \varepsilon U$.

Для заданного множества $A \subset E$ обозначим через $N(A, \varepsilon U)$ наименьшее число элементов ε -сети множества A относительно U . Через $M(A, \varepsilon U)$ обозначим наибольшее число элементов $x_1, \dots, x_m \in A$, для которых $x_i - x_j \notin \varepsilon U$ при $i \neq j$, $j = 1, \dots, m$. В [2] доказано, что $M(A, 2\varepsilon U) \leq N(A, \varepsilon U)$.

Определение 1 (см. [2]). Для заданного линейного, локально выпуклого пространства E число

$$\text{df} E = \sup_U \inf_V \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H(V, \varepsilon U)}{\ln \ln(1/\varepsilon)},$$

где U и V пробегает все окрестности нуля в E , называется функциональной размерностью пространства E .

В работе [3] доказано, что если $P(D)$ – гипозэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то $\text{df} N(P) < \infty$, где $N(P) = \{u; u \in C, P(D)u = 0\}$ и $\text{df} N(P) = n$, если $P(D)$ – эллиптический оператор от n переменных. В [4] – [7] получены оценки сверху и снизу для функциональной размерности пространств решений некоторых классов гипозэллиптических уравнений. Как доказано в [8], $\text{df} N(P) = n$ тогда и только тогда, когда $P(D)$ – эллиптический оператор от n переменных.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Повсюду в этой статье мы используем следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное действительное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$;

$\mathbb{C}^n$ – n -мерное комплексное евклидово пространство точек $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$;

$\mathbb{R}_0^n = \{\xi, \xi \in \mathbb{R}^n; \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}$;

$\mathbb{E}^n$ – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$;

N^n – множество точек $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, где ν_k – целые;

N_+^n – множество точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α_k – неотрицательные целые;

$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где либо $D_j = -i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($i^2 = -1$), либо $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, \dots, n$;

$\xi^{(j)} = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$, $j = 1, \dots, n$;

$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$; $\|\xi\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2}$, $\alpha \in N_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, и $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ – отвечающий ему полный символ, где сумма берётся по конечному набору $(P) = \{\alpha, \alpha \in N_+^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Определение 2. Минимальный выпуклый многогранник $\mathcal{N}$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$, называется характеристическим многогранником или многогранником Ньютона многочлена P .

Определение 3. Многогранник $\mathcal{N}$ называется вполне правильным, если компоненты внешних нормалей всех $(n-1)$ -мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$ положительны.

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ через $\Lambda(\mathcal{N})$ обозначим множество всех нормалей $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$, удовлетворяющих $\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1$.

Известно, что для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ множество $\Lambda(\mathcal{N})$ ограничено. Для многочлена P обозначим $D(P) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : P(\zeta) = 0\}$, $D_j(P) = \{(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \zeta_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \equiv \zeta, P(\zeta) = 0, \zeta^{(j)} \in \mathbb{R}^{n-1}, \zeta_j \in \mathbb{C}^1\}$, $j = 1, \dots, n$, $d_P(\xi) = \inf_{\zeta \in D(P)} \|\xi - \zeta\|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\rho_j(P, \xi) = \min_{\zeta \in D_j(P)} |\xi_j - \zeta_j|$, $j = 1, \dots, n$. Будем использовать также следующее определение (см. [9], определение 4.1.1 и теорему 4.1.3).

Определение 4. Оператор P называется гипозэллиптическим, если выполняется одно из следующих условий :

- а) $N(P) \subset \mathbb{C}^{\infty}$,
- б) $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,
- в) для любого $\alpha \in N_+^n$, $|\alpha| \neq 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\frac{D^{\alpha} P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Известно, что характеристический многогранник гипозэллиптического оператора вполне правильный.

Лемма 1. Существует постоянная $C = C_{n,k} > 0$ такая, что для любого многочлена P от n переменных порядка не выше k относительно ξ_1

$$C^{-1} \sum_{j=0}^k |D_1^j P(\xi)| \leq \sup_{|\eta_1| \leq 1} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leq \sum_{j=0}^k |D_1^j P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Доказательство : Второе неравенство непосредственно следует из формулы Тейлора. Для доказательства первого неравенства в (1) рассмотрим

$$Q_{\xi}(t) = P(\xi_1 + t, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv \sum_{j=0}^k \delta_j(\xi) t^j. \quad (2)$$

Для попарно различных точек $\tau_1, \dots, \tau_{k+1} \in [-1, 1]$ следующая система алгебраических уравнений относительно $\delta_j(\xi)$, $j = 1, \dots, k$

$$\sum_{j=0}^k \delta_j(\xi) \tau_l^j = Q_\xi(\tau_l), \quad l = 1, \dots, k+1 \quad (3)$$

однозначно разрешима. Поэтому, с некоторыми постоянными $\omega_{l,j}$

$$\delta_j(\xi) = \sum_{l=1}^{k+1} \omega_{l,j} Q_\xi(\tau_l), \quad j = 0, \dots, k.$$

Подставляя эти значения в (2), получим

$$P(\xi_1 + t, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv \sum_{j=0}^k \left(\sum_{l=1}^{k+1} \omega_{l,j} Q_\xi(\tau_l) \right) t^j.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} |D_1^r P(\xi)| &= |D_t^r P(\xi_1 + t, \xi_2, \dots, \xi_n)|_{t=0} = r! \left| \sum_{l=1}^{k+1} \omega_{l,r} Q_\xi(\tau_l) \right| \leq \\ &\leq C \sup_{\|\eta_1\| \leq t} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|, \end{aligned}$$

где $C > 0$ – постоянная, зависящая лишь от k и n . Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Существует постоянная $C = C_{n,k} > 0$ такая, что для любого многочлена P от n переменных порядка не выше чем k относительно ξ_1 , для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$$C^{-1} \sum_{j=0}^k |D_1^j P(\xi)| t^j \leq \sup_{|\eta_1| \leq t} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leq C \sum_{j=0}^k |D_1^j P(\xi)| t^j.$$

Доказательство : вытекает применением Леммы 1 к многочлену $P_t(\xi) = P(t\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Для доказательства следующего результата мы ссылаемся на [9], Лемма 4.1.1.

Лемма 2. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого многочлена P степени не выше k

$$C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{|\alpha|=1}^k \left| \frac{D_1^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \quad (4)$$

Лемма 3. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого многочлена P порядка не выше k относительно ξ_1

$$C^{-1} \leq \rho_1(P, \xi) \sum_{j=1}^k \left| \frac{D_1^j P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/j} \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \quad (5)$$

Доказательство : Следует из Леммы 2 и Следствия 1.

Лемма 4. Пусть P и Q – многочлены и $h(\xi)$ – неотрицательная функция такая, что для $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$h(\xi) |Q(\xi)| \leq C_1 |P(\xi)| \quad \text{и} \quad \inf_{|\eta_1| \leq \rho_1(P, \xi)/2} h(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \geq C_2 h(\xi),$$

где $C_1, C_2 > 0$ – постоянные. Тогда существует постоянная $C_3 > 0$, для которой

$$h(\xi) \sum_{j \geq 1} |D_1^j Q(\xi)| \rho_1^j(P, \xi) \leq C_3 |P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство : В силу Следствия 1, с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$C_4^{-1} h(\xi) \sum_{j \geq 1} |D_1^j Q(\xi)| \rho_1^j(P, \xi) \leq \sup_{|\eta_1| \leq \rho_1(P, \xi)/2} |Q(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} C_4^{-1} h(\xi) \sum_{j \geq 1} |D_1^j Q(\xi)| \rho_1^j(P, \xi) &\leq \frac{1}{C_2} \sup_{|\eta_1| \leq \rho_1(P, \xi)/2} |h(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \times \\ &\times Q(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leq \frac{C_1}{C_2} \sup_{|\eta_1| \leq \rho_1(P, \xi)/2} |P(\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|. \end{aligned}$$

Применение Следствия 1 и Леммы 3 завершает доказательство.

Для многочлена P положим

$$g_P(\xi) = \min_{1 \leq j \leq n} \rho_j(P, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 5. Пусть P – многочлен с постоянными коэффициентами. Пусть $h(\xi)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям :

- i) $0 \leq h(\xi) \leq g_P(\xi)$,
- ii) для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует постоянная $\chi(\varepsilon)$ такая, что $\inf_{\|\eta\| \leq \varepsilon h(\xi)} h(\xi + \eta) \geq \chi(\varepsilon) h(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует постоянная $C > 0$, для которой $h(\xi) \leq C d_P(\xi) + 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство : В силу Леммы 3 достаточно доказать, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\sum_{\alpha \geq 0} h^{|\alpha|}(\xi) |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_1 |P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

По Теореме 3.3.2 из [9], с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq 0} h^{|\alpha|}(\xi) |P^{(\alpha)}(\xi)| &\leq C_2 \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} |P(\xi + \eta)| \leq \\ &\leq C_2 \sup_{\|\eta^{(n)}\| \leq h(\xi)/2} \sup_{\|\eta_n\| \leq h(\xi)/2} |P(\xi + (\eta^{(n)}, 0) + (0^{(n)}, \eta_n))|. \end{aligned}$$

Отсюда и из условий i), ii) вытекает

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq 0} h^{|\alpha|}(\xi) |P^{(\alpha)}(\xi)| &\leq \\ &\leq C_3 \sup_{\|\eta^{(n)}\| \leq h(\xi)/2} \sup_{|\eta_n| \leq \chi(1/2) h(\xi + (\eta^{(n)}, 0))/2} |P(\xi + (\eta^{(n)}, 0) + (0^{(n)}, \eta_n))| \leq \\ &\leq C_3 \sup_{\|\eta^{(n)}\| \leq h(\xi)/2} \sup_{|\eta_n| \leq \chi(1/2) \rho_n(P, \xi + (\eta^{(n)}, 0))/2} |P(\xi + (\eta^{(n)}, 0) + (0^{(n)}, \eta_n))|, \end{aligned}$$

где C_3 – постоянная. В силу Лемм 1 и 3, с некоторой постоянной $C_4 > 0$

$$\sum_{\alpha \geq 0} h^{|\alpha|}(\xi) |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_4 \sup_{\|\eta^{(n)}\| \leq h(\xi)/2} |P(\xi + (\eta^{(n)}, 0))|.$$

Повторяя вышеприведённые рассуждения $(n-1)$ раз получим требуемый результат. Лемма 5 доказана.

Пусть $h(\xi)$ – неотрицательная функция, определённая на $\mathbb{R}^n$, $t > 0$. Положим $G(h, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : h(\xi) \leq t\}$, $G^{(1)}(h, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \sup_{\|\eta\| \leq \sqrt{n}/2} h(\xi + \eta) \leq t\}$, $G^{(2)}(h, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \inf_{\|\eta\| \leq \sqrt{n}/2} h(\xi + \eta) \leq t\}$. Для множества $A \in \mathbb{R}^n$ обозначим через A_j , $1 \leq j \leq n$ проекцию множества A на подпространство $\xi_j = 0$, а через $m(A)$ – количество мультииндексов множества A . Для заданного вектора $\alpha \in N^{(n-1)}$ обозначим через I_α единичный $(n-1)$ -мерный куб с центром в точке α и гранями, параллельными координатным гиперплоскостям.

Лемма 6. Для любой неотрицательной функции $h(\xi)$ на $\mathbb{R}^n$ существует $t_0 > 0$ такое, что

$$\text{mes } G_j^{(1)}(h, t) \leq m(G_j(h, t)) \leq \text{mes } G_j^{(2)}(h, t), \quad j = 1, 2, \dots, \quad t > t_0.$$

Доказательство : Так как $\beta \neq \alpha$, $\alpha, \beta \in N^{(n-1)}$, $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$, то используя аддитивность, имеем

$$\begin{aligned} m(G_j(h, t)) &= \sum_{\alpha \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}} 1 = \sum_{\alpha \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}} \text{mes } I_\alpha = \\ &= \text{mes } \left(\bigcup_{\alpha \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}} I_\alpha \right). \end{aligned}$$

Остаётся показать, что

$$G_j^{(1)}(h, t) \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}} I_\alpha} \subset G_j^{(2)}(h, t). \quad (6)$$

Пусть $\xi^{(j)} \in G_j^{(1)}(h, t)$ – фиксированная точка такая, что для некоторого τ $\sup_{\|\eta\| \leq \sqrt{n}/2} h(\xi(\tau) + \eta) \leq t$, где $\xi(\tau) = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \tau, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$. Для заданного

вектора ξ , через $\alpha(\xi) \in N^n$ обозначим вектор, для которого $|\alpha_i(\xi) - \xi_i| \leq 1/2$, $i = 1, \dots, n$. Так как $\|\alpha(\xi(\tau)) - \xi(\tau)\| \leq \sqrt{n}/2$, то

$$h(\alpha(\xi(\tau))) = h(\xi(\tau) - (\xi(\tau) - \alpha(\xi(\tau)))) \leq \sup_{\|\eta\| \leq \sqrt{n}/2} h(\xi(\tau) + \eta) \leq t.$$

Следовательно, $\alpha^{(j)}(\xi(\tau)) \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}$. По определению I_α имеем $\xi^{(j)} \in I_{\alpha^{(j)}(\xi(\tau))}$. Поэтому

$$G_j^{(1)}(h, t) \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}} I_\alpha}.$$

Для доказательства второго вложения в (6) отметим, что для любых $\xi^{(j)} \in I_\beta$, $\beta \in G_j(h, t) \cap N^{(n-1)}$ имеем $\|\xi^{(j)} - \beta\| \leq \sqrt{n-1}/2$ и $h(\beta(\tau)) \leq t$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}^1$, где $\beta(\tau) = (\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \tau, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)$. Следовательно

$$\inf_{\|\eta\| \leq \sqrt{n}/2} h(\xi(\eta) + \eta) \leq h(\xi(\tau) - (\xi(\tau) - \beta(\tau))) = h(\beta(\tau)) \leq t.$$

Отсюда следует, что $\xi^{(j)} \in G^{(2)}(h, t)$ и получаем требуемый результат. Лемма 6 доказана.

Предложение 1. Пусть $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ — неотрицательные функции, определённые на $\mathbb{R}^n$ такие, что $h_2(\xi) \leq h_1(\xi)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(G_j(h_1, t))}{\ln t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(G_j(h_2, t))}{\ln t}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство : Следует из $G_j(h_1, t) \subset G_j(h_2, t)$ для $t > 0$.

Лемма 7. Для любого гипоеллиптического многочлена P от $n \geq 2$ переменных существуют величины

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(G_j(d_P, t))}{\ln t}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство : В силу Леммы 6 достаточно доказать существование

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}(G_j^{(2)}(d_P, t))}{\ln t}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из условия гипоеллиптичности многочлена P следует, что с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$

$$1 + \inf_{\|\eta\| \leq \sqrt{n}/2} d_P(\xi + \eta) \geq C_1 \|\xi\|^{C_2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая Предложение 1, получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}(G_j^{(2)}(d_P, t))}{\ln t} &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}(G_j(C_1 \|\xi\|^{C_2}, t+1))}{\ln t} \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln(2\pi)^{n-2} \int_0^{[C_1^{-1}(t+1)]^{1/C_2}} r^{n-2} dr \right] / \ln t = (n-1)/C_2 < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для любого гипозэллиптического оператора $P(D)$ от $n \geq 2$ переменных с постоянными коэффициентами

$$\operatorname{df} N(P) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \operatorname{mes} (G_j^{(1)}(\rho_j(P), t))}{\ln t} + 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство : Обозначим через $\alpha^{(j)}(1), \dots, \alpha^{(j)}(m(\rho_j, t))$ элементы множества $G_j(\rho_j(P), t) \cap N^{(n-1)}$. По Лемме 3 для любого натурального l , $1 \leq l \leq m(\rho_j, t)$ существует комплексное число $\zeta_j(l)$ такое, что

$$P(\alpha_1(l), \dots, \alpha_{j-1}(l), \zeta_j(l), \alpha_{j+1}(l), \dots, \alpha_n(l)) = 0$$

и $\operatorname{Im} |\zeta_j(l)| \leq \rho_j(P, \alpha_1(l), \dots, \alpha_{j-1}(l), \operatorname{Re} \zeta_j(l), \alpha_{j+1}(l), \dots, \alpha_n(l)) \leq t$. Каждому такому вектору сопоставим функцию $U_l(x) = \exp i[x^{(j)} \alpha^{(j)} + x_j \zeta_j(l)] \in N(P)$. Пусть γ — число такое, что $\gamma^{-1} \in N_+^1$. Через $A^j(t)$ обозначим множество $m(\rho_j(P), t)$ -мерных векторов $(a_1, \dots, a_{m(\rho_j(P), t)})$, $r = 1, \dots, m(\rho_j(P), t)$, для которых $\gamma^{-1} a_r$ — целые неотрицательные числа. Ясно, что количество таких векторов равно $\gamma^{-m(\rho_j(P), t)}$. Сопоставим каждому вектору $a \in A^j(t)$ функцию

$$\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P), t)} a_r e^{i[(x^{(j)}, \alpha^{(j)}(r)) + x_j \zeta_j(r)]} \in N(P).$$

В $N(P)$ рассмотрим следующие полунормы :

$$q(U) = (2\pi)^{(n-1)/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |U(x^{(j)}, 0)|^2 dx^{(j)} \right]^{1/2}, \quad q_L(U) = \max_{\|x\| \leq L} |U(x)|,$$

$L = 1, 2, \dots$ и в $N(P)$ определим топологию $W = \{U \in N(P) : q(U) < 1\}$, $V_L = \{U \in N(P) : q_L(U) < 1\}$, $L = 1, 2, \dots$. Пусть $a, b \in A^j(t)$ — два различных вектора. Легко проверить, что

$$q \left(\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P), t)} (a_r - b_r) e^{i[(x^{(j)}, \alpha^{(j)}(r)) + x_j \zeta_j(r)]} \right) = \left(\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P), t)} |a_r - b_r|^2 \right)^{1/2} \geq \gamma.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\sum_{r=1}^{m(\rho_j(P), t)} a_r U_r \in m(\rho_j(P), t) e^{L t} V_L,$$

откуда следует

$$M(m(\rho_j(P), t) e^{L t} V_L, \gamma W) \geq \gamma^{-m(\rho_j(P), t)}.$$

Пусть $\varepsilon' > 0$ – фиксированное число. Положим $\varepsilon = e^{-2L\varepsilon'}$ и

$$\gamma^{-1} = \left[\frac{\varepsilon' e^{-L\varepsilon'}}{2\varepsilon m(\rho_j(P), t)} \right],$$

где $[\tau]$ – целая часть числа τ .

В силу Леммы 7 существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\gamma^{-m(\rho_j(P), t)} = \left[\frac{\varepsilon' e^{-L\varepsilon'}}{2\varepsilon m(\rho_j(P), t)} \right]^{m(\rho_j(P), t)} \geq [\varepsilon^{-1/3}]^{m(\rho_j(P), t)},$$

и в силу свойств функций M и N

$$\begin{aligned} \ln \ln N(\varepsilon' V_L, \varepsilon W) &= \ln \ln N(V_L, \varepsilon W / \varepsilon') \geq \ln \ln N(V_L, 2\varepsilon W / \varepsilon') = \\ &= \ln \ln \gamma^{-m(\rho_j(P), t)} \geq \ln \ln (\varepsilon^{-1/3})^{m(\rho_j(P), t)} = \ln m(\rho_j(P), t) + \ln \ln \varepsilon^{-1} - \ln 3 \geq \\ &\geq \ln m\left(\rho_j(P), \frac{1}{2L} \ln \varepsilon^{-1}\right) + \ln \ln \varepsilon^{-1} - \ln 3. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно Предложению 1 и Лемме 6

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln \ln N(\varepsilon' V_L, \varepsilon W)}{\ln \ln(1/\varepsilon)} &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln(m(\rho_j(P), \frac{1}{2L} \ln \varepsilon^{-1}))}{\ln \ln(1/\varepsilon)} + 1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(m(\rho_j(P), t))}{\ln t} + 1 \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}(G_j^{(1)}(d_P, t))}{\ln t} + 1. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon' V_L$, $L = 1, 2, \dots$ образуют базис в $N(P)$, то отсюда получаем требуемый результат. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. Пусть P – гипоеллиптический многочлен такой, что для некоторой постоянной $C > 0$

$$1 + d_P(\xi) \geq C \rho_1(P, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\text{df } N(P) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}(G_1(d_P, t))}{\ln t} + 1.$$

Доказательство : Следует из Теоремы 1. Предложения 1 и неравенств $d_P(\xi + \eta) \leq d_P(\xi) + \|\eta\|$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Для гипоеллиптического оператора $P(D)$ имеем $\text{df } N(P) = +\infty$. Это следует из того факта, что для любого $h_\varepsilon(\xi) \geq \max(\rho_j(P, \xi), \|\xi\|^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(h_\varepsilon, t)}{\ln t} = \infty \quad \text{и} \quad \text{df } N(P) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes}(G_j^{(1)}(h_\varepsilon, t))}{\ln t} + 1.$$

Теорема 2. Пусть P – многочлен $n \geq 2$ переменных с вполне правильным характеристическим многогранником $\mathcal{N}$. Тогда $\text{df } N(P) \geq \max_{\lambda \in \mathcal{N}} |\lambda|$.

Доказательство : Пусть для определённости $|\lambda^0| = \max_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})} |\lambda|$, $\lambda_1^0 = 1$, $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N})$. Многочлен P представим в виде

$$P(\xi) = \sum_{l=0}^k P_{ml}(\xi) \equiv \sum_{l=0}^k \sum_{(\lambda^0, \alpha)=m_l} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad m_0 > \dots > m_k \geq 0.$$

Так как вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N})$, ясно, что существует точка $\tau \in \mathbb{R}_0^n$ такая, что $P_{m_0}(\tau) D_1 P_{m_0}(\tau) \neq 0$. Не умаляя общности можно считать, что $\tau = (1, \dots, 1)$. В силу непрерывности многочленов существует число $\epsilon \in (0, 1)$ такое, что $P_{m_0}(\xi) D_1 P_{m_0}(\xi) \neq 0$ на множестве $F = \{\xi: 1 - \epsilon \leq \xi_j \leq 1 + \epsilon, j = 1, \dots, n\}$. Для $\theta \geq 0$ обозначим через $H(\theta)$ следующее множество $H(\theta) = \{\xi: \theta \leq \xi_1; (1 - \epsilon) \xi_1^{1/\lambda_j} \leq \xi_j \leq (1 + \epsilon) \xi_1^{1/\lambda_j}\}$. Используя Лемму 3, легко видеть, что существуют постоянные $\theta_0, C_1 > 0$ такие, что $\rho_1(P, \xi) \leq C_1 \xi_1$ при $\xi \in H(\theta_0)$. В силу Предложения 1, для некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем $G(\rho_1(P), t) \supset G(C_1 \xi_1, t) \cap H(\theta_0)$ при $t \geq \theta_0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{mes } G_1^{(1)}(\rho_1(P), t)}{\ln t} \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[\int_{a_2(t)}^{b_2(t)} \dots \int_{a_n(t)}^{b_n(t)} d\xi_2 \dots d\xi_n - C_3 \right]}{\ln t} = \lambda_2^0 + \dots + \lambda_n^0,$$

где $a_j(t) = (1 - \epsilon) t^{\lambda_j^0}$, $b_j(t) = (1 + \epsilon) t^{\lambda_j^0}$, $j = 2, \dots, n$. Отсюда и из Теоремы 1 получим требуемый результат. Теорема 2 доказана.

Пусть P – многочлен с вполне правильным характеристическим многогранником $\mathcal{N}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) = \lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$. Представим P в виде

$$P(\xi) = \sum_{l=0}^M P_{ml}(\xi) \equiv \sum_{l=0}^M \sum_{(\lambda, \alpha)=m_l} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad m_0 > \dots > m_M \geq 0.$$

Пусть для некоторой точки $\tau \in R_0^n$, $P_{m_0}(\tau) = 0$, $P_{m_1}(\tau) \neq 0$

$$k(\tau) = \max\{\tau, \tau > 0, \sum_{(\alpha, \lambda) < \tau} |D^\alpha P_{m_0}(\tau)| = 0, \sum_{(\alpha, \lambda) = \tau} |D^\alpha P_{m_1}(\tau)| \neq 0\}$$

и $m_1 > m_0 - k(\tau)$. Заметим, что неравенство $m_1 > m_0 - k(\tau)$ является необходимым условием гипоеллиптичности многочлена P .

Теорема 3. Пусть P – многочлен, удовлетворяющий вышеописанным условиям. Если

$$\sum_{(\alpha, \lambda) \leq k(\tau) - \lambda_n} |D_n D^\alpha P_{m_0}(\tau)| \neq 0,$$

то

$$\text{df}N(P) \geq \frac{\lambda_1 k(\tau)}{[m_1 - (m_0 - k(\tau))]} + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Доказательство : В условиях теоремы существуют вектор $a \in \mathbb{R}_0^n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\sum_{(\alpha, \lambda) \leq k(\tau) - \lambda_n} D^\alpha P_{m_0}(\tau) \eta^\alpha / \alpha! \neq 0$$

при всех $\eta \in F = \{\eta, a_j - \varepsilon \leq \eta_j \leq a_j + \varepsilon, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}_0^n$.

Для $\theta \geq 0$ обозначим через $H(\theta) = \{\xi, \xi_1 \geq \theta, \tau_j(\xi_1/\tau_1)^{\lambda_j/\lambda_1} + (a_j - \varepsilon)\xi_1^{\delta\lambda_j/\lambda_1} \leq \xi_j \leq \tau_j(\xi_1/\tau_1)^{\lambda_j/\lambda_1} + (a_j + \varepsilon)\xi_1^{\delta\lambda_j/\lambda_1}, j = 2, \dots, n\}$, где $\delta = [m_0 - (m_1 - k(\tau))]/k(\tau)$.

Используя Лемму 3, после простых вычислений заключаем, что $\rho_n(P, \xi) \leq C_1 \xi_1^{\delta\lambda_n/\lambda_1} = C_1 \xi_1^{\delta/\lambda_1}$ для всех $\xi \in H(\theta_0)$, где $\theta \geq 0$ и $c_1 > 0$ — постоянные.

Существуют также постоянные $C_2 > 0$ и $C_3 > 0$ такие, что при $t > \theta_0$

$$\begin{aligned} \text{mes}(H(\theta) \cap G(\rho_n(P), t))_n &\geq \\ &\geq C_2 \int_0^{t^{\lambda_1/\delta}} \int_{(a_2 - \varepsilon)t^{\lambda_2}}^{(a_2 + \varepsilon)t^{\lambda_2}} \dots \int_{(a_{n-1} - \varepsilon)t^{\lambda_{n-1}}}^{(a_{n-1} + \varepsilon)t^{\lambda_{n-1}}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} = C_3. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу Теоремы 1 и Предложения 1 получаем требуемый результат.

Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. The paper considers hypoelliptic operators $P(D)$ with constant coefficients and establishes lower bounds for functional dimension of the space of solutions of differential equation $P(D)u = 0$. The bounds are determined by the behavior of the symbol of operator $P(D)$ at infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Pontrjagin, L. Schnirelman, "Sur une propriete metrique de la dimension", Ann. Math., vol. 33, pp. 156 -- 162, 1921.
2. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, "ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах", УМН, том 2(96), стр. 3 — 86, 1959.
3. Y. Komura, "Die Nuklearitaet der Losungsraume der Hypoelliptischen Gleichungen Funcialay Ekvacioj", vol. 9, pp. 313 — 324, 1966.
4. Z. Zielezni, "On the functional dimension of the space of solutions of PDE", J. Diff. Equat., vol. 18, no. 2, pp. 340 — 345, 1975.
5. M. Langenbruch, "On the functional dimension of solution spaces of Hypoelliptic partial differential operators", Math. Ann., vol. 272, pp. 217 — 229, 1985.
6. M. Langenbruch, "P-Functionale und Raudwere zu Hypoelliptischen Differentialoperatoren", Math. Ann., vol. 239, pp. 313 — 324, 1979.
7. В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О функциональной размерности пространства решений гипозллиптических уравнений", Мат. сб., том 115(157), стр. 614 — 631, 1981.
8. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Оценки снизу функциональной размерности пространства решений гипозллиптических операторов", Мат. сб., том 181, № 7, стр. 910 — 922, 1990.
9. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, М., Мир, 1965.

L_2 -ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПО СДВИГАМ

А. Б. Нерсисян, А. В. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 3, 2001

В статье рассматривается задача аппроксимации по сдвигам фиксированной периодической функции в структуре L_2 -сходимости. Получены точные формулы для главных членов соответствующих асимптотических разложений приближённой ошибки. В статье предлагаются быстрые алгоритмы, которые особенно эффективны в случае аппроксимации сплайнов чётного порядка и “модифицированных сплайнов” нечётного порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема аппроксимации по сдвигам фиксированной периодической функции изучалась в многочисленных работах (см., например, [1] – [3]). В [4], [5] был разработан общий подход к аппроксимациям, основанный на минимизации определённых функционалов. В частности, были получены оценки для периодических биортogonalных разложений и интерполяций по сдвигам на конечном отрезке.

В случае, когда аппроксимируемая функция, определённая на конечном отрезке, не обладает гладким периодическим продолжением, возникает проблема ускорения сходимости. При тригонометрической аппроксимации (соответствующей сдвигам ядра Дирихле) ускорение было достигнуто методом, восходящим к А. Н. Крылову, основанным на применении полиномов Бернулли (см. [6] – [8] и пункт 1.3). В настоящей статье рассматривается L_2 -сходимость полиномиально-периодических аппроксимаций достаточно гладких на $[-1, 1]$ функций по сдвигам фиксированных периодических функций и получены точные формулы для главного члена соответствующих асимптотических разложений. Изучаемый подход

Исследования, представленные в данной работе, выполнены при поддержке гранта NFSAT- CRDF # CS 037-01 (BGP 7420).

особенно эффективен для аппроксимации по сдвигам сплайнов чётного порядка и "модифицированных сплайнов" нечётного порядка.

§1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Наше исследование основано на работах [4] – [8]. В этом параграфе приводятся некоторые результаты из этих работ, используемые в дальнейшем.

1.1. Результаты из [4] и [5]. Рассмотрим в пространстве $L_2(-1, 1)$ с нормой $\|\cdot\|$ ортонормальную систему $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi n x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Пусть Z – множество целых чисел, и последовательность $\{\theta_n\}$, $\theta_n \in \mathbb{C}$ такая, что ряды

$$\omega_n^2 = \sum_{s \in Z} |\theta_{n+s(2N+1)}|^2 \neq 0, \quad N \geq 1, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$$

сходятся. Тогда конечная система

$$\{\varphi_n\} = \{\varphi_n^N\}, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \sum_{s \in Z} \theta_{n+s(2N+1)} e^{i\pi(n+s(2N+1))x}, \quad (1)$$

$n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, будет ортонормальной в $L_2(-1, 1)$. Рассмотрим соответствующее ортогональное разложение функции $f \in L_2(-1, 1)$:

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть $f \in L_2(-1, 1)$ и $f_n = \frac{1}{2}(f, e^{i\pi n x})$ – её коэффициенты Фурье. Имеет место следующая оценка

$$\|f - S_N(f)\| \leq 4 \left(\sum_{|n| > N} |f_n|^2 \right)^{1/2} + 2 \left(\sum_{n=-N}^N |f_n|^2 \left(1 - \frac{|\theta_n|^2}{\omega_n^2} \right) \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Следующий результат является непосредственным следствием оценки (3).

Теорема А. Условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\theta_n|^2}{\omega_n^2} = 1, \quad n = \text{const}$$

является необходимым и достаточным для $\|\cdot\|$ -сходимости $S_N(f) \rightarrow f$ ($N \rightarrow \infty$) для любого $f \in L_2(-1, 1)$.

Оценка (3) характеризует быстроту сходимости $S_N(f) \rightarrow f$ в терминах коэффициентов Фурье $\{f_n\}$. Разложение (2) можно представить по сдвигам периодической функции $b(x) = \sum_{n \in Z} \theta_n e^{i\pi n x}$. Следующие формулы эффективно реализуются применением компьютерного интегрирования и алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT):

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\omega_n(2N+1)} \sum_{s=-N}^N e^{\frac{2i\pi n s}{2N+1}} b\left(x - \frac{2s}{2N+1}\right),$$

$$S_N(f) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{s=-N}^N c_s b\left(x - \frac{2s}{2N+1}\right),$$

где

$$c_s = \sum_{r=-N}^N \mu_{s-r} \tilde{f}_r, \quad \mu_k = \sum_{n=-N}^N e^{\frac{2i\pi nk}{2N+1}} / \omega_n^2, \quad \tilde{f}_s = \int_{-1}^1 f(t) b\left(t - \frac{2s}{2N+1}\right) dt.$$

Пусть теперь последовательность $\{\theta_n\} = \left\{ \theta\left(\frac{n}{2N+1}\right) \right\}$ представляется преобразованием Фурье

$$\theta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \rho(x) dx. \quad (4)$$

Предполагая, что $\rho(x) \in L_2 \cap C_{loc}$ и $\sum_k |\rho((2N+1)x + 2k)| < \infty$, функцию $b(x)$ можно представить посредством сдвигов функции $\rho(x)$:

$$b(x) = (N+1/2) \sum_{r \in \mathbb{Z}} \rho((2N+1)x - 2r).$$

1.2. Полиномы Бернулли и аппроксимация функций одной переменной ([6] – [8]). Положим $A_k = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)$, $f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi n x} dx$. Общеизвестен следующий результат.

Лемма 2. Для любой функции $f(x) \in C^{q+1}[-1, 1]$, $q \geq -1$

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^q \frac{A_k}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^{q+1}} \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(t) e^{-i\pi n t} dt, \quad n \neq 0. \quad (5)$$

Используя Лемму 2, функцию f можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^q A_k B_k(x) + F(x), \quad (6)$$

где $F(x)$ – некоторая 2-периодическая и q раз дифференцируемая функция.

Полиномы Бернулли $B_k(x)$ имеют коэффициенты Фурье вида

$$B_{k,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & \text{при } n \neq 0 \\ 0, & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

и определяются рекуррентным соотношением

$$B_0(x) = \frac{x}{2}, \quad B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \quad x \in [-1, 1], \quad k = 1, 2, \dots,$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^1 B_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Из (6) следует, что коэффициенты Фурье функции $F(x)$ определяются по формулам

$$F_n = f_n - \sum_{k=0}^q A_k B_{k,n}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (7)$$

Следующая формула называется полиномиально-периодической аппроксимацией :

$$f(x) \simeq f_N(x) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^q A_k B_k(x). \quad (8)$$

Если $f \in C^{q+2}[-1, 1]$, то $F_n = O(n^{-q-2})$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому можно рассчитывать на быструю сходимость f_N к f при $N \rightarrow \infty$. Для определения чисел A_k ($k = 0, \dots, q$) воспользуемся соотношением (7). Заменяя (7) следующей системой с неособой матрицей Вандермонда

$$f_{n_i} = \sum_{k=0}^q \bar{A}_k B_{k,n_i}, \quad s = 1, \dots, q+1, \quad n_i \neq n_j \quad (i \neq j), \quad (9)$$

$$\text{const } N \leq |n_s| \leq N, \quad N \rightarrow \infty,$$

получим ошибку порядка $O(N^{-q-2})$, $N \rightarrow \infty$. Решение системы (9) изучено в [7], [8], где показано, что ошибка $|A_k - \bar{A}_k|$ имеет порядок $O(N^{-q+k-1})$ при $N \rightarrow \infty$.

1.3. Полиномиально-периодическая аппроксимация. В применении к разложению по сдвигам некоторой функции этот метод можно описать следующим образом. Пусть $f \in C^{q+1}[-1, 1]$. Рассмотрим следующую аппроксимационную формулу, соответствующую разложению (6), и называемую полиномиально-периодической аппроксимацией :

$$S_N^q(f) = S_N \left(f(x) - \sum_{k=0}^q A_k B_k(x) \right) + \sum_{k=0}^q A_k B_k(x). \quad (10)$$

Отметим, что при следующем выборе

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{при } |n| \leq N, \\ 0, & \text{при } |n| > N, \end{cases} \quad (11)$$

(10) совпадает с (8). В этом случае $\{\varphi_n(x)\}_{n=-N}^N$ совпадает с урезанной системой Фурье $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi n x} \right\}_{n=-N}^N$ (см. Пример 1 ниже).

Нас интересуют асимптотические L_2 -оценки ошибки $S_N^q(f) - f$ при $N \rightarrow \infty$. При этом, наш анализ не касается вопроса приближённого определения скачков $\{A_k\}$ посредством (f, φ_n) в общем случае (см. 1.1).

§2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ L_2 -ОЦЕНКИ

Пусть $f(x)$ – функция, определённая на $[a, b]$, и пусть $\omega(\delta, f)$ – её модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [a, b], \quad |x_1 - x_2| \leq \delta.$$

Пусть $\theta_n = \theta\left(\frac{n}{2N+1}\right)$. Ясно, что $\omega_n = \omega\left(\frac{n}{2N+1}\right)$. Предполагая, что $\omega(x) \neq 0$ при $x \in [-1/2, 1/2]$, положим

$$\Phi(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^s \overline{\theta(x+s)}}{(x+s)^{q+2}}, \quad \tilde{\Phi}(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}}' \frac{(-1)^s \overline{\theta(x+s)}}{(x+s)^{q+2}}, \quad \Psi(x) = 1 - \frac{|\theta(x)|^2}{\omega^2(x)}.$$

Здесь и ниже $\sum'$ означает сумму, не содержащую слагаемое, соответствующее $s = 0$. Отметим, что $\Psi(x) \geq 0$. Из (1) и (2)

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|^2 &= 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left| f_{n+r(2N+1)} - \frac{\theta_{n+r(2N+1)}}{\omega_n^2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+s(2N+1)}} f_{n+s(2N+1)} \right|^2 = \\ &= 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{r \in \mathbb{Z}} |f_{n+r(2N+1)}|^2 - 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} f_{n+r(2N+1)} \right|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|^2 &= 2 \sum_{n=-N}^N \Psi\left(\frac{n}{2N+1}\right) |f_n|^2 - \\ &- 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} f_{n+r(2N+1)} \right|^2 + 2 \sum_{|n| > N} |f_n|^2 - \\ &- 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N \left(\frac{\theta_n \overline{f_n}}{\omega_n^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} f_{n+r(2N+1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие три условия :

1°. Функция $\theta(x)$ кусочно-непрерывна, и ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta(x+s)|^2 \neq 0$ равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]$,

2°. Существует монотонная на каждом из отрезков $(-1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ и интегрируемая на $(-1/2, 1/2)$ функция $\tau(x) \geq 0$ такая, что $\Psi(x)x^{-2q-4} \leq \tau(x)$,

3°. $f \in C^{q+2}[-1, 1]$, $q \geq -1$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|f - S_N^q(f)\|^2 =$$

$$= \frac{|A_{q+1}|^2}{\pi^{2q+4}} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{x^{2q+4}} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} \right) dx \right). \quad (14)$$

Доказательство : Воспользуемся неравенством

$$\|f - S_N^q(f)\| = \|F - S_N(F)\| \leq \|F_1 - S_N(F_1)\| + \|F_2 - S_N(F_2)\|, \quad (15)$$

где (см. Лемму 2), $n \neq 0$

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x), \quad F_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}' F_{1,n} e^{i\pi n x}, \quad F_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{A_{q+1}}{(i\pi n)^{q+2}},$$

$$F_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}}' F_{2,n} e^{i\pi n x}, \quad F_{2,n} = \frac{1}{2(i\pi n)^{q+2}} \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Хорошо известно (см., например, [10]), что $|f_n| \leq \text{const } \omega(|n|^{-1}, f)$, и поэтому

$$|F_{2,n}| \leq \text{const } \omega(|n|^{-1}, f^{(q+2)}) |n|^{-q-2}. \quad (16)$$

Согласно Лемме 1 ($t_n = \frac{n}{2N+1}$)

$$\|F_2 - S_N(F_2)\| \leq 4 \left(\sum_{|n| > N} |F_{2,n}|^2 \right)^{1/2} + 2 \left(\sum_{n=-N}^N' |F_{2,n}|^2 \Psi(t_n) \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Первое слагаемое в правой части (17) оценим с помощью (16) :

$$\sum_{|n| > N} |F_{2,n}|^2 \leq \text{const} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\omega^2(n^{-1}, f^{(q+2)})}{n^{2q+4}} \leq \frac{\text{const } \omega^2(N^{-1}, f^{(q+2)})}{(2N+1)^{2q+3}}. \quad (18)$$

Для второго слагаемого имеем ($[x]$ – целая часть x)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N' |F_{2,n}|^2 \Psi(t_n) &\leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+4}} \sum_{n=-[\sqrt{N}]}^{[\sqrt{N}]}' \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} \omega^2(|n|^{-1}, f^{(q+2)}) + \\ &+ \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+4}} \sum_{[\sqrt{N}] < |n| \leq N} \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} \omega^2(|n|^{-1}, f^{(q+2)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Ясно, что из утверждений Теоремы 1 вытекает интегрируемость $\Psi(x)x^{-2q-4}$ на $[-1/2, 1/2]$ и существование предела (см. [11])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N' \Psi(t_n) t_n^{-2q-4} = \int_{-1/2}^{1/2} \Psi(x) x^{-2q-4} dx.$$

Следовательно, второе слагаемое в (19) оценивается выражением

$$\text{const} \frac{\omega^2([\sqrt{N}]^{-1}, f^{(q+2)})}{(2N+1)^{2q+3}} \int_{-1/2}^{1/2} \Psi(x) x^{-2q-4} dx.$$

Соответственно первое слагаемое мажорируется выражением

$$\frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \int_{-\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}}^{\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}} \tau(x) dx,$$

которое стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, поскольку $\tau(x)$ интегрируема. Таким образом, $\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|F_2 - S_N(F_2)\|^2 = 0$, и следовательно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+3} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2.$$

С другой стороны, в силу (12)

$$\begin{aligned} (2N+1)^{2q+3} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2 &= \frac{|A_{q+1}|^2}{2\pi^{2q+4}} \frac{1}{(2N+1)} \left[\sum_{n=-N}^N \sum_{r \neq 0} (t_n + r)^{-2q-4} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-N}^N \left(t_n^{-2q-4} - \frac{|\Phi(t_n)|^2}{\omega^2(t_n)} \right) \right] + O((2N+1)^{-1}), \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем теперь, что

$$x^{-2q-4} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} \in L_1(-1/2, 1/2),$$

и что при $N \rightarrow \infty$ суммы в (20) можно заменить соответствующими интегралами. Имеем

$$x^{-2q-4} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} = \frac{\Psi(x)}{x^{2q+4}} - \frac{|\tilde{\Phi}(x)|^2}{\omega^2(x)} - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\theta(x) \overline{\tilde{\Phi}(x)}}{x^{q+2} \omega^2(x)} \right). \quad (21)$$

Согласно условиям 1° и 2° функции $|\tilde{\Phi}(x)|^2 \omega^{-2}(x)$ и $\Psi(x) x^{-2q-4}$ интегрируемы на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Третье слагаемое в правой части (21) мажорируется выражением

$$\text{const} \frac{|\tilde{\Phi}(x) x^{-q-2}|}{\omega^2(x)} \leq \text{const} (\Psi(x) x^{-2q-4})^{1/2} \leq \text{const} (\tau(x))^{1/2}.$$

Для завершения доказательства остаётся учесть, что из условия 2° следует интегрируемость функции $\sqrt{\tau(x)}$ на $[-1/2, 1/2]$. Теорема 1 доказана.

Для заданного α ($0 < \alpha \leq 1$) обозначим через Λ_α класс функций f , удовлетворяющих оценке $\omega(\delta, f) \leq C\delta^\alpha$, где C — постоянная, не зависящая от δ . Известно (см., например, [10]), что $|f_n| \leq \text{const} |n|^{-\alpha}$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия :

1°. Функция $\theta(x)$ кусочно-непрерывна, и ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta(x+s)|^2 \neq 0$ равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]$,

2°. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2q-3} \Psi(x) = B$,

3°. Существует монотонная на каждом из отрезков $(-1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ и интегрируемая на $(-1/2, 1/2)$ функция $\Omega(x) \geq 0$ такая, что

$$|(\Psi(x)x^{-2q-3} - B)x^{-1}| \leq \Omega(x), \quad (22)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\ln \epsilon)^{-1} \int_{\epsilon < |x| \leq 1/2} \Omega(x) dx = 0, \quad (23)$$

4°. $f^{(q+2)} \in \Lambda_\alpha$, $q \geq -1$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{|A_{q+1}|^2}{\pi^{2q+4}} B. \quad (24)$$

Доказательство : Воспользуемся неравенством (15), в котором второе слагаемое в правой части оценим с помощью Леммы 1. Первое слагаемое в правой части (3), где $f_n = F_{2,n}$, оценивается как и при доказательстве Теоремы 1 (см. (18)). Второе слагаемое в (3) при $f_n = F_{2,n}$ оценим следующим образом :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |F_{2,n}|^2 \Psi(t_n) &\leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \sum_{n=-N}^N |n|^{2q+3} |F_{2,n}|^2 \leq \\ &\leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \sum_{n=-N}^N \frac{\omega^2(|n|^{-1}, f^{(q+2)})}{|n|} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{1+2\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|F_2 - S_N(F_2)\|^2 = 0,$$

и следовательно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2.$$

Согласно (13)

$$\begin{aligned} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2 &= 2 \sum_{n=-N}^N \Psi(t_n) |F_{1,n}|^2 - \\ &- 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{1,n+r(2N+1)} \right|^2 + 2 \sum_{|n| > N} |F_{1,n}|^2 - \\ &- 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N \left(\frac{\theta_n \overline{F_{1,n}}}{\omega_n^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{1,n+r(2N+1)} \right) \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (25) мажорируется третьим слагаемым, поскольку

$$\text{const} \sum_{n=-N}^N \Psi(t_n) \sum_{r \in \mathbb{Z}} |F_{1,n+r(2N+1)}|^2 \leq \text{const} \sum_{|n| > N} |F_{1,n}|^2.$$

Легко показать, что третье слагаемое в (25) имеет порядок $O((2N+1)^{-2q-3})$ при $N \rightarrow \infty$. Мажоранта четвёртого слагаемого в (25) оценивается выражением

$$\begin{aligned} & \text{const} \sum_{n=-N}^N |F_{1,n}| \Psi^{1/2}(t_n) \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} |F_{1,n+r(2N+1)}|^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{q+1.5}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+r(2N+1))^{2q+4}} \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3.5}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \|f - S_N^q(f)\|^2 &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2q+3}}{\ln(2N+1)} \sum_{n=-N}^N |F_{1,n}|^2 \Psi(t_n) = \\ &= \frac{|A_{q+1}|^2}{\pi^{2q+4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+3}} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для завершения доказательства остаётся показать, что последний предел в правой части (26) равен B . Имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+3}} \frac{1}{n} - B \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+3}} - B \right) \frac{1}{n} + \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\Psi(-t_n)}{t_n^{2q+3}} - B \right) \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сначала покажем, что первый предел в правой части (27) равен нулю. Подставляя $\lambda(x) = \Psi(x)x^{-2q-3} - B$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^N \frac{\lambda(t_n)}{n} &= \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=1}^{[\sqrt{N}]} \frac{\lambda(t_n)}{n} + \frac{1}{2 \ln(2N+1)} \sum_{n=[\sqrt{N}]+1}^N \frac{\lambda(t_n)}{n} \leq \\ &\leq \text{const} \omega \left(\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}, \lambda \right) + \frac{1}{2(2N+1) \ln(2N+1)} \sum_{n=[\sqrt{N}]+1}^N \Omega(t_n) \leq \\ &\leq \text{const} \omega \left(\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}, \lambda \right) + \frac{\text{const}}{\ln(2N+1)} \int_{\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}}^{1/2} \Omega(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что второй предел в правой части (27) также равен нулю. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие три условия :

1°. Функция $\theta(x)$ кусочно-непрерывна и ряд $\sum_{s \in \mathbb{Z}} |\theta(x+s)|^2 \neq 0$ равномерно сходится на $[-1/2, 1/2]$,

2°. Для некоторого $\alpha < q + 1.5$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) x^{-2\alpha} = C, \quad (28)$$

3°. $f \in C^{q+2}[-1, 1]$, $q \geq -1$.

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2\alpha} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{C}{2\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{n^{2q+2-2\alpha}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \quad (29)$$

Доказательство : Используя (13), получаем

$$\begin{aligned} \|f - S_N^q(f)\|^2 &= \|F - S_N(F)\|^2 = 2 \sum_{n=-N}^N' \Psi(t_n) |F_n|^2 - \\ &- 2 \sum_{n=-N}^N \frac{1}{\omega_n^2} \left| \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{n+r(2N+1)} \right|^2 + 2 \sum_{|n| > N} |F_n|^2 - \\ &- 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N' \left(\frac{\theta_n \overline{F_n}}{\omega_n^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}}' \overline{\theta_{n+r(2N+1)}} F_{n+r(2N+1)} \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где (см. Лемму 2)

$$F_n = \frac{\varepsilon_n}{2(i\pi n)^{q+1}}, \quad \varepsilon_n = \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Как и при доказательстве Теоремы 2, можно показать, что второе и третье слагаемые в правой части (30) имеют порядок $O((2N+1)^{-2q-3})$ при $N \rightarrow \infty$. Последнее слагаемое в правой части (30) мажорируется следующим выражением :

$$\frac{\operatorname{const}}{(2N+1)^{q+2}} \sum_{n=-N}^N' |F_n| \Psi^{1/2}(t_n) \leq \frac{\operatorname{const}}{(2N+1)^{q+1.5+\alpha}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2\alpha} \|f - S_N^q(f)\|^2 &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2\alpha} \sum_{n=-N}^N' |F_n|^2 \Psi(t_n) = \\ &= \frac{1}{2\pi^{2q+2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N' \Psi(t_n) t_n^{-2\alpha} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+3-2\alpha}}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \Psi(t_n) t_n^{-2\alpha} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}}.$$

Обозначив $\tilde{\Psi}(x) = x^{-2\alpha} \Psi(x)$, $\tilde{\Psi}(0) = C$, и учитывая непрерывность функции $\tilde{\Psi}(x)$ в точке $x = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \left| C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} - \sum_{n=-N}^N \tilde{\Psi}(t_n) \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} \right| = \\ & = \left| \sum_{n=-N}^N (\tilde{\Psi}(0) - \tilde{\Psi}(t_n)) \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} + C \sum_{|n| > N} \frac{|\varepsilon_n|^2}{n^{2q+2-2\alpha}} \right| \leq \\ & \leq \sum_{n=-[\sqrt{N}]}^{[\sqrt{N}]} \frac{\omega\left(\frac{n}{2N+1}, \tilde{\Psi}\right)}{n^{2q+4-2\alpha}} + \text{const} \sum_{|n| > [\sqrt{N}]} n^{-2q-4+2\alpha} \leq \\ & \leq \omega\left(\frac{[\sqrt{N}]}{2N+1}, \tilde{\Psi}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{-2q-4+2\alpha} + \text{const} \sum_{|n| > [\sqrt{N}]} n^{-2q-4+2\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что согласно условию $f \in C^{(q+2)}$ имеем $|\varepsilon_n| \leq \text{const} |n|^{-1}$. Остаётся отметить, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{-2q-4+2\alpha}$ сходится при $\alpha < q + 1.5$.

Теорема 3 доказана.

§3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы рассмотрим примеры, иллюстрирующие результаты §2.

Пример 1. Рассмотрим простейший случай (см. также (11)), который соответствует классической системе Фурье :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ 0, & \text{при } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Все условия Теоремы 1 выполнены, и на отрезке $[-1/2, 1/2]$ имеем $\Phi(x) = x^{-q-2}$.

Согласно формуле (14)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| a(q), \quad (31)$$

где

$$a(q) = \frac{2^{q+1}}{\pi^{q+2}} \sqrt{\frac{2}{2q+3}}.$$

Таким образом, мы имеем точную асимптотическую оценку L_2 -ошибки для метода Фурье-Бернулли (см. [7], [8]). В Таблице 1 приведены численные значения $a(q)$ для различных значений q .

q	-1	0	1	2	3	4	5
$a(q)$	0.4501	0.1654	0.0816	0.0439	0.0246	0.0142	0.0083

Таблица 1. Численные значения константы $a(q)$ для различных значений q .

Пример 2. Рассмотрим следующий нестандартный случай :

$$\theta(x) = \begin{cases} \cos^s \frac{\pi}{2} x, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad s > 0.$$

Имеем

$$\omega^2(x) = \cos^{2s} \frac{\pi}{2} x + \sin^{2s} \frac{\pi}{2} x, \quad \Psi(x) = \frac{\sin^{2s} \frac{\pi}{2} x}{\cos^{2s} \frac{\pi}{2} x + \sin^{2s} \frac{\pi}{2} x}. \quad (32)$$

Очевидно, что условие 1° Теоремы 1 выполняется. Имеем

$$\Psi(x)x^{-2q-4} \leq \text{const } x^{2s-2q-4}. \quad (33)$$

Функция в правой части неравенства (33) монотонна на каждом из интервалов $(-1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ и интегрируема на интервале $(-1/2, 1/2)$ для $s > q + 1.5$. Следовательно, условие 2° Теоремы 1 выполнено. Кроме того, при $0 < x < 1/2$ имеем

$$\Phi(x) = \theta(x)x^{-q-2} - \theta(x-1)(x-1)^{-q-2} = x^{-q-2} \cos^s \frac{\pi}{2} x - (x-1)^{-q-2} \sin^s \frac{\pi}{2} x,$$

а при $-1/2 < x < 0$ имеем

$$\Phi(x) = \theta(x)x^{-q-2} - \theta(x+1)(x+1)^{-q-2} = x^{-q-2} \cos^s \frac{\pi}{2} x - (x+1)^{-q-2} \sin^s \frac{\pi}{2} x.$$

Согласно Теореме 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| b_1(q, s), \quad (34)$$

где

$$b_1^2(q, s) = \frac{1}{\pi^{2q+4}} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \int_0^{1/2} \left(x^{-2q-4} - \frac{|\Phi(x)|^2}{\omega^2(x)} \right) dx \right).$$

Численные значения постоянной $b_1(q, s)$ для некоторых значений s и q представлены на Рис. 1. Сравнение с Таблицей 1 показывает, что при чётных q (нижние диаграммы, Рис. 1) значения константы $b_1(q, s)$ всегда больше, чем соответствующее значение $a(q)$, и если s возрастает, то $b_1(q, s)$ приближается к $a(q)$. Таким

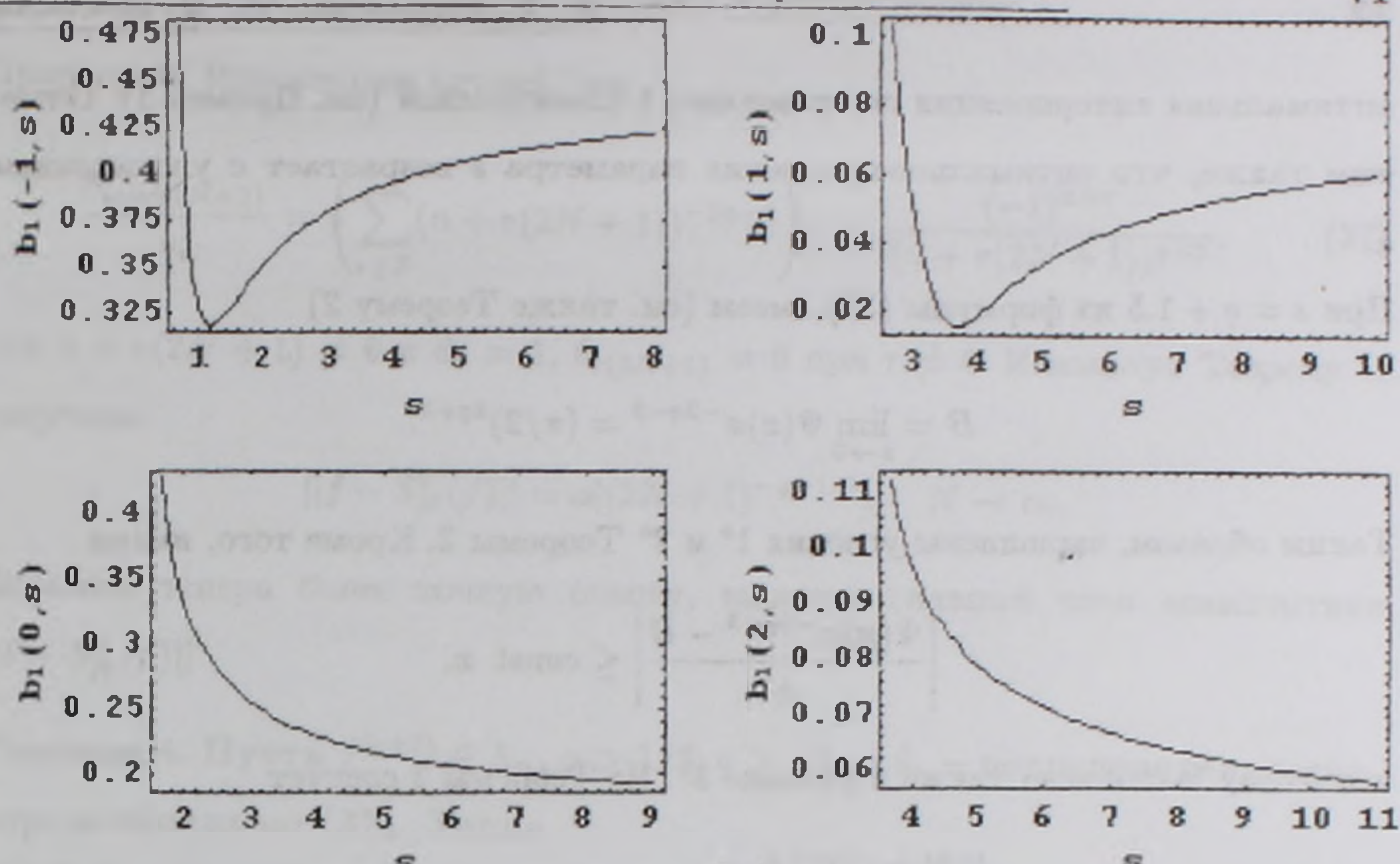


Рис. 1. Численные значения константы $b_1(q, s)$ для различных значений s и q .

образом, для чётных q классический выбор функции $\theta(x)$, как в Примере 1, приводит к более эффективной интерполяции по сравнению с Примером 2.

Для нечётных же q (верхние диаграммы, Рис. 1) ситуация совершенно иная. Значения константы $b_1(q, s)$ сначала быстро убывают (если s возрастает) до некоторого минимального значения, а потом начинают возрастать до значений константы $a(q)$. Сравнение с Таблицей 1 показывает, что начиная с некоторых значений s , $b_1(q, s)$ становится меньше, чем $a(q)$. Такое поведение $b_1(q, s)$ с резко выраженным минимумом даёт возможность выбора оптимального значения параметра s при фиксированных нечётных значениях q . Оптимальные значения параметра s найдены посредством пакета программ MATHEMATICA 3.0. Соответствующие результаты приведены в Таблице 2.

q	s	$b_1(q, s)$	$\frac{a(q)}{b_1(q, s)}$
-1	1.17501	0.318887	1.4
1	3.68683	0.015286	5.3
3	6.26922	0.001880	13.1
5	8.83021	0.000234	35.4

Таблица 2. Оптимальные значения параметра s и константы $b_1(q, s)$.

Последний столбец в Таблице 2 показывает, насколько эффективней становится

оптимальная интерполяция по сравнению с классической (см. Пример 1). Отметим также, что оптимальное значение параметра s возрастает с увеличением q .

При $s = q + 1.5$ из формулы (32) имеем (см. также Теорему 2)

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) x^{-2q-3} = (\pi/2)^{2q+3}.$$

Таким образом, выполнены условия 1° и 2° Теоремы 2. Кроме того, имеем

$$\left| \frac{\Psi(x) x^{-2q-3} - B}{x} \right| \leq \text{const } x,$$

и поэтому выполнено также и условие 3°. Из Теоремы 2 следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{q+1.5}}{\sqrt{\ln(2N+1)}} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| b_2(q), \quad (35)$$

где

$$b_2(q) = \frac{1}{2^{q+1}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

В Таблице 3 приведены численные значения $b_2(q)$ для некоторых значений q .

q	-1	0	1	2	3	4	5
$b_2(q)$	0.3989	0.1995	0.0997	0.0499	0.0249	0.0125	0.0062

Таблица 3. Численные значения $b_2(q)$ для $-1 \leq q \leq 5$.

Наконец, при $s < q + 1.5$ имеем (см. также Теорему 3)

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x) x^{-2s} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s}.$$

Поэтому при $\alpha = s$ выполнены все условия Теоремы 3, откуда следует

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2s} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ & = \pi^{2s-2q-2} 2^{-2s-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{n^{2q+2-2s}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+1)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, для нечётных значений q и оптимального выбора параметра s получим более строгий алгоритм по сравнению с классической тригонометрической аппроксимацией (Пример 1).

Пример 3. Рассмотрим случай, где

$$\frac{\theta_{n+r(2N+1)}}{\omega_n^2} = \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} (n + r(2N+1))^{-2q-4} \right)^{-1/2} \frac{(-1)^{n+r}}{(n + r(2N+1))^{q+2}}, \quad (37)$$

при $n + r(2N+1) \neq 0$ и $\theta_0 = 1$, $\theta_{r(2N+1)} = 0$ при $r \neq 0$. Используя Теорему 1, получаем

$$\|f - S_N^q(f)\| = o((2N+1)^{-q-1.5}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Докажем теперь более точную оценку, выделяя главный член асимптотики $\|f - S_N^q(f)\|$.

Теорема 4. Пусть $f^{(q+2)} \in \Lambda_\alpha$, $\alpha > 1/2$, $q \geq -1$, и θ_n — последовательность, определённая по (37). Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ = \frac{\zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}} \left(|A_{q+1}|^2 + 2 \int_{-1}^1 |f^{(q+2)}(z)|^2 dz - \left| \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(z) dz \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\zeta(s) = \sum_{r=1}^{\infty} r^{-s}$ — функция Римана.

Доказательство : Легко проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|F_1 - S_N(F_1)\|^2 = \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|F_2 - S_N(F_2)\|^2 + \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (13) при

$$f_n = F_{2,n} = \frac{\delta_n}{2(i\pi n)^{q+2}}, \quad \delta_n = \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \quad n \neq 0.$$

Как было показано при доказательстве Теоремы 2, второе слагаемое в правой части (13) при $f_n = F_{2,n}$ мажорируется третьим слагаемым, для которого, в свою очередь, имеем оценку

$$\sum_{|n| > N} |F_{2,n}|^2 \leq \text{const} \sum_{|n| > N} \frac{|\delta_n|^2}{n^{2q+4}} \leq \text{const} \sum_{|n| > N} n^{-2q-2\alpha-4} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3+2\alpha}}.$$

Последнее слагаемое в правой части (13) при $f_n = F_{2,n}$ мажорируется выражением

$$\begin{aligned} & \text{const} \sum_{n=-N}^N \left(\frac{|\delta_n|}{|n|^{q+2}} \Psi^{1/2}(t_n) \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}}' \frac{|\delta_{n+r(2N+1)}|^2}{(n+r(2N+1))^{2q+4}} \right)^{1/2} \right) \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{q+2}} \sum_{n=-N}^N |n|^{-\alpha} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}}' (n+r(2N+1))^{-2q-4-2\alpha} \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+4+\alpha}} \sum_{n=1}^N n^{-\alpha} \leq \frac{\text{const}}{(2N+1)^{2q+3+2\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \\ & = \frac{1}{2\pi^{2q+4}} \lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} |\delta_n|^2 + \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}. \end{aligned}$$

Остается доказать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{\Psi(t_n)}{t_n^{2q+4}} |\delta_n|^2 = 2\zeta(2q+4) \sum_{n \in \mathbb{Z}}' |\delta_n|^2. \quad (39)$$

Рассуждая как и при доказательстве Теоремы 3, получаем, что ряд в правой части (39) сходится, так как $|\delta_n|^2 \leq |n|^{-2\alpha}$, $\alpha > 1/2$. Поэтому имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2q+4} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{\zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' |\delta_n|^2 + \frac{|A_{q+1}|^2 \zeta(2q+4)}{\pi^{2q+4}}.$$

Использование равенства Парсеваля завершает доказательство Теоремы 4.

Пример 4. Рассмотрим функцию

$$\theta(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^m, \quad (40)$$

где $m \geq 1$ – целое. Это случай хорошо известных В-сплайнов, для которых $\text{supp}(\rho(x)) \in [-m, m]$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \theta(x+s) &= \frac{(-1)^{sm} \sin^m \pi x}{\pi^m (x+s)^m}, \quad \omega^2(x) = \frac{\sin^{2m} \pi x}{\pi^{2m}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} (x+s)^{-2m}, \\ \Psi(x) &= x^{2m} \sum_{s \in \mathbb{Z}}' (x+s)^{-2m} \left(1 + x^{2m} \sum_{s \in \mathbb{Z}}' (x+s)^{-2m} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Кроме того, имеем оценку $\Psi(x)x^{-2q-4} \leq \text{const } x^{2m-2q-4}$. Таким образом, при $m \geq q+2$ выполнены все условия Теоремы 1. После несложных преобразований из формулы (14) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| c_1(q, m),$$

где $c_1^2(q, m) =$

$$= \pi^{-2q-4} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \int_0^{1/2} \left(x^{-2q-4} - \frac{(\sum_{s \in \mathbb{Z}} (-1)^{s(m+1)} (x+s)^{-m-q-2})^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}} (x+s)^{-2m}} \right) dx \right).$$

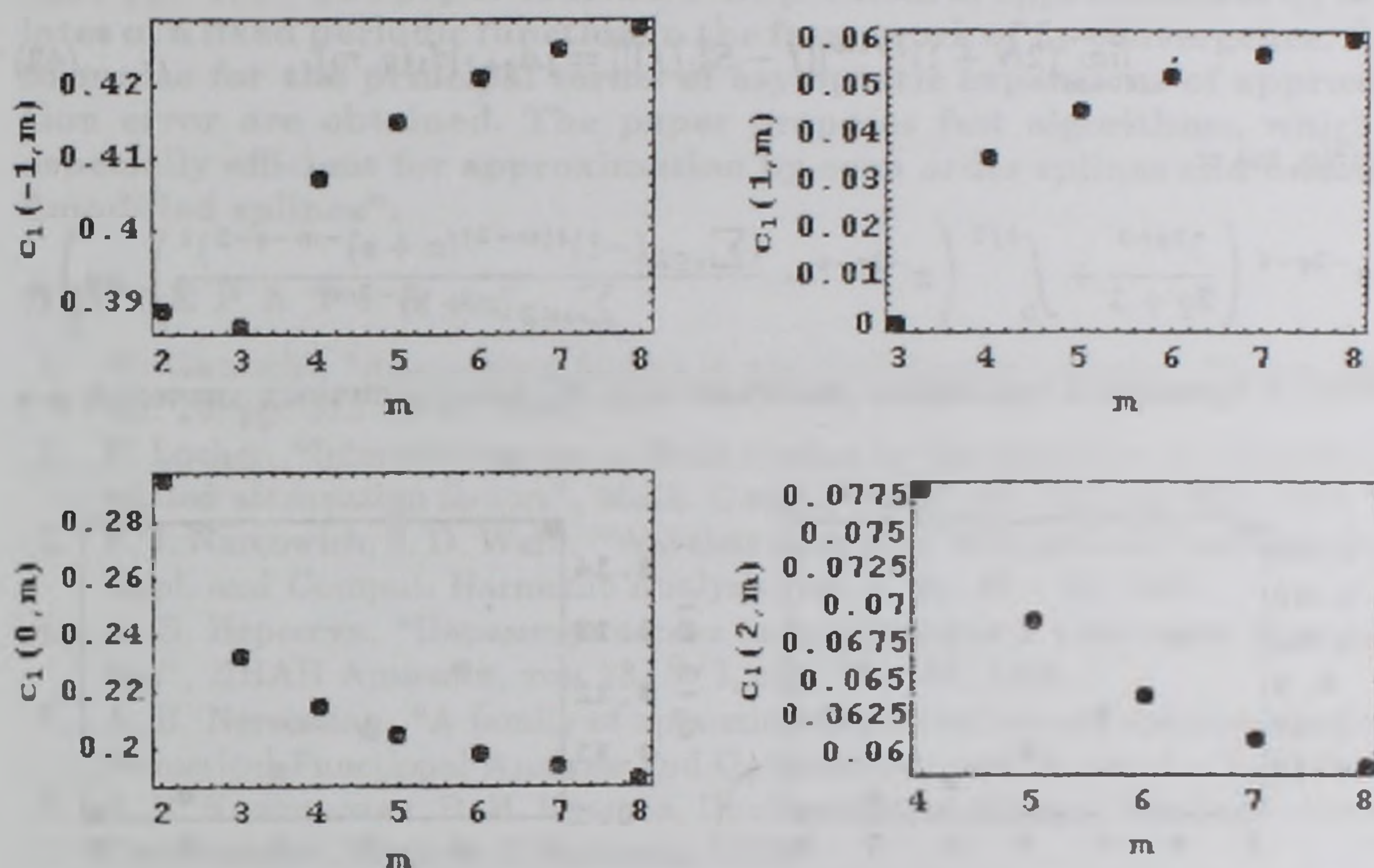


Рис. 2. Значения константы $c_1(q, m)$ для $-1 \leq q \leq 2$ и $2 \leq m \leq 8$.

Рисунки 1 и 2 почти идентичны. Как и в Примере 2, при чётных q (нижние диаграммы Рисунка 2) значения константы $c_1(q, m)$ всегда больше, чем соответствующее значение $a(q)$, и $c_1(q, m)$ аппроксимирует $a(q)$ при возрастании m . При нечётных q (верхние диаграммы Рисунка 2) $c_1(q, m)$ меньше, чем $a(q)$, и вновь аппроксимирует $a(q)$ при возрастании m .

Из формулы (41) вытекает, что (см. Теорему 3)

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \Psi(x)x^{-2m} = \sum'_{s \in \mathbb{Z}} s^{-2m} = 2\zeta(2m).$$

Поэтому при $m \leq q+1$ и $\alpha = m$ выполнены все условия Теоремы 3. Тогда из формулы (29) имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2m} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \frac{1}{n^{2q+2-2m}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2.$$

Легко проверить, что функция (40) порождает последовательность, удовлетворяющую условию (37) для нечётных q . В этом случае утверждение Теоремы 4 имеет место и в случае Примера 4.

Пример 5. Рассмотрим функцию

$$\theta(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^m \cos \pi x, \quad (42)$$

где $m \geq 1$ – целое. Очевидно, что в этом случае $\text{supp } \rho(x) \in [-m-1, m+1]$. При $m \geq q+2$ выполнены все условия Теоремы 1, и из формулы (14) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{q+1.5} \|f - S_N^q(f)\| = |A_{q+1}| d_1(q, m), \quad (43)$$

где $d_1^2(q, m) =$

$$= \pi^{-2q-4} \left(\frac{2^{2q+3}}{2q+3} + \int_0^{1/2} \left(x^{-2q-4} - \frac{(\sum_{s \in \mathbb{Z}} (-1)^{s(m+2)} (x+s)^{-m-q-2})^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}} (x+s)^{-2m}} \right) dx \right).$$

На Рис. 3 приведены численные значения $d_1(q, m)$ для различных значений q и m .

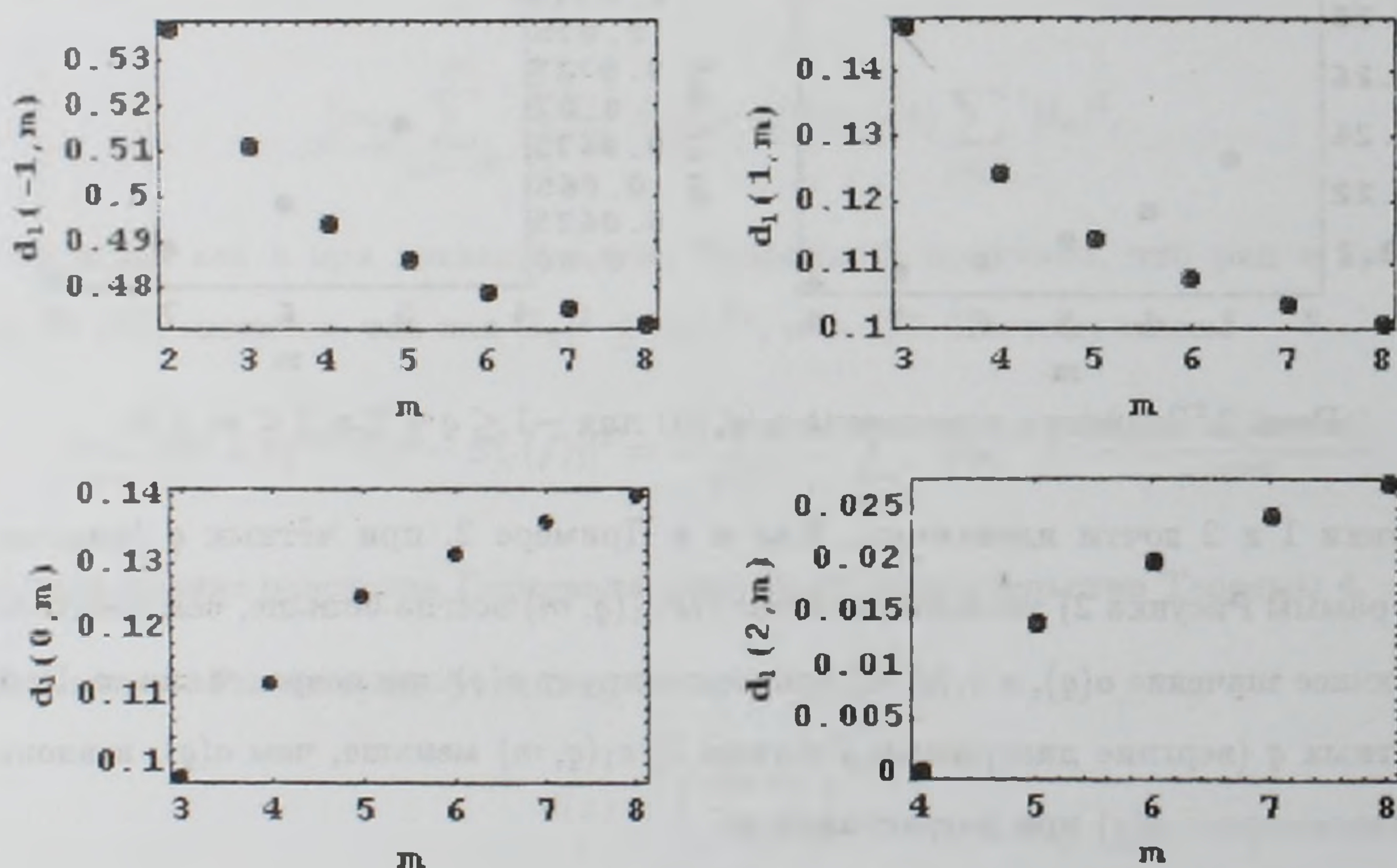


Рис. 3. Значения константы $d_1(q, m)$ для различных значений q и m .

Наконец, при $m < q+2$ выполнены все условия Теоремы 3, и из формулы (29) получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{2m} \|f - S_N^q(f)\|^2 = \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2q+2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^{2q+2-2m}} \left| \int_{-1}^1 f^{(q+2)}(x) e^{-i\pi n x} dx \right|^2. \quad (44)$$

Для чётных значений q условие (37) выполнено, и Теорему 4 можно использовать и для этого примера.

В действительности, при выборе сплайна как в Примере 4 (для нечётного $q \geq -1$), а также “модифицированного сплайна”, как в Примере 5 (для нечётного $q \geq 0$), приходим к быстрым алгоритмам повышенной точности, основанным на функциях с локальными носителями.

ABSTRACT. The paper considers the problem of approximation by translates of a fixed periodic function in the framework of L_2 -convergence. Exact formulae for the principal terms of asymptotic expansions of approximation error are obtained. The paper proposes fast algorithms, which are especially efficient for approximation by even order splines and odd order “modified splines”.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. W. Gautschi, “Attenuation factors in practical Fourier analysis”, Numer. Math., vol. 18, pp. 373 – 400, 1972.
2. F. Locher, “Interpolation on uniform meshes by the translates of a function and related attenuation factors”, Math. Comp., vol. 37, no. 156, pp. 403 – 416, 1981.
3. F. J. Narcowich, J. D. Ward, “Wavelets associated with periodic basis functions”, Appl. and Comput. Harmonic Analysis, vol. 3, pp. 40 – 56, 1996.
4. А. Б. Нерсисян, “Параметрическая аппроксимация и некоторые её применения”, ДНАН Армении, том 98, № 1, стр. 23 – 30, 1998.
5. A. B. Nersessian, “A family of approximation formulas and some applications”, Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 21, no. 1 – 2, 2000.
6. А. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближённые Методы Высшего Анализа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.
7. K. S. Eckhoff, “Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions”, Math. Comp., vol. 64, no. 210, pp. 671 – 690, 1995.
8. K. S. Eckhoff, C. E. Wasberg, “On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method”, Thesis of C. E. Wasberg, Department of Mathematics, University of Bergen, Norway, 1996.
9. S. Wolfram, The MATHEMATICA Book, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.
10. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, Москва, 1965.
11. Г. М. Фихтенгольд, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления, том 3, Наука, Москва, 1970.

16 октября 2000

Институт математики НАН Армении

E-mails : nerses@instmath.sci.am

arnak@instmath.sci.am

ГРУППА ЛОГАРИФМОВ МОДУЛЕЙ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Б. Т. Батикян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 3, 2001

Пусть A – равномерная алгебра непрерывных функций на компактном пространстве X и пусть A^{-1} – мультипликативная топологическая группа обратимых элементов алгебры A . В теории коммутативных банаховых алгебр ряд результатов характеризует алгебру A при некоторых предположениях на множество

$$\log |A^{-1}| = \{\log |f| : f \in A^{-1}\}$$

логарифмов модулей обратимых элементов A , и на пространство $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f : f \in A\}$ вещественных частей элементов A . В частности, получены условия, при которых A совпадает с алгеброй $C(X)$, обеспечивающие наличие аналитической структуры в спектре алгебры A (см., например, [1], [2] и [3], стр. 157).

В настоящей статье изучаются алгебраические свойства множества $\log |A^{-1}|$. Ясно, что $\log |A^{-1}|$ образует аддитивную группу в $C_{\mathbb{R}}(X)$, на которую группа A^{-1} отображается при эпиморфизме $\sigma : f \rightarrow \log |f|$. Хорошо известно, что множество $e^A = \{e^f : f \in A\}$ экспонент алгебры A являясь связной компонентой единицы в A^{-1} , образует открыто-замкнутую подгруппу группы A^{-1} . образом $\sigma(e^A)$ подгруппы экспонент является пространство $\operatorname{Re} A$.

Покажем, что некоторые свойства фактор-группы $\log |A^{-1}|/\operatorname{Re} A$ определяются разбиением Шилова компакта X на максимальные множества слабой антисимметрии. Напомним, что подмножество $F \subset X$ называется множеством слабой антисимметрии алгебры A , если любая вещественная функция из A постоянна на F . Совокупность $K(A)$ всех максимальных по включению множеств слабой антисимметрии образует замкнутое разбиение компакта X . Если $K(A) = \{X\}$,

то алгебра A называется антисимметричной. Если $K(A)$ содержит только одноточечные множества, то $A = C(X)$. По теореме Шилова [4] всякая непрерывная функция на X , совпадающая на каждом максимальном множестве слабой антисимметрии с некоторой функцией из A , принадлежит A .

Фактор-пространство Y компакта X по разбиению $K(A)$ всегда хаусдорфово и, значит, компактно. Из теоремы Шилова следует, что образ мономорфизма $\pi^* : C(Y) \rightarrow C(X)$, двойственного к фактор-отображению $\pi : X \rightarrow Y$, содержится в A . Через $S(A)$ обозначим спектр (пространство максимальных идеалов) алгебры A , а через $\hat{A}$ — изоморфный образ гельфандовского представления алгебры A в $C(S(A))$. Согласно известной теореме Аренса-Ройдена (см. [3], стр. 125) группа $H^1(S(A), \mathbb{Z})$ одномерных целочисленных когомологий компакта $S(A)$ изоморфна фактор-группе A^{-1}/e^A . Вместе с тем, если алгебра A антисимметрична, то фактор-группа $\log |A^{-1}|/\text{Re } A$ также изоморфна группе $H^1(S(A), \mathbb{Z})$ ([3], стр. 125).

Следующая теорема распространяет последний результат на произвольные, не обязательно антисимметричные, алгебры.

Теорема 1. Пусть A является равномерной алгеброй на компакте X , и Y — фактор-пространство компакта X по разбиению $K(A)$. Тогда группа $H^1(Y, \mathbb{Z})$ вкладывается в $H^1(S(A), \mathbb{Z})$, а фактор-группы $H^1(S(A), \mathbb{Z})/H^1(Y, \mathbb{Z})$ и $\log |A^{-1}|/\text{Re } A$ изоморфны.

Доказательство : Докажем существование точной последовательности

$$0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S(A), \mathbb{Z}) \rightarrow \log |A^{-1}|/\text{Re } A \rightarrow 0. \quad (1)$$

Обозначим через N и N_1 ядра эпиморфизмов $\sigma : A^{-1} \rightarrow \log |A^{-1}|$ и $\sigma : e^A \rightarrow \text{Re } A$ соответственно. Всякая функция из N имеет единичный модуль и, будучи обратимым элементом алгебры A , обязана быть постоянной на каждом максимальном множестве слабой антисимметрии. Таким образом, можно предположить, что $N \subset C(Y)^{-1}$ и $N_1 \subset e^{C(Y)}$. Так как любая положительная обратимая функция логарифмируема, то $N e^{C(Y)} = C(Y)^{-1}$, и по теореме Э. Нётер об изоморфизмах получаем

$$N/N_1 = N/(N \cap e^{C(Y)}) \cong N e^{C(Y)} / e^{C(Y)} = C(Y)^{-1} / e^{C(Y)}.$$

Это означает, что отображение $N/N_1 \rightarrow C(Y)^{-1}/e^{C(Y)}$, вызванное эпиморфизмом σ , является изоморфизмом. Таким образом, имеем следующую коммутативную

диаграмму :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & N_1 & \rightarrow & e^A & \xrightarrow{\sigma} & \operatorname{Re} A \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & A^{-1} & \xrightarrow{\sigma} & \log |A^{-1}| \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & C(Y)^{-1}/e^{C(Y)} & \xrightarrow{\sigma} & A^{-1}/e^A & \xrightarrow{\sigma} & \log |A^{-1}|/\operatorname{Re} A \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

где все столбцы и первые две строки точны. По 3×3 -лемме (см. [5], стр. 21) третья строка также точна. По теореме Аренса-Ройдена имеем $C(Y)^{-1}/e^{C(Y)} \cong H^1(Y, Z)$ и $A^{-1}/e^A \cong H^1(S(A), Z)$, откуда следует точность (1). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Поскольку $\log |A^{-1}|/\operatorname{Re} A$ является группой без кручения, из Теоремы 1 следует, что $H^1(Y, Z)$ есть сервантная подгруппа группы $H^1(S(A), Z)$ (см. [5], стр. 136).

В следующей теореме содержатся условия, при которых группы $\operatorname{Re} A$ и $\log |A^{-1}|$ совпадают. Для любого замкнутого $E \subset X$ обозначим через $\hat{E}$ спектр равномерной алгебры $\overline{A|E}$. Компакт $\hat{E}$ содержится в $S(A)$ и называется A -выпуклой оболочкой E .

Теорема 2. Пусть A — равномерная алгебра на X . Если A -выпуклая оболочка $\hat{F}$ любого компакта $F \in K(A)$ связана и $H^1(\hat{F}, Z) = 0$, то $\log |A^{-1}| = \operatorname{Re} A$.

Доказательство : Совокупность $\{\hat{F} : F \in K(A)\}$ совпадает с разбиением $K(\hat{A})$ спектра $S(A)$ на максимальные множества слабой антисимметрии гельфандовской алгебры $\hat{A}$ (см. [6]). Пусть $\hat{Y}$ — фактор-пространство $S(A)$ по разбиению $K(\hat{A})$, и пусть $\hat{\pi} : S(A) \rightarrow \hat{Y}$ — соответствующее фактор-отображение. Согласно условиям теоремы, для любого $y \in \hat{Y}$ имеем $H^0(\hat{\pi}^{-1}(y), Z) = Z$ и $H^1(\hat{\pi}^{-1}(y), Z) = 0$. Тогда по теореме Виеториса-Бегля (см. [7], стр. 445), естественный гомоморфизм $H^1(\hat{Y}, Z) \rightarrow H^1(S(A), Z)$, соответствующий отображению

$\hat{\pi}$, является изоморфизмом. Применяя Теорему 1 к равномерной алгебре $\hat{A}$, получим требуемый результат. Теорема 2 доказана.

Предположим теперь, что компакт X метризуем, а A и B – равномерные алгебры на X такие, что

$$\log |A^{-1}| = \log |B^{-1}|. \quad (2)$$

Если в дополнение к (2), одна из этих алгебр содержит другую, то $A = B$ (см. [8], [9]). Следующая теорема показывает, что из (2) следует совпадение некоторых топологических характеристик спектров A и B .

Напомним, что абелева группа H называется делимой (или инъективной), если $nH = H$ для любого натурального n .

Теорема 3. Пусть A и B – равномерные алгебры на метризуемом компакте X , и пусть Y – фактор-пространство X по разбиению $K(A)$. Если (2) выполняется и $H^1(Y, Z)$ – делимая группа, то группы когомологий $H^1(S(A), Z)$ и $H^1(S(B), Z)$ изоморфны.

Доказательство : Сначала отметим, что если A – произвольная равномерная алгебра на метризуемом компакте, то согласно лемме из [9] всякий $\mathbb{R}$ -модуль, содержащийся в $\log |A^{-1}|$, есть подмодуль $\text{Re } A$. В силу этой леммы, равенство (2) влечёт совпадение пространств $\text{Re } A$ и $\text{Re } B$. Тогда (см. [6]) $K(A) = K(B)$. Следовательно, эти разбиения определяют одно и то же фактор-пространство Y . Согласно Теореме 1 получим точные последовательности

$$0 \rightarrow H^1(Y, Z) \rightarrow H^1(S(A), Z) \rightarrow G \rightarrow 0 \quad (3)$$

и

$$0 \rightarrow H^1(Y, Z) \rightarrow H^1(S(B), Z) \rightarrow G \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $G = \log |A^{-1}| / \text{Re } A = \log |B^{-1}| / \text{Re } B$.

Поскольку группа $H^1(Y, Z)$ делима, она выделяется прямым слагаемым в группах $H^1(S(A), Z)$ и $H^1(S(B), Z)$ (см. [5], стр. 128). Отсюда и из (3) и (4) следует, что группы $H^1(S(A), Z)$ и $H^1(S(B), Z)$ изоморфны. Теорема 3 доказана.

Следствие. Пусть A и B – равномерные алгебры на метризуемом компакте X . Если алгебра A антисимметрична и имеет место (2), то $H^1(S(A), Z) \cong H^1(S(B), Z)$.

Замечание 2. Условие (2) в Теореме 3 нельзя заменить более слабым условием $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$. Работа [10] содержит примеры антисимметричных алгебр A и B на несвязном объединении двух окружностей таких, что $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$ и $H^1(S(A), \mathbb{Z}) = 0$, но $H^1(S(B), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Предположение о метризуемости X также существенно (см. [11]).

Замечание 3. Точные последовательности (3) и (4) показывают, что доказательство Теоремы 3 влечёт следующее утверждение : если компакт X метризуем и имеет место (2), то группы $H^1(S(A), \mathbb{Z})$ и $H^1(S(B), \mathbb{Z})$ являются расширениями группы $H^1(Y, \mathbb{Z})$ с помощью группы G . С этой точки зрения изоморфность групп $H^1(S(A), \mathbb{Z})$ и $H^1(S(B), \mathbb{Z})$ означает, что они являются эквивалентными расширениями и определяют один и тот же элемент группы $\operatorname{Ext}(G, H^1(Y, \mathbb{Z}))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Bernard, "Espace des parties réelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions", J. Funct. Anal., vol. 10, pp. 387 — 409, 1972.
2. Е. А. Горин, "Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии", УМН, том 33, № 4, стр. 169 — 188, 1978.
3. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, М., Мир, 1973.
4. Г. Е. Шилов, "О кольцах функций с равномерной сходимостью", УМЖ, том 3, № 4, стр. 404 — 411, 1951.
5. Л. Фукс, Бесконечные Абелевы Группы, том 1, М., Мир, 1974.
6. Л. Е. Аресон, "Алгебры с равномерной сходимостью и восстанавливающие покрытия", Мат. сб., том 79, № 2, стр. 217 — 249, 1969.
7. Э. Спеньер, Алгебраическая Топология, М., Мир, 1971.
8. Б. Т. Батикян, Е. А. Горин, "Об ультраразделяющих алгебрах непрерывных функций", Вестник МГУ, сер. Математика, № 2, стр. 15 — 20, 1976.
9. Б. Т. Батикян, "О логарифмах модулей обратимых элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, том 23, № 3, стр. 373 — 377, 1978.
10. J. P. Rosay, "Sur les algèbres uniformes ayant mêmes parties réelles", C. R. Acad. Sci., serie A, vol. 277, pp. 839 — 840, 1973.
11. Е. А. Горин, "Модули обратимых элементов нормированной алгебры", Вестник МГУ, сер. Математика, № 5, стр. 35 — 39, 1965.

17 марта 2001

Институт математики НАН Армении
E-mail : bag@instmath.sci.am

РАЗРЕШИМЫЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

А. Г. Хачатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 36, № 3, 2001

В работе рассматриваются переопределённые параболические начально-краевые задачи вида

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad B \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t)|_{\Gamma_T} = \Phi(x, t), \quad (1)$$

где $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Gamma_T = S \times [0, T]$, $S = \partial\Omega$, $\mathcal{L}$ и B – матрицы размеров $M \times m$ и $r \times m$. Их элементы $L_{kj} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ и $B_{qj} \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$ являются дифференциальными операторами порядков, не превосходящих $s_k + t_j$ и $\sigma_q + t_j$, соответственно. Целые s_k, t_j, σ_q ($k = 1, \dots, M, j = 1, \dots, m, q = 1, \dots, r$) удовлетворяют условиям $\max_k s_k = 0, t_j > 0$ (если $s_k + t_j < 0$ или $\sigma_q + t_j < 0$, то $L_{kj} = 0$ или $B_{qj} = 0$). Операторы L_{kj} имеют постоянные коэффициенты. Обозначим через L_{kj}^0, B_{qj}^0 суммы членов операторов L_{kj}, B_{qj} порядков $s_k + t_j$ и $\sigma_q + t_j$, соответственно, а через $\mathcal{L}_0$ и B_0 – матрицы с элементами L_{kj}^0 и B_{qj}^0 . Кроме того, введём такие обозначения: α – мультииндекс с компонентами, удовлетворяющими условию $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq M$; l^α, l_0^α – квадратные матрицы, составленные из строк матриц $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ с номерами α_i ; $L^\alpha = \det l^\alpha$ и $L_0^\alpha = \det l_0^\alpha$; $\hat{l}^\alpha$ и $\hat{l}_0^\alpha$ – матрицы взаимные для l^α и l_0^α такие, что $\hat{l}^\alpha l^\alpha = l^\alpha \hat{l}^\alpha = I_m L^\alpha, \hat{l}_0^\alpha l_0^\alpha = l_0^\alpha \hat{l}_0^\alpha = I_m L_0^\alpha$ (I_m – единичная $m \times m$ матрица). Порядок оператора L^α не превосходит $T_\alpha = \sum_{k=1}^m (t_k + s_{\alpha_k})$, а L_0^α – сумма членов L^α , порядок которых равен T_α .

Условие параболичности 1. При любом $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ общие корни полиномов $L_0^\alpha(i\xi, p)$ по переменной p удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} p_s \leq -\delta \xi^{2b}, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_n^2. \quad (2)$$

Условие параболичности 2. Существуют $2b$ -однородные полиномы $K^\alpha(i\xi, p)$ степени $T - T_\alpha$ такие, что полином

$$L(i\xi, p) = \sum_{\alpha} K^\alpha(i\xi, p) L_0^\alpha(i\xi, p)$$

также является $2b$ -однородным (T -однородным), а его корни при всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ удовлетворяют условиям (2).

Полином $\mathcal{L}(i\xi, p)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям :

$$L^\alpha(i\xi, p) = M(i\xi, p) Q^\alpha(i\xi, p) \quad \text{при всех } \alpha, \quad (3)$$

где $M(i\xi, p)$ — полиномы степени $2br$ с главной частью $M_0(i\xi, p)$ и

$$L_0^\alpha(i\xi, p) = M_0(i\xi, p) Q_0^\alpha(i\xi, p),$$

причём $Q_0^\alpha(i\xi, p)$ — $2b$ -однородные полиномы степени $T_\alpha - 2br$ (если $T_\alpha - 2br < 0$, то $Q^\alpha = L^\alpha = 0$), не имеющие общих комплексных корней, а корни $M_0(i\xi, p)$ удовлетворяют условиям (2).

Пусть $x \in S$. ν — единичный вектор внутренней нормали к S в точке x , и $\zeta(x)$ — вектор, лежащий в касательной плоскости к S в той же точке. Тогда $M_0(i(\zeta + \tau\nu), p)$ как полином по τ , при любом ζ имеет br корней τ_j^+ с положительной мнимой частью, и br — с отрицательной мнимой частью, если $\operatorname{Re} p > -\delta \xi^{2b}$ (см. [1]). Пусть

$$M^+(x, \zeta, \tau) = \prod_{s=1}^{br} (\tau - \tau_s^+(x, \zeta, p)).$$

Условие независимости : Строки матрицы

$$C(x, t, i(\zeta + \tau\nu), p) = B_0(x, t, i(\zeta + \tau\nu), p) \hat{\mathcal{L}}_0(i(\zeta + \tau\nu), p)$$

линейно независимы по модулю полинома M^+ , если $\operatorname{Re} p > -\delta \xi^{2b}$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{L}}_0^\alpha$ матрицу порядка $m \times M$, α_i -й столбец которой совпадает с i -м столбцом матрицы $\hat{l}^\alpha$, а остальные столбцы нулевые, так что $\hat{\mathcal{L}}^\alpha \mathcal{L} = L^\alpha I_m$.

Рассмотрим квадратную матрицу $\hat{\mathcal{L}}^\alpha \mathcal{L}$. Её столбцы с номерами $k \neq \alpha_i$ — нулевые, а элемент α_i -ой строки и α_j -го столбца равен $\delta_{ij} L^\alpha$, а элемент k -ой строки ($k \neq \alpha_j$) и α_j -го столбца является определителем матрицы, получаемой из $\hat{l}^\alpha$ заменой её j -ой строки на k -ю строку матрицы $\mathcal{L}$. Он совпадает, с точностью до знака, с одним из L^β и, следовательно

$$\hat{\mathcal{L}}^\alpha \mathcal{L} = \mathcal{R}^\alpha M, \quad (4)$$

где $\mathcal{R}^\alpha$ – матрица размера $M \times M$, элементами которой являются $\pm Q^\theta$ или нули. Умножая (4) справа на $\mathcal{L}$, используя (3), получаем

$$\mathcal{R}^\alpha M \mathcal{L} = \mathcal{L} \hat{\mathcal{L}}^\alpha \mathcal{L} = M Q^\alpha \mathcal{L}.$$

Сокращая на полином M имеем $\mathcal{R}^\alpha \mathcal{L} = Q^\alpha \mathcal{L}$. Перепишем задачу (1) в виде $A u = h$, где

$$A u = \begin{pmatrix} \mathcal{L} u \\ B u|_{\Gamma_T} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} f \\ \Phi \end{pmatrix}.$$

В качестве области определения оператора A возьмём пространство

$$V_l = \dot{C}_{x,t}^{l+t_1, (l+t_1)/2b}(Q_T) \times \dots \times \dot{C}_{x,t}^{l+t_m, (l+t_m)/2b}(Q_T),$$

где $\dot{C}_{x,t}^{l,l/2b}$ – пространство Гёльдера для любого нецелого $l > 0$ (см. [1]). Если коэффициенты оператора B_{qj} достаточно гладкие, то как показано в [3], A является ограниченным оператором из V_l в

$$H_l = \dot{C}_{x,t}^{l-s_1, (l-s_1)/2b}(Q_T) \times \dots \times \dot{C}_{x,t}^{l-s_m, (l-s_m)/2b}(Q_T) \times \\ \times \dot{C}_{x,t}^{l-\sigma_1, (l-\sigma_1)/2b}(\Gamma_T) \times \dots \times \dot{C}_{x,t}^{l-\sigma_r, (l-\sigma_r)/2b}(\Gamma_T),$$

где $l > \max_q(0, \sigma_q)$.

Теорема. Если $S \in C^{l+\max_j t_j}$ и коэффициенты оператора B_{qj} принадлежат классу $\dot{C}_{x,t}^{l-\sigma_q, (l-\sigma_q)/2b}(\Gamma_T)$, то $\text{Im } A$ имеет конечную коразмерность в пространстве H_l .

Доказательство : построением правого регуляризатора для A . Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u &= f(x, t), \\ B_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u \Big|_{x_n=0} &= \Phi(x', t), \quad (x, t) \in \tilde{D}_{n+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\tilde{D}_{n+1}$ – полупространство $x_n > 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Предположим, что матрицы $\mathcal{L}_0, B_0$, состоящие только из старших членов $\mathcal{L}$ и B , удовлетворяют всем перечисленным условиям, в том числе и $\mathcal{L}_0 \hat{\mathcal{L}}_0^\alpha = B_0 L_0$. Покажем, что задача разрешима для любых бесконечно дифференцируемых f и Φ , если f удовлетворяет условиям согласования

$$\mathcal{R}_0^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) = \mathcal{Q}_0^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t), \tag{6}$$

Сначала построим частное решение уравнения $\mathcal{L}_0 \nu = f$. Для этого нам необходимо одно интегральное представление, полученное в [2]. Пусть $Q_j(\xi)$ ($j = 1, \dots, N$) – набор $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ однородных многочленов (т.е. $Q_j(\xi) = \sum_{|\alpha:l|} c_\alpha \xi^\alpha$, $|\alpha:l| =$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i / l_i$) с постоянными комплексными коэффициентами.

Предположим, что $Q_j(\xi)$ не имеют общего комплексного корня, отличного от $\xi = 0$. Тогда справедливо представление

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_0^h \sum_{j=1}^n \nu^{-|\lambda|} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} Q_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x+y) T_j(y : \nu^\lambda) dy, \quad (7)$$

где

$$f_{h^\lambda}(x) = \frac{1}{h^{|\lambda|}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) K(y : \nu^\lambda) dy$$

в

$$\text{supp } K = S(K) \subset$$

$$\subset \left\{ x : \frac{x_i}{\alpha_i} > 0, 1 < \left(\frac{x_i}{\alpha_i} \right)^{1/\lambda_i} < 1+b, \alpha_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n, \alpha_n > 0, b > 0 \right\},$$

причём $\text{supp } T_j \subset S(K)$, ($j = 1, \dots, N$) и носителем представления (13) является сдвинутый рог $x + V(l)$, $l = 1/\lambda$, ($l_i = 1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$), где

$$V_h(l) = \bigcup_{0 < \nu \leq h} \left\{ x : \frac{x_i}{\alpha_i} > 0, \nu < \left(\frac{x_i}{\alpha_i} \right)^{1/\lambda_i} \leq (1+b)\nu, i = 1, \dots, n, b > 0, \right. \\ \left. \alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, n-1, \alpha_n > 0 \right\}.$$

Так как $\tilde{D}_{n+1}$ удовлетворяет условию бесконечного рога с $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = T_\alpha - 2b\tau$, $\lambda_{n+1} = (T_\alpha - 2b\tau)/2b$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$, то для бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\tilde{D}_{n+1}$ представление (13) принимает вид

$$f(x, t) = \int_0^{+\infty} \sum_{\alpha} \nu^{-|\lambda|} d\nu \int_{\tilde{D}_{n+1}} Q_0^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x+y, t+\tau) T_\alpha((y, \tau) : \nu^\lambda) dy d\tau.$$

Пусть вектор V^α является решением параболического уравнения

$$\mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) V^\alpha(x, t) = T_\alpha f(x, t),$$

где

$$T_\alpha f(x, t) = \int_0^{+\infty} \nu^{-|\lambda|} d\nu \int_{\tilde{D}_{n+1}} f(x+y, t+\tau) T_\alpha((y, \tau) : \nu^\lambda) dy d\tau.$$

Легко проверить, что функция

$$\nu(x, t) = \sum_{\alpha} \mathcal{L}_0^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) V^{\alpha}(x, t)$$

удовлетворяет системе $\mathcal{L}_0 \nu = f$. Рассмотрим теперь следующую задачу :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x, t) &= 0, \\ B_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x, t) \Big|_{x_n=0} &= \varphi(x, t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_T^n)$. Задача (8) имеет решение вида

$$w(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{-\infty}^t G(x' - y', x_n, y_n, t - \tau) \varphi(y', \tau) d\tau,$$

где $G_{jq}(x' - y', x_n, t - \tau) = F^{-1} \tilde{G}_{jq}$ и

$$\tilde{G}_{jq} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha} \int_{\gamma^+} \frac{L_{ki}^{\alpha}(i\xi, i\tau, p) N_{kq}^{\alpha}(\xi, \tau) e^{i\tau x_n}}{M^+(\xi, p, \tau)} d\tau,$$

$N_{kq}^{\alpha}(\xi, \tau)$ суть полиномы относительно τ , обладающие свойством

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \sum_{\alpha} \int_{\gamma^+} \frac{\alpha_{sk}^{\alpha}(\xi, \tau, p) N_{kq}^{\alpha}(\xi, \tau, p)}{M^+(\xi, p, \tau)} d\tau = \delta_{s,q}, \quad s, q = 1, \dots, r,$$

а α_{sk}^{α} — элементы матрицы $B_0 \hat{\mathcal{L}}^{\alpha}$. Разделив α_{sk}^{α} на $M^+(\xi, \tau, p)$ и разложив остатки α_{sk}^{α} по степеням τ , получаем

$$\tilde{\alpha}_{sk}^{\alpha}(\xi, p, \tau) = \sum_{l=1}^r \alpha_{sk}^{l\alpha}(\xi, p) \tau^{l-1}.$$

Из условия независимости следует, что матрица $\alpha_{sk}^{l\alpha}$ имеет правую обратную с элементами α_{st}^{ks} . Следовательно

$$N_{kq}^{\alpha}(\xi, \tau, p) = \sum_{s=1}^r \alpha_{st}^{kq}(\xi, p) M_{r-t}^{+}(\xi, \tau, p),$$

где $M_{r-t}^{+}(\xi, \tau, p) = \sum_{s=0}^{r-t} \alpha_s(\xi, p) \tau^{t-s}$, $\alpha_s(\xi, p)$ — коэффициенты матрицы M^+ в разложении по степеням τ .

Используя аргументы работы [1], можно проверить, что $w(x, t)$ является решением (3). Следовательно, $u(x, t) = v(x, t) + G(\varphi - B\nu|_{x_n=0})$ удовлетворяет (5).

Теперь покажем существование правого регуляризатора. Пусть при каждом $\lambda \in (0, 1)$ в области Ω задано разбиение единицы $\sum_k \varphi_k^{(\lambda)}(x) = 1$. Предположим,

что $\varphi_k^{(\lambda)} \in C^\infty(\Omega)$ и функции $\eta_k^{(\lambda)}(x) \in C^\infty(\Omega)$ такие, что $\eta_k^{(\lambda)}(x) \varphi_k^{(\lambda)}(x) = \varphi_k^{(\lambda)}(x)$, $\text{supp } \eta_k^{(\lambda)}(x) \subset \Omega_k^{(\lambda)}$, $\bigcup \Omega_k^{(\lambda)} = \Omega$, $\text{diam } \Omega_k^{(\lambda)} \leq c\lambda$. Пусть $T_k^{(\lambda)}$ — отображения, введённые при построении левого обратного (см. [3]). Множество номеров $\Omega_k^{(\lambda)}$, обладающих свойством $S \cap \partial \Omega_k^{(\lambda)} = S_k^{(\lambda)} \neq \emptyset$, обозначим через $\mathcal{N}$, а остальные множества через $\mathcal{M}$.

Пусть $f \in C^\infty(Q_T)$ удовлетворяет (6) и $\Phi_q \in C^{l-\sigma_q}(\Gamma_T)$, $f_k = f \eta_k^{(\lambda)}$, $\Phi_k = \Phi \eta_k^{(\lambda)}$ при $k \in \mathcal{M}$, тогда $\Phi_k = 0$. При $k \in \mathcal{M}$ определим вектор

$$w_k(x, t) = \sum_{\alpha} \hat{\mathcal{L}}^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) V_k^{\alpha}(x, t),$$

где $V_k^{\alpha}(x, t)$ — решение уравнения

$$L_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) V_k^{\alpha}(x, t) = g_k^{\alpha}(x, t) \eta_k^{(\lambda)}(x),$$

$$g_k^{\alpha}(x, t) = \int_0^{\infty} \nu^{-|\lambda|} d\nu \int_{V_{\infty}(l)} f_k(x + y, t + \tau) T_{\alpha}((y, \tau) : \nu^{\lambda}) dy d\tau.$$

Так как $\text{supp } T_{\alpha} \subset V_h(l)$ и при достаточно малых λ функции f_k могут быть гладко продолжены на бесконечный рог, то интегрирование можно проводить по $V_{\infty}(l)$.

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) w(x, t) &= \sum_{\alpha} \mathcal{R}^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) - L_0 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] V_k^{\alpha}(x, t) + \\ &+ \sum_{\alpha} \eta_k^{(\lambda)} \left[\mathcal{R}^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) - I_m Q_0^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] g_k^{\alpha} + \\ &+ \sum_{\alpha} \eta_k^{(\lambda)} \left[\mathcal{R}^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) - I_m Q_0^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] g_k^{\alpha} + f_k(x, t), \end{aligned}$$

где $[\mathcal{R}^{\alpha}, \eta_k^{(\lambda)}] g_k^{\alpha} = \mathcal{R}^{\alpha}(\eta_k^{(\lambda)} g_k^{\alpha}) - \eta_k^{(\lambda)} \mathcal{R}^{\alpha} g_k^{\alpha}$, that is $\varphi_k^{(\lambda)} [\mathcal{R}^{\alpha}, \eta_k^{(\lambda)}] g_k^{\alpha} = 0$.

При $k \in \mathcal{N}$ определим вектор $\nu^k(z, t)$ как решение задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \nu^k(z, t) &= 0, \\ \mathcal{B}_0 \left(\xi^k, 0, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \nu^k(z, t) \Big|_{z_n=0} &= \varphi^k(z', t), \end{aligned}$$

где

$$\varphi^k(z', t) = T_k^{(\lambda)} \circ \left[\Phi_k(x, t) - \eta_k^{(\lambda)}(x) \mathcal{B} \left(x, t, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right) W_k(x, t) \Big|_{x_k^{\lambda}} \right].$$

Положим $w'_k(x, t) = (T_k^{\lambda})^{-1} \circ \nu^k(z, t)$. Далее, пусть

$$R_k(h \eta_m^{(\lambda)}) = \begin{cases} w_k(x, t), & k \in \mathcal{M}, \\ w'_k(x, t) + w_k(x, t), & k \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Следовательно, имеем

$$R h = \sum_k \varphi_k^{(\lambda)} R_k(h \Psi_k^{(\lambda)}).$$

При помощи рассуждений как и для обычных параболических краевых задач (см. [1]), получим $A R h = h + T h$. Выбирая λ достаточно малым, можно добиться того, что

$$\|T h\|_{H_1}^{Q_T} \leq \frac{1}{2} \|h\|_{H_1}^{Q_T}.$$

Доказательство завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Солонников, "О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида", Труды Мат. инст-та АН СССР, том 83, стр. 1 — 183, 1965.
2. В. А. Солонников, "Исследование переопределённых эллиптических краевых задач в дробных пространствах К. К. Головкина", Труды Мат. инст-та АН СССР, том 127, стр. 93 — 114, 1975.
3. А. Г. Хачатрян, "Переопределённые параболические краевые задачи", Зап. Науч. сем. ЛОМИ АН СССР, том 69, стр. 240 — 272, 1977.
4. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука, 1975.
5. П. И. Дудников, С. Н. Самборский, "Линейные переопределённые системы уравнений с частными производными, граничные и начально-граничные задачи для них", Итоги науки и техники, ВИНТИ, Сов. проблемы математики, том 65, стр. 5 — 94, 1995.

13 марта 2001

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 36

НОМЕР 3

2001

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Неравенства типа Литтлвуда-Пэли в $\mathbb{R}^n$

К. Л. Аветисян 5

Задача Дирихле в пространствах с весом

Г. М. Айрапетян 12

Радиальные граничные значения аналитических функций,
представимых лакунарными степенными рядами

Т. Л. Гарибян, В. А. Мартиросян 36

Оценки снизу для функциональной размерности
пространства решений дифференциальных уравнений

В. Н. Маргарян 48

L_2 -оценки скорости полиномиально-периодической аппроксимации
по сдвигам

А. Б. Нерсисян, А. В. Погосян 59

Краткие сообщения

Группа логарифмов модулей обратимых элементов

Б. Т. Батикян 78

Разрешимые переопределённые параболические начально-краевые задачи

А. Г. Хачатрян 83