ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Առաքելյան
Գ.Գ. Գևորգյան
Վ.Ս. Զաքարյան
Ա.Ա. Թալալյան
Ն.Ե. Թովմասյան
Վ.Ա. Սարտիրոսյան
Ս.Ն. Սերգեյան
Բ.Ս. Նահապետյան
Ա.Բ. Ներսիսյան
Ռ.Լ. Ենսիբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Ս.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян
Г.Г. Гекоркян
В.С. Закарян
А.Г. Камалян
В.А. Мартиросян
С.Н. Мергелян
Б.С. Нагапетян
А.Б. Нерсесян
А.А. Талалян
Н.Е. Товмасян
Р.Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь М.А. Оганесян

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, IV

сборник статей

под редакцией В. С. Закаряна

П Р Е Д И С Л О В И Е Р Е Д А К Т О Р А

Три предыдущих сборника под тем же названием были опубликованы в этом журнале в 1998 году, том 33, № № 2, 3 и в 2000 году, том 35, № 1. Статьи настоящего тематического выпуска объединяются новым подходом к решению задачи Римана–Гильберта для аналитических функций в многосвязных областях. Этот подход позволяет свести вышеуказанную задачу к однозначно разрешимому интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Полученные результаты применяются для эффективного решения краевых задач для эллиптических уравнений, методом сведения к интегральному уравнению Фредгольма. В "канонических" областях получены точные формулы для решений.

Ереван, ноябрь 2000 В. С. Закарян

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

В. А. Ирицян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье рассматривается задача Дирихле для эллиптических уравнений $Lu = 0$, где $L = L_1 \cdots L_{2n}$ – произведение дифференциальных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами. В настоящей статье эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма. Существование и единственность решения доказывается для $n = 2$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – ограниченная односвязная или многосвязная область на комплексной плоскости с достаточно гладкой границей Γ, а $L_1, ..., L_{2n}$ – дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L_j u = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_j \frac{\partial u}{\partial x} + a_j u, \quad j = 1, ... 2n, \tag{1.1}$$

где a_j и λ_j – комплексные постоянные такие, что

$$\operatorname{Im} \lambda_j < 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_{n+j} > 0, \quad j = 1, ..., n,$$

$$\lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k, \quad k, j = 1, ..., 2n.$$

Будем считать, что все функции и постоянные суть комплекснозначные.

В области D рассмотрим следующую задачу Дирихле :

$$L_1 \cdots L_{2n} u(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial N^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.3}$$

где $u(z)$ – искомая функция в области D, $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – заданные функции на Γ, а N – внутренняя нормаль к границе Γ в точке $z \in \Gamma$. Пусть s есть дуговая абсцисса точки $z \in \Gamma$. Предположим, что функции $\dfrac{d^j f_k(z)}{ds^j}$,

$j = 0, 1, ..., 2n - k$ непрерывны на Γ. Мы ищем решение задачи (1.2), (1.3) в классе функций $2n$-раз непрерывно дифференцируемых в области D и $(2n-1)$-раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Задача (1.2), (1.3) в полуплоскости рассмотрена в монографии [1], стр. 45. В случае, когда $a_j = 0$, $j = 1, ..., 2n$, эта задача в односвязных областях рассмотрена в [1] – [3]. Наличие ненулевых постоянных a_j существенно осложняет исследование этой задачи. Эти осложнения связаны с единственностью представления через аналитические функции и произвольные постоянные общего решения уравнения (1.2) в односвязных или многосвязных областях (см. [3] – [5]).

В настоящей статье задача (1.2), (1.3) сводится к интегральному уравнению Фредгольма, и доказывается существование и единственность решения этой задачи для $n = 2$.

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.2)

Пусть D_λ – образ области D при отображении

$$\zeta = x + \lambda y, \quad z = x + iy \in D, \quad \zeta = \xi + i\eta \in D_\lambda,$$

где λ – постоянная, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Сначала предположим, что D – односвязная область. Не умаляя общности будем предполагать, что $0 \in D$. Рассмотрим уравнение

$$L_1 \cdots L_\rho u(z) = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{2.1}$$

где ρ – натуральное число, $\rho \leq 2n$, а $L_1, ..., L_{2n}$ – операторы из (1.1).

Лемма 2.1. Общее решение уравнения (2.1) в односвязной области D определяется формулой

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{\rho} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{2.2}$$

где φ_j аналитичны в D_{λ_j} и удовлетворяют условиям

$$\varphi_j^{(k)}(0) = 0, \quad j = 2, ..., \rho, \quad k = 0, 1, ..., j-2, \tag{2.3}$$

причем функции $\varphi_1, ..., \varphi_\rho$ определяются по $u(z)$ единственным образом.

Доказательство : Легко проверить, что функция $e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y)$ является решением уравнения $L_j u = 0$. Так как операторы $L_1, ..., L_{2n}$ перестановочны, то

эта функция является решением уравнения (2.1). Следовательно, любая функция вида (2.2) является решением уравнения (2.1).

Теперь, применяя индукцию по ρ докажем, что любое решение уравнения (2.1) представляется в виде (2.2). Уравнение (2.1) при $\rho = 1$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 u = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v(z) = e^{a_1 y} u(z). \tag{2.5}$$

Известно (см. [2], стр. 134), что общее решение уравнения (2.5) определяется формулой

$$v(z) = \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy \in D, \tag{2.6}$$

где φ_1 – произвольная аналитическая функция в D_{λ_1}. Из (2.5) и (2.6) имеем

$$u(z) = e^{-a_1 y} \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad z = x + iy, \tag{2.7}$$

откуда следует представление (2.2) для $\rho = 1$. Предполагая, что представление (2.2) верно для $\rho = m$, докажем, что оно верно для $\rho = m + 1$. Пусть $u_0(z)$ – решение уравнения (2.1) при $\rho = m + 1$. Тогда имеем

$$L_2 \cdots L_{m+1} v(z) = 0, \quad v(z) = L_1 u_0(z). \tag{2.8}$$

Так как $v(z)$ – решение уравнения (2.8) и (2.2) верно для $\rho = m$, то

$$v(x, y) = \sum_{j=2}^{m+1} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y), \tag{2.9}$$

где функции φ_j аналитичны в D_λ, и удовлетворяют условиям (2.3) при $j > 2$. Заметим, что при $m = 1$ условие (2.3) отсутствует. Подставляя $v(z)$ из (2.9) в (2.8), получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + a_1 u_0 = \sum_{j=2}^{m+1} e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y).$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u_j}{\partial x} + a_1 u_j = e^{-a_j y} \varphi_j(x + \lambda_j y). \tag{2.10}$$

Частное решение уравнения (2.10) ищем в виде

$$u_j(z) = e^{-a_j y}\psi_j(x + \lambda_j y), \quad z = x + iy, \tag{2.11}$$

где ψ_j – аналитическая функция в D_{λ_j}. Подставляя $u_j(z)$ из (2.11) в (2.10), получим

$$\psi_j'(\zeta) - v_j\psi_j(\zeta) = \frac{\varphi_j(\zeta)}{\lambda_j - \lambda_1}, \quad \zeta \in D_{\lambda_j}, \tag{2.12}$$

где $v_j = \frac{a_j - a_1}{\lambda_j - \lambda_1}$.

Частное решение уравнения (2.12) определяется формулой

$$\psi_j(\zeta) = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_1} e^{v_j\zeta} \int_0^\zeta e^{-v_j t}\varphi_j(t)\, dt. \tag{2.13}$$

Из (2.3) и (2.13) имеем

$$\psi_j^{(k)}(0) = 0, \quad j = 2, \ldots, m+1, \quad k = 0, 1, \ldots, j-2. \tag{2.14}$$

Из формул (2.7) и (2.11) имеем

$$u_0(z) = \sum_{j=1}^{m+1} e^{-a_j y}\psi_j(x + \lambda_j y),$$

откуда следует представление (2.2) для $\rho = m+1$. Таким образом, представление (2.2) доказано для любого натурального числа $\rho \le 2n$.

Теперь докажем единственность представления (2.2). Достаточно показать, что если $u(z) \equiv 0$ в представлении (2.2), то $\varphi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0$ для любого $j = 1, \ldots, \rho$. Предположим, что $u(z) \equiv 0$. Применяя оператор $L_1 \cdots L_{\rho-1}$ к обеим частям (2.2), получим

$$\varphi_\rho^{(\rho-1)}(\zeta) + \sum_{k=0}^{\rho-2} A_k\varphi_\rho^{(k)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in D_{\lambda_\rho}, \tag{2.15}$$

где $A_0, \ldots, A_{\rho-2}$ – некоторые постоянные. Из (2.3) и (2.15) при $j = \rho$ получим $\varphi_\rho(x + \lambda_\rho y) \equiv 0$. Аналогично получим $\varphi_j(x + \lambda_j y) \equiv 0$ при $j = 1, \ldots, \rho - 1$. Лемма 2.1 доказана.

Пусть теперь D – $(m+1)$-связная область на плоскости, ограниченная гладкими кривыми $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Предположим, что Γ_0 охватывают контуры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ – фиксированные точки, охваченные контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, соответственно. Общее решение уравнения (2.1) в многосвязных областях отличается от формулы (2.2) некоторыми произвольными постоянными, число которых зависит как от числа m, так и от порядка уравнения (2.1). Здесь мы приведем общее решение уравнения (2.1) в многосвязной области при $\rho = 2$, $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$.

Лемма 2.2. Если $\rho = 2$, $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, то общее решение уравнения (2.1) в $(m+1)$-связной области D определяется формулой

$$u(x,y) = e^{-a_1 y}\varphi_1(x+\lambda_1 y) + e^{-a_2 y}\varphi_2(x+\lambda_2 y) +$$

$$+e^{\nu_2 x+\delta y}\sum_{k=1}^{m} c_k \ln[(x+\lambda_1 y - x_k - \lambda_1 y_k)(x+\lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k)]. \qquad (2.16)$$

где $\delta = \frac{a_1\lambda_1 - a_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, ν_2 определяется через (2.12), c_k, $k = 1,\ldots,m$ – произвольные постоянные, φ_1 и φ_2 – произвольные аналитические функции в D_{λ_1} и D_{λ_2}, соответственно, и $\varphi_2(0) = 0$. Постоянные $c_1,\ldots,c_m$ и функции φ_1, φ_2 определяются через $u(z)$ единственным образом.

В (2.16) берем одну из непрерывных в области D ветвей логарифма. Так как $\operatorname{Im}\lambda_1$ и $\operatorname{Im}\lambda_2$ имеют разные знаки, то такая ветвь всегда существует. Доказательство Леммы 2.2 аналогично доказательству Леммы 2.1, поэтому оно опускается.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ $n = 2$

В этом параграфе исследуется задача (1.2), (1.3) в случае, когда D – односвязная область и $n = 2$. В этом случае задача (1.2), (1.3) имеет вид

$$L_1L_2L_3L_4u(z) = 0. \quad z \in D. \qquad (3.1)$$

$$u(z) = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (3.3)$$

где L_j, $j = 1,2,3,4$ – дифференциальные операторы из (1.1), причем

$$\operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4. \qquad (3.4)$$

Условие (3.2) эквивалентно условию

$$\frac{du(z)}{ds} + u(z) = \frac{df_0(z)}{ds} + f_0(z), \quad z \in \Gamma. \qquad (3.5)$$

Обозначим через (N,x) и (N,y) углы между внутренней нормалью N в точке $z \in \Gamma$ и осями OX и OY, соответственно. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,y) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,x), \qquad \cos^2(N,y) + \cos^2(N,x) = 1,$$

то условия (3.3) и (3.5) можно записать в виде

$$\frac{du(z)}{dx} + \alpha_1(z)u(z) = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{3.6}$$

$$\frac{du(z)}{dy} + \alpha_2(z)u(z) = g_2(z), \quad z \in \Gamma, \tag{3.7}$$

где $\alpha_1(z) = \cos(N, y)$, $\alpha_2(z) = -\cos(N, x)$,

$$g_1(z) = f_1(z)\cos(N, x) + f_2(z)\cos(N, y),$$

$$g_2(z) = f_1(z)\cos(N, y) - f_2(z)\cos(N, x), \quad f_2(z) = \frac{df_0(z)}{ds} + f_0(z).$$

Согласно Лемме 2.1, общее решение уравнения (3.1) определяется формулой

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4} e^{-a_j y}\varphi_j(x + \lambda_j y), \quad z = x + iy, \tag{3.8}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ – аналитичные функции в $D_{\lambda_1}, \ldots, D_{\lambda_4}$, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_3'(0) = 0, \tag{3.9}$$

$$\varphi_4(0) = 0, \quad \varphi_4'(0) = 0, \quad \varphi_4''(0) = 0. \tag{3.10}$$

Используя граничные условия (3.6) и (3.7), запишем общее решение (3.8) в более удобном виде. Функцию φ_1 представим в виде

$$\varphi_1(x + \lambda_1 y) = c + \psi_1(x + \lambda_1 y), \tag{3.11}$$

где c – постоянная, а ψ_1 – аналитическая функция в D_{λ_1}, удовлетворяющая условию $\psi_1(0) = 0$. Ясно, что в (3.11) постоянная c и функция ψ_1 определяются через φ_1 единственным образом. Положим

$$\psi_4(x + \lambda_4 y) = c(x + \lambda_4 y)^2 + \varphi_4(x + \lambda_1 y), \tag{3.12}$$

где c – постоянная из (3.11). Ясно, что ψ_4 аналитична в D_{λ_4}. Из (3.10) получим

$$\psi_4(0) = 0, \quad \psi_4'(0) = 0. \tag{3.13}$$

Так как $\varphi_4''(0) = 0$, то из (3.12) получим $c = \frac{1}{2}\psi_4''(0)$. Подставляя c в (3.11) и (3.12), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x + \lambda_1 y) &= \frac{1}{2}\psi_4''(0) + \psi_1(x + \lambda_1 y), \\ \varphi_4(x + \lambda_4 y) &= \psi_4(x + \lambda_4 y) - \frac{1}{2}\psi_4''(0)(x + \lambda_4 y)^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Если функция ψ_4 удовлетворяет (3.13), то функция φ_4, определенная формулой (3.14), удовлетворяет условиям (3.10). Следовательно, функции φ_1 и φ_4 в (3.8) допускают представление (3.14), где ψ_1 и ψ_4 – произвольные аналитические функции в D_{λ_1} и D_{λ_4}, соответственно, удовлетворяющие условиям $\psi_1(0) = 0$ и (3.13).

Отметим, что в (3.14) функции ψ_1 и ψ_2 определяются через φ_1 и φ_2 единственным образом по формуле

$$\psi_1(x + \lambda_1 y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) - \varphi_1(0),$$
$$\psi_4(x + \lambda_4 y) = \varphi_4(x + \lambda_4 y) + \frac{1}{2}\varphi_1(0)(x + \lambda_4 y)^2.$$

Положим

$$\psi_2 = \varphi_2, \quad \psi_3 = \varphi_3, \quad \omega_j(x + \lambda_j y) = \psi_j'(x + \lambda_j y), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.15}$$

Из (3.9), (3.13) и (3.15) следует, что $\omega_1, \ldots, \omega_4$ – аналитические функции в D_{λ_1}, ..., D_{λ_4}, соответственно, а

$$\omega_3(0) = 0, \quad \omega_4(0) = 0, \tag{3.16}$$

$$\psi_j(x + \lambda_j y) = \int_0^{x+\lambda_j y} \omega_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.17}$$

В частности, из (3.17) следует $\psi_4''(0) = \omega_4'(0)$. Подставляя ψ_j из (3.17) в (3.14) и (3.15), получим

$$\varphi_1(x + \lambda_1 y) = \int_0^{x+\lambda_1 y} \omega_1(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2}\omega_4'(0), \quad \varphi_2(x + \lambda_2 y) = \int_0^{x+\lambda_2 y} \omega_2(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\varphi_3(x+\lambda_3 y) = \int_0^{x+\lambda_3 y} \omega_3(\zeta)\, d\zeta, \quad \varphi_4(x+\lambda_4 y) = \int_0^{x+\lambda_4 y} \omega_4(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{2}\omega_4'(0)(x+\lambda_4 y).$$

Отсюда и из (3.8) получим

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4} e^{-a_j y} \int_0^{x+\lambda_j y} \omega_j(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2}e^{-a_1 y}\omega_4'(0) - \frac{1}{2}e^{-a_4 y}\omega_4'(0)(x + \lambda_4 y)^2. \tag{3.18}$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.1) определяется также формулой (3.18), где $\omega_1, \ldots, \omega_4$ – произвольные аналитические функции в D_{λ_1}, ..., D_{λ_4}, соответственно, удовлетворяющие условию (3.16). Кроме того, эти функции определяются через $u(z)$ единственным образом.

Подставляя $u(z)$ из (3.18) в граничные условия (3.6) и (3.7), получим

$$\sum_{j=1}^{4}\left[e^{-a_j y}\omega_j(x+\lambda_j y)+A_{j1}(z)\int_0^{x+\lambda_j y}\omega_j(\zeta)\,d\zeta\right]+B_1(z)\omega_4'(0)=g_1(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left[\lambda_j e^{-a_j y}\omega_j(x+\lambda_j y)+A_{j2}(z)\int_0^{x+\lambda_j y}\omega_j(\zeta)\,d\zeta\right]+B_2(z)\omega_4'(0)=g_2(z),\quad z\in\Gamma, \tag{3.20}$$

где A_{jk} и B_k, $k=1,2$, $j=1,2,3,4$ – некоторые вполне определенные достаточно гладкие функции. Таким образом, задачу Дирихле (3.1) – (3.3) свели к односторонней задаче Гильберта (3.19), (3.20) с дополнительным условием (3.16). Задача (3.19), (3.20) полностью исследована в [6], стр. 239. Используя методы из работы [6]. задачу (3.19), (3.20) с дополнительным условием (3.16) можно свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Предположим теперь, что в (1.2) $n\geq 3$. Тогда аналогично, граничные условия (1.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial x^k\partial y^{n-1-k}}+\sum_{k+j\leq n-2}b_{jk}(z)\frac{\partial^{k+j}u(z)}{\partial x^k\partial y^j}=g_k(z),\quad z\in\Gamma,\quad k=0,1,\ldots,n-1, \tag{3.21}$$

где b_{jk} и g_k – некоторые вполне определенные функции на Γ. Используя общее представление (2.2) при $\rho=2n$ аналогично, задачу (1.2), (3.21) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма.

ABSTRACT. The paper considers Dirichlet problem for elliptic equations $Lu=0$, where $L=L_1\cdots L_{2n}$ is a product of first order differential operators with constant coefficients. The paper reduces the problem to Fredholm integral equation. The existence and uniqueness of solution is proved for $n=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
2. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. World Scientific Publ., Singapore, 1994.
3. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка. Наука, Москва, 1966.
4. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
5. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений, Гостехиздат, Москва, 1948.
6. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений. Наука Москва. 1970.

21 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье доказывается, что задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения имеет единственное решение вне круга. Для неправильного эллиптического уравнения дефектные числа задачи Дирихле вне круга равны бесконечности.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – область на плоскости $\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| > 1\}$ с границей $\Gamma = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$. В области D рассмотрим следующую задачу Дирихле :

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u(z)}{\partial y^k \partial x^{2n-k}} = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial^k u(z)}{\partial \tau^k} = f_k(z), \quad z \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{0.2}$$

где $A_k \neq 0$ – комплексные постоянные, $f_k(z)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ – заданные комплекснозначные функции на Γ, а $\frac{\partial u(z)}{\partial \tau}$ – производные по направлению радиус-вектора в точке $z \in \Gamma$.

Будем говорить, что функция $f(z)$, $z \in \Gamma$ принадлежит классу $H(\Gamma)$, если она удовлетворяет условию Гёльдера на Γ. Функция $u(z)$ принадлежит классу $H(\overline{D})$, если $u(z)$ определена в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию Гёльдера в любом замкнутом кольце $1 \leq |z| \leq R$. Пусть s – дуговая абсцисса точки $z \in \Gamma$. Предполагая, что функции

$$\frac{d^j f_k(z)}{ds^j}, \quad j = 0, 1, ..., 2n-k, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

принадлежат классу $H(\Gamma)$, мы ищем решение задачи (0.1), (0.2) в классе комплекснозначных функций $u(z)$, которые $2n$-раз непрерывно дифференцируемы в

D, частные производные которых до $(2n-1)$-го порядка принадлежат классу $H(\overline{D})$ и в окрестности бесконечности удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{\partial^{j+k}u(z)}{\partial x^k \partial y^j}\right| \leq c|z|^{n-1-j-k}, \quad j+k \leq 2n-1, \tag{0.3}$$

где c – некоторая положительная постоянная, зависящая от u.

Рассмотрим характеристическое уравнение к уравнению (0.1)

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \lambda^k = 0. \tag{0.4}$$

Уравнение (0.1) **называется эллиптическим**, если характеристическое уравнение (0.4) не имеет действительных корней. Будем предполагать, что уравнение (0.1) является эллиптическим, а характеристическое уравнение (0.4) имеет только простые корни.

Пусть p и q – число корней характеристического уравнения (0.4) при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda < 0$, соответственно. Уравнение (0.1) называется **правильно эллиптическим**, если $p = q$, и **неправильно эллиптическим**, если $p \neq q$. Не ограничивая общности будем считать, что $p \geq q$.

В [1] доказано, что при $n = 2$ задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения (0.1) в круге фредгольмова, однако существование и единственность решения существенно зависят от коэффициентов A_k. С другой стороны, задача Дирихле для неправильного эллиптического уравнения (0.1) в круге не фредгольмова и не нетерова. В зависимости от коэффициентов A_k, число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи может быть конечным или бесконечным. Например, если $n = 2$ и корнями характеристического уравнения (0.4) являются

$$i, \quad \frac{i(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}, \quad \frac{i(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon^2}, \quad -i,$$

где комплексное число ε удовлетворяет $|\varepsilon| < 1$, то уравнение (0.1) является неправильно эллиптическим, и однородная задача Дирихле в круге имеет только нулевое решение. Если $n = 2$ и $i = \sqrt{-1}$ является трехкратным корнем характеристического уравнения (0.4), то число линейно независимых решений в круге равно бесконечности.

Положение иное для задачи Дирихле (0.1), (0.2) вне круга. Докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. Для правильного эллиптического уравнения (0.1) задача Дирихле (0.2) вне круга имеет единственное решение.

Теорема 2. Дефектные числа задачи Дирихле для неправильного эллиптического уравнения (0.1) вне круга равны бесконечности.

Описывается также эффективный метод решения задачи Дирихле для правильного эллиптического уравнения (0.1) вне круга.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (0.1) ВНЕ КРУГА

Формулу для общего решения эллиптических систем уравнений с постоянными коэффициентами в ограниченных односвязных областях можно найти в [2]. Так как решение уравнения (0.1) в области $D = \{z : |z| > 1\}$ может иметь особенности до порядка $n-1$ в точке $z = \infty$, то формула для общего решения уравнения (0.1) в области D немного отличается от формулы приведенной в [2]. Эта новая формула помимо аналитических функций содержит также некоторые логарифмические функции и полиномы. Приведем эту формулу в Лемме 1 без доказательства, поскольку оно аналогично доказательству в [2].

Пусть λ – комплексная постоянная с $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Обозначим через D_λ образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda y$, $z = x + iy \in D$, $\zeta = \xi + i\eta \in D_\lambda$. Ясно, что D_λ – внешность некоторого эллипса с центром O.

Определение 1. Будем говорить, что функция $\varphi(x+\lambda y)$ **аналитична относительно аргумента** $x+\lambda y$, если она является суперпозицией аналитической в области D_λ функции $\varphi(\zeta)$ и функции $\zeta = x + \lambda y$. Аналогично, функция $u(z)$ аналитична относительно аргумента $x+\lambda y$, если $u(z)$ бесконечно дифференцируема в D и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u(z)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial u(z)}{\partial x} = 0, \quad z = x + iy \in D. \tag{1.1}$$

Заметим, что (1.1) является аналогом условия Коши–Римана для аналитических функций.

В дальнейшем под $\ln z$ будем понимать следующую ветвь логарифма : $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ – корни характеристического уравнения (0.4), и

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0, \quad j = 1, \ldots, p, \quad n \leq p \leq 2n, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{Im}\lambda_j < 0, \quad j = p+1, \ldots, 2n, \tag{1.3}$$

где p – целое число.

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ

Лемма 1. Общее решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условиям (0.3), определяется формулой

$$u(z)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j(x+\lambda_j y)+\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=0}^{n-2}b_{jk}(x+\lambda_j y)^k\ln(x+\lambda_j y)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}d_j(x+\lambda_j y)^{n-1}\ln(x+\lambda_j y)+\sum_{j+k\le n-1}c_{kj}x^k y^j,\quad z=x+iy\in D, \tag{1.4}$$

где d_j, b_{jk} и c_{kj} – произвольные постоянные, а $\varphi_1,\dots,\varphi_{2n}$ – произвольные аналитические функции в области D относительно аргументов $x+\lambda_1 y,\dots,x+\lambda_{2n}y$, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j(\infty)=\lim_{|z|\to\infty}\varphi_j(x+\lambda_j y)=0,\quad j=1,\dots,2n, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{p}b_{jk}\lambda_j^m-\sum_{j=p+1}^{2n}b_{jk}\lambda_j^m=0,\quad m=0,1.\dots,k,\quad k=0,1,\dots,n-2, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{p}d_j\lambda_j^m=0,\quad m=0,1,\dots,n-1. \tag{1.7}$$

Все функции и постоянные в (1.4) определяются по $u(z)$ единственным образом.

Замечание. Согласно (1.7) при $p=n$ имеем $d_1=\cdots=d_n=0$. Из (1.6) и (1.7) следует, что общее решение (1.4) содержит $2n^2-2n+p$ произвольных постоянных.

§2. СЛУЧАЙ $n=2$

В этом параграфе доказываем Теорему 1 для $n=2$. В этом случае граничные условия (0.2) имеют вид

$$\frac{du(z)}{ds}=\frac{df_0(z)}{ds},\quad z\in\Gamma, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r}=f_1(z),\quad z\in\Gamma, \tag{2.2}$$

$$u(1)=f_0(1). \tag{2.3}$$

Так как Γ – единичная окружность $|z|=1$, то имеем

$$\frac{du(z)}{ds}=-y\frac{\partial u(z)}{\partial x}+x\frac{\partial u(z)}{\partial y},\quad z\in\Gamma, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r}=x\frac{\partial u(z)}{\partial x}+y\frac{\partial u(z)}{\partial y},\quad z\in\Gamma. \tag{2.5}$$

В силу (2.4) и (2.5), граничные условия (2.1) и (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial y} = g_2(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.7}$$

где

$$g_1(z) = -y\frac{df_0(z)}{ds} + xf_1(z), \quad g_2(z) = x\frac{df_0(z)}{ds} + yf_1(z). \tag{2.8}$$

Из (2.8) получим

$$\int_\Gamma [g_1(z)\,dx + g_2(z)\,dy] = \int_\Gamma [-yg_1(z) + xg_2(z)\,dy]\,ds = \int_\Gamma \frac{df_0(z)}{ds}\,ds = 0. \tag{2.9}$$

Здесь и ниже интегрирование по Γ понимается против часовой стрелки. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_4$ – корни характеристического уравнения (0.4). Пусть

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 > 0. \quad \operatorname{Im}\lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4. \tag{2.10}$$

В этом случае общее решение (1.4) запишется в виде

$$u(z) = \sum_{j=1}^{4}[\varphi_j(x + \lambda_j y) + a_j \ln(x + \lambda_j y)] + c_0 + c_1 x + c_2 y, \quad z = x + iy \in D. \tag{2.11}$$

где $\varphi_1, ..., \varphi_4$ – произвольные аналитические функции в D относительно аргументов $x + \lambda_1 y, ..., x + \lambda_4 y$, соответственно, а a_j и c_j – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = 0, \quad \varphi_j(\infty) = 0. \quad j = 1, ..., 4. \tag{2.12}$$

Подставляя общее решение (2.11) в граничные условия (2.3), (2.6) и (2.7), получим

$$c_0 = -c_1 - \sum_{k=1}^{4}\varphi_k(1), \tag{2.13}$$

$$c_1 + \sum_{k=1}^{4}\left[\omega_k(x + \lambda_k y) + \frac{a_k}{x + \lambda_k y}\right] = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.14}$$

$$c_2 + \sum_{k=1}^{4}\left[\lambda_k\omega_k(x + \lambda_k y) + \frac{\lambda_k a_k}{x + \lambda_k y}\right] = g_2(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.15}$$

где $\omega_k(x + \lambda_k y)$ – производное функции $\varphi_k(\zeta)$ в точке $\zeta = x + \lambda_k y$, $k = 1, 2, 3, 4$. Функции $\omega_1, ..., \omega_4$ аналитичны в D относительно аргументов $x + \lambda_1 y, ..., x + \lambda_4 y$ соответственно, а в бесконечности они удовлетворяют оценкам

$$|\omega_k(x + \lambda_k y)| \leq \frac{C_k}{|x + \lambda_k y|^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{2.16}$$

где C_k – некоторая положительная постоянная, зависящая от ω_k. Обозначим через v_1 и v_2 левые части (2.14) и (2.15), соответственно. Имеем

$$\int_\Gamma [v_1(z)\,dx + v_2(z)\,dy] = \sum_{k=1}^{4} \left[\omega_k(x+\lambda_k y) + \frac{a_k}{x+\lambda_k y}\right] d(x+\lambda_k y). \qquad (2.17)$$

Из теории вычетов и условий (2.10), (2.16) получим

$$\int_\Gamma \omega_k(x+\lambda_k y)\,d(x+\lambda_k y) = 0, \quad k = 1,2,3,4, \qquad (2.18)$$

$$\int_\Gamma \frac{a_k}{x+\lambda_k y}\,d(x+\lambda_k y) = 2\pi i a_k, \quad k = 1,2, \qquad (2.19)$$

$$\int_\Gamma \frac{a_k}{x+\lambda_k y}\,d(x+\lambda_k y) = -2\pi i a_k, \quad k = 3,4. \qquad (2.20)$$

Из (2.9), (2.14) и (2.15) имеем

$$\int_\Gamma [v_1(z)\,dx + v_2(z)\,dy] = \int_\Gamma [g_1(z)\,dx + g_2(z)\,dy] = 0. \qquad (2.21)$$

Из соотношений (2.17) – (2.21) следует (2.12). Таким образом, (2.12) непосредственно следует из граничных условий (2.14) и (2.15). Так как $\lambda_3 \neq \lambda_4$, то постоянные c_1 и c_2 единственным образом можно представить в виде

$$c_1 = b_3 + b_4, \quad c_2 = \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4, \qquad (2.22)$$

где b_3 и b_4 – произвольные постоянные. В силу (2.22) граничные условия (2.14) и (2.15) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{4} \psi_k(x+\lambda_k y) = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (2.23)$$

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \psi_k(x+\lambda_k y) = g_2(z), \quad z \in \Gamma, \qquad (2.24)$$

где

$$\psi_k(x+\lambda_k y) = \omega_k(x+\lambda_k y) + \frac{a_k}{x+\lambda_k y}, \quad k = 1,2,$$

$$\psi_k(x+\lambda_k y) = \omega_k(x+\lambda_k y) + \frac{a_k}{x+\lambda_k y} + b_k, \quad k = 3,4.$$

Функции $\psi_1, \ldots, \psi_4$ аналитичны в области D относительно аргументов $x+\lambda_1 y$, $\ldots$, $x+\lambda_4 y$, соответственно, $\psi_1(\infty) = 0$, $\psi_2(\infty) = 0$, а ψ_3 и ψ_4 ограничены в бесконечности. Положим

$$\gamma_j = \frac{1}{2i(i+\lambda_j)}, \quad \nu_j = \frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}, \quad j = 1,2,$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2i(i-\lambda_j)}, \quad \nu_j = \frac{i+\lambda_j}{i-\lambda_j}, \quad j = 3, 4,$$

$$\beta_j(z) = z + \frac{\nu_j}{z}, \quad j = 1, 2, \quad \beta_k(z) = \frac{1}{z} + \nu_k z, \quad k = 3, 4.$$

Из (2.10) следует, что

$$0 < |\gamma_j| < \infty, \quad |\nu_j| < 1, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.25}$$

Так как Γ – единичная окружность $|z| = 1$, то для точки $z = x + iy$ имеем

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad y = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$x + \lambda_j y = \gamma_j \beta_j(z), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.26}$$

Положим

$$\Phi_j(z) = \psi_j(\gamma_j \beta_j(z)), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.27}$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что $\beta_1(z)$ и $\beta_2(z)$ конформно отображают $D = \{z : |z| > 1\}$ на области D_{λ_1} и D_{λ_2}, а функции $\beta_3(z)$ и $\beta_4(z)$ конформно отображают круг $\{z : |z| < 1\}$ на области D_{λ_3} и D_{λ_4}, соответственно. Следовательно, функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ аналитичны в области D и удовлетворяют условиям $\Phi_1(\infty) = 0$ и $\Phi_2(\infty) = 0$, а функции $\Phi_3(z)$ и $\Phi_4(z)$ аналитичны в круге $\{z : |z| < 1\}$.

В силу (2.26) и (2.27) граничные условия (2.23) и (2.24) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{4} \Phi_k(z) = g_1(z), \quad z \in \Gamma.$$

$$\sum_{k=1}^{4} \lambda_k \Phi_k(z) = g_2(z), \quad z \in \Gamma.$$

Таким образом, мы получили задачу сопряжения для аналитических функций $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Решение определяется формулой (см. [2])

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = -F_1(z), \quad \lambda_1 \Phi_1(z) + \lambda_2 \Phi_3(z) = -F_2(z), \quad |z| > 1, \tag{2.28}$$

$$\Phi_3(z) + \Phi_4(z) = F_1(z), \quad \lambda_3 \Phi_3(z) + \lambda_4 \Phi_4(z) = F_2(z), \quad |z| < 1, \tag{2.29}$$

где

$$F_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g_j(t)}{t - z}\, dt, \quad j = 1, 2.$$

Из (2.28) и (2.29) функции $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$ определяются однозначно. Из (2.27) имеем

$$\psi_k(\zeta) = \Phi_k(\alpha_k(\zeta)), \quad \zeta \in D_{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{2.30}$$

где $\alpha_k(\zeta)$ – обратная функция к $\gamma_k\beta_(z)$.

Из (2.28) – (2.30) следует, что функции $\psi_1(\zeta), ..., \psi_4(\zeta)$ аналитичны в областях D_{λ_1}, ..., D_{λ_4}, соответственно, $\psi_1(\infty) = \psi_2(\infty) = 0$, а функции $\psi_3(\zeta)$ и $\psi_4(\zeta)$ ограничены в бесконечности. Из (2.23) и (2.24) имеем

$$\psi_k(\zeta) = \omega_k(\zeta) + \frac{a_k}{\zeta}, \quad \zeta \in D_{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \tag{2.31}$$

$$\psi_k(\zeta) = \omega_k(\zeta) + \frac{a_k}{\zeta} + b_k, \quad \zeta \in D_{\lambda_k}, \quad k = 3, 4. \tag{2.32}$$

Учитывая (2.16), (2.31) и (2.32) получим

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \psi_j(\zeta)\, d\zeta, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.33}$$

$$b_j = \psi_j(\infty), \quad j = 3, 4, \tag{2.34}$$

где Γ_j – граница области D_{λ_j}. Из (2.31) – (2.34) функции $\omega_k(\zeta)$, $k = 1, 2, 3.4$ определяются единственным образом, а в бесконечности они удовлетворяют оценкам

$$|\omega_k(\zeta)| \le \frac{c}{|\zeta|^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{2.35}$$

для некоторой положительной постоянной c. Так как $\omega_j = \varphi_j'$, то из (2.35) получим

$$\varphi_j(\zeta) = -\int_{\zeta}^{\infty} \omega_j(t)\, dt. \quad \zeta \in D_{\lambda_j}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{2.36}$$

где интегрирование проводится от точки ζ до ∞ по лучу $\arg t = \arg\zeta$, $|\zeta| \le |t| < \infty$. Функции $\varphi_1(\zeta), ..., \varphi_4(\zeta)$, определенные в (2.36) аналитичны в областях D_{λ_1}, ..., D_{λ_4} соответственно, а $\varphi_1(\infty) = \cdots = \varphi_4(\infty) = 0$. Подставляя φ_j, a_j и b_j из (2.33), (2.34) и (2.36) в (2.13) и (2.22), получим постоянные c_0, c_1 и c_2. Таким образом, все функции и постоянные в общем решении (2.11) определяются единственным образом. Теорема 1 доказана.

Используя общее решение (1.4), аналогично можно доказать Теорему 2 для $n = 2$.

§3. СЛУЧАЙ $n > 2$

При $n \ge 3$ доказательства Теорем 1 и 2 аналогичны, поэтому приведем только краткие замечания. Сначала заметим, что граничные условия (0.2) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial^{n-1}u(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}} = \frac{\partial^{n-1}u_0(z)}{\partial y^k \partial x^{n-1-k}}, \quad z = x + iy \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^{k+j}u(1)}{\partial x^k \partial y^j} = \frac{\partial^{k+j}u_0(1)}{\partial x^k \partial y^j}, \quad k+j \le n-2. \tag{3.2}$$

где функция $u_0(z)$ в полярных координатах (r,θ) запишется в виде

$$u_0(r,\theta) = f_0(e^{i\theta}) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(r-1)^k}{k!} f_k(e^{i\theta}).$$

Снова ищем общее решение уравнения (0.1) в виде (1.4) и докажем, что из (3.1) следует (1.6). Следовательно, можно применить Лемму 1. Тогда остается повторить рассуждения доказательства для случая $n = 2$.

Замечание. При помощи линейных преобразований переменных задачу Дирихле для уравнения (0.1) вне эллипса можно свести к той же задаче вне круга. Следовательно, утверждения Теорем 1 и 2 остаются верными вне эллипса.

ABSTRACT. The paper proves that the Dirichlet problem for properly elliptic equation has unique solution outside a disk. For improperly elliptic equation the deficiency numbers of the Dirichlet problem outside a disk are infinite.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Бабаян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильных эллиптических уравнений четвертого порядка", Изв. НАН Армении. Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.
2. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.

21 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье изучаются краевые задачи для некоторых систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих важные приложения. Результаты, касающиеся этих систем (см. [1] – [4]), не распространяются на существование единственного решения задачи Коши в окрестности начальной точки. Доказано существование решения на конечном интервале с фиксированной начальной точкой, конечная точка которого подлежит определению по граничным условиям, и получены оценки, позволяющие разработать приближенный метод решения задачи.

§1. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

В интервале $(0, t_0)$ рассмотрим следующую задачу :

$$m(t)V'(t) = k_1F(t) - f_1(V), \tag{1}$$

$$-k_2m'(t) = F(t), \tag{2}$$

$$f_2(V) + k_3F(t) = m(t)k_4, \tag{3}$$

$$m(0) = M_0, \quad V(0) = V_0, \tag{4}$$

$$m(t_0) = m_0. \tag{5}$$

где $f_1(V), f_3(V)$ – непрерывно дифференцируемые функции аргумента $V \geq 0$, M_0, m_0, V_0 и k_j $(j = 1, ..., 4)$ – положительные постоянные, t_0 – искомая положительная величина, а $m(t), F(t), V(t)$ – искомые функции, определенные на $(0, t_0)$. Предположим, что

$$0 < m_0 < M_0, \quad f_1(0) = f_2(0) = 0, \quad f_2(V_0) < k_4M_0, \tag{6}$$

$$f_1'(V) > 0, \quad f_2'(V) > 0 \quad \text{при } V > 0, \tag{7}$$

$$f_1(V) \to \infty, \quad f_2(V) \to \infty \quad \text{при } V \to \infty. \tag{8}$$

Представим систему (1) – (3) в виде

$$m(t)V'(t) = bm(t) - \tilde{f}_1(V(t)), \tag{9}$$

$$m'(t) = -am(t) + \tilde{f}_2(V(t)), \tag{10}$$

где

$$b = \frac{k_1 k_4}{k_3} > 0, \quad a = \frac{k_4}{k_2 k_3} > 0, \quad \tilde{f}_1(V) = \frac{k_1}{k_3} f_2(V) + f_1(V), \quad \tilde{f}_2(V) = \frac{1}{k_2 k_3} f_2(V).$$

Из (6) – (8) следует, что

$$\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = 0, \quad \tilde{f}_1'(V) > 0, \quad \tilde{f}_2'(V) > 0 \quad \text{при } V > 0, \tag{11}$$

$$\tilde{f}_2(V_0) < aM_0, \quad \tilde{f}_1(V) \to \infty, \quad \tilde{f}_2(V) \to \infty \quad \text{при } V \to \infty, \tag{12}$$

$$\frac{\tilde{f}_1(V)}{b} > \frac{\tilde{f}_2(V)}{a} \quad \text{при } V > 0. \tag{13}$$

В этом параграфе доказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Задача (9), (10), (4) имеет единственное решение $V(t), m(t)$ на полуоси $[0, \infty)$ и при этом

$$V(t) > 0, \quad m(t) > 0 \quad \text{при } t \geq 0, \quad m(t) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{14}$$

Для доказательства этой теоремы приведем две леммы.

Лемма 1. Пусть $V(t), m(t)$ – решение задачи (9), (10), (4) в интервале $(0, T)$. Если $m(t) > 0$ для точки $t \in (0, T)$, то

$$V(t) > 0, \quad m'(t) < 0, \quad \text{при } t \in (0, T). \tag{15}$$

Лемма 2. Пусть $V(t), m(t)$ – решение задачи (9), (10), (4) в интервале $[0, t_0)$. Если $m(t)$ удовлетворяет условию

$$m_0 \leq m(t) \leq M_0 \quad \text{при } t \in [0, t_0), \tag{16}$$

то

$$0 < A = \min(V_0, V^*) \leq V(t) \leq \max(V_0, V^{**}) = B, \tag{17}$$

$$-aM_0 \le m'(t) \le -c < 0, \tag{18}$$

где положительные постоянные c, V^*, V^{**} определяются из равенств

$$\tilde{f}_1(V^*) = bm_0, \quad \tilde{f}_1(V^{**}) = bM_0, \tag{19}$$

$$c = \min\left(\frac{m_{21}Da}{a^2bM_0 + M_{21}}, aM_0 - \tilde{f}_2(V_0)\right), \tag{20}$$

$$m_{21} = \min_{V\in[A,B]} \tilde{f}_2'(V), \quad M_{21} = \max_{V\in[A,B]} \tilde{f}_2'(V), \quad D = \min_{V\in[A,B]} \left(\frac{1}{b}\tilde{f}_1(V) - \frac{1}{a}\tilde{f}_2(V)\right). \tag{21}$$

Доказательство Леммы 1 : Сначала докажем, что $V(t) > 0$ при $t \in (0, T)$. Предположим обратное. Пусть для $\tau \in (0, T)$

$$V(\tau) = 0, \quad V(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, \tau). \tag{22}$$

Существование такой точки следует из предположения $V(0) = V_0 > 0$. Из (22) имеем $V'(\tau) \le 0$. С другой стороны, в точке τ уравнение (9) имеет вид $m(\tau)V'(\tau) = bm(\tau) - \tilde{f}_1(0)$. Так как по предположению $\tilde{f}_1(0) = 0$ и $m(\tau) > 0$, то получим $V'(\tau) = b > 0$. Противоречие доказывает первое неравенство из (15).

Для доказательства второго неравенства из (15) заметим, что функция $m(t)$ имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, поскольку $\tilde{f}_2(V)$ предполагалась непрерывно дифференцируемой. Из (10) и (12) имеем $m'(0) = -aM_0 + \tilde{f}_2(V_0) < 0$. Следовательно, в окрестности нуля имеем $m'(t) < 0$. Пусть $\tau \in (0, T)$ – точка такая, что $m'(\tau) = 0$, $m'(t) < 0$ при $t \in [0, \tau)$. Тогда $m''(\tau) \ge 0$, а в силу (10) получим

$$m''(\tau) = -am'(\tau) + \tilde{f}_2'(V(\tau))V'(\tau) = \tilde{f}_2'(V(\tau))V'(\tau) \ge 0.$$

Так как $V(t) > 0$ при $t \in [0, \tau)$, то имеем $\tilde{f}_2'(V(\tau)) > 0$, следовательно $V'(\tau) \ge 0$. С другой стороны, из (10) следует

$$m(\tau) - \frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(\tau)) = -\frac{1}{a}m'(\tau) = 0.$$

В силу (13)

$$m(\tau) - \frac{1}{b}\tilde{f}_1(V(\tau)) < m(\tau) - \frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(\tau)) = 0.$$

Следовательно, из (9) получим

$$V'(\tau) = \frac{b}{m(\tau)}\left[m(\tau) - \frac{1}{b}\tilde{f}_1(V(\tau))\right] < 0.$$

Это противоречие доказывает Лемму 1.

$$B(t,\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(nt+t+\alpha\pi/2-\beta t}{(n+1-\beta)^r}+\frac{\cos(nt+\beta t+\alpha\pi/2)}{(n+\beta)^r}\right),$$

$$N(t,\alpha,\beta)=(A^2(t,\alpha,\beta)+B^2(t,\alpha,\beta))^{1/2},\quad \varphi(t,\alpha,\beta)=\arccos\frac{B(t,\alpha,\beta)}{N(t,\alpha,\beta)},$$

$$M(\alpha,\beta)=\frac{\beta^r}{\pi^3}\int_0^{2\pi}N(t,\alpha,\beta)\left(1-2\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*}\frac{\cos 2v\varphi}{4v^2-1}\right)dt,$$

$$A_1(\alpha,\beta)=M(\alpha,\beta)+M(-\alpha,\beta),\quad A_2(\alpha,\beta)=\frac{\beta^r}{\pi^3}\int_0^{2\pi}(N(t,\alpha,\beta)+N(t,-\alpha,\beta))\,dt,$$

где $*$ означает, что $2vs\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, $s,p\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть $r>1$. Тогда

a) если $\beta=0$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{C_m(0,W_r^\alpha)}{m^{-r}\ln m}=\dfrac{4}{\pi^2}$,

b) если $\beta\in[0,1/2]$ иррационально, то $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m^{-r}\ln m}=A_2(\alpha,\beta)$,

c) если $\beta=s/p\in[0,1/2]$, $s,p\in\mathbb{N}$, $(s,p)=1$, то

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m^{-r}\ln m}\geq A_1(\alpha,\beta),\quad \limsup_{m\to\infty}\frac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m^{-r}\ln m}\leq A_2(\alpha,\beta),$$

и для любого $\gamma\in[A_1(\alpha,\beta),A_2(\alpha,\beta)]$ существуют $m_n,q_n\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{q_n}=s/p\quad\blacksquare\quad\lim_{n\to\infty}\frac{C_{m_n}(0,W_\alpha^r)}{m_n^{-r}\ln m_n}=\gamma.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1 : Так как $T_m(x,S_m(x,f))=S_m(x,f)$, то получим

$$f(x)-T_m(x,f)=f(x)-S_m(x,f)-T_m(x,f-S_m)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G_m(x,t)\varphi(t)\,dt. \quad (3)$$

где

$$G_m(x,t)=\gamma(t,x,m,\alpha)-\frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1}D_{r,\alpha}^{m+1}(t-x_l)D_m(x-x_l). \quad (4)$$

Из (3) следует, что

$$C_m(x,W_\alpha^r)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|G_m(x,t)|\,dt. \quad (5)$$

С другой стороны, легко видеть, что 2π-периодическая функция

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}\mathrm{sign}G_m(x,t), & \text{при}\quad |t|\leq\dfrac{\pi}{2},\\ -\varphi_0(t-\pi), & \text{при}\quad \dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$+\frac{\tilde{f}_2'(V(\tau))}{bm(\tau)}\left[\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(\tau))-\frac{1}{b}\tilde{f}_1(V(\tau))\right]\geq 0,$$

или эквивалентно

$$\left[a^2+\frac{\tilde{f}_2'(V(\tau))}{bm(\tau)}\right]\cdot\left[m(\tau)-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(\tau))\right]\geq\frac{\tilde{f}_2'(V(\tau))}{bm(\tau)}\left[\frac{1}{b}\tilde{f}_1(V(\tau))-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(\tau))\right]. \tag{25}$$

Поскольку неравенство (17) выполняется на $[0,t_0)$, то из (11) и (13) постоянные, определенные в (21), суть положительные. Из (25) имеем

$$m(\tau)-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(\tau))\geq\frac{m_{21}D}{a^2bM_0+M_{21}}.$$

Следовательно, при всех $t\in[0,t_1]$ (а значит в $[0,t_0)$) имеем

$$m(t)-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(t))\geq\min\left(\frac{m_{21}D}{a^2bM_0+M_{21}},M_0-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V_0)\right)=\frac{c}{a}>0. \tag{26}$$

Заметим, что из (12) следует, что $M_0-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V_0)>0$. Из (10) получим

$$m'(t)=-a\left(m(t)-\frac{1}{a}\tilde{f}_2(V(t))\right).$$

Отсюда и из (26) следует $m'(t)\leq -c$ при $t\in[0,t_0)$, откуда вытекает первое неравенство из (18). Второе неравенство следует из (16) и (10). Лемма 2 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Согласно общей теореме (см. [3]), задача (9), (10), (4) имеет единственное решение в окрестности нуля. Поскольку $m(0)=M_0>0$, то в этой окрестности имеем $m(t)>0$. Пусть t_1 есть точка такая, что $0<\varepsilon\leq m(t)\leq M_0$ при $t\in[0,t_1)$. По Лемме 2 $0<A_1\leq V(t)\leq B_1$, $-C_1\geq m'(t)\geq -aM_0$ при $t\in[0,t_1)$, где A_1,B_1,C_1 – положительные постоянные, зависящие только от ε,M_0,V_0. Следовательно, $\tilde{f}_1(V(t))$ ограничена на $[0,t_1)$. Поэтому $V'(t)$ остается ограниченной при $t\to t_1-0$. Таким образом, $m(t)\to m_1$, $V(t)\to V_1$ при $t\to t_1-0$, причем $m_1\geq\varepsilon>0$, $V_1\geq A_1>0$. Рассмотрим задачу Коши для системы (9), (10) с начальным условием $m(t_1)=m_1$, $V(t_1)=V_1$. Эта задача имеет единственное решение в окрестности $[t_1,t_1+\varepsilon)$. Поэтому $[0,t_1)$ не является максимальным интервалом, на котором сушествует решение задачи (9), (10), (4).

Пусть $[0,T)$ – интервал, где $m(t)>0$. По Лемме 1, $V(t)>0$ на $[0,T)$, следовательно $\tilde{f}_2(V(t))>0$ на $[0,T)$. Из (10) имеем $m'(t)+am(t)>0$, $t\in[0,T)$. Так как $m(t)>0$, то $(\ln m(t))'>-a$, $t\in[0,T)$. Интегрируя последнее неравенство от 0 до

t, получим $\ln m(t) - \ln M_0 > -at$, или $m(t) > M_0 \exp(-at)$, $t \in [0, T)$. Если $T < \infty$, то $m(t) \geq M_0 \exp(-aT) > 0$ при $t \in [0, T)$. Используя предыдущие рассуждения, можно продолжить решение на интервал $[T, T + \varepsilon)$. Следовательно, $T = \infty$.

Итак, решение задачи (9), (10), (4) определено на $[0, \infty)$, и $m(t) > 0$ при $t \geq 0$. Покажем, что $m(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, если это не тот случай, когда $m(t) \geq \varepsilon$ при $t \geq 0$, то по Лемме 1 $m'(t) < 0$. Согласно Лемме 2, $m'(t) \leq -c$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, $m(t) \leq M_0 - ct$, т.е. функция $m(t)$ не может оставаться положительной при $t \to \infty$. Теорема 1 доказана.

§2. ПРИБЛИЖЁННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Из Леммы 1 ($m'(t) < 0$) следует, что

$$m_0 \leq m(t) \leq M_0, \qquad \text{при } t \in [0, t_0]. \tag{27}$$

Укажем метод приближенного решения задачи (9), (10), (4) на интервале $[0, t_0]$, где $m(t_0) = m_0$ с дополнительным условием (27). Из Леммы 2 следует, что из (27) вытекает $m'(t) \leq -c$, где c определяется в (20). Следовательно, в (8) и (9) можем перейти к переменной m. Имеем

$$\frac{dV}{dm} = -\frac{1}{m} \frac{bm - \tilde{f}_1(V(m))}{am - \tilde{f}_2(V(m))}. \tag{28}$$

Начальное условие запишется в виде

$$V(M_0) = V_0. \tag{29}$$

Решение задачи (28), (29) ищем в интервале $[m_0, M_0]$. Рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение

$$V(x) = V(M_0) + \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \frac{bm - \tilde{f}_1(V(m))}{am - \tilde{f}_2(V(m))}\, dm. \tag{30}$$

Докажем теперь, что при надлежащем выборе h уравнение (30) можно решить методом последовательных приближений на интервале $[M_0 - h, M_0]$. При $m_0 \leq m \leq M_0$ из Леммы 2 следует, что $0 < A \leq V(m) \leq B$. $aM_0 \geq am - \tilde{f}_2(V(m)) \geq c > 0$, где A, B, c определены в (17) – (20). Из непрерывности функции $\tilde{f}_2(V)$ для любого положительного ε существует функция $\delta(\varepsilon)$ такая, что из неравенств

$$0 < A - \varepsilon \leq V(m) \leq B + \varepsilon \tag{31}$$

вытекает $aM_0 \geq am - \tilde{f}_2(V(m)) \geq c - \delta(\epsilon) > 0$. Следовательно, на интервале $[M_0 - h, M_0]$ функция

$$(KV)(x) = V(M_0) + \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \frac{bm - \tilde{f}_1(V(m))}{am - \tilde{f}_2(V(m))}\, dm$$

удовлетворяет неравенствам

$$A - \frac{h}{m_0} \frac{\tilde{f}_1(B+\epsilon)}{c - \delta(\epsilon)} \leq (KV)(m) \leq B + \frac{h}{m_0} \frac{BM_0}{c - \delta(\epsilon)}.$$

Если h удовлетворяет неравенству

$$h \leq \min\left(\frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{\tilde{f}_1(B+\epsilon)}, \frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{bM_0} \right),$$

то функция $(KV)(m)$ удовлетворяет (31). Далее, имеем

$$(KV_1)(x) - (KV_2)(x) = \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \left[\frac{bm - \tilde{f}_1(V_1(m))}{am - \tilde{f}_2(V_1(m))} - \frac{bm - \tilde{f}_1(V_2(m))}{am - \tilde{f}_2(V_2(m))} \right] dm =$$

$$= \int_x^{M_0} \frac{1}{m} \left[\frac{[am - \tilde{f}_2(V_2(m))] \cdot [\tilde{f}_1(V_2(m)) - \tilde{f}_1(V_1(m))]}{[am - \tilde{f}_2(V_1(m))] \cdot [am - \tilde{f}_2(V_2(m))]} + \right.$$

$$\left. + \frac{[bm - \tilde{f}_1(V_2(m))] \cdot [\tilde{f}_2(V_1(m)) - \tilde{f}_2(V_2(m))]}{[am - \tilde{f}_2(V_1(m))] \cdot [am - \tilde{f}_2(V_2(m))]} \right] dm.$$

Следовательно

$$\|(KV_1)(m) - (KV_2)(m)\| \leq h \frac{aM_0M_{11} + bM_0M_{21}}{m_0(c - \delta(\epsilon))^2} \|V_1(m) - V_2(m)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – равномерная норма на отрезке $[M_0 - h, M_0]$, причем

$$M_{k1} = \max_{A - \epsilon \leq V \leq B + \epsilon} \tilde{f}_k'(V), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, если h определить по формуле

$$h = \min\left(\frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{2\tilde{f}_1(B+\epsilon)}, \frac{\epsilon m_0 (c - \delta(\epsilon))}{2bM_0}, \frac{m_0 (c - \delta(\epsilon))^2}{2M_0(aM_{11} + bM_{21})} \right),$$

то K – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $1/2$, действующее в пространстве функций, удовлетворяющих неравенству (31). Следовательно, на интервале $[M_0 - h, M_0]$ уравнение (30) можно решить методом последовательных приближений со скоростью геометрической прогрессии. Определив решение $V(m)$ на $[M_0 - h, M_0]$ с точностью $\epsilon/4$, рассмотрим уравнение

$$V(x) = V(M_0 - h) + \int_x^{M_0 - h} \frac{1}{m} \frac{bm - \tilde{f}_1(V(m))}{am - \tilde{f}_2(V(m))}\, dm, \tag{32}$$

эквивалентное задаче (28), (29) на $[M_0 - 2h. M_0 - h]$. В силу выбора h получим

$$B + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \geq V(M_0 - h) + \int_x^{M_0-h} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))}\, dm \geq A - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4}.$$

Используя предыдущие рассуждения к уравнению (32), заключаем, что на $[M_0 - 2h, M_0 - h]$ уравнение (32) можно решить методом последовательных приближений со скоростью геометрической прогрессии. Находим решение с точностью $\epsilon/8$ и на интервале $[M_0 - 3h, M_0 - 2h]$ решаем уравнение

$$V(x) = V(M_0 - 2h) + \int_x^{M_0-2h} \frac{1}{m} \frac{bm - \bar{f}_1(V(m))}{am - \bar{f}_2(V(m))}\, dm.$$

Используя предыдущие рассуждения, через конечное число шагов получим решение задачи (28), (29) на $[m_0, M_0]$ с заданной точностью ϵ. Определив $V(m)$ из (10), можем найти решение $m(t_0) = m_0$ по формуле

$$t_0 = \int_{m_0}^{M_0-2h} \frac{dm}{-am + \bar{f}_2(V(m))}.$$

ABSTRACT. The paper studies boundary value problems for some systems of nonlinear ordinary differential equations, that have important applications. The earlier knowledge (see [1] – [4]) on similar systems did not extend beyond existence of unique solution of the Cauchy problem in a neighborhood of the origin. The existence of a solution in a finite interval with starting point fixed, whose endpoint has to be determined from the boundary conditionsis proved, and estimates that allow to construct approximate solutions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений. Наука, Москва, 1970.
2. Ф. Трикоми, Дифференциальные Уравнения, Москва. ИЛ, 1962.
3. Ф. Хартман, Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, Мир, Москва. 1970.
4. В. И. Арнольд, Дополнительные Главы Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1978.

17 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, А. А. Терзян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье изучаются смешанные краевые задачи для уравнения Лапласа, сводящиеся к уравнениям Фредгольма, имеющим единственное решение.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – $(m+1)$–связная область на комплексной плоскости, ограниченная достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися кривыми Ляпунова Γ_0, ..., Γ_m. Предположим, что кривая Γ_0 охватывает все остальные кривые Γ_1, ... Γ_m, и обозначим через $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_k$ границу области D. Не ограничивая общности будем предполагать, что начало координат принадлежит области D. Многие проблемы электродинамики приводятся к следующей смешанной краевой задаче (см., например, [1], [2]) : найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad z = x + iy \in D, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям :

$$u(z) = f_k(z), \qquad z \in \Gamma_k, \qquad k = 0, ..., n, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = f_k(z), \qquad z \in \Gamma_k, \qquad k = n+1, ..., m, \tag{1.3}$$

где $n < m$ – целые неотрицательные числа, $\frac{\partial u(z)}{\partial N}$ – производная функции $u(z)$ по внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_k(z)$ суть заданные комплекснозначные функции на контурах Γ_0, ..., Γ_m, соответственно, а i – мнимая единица.

Решение задачи (1.1) — (1.3) ищется в классе комплекснозначных функций, непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$. Мы предполагаем, что функции $f_k(z)$ $(k = 0, ..., m)$ и $\frac{df_k}{ds}$ $(k = 0, ..., n)$ (дифференцирование

по длине дуги s) принадлежат классу H на Γ. где $H = H(\Gamma)$ - класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на множестве Γ (см. [3], стр. 20).

Задача (1.1) — (1.3) при $f_k \equiv 0$ $(k = 0, ..., m)$ называется однородной. Из формулы Грина непосредственно следует, что однородная задача (1.1) — (1.3) имеет только нулевое решение (см. [4], стр. 291). В частности, если функции $f_k(z)$ $(k = 0, ..., m)$ - действительные, то решение задачи (1.1) — (1.3) также действительное.

Граничные условия (1.2) можно записать в эквивалентном виде

$$\frac{du(z)}{ds} + u(z) = \frac{df_k(z)}{ds} + f_k(z), \quad z \in \Gamma_k, \quad k = 0, ...n. \tag{1.4}$$

В работах [5], [6] задача (1.1), (1.3), (1.4) сведена к сингулярному интегральному уравнению, и для последнего доказаны существование и единственность решения этой задачи.

Целью данной работы - свести задачу (1.1) — (1.3) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и доказать существование и единственность решения этого уравнения. Этот подход привлекателен тем, что уравнения Фредгольма значительно проще решать с использованием современной вычислительной техники.

§2. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе рассматриваются некоторые интегральные представления аналитических функций, которые доказывают полезность нашего подхода при решении задачи (1.1) — (1.3). Работы [3] и [7] - стандартная литература по интегральным представлениям.

Пусть G_1 - ограниченная, а G_2 - неограниченная односвязные области с достаточно гладкими, замкнутыми, непересекающимися границами L_1 и L_2, соответственно. Область G_2 содержит окрестность бесконечно удалённой точки. Положительным направлением на контуре L_k $(k = 1, 2)$ считается то направление, которое оставляет область G_k слева. Пусть $a_k(z) \neq 0$ и $b_k(z) \neq 0$, $z \in L_k$ $(k = 1, 2)$ заданные, непрерывно дифференцируемые функции. Приращение функции $a_k(z)$, делённое на 2π, когда точка z пробегает контур L_k один раз в положительном направлении, называется индексом функции $a_k(z)$ на контуре L_k. Предполагается, что индексы функции $a_1(z)$ и $b_1(z)$ на L_1 равны 1 или 0, соответственно, а индексы функций $a_2(z)$ и $b_2(z)$ на L_2 равны -1 и 0, соответственно.

Лемма 2.1. Пусть функции $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ – аналитические в области G_k $(k = 1, 2)$, принадлежат классу H в замкнутой области $\overline{G_k} = G_k \bigcup L_k$ и $\phi_2(\infty) = \omega_2(\infty) = 0$. Тогда имеют место следующие представления :

$$\phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\mu_k(t)\, dt}{a_k(t)\,(t - z)}, \qquad z \in G_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.1}$$

$$\omega_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\overline{\mu_k(t)}\, dt}{b_k(t)\,(t - z)}, \qquad z \in G_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.2}$$

где $\mu_k(t) \in H(L_k)$, а $\overline{\mu_k(t)}$ – комплексно сопряжённое к $\mu_k(t)$. Функция $\mu_k(t)$ единственным способом определяется по $\phi_k(t)$ и $\omega_k(t)$. В (2.1), (2.2) переменная интегрирования $t = \xi + i\eta$ пробегает контур L_k в положительном направлении.

Аналогичное интегральное представление для пары аналитических функций $\phi_k(z)$ и $\omega_k(z)$ приведены в [7], стр. 240. Поэтому мы опускаем доказательство представлений (2.1), (2.2).

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Используя Лемму 2.1 мы получим интегральное представление решения уравнения (1.1) в многосвязных областях, которое сводит задачу (1.1) — (1.3) к интегральному уравнению Фредгольма и позволяет доказать единственность решения этого уравнения.

Пусть D_j^+ - односвязная, ограниченная область с границей Γ_j, $j = 0, ..., m$, а D_j^- - дополнение замкнутой области $D_j^+ \bigcup \Gamma_j$ до полной комплексной плоскости. Пусть $z_j = x_j + iy_j \in D_j^+$, $j = 1, ..., m$.

Общее решение уравнения (1.1) в области D определяется формулой (см. [6])

$$u(z) = \varphi(z) + \overline{\psi(z)} + \sum_{k=1}^{m} c_k \ln|z - z_k|, \tag{3.1}$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в области D, а $c_1, ..., c_m$ – произвольные комплексные постоянные, $\overline{\psi(z)}$ – комплексно сопряжённое к $\psi(z)$.

Из формулы Коши (см. [8], стр. 54) следует, что

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(z), \qquad \psi(z) = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(z), \tag{3.2}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ аналитичны в области D_0^+, $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ $(k = 1, ..., m)$ аналитичны в области D_k^- и

$$\varphi_k(\infty) = 0, \qquad \psi_k(\infty) = 0, \qquad k = 1, ..., m. \tag{3.3}$$

Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (3.2) в (3.1), получим

$$u(z) = z\phi_0(z) + \overline{\omega_0(z)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\varphi_k(z) + \overline{\psi_k(z)} + c_k \ln|z - z_k| \right), \qquad (3.4)$$

где $z\,\phi_0(z) = \varphi_0(z) - \varphi_0(0)$ и $\omega_0(z) = \psi_0(z) + \overline{\varphi_0(0)}$.

Ясно, что $\phi_0(z)$ и $\omega_0(z)$ – аналитические в области D_0. Следовательно, решение уравнения (1.1) представляется в виде (3.4), где $\phi_0(z)$ и $\omega_0(z)$ суть аналитические в области D_0^+, а $\varphi_k(z)$, $\phi_k(z)$ $(k = 1, ..., m)$ аналитичны в D_k^- и удовлетворяют условиям (3.3), причём $c_1, ..., c_m$ – комплексные постоянные.

Положим в (3.4) $u(z) \equiv 0$. Тогда применяя к обеим частям (3.4) дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, получим $\phi_0 \equiv 0$, $\omega_0 \equiv 0$, $\varphi_k \equiv 0$, $\psi_k \equiv 0$ и $c_k = 0$ $(k = 1, ..., m)$. Следовательно, функции $\phi_0(z)$, $\omega_0(z)$, $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и постоянные $c_k = 0$ $(k = 1, ..., m)$ в (3.4) определяются единственным образом по решениям $u(z)$ уравнения (1.1).

Определение 3.1. Будем говорить, что решение уравнения (1.1) принадлежит классу $M_{m,n}$, если оно представляется в виде (3.4) с дополнительными условиями : $\phi_0(z)$, $\omega_0(z) \in H(\overline{D_0})$, $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ $(k = 1, ..., m)$ принадлежат классу $H(\overline{D_k^-})$, а производные $\varphi_k'(z)$ и $\psi_k'(z) \in H(\overline{D_k^-})$ $(k = n+1, ..., m$. $\overline{D_0} = D_0 \bigcup \Gamma_0$, $\overline{D_k^-} = D_k^- \bigcup \Gamma_k)$.

В [6] доказано следующее утверждение : при сделанных предположениях на функции $f_k(z)$ $(k = 0, ..., m)$, если $u(z)$ является непрерывно дифференцируемым решением задачи (1.1) -- (1.3) в замкнутой области $\overline{D}$, то $u(z) \in M_{n,n}$, и наоборот, если $u(z) \in M_{m,n}$ и удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), то $u(z)$ - непрерывно дифференцируема в области $\overline{D}$. Следовательно, не умаляя общности, мы можем решение задачи (1.1) — (1.3) искать в классе $M_{m,m}$. Используя (3.4) и Лемму 2.1, запишем интегральное представление решения уравнения (1.1) в классе $M_{m,n}$. Применяя представление (2.1) — (2.2) при $k = 1$, $G_1 = D_0^+$, $a_1(t) \equiv t$, $b_1(t) \equiv 1$, $\phi_1(z) = \phi_0(z)$ и $\omega_1(z) = \omega_0(z)$, получим

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\mu(t)\,dt}{t\,(t-z)}, \qquad \omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\overline{\mu(t)}\,dt}{t-z}, \qquad (3.5)$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma_0)$ определяется единственным способом по $\phi_0(z)$ и $\omega_0(z)$.

Пусть $c_1, ..., c_m$ – постоянные из представления (3.4). Используя (2.1) — (2.2) при $k = 2$, $G_2 = D_j^-$, $a_2(t) = t - z_j$, $b_2(t) = 1$, $\phi_2(z) = (c_j + \varphi_j(z))(z - z_j)^{-1}$.

$\omega_2(z) = \psi_j(z)$ $(j = 1, ..., n)$, получаем

$$\frac{c_j + \varphi_j(z)}{z - z_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{(t - z_j)(t - z)}, \quad z \in D_j^-, \quad j = 1, ..., n, \tag{3.6}$$

$$\psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\overline{\mu(t)}\, dt}{t - z}, \quad z \in D_j^-, \quad j = 1, ..., n, \tag{3.7}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma_j)$ определяется единственным образом по c_j, $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$.

Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ суть углы между внутренней нормалью контура Γ в точке $t \in \Gamma$ и положительными направлениями осей OX и OY, соответственно. Рассмотрим функцию

$$\gamma(t) = \cos\alpha(t) + i \cos\beta(t). \tag{3.8}$$

Положительное направление на Γ_j считается то, которое оставляет D слева. Индекс функции $\gamma(t)$ на Γ_0 равен 1, а на Γ_j, $j = 1, ..., m$ равен -1. Пусть $n < j \leq m$. Применяя представление (2.1) - (2.2) при $k = 2$, $G_2 = D_j^-$, $a_2(t) = \gamma(t)$, $b_2(t) = \gamma(t)(t - z_j)^{-1}$, $\phi_2(z) = \dfrac{c_j}{z - z_j} + \varphi_j'(z)$ и $\omega_2(z) = \psi_j'(z)(z - z_j)$, получим

$$\frac{c_j}{z - z_j} + \varphi_j'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{\gamma(t)(t - z)}, \quad z \in D_j^-, \quad j = n + 1, ..., m, \tag{3.9}$$

$$\psi_j'(z)(z - z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{(t - z_j)\overline{\mu(t)}\, dt}{\gamma(t)(t - z)}, \quad z \in D_j^-, \quad j = n + 1, ... m, \tag{3.10}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma_j)$ определяется по c_j, $\varphi_j(z)$ и $\psi_j(z)$ единственным образом.

Умножая обе части (3.6) и (3.9) на $z - z_j$ и переходя к пределу при $|z| \to +\infty$, получим

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{t - z_j}, \quad j = 1, .., n, \tag{3.11}$$

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{\gamma(t)}, \quad j = n + 1, ... m. \tag{3.12}$$

Подставляя c_j из (3.11) и (3.12) в (3.6) и (3.9), соответственно, получим

$$\varphi_j(z) = \frac{z - z_j}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{(t - z_j)(t - z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{(t - z_j)}, \quad j = 1, ..., n, \tag{3.13}$$

$$\varphi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)}{\gamma(t)} \ln\left(1 - \frac{t - z_j}{z - z_j}\right) dt, \quad j = n + 1, ..., m. \tag{3.14}$$

Из (3.10) следует, что

$$\psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\overline{\mu(t)}}{\gamma(t)} \ln\left(1 - \frac{t - z_j}{z - z_j}\right) dt, \quad z \in D_j^-, j = n + 1, ..., m. \tag{3.15}$$

В (3.14) и (3.15), ln означает непрерывную ветвь в области D_j^-, которая стремится к нулю при $|z| \to +\infty$. Мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.1. Общее решение $u(z)$ уравнения (1.1) определяется по формуле (3.4), где функции $\phi_0(z)$, $\omega_0(z)$, $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и c_k определяются формулами (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15). Функция $\mu(t) \in H(\Gamma)$ определяется через $u(z)$ единственным образом.

§4. ЗАДАЧА (1.1) — (1.3)

Рассмотрим следующий интеграл типа Коши :

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{4.1}$$

где $\mu(t) \in H(\Gamma)$, а интегрирование на Γ ведётся в положительном направлении. Пусть $\phi_0^+(t_0)$ – предел функции $\phi(z)$, когда $z \to t_0 \in \Gamma$ изнутри области D. Согласно формуле Сохоцкого-Племеля (см. [3], стр. 66) имеем

$$\phi_0^+(t_0) = \frac{1}{2}\mu(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{4.2}$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения Коши (см. [3], стр. 50). Положим

$$\gamma_1(t,t_0) = \frac{1}{t-t_0} - \frac{(\bar t)'}{\bar t - \bar t_0}. \tag{4.3}$$

где $t = \xi + i\eta \in \Gamma$, $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$

$$(\bar t)' = \lim_{\substack{z\to t\\ z\in\Gamma}} \frac{\bar z - \bar t}{z-t} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2}.$$

Так как контур Γ достаточно гладкий. то функция $\gamma_1(t,t_0)$ имеет следующий вид (см. [3], стр. 573) :

$$\gamma_1(t,t_0) = \frac{\gamma_0(t,t_0)}{|t-t_0|^\delta}, \tag{4.4}$$

где $\delta \in (0,1)$ и $\gamma_0(t,t_0) \in H(\Gamma)$.

Пусть $a(t,t_0)$ и $b(t,t_0)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на контуре Γ, причём $a(t_0,t_0) = 1$ и $b(t_0,t_0) = 1$. Тогда функция

$$\gamma_2(t,t_0) = \frac{a(t,t_0)}{t-t_0} - \frac{b(t,t_0)\,(\bar t)'}{\bar t - \bar t_0} \tag{4.5}$$

имеет представление вида (4.4). Граничные условия (1.3) запишем в виде (см. (3.8))

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x}\cos\alpha(z) + \frac{\partial u(z)}{\partial y}\cos\beta(z) = f_k(z), \quad z \in \Gamma_k, \quad k = n+1,\dots,m. \tag{4.6}$$

В предыдущем параграфе мы получили интегральное представление (3.4) для решения уравнения (1.1) в классе $M_{m,n}$, где функции $\phi_0(z)$, $\omega_0(z)$, $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и c_k определяются по формулам (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15). Подставляя это интегральное представление в (1.2) и (4.6) и вычисляя предел, когда $z \to t_0 \in \Gamma$ изнутри области D, согласно формуле Сохоцкого-Племеля (4.2) и представлений (4.3) и (4.5), для $\mu(t)$, получаем интегральное уравнение типа Фредгольма

$$\mu(t_0) + \int_\Gamma K(t_0, t)\,\mu(t)\,dt = f(t_0), \qquad t_0 \in \Gamma, \tag{4.7}$$

где $K(t_0, t)$ – вполне определённая функция вида (4.4), а $f(t_0) = f_k(t_0)$ при $t_0 \in \Gamma_k$, $k = 0, \ldots, m$. Уравнение (4.7) мы можем решать в классе непрерывных функций на Γ, так как любое непрерывное решение уравнения (4.7) принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Теперь докажем существование и единственность решения уравнения (4.7). Для этого достаточно показать, что однородное уравнение (4.7) (при $f(t) \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Действительно, пусть $\mu(t)$ – решение однородного уравнения (4.7). Тогда функция $u(z)$, определённая через $\mu(t)$ по формулам (3.4), (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15), является решением однородной задачи (1.1) — (1.3). Следовательно, $u(z) \equiv 0$. Отсюда и из единственности интегрального представления (Лемма 3.1), $\mu(t) \equiv 0$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема 4.1. Решение задачи (1.1) — (1.3) удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма (4.7). Последнее интегральное уравнение имеет единственное решение, которое задаётся по формулам (3.4), (3.5), (3.7), (3.11) — (3.15).

Аналогичный подход можно использовать, если заменить граничные условия (1.3) на следующие :

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} + a_k(z)\,u(z) = f_k(z), \qquad z \in \Gamma_k, \qquad k = n+1, \ldots, m, \tag{4.8}$$

где $a_k(z) \in H(\Gamma_k)$ – заданная комплекснозначная функция. По Лемме 3.1 задачу (1.1), (1.2) и (4.8) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма вида (4.7). В случае, когда функции $a_k(z)$ вещественные, и $a_k(z) \geq 0$ при $z \in \Gamma_k$, $k = n+1, \ldots, m$, то доказывается существование и единственность решения этого интегрального уравнения.

ABSTRACT. The paper studies mixed boundary value problems for Laplace equation, replacing them by Fredholm equations which have unique solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. "World Scientific", Singapore, 1994.
2. А. А. Терзян. Теория Систем Автоматизированного Проектирования. "NTUA Press", Ереван- Лос-Анжелес - Афины. 1995.
3. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения. Москва, Наука, 1962.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения Математической Физики. Москва, Наука, 1966.
5. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка. Москва. Наука, 1968.
6. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений. Москва. ГосТехИздат, 1948.
7. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений. Москва. Наука, 1970.
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного. Москва, Наука. 1973.

26 апреля 2000

Армянский государственный
инженерный университет

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА И ОДНОСТОРОННЯЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье изучаются задача Римана–Гильберта и односторонняя задача Гильберта для некоторых классов аналитических функций. Целью работы является сведение обеих задач к уравнениям Фредгольма. В случае задачи Римана–Гильберта соответствующее уравнение Фредгольма имеет единственное решение. Получены некоторые результаты для дефектных чисел этих задач.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – ограниченная $(m+1)$–связная область на плоскости с границей $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup \ldots \bigcup \Gamma_m$, $m \geq 1$, где Γ_0, Γ_1, ... Γ_m – замкнутые, непересекающиеся, достаточно гладкие кривые, причём Γ_0 охватывает все остальные контуры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Не умаляя общности будем предполагать, что начало координат принадлежит области D. Рассмотрим следующие две задачи.

Задача Римана–Гильберта : найти в области D аналитическую функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяющую граничному условию :

$$\mathrm{Re}[a(z)\,\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.1}$$

где $f(z)$ – некоторая вещественнозначная аналитическая функция на Γ.

Односторонняя задача Гильберта : найти в области D аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, непрерывные в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющие граничному условию

$$\varphi(\alpha(z)) = a(z)\,\psi(z) + g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.2}$$

где $a(z)$, $g(z)$, $\alpha(z)$ – заданные на Γ функции, $\alpha(z)$ взаимно однозначно отображает Γ на себя, меняя направление обхода контура и удовлетворяет следующему

условию

$$a(z) \neq 0, \quad \frac{\partial \alpha(z)}{\partial s} \neq 0, \quad z \in \Gamma$$

($\frac{\partial}{\partial s}$ означает дифференцирование вдоль Γ).

Предполагается, что функции $a(z)$, $f(z)$, $g(z)$, $\alpha(z)$ и их производные $\partial/\partial s$ удовлетворяют условию Гёльдера на Γ (условие H, [1], стр. 22). Класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$ и на Γ будем обозначать через $H(\overline{D})$ и $H(\Gamma)$, соответственно.

Если не оговорено особо, функции и постоянные будем считать комплекснозначными.

Задачи (1.1) и (1.2) полностью исследованы в [1], [2], где они были сведены к сингулярному интегральному уравнению нормального типа.

Целью данной работы является сведение этих задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и к некоторой системе алгебраических уравнений. В случае задачи (1.1) соответствующее интегральное уравнение Фредгольма имеет единственное решение. В конце работы полученные результаты применяются к решению задачи Пуанкаре для эллиптических уравнений.

§2. ВИДОИЗМЕНЁННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Этот параграф имеет вспомогательный характер. Сначала рассмотрим следующую видоизменённую задачу Римана–Гильберта : найти аналитическую в области D и непрерывную в $\overline{D}$ функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую следующим условиям :

$$\mathrm{Re}(\gamma_j\, \varphi(z)) = f(z), \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 0, 1, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Re}(\gamma_j\, \varphi(z)) = f(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 2, ..., m, \tag{2.2}$$

где $\alpha_2, ..., \alpha_m$ – искомые вещественные постоянные, γ_0, $\gamma_1, ..., \gamma_m$ – некоторые заданные отличные от нуля постоянные, $\gamma_0 = 1$, $\mathrm{Im}\,\gamma_1 \neq 0$, а $f(z)$ – функция в правой части (1.1). Если $m = 1$, то условия (2.2) отсутствуют. При $f \equiv 0$ задачу (2.1), (2.2) будем называть однородной.

Теорема 2.1. Задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение.

Доказательство : Сначала докажем, что однородная задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. Пусть $(\varphi(z), \alpha_2, ..., \alpha_m)$ – решение однородной задачи (2.1), (2.2). Положим $\varphi(z) = u(z) + i\nu(z)$, где $u(z)$ и $\nu(z)$ суть действительная и

мнимая части функции $\varphi(z)$, удовлетворяющие условию Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad z \in D. \tag{2.3}$$

Из граничных условий (2.1) и (2.2) при $f \equiv 0$ имеем

$$u(z) = 0, \qquad z \in \Gamma_0, \tag{2.4}$$

$$a_j\, u(z) + b_j\, v(z) = \alpha_j, \qquad z \in \Gamma_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

где a_j и b_j – действительные постоянные, $\alpha_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ и $a_j^2 + b_j^2 \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$. Пусть N – внешняя нормаль границы Γ_j в точке $z \in \Gamma_j$. Рассмотрим интегралы

$$I_j = \int_{\Gamma_j} u \frac{\partial u}{\partial N}\, ds, \qquad j = 0, \ldots, m,$$

где ds – элемент дуги контура Γ_j.

Из условия (2.3) следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \dfrac{\partial v}{\partial s}$. Имеем

$$I_j = \int_{\Gamma_j} u \frac{\partial v}{\partial s}\, ds, \qquad j = 0, \ldots, m. \tag{2.6}$$

Из (2.4), (2.5) следует, что или $u(z) = \text{const}$ на Γ_j, или $v(z) = c_j\, u(z) + d_j$ при $z \in \Gamma_j$, где c_j и d_j – некоторые постоянные. Поэтому из (2.6) имеем $I_j = 0$. $j = 0, \ldots, m$. Используя формулу Грина ([4], стр. 309), получаем

$$\iint_D u\, \Delta u\, dx\, dy = \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial N}\, ds - \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy, \tag{2.7}$$

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Так как $\Delta u \equiv 0$ и $I_j = 0$, $j = 0, \ldots, m$, то из (2.7) получим

$$u(z) \equiv \text{const}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) и условий (2.3) – (2.5) следует, что $u(z) \equiv 0$, $v(z) \equiv 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 2, \ldots, m$. Следовательно, однородная задача (2.1), (2.2) имеет только нулевое решение. Теперь докажем, что неоднородная задача (2.1), (2.2) имеет решение для любых правых частей $f_0(z)$, ..., $f_m(z)$. Решение этой задачи ищем в виде

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\gamma_j\, \pi\, i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\, dt}{t - z} + i \int_{\Gamma_1} \mu(t)\, ds, \tag{2.9}$$

$$\alpha_j = \int_{\Gamma_j} \mu(t)\, ds, \qquad j = 2, \ldots, m, \tag{2.10}$$

где $\mu(t)$ – искомая вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на Γ.

Подставляя $\varphi(z)$ и α_j из (2.9) и (2.10) в (2.1) и (2.2), для определения функции $\mu(z)$ получим следующее интегральное уравнение Фредгольма:

$$\mu(t_0) = \int_\Gamma K(t_0, t)\,\mu(t)\,ds + f(t_0), \qquad t_0 \in \Gamma, \tag{2.11}$$

где $K(t_0, t) = \dfrac{K^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\delta}$ – вещественнозначное ядро, функция $K^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по t_0 и t на Γ, а $0 < \delta < 1$ – постоянная.

Теперь докажем, что однородное уравнение (2.11) (при $f \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Действительно, пусть $\mu(t)$ – решение однородного уравнения (2.11). Тогда $(\varphi(z), \alpha_2, ..., \alpha_m)$, определённая формулами (2.9) и (2.10), является решением однородной задачи (2.1), (2.2). Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 2, ..., m$, т.е.

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\gamma_j\,\pi\,i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\,dt}{t - z} + i \int_{\Gamma_j} \mu(t)\,ds \equiv 0, \qquad z \in D. \tag{2.12}$$

$$\int_{\Gamma_j} \mu(t)\,ds = 0, \qquad j = 2, ..., m. \tag{2.13}$$

Пусть D_0^+ – ограниченная, односвязная область с границей Γ_0, а D_j^- – неограниченная область с границей Γ_j, $j = 1, ..., m$. Так как $\varphi(z) \equiv 0$, то имеем

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z} = 0, \quad z \in D_j^-, \quad j = 1, ..., m. \tag{2.14}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (2.9) в (2.14), получаем

$$\frac{1}{\pi\,i} \int_{\Gamma_j} \frac{\mu(t)\,dt}{t - z} = 0, \quad z \in D_j^-, \quad j = 1, ..., m. \tag{2.15}$$

Из (2.12) и (2.15) вытекает

$$\frac{1}{\pi\,i} \int_{\Gamma_0} \frac{\mu(t)\,dt}{t - z} + i \int_{\Gamma_1} \mu(t)\,ds = 0, \quad z \in D_j^+. \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) следует (см. [1], стр. 271), что

$$\mu(t) = 0, \qquad t \in \Gamma_0, \qquad \mu(t) = c_j, \quad t \in \Gamma_j, \quad j = 1, ..., m, \tag{2.17}$$

$$\int_{\Gamma_1} \mu(t)\,ds = 0, \tag{2.18}$$

где c_j – действительные постоянные.

Из соотношений (2.13), (2.17) и (2.18) получаем, что $\mu(t) = 0$. Следовательно, однородное уравнение (2.11) имеет только нулевое решение. Поэтому неоднородное уравнение (2.11) имеет решение для любой правой части $f(t)$. Теорема 2.1 доказана.

Теперь рассмотрим более общую граничную задачу

$$\mathrm{Re}\,[\gamma_j\, z^n\, \varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 0, 1, \tag{2.19}$$

$$\mathrm{Re}\,[\gamma_j\, z^n\, \varphi(z)] = f(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 2, .., m, \tag{2.20}$$

где n – целое. Здесь все остальные величины те же, что и в задаче (2.1), (2.2), $\gamma_0 = 1$, $\mathrm{Im}\,\gamma_1 \neq 0$.

Случай натурального n. Пусть $(\varphi(z), \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ – решение задачи (2.1), (2.2), которое является также решением задачи (2.19), (2.20) тогда и только тогда, когда $\alpha_j = \alpha_{0j}$, $j = 2, .., m$ и

$$\varphi(z)\, z^n = \varphi_0(z), \quad z \in D. \tag{2.21}$$

Из (2.21) имеем

$$\varphi_0^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, ..., n-1. \tag{2.22}$$

Если выполнены условия (2.22), то из (2.21) получаем $\varphi(z) = \varphi_0(z)\, z^{-n}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.2. Если $n \geq 1$, то задача (2.19), (2.20) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.22) и

$$\varphi(z) = \varphi_0(z)\, z^{-n}, \quad \alpha_j = \alpha_{0j}, \quad j = 2, .., m. \tag{2.23}$$

Случай $n \leq -1$. В задаче (2.19), (2.20) сделаем замену переменной

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{-n-1} (c_k + i\, d_k)\, z^k + z^{-n}\, \psi(z), \tag{2.24}$$

где c_k и d_k – действительные постоянные, а $\psi(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$.

Сначала рассмотрим однородную задачу (2.19), (2.20). Подставляя $\varphi(z)$ из (2.24) в (2.19), (2.20) при $f \equiv 0$, получим

$$\mathrm{Re}\,[\gamma_j\, \psi(z)] = F_j(z), \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 0, 1, \tag{2.25}$$

$$\mathrm{Re}\,[\gamma_j\,\psi(z)] = F_j(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 2, \ldots, m, \tag{2.26}$$

где $F_j(z) = -\mathrm{Re}\left[\gamma_j\, z^n \sum_{k=0}^{n-1} (c_k + i\,d_k)\, z^k\right]$.

Таким образом, мы получили задачу (2.1), (2.2) относительно $(\psi(z), \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

Пусть $(\varphi_k(z), \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{km})$ и $(\psi_k(z), \beta_{k2}, \ldots, \beta_{km})$ суть решения задачи (2.1), (2.2) при $f_j(z) = \mathrm{Re}\,(\gamma_j\, z^{n+k})$ и $f_j(z) = -\mathrm{Re}\,(\gamma_j\, z^{n+k}\, i)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, соответственно.

Тогда общее решение задачи (2.25), (2.26) определяется следующим образом :

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{-n-1} (c_k \varphi_k(z) + d_k\, \psi_k(z)), \tag{2.27}$$

$$\alpha_j = \sum_{k=0}^{-n-1} (c_k \alpha_{kj} + d_k\, \beta_{kj}), \quad j = 2, \ldots, m. \tag{2.28}$$

Подставляя $\psi(z)$ из (2.27) в (2.24), получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{-n-1} \left[c_k \left(z^k + z^{-n}\, \varphi_k(z)\right) + d_k \left(i\, z^k + z^{-n}\, \psi_k(z)\right)\right]. \tag{2.29}$$

Из (2.28) и (2.29) вытекает, что однородная задача (2.19), (2.20) при $n \leq -1$ имеет $(-2n)$ линейно независимых решений (над полем вещественных чисел). Если $(\varphi_0(z), \alpha_{02}, \ldots. \alpha_{0m})$ – решение задачи (2.1), (2.2), то $(\varphi_0(z)\, z^{-n}, \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0m})$ будет частным решением неоднородной задачи (2.19), (2.20). Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 2.3. При $n \leq -1$ однородная задача (2.19), (2.20) имеет $(-2n)$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (2.19), (2.20) имеет решение для любого $f(z)$, причём общее решение этой задачи определяется формулой

$$\varphi(z) = \varphi_0(z)\, z^{-n} + \sum_{k=0}^{-n-1} \left[c_k \left(z^k + z^{-n}\, \varphi_k(z)\right) + d_k \left(i\, z^k + z^{-n}\, \psi_k(z)\right)\right], \tag{2.30}$$

$$\alpha_j = \alpha_{0j} + \sum_{k=0}^{-n-1} (c_k \alpha_{kj} + d_k\, \beta_{kj}), \quad j = 2, \ldots, m, \tag{2.31}$$

где c_k и d_k – произвольные вещественные постоянные.

Теперь рассмотрим следующую задачу :

$$\mathrm{Re}\,[z^n\, \varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma_0, \tag{2.32}$$

$$\mathrm{Re}\,[z^n\, \varphi(z)] = f(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.33}$$

где $\varphi(z)$ – искомая аналитическая функция в области D, непрерывная в $\overline{D}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ суть искомые действительные постоянные, n – целое, а $f(z)$ – как и в (2.1), (2.2).

Задача (2.32), (2.33) при $n = 0$ полностью исследована в [1], стр. 246. Используя решение, приведённое в [1], мы исследуем задачу (2.32), (2.33) в общем случае. Здесь мы приведём только результаты.

Согласно [1], стр. 246 решение задачи (2.32), (2.33) при $n = 0$ ищем в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \qquad \alpha_j = \int_{\Gamma_j} \mu(t)\,ds, \quad j = 1, ..., m, \tag{2.34}$$

где $\mu(t)$ – искомая функция, определённая в D и удовлетворяющая условию Гёльдера на Γ. Подставляя $\varphi(z)$ и α_j из (2.34) в (2.32), (2.33) при $n = 0$, получим интегральное уравнение Фредгольма вида (2.11). Как показано в [1], стр. 253, для любой непрерывной функции $f(z)$ это уравнение имеет единственное решение. Следовательно, мы получим частное решение $(\varphi_0(z), \alpha_{01}, ..., \alpha_{0m})$ задачи (2.32), (2.33) при $n = 0$. Общее решение этой задачи определяется формулой (см. [1], стр. 246)

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + ic, \qquad \alpha_j = \alpha_{0j}, \quad j = 1, ..., m, \tag{2.35}$$

где c – вещественная постоянная.

Пусть $n \geq 1$ и $(\varphi(z), \alpha_1, ..., \alpha_m)$ – решение задачи (2.32), (2.33). Следовательно, согласно формуле (2.35) получим

$$z^n\,\varphi(z) = \varphi_0(z) + ic, \tag{2.36}$$

$$\alpha_j = \alpha_{0j}, \quad j = 1, ..., m. \tag{2.37}$$

Из (2.36) следует, что $c = -\operatorname{Im}\varphi_0(0)$ и из соотношений

$$\operatorname{Re}\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, ..., n-1 \tag{2.38}$$

вытекает, что

$$\varphi(z) = z^{-n}\,(\varphi_0(z) - \varphi_0(0))\,. \tag{2.39}$$

Следовательно, в этом случае условия (2.38) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (2.32), (2.33), при этом $(\varphi(z), \alpha_1, ..., \alpha_m)$ определяется формулами (2.37) и (2.39).

Случай $n \leq 1$. Используя представление (2.24), аналогично доказывается, что в этом случае однородная задача (2.32), (2.33) имеет ровно $(-2n+1)$ линейно независимых решений, а соответствующая неоднородная задача разрешима для любой правой части $f(z)$.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ (1.1)

В [3] (стр. 245) задача (1.1) сведена к той же задаче более частного вида

$$\mathrm{Re}[\gamma_j z^n \varphi(z)] = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad j = 0, \ldots m. \tag{3.1}$$

где $n = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma(\arg a(z))$, $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 \ldots, \gamma_m$ – отличные от нуля и зависящие только от $a(z)$ и области D, $\Delta_\Gamma(\arg a(z))$ – приращение функции $\arg a(z)$, когда точка z один раз описывает кривую Γ в направлении, оставляющем область D слева. Целое число n называется индексом функции $a(z)$ относительно границы Γ. Поэтому ниже мы будем исследовать задачу (3.1).

Пусть сначала в граничной задаче (3.1) одно из чисел $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ не является вещественным. Не умаляя общности предположим, что этим числом является γ_1. Итак, пусть $\gamma_0 = 1$, $\mathrm{Im}\gamma_1 \neq 0$. Обозначим через k_0 число линейно независимых решений однородной задачи (3.1), а через k_0', число условий вида

$$\int_\Gamma f(t)\,\psi_k(t)\,ds = 0, \quad k_0 = 1, \ldots, k_0'.$$

которые необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (3.1), где $\psi_1, \ldots, \psi_{k_0'}$ – некоторые линейно независимые вещественнозначные функции. Эти функции не зависят от $f(t)$.

В монографии [3], стр. 254 – 257, 261 доказаны следующие формулы :

$$k_0 \leq -n, \qquad k_0 - k_0' = -2n + 1 - m. \quad \text{при} \quad -m - 1 \leq n \leq -1,$$

$$k_0 = 0. \quad k_0' = 2n + m - 1 \quad \text{при} \quad n \geq 0. \tag{3.2}$$

$$k_0 = -2n + 1 - m, k_0' = 0 \quad \text{при} \quad n \leq -m. \tag{3.3}$$

Если $\varphi(z)$ является решением задачи (3.1), то $(\varphi(z), 0, \ldots 0)$ есть решением задачи (2.19), (2.20). С другой стороны, компонента $\varphi(z)$ решения $(\varphi(z), \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ задачи (2.19), (2.20) является решением задачи (3.1) тогда и только тогда, когда

$$\alpha_j = 0, \quad j = 2, \ldots, m. \tag{3.4}$$

Следовательно, все решения задачи (3.1) суть решения $(\varphi(z), \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ задачи (2.19), (2.20), которые удовлетворяют условию (3.4).

Пусть $n \geq 0$ и $(\varphi_0(z), \alpha_{02}, \ldots, \alpha_{0m})$ есть решение задачи (2.1), (2.2). Из Теорем 2.1 и 2.2 следует, что задача (2.19), (2.20) имеет решение тогда и только тогда, когда

выполнены условия (2.22), при этом решение задачи определяется формулой (2.23). Условия (2.22) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\varphi_0^{(k)}(0) = 0, \quad \mathrm{Im}\varphi_0^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \ldots, -n-1 \tag{3.5}$$

(при $n = 0$ условия (3.5) отсутствуют). Из (2.23) и (3.4) имеем

$$\alpha_{0k} = 0, \quad k = 2, \ldots, m. \tag{3.6}$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 3.1. Если $\gamma_0 = 1$, $\mathrm{Im}\gamma_1 \neq 0$, $n \geq 1$, то для разрешимости задачи (3.1) необходимо и достаточно выполнение условий (3.5), (3.6), при этом решение этой задачи единственно и определяется формулой $\varphi(z) = \varphi_0(z)\, z^{-n}$.

Из (3.2) вытекает, что условия (3.5), (3.6) линейно независимы.

Пусть теперь $n \leq -1$. Тогда общее решение задачи (2.19), (2.20) определяется формулами (2.30), (2.31). Подставляя α_j $(j = 2, \ldots, m)$ из (2.31) в (3.4), для определения действительных постоянных c_k и d_k получаем систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{-n-1} (c_k\, \alpha_{kj} + d_k\, \beta_{kj}) = -\alpha_{0j}, \quad j = 2, \ldots, m. \tag{3.7}$$

Таким образом, задача (3.1) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система (3.7). Общее решение задачи (3.7) определяется формулой (2.30), где c_k и d_k $(k = 0, \ldots, -n+1)$ удовлетворяют (3.7).

Выше мы показали, что условия (3.4), (3.5) линейно независимы. Отсюда следует, что функционалы α_{0k} (которые зависят от f) линейно независимы. Из формулы (3.3) следует, что при $n \leq -m$ неоднородная система (3.7) всегда имеет решение, а соответствующая однородная система имеет ровно $(-2n + 1 - m)$ линейно независимых решений. Следовательно, при $n \leq -m$ ранг основной матрицы системы (3.7) равен $m - 1$. Кроме того, если $-1 \leq n \leq -m - 1$, то из (2.31) и (3.7) получим $k_0 = -2n - r$, $k_0' = -m - 1 - r$.

Пусть теперь в задаче (3.1) все γ_j – вещественные. Тогда, не ограничивая общности, можем считать, что $\gamma_j = 1$, $j = 0, \ldots, m$. В этом случае эта задача исследуется, основываясь на видоизмененной задаче (2.32), (2.33).

§4. ЗАДАЧА (1.2)

4.1. Пусть D и $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1 \bigcup ... \bigcup \Gamma_m$ как и во Введении. Положим

$$n_j = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_j}(\arg a(z)) \quad (j = 0, 1, ..., m), \quad n = n_0 + n_1 + ... + n_m, \tag{4.1}$$

где $\Delta_{\Gamma_j}(\arg a(z))$ – приращение функции $\arg a(z)$ (см. (1.2)), когда z обходит кривую Γ_j, оставляя область D слева.

В задаче (1.2) сделаем замену переменных

$$\psi(z) = (z - z_1)^{n_1+1}...(z - z_m)^{n_m+1}\,\omega(z), \tag{4.2}$$

где z_k – некоторая фиксированная точка внутренности контура Γ_k $(k = 1, ..., m)$, а $\omega(z)$ – аналитическая функция в D. Подставляя $\psi(z)$ из (4.2) в (1.2), получим

$$\varphi(\alpha(z)) = z^p\, b(z)\,\omega(z) + g(z), \tag{4.3}$$

где

$$b(z) = a(z)\,(z - z_1)^{n_1+1}...(z - z_m)^{n_m+1}\,z^{1-m-n}, \tag{4.4}$$

$$p = n + m - 1. \tag{4.5}$$

Из (4.4) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_0}(\arg b(z)) = 1, \quad \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_j}(\arg b(z)) = -1, \quad j = 1, ..., m. \tag{4.6}$$

4.2. Пусть $z = \beta(t)$ – отображение, обратное к $t = \alpha(z)$. Для исследования задачи (4.3) докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. Пусть $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ аналитичны в D и удовлетворяют условию Гёльдера в $\overline{D}$. Тогда существует единственная функция $f(t)$, удовлетворяющая условию Гёльдера на Γ такая, что

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\beta(t))\,dt}{t - z}, \quad \omega(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{b(t)(t - z)}. \tag{4.7}$$

Доказательство : Фучкции $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ единственным образом представляются в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + ... + \varphi_m(z), \tag{4.8}$$

$$\omega(z) = \omega_0(z) + \omega_1(z) + ... + \omega_m(z), \tag{4.9}$$

где $\varphi_0(z)$ и $\omega_0(z)$ аналитичны в D_0^+, а $\varphi_j(z)$ и $\omega_j(z)$ $(j = 1, ..., m)$ аналитичны в D_j^-, $\varphi_j(\infty) = \omega_j(\infty) = 0$. Области D_0^+ и D_j^- определены в §2.

Как показано в [7] (см. также [2], стр. 240), функции $\varphi_j(z)$ и $\omega_j(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f_j(\beta(t))\,dt}{t-z}, \quad \omega_j(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{f_j(t)\,dt}{b(t)(t-z)}, \quad j = 0, \ldots, m, \quad (4.10)$$

где функция $f_j(z)$ определяется через $\varphi_j(z)$ и $\omega_j(z)$ единственным образом. Из (4.8) — (4.10) следует справедливость Леммы 4.1.

4.3. Вернемся к задаче (4.3). Подставляя $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ из (4.7) в (4.3), получим

$$A(t_0)\,f(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-t_0} + \int_\Gamma K(t_0,t)\,f(t)\,dt = g(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (4.11)$$

где

$$A(t_0) = 1 + t_0^p, \quad B(t_0) = 1 - t_0^p, \quad (4.12)$$

$$K(t_0,t) = \frac{K^*(t_0,t)}{|t-t_0|^\delta}, \quad (4.13)$$

где функция $K^*(t_0,t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по t_0 и t на Γ, а $0 < \delta < 1$ – постоянная. Сингулярный интеграл в (4.11) понимается в смысле главного значения по Коши ([1], стр. 50).

Пусть k_0 – число линейно независимых решений однородной задачи (4.3), а k_0' – число условий вида

$$\int_\Gamma g(t)\,\omega_k(t)\,dt = 0, \quad k = 1, \ldots, k_0'.$$

которые необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (4.3), где $\omega_k(t)$, $k = 1, \ldots, k_0'$ – некоторые линейно независимые, непрерывные функции на Γ. Числа k_0 и k_0' называются дефектными числами задачи (4.3). В этом параграфе линейная зависимость или независимость понимается над полем комплексных чисел.

Из Леммы 4.1 следует, что число линейно независимых решений однородной задачи (4.3) и однородного уравнения (4.2) равны. Поэтому индекс задачи (4.3) равен индексу уравнения (4.11). Как следует из (4.12), индекс уравнения (4.11) равен $(-p)$ (см. [1], стр. 222). Следовательно

$$k_0 - k_0' = -p. \quad (4.14)$$

Пусть $p = 0$. Тогда $A(t_0) = 2$, $B(t_0) = 0$ и уравнение (4.11) является уравнением Фредгольма.

4.4. Пусть p – натуральное число. Согласно Лемме 4.1 аналитические функции $\varphi(z)$ и $z^p\,\omega(z)$ можем представить в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\beta(t))\,dt}{t-z}, \tag{4.15}$$

$$z^p\,\omega(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{b(t)\,(t-z)}. \tag{4.16}$$

Дифференцируя обе части (4.16) по z до порядка $p-1$ и подставляя $z=0$, получим

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t^k\,b(t)} = 0, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) имеем

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{t^{-p}\,f(t)\,dt}{b(t)\,(t-z)} = 0, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{4.18}$$

Следовательно, аналитические функции $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ можно представить в виде (4.15), (4.18). В этом новом представлении функция $f(t)$ не определяется однозначно через $\varphi(z)$ и $\omega(z)$. Однако, для натурального p с помощью этого представления задачу (4.3) также можно свести к интегральному уравнению Фредгольма. Действительно, подставляя $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ из (4.15) и (4.18) в (4.3), получим

$$f(t_0) = \int_\Gamma K(t_0, t)\,f(t)\,dt + \frac{g(t_0)}{2}, \tag{4.19}$$

где $K(t_0, t)$ – функция вида (4.13).

Пусть l_0 – число линейно независимых решений однородного уравнения (4.19) (при $g=0$), а l_0' – число условий разрешимости неоднородного уравнения (4.19). Ясно, что

$$l_0 = l_0', \qquad k_0' = l_0'. \tag{4.20}$$

Из (4.14) и (4.20) имеем

$$k_0' = l_0, \qquad k_0 = l_0 - p \quad \text{при} \quad p \geq 0. \tag{4.21}$$

4.5. Пусть теперь p – целое отрицательное число. Представим $\omega(z)$ в виде

$$\omega(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{-p-1} z^{-p-1} + z^{-p}\,\Phi(z), \tag{4.22}$$

где $c_0, \ldots, c_{-p-1}$ – произвольные комплексные постоянные, а $\omega(z)$ аналитична в области D.

Согласно Лемме 4.1 аналитические функции $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\beta(t))\,dt}{t-z}, \quad \Phi(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{b(t)\,(t-z)}. \tag{4.23}$$

Подставляя $\omega(z)$ из (4.22) в (4.3) и используя представление (4.23), получаем

$$f(t_0) = \int_\Gamma K(t_0,t)\,f(t)\,dt + F(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{4.24}$$

где

$$2\,F(t_0) = t_0^p\,b(t_0)\,(c_0 + c_1\,t_0 + \ldots + c_{-p-1}\,t^{-p-1}) + g(t_0),$$

а $K(t_0,t)$ – функция вида (4.13).

Вектор $(f(t), c_0, \ldots, c_{-p-1})$ является решением уравнения (4.24). Если $g \equiv 0$, то уравнение (4.24) называется однородным.

Пусть l_0 – число линейно независимых решений однородного уравнения (4.24), а l_0' – число линейно независимых условий разрешимости (на функцию $g(t)$) неоднородного уравнения (4.24). Из представления (4.22), (4.23) и Леммы 4.1 следует, что

$$k_0 = l_0, \qquad k_0' = l_0'. \tag{4.25}$$

Из (4.14) и (4.25) имеем

$$k_0 = l_0, \qquad k_0' = l_0 + p \quad \text{при} \quad p \le -1. \tag{4.26}$$

Уравнение Фредгольма вида (4.24) с неизвестными постоянными было рассмотрено в [1], стр. 290.

Теперь уточним значение числа l_0 линейно независимых решений однородных уравнений Фредгольма (4.19) и (4.24) (при $g \equiv 0$). В §6 мы докажем справедливость следующих формул :

$$k_0 = 0, \quad k_0' = n + m - 1 \quad \text{при} \quad n \ge 1, \tag{4.27}$$

$$k_0 = -n - m + 1, \quad k_0' = 0 \quad \text{при} \quad n \le 1 - 2m, \tag{4.28}$$

$$0 \le k_0 \le -n + 1 \quad \text{при} \quad 1 - m \le n \le 0, \tag{4.29}$$

$$0 \le k_0 \le m, \quad \text{при} \quad 2 - 2m \le n \le -m. \tag{4.30}$$

Из (4.5), (4.21), (4.26) — (4.30) имеем

$$l_0 = |p| \quad \text{при} \quad |p| \ge m, \tag{4.31}$$

$$\max(0,p) \le l_0 \le m \quad \text{при} \quad |p| < m. \tag{4.32}$$

Если область D – односвязная, то из (2.22), (4.28), (4.31) получаем $l_0 = |p| = |n-1|$ при $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $k_0 = 0$, $k_0' = n-1$ при $n \ge 1$ и $k_0 = -n+1$, $k_0' = 0$ при $n \le 0$.

§5. ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть D – как и во Введении. Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре : найти в области D решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{5.1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$a_1(z)\,\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(z)\,\frac{\partial u}{\partial y} = g(z), \quad z = x + iy \in \Gamma, \tag{5.2}$$

где $a_1(z)$, $a_2(z)$ и $g(z)$ – заданные вещественнозначные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера на Γ и $a_1^2(z)+a_2^2(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$. Предположим, что решение задачи (5.1), (5.2) – вещественнозначное и первые его производные удовлетворяют условию Гёльдера в $\overline{D}$. Задача (5.1), (5.2) в односвязных областях была сведена в [1] (стр. 298) к сингулярному уравнению нормального типа, а в [6] для многосвязных областей. В настоящей работе эту задачу мы сведём к задаче (1.1) в многосвязных областях.

Как известно (см. [1], стр. 256) функция, гармоническая в области D представима в виде

$$u(z) = \operatorname{Re}\psi(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k| + c, \tag{5.3}$$

где $z_1,\ldots,z_m$ – фиксированные точки, охваченные замкнутыми контурами $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ соответственно, c, $A_1,\ldots,A_m$ – произвольные вещественные постоянные, а $\psi(z)$ – произвольная аналитическая в D функция, удовлетворяющая условию $\psi(0) = 0$ и единственным способом определяемая по $u(z)$.

Отметим, что если первые производные гармонической функции $u(z)$ удовлетворяют условию Гёльдера в области $\overline{D}$, то этому же условию удовлетворяет также функция $\psi'(z)$. Подставляя $u(z)$ из (5.3) в граничное условие (5.2), получим (1.1), где $a(z) = a_1(z) + i\,a_2(z)$ и

$$\varphi(z) = \psi'(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}. \tag{5.4}$$

Следовательно

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \varphi(z)\,dz = A_k, \quad k = 1,\ldots,m \tag{5.5}$$

с интегрированием в положительном направлении (которое оставляет область D слева).

Так как постоянные $A_1,...A_m$ - вещественные. то из (5.5) имеем

$$A_k = -\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\varphi(z)\,dz\right], \quad k = 1,...,m, \tag{5.6}$$

$$\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j}\varphi(z)\,dz = 0, \quad k = 1,...,m. \tag{5.7}$$

Пусть выполнены условия (5.6) и (5.7). Тогда из (5.4) имеем

$$\psi(z) = \int_0^z \left[\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{t-z_k}\int_{\Gamma_k}\varphi(\tau)\,d\tau\right]dt. \tag{5.8}$$

Пусть $f(z)$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям разрешимости задачи (1.1). Тогда общее решение этой задачи определяется формулой

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{j=1}^{k_0} c_j\,\varphi_j(z), \tag{5.9}$$

где $\varphi_0(z)$ - частное решение неоднородной задачи (1.1), $\varphi_j(z)$ $(j = 1,...,k_0)$ – линейно независимые решения (над полем вещественных чисел) однородной задачи (1.1), а c_j $(j = 1,...,k_0)$ – произвольные вещественные постоянные.

Подставляя $\varphi(z)$ из (5.9) в (5.7), для определения постоянных c_j $(j = 1,...,k_0)$ получаем систему линейных уравнений. Таким образом. решение задачи (5.1). (5.2) сводится к задаче (1.1) в многосвязной области.

5.2. Теперь рассмотрим следующую задачу Пуанкаре : найти в области D решение правильно эллиптического уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{5.10}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$b_1(z)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(z)\frac{\partial u}{\partial y} = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{5.11}$$

где A. B, C - постоянные, а $b_1(z)$, $b_2(z)$ и $f(z)$ - заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера на Γ.

Уравнение (5.10) называется правильно эллиптическим. если $C \neq 0$ и корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $A + B\,\lambda + C\,\lambda^2 = 0$ удовлетворяют условию $\mathrm{Im}\,\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_2 < 0$. Предполагается также, что

$$b_1(z) + \lambda_1\,b_2(z) \neq 0, \quad b_1(z) + \lambda_2\,b_2(z) \neq 0. \quad z \in \Gamma. \tag{5.12}$$

В частности, если $b_1(z)$, $b_2(z)$ – вещественнозначные и $|b_1(z)| + |b_2(z)| \neq 0$ при $z \in \Gamma$, то условия (5.12) всегда выполняются.

Рассуждая как и при выводе формулы (5.3) получим, что общее решение уравнения (5.10) имеет вид

$$u(z) = \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y) + \\ + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln[(x - x_1 + \lambda_1(y - y_1))(x - x_2 + \lambda_2(y - y_2))] + c, \tag{5.13}$$

где c, $A_1, \ldots, A_m$ – произвольные постоянные, $\varphi(x + \lambda_1 y)$ и $\psi(x + \lambda_2 y)$ – аналитические функции при $(x, y) \in D$ относительно аргументов $x + \lambda_1 y$ и $x + \lambda_2 y$, соответственно, и удовлетворяют следующим дополнительным условиям $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$. Более того, функции $\varphi(x + \lambda_1 y)$, $\psi(x + \lambda_2 y)$ и постоянные c, $A_1, \ldots, A_m$ определяются через $u(z)$ единственным способом. В (5.13) точки $z_j = x_j + i y_j$, $j = 1, \ldots, n$ берутся из представления (5.3). Подставляя $u(z)$ из (5.13) в (5.11), получим

$$\Phi(x + \lambda_2 y) = a(z)\,\omega(x + \lambda_1 y) + g(z), \quad z \in \Gamma \tag{5.14}$$

где

$$\Phi(x + \lambda_2 y) = \psi'(x + \lambda_2 y) - \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x - x_k + \lambda_2 (y - y_k)}. \tag{5.15}$$

$$\omega(x + \lambda_1 y) = \varphi'(x + \lambda_1 y) - \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x - x_k + \lambda_1 (y - y_k)}, \tag{5.16}$$

$$a(z) = \frac{-(b_1(z) + \lambda_1 b_2(z))}{b_1(z) + \lambda_2 b_2(z)}, \qquad g(z) = \frac{f(z)}{b_1(z) + \lambda_2 b_2(z)}. \tag{5.17}$$

Из (5.15) и (5.16) при любом $k = 1, \ldots, m$ имеем

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \omega(x + \lambda_1 y)\, d(x + \lambda_1 y). \tag{5.18}$$

$$\int_{\Gamma_k} \omega(x + \lambda_1 y)\, d(x + \lambda_1 y) + \int_{\Gamma_k} \Phi(x + \lambda_2 y)\, d(x + \lambda_2 y) = 0. \tag{5.19}$$

Пусть имеют место соотношения (5.18) и (5.19). Тогда из (5.15) и (5.16) получаем

$$\varphi(x + \lambda_1 y) = \int_0^{x + \lambda_1 y} \left(\omega(\zeta) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\zeta - x_k - \lambda_1 y_k} \right) d\zeta, \\ \psi(x + \lambda_2 y) = \int_0^{x + \lambda_2 y} \left(\psi(\zeta) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\zeta - x_k - \lambda_2 y_k} \right) d\zeta. \tag{5.20}$$

Следовательно, задача (5.10), (5.11) сводится к задаче Гильберта (5.14) с дополнительными условиями (5.19). Задачу (5.14) (без дополнительных условий (5.19)) можно решить аналогично задаче (1.2). Как мы видели выше, дополнительные условия (5.19) существенно не влияют на метод решения

§6. ДЕФЕКТНЫЕ ЧИСЛА ЗАДАЧИ (1.2)

В этом и следующем параграфах, если особо не оговорено, будем считать, что все функции аналитические в области D и принадлежат классу $H(\overline{D})$, т.е. удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D}$.

Пусть k_0 и k_0' – дефектные числа однородной задачи (1.2). Разность $k_0 - k_0'$ называется индексом этой задачи. В этом параграфе мы докажем соотношения (4.27) — (4.30). Вместе с задачей (1.2) рассмотрим также соответствующую союзную однородную задачу : найти в области D аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, удовлетворяющие граничному условию

$$\Phi_1(\alpha(z)) = \frac{\Phi_2(z)}{a(z)\,\alpha'(z)}, \quad z \in \Gamma, \tag{6.1}$$

где $\alpha'(z) = \dfrac{d\alpha(z)}{ds}\left(\dfrac{dz}{ds}\right)^{-1}$.

Теорема 6.1. Задача (1.2) имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma \frac{\Phi_2(t)\,f(t)}{a(t)}\,dt = 0. \tag{6.2}$$

где $(\Phi_1(z), \Phi_2(z))$ – решение союзной задачи (6.1).

В [3] доказана теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости задачи (1.1) (Теорема 4.2, стр. 241). Теорема 6.1 доказывается аналогично, поэтому её доказательство опускаем.

Пусть l_0 – число линейно независимых (над полем комплексных чисел) решений однородной задачи (6.1). Из формул (4.5), (4.14) и Теоремы 6.1 следует, что

$$k_0' = l_0, \qquad k_0 - l_0 = -n - m + 1, \tag{6.3}$$

где n – индекс функции $a(z)$ на Γ, а $(m+1)$ – связность области D.

Так как $l_0 \geq 0$, то из второй формулы (6.3), в частности, следует

$$k_0 \geq -n - m + 1. \tag{6.4}$$

Лемма 6.1. Если $(\varphi(z), \psi(z))$ – нетривиальное решение однородной задачи (1.2) (при $g \equiv 0$) и $\psi(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in \Gamma$, то для некоторого натурального ρ решение задачи имеет представление

$$\varphi(z) = \varphi_\rho(z)\,(z - \alpha(t_0))^\rho, \quad \psi(z) = \psi_\rho(z)\,(z - t_0)^\rho, \tag{6.5}$$

где функции $\varphi_\rho(z)$ и $\psi_\rho(z)$ – аналитические в области D с $\varphi_\rho(\alpha(t_0)) \neq 0$, $\psi_\rho(t_0) \neq 0$.

Доказательство : Пусть $(\varphi(z), \psi(z))$ – решение однородной задачи (1.2) и $\psi(t_0) = 0$. Из граничного условия (1.2) (при $g \equiv 0$) следует, что $\varphi(\alpha(t_0)) = 0$. В монографии [2], стр. 30 доказано, что такое решение представляется в виде

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\,(z - \alpha(t_0)), \qquad \psi(z) = \psi_1(z)\,(z - t_0), \tag{6.6}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ аналитичны в области D.

Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (6.6) в (1.2) при $g \equiv 0$. получим

$$\varphi_1(\alpha(z)) = a_1(z)\,\psi_1(z), \qquad z \in \Gamma. \tag{6.7}$$

где $a_1(z) = a(z)\,\dfrac{z - t_0}{\alpha(z) - \alpha(t_0)}$. Следовательно, $(\varphi_1(z), \psi_1(z))$ является решением граничной задачи (6.7). Если $\psi_1(t_0) = 0$, то, аналогично, получим

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z)\,(z - \alpha(t_0)) \qquad \text{и} \qquad \psi_1(z) = \psi_2(z)\,(z - t_0),$$

где $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ обладают теми же свойствами. что и $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$. Продолжая аналогично получим, что или имеет место (6.5), или же для любого натурального r имеет место представление

$$\varphi(z) = \varphi_r(z)\,(z - t_0)^r, \qquad \psi(z) = \psi_r(z)\,(z - t_0)^r, \tag{6.8}$$

где $\varphi_r(z)$ и $\psi_r(z)$ аналитичны в области D.

Пусть для некоторого натурального числа r имеет место представление (6.8). Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (6.8) в граничное условие (1.2) при $g \equiv 0$, получаем $\varphi_r(\alpha(z)) = a_r(z)\,\psi_r(z)$, $z \in \Gamma$, где

$$a_r(z) = a(z)\left[\frac{z - t_0}{\alpha(z) - \alpha(t_0)}\right]^r.$$

Рассмотрим следующую задачу Гильберта : найти аналитические в области D функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, удовлетворяющие граничному условию

$$\varphi_0(\alpha(z)) = \beta^r(z)\,\psi_0(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{6.9}$$

где $\beta(z) = \dfrac{\alpha(z) - \alpha(t_0)}{z - t_0}$.

Так как точка $t_0 \in \Gamma$, а $\zeta = \alpha(z)$ взаимнооднозначно отображает Γ на себя, меняя направление обхода, то индекс функции $\beta^r(z)$ на Γ равен $(-r)$.

Обозначим через l_r число линейно независимых решений однородной задачи (6.9). Используя неравенство (6.4) для задачи (6.9), получим $l_r \geq r -$

$m+1$. Если $(\varphi_0(z), \psi_0(z))$ является решением однородной задачи (6.9), то $(\varphi_0(z)\varphi_r(z), \psi_0(z)\psi_r(z))$ является решением однородной задачи (1.2). Следовательно, $k_0 \geq r - m + 1$. Таким образом, при $r = k_0 + m$ представление (6.8) не имеет места. Это означает, что возможно только представление (6.5). Лемма 6.1 доказана.

Из Леммы 6.1 следует, что любое нетривиальное решение $(\varphi(z), \psi(z))$ однородной задачи (1.2) имеет конечное число нулей в области $\overline{D}$ и оно представляется в виде

$$\varphi(z) = (z - \alpha(t_1))...(z - \alpha(t_{r_0}))(z - \zeta_1)...(z - \alpha(\zeta_{r_1}))\varphi_0(z), \tag{6.10}$$

$$\psi(z) = (z - t_1)...(z - t_{r_0})(z - \tau_1)...(z - \tau_{r_2})\psi_0(z), \tag{6.11}$$

где $t_1,...,t_{r_0}$ и $\zeta_1,...,\zeta_{r_1}$ $\tau_1,...,\tau_{r_2}$ – некоторые фиксированные точки на Γ и в области D, соответственно, а $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – аналитические в области D функции, причём

$$\varphi_0(z) \neq 0, \quad \psi_0(z) \neq 0, \quad z \in \overline{D}. \tag{6.12}$$

Отметим, что в (6.10) и (6.11) фиксированные точки зависят от $(\varphi(z), \psi(z))$.

Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (6.10) и (6.11) в граничное условие (1.2) при $g \equiv 0$, получаем

$$\varphi_0(\alpha(z)) = a_0(z)\,\psi_0(z), \quad z \in \Gamma, \tag{6.13}$$

где

$$a_0(z) = \frac{z - t_1}{\alpha(z) - \alpha(t_1)} \cdots \frac{z - t_{r_0}}{\alpha(z) - \alpha(t_{r_0})} \cdot \frac{(z - \tau_1)...(z - t_{r_2})\,a(z)}{(\alpha(z) - \zeta_1)...(\alpha(z) - \zeta_{r_1})}. \tag{6.14}$$

Отметим, что функция $a_0(z)$ непрерывна на Γ, $a_0(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$ и индекс функции $a_0(z)$ на Γ равен $r_0 + r_1 + r_2 + n$.

Так как $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ являются аналитическими в области D и удовлетворяют условиям (6.12), то согласно принципу аргумента ([5], стр. 84), индексы функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ на Γ равны нулю. Приравнивая индексы на Γ левой и правой частей соотношения (6.13), получаем $r_0 + r_1 + r_2 + n = 0$. Это равенство невозможно при $n \geq 1$. Следовательно, при $n \geq 1$ однородная задача (1.2) не имеет тривиального решения. Это означает, что при $n \geq 1$ имеем $k_0 = 0$. Аналогично, из (6.1) имеем $l_0 = 0$ для $n \leq 1 - 2m$. Отсюда следуют формулы (4.27) и (4.28) (см. формулу (6.3)).

Пусть $1 - m \leq n \leq 0$. Представим $\psi(z)$ в виде

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{-n} z^{-n} + z^{-n+1}\omega(z), \tag{6.15}$$

где $c_0,...,c_{-n}$ – произвольные постоянные, а $\omega(z)$ аналитична в D. Подставляя $\psi(z)$ из (6.15) в граничное условие (1.2), при $g \equiv 0$ получаем

$$\varphi(\alpha(z)) = b(z)\,\omega(z) + \sum_{k=0}^{-n} c_k\, a(z)\, z^k, \quad z \in \Gamma, \tag{6.16}$$

где $b(z) = a(z)\, z^{-n+1}$.

Искомым решением в (6.16) является $(\varphi(z), \omega(z), c_0, ... c_{-n})$, где $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ аналитичны в области D. Индекс функции $b(z)$ на Γ равен 1. Следовательно, задача (6.16) при $c_k = 0, k = 0, ..., -n$ имеет только нулевое решение. Рассмотрим следующую однородную задачу, союзную к задаче (6.16) :

$$\Phi_1(\alpha(z)) = \frac{\Phi_2(z)}{a(z)\, z^{n-1}\, \alpha'(z)}, \quad z \in \Gamma. \tag{6.17}$$

Используя (4.28) находим, что задача (6.17) имеет ровно m линейно независимых решений $(\Phi_{11}(z), \Phi_{21}(z)),..., (\Phi_{1m}(z), \Phi_{2m}(z))$. Согласно Теореме 6.1. задача (6.16) относительно $(\varphi(z), \omega(z))$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{-n} c_k \int_\Gamma \Phi_{2k}(z)\, z^{n-1+k}\, dz = 0, \quad k = 1, ... n. \tag{6.18}$$

Пусть r_0 – ранг основной матрицы системы (6.18). Тогда эта система имеет ровно $-n + 1 - r_0$ линейно независимых решений. Подставляя общее решение системы (6.18) в (6.15) и (6.16), и решая задачу (6.16) относительно $\varphi(z)$ и $\omega(z)$, получим, что однородная задача (1.2) имеет ровно $-n + 1 - r_0$ линейно независимых решений. Следовательно, $0 \le k_0 \le -n + 1$.

Пусть теперь $2 - 2m \le n \le -m$. Представим $\psi(z)$ в виде

$$\psi(z) = \frac{\Phi(z)}{z^{2m-1+n}}, \tag{6.19}$$

где $\Phi(z)$ аналитична в области D и удовлетворяет условиям

$$\phi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, ..., 2m - 2 + n. \tag{6.20}$$

Подставляя $\psi(z)$ из (6.19) в (1.2) при $g \equiv 0$, получим

$$\varphi(\alpha(z)) = \frac{a(z)}{z^{2m-1+n}}\Phi(z). \tag{6.21}$$

Согласно формуле (4.28), задача (6.21) имеет ровно m линейно независимых решений $(\varphi_1(z), \Phi_1(z)),..., (\varphi_m(z), \Phi_m(z))$. Общее решение задачи (6.21) определяется формулой

$$\varphi(z) = c_1\, \varphi_1(z) + ...c_m\, \varphi_m(z), \tag{6.22}$$

$$\Phi(z) = c_1 \Phi_1(z) + \ldots c_m \Phi_m(z), \tag{6.23}$$

где $c_0,\ldots,c_m$ – постоянные.

Подставляя $\Phi(z)$ из (6.23) в (6.20), для определения постоянных получаем систему алгебраических уравнений

$$c_1 \Phi_1^{(j)}(z) + \ldots, + c_m \Phi_m^{(j)}(z), \quad j = 0, 1, \ldots, 2m - 2 + n. \tag{6.24}$$

Пусть r_0 – ранг основной матрицы системы (6.24). Подставляя общее решение системы (6.24) в (6.22) и (6.23), получим, что однородная задача (1.2) имеет ровно $m - r_0$ линейно независимых решений. Следовательно, в этом случае, имеем $0 \leq k_0 \leq m$. Таким образом, мы доказали справедливость формул (4.27) — (4.30).

§7. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Пусть D – та же, что и во Введении, и пусть $0 \in D$. Рассмотрим следующую задачу : найти в области D аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из класса $H(\overline{D})$, удовлетворяющие граничному условию

$$\overline{\varphi(z)} = a(z)\,\psi(z) + g(z), \quad z \in \Gamma, \tag{7.1}$$

где $a(z)$ и $g(z)$ – как и в задаче (1.2), а $\overline{\varphi(z)}$ – комплексное сопряжение к $\varphi(z)$. Задачу (1.1) всегда можно свести к задаче (7.1). Действительно, граничное условие (1.1) можно записать в виде

$$a(z)\,\varphi(z) + \overline{a(z)\,\varphi(z)} = 2\,f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{7.2}$$

Рассмотрим задачу

$$a(z)\,\psi_0(z) + \overline{a(z)\,\varphi_0(z)} = 2\,f(z), \quad z \in \Gamma \tag{7.3}$$

для неизвестных аналитических в области D функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$. Ясно, что задачу (7.3) можно записать в виде (7.1).

Если $(\varphi_0(z), \psi_0(z))$ – решение задачи (7.3), то легко проверить, что функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(\varphi_0(z) + \psi_0(z)) \tag{7.4}$$

является решением задачи (7.2). С другой стороны, если $\varphi(z)$ – решение задачи (7.2), то, очевидно, что $\varphi_0(z) = \varphi(z)$ и $\psi_0(z) = \varphi(z)$ является решением задачи (7.3). Следовательно, общее решение задачи (1.1) определяется формулой (7.4),

где $(\varphi_0(z), \psi_0(z))$ – общее решение задачи (7.3). Таким образом, задачу (1.1) всегда можно свести к задаче (7.1). Обратное не всегда верно. Следовательно, задачу (7.1) можно назвать обобщением задачи (1.1).

Нашей основной целью является сведение задачи (7.1) к интегральному уравнению Фредгольма, которое имеет единственное решение в некоторой системе алгебраических уравнений. Сначала рассмотрим задачу (7.1) в каноническом виде :

$$\overline{\varphi_1(z)} = z^n \gamma_j \psi_1(z) + g_0(z), \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 0, 1, .., m, \tag{7.5}$$

где $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1, ..., \gamma_m$ – некоторые отличные от нуля постоянные, n – индекс функции $a(z)$ на Γ и $g_0(z) \in H(\Gamma)$, а $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ – искомые аналитические в области D функции. Для того, чтобы показать, что задача (7.1) всегда сводится к задаче (7.5), мы рассмотрим следующую видоизменённую задачу :

$$\overline{\varphi_0(z)} = \psi_0(z) + f_0(z), \quad z \in \Gamma_0, \tag{7.6}$$

$$\overline{\varphi_0(z)} = \psi_0(z) + f_0(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 1, ..., m, \tag{7.7}$$

где $f_0(z) \in H(\Gamma)$ - заданная функция, $\alpha_1, ..., \alpha_m$ суть комплексные постоянные. Здесь решением является вектор $(\varphi_0(z), \psi_0(z), \alpha_1, ..., \alpha_m)$, где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – аналитические в D функции.

При $f_0 \equiv 0$ задача (7.6), (7.7) называется однородной.

Лемма 7.1. Неоднородная задача (7.6), (7.7) всегда имеет решение. Общее решение соответствующей однородной задачи имеет вид $\varphi = \bar{c}$, $\psi = c$, $\alpha_j = 0$, $j = 1, .., m$, где c – произвольная постоянная.

Доказательство : Выделяя действительные и мнимые части (7.6) и (7.7), получаем

$$\mathrm{Re}\Phi_1(z) = f_1(z), \quad \mathrm{Re}\Phi_2(z) = f_2(z), \quad z \in \Gamma_1,$$

$$\mathrm{Re}\Phi_1(z) = f_1(z) + \mathrm{Re}\,\alpha_j, \quad \mathrm{Re}\Phi_2(z) = f_2(z) + \mathrm{Im}\,\alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 1, ..., m,$$

где $f_1(z) = \mathrm{Re}\, f_0(z)$, $f_2(z) = \mathrm{Im}\, f_0(z)$, $\Phi_1(z) = \varphi_0(z) - \psi_0(z)$, $\Phi_2(z) = -i(\varphi_0(z) + \psi_0(z))$.

Следовательно, задача (7.6), (7.7) сводится к видоизменённой задаче (2.32), (2.33), а утверждение следует из (2.35). Лемма 7.1 доказана.

Не ограничивая общности, граничное условие (7.1) можно записать в виде

$$\overline{\varphi(z)} = a_0(z)\, z^n\, \psi(z) + g_0(z), \tag{7.8}$$

где $a_0(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$, индекс функции $a_0(z)$ на каждом контуре Γ_j равен нулю, а n – индекс функции $a(z)$ на Γ.

Пусть $(\varphi_0(z), \psi_0(z), \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – частное решение задачи (7.6), (7.7) для

$$f_0(z) = \ln a_0(z). \tag{7.9}$$

Здесь под $\ln a_0(z)$ понимается непрерывная ветвь на Γ. Так как $a_0(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$ и индекс функции $a_0(z)$ на каждом контуре Γ_j равен нулю, то такая непрерывная ветвь существует. Из (7.6), (7.7) и (7.9) имеем

$$\exp\left(\overline{\varphi_0(z)}\right) = a_0(z)\,\gamma_j \exp\left(\psi_0(z)\right), \quad z \in \Gamma, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{7.10}$$

где $\gamma_0 = 1$, $\gamma_j = e^{\alpha_j}$.

Имея в виду (7.10), граничное условие (7.8) можно записать в виде (7.5) :

$$\overline{\varphi_1(z)} = \gamma_j\, z^n\, \psi_1(z) + g_1(z), \quad z \in \Gamma,$$

где $\varphi_1(z) = \varphi(z)\, \exp(-\varphi_0(z))$,

$$\psi_1(z) = \psi(z)\, \exp(-\psi_0(z)), \quad g_1(z) = g_0(z)\, \exp\left(-\overline{\varphi_0(z)}\right).$$

Таким образом, задачу (7.1) свели к аналогичной задаче более частного вида (7.5).

Лемма 7.2. Пусть $\varphi_0(z)$ аналитична в открытом круге $|z - z_0| < R$, а $\psi_0(z)$ аналитична вне этого круга. Пусть $\psi_0(\infty) = 0$ и $\varphi_0'(z)$, $\psi_0'(z)$ непрерывно продолжаются до окружности $|z - z_0| = R$. Тогда

$$\int_{|z-z_0|=R} \overline{\varphi_0(z)}\, \psi'(z)\, dz = 0, \quad \int_{|z-z_0|=R} \overline{\psi_0(z)}\, \varphi'(z)\, dz = 0. \tag{7.11}$$

Доказательство : Разлагая в ряд Тейлора функцию $\varphi_0(z)$ в круге $|z - z_0| < R$ и в ряд Лорана функцию $\psi_0(z)$ вне этого круга и подставляя в левые части (7.11), доказываем равенство (7.11). Лемма 7.2 доказана.

Рассмотрим следующую видоизменённую задачу : найти в области D аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\overline{\varphi(z)} = \psi(z) + g(z), \quad z \in \Gamma_0, \tag{7.12}$$

$$\overline{\varphi(z)} = \gamma_1\, \psi(z) + g(z), \quad z \in \Gamma_1, \tag{7.13}$$

$$\overline{\varphi(z)} = \gamma_j\, \psi(z) + g(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 2, \ldots, m, \tag{7.14}$$

где $g(z)$ – заданная функция из класса $H(\Gamma)$, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ – заданные, отличные от нуля постоянные, $\gamma_1 \neq 1$.

Задачу (7.12) — (7.14) при $g \equiv 0$ будем называть однородной.

Теорема 7.1. Задача (7.12) — (7.14) имеет единственное решение.

Доказательство : Не ограничивая общности, мы докажем единственность решения этой задачи для случая, когда контуры $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ являются окружностями. Пусть $(\varphi(z), \psi(z), a_2, \ldots, a_m)$ является решением однородной задачи (7.12) — (7.14). Докажем, что $\varphi(z) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$, $a_j = 0$ $(j = 2, \ldots, m)$. Для этого рассмотрим функцию

$$u(z) = \psi(z) + c_0 \overline{\varphi(z)}, \tag{7.15}$$

где $c_0 > 0$ мы выберем ниже. Ясно, что в области D имеет место (5.1). По формуле Грина (см. [4], стр. 309) имеем

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(z)}{\partial N} \overline{u(z)}\, ds - \iint_D \left(\left| \frac{\partial u(z)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u(z)}{\partial y} \right|^2 \right) dx\, dy = 0, \tag{7.16}$$

где N – внешняя нормаль к границе Γ в точке $z \in \Gamma$, ds – метр длины на Γ.

Из (7.15) следует

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial N} + c_0 \overline{\varphi'(z)} \frac{\partial \bar{z}}{\partial N} = -i \frac{\partial z}{\partial s} \psi'(z) + c_0 i \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \overline{\varphi'(z)}, \tag{7.17}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Из граничных условий (7.12) — (7.14) при $g \equiv 0$ имеем

$$\overline{\varphi(z)} = \gamma_j \psi(z) + \alpha_j, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{7.18}$$

$$\overline{\varphi'(z)} \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} = \gamma_j \psi'(z) \frac{\partial z}{\partial s}, \quad z \in \Gamma_j, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{7.19}$$

где $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\gamma_0 = 1$. Из (7.17) — (7.19) получаем $\overline{u(z)} = \overline{\psi(z)}\,(c_0 \bar{\gamma}_0 - 1) + c_0 \bar{\alpha}_j$,

$$\frac{\partial u(z)}{\partial N} = i\,(c_0 \gamma_0 - 1) \frac{\partial z}{\partial s} \psi'(z), \quad z \in \Gamma, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Следовательно

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(z)}{\partial N} \overline{u(z)}\, ds = i \sum_{j=0}^{m} (c_0 \gamma_j - 1)(c_0 \bar{\gamma}_j + 1) \int_{\Gamma_j} \overline{\psi(z)}\, \psi'(z)\, dz. \tag{7.20}$$

Представим функцию $\psi(z)$ в виде

$$\psi(z) = \psi_0(z) + \ldots + \psi_m(z), \tag{7.21}$$

где $\psi_0(z)$ аналитична в области D_0^+, а $\psi_1(z), \ldots, \psi_m(z)$ аналитичны в $D_1^-, \ldots, D_m^-$ (см. §2), соответственно, и $\psi_j(\infty) = 0$. Подставляя $\psi(z)$ из (7.21) в (7.20) и используя Лемму 7.2 и формулу Грина ([2], стр. 261), получим

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(z)}{\partial N} \overline{u(z)}\, ds = i \sum_{j=0}^{m} (c_0 \gamma_j - 1)(c_0 \bar{\gamma}_j + 1) \int_{\Gamma_j} \overline{\psi_j(z)}\, \psi_j'(z)\, dz, \tag{7.22}$$

$$\int_{\Gamma_j} \overline{\psi_0(z)}\,\psi_0'(z)\,dz = 2i\int_{D_0^+} |\psi_0'(z)|^2\,dx\,dy,$$
$$\int_{\Gamma_j} \overline{\psi_j(z)}\,\psi_j'(z)\,dz = 2i\int_{D_j^-} |\psi_j'(z)|^2\,dx\,dy. \tag{7.23}$$

Выберем положительную постоянную c_0, удовлетворяющую условию

$$c_0|\gamma_j| > 1, \qquad j = 0, \ldots, m. \tag{7.24}$$

Из (7.22) — (7.24) следует, что

$$\mathrm{Re}\int_\Gamma \frac{\partial u(z)}{\partial N}\overline{u(z)}\,ds \le 0. \tag{7.25}$$

Выделив в (7.16) действительные и мнимые части и используя неравенство (7.25), получаем

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \le 0. \tag{7.26}$$

Неравенство (7.26) возможно только при $u = \mathrm{const}$. Используя (7.15) получаем

$$\varphi(z) = c_1, \qquad \psi(z) = c_2, \tag{7.27}$$

где c_1 и c_2 – постоянные. Из (7.12) — (7.14) и (7.27) следует, что в однородном случае имеем $\varphi(z) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 2, \ldots, m$. Таким образом, единственность решения доказана.

Теперь докажем существование решения задачи (7.12) — (7.14). Будем искать решение задачи (7.12) — (7.14) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z} + \int_{\Gamma_1} \overline{f(t)}\,ds, \tag{7.28}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m}\int_{\Gamma_j} \frac{f(t)\,dt}{\gamma_j\,(t-z)}, \tag{7.29}$$

$$\alpha_j = \int_{\Gamma_j} f(t)\,ds. \tag{7.30}$$

где $f(t)$ – искомая функция из класса $H(\Gamma)$.

Аналогично (4.7) можно доказать, что если $\varphi(z) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$, $\alpha_j = 0$, $j = 2, \ldots, m$, то $f(t) \equiv 0$.

Подставляя $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и α_j, $j = 2, \ldots, m$ из (7.28) – (7.30) в (7.12) — (7.14), получаем интегральное уравнение Фредгольма вида (2.11). Из единственности решения задачи (7.12) — (7.14) и (7.28) – (7.30) следует, что соответствующее уравнение Фредгольма имеет единственное решение. Теорема 7.1 доказана.

Можно показать, что задача (7.5) сводится к задачам (7.6) – (7.7) и (7.12) – (7.14), т.е. к интегральным уравнениям Фредгольма, которые имеют единственные решения.

ABSTRACT. The paper studies Riemann–Hilbert and one–sided Hilbert problems for some classes of analytic functions. The aim of the paper is to reduce both problems to Fredholm equations. In the case of Riemann–Hilbert problem the corresponding Fredholm equation has unique solution. Some results for the deficiency numbers are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений и Некоторые Граничные Задачи, Гостехиздат, Москва, 1950.
3. Н. П. Векуа, Обобщённые Аналитические Функции, Москва, 1959.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения Математической Физики. Москва, Наука, 1966.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Москва, Наука. 1973.
6. Б. В. Хведелидзе, "О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области", Доклады АН Груз. ССР, том II. № 7, 10, стр. 571 — 578, 1991.
7. Д. А. Квеселава. "Некоторые граничные задачи теории функций". Труды Тбил. Инст. Матем., том 16, стр. 39 – 90, 1948.

22 декабря 1999

Армянский государственный
инженерный университет

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 6, 2000

В статье показано как задачу Римана–Гильберта для неправильных эллиптических уравнений можно свести к задаче Дирихле для правильных эллиптических уравнений. Доказывается однозначная разрешимость задачи Дирихле для правильных эллиптических уравнений второго порядка в многосвязных областях.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – $(m+1)$-связная область на плоскости, ограниченная гладкими контурами Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Предположим, что кривая Γ_0 охватывает все остальные контуры $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, и область D содержит начало координат. Введём обозначение $\Gamma = \bigcup_{k=0}^{m} \Gamma_k$.

В работе рассматриваются краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений вида

$$Lu(z) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \in D, \tag{1.1}$$

где A, B, C – комплексные постоянные, $C \neq 0$ и $u = u(z)$ – искомая комплекснозначная функция. Уравнение (1.1) называется **эллиптическим**, если $C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0 \tag{1.2}$$

не имеет действительных корней. Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения (1.2). Уравнение (1.1) называется **правильно эллиптическим**, если $\operatorname{Im}\lambda_1 \cdot \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, и **неправильно эллиптическим**, если $\operatorname{Im}\lambda_1 \cdot \operatorname{Im}\lambda_2 > 0$.

Как показано в [1], стр. 183, в односвязных областях задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения (1.1) однозначно разрешима (решение существует и единственно). Напомним, что граничное условие для задачи Дирихле берётся в виде

$$u(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где $f(z)$ – заданная непрерывная функция на Γ.

В монографии [2] (стр. 88) на примерах показано, что задача Дирихле для неправильного эллиптического уравнения (1.1) не является нормально разрешимой. В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ соответствующая однородная задача Дирихле в любом круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Поэтому для таких уравнений рассматриваются другие краевые задачи, в том числе задача Римана–Гильберта (см. [3]). Здесь мы граничные условия задачи Римана–Гильберта берём в виде

$$\operatorname{Re} u(z) = f_0(z), \qquad \operatorname{Re} \frac{\partial u(z)}{\partial N} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.4}$$

где $f_0(z)$ и $f_1(z)$ – вещественнозначные функции на Γ, N – внутренняя нормаль к Γ в точке $z \in \Gamma$.

Пусть s – дуговая абсцисса, соответствующая точке $z \in \Gamma$. Предполагается, что функции $f(z)$, $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\frac{df(z)}{ds}$ и $\frac{df_0(z)}{ds}$ удовлетворяют условию Гёльдера на Γ (см. [4], стр. 20). Мы ищем решения, которые дважды непрерывно дифференцируемы в области D, а первые производные непрерывны в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Задачи (1.1), (1.3) и (1.1), (1.4) при $f(z) = f_0(z) = f_1(z) \equiv 0$ называются **однородными**. Как показано в [3] (стр. 176), в односвязных областях неоднородная задача (1.1), (1.4) всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет четыре линейно независимых решения (над полем действительных чисел). Аналогично можно показать, что в многосвязных областях однородная задача (1.1), (1.4) также имеет ровно четыре линейно независимых решения. Эти решения не зависят от области и могут быть построены в явном виде в терминах коэффициентов уравнения (1.1) (см. [3], Теорема 6.6). В частности, для $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ этими линейно независимыми решениями являются i, ix, iy и $i(x^2 + y^2)$.

В этой статье рассматриваются краевые задачи (1.1), (1.3) и (1.1), (1.4) в многосвязных областях. Основная трудность связана с исследованием задачи Римана–Гильберта для аналитических функций в многосвязных областях (см.

[4], стр. 174 и [5], стр. 162). Для того, чтобы сформулировать основной результат работы, рассмотрим также следующую задачу Дирихле

$$\begin{aligned} &\overline{L}LW = 0, \quad z \in D, \\ &W(z) = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \\ &\frac{\partial W(z)}{\partial N} = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где L - дифференциальный оператор из (1.1), $\overline{L}$ - тот же оператор L с комплексносопряжёнными коэффициентами. $f_0(z)$ и $f_1(z)$ – правые части условий (1.4). Отметим, что первое уравнение в (1.5) является эллиптическим уравнением с действительными коэффициентами, в которое входят только производные четвёртого порядка. Решение задачи (1.5) будем считать вещественнозначным. Как доказано в [2], стр. 114, задача (1.5) в многосвязных областях однозначно разрешима и сводится к интегральному уравнению Фредгольма.

В данной работе получены следующие результаты.

Теорема 1. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения (1.1) однозначно разрешима.

Теорема 2. Однородная задача (1.1), (1.4) для неправильно эллиптического уравнения (1.1) имеет четыре линейно независимых решения, а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$ удовлетворяют $4m$ линейно независимым условиям вида

$$\int_\Gamma f_0(t)\psi_{0k}(t)\,ds + \int_\Gamma f_1(t)\psi_{1k}(t)\,ds = 0. \quad k = 1, \ldots, 4m, \tag{1.6}$$

где $\psi_{0k}(t)$, $\psi_{1k}(t)$ – некоторые непрерывные, вещественнозначные функции, не зависящие от $f_0(z)$ и $f_1(z)$.

Ниже мы сводим задачу Дирихле для правильно эллиптических уравнений (1.1) к интегральному уравнению Фредгольма, которое имеет единственное решение. Решения задачи (1.1), (1.4) для неправильно эллиптических уравнений и условия разрешимости (1.6) запишутся в явном виде через решения задачи (1.5).

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1) В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\lambda_1 = i$ (в противном случае делаем замену переменной $x + \lambda_1 y = \xi + i\eta$). Тогда уравнение (1.1) можно

записать в виде

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} - i\frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{2.1}$$

где

$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.2}$$

Пусть уравнение (1.1) – правильно эллиптическое, т.е. $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$. Как показано в [1], стр. 134, из (2.1) следует, что $V_1(z)$ – произвольная аналитическая функция в области D. Следовательно

$$V_1(z) = \varphi_0'(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}, \tag{2.3}$$

где $\varphi_0(z)$ – аналитическая функция в области D, $A_1, ..., A_m$ – постоянные, а $z_1, ..., z_m$ – фиксированные точки, охваченные контурами $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$, соответственно. Из (2.2) и (2.3) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_0'(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}. \tag{2.4}$$

Легко проверить, что при $z_k = x_k + iy_k$ функция

$$u_0(z) = \frac{1}{1 - \lambda_2 i} \left(\varphi_0(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln[(z - z_k)(x + \lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k)] \right) \tag{2.5}$$

является частным решением уравнения (2.4). Общее решение $u_1(z)$ однородного уравнения (2.4) (при $\varphi_0(z) \equiv 0$, $A_k = 0$, $k = 1, ..., m$) определяется формулой (см. [1], стр. 134)

$$u_1(z) = \psi_0(x + \lambda_2 y), \quad z = x + iy \in D. \tag{2.6}$$

где $\psi_0(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция, определённая на образе G области D при отображении

$$\zeta = x + \lambda_2 y, \quad z = x + iy \in D, \quad \zeta = \xi + i\eta \in G. \tag{2.6'}$$

Из (2.5) и (2.6) получаем, что общее решение правильно эллиптического уравнения (1.1) определяется формулой

$$u(z) = \varphi(z) - \psi(x + \lambda_2 y) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln[(z - z_k)(x + \lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k)], \tag{2.7}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(\zeta)$ – произвольные аналитические функции, а $A_1, ..., A_m$ – произвольные постоянные. В (2.7) берётся некоторая непрерывная в области D ветвь логарифма. Подставляя $u(z) \equiv 0$ в (2.7), получаем

$$\varphi(z) = \psi(x + \lambda_2 y) = C, \quad A_k = 0, \quad k = 1, ..., m. \tag{2.8}$$

Не ограничивая общности предположим, что $\varphi(0) = 0$. Тогда из представления (2.7) функции $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и постоянные $A_1, \dots A_m$ определяются через $u(z)$ единственным образом.

Аналогично, если $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$ и $\lambda_2 \neq i$, то общее решение уравнения (1.1) задаётся формулой

$$u(z) = \varphi(z) - \psi(x + \lambda_2 y) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln \frac{z - z_k}{x + \lambda_2 y - x_k - \lambda_2 y_k}, \qquad (2.9)$$

где $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и $A_1, \dots, A_m$ как и в (2.7). При условии $\varphi(0) = 0$, функции $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и постоянные $A_1, \dots, A_m$ определяются единственным образом.

При $\lambda_2 = i$ общее решение уравнение (1.1) задаётся формулой

$$u(z) = \varphi(z) + \overline{z}\psi(z), \quad \overline{z} = x - iy, \qquad (2.10)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные аналитические функции в области D, определённые единственным образом (без дополнительного условия $\varphi(0) = 0$).

Лемма 2.1. Однородная задача (1.1), (1.3) для правильно эллиптического уравнения имеет только нулевое решение.

Доказательство : Пусть λ_1 и λ_2 – корня характеристического уравнения (1.2) и $|\operatorname{Im} \lambda_1| \leq |\operatorname{Im} \lambda_2|$. Не умаляя общности мы можем предположить, что

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \geq 1.$$

где α и β – вещественные постоянные. Этого всегда можно добиться при помощи подстановки $\xi + i\eta = x + \lambda_1 y$. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи (1.1), (1.3). По формуле Грина имеем

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial V_1(z)}{\partial x} - i \frac{\partial V_1(z)}{\partial y} \right) \overline{u(z)}\, dxdy = - \iint\limits_D V_1(z) \left(\frac{\partial \overline{u(z)}}{\partial x} - i \frac{\partial \overline{u(z)}}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (2.11)$$

где V_1 определяется по (2.2), а $\overline{u(z)}$ – комплексно сопряжённая к $u(z)$. Из (2.1) и (2.11) имеем

$$\iint\limits_D V_1(z) \overline{V_2(z)}\, dxdy = 0, \qquad (2.12)$$

где

$$V_2(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} + i \frac{\partial u(z)}{\partial y}. \qquad (2.13)$$

Продолжим функцию $u(x,y)$ вне области D, полагая $u(x,y)=0$. Тогда $V_1(z)$ и $V_2(z)$ также нули вне области D. Известно, что

$$\iint\limits_D V_1(z)\overline{V_2(z)}\,dxdy=\iint\limits_E W_1(z)\overline{W_2(z)}\,dxdy. \tag{2.14}$$

где E – плоскость (x,y), а $W_j(z)$ – преобразование Фурье функции $V_j(z)$:

$$W_j(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D V_j(\xi,\eta)\exp[i(x\xi+y\eta)]\,d\xi d\eta,\quad j=1,2. \tag{2.15}$$

Так как $u(z)=0$ на Γ, из (2.2), (2.13) и (2.15) получаем

$$W_1(z)=-i(x-\alpha y+i\beta y)w(z),\quad W_2(z)=-i(x+iy)w(z), \tag{2.16}$$

где $w(z)$ – преобразование Фурье функции $u(z)$. Из (2.12), (2.14) и (2.16) получаем, что

$$\iint\limits_E (x-\alpha y+i\beta y)(x-iy)|w(z)|^2\,dx\,dy=0. \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_E (x^2-\alpha xy+\beta y^2)|w(z)|^2dxdy=0, \tag{2.18}$$

$$\iint\limits_E [(\beta-1)xy+\alpha y^2)]|w(z)|^2dxdy=0. \tag{2.19}$$

Подставляя $\alpha=0$ в (2.18), получаем $w(z)\equiv 0$. Пусть $\alpha\neq 0$ и $\beta=1$, тогда из (2.19) следует, что $w(z)\equiv 0$. Пусть теперь $\alpha\neq 0$ и $\beta>1$, тогда из (2.18) и (2.19) получаем

$$\iint\limits_E \left(x^2+\frac{\alpha^2y^2}{\beta-1}+\beta y^2\right)|w(z)|^2dxdy=0,$$

т.е. $w(z)\equiv 0$. Следовательно, во всех возможных случаях имеем $w(z)\equiv 0$. Лемма 2.1 доказана.

Пусть область D и контуры $\Gamma_0,\Gamma_1\cdots,\Gamma_m$ определены как и в §1. Пусть D_j – область ограниченная Γ_j, а D_j^- – дополнение замкнутой области $D_j\cup\Gamma_j$, $j=0,1,...,m$ до полной комплексной плоскости. Пусть $\varphi_0(z)$ – аналитическая функция в области D_0, а $\varphi_j(z)$, $j=1,...,m$ аналитичны в областях D_j^- и удовлетворяют условиям

$$\varphi_j(\infty)=\lim_{|z|\to\infty}\varphi_j(z)=0,\quad j=1,...,m.$$

Предполагается также, что функции непрерывны в соответствующих замкнутых областях.

Лемма 2.2. Если

$$\varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \cdots + \varphi_m(z) = 0, \quad z \in D, \tag{2.20}$$

то $\varphi_j(z) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство : Из (2.20) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \cdots + \varphi_m(t)}{t - z}\, dt = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.21}$$

Применяя формулу Коши и теорему Коши ([6], стр. 45, 54), получаем утверждение леммы.

§3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе задача (1.1), (1.3) сводится к интегральному уравнению Фредгольма и доказывается Теорема 1. Пусть $\lambda_1 = i$ и λ_2 – корни характеристического уравнения (1.2) и $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$. Пусть $\alpha(z) = x + \lambda_2 y$, а $z = \beta(\zeta)$ – обратное к отображению (2.6') :

$$\beta(\zeta) = \xi + \frac{i - a}{b}\eta, \quad a = \operatorname{Re} \lambda_2, \quad b = \operatorname{Im} \lambda_2, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Пусть G – образ области D при отображении (2.6'), а L – граница области G. Ясно, что G – $(m+1)$–связная область и $L = \bigcup_{k=0}^{m} L_j$, где L_j – образ контура Γ_j при отображении (2.6'), $j = 1, \ldots, m$.

Решение задачи (1.1), (1.3) мы ищем в виде (2.7), где

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - z}\, dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t}\, dt, \quad z \in D, \tag{3.1}$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{\pi i} \int_{L} \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - \zeta}\, d\tau, \quad \zeta \in G, \tag{3.2}$$

$$A_j = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{g(t)}{t - z_j}\, dt, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.3}$$

В (3.1) – (3.3) $z_1, \ldots, z_m$ – фиксированные точки, входящие в представление (2.7), а $g(t)$ – искомая функция на Γ, удовлетворяющая условию Гёльдера. Отметим также, что в (3.1) – (3.3) интегрирование ведётся по положительному направлению (которое оставляет область D слева).

Пусть $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$. Согласно формуле Сохоцкого–Племеля (см. [4], стр. 66), граничные значения $\varphi(t_0)$ и $\psi(\xi_0 + \lambda_2\eta_0)$ интегралов типа Коши (3.1) и (3.2) изнутри области D определяются при $z \to t_0$, $z \in D$ по формулам

$$\varphi(t_0) = g(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - t_0}\, dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t}\, dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.4}$$

$$\psi(\zeta_0) = -g(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - \zeta_0}\,d\tau, \quad \zeta_0 = \xi_0 + \lambda_2\eta_0. \tag{3.5}$$

В (3.4) и (3.5) сингулярные интегралы определяются по главному значению (см. [4], стр. 50). Делая в (3.5) замену переменной $\tau = \alpha(t)$, получаем

$$\psi(\zeta_0) = -g(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\,dt, \quad t_0 \in \Gamma \tag{3.6}$$

(заметим изменение направления обхода). Рассмотрим функцию

$$K_1(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}.$$

Как показано в [4], стр. 573, при $t, t_0 \in \Gamma$ имеем представление

$$K_1(t_0, t) = \frac{1}{|t - t_0|^\gamma}K_0(t_0, t), \quad 0 < \gamma < 1,$$

где $K_0(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдеру на Γ относительно t и t_0. Подставляя $u(z)$ из (2.7) в (1.3) и используя формулы (3.3), (3.4) и (3.6), получаем

$$g(t_0) = \int_\Gamma K(t_0, t)g(t)\,dt = f(t_0). \tag{3.7}$$

где $K = K_1 + K_2$ и $K_2(t_0, t)$ – некоторая вполне определенная, бесконечно дифференцируемая функция от t и t_0.

Таким образом, для определения функции $g(t)$ мы получаем интегральное уравнение Фредгольма. Для того, чтобы доказать, что это уравнение имеет единственное решение, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение.

Пусть $g(t)$ – решение однородного уравнения (3.7) (при $f(t) \equiv 0$). Тогда $u(z)$, определённая по (2.7) и (3.1) – (3.3), является решением однородной задачи (1.1), (1.3). Согласно Лемме 2.1 имеем $u(z) = 0$, $z \in D$. Отсюда и из (2.7) получаем (2.8). Подставляя $\varphi(z)$, $\psi(\zeta)$ и A_j из (3.1) – (3.3) в (2.8) и используя Лемму 2.2, получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t - z}\,dt - \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(t)}{t}\,dt = c, \quad z \in D_0, \tag{3.8}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - x - \lambda_3 y}\,d\tau = c, \quad z = x + iy \in D_0, \tag{3.9}$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{g(t)}{t - z}\,dt = 0, \quad z \in D_j^-, \tag{3.10}$$

$$\int_{L_j} \frac{g(\beta(\tau))}{\tau - x - \lambda_2 y}\,d\tau = 0, \quad z = x + iy \in D_j^-, \tag{3.11}$$

$$\int_{\Gamma_j} \frac{g(t)}{t - z_j}\, dt = 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{3.12}$$

Подставляя $z = 0$ в (3.8), получаем $c = 0$. Из (3.8) – (3.11) (см. [7] и [4], стр. 240) следует, что

$$g(t) = 0, \quad t \in \Gamma_0, \qquad g(t) = c_j, \quad t \in \Gamma_j, \quad j = 1, ..., m, \tag{3.13}$$

где $c_1, ..., c_m$ – некоторые постоянные. Из (3.12) и (3.13) получаем $c_1 = ... = c_m = 0$. Следовательно, однородное уравнение Фредгольма (3.7) имеет только тривиальное решение, а соответствующее неоднородное уравнение всегда разрешимо. Теорема 1.1 доказана.

§4. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе мы исследуем задачу (1.1), (1.4) для неправильно эллиптического уравнения (1.1) и доказываем Теорему 2. Для простоты предположим, что область D – двусвязная, т.е. $m = 1$ и $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения (1.2), удовлетворяющие условиям $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ – фиксированная точка, охваченная контуром Γ_1, а t_0, t_1 – фиксированные точки на контурах Γ_0 и Γ_1, соответственно. Пусть γ – непрерывная, гладкая кривая с концами t_0 и t_1 без самопересечений. Тогда область $D_\gamma = D \setminus \gamma$ является односвязной областью. Аналогично формуле (2.7) можно показать, что общее решение первого уравнения из (1.5) определяется формулой

$$W(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \operatorname{Re}\left[\varphi_1(x + \lambda_1 y) - \right.$$
$$\left. - \psi_1(x + \lambda_2 y) + \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=1}^{2} c_{kj}(x - x_0 + \lambda_j(y - y_0))^k \ln(x - x_0 + \lambda_j(y - y_0))\right], \tag{4.1}$$

где $x + iy \in D$, a_{jk} – произвольные вещественные постоянные, $\varphi_1(\zeta_1)$ и $\psi_1(\zeta_2)$ – произвольные аналитические функции относительно аргументов $\zeta_j = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие следующему условию :

$$\varphi_1^{(k)}(0) = 0, \quad \psi_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1. 2,$$

а c_{kj} – комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im}\,(c_{k1}\lambda_1^j + c_{k2}\lambda_2^j) = 0, \quad j = 0, .., k, \quad k = 0, 1, 2. \tag{4.2}$$

В (4.1) мы берём непрерывную в области D_γ ветвь логарифма. Условия (4.2) необходимы и достаточны, чтобы функция вида (4.1) была бы бесконечно дифференцируемой в области D.

Как было отмечено во Введении, задача (1.5) однозначно разрешима. Пусть $W(z)$ является решением этой задачи, которое представлено в виде (4.1), и пусть задача (1.1), (1.4) имеет решение $u(z)$. Согласно (2.9) действительная часть $u(z)$ представляется в виде

$$\operatorname{Re} u(z) = b_{00} + b_{10}x + b_{11}y + b_{20}x^2 + b_{21}xy + b_{22}y^2 + \tag{4.3}$$

$$+ \operatorname{Re}\left[\varphi_0(x+\lambda_1 y) - \psi_0(x+\lambda_2 y) + A\ln(x - x_0 + \lambda_1(y-y_0)) - A\ln(x - x_0 + \lambda_2(y-y_0))\right],$$

где $z = x + iy \in D$, b_{jk} – вещественные постоянные, A – комплексная постоянная, а $\varphi_0(\zeta_1)$ и $\psi_0(\zeta_2)$ суть аналитические функции относительно $\zeta_j = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие условиям $\varphi_0^{(k)}(0) = 0$, $\psi_0^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2$. Из представления (4.3) следует, что $\operatorname{Re} u(z)$ является решением первого уравнения в (1.5). Из (1.4) следует, что $\operatorname{Re} u(z)$ удовлетворяет граничным условиям (1.5). Из единственности решения задачи (1.5) следует, что

$$W(z) = \operatorname{Re} u(z). \tag{4.4}$$

Следовательно, если при заданных $f_0(z)$ и $f_1(z)$ решение задачи (1.1), (1.4) существует, то решение $W(z)$ задачи (1.5) представляется одновременно в виде (4.1) и (4.3). Из единственности этого представления следует, что

$$c_{01} = A, \quad c_{02} = -A, \quad c_{jk} = 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2. \tag{4.5}$$

Из (4.5) получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(c_{01} + c_{02}) = 0, \quad \operatorname{Re}(c_{11} + c_{12}) = 0, \\ &\operatorname{Re}(c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2) = 0, \quad \operatorname{Im}(c_{21}\lambda_1^2 + c_{22}\lambda_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Следовательно, условия (4.6) необходимы для разрешимости задачи (1.1), (1.4). Теперь докажем, что эти условия также достаточны. Предположим, что условия (4.6) выполнены. Тогда из (4.2) и (4.6) получаем уравнения (4.5) с постоянной A. Представим полином $a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2$ в виде

$$a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 = B_1(x + \lambda_1 y)^2 + B_2(x + \lambda_2 y)^2 + B_3(x + \overline{\lambda}_1 y)^2, \tag{4.7}$$

где B_j, $j = 1, 2, 3$ – постоянные, удовлетворяющие системе уравнений

$$B_1\lambda_1^k + B_2\lambda_2^k + B_3\overline{\lambda}_1^k = a_{2k}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{4.8}$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, то $\lambda_1 \neq \overline{\lambda}_1$, $\lambda_2 \neq \overline{\lambda}_1$, и система (4.8) однозначно разрешима. Так как a_{20}, a_{21} и a_{22} вещественны, то (4.7) можно переписать в виде

$$a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 = \operatorname{Re}\left[B_1(x + \lambda_1 y)^2 + B_4(x + \lambda_2 y)^2\right], \tag{4.9}$$

где $B_4 = B_2 + \overline{B}_3$. Из (4.1), (4.5) и (4.9) следует, что функция $W(z)$ представима в виде (4.4), где

$$u(z) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + B_1(x + \lambda_1 y)^2 + B_4(x + \lambda_2 y)^3 +$$
$$+\varphi_1(x + \lambda_1 y) - \psi_1(x + \lambda_2 y) + c_{01}\ln\frac{x - x_0 + \lambda_1(y - y_0)}{x - x_0 + \lambda_2(y - y_0)}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что $u(z)$ является решением уравнения (1.1). Из условий (1.5) и (4.4) получаем, что $u(z)$ удовлетворяет условиям (1.4). Следовательно, условия (4.6) достаточны для разрешимости задачи (1.1), (1.4). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $W(z)$ – решение задачи (1.5), представленное в виде (4.1). Тогда задача (1.1), (1.4) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.6), при этом частное решение этой задачи определяется формулой (4.10).

Таким образом, для окончательного решения поставленной задачи достаточно найти функции $\varphi_1(x + \lambda_1 y)$, $\psi_1(x + \lambda_2 y)$ и постоянные, входящие в представление (4.1) через решения $W(z)$ задачи (1.5). Для этого перепишем представление (4.1) в виде

$$W(z) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \frac{1}{2}\left(\omega(z) + \overline{\omega(z)}\right), \tag{4.11}$$

где $\omega(z)$ – функция в квадратных скобках в (4.1). Положим

$$W_1(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \overline{\lambda}_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \overline{\lambda}_2\frac{\partial}{\partial y}\right)W. \tag{4.12}$$

Подставляя $W(z)$ из (4.11) в (4.12), получаем

$$W_1(z) = B_0\varphi_1^{(3)}(x + \lambda_1 y) + \sum_{k=0}^{2}\frac{c_{1k}A_{1k}}{[x - x_0 + \lambda_1(y - y_0)]^{3-k}}, \tag{4.13}$$

где B_0 и A_{1k} – некоторые вполне определённые, отличные от нуля постоянные. Из (4.13) имеем

$$c_{1k}A_{1k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} W_1(z)(x+\lambda_1 y)^{2-k}\,d(x+\lambda_1 y), \quad k=0,1,2, \tag{4.14}$$

$$B_0\varphi_1(x+\lambda_1 y) = \frac{1}{2}\int_0^z (x+\lambda_1 y-\xi-\lambda_1\eta)^2\left(W_1(\zeta)-\sum_{k=0}^{2}\frac{c_{1k}A_{1k}}{\xi-x_0+\lambda_1(\eta-y_0)}\right)d\zeta, \tag{4.15}$$

причём $\zeta = \xi + i\eta$. В (4.15) интегрирование идёт от точки 0 до точки $z = x + iy \in D$ по кривой, которая целиком находится в области D. Равенства (4.14) обеспечивают однозначность функции $B_0\varphi_1(x+\lambda_1 y)$.

Аналогично, заменяя в формуле (4.12) λ_1 на λ_2 и λ_2 на λ_1, получим функцию ψ_1 и постоянные c_{2k}, $k=0,1,2$. Следовательно, в (4.11) мы можем считать функцию $\omega(z)$ как известную. Из (4.11) единственным образом определяются постоянные a_{jk}, $j,k=0,1,2$ через частные производные функций $W(z)$ и $\omega(z)$ до второго порядка в точке $z=0$.

Так как задача (1.5) однозначно разрешима, то из (4.14) следует, что постоянные c_{jk}, $j=1,2$, $k=0,1,2$ – линейные, ограниченные функционалы от $(f_0(t), f_1(t))$, и линейно независимые условия (4.6) можно переписать в виде (1.6). Обозначим через κ число линейно независимых решений задачи (1.1), (1.4), а через κ' – число линейно независимых условий разрешимости вида (1.6) для разрешимости соответствующей неоднородной задачи. Разность $\kappa - \kappa'$ называется индексом задачи (1.1), (1.4).

Используя представление (2.9), эту задачу можно свести к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций. Такие задачи исследованы в работах [2], стр. 162 и [8], стр. 1081. Из результатов этих работ следует, что

$$\kappa - \kappa' = 4 - 4m. \tag{4.16}$$

где $m+1$ – число связных компонент области D. Так как $\kappa = 4$ (см. Введение), из (4.16) имеем $\kappa' = 4m$. Следовательно, в двусвязных областях число линейно независимых условий разрешимости равно 4. Это означает, что условия (4.6) линейно независимы.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = i$. Общее решение первого уравнения из (1.5) в двусвязной области D представляется в виде (см. [8])

$$W(z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3(x^2+y^2) + \operatorname{Re}\,[\varphi_0(z) + \bar{z}\psi_0(z)] +$$

$$+[c_0+c_1(x-x_0)+c_2(y-y_0)+c_3((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)]\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2)], \quad (4.17)$$

где $z=x+iy$, a_k и c_k, $k=0,1,2,3$ – произвольные вещественные постоянные, а $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – произвольные аналитические функции в области D, удовлетворяющие условиям $\varphi_0(0)=\varphi_0'(0)=0$, $\psi_0(0)=\psi_0'(0)=0$. Причём все величины в правой части (4.17) определяются через $W(z)$ единственным образом.

Пусть $W(z)$ – решение задачи (1.5), представленное в виде (4.17). Тогда аналогично Теореме 3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. Если $\lambda_1=\lambda_2=i$, то задача (1.1), (1.4) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$c_k=0, \quad k=0,1,2,3, \quad (4.18)$$

при этом общее решение этой задачи определяется формулой

$$U(z)=\varphi_0(z)+\overline{z}\psi_0(z)+c_0+c_1x+c_2y+c_3(x^2+y^2)+id_0+id_1x+id_2y+id_3(x^2+y^2),$$

где d_k, $k=0,1,2,3$ – произвольные вещественные постоянные.

Рассуждая как и выше, можно доказать, что условия (4.18) линейно независимы.

ABSTRACT. The paper shows how Riemann–Hilbert problem for non-regular elliptic equations can be reduced to a Dirichlet problem for regular elliptic equations. Unique solvability of Dirichlet problem for second order regular elliptic equations in multiply connected domains is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
2. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
3. N. E. Tovmasian, Non-Regular Differential Equations and Calculations in Electromagnetic Field, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
4. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
5. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
6. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного. Москва, Наука, 1973.
7. Д. А. Квеселава, "Некоторые граничные задачи теории функций", Труды Тбил. Инст. Матем., том 16, стр. 39 – 90, 1948.
8. П. А. Солдатов, "Методы теории граничных задач на плоскости. Гладкий случай", Изв. АН СССР, серия матем., том 55, № 5, стр. 1070 – 1100, 1991.
9. И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Уравнений. Москва, ГосТехИздат. 1948.

21 сентября 2000

Армянский государственный
инженерный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35 НОМЕРА 1 — 6 2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

НОМЕР

Единственность обобщенного решения нелинейного дифференциального уравнения с вырождением
Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян 2

Квазиполиномы в подпространстве непрерывных функций
Г. В. Арутюнян 3

Функция собственных значений семейства операторов Штурма–Лиувилля
Т. Н. Арутюнян, Э. Р. Навасардян 5

Ненаследственные мономорфизмы в категориях групп над общими категориями
Г. Р. Асатрян 5

О проблеме пересечения Петре
А. Г. Багдасарян 3

О псевдодифференциальных операторах в пространствах типа Соболева
А. А. Давтян 2

Косоэрмитовые линейные пучки операторов: операторные узлы и характеристические функции
В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас 2

О подвижности топологических пространств
П. С. Геворкян 3

О единственности общих ортогональных рядов
Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян 5

О безусловной базисности общих систем Франклина
Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян 4

Асимптотически точные границы для минимаксного риска оценок линейных функционалов
М. С. Гиновян 3

Наилучшее квадратическое приближение дифференцируемых функций многочленами
А. Л. Григорян 5

Об одном универсальном ортогональном ряде
М. Г. Григорян 4

Об универсальных и квазиуниверсальных в $L^p[0,1]$ ортогональных рядах
М. Г. Григорян 4

Ортогональные разложения пространств соленоидальных вектор-функций
Г. Г. Джебеян 3

Решение интегральных уравнений в классе бесконечно дифференцируемых функций
В. А. Ирицян 1

Задача Дирихле для эллиптических уравнений высшего порядка
В. А. Ирицян 6

Сравнение мощности многочленов и характеристически простые многочлены
Г. Г. Казарян 3

Об уравнении ax - xb= c в комплексных банаховых алгебрах
М. И. Караханян 2

О некоторых алгоритмах и свойствах графов сравнения
С. Е. Маркосян 3

Спектральные функции канонических дифференциальных уравнений
Ф. Э. Мелик-Адамян 2

Преобразования гиббсовских состояний и применения
Мохамед Каррат 5

О единственности рядов по общей системе Франклина
М. П. Погосян 4

Сходимость почти всюду рядов по общей системе Франклина
М. П. Погосян 2

О суммируемости почти всюду ортогональных рядов
А. А. Талалян 4

Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений
Н. Е. Товмасян 6

Решение алгебраических уравнений с помощью контурных интегралов
Н. Е. Товмасян 1

Краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений
Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян 6

Некоторые функциональные уравнения со сдвигом в классе аналитических функций
Н. Е. Товмасян, В. А. Ирицян 1

Некоторые сингулярные функциональные уравнения в классе аналитических функций
Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян 1

Об одном методе решения трансцендентных уравнений
Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян 1

Задача Римана-Гильберта и односторонняя задача Гильберта в многосвязных областях
Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян 6

Задача Дирихле и Римана-Гильберта для эллиптических уравнений в многосвязных областях
Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян 6

О положительных решениях задачи Коши
Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева 1

Задача Римана-Гильберта со смещениями
Н. Е. Товмасян, Г. А. Мартиросян 1

Смешанные краевые задачи для уравнения Лапласа в многосвязных областях
Н. Е. Товмасян, А. А. Терзян 6

Сравнение длин выводов в системах Фреге и системах Фреге с правилом подстановки
А. А. Чубарян 5

О единственности решений параболических уравнений
Р. Л. Шахбагян 5

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35 НОМЕР 6 2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. IV

Сборник статей

Страницы

Предисловие редактора 6

Задача Дирихле для эллиптических уравнений высшего порядка
В. А. Ирицян 7

Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений
Н. Е. Товмасян 15

Краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений
Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян 24

Смешанные краевые задачи для уравнения Лапласа в многосвязных областях
Н. Е. Товмасян, А. А. Терзян 32

Задача Римана-Гильберта и односторонняя задача Гильберта в многосвязных областях
Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян 40

Задачи Дирихле и Римана-Гильберта для эллиптических уравнений в многосвязных областях
Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян 66

Содержание тома 35 79