ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Т. Н. Арутюнян, Э. Р. Навасардян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

Функция $\mu(\gamma)$ определена так, что её значение в любой положительной точке $\gamma = \alpha + \pi n$, $\alpha \in (0, \pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ совпадает с собственным значением $\mu_n(\alpha)$ задачи Штурма–Лиувилля $-y'' + q(x)\, y = \mu\, y$, $y(0) \cos\alpha + y'(0) \sin\alpha = 0$, $y'(\pi) = 0$, пронумерованным определённым образом. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторая функция обладала бы указанным свойством при действительном $q \in L^2[0, \pi]$.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы рассматриваем задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)\, y = \mu\, y, \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in C, \tag{1.1}$$

$$y(0)\, \cos\alpha + y'(0)\, \sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi], \tag{1.2}$$

$$y(\pi)\, \cos\beta + y'(\pi)\, \sin\beta = 0, \quad \beta \in [0, \pi), \tag{1.3}$$

где q – действительнозначная функция из $L^2[0, \pi]$ (будем писать $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$). Обозначим через $L(q, \alpha, \beta)$ самосопряжённый оператор, порождённый краевой задачей (1.1) – (1.3) (см. [1]). Известно (см. [1]), что спектр оператора $L(q, \alpha, \beta)$ дискретен и состоит из простых собственных значений, которые мы будем обозначать $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, подчёркивая зависимость μ_n от q, α и β. Имея целью изучить зависимость собственных значений от параметра α, зафиксируем $\beta = \pi/2$ и рассмотрим семейство операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$. Ниже мы также используем обозначения $\mu_n(q, \alpha, \pi/2) = \mu_n(\alpha)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Вначале пронумеруем собственные значения $\mu_n(\pi) = \mu_n(q, \pi, \pi/2)$ в порядке возрастания индекса

$$\mu_0(\pi) < \mu_1(\pi) < \ldots < \mu_n(\pi) < \mu_{n+1}(\pi) < \ldots \tag{1.4}$$

Так как собственные значения операторов $L(q,\pi,\pi/2)$ и $L(q,\alpha,\pi/2)$ при $\alpha \in (0,\pi)$ перемежаемы (см. §2), то собственные значения $L(q,\alpha,\pi/2)$ можно перенумеровать так, чтобы имели бы место неравенства

$$\mu_0(\alpha) < \mu_0(\pi) < \mu_1(\alpha) < \mu_1(\pi) < \ldots < \mu_{n-1}(\pi) < \mu_n(\alpha) < \mu_n(\pi) < \ldots. \tag{1.5}$$

Из (1.4) и (1.5) получаем однозначную нумерацию собственных значений оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$ для каждого $\alpha \in (0,\pi]$. Разобьём положительную полуось на отрезки $(0,\pi]$, $(\pi,2\pi]$,..., $(\pi n, \pi(n+1)]$,... и заметим, что каждое положительное число γ попадает в один из этих отрезков, т.е. $\gamma = \alpha + \pi n$, где $\alpha \in (0,\pi]$, $n = 0,1,2,\ldots$

Определение. Функция $\mu(\gamma)$, определённая на $(0,\infty)$ по формуле

$$\mu(\gamma) = \mu(\alpha + \pi n) = \mu_n(\alpha), \quad \alpha \in (0,\pi], \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где $\mu_n(\alpha)$ суть собственные значения оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$, пронумерованные согласно (1.4) и (1.5), называется функцией собственных значений (ФСЗ) семейства операторов $\{L(q,\alpha,\pi/2), \alpha \in (0,\pi]\}$.

Обозначим через $b_n(\alpha)$ решение трансцендентного уравнения

$$b_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(n+b_n(\alpha))^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} - \frac{1}{2}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что $-\frac{1}{2} \le b_n(\alpha) \le \frac{1}{2}$ для всех $n = 1,2,\ldots$. Следующие три теоремы являются основными результатами статьи.

Теорема 1. Функция собственных значений $\mu(\gamma)$ семейства операторов $\{L(q,\alpha,\pi/2), \alpha \in (0,\pi]\}$ обладает следующими свойствами :

a) $\mu(\gamma)$ – строго монотонно возрастающая функция, определенная на $(0,\infty)$. Область значений $\mu(\cdot)$ есть $(-\infty,\infty)$.

b) Для каждого $\gamma > 0$ существует комплексная окрестность V_γ, в которой определена аналитическая функция $\tilde{\mu}(\cdot)$, совпадающая с $\mu(\cdot)$ при действительных значениях аргумента.

c) Имеет место следующая асимптотическая формула :

$$\mu(\gamma) = \mu(\alpha + \pi n) = (n + b_n(\alpha))^2 + A + r_n(\alpha), \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{1.7}$$

где A – некоторая действительная постоянная, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n^2(\alpha) < \infty$ равномерно по всем $\alpha \in (0, \pi]$ (т.е. существуют постоянные a_n, не зависящие от α такие, что $|r_n(\alpha)| \le a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$).

d) Для любых α и α_1 таких, что $0 < \alpha < \alpha_1 \le \pi$ и любого $n = 0, 1, 2, ..$

$$\left.\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\pi n} = \frac{\mu(\alpha_1 + \pi n) - \mu(\alpha + \pi n)}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \ne n}}^{\infty} \frac{\mu(\alpha_1 + \pi k) - \mu(\alpha + \pi n)}{\mu(\alpha + \pi k) - \mu(\alpha + \pi n)}.$$

Теорема 2. Пусть функция $\mu(\cdot)$ обладает свойствами a)—d) Теоремы 1. Тогда существует единственная функция $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что $\mu(\cdot)$ есть функция собственных значений семейства операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$, т.е. для любого $\alpha \in (0, \pi]\}$ и $n = 0, 1, 2, ...$ значения $\mu(\alpha + \pi n)$ суть собственные значения операторов $L(q, \alpha, \pi/2)$, $\alpha \in (0, \pi]$, пронумерованные согласно (1.4) и (1.5).

Теоремы 1 и 2 можно объединить в следующей формулировке :

Теорема 3. Свойства a)—d) Теоремы 1 необходимы и достаточны, чтобы функция $\mu : (0, \infty) \mapsto (-\infty, \infty)$ была бы функцией собственных значений семейства операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$ с действительными $q \in L^2[0, \pi]$.

Отметим, что формула (1.7) даёт асимптотическое разложение для собственных значений $\mu_n(\alpha)$ задачи $L(q, \alpha, \pi/2)$ и по существу совпадает с классическими асимптотическими формулами (см. §2).

Зависимость собственных значений $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ от параметра β можно исследовать аналогично. Зависимость $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ одновременно от α, β и q изучена в серии работ [2–4].

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ФСЗ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА С НУЛЕВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Обозначим через $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \mu, \alpha) = \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \mu, \alpha) = -\cos \alpha$$

и

$$\psi(\pi, \mu) = 1, \quad \psi'(\pi, \mu) = 0,$$

соответственно. Для каждого $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\varphi'_x(x, \mu, \alpha)$ являются целыми функциями двух комплексных переменных μ и α, а $\psi(x, \mu)$ и $\psi'_x(x, \mu)$ – целые функции параметра μ (см. [5]). Собственные значения $\mu_n(q,\alpha,\pi/2) = \mu_n(\alpha)$ оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$ совпадают с нулями (относительно μ) целой функции

$$\chi(\alpha,\mu) = \psi(0,\mu)\cos\alpha + \psi'(0,\mu)\sin\alpha,$$

которую называют характеристической функцией оператора $L(q,\alpha,\pi/2)$.

Рассмотрим мероморфную по μ функцию

$$m_{\alpha,\gamma}(\mu) = \frac{\chi(\alpha,\mu)}{\chi(\gamma,\mu)} = \frac{\psi(0,\mu)\cos\alpha + \psi'(0,\mu)\sin\alpha}{\psi(0,\mu)\cos\gamma + \psi'(0,\mu)\sin\gamma}. \tag{2.1}$$

Очевидно, что нули этой функции совпадают с собственными значениями $\mu_n(\alpha)$ задачи $L(q,\alpha,\pi/2)$, а полюса с собственными значениями $\mu_n(\gamma)$ задачи $L(q,\gamma,\pi/2)$. Нетрудно доказать (см. [6]), что

$$\operatorname{Im}\{m_{\alpha,\gamma}(\mu)\} = \frac{\sin(\alpha-\gamma)\int_0^\pi |\psi(x,\mu)|^2\,dx}{|\psi(0,\mu)\cos\gamma + \psi'(0,\mu)\sin\gamma|^2}\operatorname{Im}\mu. \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Im}\{m_{\alpha,\gamma}(\mu)\} = 0$ при $\operatorname{Im}\mu = 0$. Таким образом, при $\sin(\alpha-\gamma) > 0$ мероморфная функция $m_{\alpha,\gamma}(\mu)$ переводит верхнюю полуплоскость в себя. Доказательство нижеследующей теоремы можно найти в [7].

Теорема 2.1. Для того чтобы мероморфная функция переводила бы верхнюю полуплоскость в себя, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$m(\gamma) = c\,\frac{\mu-a_0}{\mu-b_0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\mu}{a_k}\right)\left(1-\frac{\mu}{b_k}\right)^{-1},$$

где $c > 0$ и

$$b_k < a_k < b_{k+1}, \quad k = 0,1,2,\dots. \tag{2.3}$$

Если в (2.1) взять $m_{\pi,\alpha}(\mu)$, где $\alpha \in (0,\pi)$, то $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha > 0$, и из (2.2) следует, что к $m_{\pi,\alpha}(\mu)$ применима Теорема 2.1. В частности, из (2.3) следует, что нули и полюса функции $m_{\pi,\alpha}(\mu)$ перемежаются и имеют место неравенства (1.5). Если $0 < \alpha < \alpha_1 < \pi$, то поскольку $\sin(\alpha_1-\alpha) > 0$, Теорему 2.1 можно применить к $m_{\alpha_1,\alpha}(\mu)$. В этом случае перемежаемость нулей и полюсов функции $m_{\alpha_1,\alpha}(\mu)$ приводит к неравенствам

$$\mu_0(\alpha) < \mu_0(\alpha_1) < \mu_0(\pi) < \dots < \mu_n(\alpha) < \mu_n(\alpha_1) < \mu_n(\pi) < \mu_{n+1}(\alpha) < \dots, \tag{2.4}$$

из которых следует, что все собственные значения $\mu_n(\alpha)$, $n = 0,1,2,\dots$ – строго возрастающие функции на $(0,\pi]$. Отсюда и из Определения ФСЗ следует, что

ФСЗ $\mu(\gamma)$ есть строго монотонно возрастающая функция как на каждом из отрезков $(\pi k, \pi(k+1)]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, покрывающих всю полуось $(0, \infty)$, так и на всей полуоси $(0, \infty)$.

Докажем теперь, что ФСЗ $\mu(\gamma)$ есть аналитическая функция в каждой точке полуоси $(0, \infty)$. Для этого воспользуемся теоремой о неявной функции в следующей формулировке (см. [5]).

Теорема 2.2. Пусть $\gamma \in \mathbf{C}$, $\mu \in \mathbf{C}$ и $F(\mu, \gamma) : U \mapsto \mathbf{C}$ – аналитические функции в некоторой окрестности U точки (μ_0, γ_0), причём $\dfrac{\partial F(\mu_0, \gamma_0)}{\partial \mu} \neq 0$. Тогда равенство $F(\mu, \gamma) = F(\mu_0, \gamma_0)$ единственным образом определяет функцию $\mu = \mu(\gamma) : V \mapsto \mathbf{C}$, аналитическую в некоторой окрестности V точки γ_0 и такую, что при $\gamma \in V$, $(\mu(\gamma), \gamma) \in U$, $\mu(\gamma_0) = \mu_0$ и $F(\mu(\gamma), \gamma) \equiv F(\mu_0, \gamma_0)$ для всех $\gamma \in V$.

В качестве $F(\mu, \gamma)$ мы возьмём характеристическую функцию $F(\mu, \gamma) = \chi(\mu, \gamma) = \psi(0, \mu) \cos\gamma + \psi'(0, \mu) \sin\gamma$, которая является целой функцией двух комплексных переменных μ и γ. Пусть γ_0 – произвольное положительное число, которое мы представим в виде $\gamma_0 = \alpha_0 + \pi m$, где $\alpha_0 \in (0, \pi]$, а m – неотрицательное целое. Пусть $\mu_0 = \mu(\gamma_0) = \mu(\alpha_0 + \pi m) = \mu_m(\alpha_0)$ есть значение ФСЗ в точке γ_0. Тогда $\chi(\mu_0, \gamma_0) = 0$. В силу простоты собственных значений задачи $L(q, \gamma_0, \pi/2)$ производная $\dfrac{\partial \chi(\mu_0, \gamma_0)}{\partial \mu} \neq 0$. Отсюда, по теореме о неявной функции, следует, что существует некоторая комплексная окрестность V_{γ_0} действительной точки γ_0, на которой определена однозначная аналитическая функция $\widetilde{\mu}(\gamma)$ такая, что $\widetilde{\mu}(\gamma_0) = \mu_0$, $\chi(\widetilde{\mu}(\gamma), \gamma) = \chi(\mu_0, \gamma_0) = 0$ для всех $\gamma \in V_{\gamma_0}$. В частности, для действительных $\gamma \in V_{\gamma_0}$ имеем $\widetilde{\mu}(\gamma) = \mu(\gamma)$. Поскольку $\gamma_0 \in (0, \infty)$ – произвольная точка, то доказана аналитичность ФСЗ $\mu(\gamma)$ на всей полуоси $(0, \infty)$.

Для доказательства свойства d) заметим, что имеет место тождество (см. [1])

$$[\mu(\gamma + \Delta\gamma) - \mu(\gamma)] \int_0^\pi \varphi(x, \mu(\gamma + \Delta\gamma), \gamma + \Delta\gamma)\, \varphi(x, \mu(\gamma), \gamma)\, dx = \sin\Delta\gamma.$$

Разделив обе стороны на $\Delta\gamma$ и устремив $\Delta\gamma \to 0$, получаем

$$\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu(\gamma), \gamma)\, dx = 1,$$

или

$$\left.\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\gamma = \alpha + \pi n} = \frac{1}{\int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n(\alpha), \alpha)\, dx} = \frac{1}{a_n(\alpha)}, \qquad (2.5)$$

где $a(\alpha + \pi n \equiv a_n(\alpha) \equiv \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n(\alpha), \alpha)\, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются нормировочными постоянными оператора $L(q, \alpha, \pi/2)$. Заметим, что тождество (2.5) даёт независимое доказательство монотонной возрастаемости ФСЗ $\mu(\gamma)$. Кроме того, тождество (2.5) указывает на связь между ФСЗ $\mu(\gamma)$ и спектральными функциями $\rho_\alpha(\mu)$ (ступенчатые функции со скачками $1/a_n(\alpha)$ в точках $\mu = \mu_n(\alpha)$) каждого из операторов $L(q, \alpha, \pi/2)$, $\alpha \in (0, \pi]$.

Учитывая известное представление нормировочных постоянных через два спектра (см. [6]), из (2.5) получаем

$$\left.\frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=\alpha+\pi n} = \frac{1}{a_n(\alpha)} = \frac{\mu(\alpha+\pi n) - \mu(\alpha_1+\pi n)}{\sin(\alpha-\alpha_1)} \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{\infty} \frac{\mu(\alpha_1+\pi k) - \mu(\alpha+\pi n)}{\mu(\alpha+\pi k) - \mu(\alpha+\pi n)},$$

где α_1 – произвольная точка из $(0, \pi]$ такая, что $0 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi$.

Для доказательства асимптотической формулы (1.7) для собственных значений $\mu_n(q, \alpha, \pi/2)$, вначале изучим асимптотическое поведение собственных значений $\mu_n(0, \alpha, \pi/2)$ операторов $L(0, \alpha, \pi/2)$ (с нулевым потенциалом), порождённых краевыми задачами

$$\begin{cases} -y'' = \mu y, \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi] \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения задачи $L(0, \alpha, \pi/2)$ суть корни характеристического уравнения

$$\chi_0(\alpha, \mu) = \sqrt{\mu}\sin\pi\sqrt{\mu}\sin\alpha + \cos\pi\sqrt{\mu}\cos\alpha = 0. \tag{2.6}$$

При $\alpha = \pi$ уравнение (2.6) принимает вид $\cos\pi\sqrt{\mu} = 0$. Откуда следует, что $\mu_n(0, \pi, \pi/2) = (n + 1/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. При $\alpha = \pi/2$ получаем, что $\mu_n(0, \pi/2, \pi/2) = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Далее, обозначим $\mu = \lambda^2$ и запишем уравнение (2.6) в виде

$$\lambda\sin\lambda\pi\sin\alpha + \cos\lambda\pi\cos\alpha = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку левая часть уравнения (2.7) – чётная функция от λ и для $n \geq 1$ собственные значения $\mu_n(0, \alpha, \pi/2) \equiv \lambda_n^2(\alpha) \geq \mu_0(\pi) = 1/4 > 0$, то будем рассматривать только неотрицательные корни уравнения (2.7). Так как $\mu_n(0, \pi, \pi/2) = \mu_n(\pi) = (n + 1/2)^2$, то из перемежаемости собственных значений (см. (2.4)) следует, что строго возрастающая функция

$$\lambda(\gamma) \equiv \sqrt{\mu(\gamma)} = \sqrt{\mu(\alpha+\pi n)} = \sqrt{\mu_n(\alpha)} = \lambda_n(\alpha) \quad \text{для} \quad \alpha \in (0, \pi] \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяет неравенствам

$$n - \frac{1}{2} = \lambda_{n-1}(\pi) \leq \lambda_n(\alpha) \leq \lambda_n(\pi) = n + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому положим $\lambda_n(\alpha) = n + b_n(\alpha)$, где строго возрастающая функция $b_n(\alpha)$ должна обладать свойствами

$$b_n(0) = -\frac{1}{2}, \quad b_n(\pi/2) = 0, \quad b_n(\pi) = \frac{1}{2} \tag{2.8}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $(n + b_n(0))^2 = \lambda_n^2(0) = \mu_n(0) = \mu_{n-1}(\pi) = \mu(0, \pi n, \pi/2)$, определяют значения $\mu_n(0)$, $\lambda_n(0)$, $b_n(0)$ при $n \geq 1$. Более того, если определим $b_n(-\varepsilon) = b_{n-1}(\pi - \varepsilon) - 1$, $b_n(\pi + \varepsilon) = b_{n+1}(\varepsilon) + 1$, $(0 \leq \varepsilon < \pi/2)$, то точки 0 и π можно считать внутренними точками области определения функции $b_n(\alpha)$. Подставляя $\lambda = n + b_n(\alpha)$ в (2.7), получаем

$$(n + b_n(\alpha)) \sin \pi b_n(\alpha) \sin \alpha + \cos \pi b_n(\alpha) \cos \alpha = 0, \tag{2.9}$$

которые можно записать в виде

$$\left[\sqrt{(n + b_n(\alpha))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}\right] \cos(\pi b_n(\alpha) - \theta_n(\alpha)) = 0, \tag{2.10}$$

где

$$\theta_n(\alpha) = \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n + b_n(\alpha))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Из (2.10) и неравенства $-1/2 \leq b_n(\alpha) \leq 1/2$ получаем

$$b_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(n + b_n(\alpha))^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.11}$$

Из трансцендентного уравнения (2.11) следует, что $b_n(\alpha)$ является как строго возрастающей и ограниченной $-1/2 \leq b_n(\alpha) \leq 1/2$, так и удовлетворяющей свойству (2.8).

Продифференцировав (2.9) по α, получаем

$$b_n'(\alpha) = \frac{\cos \pi b_n(\alpha) \sin \alpha - (n + b_n(\alpha)) \sin \pi b_n(\alpha) \cos \alpha}{\sin \pi b_n(\alpha) \sin \alpha + (n + b_n(\alpha)) \pi \cos \pi b_n(\alpha) \sin \alpha - \pi \sin \pi b_n(\alpha) \cos \alpha},$$

в частности, получаем

$$b_n'(0) = \frac{1}{\pi}\left(n - \frac{1}{2}\right) = b_{n-1}'(\pi), \quad b_n'(\pi/2) = \frac{1}{\pi n}, \quad b_n'(\pi) = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right) = b_{n+1}'(0).$$

Отсюда видно, что если n возрастает, то производные стремятся к нулю в окрестности точки $\pi/2$, и они растут линейно по n в окрестностях 0 и π.

Заметим также, что при $\sin \alpha \neq 0$ из (2.9) следует

$$\tan \pi b_n(\alpha) = -\frac{\cot \alpha}{n + b_n(\alpha)} = -\frac{\cot \alpha}{n} + \frac{b_n(\alpha) \cot \alpha}{n(n + b_n(\alpha))} = -\frac{\cot \alpha}{n} + r_n(\alpha).$$

Если $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $(0 < \varepsilon < \pi/2)$, где $\cot\alpha$ равномерно ограничен, то имеем

$$r_n(\alpha) = \frac{b_n(\alpha)\cot\alpha}{n(n + b_n(\alpha))} = O(\frac{1}{n^2})$$

и из (2.11) получаем, что $b_n(\alpha) \to 0$ $(n \to \infty)$ равномерно по $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Поэтому для $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ имеем $\tan \pi b_n(\alpha) \sim \pi b_n(\alpha)$, а для достаточно больших $n = n(\varepsilon)$ можно записать

$$b_n(\alpha) = -\frac{1}{\pi n}\cot\alpha + O(\frac{1}{n^2}).$$

Таким образом, вне отрезка $(0, \pi]$, ФСЗ $\mu(\gamma) = \mu(0, \gamma, \pi/2)$ семейство операторов $\{L(0, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$ имеет вид $\mu(\alpha + \pi n) = (n + b_n(\alpha))^2$, $\alpha \in [0, \pi]$, $n = 1, 2, \ldots$. Это равносильно тому, что для любого α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$ имеет место асимптотическая формула

$$\mu_n(\alpha) = \mu(0, \alpha + \pi n, \pi/2) = n^2 - \frac{2}{\pi}\cot\alpha + O(\frac{1}{n}).$$

При $\alpha = 0$ имеем

$$\mu_n(0) = \mu(0, \pi n, \pi/2) = (n - \frac{1}{2})^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Функция $\mu(\gamma)$ растёт на отрезках $(\pi n - \varepsilon, \pi n + \varepsilon)$ и в точках $\gamma = \pi n$ имеем

$$\left.\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\right|_{\gamma = \pi n} = \frac{(2n+1)^2}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Используя операторы преобразования и асимптотический анализ собственных значений из [8] (см. также [1], [6]), получаем

$$\mu_n(q, \alpha, \pi/2) = \mu_n(0, \alpha, \pi/2) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n(q, \alpha, \pi/2),$$

где $|r_n(q, \alpha, \pi/2)| \le a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Это равносильно (1.7) с $A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt$. Оценку $|r_n(q, \alpha, \pi/2)| \le a_n$, где $a_n \ge 0$ не зависит от α, можно получить аналогично Лемме 1.4.3 из [8].

Таким образом, формула (1.7) является асимптотической формулой для собственных значений семейства операторов $\{L(q, \alpha, \pi/2), \alpha \in (0, \pi]\}$. При каждом фиксированном $\alpha \in (0, \pi]$ она совпадает с классическими асимптотическими формулами (см. [1], [6]) :

$$\mu_n(\alpha) = n^2 - \frac{2}{\pi}\cot\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 < \infty \tag{2.12}$$

при $\sin\alpha \neq 0$, и

$$\mu_n(\pi) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt + r_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 < \infty. \tag{2.13}$$

Асимптотическая формула (1.7) более предпочтительна : она позволяет учитывать аналитическую зависимость собственных значений от α. Например, $b_n(\alpha) \to 1/2$ при $\alpha \to \pi$, и из (1.7) получаем (2.13). Отметим, что классические асимптотические формулы игнорируют зависимость $\mu_n(\alpha)$ от α. Отметим, что из (2.12) предельным переходом при $\alpha \to \pi$, невозможно получить (2.13). Ясно, что область ФСЗ $\mu(0, \gamma, \pi/2)$ семейства операторов с нулевым потенциалом есть вся действительная ось. Тот же факт для ФСЗ $\mu(q, \gamma, \pi/2)$ можно доказать, используя то, что любое действительное число μ есть корень характеристического уравнения $\psi(0, \mu)\cos\alpha + \psi'(0, \mu)\sin\alpha = 0$: если $\psi(0, \mu) \neq 0$, то $\cot\alpha = \psi'(0, \mu)/\psi(0, \mu)$, если же $\psi(0, \mu) = 0$, то берём $\alpha = \pi$.

Заметим, что это утверждение можно доказать также исходя из общей теории расширений симметрических операторов (см. [10]). Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть α и α_1 - произвольные точки из $(0, \pi]$ такие, что $0 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi$. Рассмотрим последовательности $\mu_k = \mu(\alpha + \pi k)$, $\nu_k = \mu(\alpha_1 + \pi k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Так как согласно Свойству a) функция $\mu(\gamma)$ строго возрастает, то последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$ перемежаются

$$\mu_0 < \nu_0 < \mu_1 < \nu_1 < \ldots < \mu_n < \nu_n < \mu_{n+1} < \ldots$$

и согласно Свойству c) имеют асимптотики

$$\mu_k = (k + b_k(\alpha))^2 + A + r_k(\alpha), \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2(\alpha) < \infty, \tag{3.1}$$

$$\nu_k = (k + b_k(\alpha_1))^2 + A + r_k(\alpha_1), \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2(\alpha_1) < \infty. \tag{3.2}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для того, чтобы две последовательности вещественных чисел $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ были бы спектрами краевых задач $L(q, \alpha, \pi/2)$ и $L(q, \alpha_1, \pi/2)$ с вещественным потенциалом $q \in L^2[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы они перемежались и удовлетворяли асимптотическим формулам (3.1) и (3.2).

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 3.4.1 из [8] (см. также [8], гл. 3, §4, Задача 3), и поэтому опускается.

Из Теоремы 3.1 следует, что существует функция $q_1 \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ такая, что $\mu_k = \mu_k(q_1, \alpha, \pi/2)$, $\nu_k = \mu_k(q_1, \alpha_1, \pi/2)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Величины $a_n = a_n(q_1, \alpha, \pi/2)$, определённые равенствами

$$a_n = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha)}{\nu_n - \mu_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\nu_k - \mu_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

суть нормировочные постоянные задачи $L(q_1, \alpha, \pi/2)$, т.е. $a_n = \int\limits_0^\pi |\varphi(x, \mu_n, \alpha)|^2 dx$, где $\varphi(x, \mu_n(\alpha), \alpha)$ – решение уравнения $-\varphi'' + q_1(x)\,\varphi = \mu_n\,\varphi$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0, \mu_n, \alpha) = \sin\alpha$, $\varphi'(0, \mu_n, \alpha) = -\cos\alpha$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. [6]). В частности, при $\alpha_1 = \pi$, собственные значения $\mu_n(q_1, \pi, \pi/2) = \mu(\pi + \pi n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\mu_n(q_1, \alpha, \pi/2) = \mu(\alpha + \pi n)$ нумеруются согласно (1.4) и (1.5).

Если вместо α_1 рассмотреть любую другую точку α_2 такую, что $0 < \alpha < \alpha_2 \leq \pi$, то аналогично, последовательности $\mu_k = \mu(\alpha + \pi k)$ и $\xi_k = \mu(\alpha_2 + \pi k)$ перемежаются и для ξ_k имеет место асимптотическая формула

$$\xi_k = (k + b_k(\alpha_2))^2 + A + r_k(\alpha_2) \quad \text{где} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k^2(\alpha_2) < \infty.$$

Согласно Теореме 3.1 существует вещественный потенциал $q_2 \in L^2[0,\pi]$ такой, что $\mu_k = \mu_k(q_2, \alpha, \pi/2)$ и $\xi_k = \mu_k(q_2, \alpha_2, \pi/2)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При этом, величины $a_n(q_2, \alpha, \pi/2)$, определённые равенствами

$$a_n = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\xi_n - \mu_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\xi_k - \mu_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

являются нормировочными постоянными задачи $L(q_2, \alpha, \pi/2)$. В силу Свойства d) имеем $a_n(q_1, \alpha, \pi/2) = a_n(q_2, \alpha, \pi/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\mu_n(q_1, \alpha, \pi/2) = \mu_n(q_2, \alpha, \pi/2)$, $a_n(q_1, \alpha, \pi/2) = a_n(q_2, \alpha, \pi/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Применяя теорему В. А. Марченко о единственности спектральной функции (см. [9]), заключаем, что $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду. Аналогичное утверждение имеет место для любой пары (α, α_n) такой, что $0 < \alpha < \alpha_n \leq \pi$. Если последовательность α_n сходится к α, то из вышеприведённых рассуждений следует, что существует единственный вещественный потенциал $q(x) = q_1(x)$ такой, что $\mu_k(q, \alpha_n, \pi/2) = \mu(\alpha_n + \pi k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что на сходящихся последовательностях $\alpha_n + \pi k \to \alpha + \pi k$ при $n \to \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ФСЗ $\mu(q,\alpha,\pi/2)$ семейства $\{L(q,\alpha,\pi/2), \alpha\in(0,\pi]\}$ совпадает с функцией $\mu(\gamma)$ из Теоремы 2. Поскольку обе эти функции аналитические (Свойство b)), то они совпадают всюду на $(0,\infty)$. Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность В. А. Яверяну за указание на неограниченность снизу семейства спектров операторов $\{L(q,\alpha,\pi/2), \alpha\in(0,\pi]\}$.

ABSTRACT. Let $\mu(\gamma)$ be a function such that its value at any positive point $\gamma=\alpha+\pi n$, $\alpha\in(0,\pi]$, $n=0,1,2,\ldots$ coincides with the eigenvalue $\mu_n(\alpha)$ of the Sturm–Liouville problem $-y''+q(x)\,y=\mu\,y$, $y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0$, $y'(\pi)=0$, enumerated in a special way. We find necessary and sufficient conditions for some function to possess these properties for real $q\in L^2[0,\pi]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию. Москва, 1970.
2. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville problem. I.", Com. Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, pp. 767 — 783, 1983.
3. E. L. Isaacson, H. P. Mckean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville problem. II.", Com. Pure and Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 1 — 11, 1984.
4. B. E. J. Dahlberg, E. Trubowitz, "The inverse Sturm–Liouville problem. III.", Com. Pure and Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 255 — 267, 1984.
5. Ю. Н. Бибиков, Общий Курс Обыкновенных Дифференциальных Уравнений. Изд. ЛГУ, 1981.
6. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1 — 63, 1964.
7. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, Гостехиздат, 1956.
8. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их Приложения. Киев, 1977.
9. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы дифференциальных операторов второго порядка". Труды ММО, том 1, стр. 327 —420, 1952.
10. М. А. Наймарк, Линейные Дифференциальные Операторы. Москва, 1969.

20 мая 2000 Ереванский государственный университет

НЕНАСЛЕДСТВЕННЫЕ МОНОМОРФИЗМЫ В КАТЕГОРИЯХ ГРУПП НАД ОБЩИМИ КАТЕГОРИЯМИ

Г. Р. Асатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

Ненаследственный мономорфизм в групповой категории $\mathcal{GC}$ над категорией $\mathcal{C}$ определяется как мономорфизм $\mathcal{GC}$ с немоническим базовым морфизмом в $\mathcal{C}$. В статье построены типичные примеры категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$, и получены необходимые и достаточные условия для существования ненаследственных мономорфизмов.

Многие из результатов классической теории групп перестают быть верными для категорий групп над объектами общей категории $\mathcal{C}$. Например, для моничности гомоморфизма групп над категорией $\mathcal{S}$ множеств необходимо и достаточно, чтобы в основании гомоморфизма лежало бы инъективное отображение. Достаточность этого условия сохраняется при замене $\mathcal{S}$ произвольной абстрактной категорией $\mathcal{C}$. В то же время, существуют категории $\mathcal{C}$ такие, что категория $\mathcal{GC}$ групп над $\mathcal{C}$ имеет мономорфизм, в основании которого лежит немоничный морфизм категории $\mathcal{C}$. Такие мономорфизмы групп называются ненаследственными.

В настоящей статье строятся типичные примеры категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$ (пункты 3, 5 и 6) и выводятся необходимые и достаточные условия для их существования (пункты 4 и 5).

Существуют два разных подхода для определения групповой структуры на объекте категорий $\mathcal{C}$. Прямой способ предполагает существование конечных произведений в $\mathcal{C}$ (см. [1]). Этот метод был развит Ловером ([2], [3], см. также [4], [5]), который обобщил этот метод для алгебраических теорий. Но есть другой, более общий метод, использующий контравариантные функторы из $\mathcal{C}$ в категорию теоретико-множественных групп $\mathcal{G}$ (см. [6]). Второй способ не требует существования конечных произведений в $\mathcal{C}$. Мы получаем наши результаты, для категорий не имеющих конечные произведения. Тем не менее, они верны и для категорий с конечными произведениями, но все конструкции в этом случае становятся более сложными. Сказанное может служить ответом на заключительную фразу главы III в [1], стр. 76, относящуюся к определению групповой структуры посредством контравариантных функторов : "Я не знаю ни одного реального использования этой дополнительной общности".

1. Напомним, что для произвольной категории $\mathcal{C}$ и любого объекта A из $\mathcal{C}$ определяются стандартный ковариантный функтор

$$h^A : \mathcal{C} \to \mathcal{S} \mid \; X \mapsto \mathcal{C}(A, X), \; (u : X \to Y) \mapsto h^A(u)(v) = v \circ u,$$

и контравариантный функтор

$$h_A : \mathcal{C} \to \mathcal{S} \mid \; X \mapsto \mathcal{C}(X, A), \; (u : X \to Y) \mapsto h_A(u)(v) = u \circ v.$$

Каждый морфизм $u : A \to B$ категории $\mathcal{C}$ определяет естественное преобразование

$$h_u : h_A \to h_B \quad | \qquad X \mapsto h_u(X) = h^X(u) \quad \text{для любого} \quad X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}.$$

Пусть $U : \mathcal{G} \to \mathcal{S}$ – стирающий функтор из категории групп в категорию множеств.

Определение 1. Контравариантный функтор $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ называется **групповой структурой** в категории $\mathcal{C}$, если существует объект A из $\mathcal{C}$ такой, что $\sigma \circ U = h_A$. Такой объект A определяется однозначно и называется **основой** структуры σ. Пара (A, σ) называется $\mathcal{C}$-**группой**.

Для определения групповой структуры на объекте A по контравариантному функтору σ необходимо и достаточно задание групповых операций $*$ на множествах $h_A(X)$ для всех $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ таких, что для любого морфизма $u : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ отображение $h_A(u) : h_A(Y) \to h_A(X)$ было бы гомоморфизмом групп. Последнее условие означает, что

$$u \circ (\xi * \eta) = (u \circ \xi) * (u \circ \eta) \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in h_A(Y). \tag{1}$$

Определение 2. Гомоморфизм из $\mathcal{C}$-группы (A, σ) в $\mathcal{C}$-группу (B, τ) есть естественное преобразование $\varphi : \sigma \to \tau$. **Основой** v_φ гомоморфизма φ является морфизм

$$v_\varphi = (\varphi \cdot 1_U)_A(1_A) : A \to B,$$

где 1_U – тождественное естественное преобразование стирающего функтора U, 1_A – тождественный морфизм объекта A и $\cdot$ – "горизонтальная" композиция естественных преобразований.

Соответствие $\varphi \mapsto v_\varphi$ определяет биективное отображение между гомоморфизмами из (A, σ) в (B, τ) и морфизмами $v : A \to B$, удовлетворяющими следующему условию :

$$(\xi \star \eta) \circ v = (\xi \circ v) \star (\eta \circ v) \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in h_A(X) = \mathcal{C}(X, A), \tag{2}$$

т.е. условию гомоморфности отображения групп

$$(\varphi \cdot 1_U)_X = h_v(X) : h_A(X) \to h_B(X).$$

Через $\mathcal{GC}$ обозначается категория, объектами которой являются все $\mathcal{C}$-группы, а морфизмами – все гомоморфизмы $\mathcal{C}$-групп. Стирающий функтор $U_{\mathcal{G}}(\mathcal{C}) : \mathcal{GC} \to \mathcal{C}$ сопоставляет объектам и морфизмам из $\mathcal{GC}$ их основы. Функтор $U_{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ является унивалентным. Как следствие, если основа гомоморфизма монична, то и сам гомоморфизм моничен. Обратное, в общем случае, неверно.

Определение 3. Будем говорить, что мономорфизм из $\mathcal{GC}$ – **наследственный**, если его основа монична в $\mathcal{C}$, и **ненаследственный** – в противном случае.

Целью статьи является построение типичных примеров категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$, и вывод необходимых и достаточных условий для наличия ненаследственных мономорфизмов в категории $\mathcal{GC}$.

2. Если A - основа групповой структуры σ в категории $\mathcal{C}$, то через 0_{XA} мы обозначаем единицу групповой операции $\star$ на множестве $h_A(X) = \mathcal{C}(X, A)$, а через u^* обратный элемент к u.

Предложение 1. (a) **Единицы 0_{XA} являются постоянными морфизмами. Более того, $u \circ 0_{YA} = 0_{XA}$ для всех $u \in \mathcal{C}(X, Y)$.**

(b) **Если $v : A \to B$ является основой гомоморфизма $\mathcal{C}$–групп, то**

$$0_{XA} \circ v = 0_{XB} \quad \text{для всех} \quad X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}.$$

(c) **Все 0_{AB} удовлетворяют (2), т.е. для любой групповой структуры на A единица 0_{AB} является основой гомоморфизма групповых структур.**

(d) **Если A – основа групповой структуры, то тождественный морфизм 1_A совпадает с 0_{AA} тогда и только тогда, когда A является терминальным объектом.**

Доказательство : (a) и (b) имеют место, поскольку $h_A(u)$ и $h_*(X)$ являются гомоморфизмами групп. (c) непосредственно следует из (a).

(d). Пусть A – основа групповой структуры. Тогда из $1_A = 0_{AA}$ следует, что

$$\xi = \xi \circ 1_A = \xi \circ 0_{AA} = 0_{XA} \quad \text{для всех} \quad X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C} \quad \text{и} \quad \xi \in \mathcal{C}(X, A),$$

поэтому объект A терминален. Обратное очевидно.

Замечание. Из Предложения 1 следует, что $\mathcal{GC}$ есть категория с системой нулевых морфизмов 0_{AB} (см. [7]).

3. Пусть $\varphi : \sigma \to \tau$ – ненаследственный мономорфизм в $\mathcal{GC}$, и $r : A \to B$ – его основа. Так как r не является мономорфизмом в $\mathcal{C}$, то существует объект C и морфизмы $u_1, u_2 \in \mathcal{C}(C, A)$ такие, что $u_1 \neq u_2$, $u_1 \circ r = u_2 \circ r$. Тогда для обратного элемента u_2^* имеем

$$(u_1 \star u_2^*) \circ r = (u_1 \circ r) \star (u_2^* \circ r) = (u_2 \circ r) \star (u_2^* \circ r) = (u_2 \star u_2^*) \circ r = 0_{CA} \circ r.$$

Обозначая $u = u_1 \star u_2^*$, получаем

$$u \neq 0_{CA}, \qquad u \circ r = 0_{CA} \circ r. \tag{3}$$

Как следствие (3) получаем, что объект A не терминален, и согласно Предложению 1, d), имеем $1_A \neq 0_{AA}$. Если предположить, что $r = 0_{AB}$, то $1_A \circ r = 0_{AA} \circ r$, что противоречит мономорфности φ (отметим, что $1_A, 0_{AA}$ и r являются основами гомоморфизмов). Таким образом, $r \neq 0_{AB}$ и поэтому объект B не терминален и $1_B \neq 0_{BB}$ Таким образом, получили следующее утверждение.

Предложение 2. Если $r : A \to B$ – основа ненаследственного мономорфизма, то $r \neq 0_{AB}$, A и B не терминальны (следовательно, $1_A \neq 0_{AA}, 1_B \neq 0_{BB}$), и существуют объект C и морфизм $u : C \to A$, удовлетворяющие (3).

Сейчас мы можем построить простейший пример категории $\mathcal{C}$ с ненаследственным мономорфизмом в $\mathcal{GC}$. Эта категория $\mathcal{N}_2$ имеет три объекта $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ и следующие множества морфизмов $\mathcal{N}_2(X, Y)$:

X, Y	A	B	C
A	$\{1_{\mathbf{A}}, 0_{\mathbf{AA}}\}$	$\{0_{\mathbf{AB}}, \mathbf{r}\}$	$\emptyset$
B	$\{0_{\mathbf{BA}}\}$	$\{1_{\mathbf{B}}, 0_{\mathbf{BB}}\}$	$\emptyset$
C	$\{0_{\mathbf{CA}}, \mathbf{u}\}$	$\{0_{\mathbf{CB}}\}$	$\{1_{\mathbf{C}}\}$

Композиция морфизмов определяется следующим образом :

$$u \circ v = \begin{cases} u, & \text{если} \quad v = 1; \\ 0, & \text{если} \quad u \neq 1, \quad v \neq 1; \\ v, & \text{если} \quad u = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Предложение 3. Категория $\mathcal{GN}_2$ изоморфна полной подкатегории категории $\mathcal{N}_2$ с объектами A и B. Соответствующий изоморфизм задаётся стирающим функтором $U_{\mathcal{G}}(\mathcal{N}_2)$.

Доказательство : Так как $\mathcal{N}_2(X, \mathbf{C}) = \emptyset$ при $X = \mathbf{A}, \mathbf{B}$, то на объекте **C** невозможно задать групповую структуру. На объектах **A** и **B** однозначно определяются групповые структуры, поскольку множества $\mathcal{N}_2(X, Y)$ содержат не более двух элементов и морфизмы $1_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{B}}$ не являются постоянными морфизмами (следовательно, 0_{XY} являются единицами групп $\mathcal{N}_2(X, Y)$). Когда $X, Y \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$, то все элементы из $\mathcal{N}_2(X, Y)$ являются основами гомоморфизмов : для 0_{XY} это следует из Предложения 1, (c): для $\mathbf{r}$, а также для $1_{\mathbf{A}}$ и $1_{\mathbf{B}}$ Условие (2) проверяется непосредственно.

Следствие. Морфизм $\mathbf{r}$ не моничен в $\mathcal{N}_2$, но соответствующий гомоморфизм в $\mathcal{GN}_2$ моничен. Поэтому $\mathcal{N}_2$ является категорией с ненаследственным мономорфизмом в $\mathcal{GN}_2$.

4. **Предложение 4. Категория $\mathcal{GC}$ содержит ненаследственный мономорфизм тогда и только тогда, когда существует функтор $f : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{C}$, удовлетворяющий условиям :**

(i) $f(\mathbf{u}) \neq f(0_{\mathbf{CA}})$ и

(ii) **$f(\mathbf{r})$ является основой некоторого мономорфизма из $\mathcal{GC}$.**

Доказательство : Необходимость. Пусть $\mathcal{C}$ есть категория с ненаследственным мономорфизмом φ в $\mathcal{GC}$, имеющим в основе немоничный морфизм $r : A \to B$ (здесь возможно $A = B$). Из сказанного (перед конструкцией $\mathcal{N}_2$) в пункте 3 следует, что $\mathcal{C}$ имеет морфизмы

$$1_A, 0_{AA}, 0_{AB}, r, 0_{BA}, 1_B, 0_{BB}, 0_{CA}, u, 0_{CB}, 1_C, \tag{5}$$

индексированные объектами $A, B, C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ (некоторые из них могут совпадать). Более того, композиции этих морфизмов определяются согласно (4). Следовательно, отображения $\operatorname{Ob} \mathcal{N}_2 \to \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, M или $\mathcal{N}_2 \to M$ или $\mathcal{C}$, сопоставляющие буквы "жирного шрифта" тем же буквам обычного шрифта, определяют функтор $f : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{C}$. По конструкции, f удовлетворяет условиям (i), (ii).

Достаточность. Морфизм $f(\mathbf{r})$ не моничен в $\mathcal{C}$, поскольку согласно (i) имеем $f(\mathbf{u}) \neq f(0_{\mathbf{CA}})$ и

$$f(\mathbf{u}) \circ f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{u} \circ \mathbf{r}) = f(0_{\mathbf{CB}}) = f(0_{\mathbf{CA}} \circ \mathbf{r}) = f(0_{\mathbf{CA}}) \circ f(\mathbf{r}).$$

Отсюда, учитывая (ii), получаем, что $f(\mathbf{r})$ является основой ненаследственного мономорфизма. Если некоторые из объектов A, B, C равны, то некоторые из морфизмов (5) равны. Однако нетрудно проверить, что функтор f, определяемый в доказательстве необходимости, является унивалентным. Условие (i) выполняется для каждого унивалентного функтора.

Следовательно, можно дать новую формулировку Предложения 4.

Предложение 5. Категория $\mathcal{GC}$ имеет ненаследственный мономорфизм тогда и только тогда, когда существует ковариантный унивалентный функтор $f : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{C}$ такой, что $f(\mathbf{r})$ является основой некоторого мономорфизма из $\mathcal{GC}$.

5. Предложения 4 и 5 позволяют выявлять категории групп с ненаследственными мономорфизмами, но не доставляют возможности построения новых примеров таких категорий. С. Г. Далалян видоизменил конструкцию типичного примера категории $\mathcal{N}_2$ с ненаследственным мономорфизмом в $\mathcal{GN}_2$ таким образом, чтобы можно было бы факторизацией получать новые примеры категорий. Ниже приводятся эти результаты.

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ суть объекты из $\mathcal{N}_\infty$, а множества морфизмов $\mathcal{N}_\infty(X, Y)$ определяются следующей таблицей :

X, Y	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{C}$
$\mathbf{A}$	$\mathbb{Z}_{\mathbf{AA}}$	$\mathbb{Z}_{\mathbf{AB}}$	$\emptyset$
$\mathbf{B}$	$\{0_{\mathbf{BA}}\}$	$\mathbb{Z}_{\mathbf{BB}}$	$\emptyset$
$\mathbf{C}$	$\mathbb{Z}_{\mathbf{CA}}$	$\{0_{\mathbf{CB}}\}$	$\{1_{\mathbf{C}}\}$

где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, и $\mathbb{Z}_{XY} = \{n_{XY} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Композиция определяется равенством

$$m_{XY} \circ n_{YZ} = \begin{cases} (mn)_{XZ}, & \text{если} \quad (X, Y, Z) \neq (\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}); \\ 0_{\mathbf{CB}}, & \text{если} \quad (X, Y, Z) = (\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{cases} \tag{6}$$

Невозможно задать групповую структуру на объекте $\mathbf{C}$, поскольку $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \emptyset$. Для любых $X \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, $Y \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ на множестве $\mathcal{N}_\infty(X, Y)$ определим коммутативную групповую операцию $\star : m_{XY} \star n_{XY} = (m+n)_{XY}$. Эта система операций удовлетворяет Условию (1) и, следовательно, определяет групповые структуры σ и τ на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, соответственно. Очевидно, что морфизм $1_{\mathbf{AB}}$ не моничен в $\mathcal{N}_\infty$ и удовлетворяет Условию (2). Следовательно, он является основой гомоморфизма из σ в τ. Этот гомоморфизм моничен в $\mathcal{GN}_\infty$. Таким образом, $1_{\mathbf{AB}}$ является основой ненаследственного мономорфизма из $\mathcal{GN}_\infty$.

Теперь существование ненаследственного мономорфизма в $\mathcal{GC}$ эквивалентно существованию ковариантного функтора $f : \mathcal{N}_\infty \to \mathcal{C}$, удовлетворяющего следующим условиям :

(i) $f(1_{\mathbf{CA}}) \neq f(0_{\mathbf{CA}})$,

(ii) $f(1_{\mathbf{AB}})$ является основой мономорфизма из $\mathcal{GC}$ (отсюда следует, что даны групповые структуры σ и τ на объектах $f(\mathbf{A})$ и $f(\mathbf{B})$ категории $\mathcal{C}$).

(iii) для всех $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}_\infty$, $Y \neq \mathbf{C}$ отображение $f_{X,Y} : \mathcal{N}_\infty(X,Y) \to \mathcal{C}(f(X), f(Y))$ является гомоморфизмом групп.

Аналогичное отображение $f_{X,Y} : \mathcal{N}_2(X,Y) \to \mathcal{C}(f(X), f(Y))$ в общем случае не является гомоморфизмом групп. Другим отличием между $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_\infty$ является то, что в этом случае полной подкатегории $\overline{\mathcal{N}_\infty}$, имеющей в качестве объектов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, оказывается изоморфна не вся категория $\mathcal{GN}_\infty$, а полная подкатегория, содержащая объекты $(\mathbf{A}, \sigma)$ и $(\mathbf{B}, \tau)$. Такой изоморфизм устанавливается ограничением стирающего функтора $U_\mathcal{G}(\mathcal{N}_\infty)$.

Атрибут ненаследственного мономорфизма $\varphi : (A, \sigma) \to (B, \tau)$ категории $\mathcal{GC}$ состоит из φ, его основы $r : A \to B$ и морфизма $u : C \to A$ категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющий (3).

Если объекты A, B, C попарно различны, то образ $\mathcal{D}$ функтора f будет подкатегорией категории $\mathcal{C}$. Категория $\mathcal{D}$ имеет три объекта A, B, C. Для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}_\infty$, $Y \neq C$ отображение

$$f_{X,Y} : \mathcal{N}_\infty(X,Y) \to \mathcal{D}(f(X), f(Y))$$

является сюръективным гомоморфизмом групп, где $\mathcal{N}_\infty(X,Y)$ – бесконечная циклическая или тривиальная группа. Следовательно, $\mathcal{D}(f(X), f(Y))$ изоморфна $\mathbb{Z}/\nu_{XY}\mathbb{Z}$, где ν_{XY} – неотрицательное целое число, удовлетворяющее следующим условиям : (i) $\nu_{BA} = \nu_{CB} = 1$; (ii) остальные целые $\nu_{XY} \neq 1$; (iii) ν_{AB} делит ν_{AA} и ν_{BB} ; (iv) ν_{CA} делит ν_{AA}.

Если групповая структура σ абелева (т.е. все теоретико-множественные группы $\mathcal{C}(X, A)$ коммутативны), то из моничности φ получаем $\nu_{AA} = \nu_{AB}$.

База данных, состоящая из (a) трех объектов A, B, C, (b) системы множеств морфизмов

$$\mathcal{D}(X, Y) = \mathbb{Z}/\nu_{XY}\mathbb{Z} \qquad (X, Y \in \{A, B, C\}, Y \neq C),$$

$$\mathcal{D}(X, C) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если} \quad X \neq C, \\ \{1_C\}, & \text{если} \quad X = C, \end{cases}$$

где ν_{XY} – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие (i)-(iv) и (c), и закона композиции морфизмов

$$(a + \nu_{XY}\mathbb{Z}) \circ (b + \nu_{YZ}\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0_{CB}, & \text{если} \quad (X, Y, Z) = (C, A, B), \\ ab + \nu_{XZ}\mathbb{Z}, & \text{если} \quad (X, Y, Z) \neq (C, A, B) \end{cases}$$

образует категорию. Для групповых структур σ и τ, определённых на объектах A и B естественными циклическими групповыми структурами множеств $\mathcal{D}(X, Y)$, морфизм 1_{AB} является основой гомоморфизма $\varphi : \sigma \to \tau$. Этот гомоморфизм моничен (следовательно, будет ненаследственным мономорфизмом) тогда и только тогда, когда $\nu_{AA} = \nu_{AB}$. Категории $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_\infty$ можно получить из этой общей конструкции, если взять в качестве всех $\nu_{XY} \neq 1$, соответственно, два и ноль.

6. Используя идею композиции морфизмов (6), можно предложить следующую общую конструкцию категорий $\mathcal{C}$ с ненаследственными мономорфизмами в $\mathcal{GC}$, основанную на понятии почти-кольца (см. [8]). Алгебра $\mathbf{R} = \langle R, \star, \circ \rangle$ с двумя бинарными операциями называется почти-кольцом, если (i) $\mathbb{R}$ – группа относительно операции $\star$, (ii) $\mathbb{R}$ – полугруппа относительно операций $\circ$, и (iii) $\mathbb{R}$ удовлетворяет правому распределительному закону (1).

Пусть почти-кольцо $\mathbf{R}$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям : 1) оно имеет единичный элемент 1, 2) $0 \circ x = 0$ для нулевого элемента 0 почти-кольца $\mathbf{R}$ и любого $x \in R$. Тогда заменяя кольцо $\mathbb{Z}$ на такое почти-кольцо $\mathbf{R}$ в таблице множеств морфизмов категории $\mathcal{N}_\infty$ и в (6), получаем категорию $\mathcal{N}_{\mathbf{R}}$.

Теорема. **Для произвольного нетривиального почти-кольца $\mathbf{R}$, удовлетворяющего условиям 1) и 2), категория $\mathcal{GN}_{\mathbf{R}}$ содержит ненаследственный мономорфизм.**

ABSTRACT. **A non-hereditary monomorphism, in a group category $\mathcal{GC}$ over a category $\mathcal{C}$, is a monomorphism of $\mathcal{GC}$ with a non-monic base morphism in $\mathcal{C}$. The present article constructs typical examples of categories $\mathcal{C}$ with non-hereditary monomorphisms in $\mathcal{GC}$ and gives necessary and sufficient conditions for existence of non-hereditary monomorphisms.**

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mac Lane. Categories For the Working Mathematician, Springer-Verlag, 1971.
2. F. W. Lawvere, "Functorial semantics of algebraic theories", Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 52, pp. 869 — 872, 1963.
3. F. W. Lawvere, "Algebraic theories, algebraic categories, and algebraic functors", Symposium on the theory of Models; North-Holland Publ. Co., pp. 413 — 418, Amsterdam, 1965.
4. B. Pareigis, Categories and Functors, N.Y., Acad. Press, 1970.
5. П. Т. Джонстон, Теория Топосов, Москва, Наука, 1986.
6. И. Букур, А. Деляну, Введение в Теорию Категорий и Функторов, Москва, Мир, 1972.
7. М. Цаленко, Е. Шульгейфер, Основы Теории Категорий, Москва, Мир, 1974.
8. А. Г. Курош, Общая Алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года, Москва, Наука, 1974.

15 марта 2000 Ереванский государственный университет

НАИЛУЧШЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

А. Л. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

В статье рассматривается одна из задач теории приближения функций. Пусть $W_\alpha^r(r > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ – класс периодических, непрерывных функций $f(x)$, представимых в виде свёртки $f(x) = c + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} D^1(t)\,\varphi(t)\,dt$, где $D^1(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt + \alpha\pi/2)$, а измеримая, периодическая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям $\sup_t |\varphi(t)| \leq 1$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0$. В настоящей работе приближение берётся по тригонометрическим многочленам $T_m(x, f) = \dfrac{2}{q} \sum\limits_{l=0}^{q-1} f(x_l)\,\mathcal{D}(x - x_l)$, где $m, q > 2m$ являются натуральными, $\{x_l\} = \{2\pi l/q\}$, и $\mathcal{D}_m(t)$ – ядро Дирихле. Доказано, что асимптотическое поведение величин $C_m(x, r) = \sup\limits_{f \in W_\alpha^r} |f(x) - T_m(x, f)|$ зависит от арифметического характера предела $\beta = \lim\limits_{m \to \infty} m/q$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $W_\alpha^r(r > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ – класс периодических непрерывных функций $f(x)$, представимых в виде свертки

$$f(x) = c + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} D^1(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $D^1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt + \alpha\pi/2)$, а $\varphi(t)$ – измеримая периодическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\sup_t |\varphi(t)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0. \tag{1}$$

В статье рассматриваются тригонометрические многочлены

$$T_m(x, f) = \frac{2}{q} \sum_{l=0}^{q-1} f(x_l)\,\mathcal{D}(x - x_l),$$

где m, $q > 2m$ – натуральные числа, $\{x_l\} = \{\frac{2\pi l}{q}\}$ и $\mathcal{D}_m(t)$ – ядро Дирихле. Одна из важных задач теории приближений является асимптотическое поведение верхней грани $C_m(x,r,\alpha) = \sup_{f\in W^r_\alpha} |f(x) - T_m(x,f)|$. А. Н. Колмогоров [1] доказал, что если $T_m(x)$ является частичной суммой Фурье порядка m, то для функции $f \in W^r_r$ имеет место следующая точная асимптотическая оценка :

$$C_m(x,r,r) = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln m}{m} + O(m^{-r}). \tag{2}$$

М. Д. Калашников и Г. П. Губанов (см. [2], [3]) получили асимптотическую формулу для $f \in W^r_\alpha$ при дополнительном условии, что $2m+1$ является делителем для q. В настоящей статье получена асимптотическая формула для $C_m(x,r,\alpha)$ без этого дополнительного условия.

В данной работе доказано, что аналог соотношения (2) для $C_m(x,r,\alpha)$ зависит от арифметического характера предела $\beta = \lim_{m\to\infty}\frac{m}{q}$. А именно, если $\beta = 0$ или иррационально, то $C_m(x,r,\alpha)$ обладает пределом вида (2) и он вычисляется, а если $\beta \neq 0$ – рациональное число, то для $C_m(x,r,\alpha)$ предел (2) не существует. Однако, если $\beta \neq 0$ рационально, получены нижний и верхний пределы последовательности $\frac{m^r}{\ln m} C_m(x,r,\alpha)$ и показано, что любое число между двумя значениями является предельной точкой этой последовательности. Ясно, что величина $C_m(x,r,\alpha)$ имеет период $2\pi/q$, и поэтому мы будем изучать величину $C_m(x,r,\alpha)$ при $x \in [0, 2\pi/q]$. Основными результатами этой статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1. При $r > 1$ справедлива асимптотическая формула

$$C_m(x,r,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\gamma(t,x,m,\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\cos((nq-j)t + jx + \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\cos((nq+j)t - jx + \alpha\pi/2)}{(nq+j)^r}\right)\right| dt + O(m^{-r}),$$

где остаточный член равномерно ограничен по m, q, x, α и

$$\gamma(t,x,m,\alpha) = \sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-r}\cos((t-x)k + \alpha\pi/2.$$

При условии $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{q} = \beta \neq 0$ обозначим

$$A(t,\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin(nt + t + \alpha\pi/2 - \beta t}{(n+1-\beta)^r} - \frac{\sin(nt + \beta t + \alpha\pi/2)}{(n+\beta)^r}\right),$$

$$B(t,\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(nt+t+\alpha\pi/2-\beta t}{(n+1-\beta)^r}+\frac{\cos(nt+\beta t+\alpha\pi/2)}{(n+\beta)^r}\right),$$

$$N(t,\alpha,\beta)=(A^2(t,\alpha,\beta)+B^2(t,\alpha,\beta))^{1/2},\quad \varphi(t,\alpha,\beta)=\arccos\frac{B(t,\alpha,\beta)}{N(t,\alpha,\beta)},$$

$$M(\alpha,\beta)=\frac{\beta^r}{\pi^3}\int_0^{2\pi}N(t,\alpha,\beta)\left(1-2\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*}\frac{\cos 2v\varphi}{4v^2-1}\right)dt.$$

$$A_1(\alpha,\beta)=M(\alpha,\beta)+M(-\alpha,\beta),\quad A_2(\alpha,\beta)=\frac{\beta^r}{\pi^3}\int_0^{2\pi}(N(t,\alpha,\beta)+N(t,-\alpha,\beta))\,dt.$$

где $*$ означает, что $2\,v\,s\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, $s,p\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть $r>1$. Тогда

а) если $\beta=0$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{C_m(0,W_r^\alpha)}{m^{-r}\ln m}=\dfrac{4}{\pi^2}$,

b) если $\beta\in[0,1/2]$ иррационально, то $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m^{-r}\ln m}=A_2(\alpha,\beta)$,

c) если $\beta=s/p\in[0,1/2]$, $s,p\in\mathbb{N}$, $(s,p)=1$, то

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m^{-r}\ln m}\geq A_1(\alpha,\beta),\quad \limsup_{m\to\infty}\frac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m^{-r}\ln m}\leq A_2(\alpha,\beta),$$

и для любого $\gamma\in[A_1(\alpha,\beta),A_2(\alpha,\beta)]$ существуют $m_n,q_n\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_n}{q_n}=s/p\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{C_{m_n}(0,W_\alpha^r)}{m_n^{-r}\ln m_n}=\gamma.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1 : Так как $T_m(x,S_m(x,f))=S_m(x,f)$, то получим

$$f(x)-T_m(x,f)=f(x)-S_m(x,f)-T_m(x,f-S_m)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G_m(x,t)\,\varphi(t)\,dt,\quad (3)$$

где

$$G_m(x,t)=\gamma(t,x,m,\alpha)-\frac{2}{q}\sum_{l=0}^{q-1}D_{r,\alpha}^{m+1}(t-x_l)\,D_m(x-x_l).\qquad (4)$$

Из (3) следует, что

$$C_m(x,W_\alpha^r)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|G_m(x,t)|\,dt.\qquad (5)$$

С другой стороны, легко видеть, что 2π-периодическая функция

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}\mathrm{sign}G_m(x,t), & \text{при}\quad |t|\leq\frac{\pi}{2},\\ -\varphi_0(t-\pi), & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

удовлетворяет условиям (1) и следовательно

$$
\begin{gathered}
C_m(x, W_\alpha^r) \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_m(x,t)\, I_0(t)\, dt \geq \\
\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_m(x,t)|\, dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} |G_m(x,t)|\, dt.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Докажем, что

$$
\int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} |G_m(x,t)|\, dt = O(m^{-r}) \tag{7}
$$

равномерно по m, q, x, α. Используя преобразование Абеля, получим (см. [5])

$$
\begin{gathered}
\int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\cos((t-x)k + \alpha\pi/2)}{k^r} \right| dt \leq \\
\leq 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{\sin \dfrac{t-x}{2}} = C\, m^{-r}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Имеем также

$$
\begin{gathered}
I_m(t,x) \equiv \frac{2}{q} \sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-r} \sum_{l=0}^{q-1} \cos((t-x_l)k + \alpha\pi/2)\, D_m(x - x_l) = \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{\cos((nq-j)t + jx - \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\cos((nq+j)t - jx + \alpha\pi/2)}{(nq+j)^r} \right).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Применяя преобразование Абеля, находим

$$
\begin{gathered}
\int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} \left| \sum_{j=0}^{m} \frac{\cos(j(x-t) + nqt + \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} \right| dt \leq \\
\leq \left(\frac{1}{(nq-1)^r} - \frac{1}{(nq-m+1)^r} + \frac{1}{(nq-m)^r} + \frac{1}{(nq)^r} \right) C.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Следовательно, из (9), (10) получаем

$$
\int_{\pi/2 \leq |t| \leq \pi} |I_m(t,x)|\, dt \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nq-m)^r}, \tag{11}
$$

т.е. оценку (7). Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 2 : Из Теоремы 1 следует, что

$$
\begin{gathered}
C_m(0, W_\alpha^r) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t, 0, m, \alpha)|\, dt + H_m^q(\alpha) + O(m^{-r}), \\
C_m(0, W_\alpha^r) \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma(t, 0, m, \alpha)|\, dt - H_m^q(\alpha) + O(m^{-r}),
\end{gathered} \tag{12}
$$

где

$$H_m^q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{\cos(jt - nqt - \alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} + \frac{\cos(jt + nqt + \alpha\pi/2)}{(nq+j)^r}\right| dt.$$

Докажем, что

$$H_m^q(\alpha) = O(q^{-r}\ \ln m). \tag{13}$$

Полагая $a_j = (n\,q - j)^{-r}$, $b_j = (n\,q + j)^{-r}$, $\Delta a_j = a_j - a_{j+1}$, $B_m^q(n,t) = \sum_{j=1}^{m}(a_j\ \cos(jt-\tau) + b_j\ \cos(jt+\tau))$, $\tau = n\,q\,t + \alpha\,\pi/2$. $\Delta b_j = b_j - b_{j+1}$ и применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} B_m^q(n,t) = \sum_{j=1}^{m-1}\Delta a_j\,\frac{\sin((j+1/2)t-\tau) - \sin(t/2-\tau)}{2\,\sin t/2} + \\ + a_m\,\frac{\sin((m+1/2)t-\tau) - \sin(t/2-\tau)}{2\,\sin t/2} + \\ + \sum_{j=1}^{m-1}\Delta b_j\,\frac{\sin((j+1/2)t+\tau) - \sin(t/2+\tau)}{2\,\sin t/2} + \\ + b_m\,\frac{\sin((m+1/2)t+\tau) - \sin(t/2+\tau)}{2\,\sin t/2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что $\int_{|t|\le\pi/m}|\sum_{n=1}^{\infty}B_m^q(n,t)|\,dt = O(q^{-r})$ и $\int_{\pi/m}^{\pi}\dfrac{dt}{\sin t/2} = O(\ln m)$. Таким образом, из (14) получим (13).

Пункт a) вытекает из (12), (13) и теоремы С. А. Теляковского (см. [5], стр. 293). Для доказательства пунктов b) и c) получим асимптотическую формулу для величины $C_{T_m}(O, W_\alpha^r)$. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((nq-j)t+\alpha\pi/2)}{(nq-j)^r} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((nq+(q-j))t+\alpha\pi/2)}{(nq+(q-j))^r},$$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((nq+(q-j))t+\alpha\pi/2)}{(nq+(q-j))^r} = \sum_{j=q-m}^{q-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((nq+j)t+\alpha\pi/2)}{(nq+j)^r},$$

следовательно, из Теоремы 1 получим

$$C_m(0.\,W_\alpha^r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=m+1}^{q-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((nq+j)t+\alpha\pi/2)}{(nq+j)^r}\right| dt + O(m^{-r}).$$

Так как

$$\int_{|t|\le 2\pi/q}\left|\sum_{j=m+1}^{q-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((nq+j)t+\alpha\pi/2)}{(nq+j)^r}\right| dt = O(m^{-r}),$$

то получим требуемую формулу

$$C_m(0, W_\alpha^r) = \Gamma_m(\alpha) + \gamma_m(-\alpha) + O(m^{-r}), \tag{15}$$

где

$$\Gamma_m(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi/q}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{q-m-1} \frac{\cos(jt + nqt + \alpha\pi/2)}{(nq+j)^r} \right| dt.$$

Дважды применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{j=m+1}^{q-m-1} \frac{\cos(jt+\tau)}{(nq+j)^r} = \frac{1}{4\sin^2 t/2} \sum_{j=m+1}^{q-m-3} \Delta^2 b_j(\cos\tau - \cos((j+1)t+\tau)) -$$

$$- \Delta b_{m+1}(\cos\tau - \cos((m+1)t+\tau)) + \Delta b_{q-m-3}(\cos\tau - \cos((q-m-1)t+\tau)) -$$

$$- b_{m+1}\frac{\sin((m+1/2)t+\tau)}{2\sin t/2} + b_{q-m-1}\frac{\sin((q-m-1/2)t+\tau)}{2\sin t/2}.$$

Замечая, что при $R = \dfrac{q}{m^{r+1}} + \dfrac{1}{q^r}$

$$\int_{2\pi/q}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 t/2} \sum_{j=m+1}^{q-m-3} \Delta^2 b_j \right| dt = O(R),$$

$$\int_{2\pi/q}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta b_{m+1}}{\sin^2 t/2} \right| dt = O(R),$$

получим

$$\Gamma_m(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi/q}^{\pi} \frac{1}{\sin t/2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((q-m-1/2)t+\tau)}{(nq+q-m-1)^r} - \frac{\sin((m+1/2)t+\tau)}{(nq+m+1)^r} \right| dt +$$

$$+ O(R) = \frac{1}{\pi q^r} \sum_{k=1}^{[q/2]} \int_0^{2\pi} \frac{1}{t+2\pi k} \left| A_q(t,\alpha)\cos\frac{2\pi k m}{q} - B_q(t,\alpha)\sin\frac{2\pi k m}{q} \right| dt +$$

$$+ O(R),$$

где

$$A_q(t,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin((n+1-m/q)t+\alpha\pi/2)}{(n+1-m/q-1/q)^r} - \frac{\sin((n+m/q)t+\alpha\pi/2)}{(n+m/q+1/q)^r} \right),$$

$$B_q(t,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos((n+1-m/q)t+\alpha\pi/2)}{(n+1-m/q-1/q)^r} - \frac{\sin((n+m/q)t+\alpha\pi/2)}{(n+m/q+1/q)^r} \right).$$

Далее, используя ряд Фурье для функции $\sin x$, имеем

$$\Gamma_m(\alpha) = \frac{1}{\pi^3 q^r}\int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)} \times$$

$$\times \left(\ln q - 2\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos(2v\varphi_q(t,\alpha)) \sum\limits_{k=1}^{[q/2]} \dfrac{\cos 4\pi k v m/q}{k}}{4v^2-1} \right) dt + O(R), \tag{16}$$

где $\varphi_q(t,\alpha) = \dfrac{\arccos B_q(t,\alpha)}{\sqrt{A_q^2(t,\alpha)+B_q^2(t,\alpha)}}$.

Ясно, что аналог асимптотической формулы (16) имеет место для $\Gamma_m(-\alpha)$.

Докажем пункт b). Пусть β иррационально. Убедимся, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{[q/2]} \dfrac{\cos 4\pi\, kvm/q}{k}}{\ln m} = 0. \tag{17}$$

Действительно, применяя преобразование Абеля, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{\cos 4\pi\, kvm/q}{k}\right| \le 1 + \frac{1}{|\sin 2\pi\, vm/q|},$$

и поскольку $\dfrac{2\pi\, v\, m}{q} \to 2\, v\,\beta\,\pi \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\pi)$ при $m\to\infty$, то получим (17).

Доказательство пункта b) следует из (16) и (17). Докажем теперь пункт c). Пусть $m/q = \dfrac{s}{p} + \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$ при $m\to\infty$. Убедимся, что

$$K_v \equiv \sum_{k=1}^{[q/2]} \frac{\cos 4\pi\, kvm/q}{k} = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p} \cos\frac{4\pi\, vsl}{p} \cdot \begin{cases} \ln q + O(\eta_v(\varepsilon)), & \text{при} \quad |\varepsilon| q \le 1 \\ -\ln|\varepsilon| + O(\eta_v(\varepsilon)). & \text{при} \quad |\varepsilon| q > 1. \end{cases} \tag{18}$$

где $\eta_v(\varepsilon) = \ln v + |\sum_{l=1}^{p} \sin 2\pi\, v\varepsilon\, l|\, \ln q + \int_0^1 |\sin 2\pi\, v\, p\,\varepsilon\, t|\, dt\, \ln q + O(1)$. Следовательно, имеем

$$K_v \equiv \sum_{k=1}^{pq} \frac{\cos 4\pi\, vkm/q}{k} + O(1) = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p} \cos\frac{4\pi\, vsl}{p} \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\cos 4\pi\, v\, p\, k\,\varepsilon}{k} +$$
$$+ O\left(|\sum_{l=1}^{p} \sin 2\pi\, v\varepsilon\, l|\, \ln q\right) + O(1). \tag{19}$$

Полагая $I(v) = \sum_{k=1}^{q-1} \dfrac{\cos 4\pi\, v\, p\, k\,\varepsilon}{k}$, имеем

$$\left| I(v) - \int_1^q \frac{\cos 4\pi\, v\, p\,\varepsilon\, t}{t}\, dt \right| \le \sum_{k=1}^{q-1} \frac{2}{k} \int_k^{k+1} |\sin 2\pi\, vp\varepsilon(t-k)|\, dt + O(1).$$

Следовательно

$$I(v) = \int_1^q \frac{\cos 4\pi\, v\, p\,\varepsilon\, t}{t}\, dt + O\left(\int_0^1 |\sin 2\pi\, vp\varepsilon\, t|\, dt\, \ln q\right). \tag{20}$$

Если $|\varepsilon| q \le 1$, то

$$\int_1^q \frac{\cos 4\pi v\, p\,\varepsilon\, t}{t}\, dt = \int_{4vp|\varepsilon|}^{4vp|\varepsilon| q} \frac{dt}{t} + \int_{4vp|\varepsilon|}^{4vp|\varepsilon| q} \frac{\cos \pi t - 1}{t}\, dt = \ln q + O(\ln vp), \tag{21}$$

а если $|\varepsilon| q \geq 1$, то

$$\int_{4vp|\varepsilon|}^{4vp|\varepsilon|q} \frac{\cos \pi t}{t} dt = \int_{4vp|\varepsilon|}^{4vp} \frac{\cos \pi t}{t} dt + \int_{4vp}^{4vp|\varepsilon|q} \frac{\cos \pi t}{t} dt = -\ln|\varepsilon| + O(\ln vp) + O(1). \tag{22}$$

Из (19)–(22) следует (18). Используя

$$\sum_{l=1}^{p} \cos \frac{4\pi\, vsl}{p} = \begin{cases} p, & \text{если} \quad 2v\, s \equiv 0(\mathrm{mod} p), \\ 0, & \text{если} \quad 2v\, s \not\equiv 0(\mathrm{mod} p), \end{cases}$$

из (16), (18) получим

$$\Gamma_m(\alpha) = \pi^{-3} q^{-r} \cdot \begin{cases} \ln q \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)} \left(1 - 2\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) dt + \\ +O(R), \quad \text{при} \ |\varepsilon| q < 1, \\ \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)} \left(\ln q + 2\ln|\varepsilon| \sum_{v=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) dt + \\ +O(R), \quad \text{при} \ |\varepsilon| q > 1. \end{cases} \tag{23}$$

Так как $(s, p) = 1$, то

$$\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2np\varphi_q}{4n^2 p^2 - 1}, & \text{при} \quad p \equiv 1(\mathrm{mod} 2), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2np\varphi_q}{n^2 p^2 - 1}, & \text{при} \quad p \equiv 0(\mathrm{mod} 2). \end{cases}$$

Поэтому, учитывая, что $-\ln|\varepsilon| < \ln q$ при $|\varepsilon| q > 1$, из (23) получим

$$\begin{aligned} &\Gamma_m(\alpha) \leq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)}\, dt + o(q^{-r} \ln q) + O(R), \\ &\Gamma_m(\alpha) \geq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} \sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)} \left(1 - 2\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) dt + \\ &+ o(q^{-r} \ln q) + O(R). \end{aligned} \tag{24}$$

Оценки, аналогичные (24), имеют место для $\Gamma_m(-\alpha)$. Следовательно, из (15) и (24) получим оценки для $C_m(0, W_\alpha^r)$:

$$\begin{aligned} &C_m(0, W_\alpha^r) \leq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} (\sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)} + \\ &+ \sqrt{A_q^2(t,-\alpha) + B_q^2(t,-\alpha)})\, dt + o(q^{-r} \ln q) + O(R), \\ &C_m(0, W_\alpha^r) \geq \pi^{-3} q^{-r} \ln q \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{A_q^2(t,\alpha) + B_q^2(t,\alpha)} \left(1 - 2\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\cos 2v\varphi_q}{4v^2 - 1}\right) + \right. \\ &\left. + \sqrt{A_q^2(t,-\alpha) + B_q^2(t,-\alpha)} \left(1 - 2\sum_{v=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\cos 2v\varphi_q(t,-\alpha)}{4v^2 - 1}\right)\right] dt + \\ &+ o(q^{-r} \ln q) + O(R). \end{aligned} \tag{25}$$

Разделив (25) на $m^{-r}\ln m$ и переходя к пределу при $m\to\infty$, получим доказательство первого утверждения пункта с). Докажем второе утверждение. Если $\gamma = A_1(\alpha,\beta)$, то положим $m_n = n\,s-1$, $q_n = n\,p$, а для $\gamma = A_2(\alpha,\beta)$, положим $m_n = n\,([\ln n]\,s-1)$, $q_n = n\,p\,[\ln n]$. Используя (15) и (23) к последовательности $\frac{m_n}{q_n}$, получим пункт с).

Пусть теперь $\gamma\in(A_1(\alpha,\beta),A_2(\alpha,\beta))$. Для таких γ имеем $\gamma = A_2(\alpha,\beta)(1-t)+t\,A_1(\alpha,\beta)$, $0<t<1$. В этом случае положим $m_n = [n^{1-t}]\,(s\,[n^t]-1)$, $q_n = [n^{1-t}]\,[n^t]\,p$. Полагая $|\varepsilon| = \frac{1}{p}\cdot[n^t]$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln|\varepsilon|}{\ln m_n} = -t$. Следовательно, из (15) и (23) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_m(0,W_\alpha^r)}{m_n^{-r}\,\ln m_n} = (1-t)\,A_2(\alpha,\beta)+t\,A_1(\alpha,\beta) = \gamma.$$

Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper considers a problem of approximation theory. Let $W_\alpha^r(r>0,\alpha\in\mathbb{R})$ be the class of periodic, continuous functions $f(x)$ represented in a convolution form $f(x) = c+\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}D^1(t)\,\varphi(t)\,dt$, where $D^1(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos(kt+\alpha\pi/2)$, while $\varphi(t)$ is a measurable periodic function satisfying $\sup_t|\varphi(t)|\le 1$ and $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt = 0$. Approximation is by trigonometrical polynomials $T_m(x,f) = \frac{2}{q}\sum\limits_{l=0}^{q-1}f(x_l)\,\mathcal{D}(x-x_l)$, where m, $q>2m$ are natural, $\{x_l\} = \{2\pi l/q\}$, and $\mathcal{D}_m(t)$ is the Dirichlet kernel. It is found that asymptotic behavior of $C_m(x,r) = \sup\limits_{f\in W_\alpha^r}|f(x)-T_m(x,f)|$ depends on arithmetic character of $\beta = \lim\limits_{m\to\infty}m/q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Избранные Труды, Наука, 1985.
2. М. Д. Калашников, "О полиномах наилучшего квадратического приближения в заданной системе точек", ДАН СССР, том 105, № 4, стр. 634 — 636, 1955.
3. Г. П. Губанов, "Приближение функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения", Изв. Вузов, Математика, № 12, стр. 22 — 29, 1970.
4. А. Л. Григорян, "Асимптотическая оценка остатка при приближении функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения", ДАН Арм. ССР, том 89, № 4, стр. 164 — 166, 1989.
5. С. А. Теляковский, "Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье", Мат. Заметки, том 4, № 3, стр. 291 — 300, 1968.
6. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физматгиз, 1961.

17 февраля 2000

Армянский государственный инженерный университет

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИББСОВСКИХ СОСТОЯНИЙ И ПРИМЕНЕНИЯ

Мохамед Каррат

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

В статье доказано, что если P – гиббсовское состояние со спецификацией Π, удовлетворяющей условию Дынкина, то образ меры гиббсовского состояния P является гиббсовским состоянием со спецификацией $\Pi^{\varphi,\psi}$, которая определяется по Π с помощью некоторого преобразования перенормировки. В качестве применения мы доказываем, что решения стохастического градиента, преобразованные посредством дискретного градиента и операторов Лапласа, являются смесями специальных гиббсовских состояний.

§1. ВВЕДЕНИЕ

При определении основных решётчатых моделей и их динамик мы следуем работе [8]. В качестве микроскопической модели намагничивания рассмотрим систему $X_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}^d$ блочных спинов микроскопической системы. Всю конфигурацию спинов будем обозначать через $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$. X_i интерпретируется как намагниченность единичного куба F_i с центром в $i \in \mathbb{Z}^d$. Предположим, что система находится в тепловом равновесии, и гамильтониан ячейки F_i равен

$$h_i(X) = U(X_i) + \frac{1}{2} \sum_{j:|i-j|=1} V(X_i - X_j), \tag{1.1}$$

где $U, V : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ выпуклы. Химический потенциал n_i, отвечающий X_i, определяется по формуле :

$$n_i = \partial_i h_i(X) \equiv \frac{\partial h_i}{\partial X_i}(X) = U'(X_i) + \frac{1}{2} \sum_{j:|i-j|=1} V'(X_i - X_j). \tag{1.2}$$

Мы интерпретируем $Y_b = X_i - X_j$ как поток $\mathcal{J}_b$ намагниченности вдоль связки b между соседними участками $i, j \in \mathbb{Z}^d$, $|i-j| = 1$, ориентированными от j к i. С другой стороны, в тепловом равновесии интенсивность потока $\mathcal{J}_b$ пропорциональна градиенту химического потенциала, а микроскопические воздействия описываются случайными потоками вдоль b, которые, по предположению, имеют вид

$$(\nabla\beta)_b = \beta_i - \beta_j. \tag{1.3}$$

где $\beta = (\beta_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ – семейство независимых стандартных броуновских движений. Таким образом, стохастический дифференциал потока $\mathcal{J}_b$, $b = (\overline{i,j})$ задаётся формулой

$$d\mathcal{J}_b = -\frac{1}{2}(n_i - n_j)\,dt + d(\nabla\beta)_b. \tag{1.4}$$

Следовательно, эволюционный закон потока Y_b имеет вид

$$dY_b + d\mathcal{J}_{-b} = 0. \tag{1.5}$$

Здесь $\mathcal{J}_{-b}$ обозначает поток намагниченности вдоль $-b = (\overline{j,i})$, т.е. в направлении противоположном к b. Таким образом, процесс потоков $Y = (Y_b)_b$ удовлетворяет следующему соотношению :

$$\begin{gathered}dY_b(t) = -\frac{1}{2}\Big\{U'\big(X_i(t)\big) - U'\big(X_j(t)\big) + \\ +\frac{1}{2}\Bigg[\sum_{b':x_{b'}=x_b} V'\big(Y_{b'}(t)\big) - \sum_{b':x_{b'}=y_b} V'\big(Y_{b'}(t)\big)\Bigg]\Bigg\}\,dt + d(\nabla\beta)_b(t).\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь мы использовали обозначение $x_b = i$, $y_b = j$, при $b = (\overline{i,j})$. Если U имеет вид $U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$, $\alpha \geq 0$, то $U'(X_i) - U'(X_j) = \alpha Y_b$, и поэтому для Y мы получаем стохастическое дифференциальное уравнение, которое также как и в [9] мы будем называть **поверхностной динамикой Гинзбурга–Ландау**

$$(\mathcal{GLI})\qquad \begin{aligned}dY_b(t) = -\frac{1}{2}\Bigg\{\alpha Y_b(t) + \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{b':x_{b'}=x_b} V'\big(Y_{b'}(t)\big) - \sum_{b':x_{b'}=y_b} V'\big(Y_{b'}(t)\big)\Bigg]\Bigg\}\,dt + \\ + d(\nabla\beta)_b(t), \qquad b\in(\mathbb{Z}^d)^*, \quad t\in[0,1].\end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого класса гамильтонианов $h = (h_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ и начальных состояний ν, исследуемый процесс X является решением бесконечномерной стохастической градиентной системы

$$(Grad)_\nu \qquad \begin{cases} dX_i(t) = -\frac{1}{2}\partial_i h_i\big(X(t)\big)\,dt + d\beta_i(t), \\ X(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \nu, \quad i\in\mathbb{Z}^d, \quad t\in[0,1]. \end{cases}$$

Нашей целью является изучение преобразованного процесса $Y = \nabla X$ с использованием известных свойств процесса X. Основная идея заключается в применении гиббсовской формы закона Q^ν процесса X, описанного в [4] и [5], с целью определения гиббсовской формы закона процесса Y и нахождения обратимых состояний для Y. В частности, в качестве примера, нами будет рассмотрена поверхностная динамика Гинзбурга–Ландау. Далее, мы рассматриваем преобразование пространство–состояние для Y посредством оператора дискретной дивергенции ∇^*, т.е. преобразование процесса X посредством дискретного оператора Лапласа $\Delta = \nabla^*\nabla$. И в этом случае мы получаем точную информацию о гиббсовской форме закона оператора ΔX и его обратимых состояний.

Эти конкретные примеры преобразований пространство–состояние для гиббсовских состояний стимулируют общую проблему : изучение преобразований гиббсовских состояний, сохраняющих свойство гиббсовости. Этой проблеме посвящена первая часть настоящей статьи, результаты которой применяются для анализа вышеприведённых моделей. В том случае, когда мы рассматриваем преобразования пространства состояний, результаты статьи являются естественным обобщением классических результатов для преобразований пространство–состояние марковских процессов, сохраняющих марковское свойство (см. [6]).

Общая постановка задачи следующая : задано преобразование (φ, ψ), которое преобразует данную конфигурацию $\omega \in \Omega$ и заданную ограниченную область $V \in I$ в некоторую конфигурацию $\omega^* = \varphi(\omega) \in \Omega^*$ и область $V^* = \psi(V) \in I^*$. Если теперь P является гиббсовским состоянием, определяемым спецификацией $\Pi = (\Pi_V)_{V\in I}$ на Ω, т.е. для любого $V \in I$ и $f \in b\mathcal{F}$ имеем

$$P(f|\widehat{\mathcal{F}}_V) = \Pi_V(\cdot, f) \quad P - a.e. \tag{1.7}$$

(в этом случае мы пишем $P \in \mathcal{G}(\Pi)$), то мы можем рассматривать преобразованное состояние $P^* = P \circ \varphi^{-1} = P_\varphi$ и поставить следующий вопрос : будет ли состояние P^* на Ω^* гиббсовским, определяемым некоторой преобразованной спецификацией $\Pi^* = (\Pi^*_{V^*})_{V^*\in I^*}$?

Таким образом, естественно искать достаточные условия на Π, гарантирующие, что $P^* \in \mathcal{G}(\Pi^*)$. В настоящей работе приводится следующее достаточное условие, обобщающее условие Дынкина [6] : для любых $V \in I$, $f \in b\mathcal{F}$ и $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, удовлетворяющих $\varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2)$, имеет место равенство

$$\Pi_V(\omega_1, f\circ\varphi) = \Pi_V(\omega_2, f\circ\varphi). \tag{1.8}$$

Это означает, что образы ядер $\Pi_V(\omega, dy)$ относительно преобразования φ совпадают на классах эквивалентности преобразования φ для следующего отношения эквивалентности :

$$\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2), \tag{1.9}$$

т.е. эти образы ядер совпадают для "граничных условий", эквивалентных относительно φ.

В этой статье мы получаем некоторые следствия из условия (1.8) для преобразований (φ, ψ), предполагая, что φ – сюръективно, а ψ – биективно и сохраняет частичное упорядочение в I и I^*. Также будем предполагать, что φ – "биизмеримо" относительно всех σ-полей $\widehat{\mathcal{F}}_V$ и $\widehat{\mathcal{F}}^*_{\psi(V)}$ событий, происходящих вне V и $V^* = \psi(V)$, соответственно. В этих предположениях условие (1.8) позволяет определить новую спецификацию $\Pi^* = \Pi^{\varphi,\psi}$ на Ω^* по формуле

$$\Pi^{\varphi,\psi}_{V^*}(\omega^*, \cdot) = \Pi_{\psi^{-1}(V^*)}(\omega, \cdot) \circ \varphi^{-1}, \quad \omega^* \in \Omega^*, \quad V^* \in I^*, \tag{1.10}$$

где $\omega \in \varphi^{-1}(\{\omega^*\})$. Кроме того, имеет место следующая теорема : **Если $P \in \mathcal{G}(\Pi)$, то его преобразование $P^* = P_\varphi$ относительно (φ, ψ) является гиббсовским состоянием, определяемым по $\Pi^{\varphi,\psi}$.**

Возникает следующий вопрос : может ли Π^* быть представлена гамильтонианом $H^* = (H^*_{V^*})_{V^* \in I^*}$ и спецификацией $\Pi^{*,0} = (\Pi^{*,0}_{V^*})_{V^* \in I^*}$ в предположении, что Π имеет вид

$$\Pi^H_V(\omega, f) = \frac{1}{Z^H_V(\omega)} \int_\Omega f(\eta) e^{-H_V(\eta)} \Pi^0_V(\omega, d\eta), \quad \omega \in \Omega, \quad f \in b\mathcal{F} \tag{1.11}$$

для некоторого заданного гамильтониана $H = (H_V)_{V \in I}$ и заданной спецификации $\Pi^0 = (\Pi^0_V)_{V \in I}$? Мы показываем, что это имеет место в случае, если (H, Π^0) таково, что

- Π^0 удовлетворяет условию (1.8), (1.12)
- H факторизуется относительно (φ, ψ), т.е. существует семейство $(H^*_{V^*})_{V^* \in I^*}$

случайных величин на $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ таких, что

$$H_V = H^*_{\psi(V)} \circ \varphi, \quad V \in I. \tag{1.13}$$

При этих условиях существует так-называемое **преобразование перенормировки** $\mathcal{R}_{\varphi,\psi}$, которое на множестве пар (H, Π^0), удовлетворяющих условиям $\mathcal{G}(H, \Pi^0) \neq \emptyset$, (1.12) и (1.13), определяется следующим образом :

$$\mathcal{R}_{\varphi,\psi}(H, \Pi^0) = (H^*, \Pi^{*,0}), \tag{1.14}$$

где $\Pi^{*,\circ} = (\Pi^\circ)^{\varphi,\psi}$. Преобразование $\mathcal{R}_{\varphi,\psi}$ обладает следующим свойством : для всех (H,Π°) и $P \in \mathcal{G}(H,\Pi^\circ)$ имеем $P_\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{\varphi,\psi}(H,\Pi^\circ))$. Отсюда следует коммутативность диаграммы (см. [21])

$$\begin{array}{ccccc} & P & \xrightarrow{\varphi} & P^* = P_\varphi & \\ P \in \mathcal{G}(H,\Pi^\circ) & \uparrow & & \downarrow & \exists (H^*,\Pi^{*,\circ}) : P^* \in \mathcal{G}(H^*,\Pi^{*,\circ}) \\ & (H,\Pi^\circ) & \underset{\mathcal{R}_{\varphi,\psi}}{\longrightarrow} & (H^*,\Pi^{*,\circ}), & \end{array} \tag{1.15}$$

которая используется во второй части статьи для описания вероятностной структуры законов Q^ν_∇ и Q^ν_Δ, когда Q^ν является решением системы $(Grad)_\nu$.

Для получения этого решения мы поступаем следующим образом : вначале дезинтегрируем Q^ν относительно проекции $X_0 : \Omega \to E$, $X_0(\omega) = \omega_0$, и получаем разложение

$$Q^\nu = \int_E Q^\nu_{\omega_0} Q^\nu_{X_0}(d\omega_0). \tag{1.16}$$

Здесь $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ и $\omega_0 \longmapsto Q^\nu_{\omega_0}$ обозначает регулярное условное вероятностное распределение Q^ν при условии X_0. Далее, из гиббсовского характера Q^ν следует, что каждое $Q^\nu_{\omega_0}$ также является гиббсовским состоянием с гамильтонианом и спецификацией, полученных из H и Π^0 простым сужением. Теперь рассмотрим преобразованное состояние

$$Q^\nu_\nabla = \int_E Q^\nu_{\omega_0,\nabla}\, Q^\nu_{X_0}(d\omega_0). \tag{1.17}$$

Описание преобразованного гиббсовского состояния $Q^\nu_{\omega_0,\nabla}$ более просто, чем Q^ν_∇, так как гиббсовское состояние $Q^\nu_{\omega_0}$ сосредоточено на $\Omega_{\omega_0} = \{X_0 = \omega_0\}$. Кроме того, преобразование ∇ является борелевским изоморфизмом между Ω_{ω_0} и $\Omega^* = \nabla(\Omega)$. Теорема 3.1 позволяет нам точно описать гиббсовскую форму $Q^\nu_{\omega_0,\nabla}$ в терминах заданного гамильтониана H и спецификации Π°. Отсюда следует, что Q^ν_∇ является смесью специального класса гиббсовских состояний, для которого мы определяем класс его обратимых состояний. В частности, доказанное в [9], Предложение 3.1 об обратимых состояниях для уравнения Гинзбурга–Ландау, мы доказываем другим способом. Преобразуем Q^ν_∇, используя оператор дискретной дивергенции

$$\nabla^* : \Omega^* \longmapsto \Omega, \quad (\nabla^*\eta)_i = \sum_{b:y_b=i} \eta_b, \quad i \in \mathbb{Z}^d.$$

Следовательно, Q^ν преобразуется с помощью дискретного оператора Лапласа Δ. Опять мы видим, что Q^ν_Δ является смесью специального класса гиббсовских состояний, для которого мы определяем класс его обратимых состояний.

§2. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ

2.1. Спецификации и их гиббсовские состояния. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство, а I – частично упорядоченное множество индексов, причём $\subseteq$ обозначает порядок в нём. Предположим, что мы имеем верхнее направление порядка, т.е. для любых $V_1, V_2 \in I$ существует $V \in I$ такое, что $V_1 \subseteq V$ и $V_2 \subseteq V$, причём оно счётно порождено, т.е. существует последовательность $(V_n)_{n\geq 1}$ из I такое, что если $V \in I$, то $V \subseteq V_n$ для некоторого n. Пусть задана также фильтрация $\mathbb{F} = (\widehat{\mathcal{F}}_V)_{V\in I}$ под-σ-алгебр $\widehat{\mathcal{F}}_V$ алгебры $\mathcal{F}$, которая предполагается убывающей, т.е. $V \subseteq V' \Rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_{V'} \subset \widehat{\mathcal{F}}_V$, $V, V' \in I$. Назовём $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$ **измеримым базисом**.

Рассмотрим для каждого $V \in I$ ядро $\Pi_V : \Omega \times \mathcal{F} \longmapsto \mathbb{R}^+$, т.е. отображение Π_V таково, что для каждого $\omega \in \Omega$, $\Pi_V(\omega, \cdot)$ является мерой, а для каждого $A \in \mathcal{F}$, $\Pi_V(A) = \Pi_V(\cdot, A)$ является $\mathcal{F}$-измеримой.

Определение 2.1. Семейство ядер $\Pi = (\Pi_V)_{V\in I}$ называется **$\mathbb{F}$-спецификацией**, если для каждого $V \in I$ выполняются следующие условия :

1) для каждого $\omega \in \Omega$, $\Pi_V(\omega, \Omega)$ равна 0 или 1,

2) для каждого $A \in \mathcal{F}$, $\Pi_V(\cdot, A)$ является $\widehat{\mathcal{F}}_V$-измеримой,

3) для любых $A \in \mathcal{F}$ и $\widetilde{A} \in \widehat{\mathcal{F}}_V$ имеем $\Pi_V(\cdot, A \cap \widetilde{A}) = \mathbb{I}_{\widetilde{A}}\Pi_V(\cdot, A)$,

4) для каждого $W \supseteq V$ имеем $\Pi_W = \Pi_W \Pi_V$, где ядро $\Pi_W \Pi_V$ определяется формулой

$$\Pi_W \Pi_V(\omega, A) = \int \Pi_V(\zeta, A)\Pi_W(\omega, d\zeta), \quad \omega \in \Omega, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Замечание 2.1. Обычно предполагается, что $\Pi_V(\omega, \cdot)$ есть вероятность. Кроме того, мы не исключаем возможность обращения в нуль ядра, однако безоговорочно исключаем случай, когда $R_V = \{\Pi_V(\cdot, \Omega) = 1\} = \emptyset$ для некоторого V. Заметим также, что так как $R_V \in \widehat{\mathcal{F}}_V$, то $\Pi_V(\cdot, R_V) = \mathbb{I}_{R_V}$.

Определение 2.2. Пусть Π – $\mathbb{F}$-спецификация. Будем говорить, что вероятностная мера P на $(\Omega, \mathcal{F})$ является **гиббсовским состоянием со спецификацией** Π, если для каждого $V \in I$ и $f \in b\mathcal{F}$ имеем

$$\mathbb{E}_P(f/\widehat{\mathcal{F}}_V) = \Pi_V(f) \quad P - a.s, \tag{2.1}$$

где $b\mathcal{F}$ есть множество ограниченных $\mathcal{F}$-измеримых функций на Ω. Множество гиббсовских состояний, определяемых по Π, обозначается через $\mathcal{G}(\Pi)$.

Предложение 2.1. Пусть Π – $\mathbb{F}$-спецификация. Вероятностная мера P на Ω является гиббсовским состоянием со спецификацией Π тогда и только тогда, когда для каждого $V \in I$ имеем $P\Pi_V = P$, т.е. для каждого $f \in b\mathcal{F}$,

$$\int f(\omega)\, dP(\omega) = \int \Pi_V(\omega, f)\, dP(\omega).$$

Замечание 2.2. Из определения $(R_V)_{V\in I}$ вытекает, что гиббсовское состояние $P \in \mathcal{G}(\Pi)$ сосредоточено на каждом R_V, $V \in I$, и, следовательно, на множестве $R = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} R_{V_k}$, измеримом относительно **хвостового поля** $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \widehat{\mathcal{F}}_{V_n}$. Здесь $(V_n)_n$ – последовательность в I, порожденная порядком в I. Следовательно, $P(R) = 1$, и мы будем говорить, что мера P **умеренная.**

Теперь определим понятие гамильтониана.

Определение 2.3. Множество $H = (H_V)_{V\in I}$ отображений $H_V : \Omega \longmapsto \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ называется **$\mathbb{F}$-гамильтонианом**, если

a) для каждого V, H_V является $\mathcal{F}$-измеримым,

b) H – **$\mathbb{F}$-аддитивна**, т.е. для всех $V, V' \in I$ таких, что $V \subseteq V'$, существует функция $H_{V',V} : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, измеримая относительно $\widehat{\mathcal{F}}_V$ такая, что $H_{V'} = H_V + H_{V',V}$.

Следующая теорема Престона позволяет построить спецификацию по заданным Π° и H.

Теорема 2.1. ([17], [18]) **Пусть Π° – $\mathbb{F}$-спецификация, а H – $\mathbb{F}$-гамильтониан. Семейство $\Pi^H = (\Pi^H_V)_{V\in I}$ определяет $\mathbb{F}$-спецификацию, где**

$$\Pi^H_V(\omega, d\omega') = \begin{cases} \frac{1}{Z^H_V(\omega)} \exp\big(-H_V(\omega')\big)\Pi^\circ_V(\omega, d\omega'), & \text{если} \quad 0 < Z^H_V(\omega) < \infty, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$Z^H_V(\omega) = \int_\Omega \exp\big(-H_V(\omega')\big)\Pi^\circ_V(\omega, d\omega'), \quad \omega \in \Omega.$$

В этом случае, мы используем также обозначение $\mathcal{G}(H, \Pi^\circ)$ вместо $\mathcal{G}(\Pi^H)$.

2.2. Решётчатая модель. Пусть A – счётное множество и I – набор непустых конечных подмножеств множества A, направленных вверх и счетно порожденных последовательностью $(A_n)_n$ с $A_n \nearrow A$. Для каждого $\alpha \in A$ пусть $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)$ есть измеримое пространство. Положим $\Omega = \prod_{\alpha\in A} E_\alpha$, $\mathcal{F} = \prod_{\alpha\in A} \mathcal{E}_\alpha$. Фильтрацию $\mathbb{F} = (\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda)_{\Lambda\in I}$ определим по формуле

$$\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda = \sigma(X_\alpha : \alpha \notin \Lambda), \quad \Lambda \in I, \tag{2.2}$$

где $X_\alpha : \Omega \longmapsto E_\alpha$ – проективное отображение. $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$ **называется измеримым базисом**, определенным по A и $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)_\alpha$.

Далее определим $\mathbb{F}$-спецификации Π°. Для каждого $\alpha \in A$ зададим σ-конечную меру m_α на $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)$, а также положим $\Pi^\circ_\Lambda(\omega, \cdot) = \otimes_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha \otimes \delta_{\omega_{\Lambda^c}}$, $\Lambda \in I$, $\omega \in \Omega$. Здесь $\omega_{\Lambda^c} = (\omega_\alpha)_{\alpha\notin\Lambda}$, если $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ и m_α σ-конечна. Построим теперь $\mathbb{F}$-гамильтониан. Для заданного **потенциала** ϕ, т.е. набора $(\phi_\Lambda)_{\Lambda\in I}$ функций

$$\phi_\Lambda : \Omega_\Lambda = \prod_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha \longmapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

измеримых относительно $\mathcal{E}_\Lambda = \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{E}_\alpha$, $\Lambda \in I$, ассоциированный $\mathbb{F}$-гамильтониан $H^\phi = (H^\phi_\Lambda)_{\Lambda\in I}$ определяется следующим образом :

$$H^\phi_\Lambda(\omega) = \begin{cases} \sum_{\Lambda'\cap\Lambda\neq\emptyset} \phi_{\Lambda'}(\omega_{\Lambda'}), & \text{если} \quad \sum_{\Lambda'\cap\Lambda\neq\emptyset} |\phi_{\Lambda'}(\omega_{\Lambda'})| < \infty \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из теоремы Престона, которая верна и в том случае, когда Π° построена по σ-конечным мерам m_α вместо вероятностей, следует, что ядра Π^H_Λ, $\Lambda \in I$, определенные по Π° и H^ϕ, определяют $\mathbb{F}$-спецификацию. Поэтому имеет смысл рассмотреть $\mathcal{G}(H^\phi, \Pi^\circ)$, которое также будет обозначаться через $\mathcal{G}(H^\phi, (m_\alpha)_{\alpha\in A})$.

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИББСОВСКИХ СОСТОЯНИЙ

3.1. Состояние–пространство преобразования гиббсовских состояний. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$ и $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, I^*, \mathbb{F}^*)$ – два измеримых базиса.

Определение 3.1. (φ, ψ) назовём **$\mathbb{F}/\mathbb{F}^*$-преобразованием**, если оно обладает следующими свойствами :

$\varphi : \Omega \longmapsto \Omega^*$ является $\mathcal{F}/\mathcal{F}^*$-измеримым и сюръективным, (3.1)

$\psi : I \longmapsto I^*$ является биективным и сохраняющим порядок, т.е.

$$V \subseteq W \Leftrightarrow \psi(V) \subseteq \psi(W), \quad V, W \in I, \tag{3.2}$$

$\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^*$ совместимы относительно (φ, ψ) в следующем смысле :

$$\begin{matrix} \alpha) & \varphi^{-1}(\widehat{\mathcal{F}}^*_{\psi(V)}) \subseteq \widehat{\mathcal{F}}_V, \\ \beta) & \varphi(\widehat{\mathcal{F}}^{sat_\varphi}_V) \subseteq \widehat{\mathcal{F}}^*_{\psi(V)}, \end{matrix} \qquad V \in I. \tag{3.3}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{F}}^{sat_\varphi}_V$ состоит из всех $A \in \widehat{\mathcal{F}}_V$, которые насыщены относительно отношения эквивалентности в Ω, определённого по формуле (1.9). Это означает, что каждое $A \in \widehat{\mathcal{F}}^{sat_\varphi}_V$ представляет собой объединение классов эквивалентности. Используем обозначение $\mathcal{A}^{sat_\varphi}$, если $\mathcal{A}$ является под-σ-алгеброй алгебры $\mathcal{F}$. Ниже мы часто будем писать $\widehat{\mathcal{F}}_{V^*}$ или $\widehat{\mathcal{F}}_{\psi(V)}$ вместо $\widehat{\mathcal{F}}^*_{V^*}$ или $\widehat{\mathcal{F}}^*_{\psi(V)}$.

Теорема 3.1. Пусть (φ, ψ) – $\mathbb{F}/\mathbb{F}^*$-преобразование и $\Pi = (\Pi_V)_{V \in I}$ – $\mathbb{F}$-спецификация, удовлетворяющая условию Дынкина (1.8). Тогда набор $\Pi^{\varphi,\psi} = (\Pi^{\varphi,\psi}_{V^*})_{V^* \in I^*}$, определённый формулой

$$\Pi^{\varphi,\psi}_{V^*}(\omega^*, \cdot) = \Pi_{\psi^{-1}(V^*)}(\omega, \cdot) \circ \varphi^{-1}, \quad V^* \in I^*, \quad \omega^* \in \Omega^*, \quad \omega \in \varphi^{-1}(\{\omega^*\}), \tag{3.4}$$

задаёт $\mathbb{F}^*$-спецификацию. Далее, если $P \in \mathcal{G}(\Pi)$, то образ $P^* = P_\varphi$ спецификации P относительно φ есть элемент множества $\mathcal{G}(\Pi^{\varphi,\psi})$.

Следующая лемма является обратной по отношению к лемме Дуба из [5].

Лемма 3.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ и $(\Omega', \mathcal{F}')$ – измеримые пространства и $\varphi : \Omega \longmapsto \Omega^*$ – отображение такое, что

$$\varphi(\mathcal{F}^{sat_\varphi}) \subseteq \mathcal{F}^*. \tag{3.5}$$

Если $f : \Omega \longmapsto \Omega'$ является $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-измеримой аппликацией такой, что

$$f = f^* \circ \varphi, \tag{3.6}$$

где f^* – аппликация из Ω^* в Ω', то f^* – $\mathcal{F}^*/\mathcal{F}'$-измерима.

Доказательство : Для $A \in \mathcal{F}'$ определим множество $B = \{\omega \in \Omega : f^* \circ \varphi(\omega) \in A\}$. Из измеримости f и условия (3.6) получаем $B \in \mathcal{F}^{sat_\varphi}$. Следовательно, из (3.5) имеем $C = \varphi(B) \in \mathcal{F}^*$. Теперь заметим, что из $B \in \mathcal{F}^{sat_\varphi}$ следует $B = \varphi^{-1}(C)$, т.е. $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C \circ \varphi$. С другой стороны $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \circ f^* \circ \varphi$. Поэтому из сюръективности φ следует, что $C = (f^*)^{-1}(A)$ и поэтому f^* измерима относительно $\mathcal{F}^*$. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство Теоремы 3.1 : Используем обозначения $\omega^* = \varphi(\omega)$, $V^* = \psi(V)$, и $\Pi^* = \Pi^{\varphi,\psi}$. Отметим, что $\Pi^*_{V^*}$ корректно определено, так как, если $f \in b\mathcal{F}^*$, то $\Pi^*_{V^*}(\omega^*, f) = \Pi_V(\omega, f \circ \varphi)$, и правая часть не зависит от выбора $\omega \in \varphi^{-1}(\{\omega^*\})$ (что следует из (1.8)). Для того, чтобы показать, что Π^* есть $\mathbb{F}^*$-спецификация, прежде отметим, что $\Pi^*_{V^*}(\omega^*, \Omega^*) = \Pi_V(\omega, \Omega) \in \{0, 1\}$. Теперь покажем, что $\Pi^*_{V^*}(f)$, $f \in b\mathcal{F}^*$ – измерима относительно $\widehat{\mathcal{F}}_{V^*}$. Для заданного $V^* \in I^*$, положим $g = \Pi_V(\cdot, f \circ \varphi)$ и $g^* = \Pi^*_{V^*}(\cdot, f)$. Заметим, что из (3.4) следует $g = g^* \circ \varphi$. С другой стороны, g – $\widehat{\mathcal{F}}_V$-измеримо и $\varphi(\widehat{\mathcal{F}}_V^{sat_\varphi}) \subseteq \widehat{\mathcal{F}}_{V^*}$ (условие (3.3)-β)). Используя Лемму 3.1 получаем, что $\Pi^*_{V^*}(\cdot, f)$ является $\widehat{\mathcal{F}}_{V^*}$-измеримой.

Покажем, что условие 3) из Определения 2.1 выполнено для Π^*. Пусть заданы $V^* \in I^*$ и $\omega^* \in \Omega^*$, а также $f \in b\mathcal{F}^*$, $f' \in b\widehat{\mathcal{F}}_{V^*}$. Тогда

$$\Pi^*_{V^*}(\omega^*, f \cdot f') = \Pi_V(\omega, (f \cdot f') \circ \varphi).$$

Однако $f' \circ \varphi \in b\widehat{\mathcal{F}}_V$, и поэтому

$$f'(\varphi(\omega)) \cdot \Pi_V(\omega, f \circ \varphi) = f'(\omega^*) \cdot \Pi^*_{V^*}(\omega^*, f).$$

Для того, чтобы доказать выполнимость условия 4) Определения 2.1 предположим, что $V_1^* \subseteq V_2^*$, $f \in b\mathcal{F}^*$ и $\omega^* \in \Omega^*$. Тогда используя соответствующее свойство спецификации Π, имеем

$$\Pi^*_{V_2^*}\Pi^*_{V_1^*}(\omega^*, f) = \int \Pi^*_{V_1^*}(\varphi(\eta), f)\Pi_{V_2}(\omega, d\eta) =$$

$$= \int \Pi_{V_1}(\eta, f \circ \varphi)\Pi_{V_2}(\omega, d\eta) = \Pi_{V_2}(\omega, f \circ \varphi) = \Pi^*_{V_2^*}(\omega^*, f).$$

Наконец, из условия $P \in \mathcal{G}(\Pi)$ непосредственно следует, что $P^* = P_\varphi \in \mathcal{G}(\Pi^*)$. Действительно, если $f \in b\mathcal{F}^*$, $V^* \in I^*$, то имеем

$$\mathbb{E}_{P^*}(\Pi^*_{V^*}(f)) = \int \Pi^*_{V^*}(\varphi(\omega), f)P(d\omega) = \int \Pi_V(\omega, f \circ \varphi)P(d\omega) =$$

$$= \int f \circ \varphi(\omega)\, dP(\omega) = P^*(f).$$

Теорема 3.1 доказана.

3.2. Применения.

3.2.1. Преобразования экстремальных гиббсовских состояний. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$, $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, I^*, \mathbb{F}^*)$ и (φ, ψ) те же, что и в Теореме 3.1. Допустим, что $(\Omega, \mathcal{F})$ является стандартным борелевским [15] (т.е. оно – счётно порожденное борелевское пространство и существует полное сепарабельное метрическое пространство Y такое, что $\mathcal{F}$ – изоморфна, как σ-алгебра, борелевским подмножествам пространства Y). Пусть $\mathcal{G}(\Pi) \neq \emptyset$ – выпуклое подмножество множества $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{F})$ всех вероятностных мер. Для множества $\mathcal{G}(\Pi)$ интересно рассмотреть множество $\mathcal{E}\mathcal{G}(\Pi)$ его экстремальных точек. Известно (см. [16]), что если $P \in \mathcal{G}(\Pi)$, то $P \in \mathcal{E}\mathcal{G}(\Pi)$ тогда и только тогда, когда P является **тривиальным хвостовым полем** $\mathcal{F}_\infty$. Это означает, что $P(A) \in \{0, 1\}$ для $A \in \mathcal{F}_\infty$.

В условиях Теоремы 3.1 каждое $P \in \mathcal{E}\mathcal{G}(\Pi)$ посредством (φ, ψ) преобразовывается в экстремальную точку множества $\mathcal{G}(\Pi^{\varphi,\psi})$. Это следует из факта, что φ является $\mathcal{F}_\infty/\widehat{\mathcal{F}}^*_\infty$-измеримым.

3.2.2. Гиббсовские состояния на границе Мартина спецификации. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$ и Π то же, что и в 3.2.1. Рассмотрим в контексте Теоремы 3.1 (см. [7], [17] и [18]) хорошо известное представление гиббсовских состояний в виде выпуклой комбинации элементов множества $\mathcal{EG}(\Pi)$. Так как $\mathcal{G}(\Pi) \neq \emptyset$, то существует марковское ядро Π_∞ из $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ в $(\Omega, \mathcal{F})$ такое, что $\Pi_\infty(\omega, \cdot) \in \mathcal{EG}(\Pi)$ для любого $\omega \in \Omega$. Это ядро определяет отношение эквивалентности $\sim$ на Ω

$$\omega_1 \sim \omega_2, \quad \text{если} \quad \Pi_\infty(\omega_1, \cdot) = \Pi_\infty(\omega_2, \cdot). \tag{3.7}$$

Предположим теперь, что существует **стандартное борелевское представление** (Υ, r) отношения $\sim$, т.е. существует стандартное борелевское пространство $(\Upsilon, \mathcal{B}_\Upsilon)$ и отображение $r : \Omega \longmapsto \Upsilon$ такое, что

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad r(\omega_1) = r(\omega_2). \tag{3.8}$$

Заметим, что

$$\text{подмножество } G \subset \Upsilon \quad \text{борелевское тогда и только тогда, когда} \quad r^{-1}(G) \in \mathcal{F}_\infty. \tag{3.9}$$

Воспользуемся Теоремой 3.1 при I, I^* и когда $\mathbb{F}, \mathbb{F}^*$ – синглетоны : $\mathbb{F}$ содержит $\mathcal{F}_\infty$, $\mathbb{F}^*$ – борелевское σ-поле в Υ, ψ не происходит. Принимая во внимание (3.7) – (3.9), можно Π_∞ факторизовать относительно r :

$$\Pi^r_\infty(\gamma, f) = \Pi_\infty(\omega, f), \quad \gamma \in \Upsilon, \quad \omega \in r^{-1}(\{\gamma\}), \quad f \in b\mathcal{F}. \tag{3.10}$$

Таким образом, определяется марковское ядро из $(\Upsilon, \mathcal{B}_\Upsilon)$ в $(\Omega, \mathcal{F})$, которое имеет следующие фундаментальные свойства : каждое $\Pi^r_\infty(\gamma, \cdot)$, $\gamma \in \Upsilon$ принадлежит $\mathcal{EG}(\Pi)$ и

$$P = \int_\Upsilon \Pi^r_\infty(\gamma, \cdot)\, P_r(d\gamma), \quad P \in \mathcal{G}(\Pi). \tag{3.11}$$

Из Теоремы 3.1 получаем, что $P_r \in \mathcal{G}(\Pi^r_\infty \circ r^{-1})$ для любого $P \in \mathcal{G}(\Pi)$. Преобразование

$$\rho : \mathcal{G}(\Pi) \longmapsto \mathcal{G}(\Pi^r_\infty \circ r^{-1}), \quad \rho(P) = P_r \tag{3.12}$$

является аффинной биекцией, относительно которой экстремальные точки множества $\mathcal{G}(\Pi)$ соответствуют мерам Дирака на $(\Upsilon, \mathcal{B}_\Upsilon)$ и, следовательно, элементам множества Υ. Отсюда следует, что каждая вероятность ν на $(\Upsilon, \mathcal{B}_\Upsilon)$ является гиббсовским состоянием, определяемым по $\Pi^r_\infty \circ r^{-1}$. Действительно, определив в терминах ν и Π^r_∞ следующую вероятность

$$P = \int_\Upsilon \Pi^r_\infty(\gamma, \cdot)\, \nu(d\gamma) \in \mathcal{G}(\Pi)$$

на $(\Omega, \mathcal{F})$ (определение корректно так как $\Pi^r_\infty(\gamma, \cdot) \in \mathcal{G}(\Pi)$) получим

$$P\Pi_V = \nu(\Pi^r_\infty \Pi_V) = \nu\Pi^r_\infty = P.$$

Таким образом, для любой заданной спецификации Π на стандартном борелевском пространстве Ω таком, что $\mathcal{G}(\Pi) \neq \emptyset$ и таком, что отношение эквивалентности $\sim$, индуцированное спецификацией Π имеет стандартное борелевское представление (Υ, r), преобразование ρ порождает взаимнооднозначное соответствие между гиббсовскими состояниями в $\mathcal{G}(\Pi)$ и $\mathcal{G}(\Pi^r_\infty \circ r^{-1})$. В частности, соответствие между Υ и $\mathcal{EG}(\Pi)$ порождается по формуле (3.11), где $P \in \mathcal{G}(\Pi)$ определяется перенормированной спецификацией $\Pi^r_\infty \circ r^{-1}$.

3.2.3. Спецификации, инвариантные относительно преобразования. Рассмотрим теперь частный случай, когда в Теореме 3.1 $(\Omega^*, \mathcal{F}^*) = (\Omega, \mathcal{F})$, причём $(I^*, \mathbb{F}^*)$ может быть отлично от $(I, \mathbb{F})$. Пусть Π – $\mathbb{F}$-спецификация, удовлетворяющая (1.8), а $\Pi^{\varphi,\psi}$ – соответствующая $\mathbb{F}^*$-спецификация на $(\Omega, \mathcal{F})$, определяемая по формуле (3.4).

Определение 3.2, [17], [18]. Будем называть Π **(φ, ψ)-инвариантной**, если для каждого $V \in I$ существует $V^* \in I^*$ такое, что

$$\Pi^{\varphi,\psi}_{V^*} \Pi_V = \Pi^{\varphi,\psi}_{V^*}. \tag{3.13}$$

В частном случае, для каждого $V \in I$ имеем $\Pi^{\varphi,\psi}_{\psi(V)} = \Pi_V$.

Предложение 3.1, [17], [18]. Если Π является (φ, ψ)-инвариантной, то $P_\varphi \in \mathcal{G}(\Pi)$ для любого $P \in \mathcal{G}(\Pi)$.

Доказательство : Покажем, что $P_\varphi \Pi_V = P_\varphi$ для любого V. Так как Π является (φ, ψ)-инвариантной, то существует $V^* \in I^*$ такое, что выполнено условие (3.13). Из Теоремы 3.1 следует, что $P_\varphi \in \mathcal{G}(\Pi^{\varphi,\psi})$. Следовательно, $P_\varphi \Pi_V = P_\varphi \Pi^{\varphi,\psi}_{V^*} \Pi_V$. Теперь результат следует из инвариантности Π.

Пример. Трансляционно-инвариантные спецификации. $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$ – измеримый базис, порождённый $A = \mathbb{Z}^d$ для некоторого $d \geq 1$ и $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha, m_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d}$, где $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha, m_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ суть копии одного и того же σ-конечного пространства мер $(E, \mathcal{E}, m)$. Решётка $\mathbb{Z}^d$ индуцирует группу измеримых биекций φ_α, $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, действующих на $(\Omega, \mathcal{F})$ вместе с семейством ψ_α, $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, сохраняющих порядок биекций, действующих на I таких, что каждая $(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)$ является допустимым $\mathbb{F}/\mathbb{F}^*$-преобразованием, где $\mathbb{F}^* = (\widehat{\mathcal{F}}_{\psi_\alpha(\Lambda)})_{\Lambda \in I}$, φ_α и ψ_α определяются следующим образом : $\varphi_\alpha\big((\omega_\beta)_{\beta\in\mathbb{Z}^d}\big) = (\omega_{\beta-\alpha})_{\beta\in\mathbb{Z}^d}$, $\psi_\alpha(\Lambda) = \Lambda + \alpha$. Теперь если ϕ является потенциалом. а Π^ϕ – связанной $\mathbb{F}$-спецификацией, построенной по ϕ и $(m_\alpha)_\alpha$, то мы можем рассматривать преобразованные $\mathbb{F}^*$-спецификации $\Pi^{\varphi_\alpha,\psi_\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d$. Будем говорить, что Π **трансляционно–инвариантна**, если $\Pi^{\varphi_\alpha,\psi_\alpha} = \Pi$ для любого α. Достаточным условием является трансляционная инвариантность ϕ, т.е. $\phi_\Lambda = \phi_{\psi_\alpha(\Lambda)} \circ \varphi_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \in I$ (см. [10]).

3.2.4. Преобразования перенормировки. Рассмотрим другой частный случай, когда в Теореме 3.1 спецификация Π является гиббсовской, т.е. спецификация построена по Π° и H, и мы ищем условия на (H, Π°), при которых имеет место условие (1.8), причём $P_\varphi \in \mathcal{G}\big((\Pi^H)^{\varphi,\psi}\big)$ при $P \in \mathcal{G}(\Pi^H)$.

Теорема 3.2. Пусть (φ, ψ) – $\mathbb{F}/\mathbb{F}^*$-преобразование, H – $\mathbb{F}$-гамильтониан и Π° – $\mathbb{F}$-спецификация на $(\Omega, \mathcal{F})$. Если Π° удовлетворяет условию (1.8) и существует набор $(H^*_{V^*})_{V^*\in I^*}$ функций $H^*_{V^*} : \Omega^* \longmapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такой, что

$$H_V = H^*_{\psi(V)} \circ \varphi, \quad V \in I, \tag{3.14}$$

то $H^* = (H^*_{V^*})_{V^*\in I^*}$ является $\mathbb{F}^*$-гамильтонианом и $\Pi^{*,\circ}$ есть $\mathbb{F}^*$-спецификация, где

$$H^*_{V^*}(\omega^*) = H_{\psi^{-1}(V)}(\omega), \quad \Pi^{*,\circ}_{V^*} = (\Pi^\circ)^{\varphi,\psi}_{V^*}, \quad \omega \in \varphi^{-1}(\{\omega^*\}), \quad V^* \in I^*. \tag{3.15}$$

Кроме того, если $P \in \mathcal{G}(H, \Pi^\circ)$, то $P_\varphi \in \mathcal{G}\big(\mathcal{R}_{\varphi,\psi}(H, \Pi^\circ)\big)$, где $\mathcal{R}_{\varphi,\psi}(H, \Pi^\circ) = (H^*, \Pi^{*,\circ})$.

Доказательство : Заметим, что функции (3.15) определяют $\mathbb{F}^*$-гамильтониан. Действительно, согласно (3.14), (3.3)-β) и Лемме 3.1 получаем, что $H^*_{V^*}$ является $\widehat{\mathcal{F}}_{V^*}$-измеримой для любого $V^* \in I^*$. Теперь покажем её $\mathbb{F}^*$-аддитивность. Пусть $V_1 \subseteq V_2$. Так как H является $\mathbb{F}$-аддитивной и выполнено условие (3.14), то

$$H_{V_2,V_1} = (H^*_{V_2^*} - H^*_{V_1^*}) \circ \varphi$$

измерима относительно $\widehat{\mathcal{F}}_{V_1}$. Здесь как обычно $V_1^* = \psi(V_1)$, $V_2^* = \psi(V_2)$. Определим функцию $H^*_{V_2^*,V_1^*} = H^*_{V_2^*} - H^*_{V_1^*}$ и покажем, что она $\widehat{\mathcal{F}}_{V_1^*}$-измерима.

Так как $\Pi^{*,\circ}$ является $\mathbb{F}^*$-спецификацией, то можно рассмотреть $\mathbb{F}^*$-спецификацию Π^{*,H^*}, построенную по $\Pi^{*,\circ}$ и H^*. С другой стороны, легко видеть, что спецификации Π^H удовлетворяют условию (1.8), а ассоциированная $\mathbb{F}^*$-спецификация

$(\Pi^H)^{\varphi,\psi}$ совпадает с Π^{*,H^*}. Следовательно, из Теоремы 3.1 получаем, что $P_\varphi \in \mathcal{G}(H^*, \Pi^{*,\circ})$, при $P \in \mathcal{G}(H, \Pi^\circ)$. Теорема 3.2 доказана.

3.3. Условные гиббсовские состояния. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, I, \mathbb{F})$ – измеримый базис, построенный по $A = \mathbb{Z}^d$ и по некоторой последовательности измеримых пространств $(E_\alpha, \mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in A}$. Здесь I – набор непустых конечных подмножеств множества A. Приведём пример преобразования, сохраняющего гиббсовскую форму. Если P – гиббсовское, то условное математическое ожидание состояния P при условии, что зафиксирована спиновая конфигурация в некоторой заданной области, остаётся гиббсовским. Это утверждение обобщает Предложение 2.25 из [22].

Пусть G – произвольное подмножество множества $A = \mathbb{Z}^d$ и рассмотрим проекцию $X_G : \Omega \longmapsto \Omega_G = \Pi_{i \in G} E_i$, $X_G(\omega) = (\omega_i)_{i \in G}$. Пусть $\Pi = (\Pi_\Lambda)_{\Lambda \in I}$ – $\mathbb{F}$-спецификация и $P \in \mathcal{G}(\Pi)$. Прежде всего сделаем тривиальное замечание, что если заменить I на подмножество $\tilde{I}$, которое достижимо, т.е. упорядочено и счётно порождено, то P остаётся гиббсовским состоянием относительно модифицированной фильтрации $\widetilde{\mathbb{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda)_{\Lambda \in \tilde{I}}$ и модифицированной спецификации $\widetilde{\Pi} = (\Pi_\Lambda)_{\Lambda \in \tilde{I}}$.

Зафиксируем подмножество $G \subset \mathbb{Z}^d$ и положим $I_G = \{\Lambda \in I : \Lambda \cap G = \emptyset\}$. Очевидно, что I_G допустимо. Пусть $\Pi^G = (\Pi_\Lambda)_{\Lambda \in I_G}$.

Предложение 3.2. **Если $P \in \mathcal{G}(\Pi)$, $G \subset \mathbb{Z}^d$ и $f_G : \Omega \longmapsto \Omega'$ является измеримым преобразованием в измеримое польское пространство Ω', зависящее только от X_G, т.е. имеет вид $f_G = f \circ X_G$, где $f : \Omega_G \longmapsto \Omega'$ является $\mathcal{E}_G/\mathcal{F}'$-измеримым ($\mathcal{E}_G = \sigma(X_i, i \in G)$ и $\mathcal{F}'$ – борелевское σ-поле в Ω'), то $P_\eta \in \mathcal{G}(\Pi^G)$, P_{f_G} – п.н.$[\eta]$. Здесь $\eta \longmapsto P_\eta$ обозначает регулярное условное вероятностное распределение P при условии f_G.**

Доказательство : С одной стороны мы имеем дезинтеграцию

$$P = \int_{\Omega'} P_\eta \, P_{f_G}(d\eta).$$

С другой стороны, так как $P \in \mathcal{G}(\Pi)$, то

$$P = \int_{\Omega'} P_\eta \Pi_\Lambda \, P_{f_G}(d\eta), \quad \Lambda \in I.$$

Покажем, что $P_\eta \Pi_\Lambda = P_\eta$ почти наверное относительно P_{f_G}, для всех $\Lambda \in I_G$. Принимая во внимание единственность разложения (3.3) и счётность I_G

достаточно показать, что отображение $\eta \longmapsto P_\eta^G \equiv P_\eta \Pi_\Lambda$ для любого $\Lambda \in I_G$ имеет все свойства регулярного условного вероятностного распределения состояния P при условии f_G. С этой целью заметим, что $P_\eta(R) = 1$ почти наверное относительно P_{f_G}, так как P является умеренным (см. Замечание 2.2). Следовательно, P_{f_G}-почти наверное

$$P_\eta^G\{f_G = \eta\} = \int_R \Pi_\Lambda(\omega, f_G = \eta)\ P_\eta(d\omega), \quad \Lambda \in I_G.$$

Так как $G \cap \Lambda = \emptyset$, то $\{f_G = \eta\}$, $\eta \in \Omega'$ является событием в $\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda$. Следовательно, правая часть предыдущего равенства равна

$$\int_R \mathbb{1}_{\{f_G=\eta\}}(\omega) \cdot \Pi_\Lambda(\omega, \Omega)\ P_\eta(d\omega) = P_\eta\{f_G = \eta\} = 1.$$

Таким образом, P_η^G суть вероятности на Ω сосредоточенные на $\{f_G = \eta\}$. Остальные свойства регулярного условного вероятностного распределения для P_η^G непосредственно следуют из аналогичных свойств для P_η. Предложение 3.2 доказано.

Таким образом, условия на гиббсовское состояние на $G \subset \mathbb{Z}^d$ изменяют только фильтрацию и спецификацию заменой параметрического множества I на I_G. Так как для данного $\eta \in \Omega'$, P_η^G сосредоточена на $\Omega_\eta = \{f_G = \eta\}$, то мы будем работать только на Ω_η. Рассмотрим ограничения

$$\Pi^\eta = (\Pi_\Lambda^\eta)_{\Lambda \in I_G}, \quad \text{где} \quad \Pi_\Lambda^\eta = Res_{\Omega_\eta} \Pi_\Lambda,$$

$$\mathbb{F}^\eta = (\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda^\eta)_{\Lambda \in I_G}, \quad \text{где} \quad \widehat{\mathcal{F}}_\Lambda^\eta = \Omega_\eta \cap \widehat{\mathcal{F}}_\Lambda.$$

Очевидно, что Π^η является $\mathbb{F}^\eta$-спецификацией на Ω_η. Пусть $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, I^*, \mathbb{F}^*)$ – измеримый базис, а $\psi : I \longmapsto I^*$, сохраняющая порядок биекция, и φ – отображение из Ω в Ω^*. Образ P_φ меры P при отображении φ задаётся формулой

$$P_\varphi = \int_{\Omega'} P_{\varphi_\eta}^\eta\ P_{f_G}(d\eta). \tag{3.16}$$

Здесь φ_η – сужение отображения φ на Ω_η, а $P_{\varphi_\eta}^\eta$ есть образ P^η меры при φ_η. Это сводит задачу преобразования P при отображении φ к преобразованию P^η при отображении φ_η. Воспользуемся Предложением 3.2 и Теоремой 3.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3. В условиях Предложения 3.2 предположим также, что (φ_η, ψ) является $\mathbb{F} - \mathbb{F}^*$-преобразованием для всех $\eta \in \Omega'$. Если

$$\Pi_\Lambda^\eta(\omega_1, \cdot) = \Pi_\Lambda^\eta(\omega_2, \cdot) \text{ на } (\Omega_\eta \cap \mathcal{F})^{sat_\eta} \text{ для любого } \omega_1 \sim_\eta \omega_2, \quad \eta \in \Omega', \Lambda \in I_G, \tag{3.17}$$

то $P^{\eta}_{\varphi_\eta} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{\varphi_\eta,\psi}(\Pi^\eta))$ P_{fa} – п.н.$[\eta]$. **Кроме того, P_φ является смесью гиббсовских состояний, задаваемых формулой (3.16). Здесь $\sim_\eta$ обозначает отношение эквивалентности в Ω_η, определяемое по φ_η, и $(\Omega_\eta \cap \mathcal{F})^{sat}$, есть набор множеств $A \in \Omega_\eta \cap \mathcal{F}$, насыщенных относительно $\sim_\eta$.**

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению : при вышеуказанных условиях образ гиббсовского состояния $P \in \mathcal{G}(\Pi)$ относительно φ является смесью гиббсовских состояний. Отметим, что в важном частном случае, когда каждое $\varphi_\eta : \Omega_\eta \to \Omega'_\eta = \varphi_\eta(\Omega)$ является биективным, (3.17) выполняется автоматически. Ниже мы приведём конкретные применения этого результата к задаче преобразования слабых решений ∞-мерных стохастических градиентных систем в слабые решения уравнений Гинзбурга-Ландау.

§4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГРАДИЕНТНЫХ СИСТЕМ

4.1. Обозначения. Пусть E – польское пространство $C([0,1],\mathbb{R})$ с топологией равномерной сходимости и $\mathcal{E}$ – его борелевская σ-алгебра. Рассмотрим произведение $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$, которое также является польским. Для данного семейства $m = (m_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ σ-конечных мер на $\mathbb{R}$, пусть $P^m = (\pi^{m_i})_{i\in\mathbb{Z}^d}$ обозначает семейство винеровских мер π^{m_i} на E с начальными мерами m_i.

В этой решётчатой модели, где $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$, мы вначале выберем подходящий набор I непустых конечных подмножеств множества $A = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, который упорядочен сверху и счётно порождён следующим образом. Обозначим через $\mathcal{S}_e(A)$ набор конечных, непустых подмножеств множества A и через $|x|_\infty$, $|x|_1$, $x \in \mathbb{R}^d$ нормы, определённые по формулам

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad |x|_\infty = \max_{i=1,\dots,d} |x_i| \quad x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Рассмотрим следующее множество индексов I :

$$I = \left\{ \Lambda \in \mathcal{S}_e(A) \middle| \quad \forall i \in A\setminus\Lambda, \quad \exists j \in \mathcal{U}(i)\setminus\{i\} : j \notin \Lambda \right\}, \tag{4.1}$$

где $\mathcal{U}(i) = \{j \in A : |i-j|_1 \le 1\}$. Очевидно, что I частично упорядочено сверху операцией включения и счётно порождено следующей последовательностью центрированных кубов в A : $\Lambda_n = \{i \in A : \quad |i|_\infty \le n\}$.

Определение 4.1. Подмножество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ называется **выпуклым**, если существует непустое выпуклое подмножество $C \subset \mathbb{R}^d$, удовлетворяющее следующим условиям :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad i \in \Lambda \Leftrightarrow \inf_{x \in C} |i - x|_\infty \le \frac{1}{2}.$$

Подмножество из A называется **выпуклым в** A, если оно является следом в A некоторого выпуклого подмножества из $\mathbb{Z}^d$.

Нашей целью является преобразование решётчатой модели в стохастическую электрическую сеть. Для этого нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $(\mathbb{Z}^d)^*$ - множество всех направленных связок $b = (i, j)$ в $\mathbb{Z}^d$, т.е. если $i, j \in \mathbb{Z}^d$ и $|i - j|_1 = 1$, то направление идёт от j к i. Для заданной связки $b = (i, j)$ обозначим $x_b = i$, $y_b = j$ и будем писать $-b = (j, i)$ для связки с противоположным направлением. Для $i \in A$ положим $V(i) = \{b \in (\mathbb{Z}^d)^* : \ x_b = i$ или $y_b = i\}$, а для $\Lambda \in S_c(A)$ положим $\Lambda^{bd} = \{b \in (\mathbb{Z}^d)^* : x_b \in \Lambda$ и $y_b \in \Lambda\}$.

$$cl(\Lambda^{bd}) = \{b \in (\mathbb{Z}^d)^* : x_b \in \Lambda \quad \text{или} \quad y_b \in \Lambda\} = \bigcup_{j \in \Lambda} V(j),$$

$$cl(\Lambda) = \{j \in A : \inf_{i \in \Lambda} |j - i|_1 \le 1\} = \bigcup_{j \in \Lambda} U(j).$$

Лемма 4.1. Отображение $\psi : I \longmapsto S_c((\mathbb{Z}^d)^*)$, $\quad \psi(\Lambda) = cl(\Lambda^{bd})$, определяет сохраняющую порядок инъекцию, причём порядком в $(\mathbb{Z}^d)^*$ является операция включения.

Доказательство : Очевидно, что ψ сохраняет порядок. Покажем, что ψ инъективно. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2 \in I$ такие, что $cl(\Lambda_1^{bd}) = cl(\Lambda_2^{bd})$. Отсюда следует, что $\Lambda_1 = \Lambda_2$ или что эквивалентно $\Lambda_1^c = \Lambda_2^c$. Действительно, пусть $i \notin \Lambda_1$ и выберем $j \in U(i) \setminus \{i\}$ такое, что $j \notin \Lambda_1$. Тогда соответствующая связка $b = (i, j)$ не будет элементом множества $cl(\Lambda_1^{bd})$, и поэтому $b \notin cl(\Lambda_2^{bd})$. Но отсюда следует, что $i \notin \Lambda_2$. Поэтому по предположению $\Lambda_1^c \subset \Lambda_2^c$. Аналогично доказывается и обратное включение. Лемма 4.1 доказана.

Таким образом, мы нашли сохраняющую порядок биекцию

$$\psi : I \longmapsto I^* = \psi(I), \quad \psi(\Lambda) = cl(\Lambda^{bd}). \tag{4.2}$$

Для того, чтобы определить преобразование для решётчатых конфигураций, положим

$$\Omega^* = \left\{ \eta \in E^{(\mathbb{Z}^d)^*} : \sum_{b \in C} Y_b(\eta) = 0 \text{ для любого замкнутого контура в } \mathbb{Z}^d \right\}, \tag{4.3}$$

где $Y_b : E^{(\mathbb{Z}^d)^*} \longrightarrow E$ обозначает проективное отображение. Ниже мы преобразуем гиббсовские состояния на Ω, которые представляют стохастические градиентные системы с помощью преобразования (∇, ψ), где ∇ определяется по формуле

$$\nabla : \Omega \to \Omega^*, \quad \nabla(\omega) = \eta = (\eta_b)_{b \in (\mathbb{Z}^d)^*}, \quad \omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}^d},$$

$$\eta_b = \omega_i - \omega_j, \quad \text{если} \quad b = (i,j) \in (\mathbb{Z}^d)^*. \tag{4.4}$$

Очевидно, что $\eta \in \Omega^*$. Если мы будем интерпретировать ω_i, $i \in \mathbb{Z}^d$ как потенциалы, приписанные к вершинам i, то $\eta_b = \omega_i - \omega_j$ обозначает разность потенциалов между вершинами i и j ребра b. Определение множества Ω^* отражает закон потенциала Киргофа. Другая интерпретация этого была дана во введении. Определим теперь класс гиббсовских состояний, которые будут преобразованы с помощью (∇, ψ).

4.2. Стохастические градиентные системы как гиббсовские состояния. Пусть $\phi = (\phi_\Lambda)_{\Lambda \in I}$ – парный потенциал на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ (т.е. $\Phi_\Lambda \equiv 0$, если $card(\Lambda) \geq 3$), удовлетворяющий условиям : $\phi_i, \phi_{ij} \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и ϕ_{ij} симметрична, т.е. $\phi_{ij}(y_i, y_j) = \phi_{ij}(y_j, y_i)$ для каждого $y_i, y_j \in \mathbb{R}$. Гамильтониан $h = (h_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, соответствующий ϕ имеет вид

$$h_i(y) = \phi_i(y_i) + \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \phi_{ij}(y_i, y_j), \quad i \in \mathbb{Z}^d, \quad y = (y_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Рассмотрим теперь связанную стохастическую градиентную систему $(Grad)_\nu$ (см. Введение). Через Q^ν обозначим решение вида $X(t) = \left(X_i(t)\right)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, $t \in [0,1]$, если оно существует. При нижеследующих условиях на ϕ и ν существует единственное сильное решение градиентной системы $(Grad)_\nu$:

(α) $\exists K > 0, \quad \sup_i |\phi_i'(0)| \leq K \quad$ и $\quad \phi_i'' \geq -K, \quad i \in \mathbb{Z}^d,$

(β) ϕ_i' возрастает самое большее полиномиально со степенью p, $\quad i \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}
&(\gamma) \quad \sup_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_{ij}(0,0) \right| < \infty, \quad j \in \mathbb{Z}^d, \\
&(\delta) \quad \sup_{i \neq j} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \phi_{i,j} \right| < c_{i-j}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi_{i,j} \geq -q_{i,j}, \quad q_{ij} \geq 0, \\
&\qquad \sup_i \sum_j q_{i,j} < \infty, \ (c_i)_i \in S(\mathbb{Z}^d),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(ϵ) ν сосредоточена на $S'(\mathbb{Z}^d)$, где $S(\mathbb{Z}^d)$ – пространство всех быстро убывающих последовательностей на $\mathbb{Z}^d$, и

$$S'(\mathbb{Z}^d) = \left\{ (y_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} : \exists q \in \mathbb{N}, \quad \sum_i (|i|+1)^{2q}|y_i|^2 < \infty \right\}.$$

Далее, пусть процесс $X = (X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ принимает значения в $S'(\mathbb{Z}^d)$ и непрерывен, т.е. имеет непрерывные траектории (см. [20], Теорема 4.2). При следующем дополнительном условии

$$\exists A, \quad \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_i < A, \quad \exists B > 0, \quad x\cdot\phi_i'(x) \geq Ax^2 - B, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}^d$$

множество гиббсовских состояний $\mathcal{G}_T(\phi, (dx_i)_{i\in\mathbb{Z}^d})$, построенных по ϕ и лебеговой мере, сосредоточенной на $S'(\mathbb{Z}^d)$, является непустым подмножеством (см. [20], Теорема 4.3).

Теперь рассмотрим стохастическую систему $(Grad)_\nu$, где гамильтониан h построен по потенциалу ϕ, удовлетворяющему условиям $(\alpha)-(\delta)$ из (4.5), а начальное состояние ν является гиббсовским состоянием множества $\mathcal{G}_T(\widetilde{\phi}, (m_i)_i)$, где $\widetilde{\phi}$ – другой потенциал такой, что $\mathcal{G}_T(\widetilde{\phi}, (m_i)_i) \neq \emptyset$, а $m = (m_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ – последовательность σ-конечных мер на $\mathbb{R}$. Если потенциал ϕ удовлетворяет также следующим условиям (см. [2], условие 4.18) : для всех $i, j \in \mathbb{Z}^d$ существуют C_i, C_{ij} и p_i такие, что

$$|\phi'''(x_i)| \leq C_i(1+|x_i|^{p_i}), \quad (C_{ij})_{j\in\mathbb{Z}^d} \in S(\mathbb{Z}^d),$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial x_a \partial x_b \partial x_c}\phi_{ij}(x_i, x_j)\right| \leq C_{ij}(1+|x_i|^{p_i}+|x_j|^{p_i}), \quad a, b, c \in \{i, j\},$$

тогда имеет место следующее утверждение, которое характеризует решение Q^ν уравнения $(Grad)_\nu$ как гиббсовское состояние на Ω.

Теорема 4.1. ([2], Теорема 4.19) **Пусть ϕ и $\widetilde{\phi}$ – потенциалы на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ такие, что ϕ удовлетворяет условиям $(\alpha)-(\delta)$ из (4.5) и $\mathcal{G}_T(\widetilde{\phi}, (m_i)_i) \neq \emptyset$, где $m = (m_i)_i$ есть последовательность σ-конечных мер на $\mathbb{R}$. Пусть также $\nu \in \mathcal{G}_T(\widetilde{\phi}, (m_i)_i)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны :**

i) $Q = Q^\nu$ с начальным состоянием $\nu \in \mathcal{G}_T(\widetilde{\phi}, (m_i)_i)$,

ii) $Q \in \mathcal{G}_T(H, P^m)$,

где $\mathcal{G}_T(H, P^m)$ – множество гиббсовских состояний в $\mathcal{G}(H, P^m)$, сосредоточенных на $C([0,1], S'(\mathbb{Z}^d))$, а H – $\mathbb{F}$-гамильтониан на Ω, определённый

по ϕ и $\widetilde{\phi}$ следующим образом : $H_\Lambda(\omega) = H_\Lambda^{dyn}(\omega) + H_\Lambda^{bd}(\omega)$, $\Lambda \in I$, $\omega \in \Omega$, где

$$H_\Lambda^{dyn}(\omega) = \int_0^1 \sum_{\substack{\Lambda':\Lambda'\cap\Lambda\neq\phi,\\ card\Lambda'=1,2,3}} \varphi_{\Lambda'}(\omega(s))\, ds,$$

$$H_\Lambda^{bd}(\omega) = \sum_{\Lambda':\Lambda'\cap\Lambda\neq\phi} \left(\frac{1}{2}\phi_{\Lambda'}(\omega(1)) - \frac{1}{2}\phi_{\Lambda'}(\omega(0)) + \widetilde{\phi}_{\Lambda'}(\omega(0))\right).$$

Здесь $\varphi = (\varphi_\Lambda)_\Lambda$ есть следующий трёхточечный потенциал :

$$\varphi_k(x_k) = -\frac{1}{4}\Delta_k\phi_k(x_k) + \frac{1}{8}(\nabla_k\phi_k)^2(x_k),$$

$$\varphi_{k,l}(x_k, x_l) = -\frac{1}{4}(\Delta_k + \Delta_l)\phi_{k,l}(x_k, x_l) + \frac{1}{4}\left[\nabla_k\phi_k(x_k)\nabla_k\phi_{k,l}(x_k, x_l) + \right.$$
$$\left. + \nabla_l\phi_l(x_l)\nabla_l\phi_{k,l}(x_k, x_l)\right] - \frac{1}{8}\left[(\nabla_k\phi_{k,l})^2 + (\nabla_l\phi_{k,l})^2\right](x_k, x_l),$$

$$\varphi_{k,l,m}(x_k, x_l, x_m) = -\frac{1}{4}\left[\nabla_k\phi_{k,m}(x_k, x_m)\nabla_k\phi_{k,l}(x_k, x_l) + \right.$$
$$\left. + \nabla_l\phi_{k,l}(x_k, x_l)\nabla_l\phi_{m,l}(x_m, x_l) + \nabla_m\phi_{k,m}(x_k, x_m)\nabla_m\phi_{m,l}(x_m, x_l)\right],$$

$$\varphi_\Lambda \equiv 0, \quad \text{если} \quad card(\Lambda) > 3.$$

Приведём два примера гиббсовских состояний ν в $\mathcal{G}_T(\widetilde{\phi}, (dx_i)_{i\in\mathbb{Z}^d})$.

Пример 4.1. (см. [19]) Пусть ϕ – парный потенциал на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ такой, что

$$\begin{cases} \phi_i(x) & = P(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}^d, \\ \phi_{ij}(x_i, x_j) & = \frac{1}{2}(x_i - x_j)^2, \quad \text{для} \quad |i-j| = 1, \\ \phi_{ij}(x_i, x_j) & = 0, \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где P – выпуклый, ограниченный снизу потенциал, не равный константе. Хорошо известно (см. [19]), что множество $\mathcal{G}_T(\phi, (dx_i)_i)$ содержит по крайней мере одно гиббсовское состояние ν.

Пример 4.2. (см. [14]) Если α достаточно большое, то для потенциала

$$\begin{cases} \phi_i^{(\alpha)}(x_i) & = x_i^4 - \alpha x_i^2, \\ \phi_{i,j}^{(\alpha)}(x_i, x_j) & = \frac{1}{2}(x_j - x_i)^2, \quad \text{если} \quad |i-j| = 1, \\ \phi^{(\alpha)} & = 0, \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

множество $\mathcal{G}_T(h^{(\alpha)}, (dx_i)_i)$ содержит по крайней мере один элемент.

4.3. Градиентное преобразование (∇, ψ). Рассмотрим польское пространство $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ совместно с $\mathcal{F}, I$ и $\mathbb{F} = (\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda)_{\Lambda\in I}$, определённым так же как и в (2.2). Мы намерены использовать преобразования $\nabla : \Omega \longrightarrow \Omega^*$ и $\psi : I \to I^*$, определённые по (4.2) - (4.4), а также Теорему 3.1 и результаты об условных гиббсовских состояниях (см. **3.3**).

Пусть $G = \{0\}$ и $\omega_0 \in E$ - заданная траектория. Рассмотрим подпространство $\Omega_{\omega_0} = \{X_0 = \omega_0\}$, имеющее борелевское-$\sigma$-поле $\mathcal{F}_{\omega_0} = \Omega_{\omega_0} \cap \mathcal{F}$. В качестве фильтрации выберем $\mathbb{F}^{\omega_0} = (\widehat{\mathcal{F}}_\Lambda^{\omega_0})_{\Lambda \in I}$, задаваемую по следу $\mathbb{F}$ в Ω_{ω_0} и с множеством индексов I, определяемым как в (4.1).

Лемма 4.2. Сужение ∇_{ω_0} преобразования ∇ на Ω_{ω_0} является непрерывной инъекцией из Ω_{ω_0} в $E^{(\mathbb{Z}^d)^*}$.

Доказательство : Непрерывность ∇_{ω_0} очевидна. Докажем инъективность. Пусть $\omega, \omega' \in \Omega_{\omega_0}$ такое, что $\nabla(\omega) = \nabla(\omega')$. Следовательно, для любого $b \in (\mathbb{Z}^d)^*$ имеем $\nabla(\omega)_b = \nabla(\omega')_b$. С другой стороны, мы можем представить координаты ω_i, ω'_i следующим образом :

$$\omega_i = \sum_{b \in C_{0,i}} \nabla(\omega)_b + \omega_0, \quad \omega'_i = \sum_{b \in C_{0,i}} \nabla(\omega')_b + \omega_0, \quad i \in \mathbb{Z}^d,$$

где $C_{0,i}$ - цепь, соединяющая 0 и i. Следовательно, $\omega_i = \omega'_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}^d$. Лемма 4.2 доказана.

Таким образом, по Следствию 3.3 из [15] имеем, что ∇_{ω_0} является изоморфизмом Ω_{ω_0} на $\nabla_{\omega_0}(\Omega_{\omega_0})$. Последнее совпадает с пространством Ω^*, определённым в (4.3). Следовательно, $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ является стандартным борелевским пространством, а $\mathcal{F}^*$ определяет след борелевского-σ-поля $E^{(\mathbb{Z}^d)^*}$ в Ω^*. Очевидно, что $\mathcal{F}^* = \{B \subset \Omega^* : \nabla_{\omega_0}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{\omega_0}\}$ и не зависит от ω_0. Поскольку $\nabla_{\omega_0} : \Omega_{\omega_0} \longmapsto \Omega^*$ есть изоморфизм, то фильтрация $\mathbb{F}^*_{\omega_0} = \left(\widehat{\mathcal{F}}_{\Lambda^*}^{\omega_0}\right)_{\Lambda^* \in I^*}$ в $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ задаётся по формуле

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\Lambda^*}^{\omega_0} = \left\{B \subset \Omega^* : \nabla_{\omega_0}^{-1}(B) \in \widehat{\mathcal{F}}^{\omega_0}_{\psi^{-1}(\Lambda^*)}\right\}, \quad \Lambda^* \in I^*.$$

Фильтрация $\mathbb{F}^*_{\omega_0}$ не зависит от ω_0, и поэтому мы используем обозначение $\mathbb{F}^*$ вместо $\mathbb{F}^*_{\omega_0}$. Из конструкции также следует, что $(\nabla_{\omega_0}, \psi)$ является $\mathbb{F}^{\omega_0}/\mathbb{F}^*$-преобразованием для каждого $\omega_0 \in E$.

Таким образом, мы можем преобразовать стохастические градиентные системы с помощью (∇, ψ). Из Предложения 3.2 и Теоремы 3.3 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть ϕ и $\bar{\phi}$ – потенциалы на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Предположим, что ϕ удовлетворяет условиям $(\alpha) - (\delta)$ из (4.5) и $\mathcal{G}_T(\bar{\phi}, (m_i)_i) \neq \emptyset$. Здесь

$m = (m_i)_i$ является последовательностью σ-конечных мер на $\mathbb{R}$. Пусть также $\nu \in \mathcal{G}_T(\tilde{\phi}, (m_i)_i)$. Если Q^ν является решением системы $(Grad)_\nu$ с начальным законом ν, то преобразованное состояние Q^ν_∇ является смесью гиббсовских состояний на $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$:

$$Q^\nu_\nabla = \int_E Q^\nu_{\omega_0,\nabla}\, Q^\nu_{X_0}(d\omega_0).$$

Здесь $Q^\nu_{\omega_0,\nabla}$ является гиббсовским состоянием, гамильтониан которого H^{ω_0} и спецификация $\Pi^{\omega_0,\circ}$ получаются из гамильтониана H и спецификации Π° с помощью следующего преобразования перенормировки $\mathcal{R}_{\nabla_{\omega_0},\phi} : (H, \Pi^\circ) \longmapsto (H^{\omega_0}, \Pi^{\omega_0,\circ})$:

$$\begin{cases} H^{\omega_0}_{\psi(\Lambda)}(\eta) = \mathrm{Res}_{\Omega_{\omega_0}} H_\Lambda\big(\nabla^{-1}_{\omega_0}(\eta)\big), \\ \Pi^{\omega_0,\circ}_{\psi(\Lambda)}(\eta,\cdot) = \mathrm{Res}_{\Omega_{\omega_0}} \Pi^\circ_\Lambda(\nabla^{-1}_{\omega_0}(\eta),\cdot) \circ \nabla^{-1}_{\omega_0}, \end{cases} \qquad \eta \in \Omega^*, \quad \Lambda \in I,$$

где $\mathrm{Res}_{\Omega_{\omega_0}}$ обозначает сужение на Ω_{ω_0}.

Замечание 4.1. $\Pi^{\omega_0,\circ}$ в действительности зависит от ω_0, потому что винеровская мера не является трансляционно инвариантной.

4.4. Класс гиббсовских состояний Функаки и Шпона. Пусть $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ и $\mathcal{Y}^* = \nabla(\mathcal{Y})$. Для заданного $x_0 \in \mathbb{R}$ положим $\mathcal{Y}_{x_0} = \{X_0 = x_0\}$. Как и прежде, можно доказать, что сужение ∇_{x_0} преобразования ∇ на $\mathcal{Y}_{x_0}$ есть борелевский изоморфизм и $\nabla_{x_0}(\mathcal{Y}_{x_0}) = \mathcal{Y}^*$. Пусть $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}, \bar{I}, \mathbb{F})$ – измеримый базис, построенный по $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}$, и пусть I – подмножество множества $\bar{I}$, заданное по (4.1). Рассмотрим также измеримый базис $(\mathcal{Y}^*, \mathcal{F}^*, I^*, \mathbb{F}^*)$. Здесь $\mathcal{F}^*$ есть след борелевского-σ-поля произведения $\mathbb{R}^{(\mathbb{Z}^d)^*}$ на $\mathcal{Y}$, $I^* = \psi(I)$, а $\mathbb{F}^*$ есть фильтрация, определённая следующим образом :

$$\hat{\mathcal{F}}^*_{\psi(\Lambda)} = \nabla_{x_0}\left(\hat{\mathcal{F}}_\Lambda \cap \mathcal{Y}_{x_0}\right), \quad \Lambda \in I,$$

где x_0 – произвольное действительное число.

Замечание 4.2. Если в качестве преобразованного начального гиббсовского состояния взять $\nu \in \mathcal{G}(h, (m_i)_i)$, где h – гамильтониан, построенный на потенциале ϕ и на $\mathcal{Y}$, то вновь получаем результат Теоремы 4.2. Таким образом, ν_∇ является смесью гиббсовских состояний на $\mathcal{Y}^*$ в следующем смысле :

$$\nu_\nabla = \int_{\mathbb{R}} \nu_{x_0,\nabla}\, \nu_{X_0}(dx_0). \tag{4.6}$$

где $\nu_{x_0,\nabla}$ – гиббсовское состояние, построенное по гамильтониану h^{*,x_0} и спецификации $\Pi^{*,x_0,0}$, которые определяются следующим образом :

$$\begin{cases} h^{*,x_0}_{\phi(\Lambda)}(y) = h^{x_0}_{\Lambda}\big(\nabla^{-1}_{x_0}(y)\big), \\ \Pi^{*,x_0,0}_{\phi(\Lambda)}(y,\cdot) = \Pi^{x_0,0}_{\Lambda}\big(\nabla^{-1}_{x_0}(y),\cdot\big)\circ\nabla^{-1}_{x_0}, \end{cases} \quad y\in\mathcal{Y}^*, \quad \Lambda\in I.$$

Здесь $\Pi^{x_0,0}_{\Lambda}$ и $h^{x_0}_{\Lambda}$ суть сужения Π^0_{Λ} и h_{Λ} на $\mathcal{Y}_{x_0}$, соответственно. В этом случае $\Pi^{*,x_0,0}$ не зависит от x_0, если Π^0 построена в каждой компоненте по лебеговой мере, так как эта мера трансляционно инвариантна.

Далее мы предполагаем, что Π^0 построена именно так. Пусть ϕ – потенциал, рассмотренный Функаки и Шпоном в [9] :

$$\phi_{i,j}(x,y) = \begin{cases} V(x-y), & \text{если} \quad |i-j|_1 = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4.7}$$

где V принадлежит $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, чётен и строго выпуклый, т.е. существуют числа c_1, $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 \le V'' \le c_2. \tag{4.8}$$

Рассмотрим на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ гамильтониан h, построенный по ϕ. Ясно, что для любого $\xi\in\mathcal{Y}$ и $\Lambda\in I$ имеем $h^{*,x_0}_{\phi(\Lambda)}(\nabla\xi) = h_{\Lambda}(\xi)$. Следовательно, можно определить на $\mathcal{Y}^*$, не зависящий от x_0, $\mathbb{F}^*$-гамильтониан h^* по формуле

$$h^*_{\phi(\Lambda)}(\eta) = h^{x_0}_{\Lambda}(\nabla^{-1}_{x_0}(\eta)), \quad \eta\in\mathcal{Y}^*, \quad \Lambda\in I,$$

где x_0 – произвольное действительное число. С другой стороны, так как $\Pi^{*,x_0,0}$ не зависит от x_0, то на $\mathcal{Y}^*$ можно определить $\mathbb{F}^*$-спецификацию $\Pi^{*,0}$ следующим образом :

$$\Pi^{*,0}_{\phi(\Lambda)}(\eta,\cdot) = \Pi^{x_0,0}_{\Lambda}(\nabla^{-1}_{x_0}(\eta),\cdot)\circ\nabla^{-1}_{x_0}, \quad \eta\in\mathcal{Y}^*, \quad \Lambda\in I.$$

Следовательно, гиббсовские меры $\nu_{x_0,\nabla}$, $x_0\in\mathbb{R}$, заданные в (4.6), определяются по той же спецификации Π^*, которая построена по h^* и $\Pi^{*,0}$. Поэтому для каждого $f\in b\mathcal{F}^*$ и каждого $\Lambda\in I$ имеем

$$\nu_\nabla(\Pi^*_{\phi(\Lambda)}(\cdot,f)) = \int_{\mathbb{R}} \nu_{x_0,\nabla}(\Pi^*_{\phi(\Lambda)}(\cdot,f))\,\nu X_0(dx_0) = \int \nu_{x_0,\nabla}(f)\,\nu X_0(dx_0) = \nu_\nabla(f).$$

Как следствие получаем следующую лемму.

Лемма 4.3. Если ν – вероятностная мера в $\mathcal{G}(h,\Pi^0)$, то её образ ν_∇ относительно ∇ является классом Функи–Шпона гиббсовских состояний, т.е. $\mathcal{G}(h^*,\Pi^{*,0})$.

Теперь нашей целью является доказательство обратного утверждения.

Лемма 4.4. Пусть μ – вероятностная мера на $\mathcal{Y}^*$ такая, что $\mathcal{G}(h^*, \Pi^{*,0})$. Тогда она является образом относительно ∇ некоторой $\nu \in \mathcal{G}(h, \Pi^0)$.

Доказательство : Пусть $\mu \in \mathcal{G}(h^*, \Pi^{*,0})$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Напомним, что ∇_{x_0} – борелевский изоморфизм между $\mathcal{Y}_{x_0}$ и $\mathcal{Y}^*$. Следовательно, из определения $\mathbb{F}^*$ и Теоремы 3.1 получаем, что для каждого $x_0 \in \mathbb{R}$, образ ν_{x_0} меры μ относительно $\nabla_{x_0}^{-1}$ является гиббсовским состоянием, т.е. $\nu_{x_0} \in \mathcal{G}(h^{x_0}, \Pi^{x_0,0})$. Определим на $\mathcal{F}$ функцию

$$\nu(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \nu_{x_0}(\cdot)\, p(dx_0),$$

где ν_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}$)– гиббсовская мера, p – вероятность на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Мера ν корректно определена, так как для заданного $A \in \mathcal{F}$ мы полагаем $A_{x_0} = A \cap \mathcal{Y}_{x_0}$. Так как ν_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}$ сосредоточена на $\mathcal{Y}_{x_0}$, то

$$\nu_{x_0}(A) = \nu_{x_0}(A_{x_0}) = \mu(\nabla_{x_0}(A_{x_0})) = \mu(A^*),$$

где $A^* = \nabla_{x_0}(A_{x_0}) \in \mathcal{F}^*$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}$, так как $\mathcal{F}^*$ не зависит от x_0. Понятно, что ν является вероятностью на $\mathcal{F}$.

Пусть Π^{x_0} – спецификация, построенная по h^{x_0} и $\Pi^{x_0,0}$. Простыми рассуждениями можно доказать, что для каждого $x_0 \in \mathbb{R}$ и каждого $\Lambda \in I$ имеем $\Pi_\Lambda^{x_0}\Pi_\Lambda = \Pi_\Lambda^{x_0}$. Докажем, что ν - гиббсовская мера, определённая по Π. Так как $\nu_{x_0} \in \mathcal{G}(\Pi^{x_0})$, то для каждого $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\nu(\Pi_\Lambda(\cdot, f)) = \int_{\mathbb{R}} \nu_{x_0}(\Pi_\Lambda^{x_0}\Pi_\Lambda(\cdot, f))\, p(dx_0) = \int_{\mathbb{R}} \nu_{x_0}(f))\, p(dx_0) = \nu(f),$$

где $f \in b\mathcal{F}$.

Осталось показать, что μ есть образ ν относительно ∇. Полагая $f \in b\mathcal{F}^*$, имеем

$$\nu(f \circ \nabla) = \int_{\mathbb{R}} \nu_{x_0}(f \circ \nabla)\, p(dx_0) = \int \nu_{x_0, \nabla}(f)\, p(dx_0) = \int \mu(f)\, p(dx_0 = \mu(f).$$

Лемма 4.4 доказана.

Используя Леммы 4.3 и 4.4 получаем следующее предложение, которое понадобится для определения класса обратимых состояний поверхностного уравнения Гинзбурга-Ландау (см. [9]).

Предложение 4.1. Если ϕ – потенциал, заданный по формуле (4.7), то класс Фунаки и Спона гиббсовских состояний $\mathcal{G}(h^*, \Pi^{*,0})$ является точным образом $\mathcal{G}(h, \Pi^0)$ относительно дискретного градиентного оператора ∇.

4.5. Преобразование дивергенции. Преобразуем Q^{ν}_{∇} по следующему закону :

$$\begin{cases} \nabla^{*} : \Omega^{*} \longmapsto \Omega, \quad \nabla^{*}(\eta)_{i} = \sum_{b:y_b=i} \eta_b, \quad i \in \mathbb{Z}^{b}, \\ \psi^{*} : I^{*} \longmapsto I, \quad \psi^{*} -- \text{обратное к } \psi. \end{cases}$$

Мы интересуемся гиббсовской структурой Q^{ν}_{Δ}, где $\Delta = \nabla^{*}\nabla$ – дискретный оператор Лапласа. Здесь рассмотрим случай $d = 1$, а также вместо непрерывной сюръекции ∇^{*} будем рассматривать польское подмножество из Ω^{*}, которое является инъекцией и, следовательно, борелевским изоморфизмом. Выберем следующее подпространство из Ω^{*} : фиксируем связку $e \in (\mathbb{Z}^{d})^{*}$, определённую по $y_e = 0$, $x_e = 1$, и пусть $\eta_e \in E$ – заданная траектория. Рассмотрим $\Omega^{*}_{\eta_e} = \{Y_e = \eta_e\}$. В $\Omega^{*}_{\eta_e}$ выберем след $\mathcal{F}^{*}_{\eta_e} = \Omega^{*}_{\eta_e} \cap \mathcal{F}^{*}$. Очевидно, что сужение $\nabla^{*}_{\eta_e}$ of ∇^{*} на $\Omega^{*}_{\eta_e}$ есть инъекция и, следовательно, является борелевским изоморфизмом. Лапласиан Δ становится непрерывной инъекцией Δ_{ω_0,η_e}, если ограничиться борелевским подмножеством $\Omega_{\omega_0,\eta_e} = \{(X_0, X_1 - X_0) = (\omega_0, \eta_e)\}$, и поэтому $\Delta_{\omega_0,\eta_e} : \Omega_{\omega_0,\eta_e} \longmapsto \Omega$ будет борелевским изоморфизмом. В качестве фильтрации в Ω_{ω_0,η_e} выберем след $\mathbb{F}^{\omega_0,\eta_e} = \left(\widehat{\mathcal{F}}^{\omega_0,\eta_e}_{\Lambda}\right)_{\Lambda\in I'}$ в Ω_{ω_0,η_e}, где $I' = \{\Lambda \in I/\Lambda \not\ni 1\}$.

Теорема 4.3. В условиях Теоремы 4.2 преобразованное состояние Q^{ν}_{Δ} является следующей смесью гиббсовских состояний на $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$Q^{\nu}_{\Delta} = \int_{E^2} Q^{\nu}_{(\omega_0,\eta_e),\Delta} Q^{\nu}_{(X_0,Y_e)}\,(d\omega_0, d\eta_e),$$

где $(\omega_0, \eta_e) \longmapsto Q^{\nu}_{\omega_0,\eta_e}$ – регулярное условное вероятностное распределение Q^{ν} при условии (X_0, Y_e), а его образ $Q^{\nu}_{(\omega_0,\eta_e),\Delta}$ при Δ является гиббсовским состоянием с гамильтонианом H^{ω_0,η_e} и спецификацией $\Pi^{(\omega_0,\eta_e),\circ}$, полученных из H и Π° с помощью преобразования перенормировки

$$\dot{\mathcal{R}}_{\Delta_{\omega_0,\eta_e},Id_{I'}} : \begin{cases} H^{\omega_0,\eta_e}_{\Lambda}(\xi) = Res_{\Omega_{\omega_0,\eta_e}} H_{\Lambda}\left(\Delta^{-1}_{\omega_0,\eta_e}(\xi)\right), \\ \Pi^{(\omega_0,\eta_e),\circ}_{\Lambda}(\xi, \cdot) = Res_{\Omega_{\omega_0,\eta_e}} \Pi^{\circ}_{\Lambda}\left(\Delta^{-1}_{\omega_0,\eta_e}(\xi), \cdot\right) \circ \Delta^{-1}_{\omega_0,\eta_e}, \end{cases}$$

где $\Lambda \in I'$ и $\xi \in \Omega_{\omega_0,\eta_e}$.

§5. ПОВЕРХНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ. ГИББСОВСКАЯ СТРУКТУРА И ОБРАТИМОСТЬ

Преобразуем стохастическую градиентную систему в систему, состоящую из уравнения Гинзбурга–Ландау в соединении с уравнением для переменной X_0. Возникает вопрос : в каком смысле хорошо известные свойства предыдущего уравнения переносятся на последнее и наоборот. Мы рассмотрим также частный случай так называемого поверхностного уравнения Гинзбурга–Ландау и опишем класс его обратимых состояний. Мы используем следующее непрерывное преобразование T_1 и его измеримое обратное Γ_1 :

$$\begin{cases} T_1 : \Omega \longmapsto E \times \Omega^*, & T_1(\omega) = (\omega_0, \nabla(\omega)), \quad \omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}, \\ \Gamma_1 : E \times \Omega^* \longmapsto \Omega, & \Gamma_1(\omega_0, \eta) = \omega, \end{cases}$$

где $\omega_i = \omega_0 + \sum_{b \in C_{0,i}} \eta_b$ для любой цепи $C_{0,i}$, соединяющей 0 и i. Мы будем употреблять строчные буквы τ_1 и γ_1 для этого преобразования, если пространство траекторий E заменяется на $\mathbb{R}$.

Из следующей леммы вытекает, что можно отождествлять градиентную систему с системой Гинзбурга–Ландау в соединении с переменной X_0.

Лемма 5.1. Пусть $\tilde{\phi}, \phi$ и (m_i), задаются как в Теореме 4.1, а μ_1 – вероятность, определяемая соотношением $\mu_1 = \nu_{\tau_1}$, где $\nu \in \mathcal{G}_T(\tilde{\phi}, (m_i)_i)$.

(1) Если $X = (X_i)_i$ является решением стохастической системы $(Grad)_\nu$ с начальным распределением ν, то преобразованный процесс $T_1(X) = (X_0, Y)$, $Y = \nabla(X)$ является решением поверхностного уравнения Гинзбурга–Ландау, связанного с X_0 и имеет начальный закон μ_1 :

$$(\mathcal{GLI}X_0)_{\mu_1} \begin{cases} dY_b(t) = -\frac{1}{2}(\nabla\partial h)_b\big(\Gamma_1(X_0, Y)(t)\big)\, dt + d(\nabla\beta)_b(t), \\ dX_0(t) = -\frac{1}{2}\partial_0 h_0\big(\Gamma_1(X_0, Y)(t)\big)\, dt + d\beta_0(t), & b \in (\mathbb{Z}^d)^*, t \in [0,1] \\ (X_0, Y)(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \mu_1, \end{cases}$$

Здесь $\partial h = (\partial_i h_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ и $\beta = (\beta_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$.

(2) Обратно, если (X_0, Y) является решением $(\mathcal{GLI}X_0)_{\mu_1}$, то $X = \Gamma_1(X_0, Y)$ является решением $(Grad)_\nu$.

В частности, вероятность Q на $E \times \Omega^*$ является законом распределения (X_0, Y) и решением для $(\mathcal{GLI}X_0)_{\mu_1}$ тогда и только тогда, когда $Q_{\Gamma_1} = Q^\nu$, что эквивалентно условию $Q = Q^\nu_{T_1}$. В этом случае мы будем писать $Q = Q^{\mu_1}$.

Используя хорошо известные свойства $(Grad)_\nu$ (см. [2]), получаем следующий результат существования и единственности для $(\mathcal{GLI}X_0)_{\mu_1}$: если $\mathcal{G}_T(\tilde{\phi}, (m_i)_i) \neq \emptyset$ и $\mu_1 = \nu_{\tau_1}$ для некоторого $\nu \in \mathcal{G}_T(\tilde{\phi}, (m_i)_i)$, то Q^{μ_1} является единственным решением $(\mathcal{GLI}X_0)_{\mu_1}$. Кроме того, так как $\nu \longmapsto Q^\nu$ является биекцией между $\mathcal{G}_T(\tilde{\phi}, (m_i)_i)$ и $\mathcal{G}_T(H, P^m)$, то $\mu_1 \longmapsto Q^{\mu_1}$ является биекцией между

$$\left\{\mu_1 = \nu_{\tau_1} : \nu \in \mathcal{G}_T\left(\tilde{\phi}, (m_i)_i\right)\right\} \quad \text{и} \quad \{Q^{\mu_1} = Q^\nu_{T_1} : Q^\nu \in \mathcal{G}_T(H, P^m)\}.$$

Эта лемма даёт характеризацию обратимых состояний из $(\mathcal{GLI}X_0)$ в классе начальных состояний вида μ_1. Пусть χ_0^* – преобразование обращения времени в пространстве траекторий $E \times \Omega^*$:

$$\chi_0^* : E \times \Omega^* \longmapsto E \times \Omega^*, \quad \chi_0^*\big((\omega_0(t))_t, (\eta(t))_t\big) = \big((\omega_0(1-t))_t, (\eta(1-t))_t\big).$$

Лемма 5.2. В условиях Леммы 5.1 следующие утверждения эквивалентны :

(1) μ_1 обратимо для $(\mathcal{GLI}X_0)$, т.е. $Q^{\mu_1}_{\chi_0^*} = Q^{\mu_1}$.

(2) $\mu_1 = \nu_{\tau_1}$, где $\nu \in \mathcal{G}_T(\phi, (dx_i)_i)$.

Доказательство использует следующую характеризацию обратимых начальных состояний ν $(Grad)_\nu$ в классе $\mathcal{G}_T(\bar{\phi}, (m_i)_i)$: ν - обратимо для $(Grad)$, т.е. $Q^\nu_\chi = Q^\nu$ тогда и только тогда, когда $\nu \in \mathcal{G}_T(\phi, (dx_i)_i)$. Здесь χ обозначает обращение времени на Ω. т.е. $(\omega(t))_t \longmapsto (\omega(1-t))_t$.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Мы должны показать, что $\nu \in \mathcal{G}_T\big(\phi, (dx_i)_i\big)$ и, следовательно, $Q^\nu_\chi = Q^\nu$. Имеем

$$Q^\nu(f \circ \chi) = Q^{\mu_1}\big(f \circ (\chi \circ \Gamma_1)\big) = Q^{\mu_1}\big(f \circ (\Gamma_1 \circ \chi_0^*)\big) = Q^{\mu_1}(f \circ \Gamma_1) = Q^\nu(f).$$

Здесь мы использовали обратимость μ_1 и коммутативность следующей диаграммы :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overset{T_1}{\underset{\Gamma_1}{\rightleftarrows}} & E \times \Omega^* \\ \chi \downarrow & & \downarrow \chi_0^* \\ \Omega & \overset{T_1}{\underset{\Gamma_1}{\rightleftarrows}} & E \times \Omega^* \end{array}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : Если $\nu \in \mathcal{G}_T\big(\phi, (dx_i)_i\big)$, то аналогично, получаем

$$Q^{\mu_1}(f \circ \chi_0^*) = Q^\nu(f \circ (T_1 \circ \chi)) = Q^{\mu_1}(f).$$

Лемма 5.2 доказана.

Рассмотрим следующее не связанное уравнение Гинзбурга–Ландау из [9]. Пусть V – действительная, чётная C^2-функция, которая строго выпукла (см. (4.8)). Для любого заданного $\alpha \geq 0$ и любого $\nu \in \mathcal{G}_T\big(\bar{\phi}, (m_i)_i\big)$ рассмотрим процесс $Y = (Y_b)_{b \in (\mathbb{Z}^d)^*}$, являющийся решением следующего уравнения :

$$(\mathcal{GLI}) \begin{cases} dY_b(t) = -\alpha Y_b(t) - \frac{1}{2}\left[\sum\limits_{b': x_{b'} = x_b} V'(Y_{b'}(t)) - \sum\limits_{b': x_{b'} = y_b} V'(Y_{b'}(t))\right] dt + \\ \qquad + d(\nabla\beta)_b(t), \\ Y(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \nu_\nabla,\ b \in (\mathbb{Z}^d)^*,\ t \in [0,1]. \end{cases}$$

В этом случае исходный гамильтониан $h = (h_i)$, задаётся по формуле

$$h_i(x) = \alpha x_i^2 + \sum_{j \neq i, |j-i|=1} V(x_i - x_j), \quad x = (x_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},$$

для которой $\nabla \partial h \circ \Gamma_1$ является функцией только Y, но не X_0. Легко видеть, что потенциал ϕ определяет h и, следовательно, поверхностную динамику, задаваемую по формуле

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = \alpha x_i^2, \\ \phi_{ij}(x_i, x_j) = V(x_i - x_j), \quad |i-j| = 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Указанная динамика удовлетворяет условиям Теоремы 4.1.

Нашей целью является описание класса обратимых состояний для Y, решения для $\mathcal{GLI}$ из класса состояний ν^* вида ν_∇ с $\nu \in \mathcal{G}_T(\bar{\phi}, (m_i)_i)$. Из Леммы 5.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.3. Если ν – вероятностная мера в $\mathcal{G}_T(\phi, (dx_i)_i)$, то её образ ν_∇ относительно ∇ является обратимым для Y решением уравнения $\mathcal{GLI}$ таким, что $Q^{\nu_\nabla} = Q^{\nu}_\nabla$ инвариантно относительно обращения времени χ^* на Ω^*, т.е. $Q^{\nu_\nabla} \circ (\chi^*)^{-1} = Q^{\nu_\nabla}$.

Следовательно, Пример 4.1 даёт нам примеры обратимых состояний для соответствующей поверхностной динамики. В частности, возникает следующий вопрос : Пусть ϕ – потенциал, заданный по (4.7) (т.е. $\alpha = 0$ в (5.1)), тогда $\mathcal{GLI}$ соответствующее этому потенциалу, совпадает с уравнением введённым Фунаки и Шпоном в [9] :

$$(\mathcal{GLI}) \begin{cases} dY_b(t) = -\frac{1}{2}\left[\sum_{b': x_{b'} = x_b} V'(Y_{b'}(t)) - \sum_{b': x_{b'} = y_b} V'(Y_{b'}(t))\right] dt + d(\nabla\beta)_b(t), \\ Y(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \nu_\nabla, \ b \in (\mathbb{Z}^d)^*, t \in [0,1]. \end{cases} \tag{5.2}$$

Согласно Предложению 4.1 и Лемме 5.3 получаем следующее утверждение (см. Предложение 3.1 из [9]).

Теорема 5.1. Любая вероятностная мера в $\mathcal{G}(h^*, \Pi^{*,0})$ (см. §4.4) является обратимым состоянием для поверхностной динамики Гинзбурга–Ландау, определяемой по (5.2).

§6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ДИНАМИКИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

В заключение преобразуем (X_0, Y) решение уравнения $(\mathcal{GLI}X_0)_{\mu_1}$, $\mu_1 = \nu_{\Gamma_1}$ с $\nu \in \mathcal{G}_T(\bar{\phi}, (m_i)_i)$, посредством непрерывного преобразования

$$T_2 : E \times \Omega^* \longrightarrow E^2 \times \Omega, \quad T_2(\omega_0, \eta) = (\omega_0, \eta_e, \nabla^* \eta).$$

Здесь e обозначает связку в $(\mathbb{Z}^d)^*$, определённую по $x_e = 1$, $y_e = 0$. В одномерном случае $d = 1$, T_3 является биекцией и мы можем рассмотреть её непрерывное обратное отображение Γ_3, определяемое по формуле

$$\Gamma_3 : E^2 \times \Omega \longmapsto E \times \Omega^*, \quad \Gamma_2(\omega_0, \omega_e, z) = (\omega_0, \eta),$$

где η является единственным элементом в Ω^*, который является решением следующего уравнения :

$$\begin{cases} z_i = \sum_{b: y_b = i} \eta_b, & i \in \mathbb{Z} \\ \eta_e = \omega_e. \end{cases}$$

Пусть $T = T_2 \circ T_1$ и $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Как и выше мы используем строчные буквы $\tau_3, \tau, \gamma_3, \gamma$, если E заменено на $\mathbb{R}$ в определении преобразований T_3, T и т.д..

Лемма 6.1. Пусть $\bar{\phi}, \phi$ и (m_i), определены как в Теореме 4.1 и $\mu = \nu_\tau$, где $\nu \in \mathcal{G}_T(\bar{\phi}, (m_i)_i)$.

(1) Если X – решение уравнения $(Grad)_\nu$, то преобразованный процесс $T(X) = (X_0, Y_e, Z)$, $Z = \Delta X$ является решением следующего уравнения :

$$(IX_0Y_e)_\mu \quad \begin{cases} dZ_i(t) = -\frac{1}{2}(\Delta\partial h)_i\big(\Gamma(X_0, Y_e, Z)(t)\big)\, dt + d(\Delta\beta)_i(t), & i \in \mathbb{Z}^d, \\ dY_e(t) = -\frac{1}{2}(\nabla\partial h)_e\big(\Gamma(X_0, Y_e, Z)(t)\big)\, dt + d(\nabla\beta)_e(t), \\ dX_0(t) = -\frac{1}{2}\partial_0 h_0\big(\Gamma(X_0, Y_e, Z)(t)\big)\, dt + d(\beta)_0(t), & t \in [0,1], \\ (X_0, Y_e, Z)(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \mu. \end{cases}$$

(2) Обратно, если (X_0, Y_e, Z) – решение уравнения $(IX_0Y_e)_\mu$, то $X = \Gamma(X_0, Y_e, Z)$ является решением уравнения $(Grad)_\nu$.

Таким образом, если $\mathcal{G}_T\big(\bar{\phi}, (m_i)_i\big) \neq \emptyset$ и $\mu = \nu_\tau$ для некоторого $\nu \in \mathcal{G}_T\big(\bar{\phi}, (m_i)_i\big)$, то $Q^\mu = Q_T^\nu$ является единственным решением уравнения $(IX_0Y_e)_\mu$ и мы получаем следующую характеризацию обратимых состояний для динамики $(IX_0Y_e)_\mu$.

Лемма 6.2. В условиях Леммы 6.1 следующие утверждения эквивалентны :

(1) μ – обратимо для решения (X_0, Y_e, Z) уравнения (IX_0Y_e) в том смысле, что $Q^\mu_{\chi^*_{0,e}} = Q^\mu$, где $\chi^*_{0,e}$ обозначает обращение времени в пространстве траекторий $E^2 \times \Omega$.

(2) $\mu = \nu_\tau$, где $\nu \in \mathcal{G}_T\big(\phi, (dx_i)_i\big)$.

Доказательство : аналогично доказательству Леммы 5.2.

Теперь рассмотрим парный потенциал ϕ, введённый в (5.2) с $V(x) = x^2$. В этом случае легко проверить, что процесс Z является решением следующего стохастического дифференциального уравнения, которое представляется новым :

$$\begin{cases} dZ_i(t) = (\Delta_\alpha Z)_i(t)\,dt + d(\Delta\beta)_i(t), & i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0,1], \\ Z(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \nu_\Delta. \end{cases} \tag{6.1}$$

Здесь Δ_α - α–возмущённый оператор Лапласа, т.е.

$$\Delta_\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \quad (\Delta_\alpha X)_i = X_{i+1} - (\alpha+2)X_i + X_{i-1}.$$

Отсюда следует утверждение, описывающее класс обратимых состояний для вышеприведённой динамики.

Предложение 6.1. Если ν принадлежит $\mathcal{G}_T(\phi,(dx_i)_i)$, то его образ ν_Δ относительно дискретного оператора Лапласа Δ является обратимым состоянием для динамики (6.1).

Я благодарен профессору Престону за обсуждение проблемы границы Мартина для спецификации. Автор выражает также свою благодарность профессору Цессину за помощь в работе и вдохновляющие дискуссии.

ABSTRACT. The paper proves, that if P is a Gibbs state with specification Π that satisfies Dynkin condition, then the image measure of P is a Gibbs state specified by $\Pi^{\varphi,e}$, which is obtained from Π by means of some renormalization transformation. As an application, we transform solutions of stochastic gradient applying discrete gradient and Laplace operators, and prove that the transformed states are mixtures of special Gibbs states.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Arveson, "An invitation to C^*-algebras", Graduate texts in Mathematics, vol 39, Springer-Verlag, 1976.
2. P. Cattiaux, S. Roelly, H. Zessin, "Une approche Gibbsienne des diffusions browniennes infini-dimensionnelles", Prob. Theory Relat. Fields, vol. 104, pp. 147 – 179, 1996.
3. H. J. Brascamp, E. H. Lieb, J. L. Lebowitz, "The statistical mechanics of anharmonic lattices", Bull. of Intern. Statist. Inst., Proceedings of 40^{th} Session, Warsaw, vol. 46-1, pp. 393 – 404, 1975.
4. J. Deuschel, "Infinite dimensional diffusion processes as Gibbs measures on $\mathcal{C}[0,1]^{\mathbb{Z}^d}$", Prob. Theory Relat. Fields, vol. 76, pp. 325 – 340, 1987.
5. I. J. Doob, Potential Theory and Its Probabilistic Approach, Springer Verlag, Berlin, 1986.
6. E. B. Dynkin, Markov Processes, Vol 1, Springer Verlag, Berlin, 1965.
7. H. Föllmer, "Phase transition and Martin boundary", Seminaire Probabilites IX, L.N. Math., vol. 465, pp. 305 – 317, 1975.
8. J. Fritz, "On the hydrodynamic limit of a scalar Ginzburg-Landau lattice model, the resolvent approach", Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle System, IMA Volumes in Math. Appl., vol. 9, pp. 75 – 97, 1987.

9. T. Funaki, H. Spohn. "Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model", Commun. Maths. Phys., vol. 185, pp. 1 – 36, 1997.
10. H. O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transition, W. de Gruyter, Berlin, New York, 1988.
11. R. B. Griffiths, "Mathematical properties of renormalization-group transformations", North-Holland Publishing Co., Physica., vol. 106 A, pp. 59 – 69, 1981.
12. R. B. Griffiths, P. A. Pearce, "Mathematical properties of position-space renormalization-group transformations", J. Statis. Phys., vol. 20, no. 5, 499 – 545, 1979.
13. R. Minlos, S. Roelly. H. Zessin, "Gibbs states on space-time", to appear in Potential Analysis.
14. E. Nelson, "Probability theory and Euclidean field theory", L.N. in Phys., vol. 25, Springer Verlag, 1973.
15. K. R. Parthasarathy, Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, New York, 1967.
16. Ch. Preston, "Random fields", L.N. in Maths., vol. 534, Springer Verlag, 1976.
17. Ch. Preston, "Specifications and their Gibbs states" (manuscript 1978).
18. Ch. Preston, "Specifications and their Gibbs states" (manuscript 2000).
19. G. Royer, "Etude des champs Euclidiens sur un reseau $\mathbb{Z}^{\nu}$", J. Maths. Pures et Appl., vol. 56, pp. 455 – 478, 1977.
20. T. Shiga, A. Shimizu, "Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications", J. Math. Kyoto Univ., vol. 20, no. 3, pp. 395 – 416, 1980.
21. A. C. D. van Enter, R. Fernandez, A. D. Sokal, "Regularity properties and pathologies of position-space renormalization-group transformations : scope and limitations of Gibbsian theory", J. Stat. Phys., vol. 72, pp. 879 – 1167, 1993.
22. A. C. D. van Enter, R. Fernandez, R. Kotechy, "Pathological behavior of renormalizaion-group maps at high fields and about the transition temperature", J. Stat. Phys., vol. 79, pp. 669 – 992, 1995.
23. A. C. D. van Enter, "On the possible failure of the Gibbs property for measures on lattice spin systems", Markov Proc. Rel. Fields., vol. 2, pp. 209 – 225, 1996.
24 G. Winckler, "Choquet order and simplices with applications in probabilistic models". L.N. in Maths., vol. 1145, Springer Verlag, 1980.

4 мая 2000

Universite des Sciences et Technologies de Lille
Villeneuve D'Ascq, France
E-mail : karrat@jacta.univ-lille1.fr

СРАВНЕНИЕ ДЛИН ВЫВОДОВ В СИСТЕМАХ ФРЕГЕ И СИСТЕМАХ ФРЕГЕ С ПРАВИЛОМ ПОДСТАНОВКИ

А. А. Чубарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

В статье сравниваются длины выводов в системах Фреге и системах Фреге с подстановками. Описывается случай, когда выводы в системах Фреге с подстановками моделируются из выводов системы Фреге с полиномиальным ростом.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] изучалась связь между сложностями выводов в системах Фреге ($\mathcal{F}$-системы) и системах Фреге с подстановками ($\mathcal{SF}$-системы). Было доказано, что существуют тавтологии, выводимые в системах Фреге с подстановками за n шагов, в то время как количество шагов их выводов в системах Фреге без подстановок были не менее, чем 2^{cn} для некоторой постоянной c. Также было доказано, что при переходе от выводов в $\mathcal{SF}$-системе к выводам в $\mathcal{F}$-системе, в этих примерах наблюдается лишь квадратичный рост длины вывода [4], [5]. В общем случае установление оценки роста длины вывода является открытой проблемой (см. [4]).

В настоящей статье описывается специальная конструкция выводов в в системе Фреге с подстановками, для которых при переходе к аналогичным системам без подстановок достигается максимальный (экспоненциальный) рост количества шагов выводов, хотя рост длины вывода при указанном переходе полиномиален (есть надежда, что рост длины вывода максимален). В статье выявлен ряд важных свойств выводов с подстановками, обеспечивающих не более чем полиномиальный рост при переходе к системам без подстановки.

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вначале напомним понятия системы Фреге и системы Фреге с подстановками.

Система Фреге $\mathcal{F}$ использует некоторое конечное, функционально полное множество пропорциональных связок и определяется конечным множеством схематически заданных правил вывода или **диаграммами** вида $(A_1\, A_2 \ldots A_k)/B$ (при $k = 0$ соответствующее правило определяет схему аксиом) ; $\mathcal{F}$ непротиворечива и полна, т.е. для каждого правила вывода $(A_1\, A_2 \ldots A_k)/B$, если все $A_1\, A_2 \ldots A_k$ принимают значение "истина", то и B принимает значение "истина", и всякая тавтология выводима в $\mathcal{F}$.

Система Фреге с подстановкой $\mathcal{SF}$ получается из $\mathcal{F}$ добавлением правила подстановки (**s-правила**), с выводами вида $A/(A\,\sigma)$ для любой подстановки σ, состоящей из отображения, ставящей переменным соответствующие формулы (в частности, переменные). $A\,\sigma$ обозначает результат замены в A каждой переменной на соответствующую формулу.

Мы будем пользоваться общепринятым определением вывода (вывода из посылок) в данной системе как конечной последовательности формул, каждая из которых является аксиомой данной системы, или получается из предыдущих по одному из правил вывода.

Вывод в $\mathcal{F}$-системе ($\mathcal{SF}$-системе) будем называть $\mathcal{F}$-выводом ($\mathcal{SF}$-выводом). Количество вхождений в формуле F называется **длиной** формулы F и обозначается через $l(F)$. **Длина подстановки** $\sigma = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_s \\ p_1 & \ldots & p_s \end{pmatrix}$ определяется величиной $l(\sigma) = \max\limits_{1 \le i \le s} l(\varphi_i)$. **Сложностью вывода** называется сумма длин всех формул вывода.

В работе [1] был описан метод преобразования заданного $\mathcal{SF}$-вывода в $\mathcal{F}$-вывод. Опишем этот метод : пусть некоторая формула ψ из $\mathcal{SF}$-вывода получается из φ по s-правилу, т.е. существует подстановка σ такая, что $\psi = \varphi\,\sigma$. Для вывода формулы ψ в $\mathcal{F}$ повторяют вывод φ, используя подстановку σ во всех формулах этого вывода.

Так как множество всех подстановок замкнуто относительно композиций, то в описанном выше методе максимальное число различных формул в $\mathcal{F}$-выводе можно получить следующей конструкцией $\mathcal{SF}$-вывода : каждое применение s-правила к некоторой формуле φ должно чередоваться с $\mathcal{F}$-правилом, применённым и к φ и к результату подстановки. Кажется естественным ожидать, что именно для таким образом построенного $\mathcal{SF}$-вывода, мы получаем максимальную сложность преобразованного $\mathcal{F}$-вывода. $\mathcal{F}$-вывод, смоделированный из некоторого $\mathcal{SF}$-вывода описанным в [1] методом, называется **моделирующим** $\mathcal{F}$-выводом.

§2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Вышеупомянутые "плохие" формулы, имеющие $O(n)$ строк в $S\mathcal{F}$-выводах и $O(2^n)$ строк в $\mathcal{F}$-выводах, выводятся в $S\mathcal{F}$-системе, причём s-правило используется чередованием с правилом $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$ (сил-правило). Мы будем рассматривать конструкции, имеющие $S\mathcal{F}$-выводы.

Мы будем изучать только $S\mathcal{F}$-выводы, имеющие полиномиальный рост, с помощью перехода к $\mathcal{F}$-выводам. Таким образом, предположим; что заданы $\mathcal{F}$-система и соответствующая $S\mathcal{F}$-система. Доказываемые в этой работе результаты не зависят от используемого языка, тем не менее, мы предполагаем, что вместе с другими логическими символами в нашем языке присутствует $\to$.

Определение. Последовательность формул $F_0, F_1, ..., F_{2k}$ $(k \geq 0)$ называется F_0-порождённой **сил-цепью** (с.ц.) если :

1) для каждой формулы F_{2i+1} $(0 \leq i \leq k-1)$ существует подстановка σ_i такая, что $F_{2i+1} = F_{2i}\sigma_i$,

2) каждая формула F_{2i+2} $(0 \leq i \leq k-1)$ получается из F_{2i} и F_{2i+1} по некоторому сил-правилу.

Отметим, что любой концевой отрезок $F_{2p}, F_{2p+1}, ..., F_{2k}$ $(0 \leq p \leq k)$ некоторой с.ц. $F_0, F_1, ..., F_{2k}$ также будет с.ц., порождённой формулой F_{2p}. Целое число k назовём **протяжённостью** сил-цепи $F_0, F_1, ..., F_{2k}$ $(k \geq 0)$. Отметим, что если с.ц является $S\mathcal{F}$-выводом, то k – число применений s-правил. В дальнейшем с.ц протяжённости k будем обозначать через k-с.ц., а если k-с.ц. F_0-порождена, то будем обозначать $F_0 - k$-с.ц. Через L_{F_0-k} обозначаем сумму длин всех формул в $F_0 - k$-с.ц.

Отметим, что не каждая формула может породить с.ц., и существуют формулы, порождающие k-с.ц. любой протяжённости (например, формулы $p_1 \to (p_2 \to p_1)$, $p_1 \to p_2 \vee p_1$, $p_1 \to \neg\neg p_1$ и т.д.). Следует отметить, что $S\mathcal{F}$-выводы вышеназванных "плохих" формул являются с.ц., порождённые именно этими тремя формулами, причём эти с.ц. являются минимальными выводами для названных "плохих" формул [1–3].

Формула называется **с.ц.-порождающей формулой** (с.ц.п.ф.), если она может породить k-с.ц. для любого k. Очевидно, что с.ц.п.ф. должна иметь вид $A \to B$ для некоторых формул A и B. В дальнейшем, для любой формулы вида $A \to B$ через $(A \to B)_0$ и $(A \to B)_1$ будем обозначать формулы A и B, соответственно.

С.ц.п.ф. F_0 назовём минимальной, если с.ц. $F_0, F_1, \dots, F_{2k}$ не является концевым отрезком какой-либо иной с.ц. $F^0, F^1, \dots, F^{2s}(= F_0), F_1, \dots, F_{2k}$.

Лемма 1. Если формула $F_0 = A \to B_0$ является с.ц.п.ф. и $l(A) = a$, $l(B_0) = b$, то

1) при $b \geq a + 1$ существует постоянная k_0 (зависящая от a и b) такая, что для любого $k > k_0$ имеет место неравенство $L_{F_0-k} \geq (1 + \dfrac{1}{a+1})^k$;

2) при $b = a$ существует постоянная k_1 (зависящая от a) такая, что для любого $k > k_1$ имеем $L_{F_0-k} \geq 2^{a+1}(2a + 1)$.

Доказательство : Пусть $F_0, F_1, \dots, F_{2k}$ является $F_0 - k$-с.ц. такой, что для любого i $(0 \leq i \leq k-1)$ $F_{2i+1} = B_i \to B_{i+1}$, где $B_i = A\sigma_i$ и $B_{i+1} = B_i\sigma_i$ для некоторой подстановки σ_i, а $F_{2i+2} = A \to B_{i+1}$. Если $l(B_i) = n_i$, то

$$L_{F_0-k} = (k+1)a + 2b + 3(n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}) + 2n_k + 2k + 1. \qquad (1)$$

1) Пусть $b \geq a + 1$. Число различных переменных формулы с l логическими выводами не превышает $l + 1$. Нетрудно убедиться, что $l(\sigma_0) \geq \dfrac{b-a}{a+1}$, и для любого i $(0 \leq i \leq k-1)$ $l(\sigma_i) \geq \dfrac{n_i - a}{a+1}$, и поэтому

$$n_i \geq b(1 + \frac{1}{a+1})^i - \frac{a}{a+1}\sum_{m=0}^{i-1}(1 + \frac{1}{a+1})^m, \quad (1 \leq i \leq k).$$

Пусть $c = 1 + \dfrac{1}{a+1}$ и $d = \dfrac{a}{a+1}$, тогда

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} &\geq bc - d + bc^2 - d(c+1) + bc^3 - d(c^2 + c + 1) + \\ &+ \dots + bc^{k-1} - d(c^{k-2} + c^{k-1} + \dots + c + 1) = b\frac{c^k - c}{c-1} - d\frac{c^k - 1 - ck + k}{(c-1)^2}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\begin{aligned} L_{F_0-k} \geq c^k\left[\frac{3b}{c-1} - \frac{3d}{(c-1)^2} + 2b - \frac{2d}{c-1}\right] + k\left(a + \frac{3d}{c-1} + 2\right) + \\ + a + 2b - \frac{3bc}{c-1} + \frac{3d}{(c-1)^2} + \frac{2d}{c-1} + 1. \end{aligned}$$

Подставляя значения c и d, находим

$$L_{F_0-k} \geq (1 + \frac{1}{a+1})^k(b-a)(3a+5) + k(4a+2) + 1 + 3a^2 + 6a - b(3a+4).$$

Если $k \geq \dfrac{b(3a+4) - 3a^2 - 6a + 1}{4a+2}$ и $b - a \geq 1$, то $L_{F_0-k} \geq (1 + \dfrac{1}{a+1})^k$.

Пусть $k_0 = \left] \frac{b(3a+4) - 3a^2 - 6a + 1}{4a+2} \right[$, тогда для любого $k > k_0$, учитывая, что $b \geq a+1$, получим $L_{F_0-k} \geq (1 + \frac{1}{a+1})^k$.

2) Пусть $a = b$. В этом случае оставшееся правило, не возможно построить k-с.п. для достаточно больших k. Тогда $L_{F_0-k} = (2k+1)(2a+1)$ и для $k_1 = \frac{2^{a+1}(2a+1)-1}{2}$ имеем $L_{F_0-k_1} = 2^{a+1}(2a+1)^2$, и поэтому для любого $k > k_1$ имеем $L_{F_0-k} \geq 2^{a+1}(2a+1)^2$. Лемма 1 доказана.

Описанным выше методом моделирования преобразуем с.п. $F_0, F_1, ..., F_{2k}$ так, чтобы $S\mathcal{F}$-выводы переходили в $\mathcal{F}$-выводы. Каждый вывод можно представить в виде графа следующим образом : каждой формуле взаимно однозначным соответствием ставится некоторая вершина; если формула φ выводится некоторым правилом из формул ψ, γ, то вершина, маркированная φ связана с вершинами, отмеченными ψ и γ. Каждая подвешенная вершина этого графа соответствует некоторой аксиоме. Этим путём с.п. и её преобразованная последовательность представлены Рисунками 1, 2.

Формула $F_i\sigma_{j1}\sigma_{j2}...\sigma_{jl}$ является результатом последовательного применения $\sigma_{j1}\sigma_{j2}...\sigma_{jl}$ к F_i.

Пусть $\widetilde{L_{F_0-k}}$ обозначает сумму длин всех формул последовательности, полученных в результате описанного моделирования из с.п. $F_0, F_1, ..., F_{2k}$. Очевидно, что каждая формула любой с.п. является тавтологией, и поэтому F_{2k} выводима в любой $\mathcal{F}$-системе. Пусть $L^{\mathcal{F}}_{F_{2k}}$ – сложность кратчайшего вывода F_{2k} в $\mathcal{F}$.

Лемма 2. Если $F_0 = A \to B_0$ является с.п.п.ф., $l(A) = a$ и $l(B_0) = b$, то

1) при $b \geq a+1$ существуют постоянные c и ε $(0 < \varepsilon < 1)$ такие, что для любого $k > k_0$ $\widetilde{L_{F_0-k}} < c(L_{F_0-k})^{1+\log(1+\varepsilon)^2}$, где k_0 – постоянная из Леммы 1;

2) при $a = b$ и для каждой системы Фреге $\mathcal{F}$ существует постоянная $\widetilde{c}$ такая, что для любого $k > k_1$ $L_{\mathcal{F}_{2k}} \leq \widetilde{c} \cdot L_{F_0-k}$, где k_1 – постоянная из Леммы 1.

Доказательство : 1) При $b \geq a+1$ рассмотрим граф на Рис. 2. На каждом уровне этого дерева каждая формула (кроме F_0) получается подстановками из каких-то, находящихся левее. Следовательно, формула $F_0\sigma_0\sigma_1...\sigma_{k-1}$ (отмечена *) является самой длинной. В этом дереве число различных формул есть 2^{k+1} и поэтому

$$\widetilde{L_{F_0-k}} \leq 2^{k+1} \cdot l(F_0\sigma_0\sigma_1...\sigma_{k-1}).$$

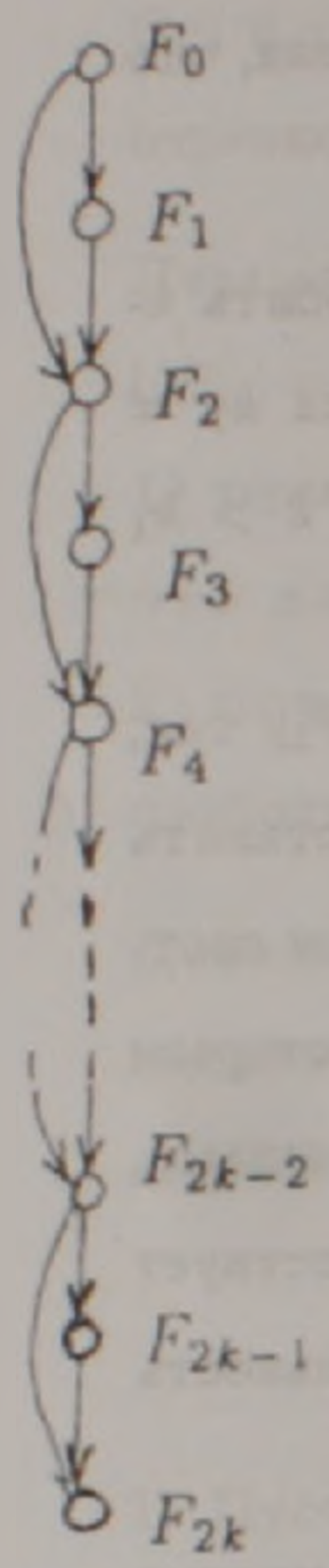

Рис. 1

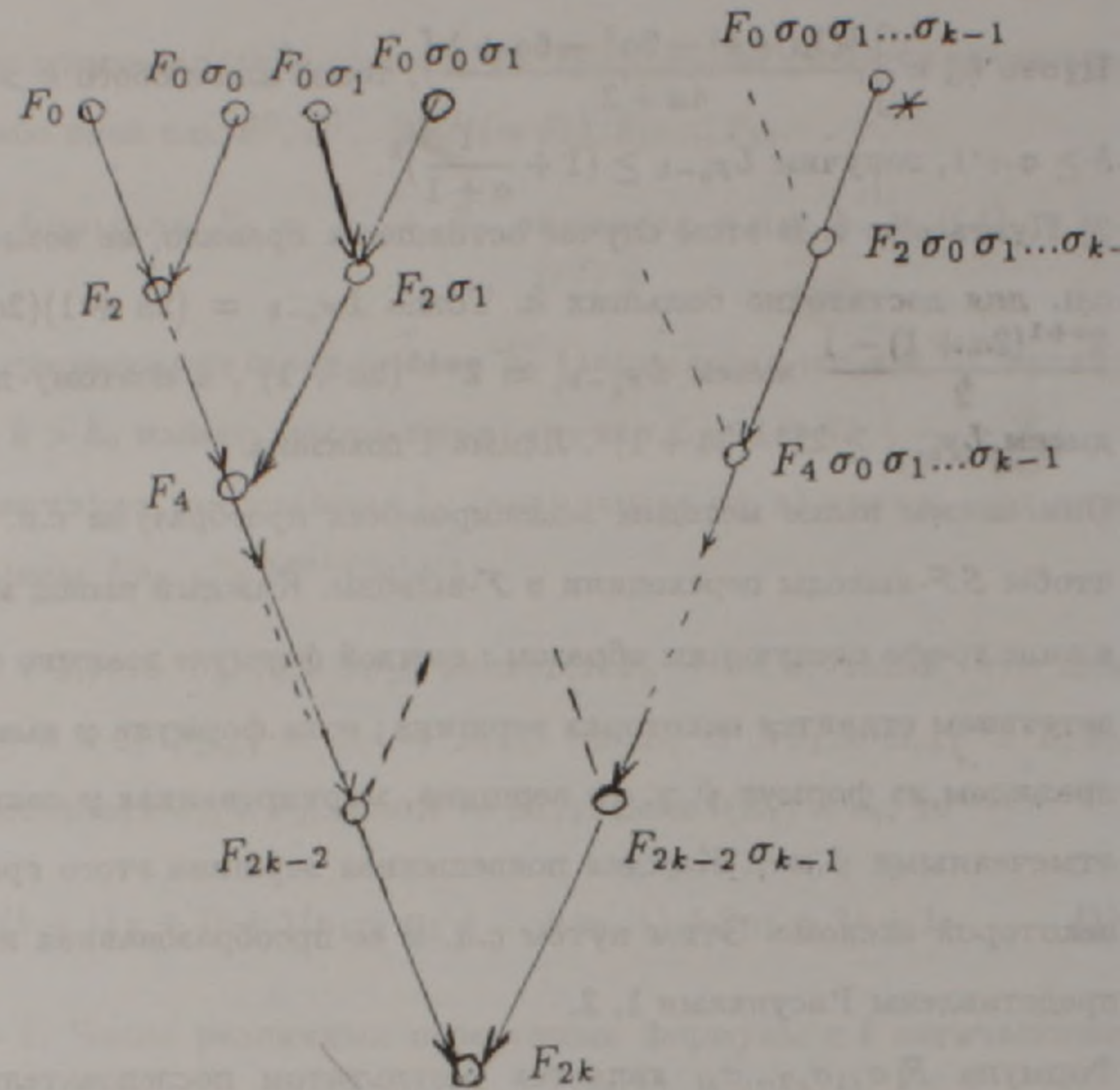

Рис. 2.

Пусть σ – подстановка, являющаяся результатом последовательно применённых подстановок $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$. Следовательно, $F_0\sigma = (A \to B_0)\,\sigma = A\sigma \to B_0\,\sigma = A\,\sigma \to B_k$, т.е. $l(\sigma) \leq n_k$ и $l(F_0\sigma) \leq l(A\,\sigma)+1+n_k \leq (a+1)\,n_k+1+n_k < (a+3)\,n_k$. Поэтому имеем $\widetilde{L_{F_0-k}} \leq 2^{k+1}(a+3)\,n_k <$

$$< (a+3)\,2^{k+1}\cdot L_{F_0-k} < (a+3)^2\left(\left(1+\frac{1}{1+a}\right)^k\right)^{\log_{1+1/(a+1)}2}\cdot L_{F_0-k}.$$

Для $k > k_0$, полагая $c = (a+3)^2$ и $\varepsilon = (a+1)^{-1}$, получаем $\widetilde{L_{F_0-k}} \leq c\cdot L_{F_0-k}^{1+\log_{1+\varepsilon}2}$. Доказательство пункта 1) завершено.

2) При $b = a$, т.е. s-правило состоит в переименовании переменных, то число различных переменных каждой формулы F_i $(0 \leq i < 2k)$ не больше чем $2(a+1)$ (число различных переменных формулы F_0). В [7] доказано, что любая тавтология φ может быть выведена в $\mathcal{F}$ не более чем за $c_1\,2^m\,l$ шагов, где c_1 – постоянная, m – мощность **характеристического множества** тавтологии φ, а l – длина тавтологии φ, причём длина самой длинной формулы этого вывода не превышает $c_2\,l$ для некоторой постоянной c_2. Переменная принадлежит характеристическому множеству, если она имеет и положительное и отрицательное

вхождение в формулу. Следовательно, мощность характеристического множества некоторой формулы не превышает половины вхождений всех переменных в эту формулу, т.е. $L^{\mathcal{F}}_{F_{2k}} \leq \tilde{c} \cdot 2^{a+1}(2a+1)^2$ для $\tilde{c} = c_1 \cdot c_2$, а для $k > k_1$ будем иметь $L^{\mathcal{F}}_{F_{2k}} \leq \tilde{c} \cdot L_{F_{a-k}}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для любой системы Фреге $\mathcal{F}$ существует постоянная c' такая, что сложность $\mathcal{F}$-вывода формулы $A \to C$ из формул $A \to B$ и $B \to C$ не превышает $c' l$, где $l = \max\{l(A), l(B), l(C)\}$.

Доказательство можно найти в [7].

Определение. $S\mathcal{F}$-вывод $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называется **каноническим**, если можно указать подпоследовательность формул $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_{2k}}$ $(A_{i_{2k}} = A_m)$, которая является с.ц., порождённой формулой A_{i_0} такой, что $l((A_{i_0})_1) \geq l((A_{i_0})_0) + 1$. Число применений s-правила в $S\mathcal{F}$-выводе называется **протяжёностью** $S\mathcal{F}$-вывода. Если $S\mathcal{F}$-вывод – канонический, то максимальную протяжённость содержащейся в ней с.ц., назовём **с-протяжённостью.**

Определение. $S\mathcal{F}$-вывод называется $c-k$-**каноническим**, если его с-протяжённость равна k.

Лемма 4. Для любого $k > 0$ в любой $S\mathcal{F}$-системе можно указать $c-k$-канонический вывод, протяжённость которого линейно зависит от k.

Доказательство : Рассмотрим следующие утверждения :

a) Для $\mathcal{F}$-системы ($S\mathcal{F}$-системы) одна из аксиом есть с.ц.п.ф. ;

b) сил-правило есть одно из $\mathcal{F}$-правил ($S\mathcal{F}$-правил),

1. Если оба утверждения a) и b) выполнены, то доказательство очевидно.

2. Если b) выполнено, а a) нет, то прежде надо вывести с.ц.п.ф. с постоянной протяжённостью. Это даёт возможность построения требуемого $c-k$-канонического вывода.

3. Если a) выполняется, а b) нет, то порождаем с.ц. $F_0, F_1, \ldots, F_{2k}$, вставляя между каждой парой формул F_{2i+1} и F_{2i+2} $(0 \leq i \leq k-1)$ "моделирующее" сил-правило (см. Лемму 3). Пусть p – число использованных s-правил подстановки во "вставке" (отметим, что p не зависит от i, но зависит от $S\mathcal{F}$-системы). Следовательно, $S\mathcal{F}$-вывод, имеющий c-протяжённость k, будет иметь протяжённость $k(1+p)$.

4. Если же не выполнены ни a) ни b), то поступаем сначала как в пункте 2., а затем как в пункте 3., получая вывод протяжённностью $c + k(1+p)$. Лемма 4 доказана.

Теорема. Для произвольной системы Фреге $\mathcal{F}$ существует полином $p(\cdot)$ такой, что для достаточно большого k, если L_k является сложностью $c-k$-канонического вывода некоторой формулы F, то $L_F^{\mathcal{F}} \leq p(L_k)$.

Доказательство : Из Леммы 4 следует, что для любого k существует канонический $\mathcal{SF}$-вывод, с–протяжёностью равной k. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ есть $c-k$-канонический вывод, его подпоследовательность $F_0, F_1, \ldots, F_{2k}$, где $F_{2k} = A_m$, является с.ц. максимальной протяжённости, и $L_k = \sum_{i=1}^{m} l(A_i)$. Преобразуем этот $\mathcal{SF}$-вывод в $\mathcal{F}$-вывод следующим образом. Если F_0 является минимальной с.ц.п.ф., то выпишем F_0 в $\mathcal{F}$. Пусть l_0 - сложность этого кратчайшего вывода F_0 в $\mathcal{F}$. Теперь между любой парой формул F_{2i+1} и F_{2i+2} $(0 \leq i \leq k-1)$ вставим $\mathcal{F}$-вывод минимальной сложности формулы F_{2i+2} из формул F_{2i} и F_{2i+1}. Согласно Лемме 3, сумма длин формул "вставки" не превышает $c' l_i$, где $l_i = \max\{l(F_{2i}), l(F_{2i+1}), l(F_{2i+2})\}$. Теперь преобразуем полученную последовательность методом, описанным выше ($\mathcal{SF}$-вывод в $\mathcal{F}$-вывод). Согласно Лемме 1 существует число $k_0 = k_0(F_0)$, зависящее от длины формулы F_0 такое, что для любого $k > k_0$ имеем $L_k > L_{F_0-k} > (1 + \frac{1}{a_0+1})^k$ при $a_0 = l((F_0)_0)$.
Пусть $\bar{l} = \max\{l_0, c'l_1, \ldots, c'l_{k-1}\}$. Очевидно, что $\bar{l} \leq c' \cdot L_k$. Повторяя доказательство Леммы 2, нетрудно убедиться, что при тех же k_0, a_0, и для любых $k > k_0$ имеем

$$L_{F_{2k}}^{\mathcal{F}} \leq 2^k \bar{l}\, l(F_{2k}) \leq 2^k c' L_k\, L_k \leq c'(1 + \frac{1}{1+a_0})^{k \log_{1+1/(1+a_0)} 2} L_k^2 \leq c' L_k^{2+\log_{1+1/(1+a_0)} 2}$$

Если же F_0 не является минимальной с.ц.п.ф., то тогда мы берём минимальную с.ц.п.ф. F^0 такую, что последовательность $F^0, F^1, \ldots, F^{2s_0} (= F_0), F_1, \ldots, F_{2k}$ также является с.ц.. Естественно, что $s_0 = s_0(F_0)$. Преобразуя эту последовательность вышеописанным методом, получим, что для каждого $k > k_0 + s_0$ и $a_0 = l((F^0)_0)$ будем иметь ту же оценку для $L_{2k}^{\mathcal{F}}$.
Пусть теперь $\prod$ - множество всех минимальных с.ц.п.ф.. Взяв $a = \max_{\varphi \in \prod} l((\varphi)_0)$, $\kappa = \max_{\varphi \in \prod} k_0(\varphi)$ и $s = \max_{\varphi \in \prod} s_0(\varphi)$ для всех $k > \kappa + s$ и $F = F_{2k}$ будем иметь $L_F^{\mathcal{F}} \leq c' L_k^{2+\log_{1+1/(1+a)} 2}$. Теорема доказана.

§3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КАНОНИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ

В заключение приведём основные свойства канонических выводов, которые играют существенную роль в не более, чем полиномиальном росте сложности при переходе к $\mathcal{F}$-выводам.

Естественно, что важным является наличие с.ц., со свойствами :

1) экспоненциальный рост длины формул в каноническом $\mathcal{SF}$-выводе ;

2) наличие в с.ц. формулы, аккумулирующей в себе результат всех последовательных подстановок s-правил из с.ц..

Если $\mathcal{F}$-вывод, моделирующий некоторый $\mathcal{SF}$-вывод протяжённости k, то $\mathcal{F}$-вывод содержит $O(2^k)$ формул, и, следовательно, его сложность не меньше, чем $O(2^k)$. Поэтому свойство 1) обеспечивает достижение этой оценки, а свойство 2) ограничивает возрастание этой оценки полиномом. Оба свойства не являются характеристическими для сил-правила.

Очевидно, если на основании некоторого $\mathcal{F}$-правила с этими свойствами можно построить соответствующую цепь, то и утверждение теоремы будет выполняться для соответствующего канонического вывода.

В работах [6], [8] было выведено понятие **существенной подформулы** тавтологии F, как неэлементарной подформулы, повсеместная замена которой на некоторую новую переменную превращает формулу F в нетавтологию. Как доказано в [6], [8], если формула B выводится из формул $A_1, A_2, ..., A_k$ некоторым $\mathcal{F}$-правилом, то множество существенных подформул формулы B имеет только ограниченное число формул, не принадлежащих множествам существенных подформул формул $A_1, A_2, ..., A_k$. Если формула $A\sigma$ выводится s-правилом из A, то каждая существенная подформула формулы $A\sigma$ является результатом подстановки в некоторую существенную подформулу формулы A. Следовательно, если B выводится некоторым $\mathcal{F}$-правилом из A и $A\sigma$, то мощность множества существенных подформул формулы B может быть в два раза больше мощности множества существенных подформул для A. Итак, для некоторой с.ц. мы имеем экспоненциальный рост не только для длин формул, но также для мощности множеств существенных подформул.

Важно отметить, что модель $\mathcal{F}$-выводов оптимальна для $\mathcal{SF}$-выводов. В [8] доказано, что если существенные подформулы некоторых тавтологий не получаются одна из другой по s-правилу, то такие тавтологии имеют одну и ту же сложность как для $\mathcal{SF}$-выводов, так и для $\mathcal{F}$-выводов.

Отсюда следует, что гипотеза об экспоненциальном росте длины вывода при переходе от $\mathcal{SF}$–системы к $\mathcal{F}$–системе является неверной.

ABSTRACT. The paper compares proofs in Frege systems with and without substitution. A case is outlined, where substitution Frege proofs can be polinomially simulated by Frege proofs.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Цейтин, А. А. Чубарян, "О некоторых оценках длин логических выводов в классическом исчислении высказываний", Тр. ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, том 8, стр. 57 — 67, 1975.
2. J. Krajicek, "Speed-up for propositional Frege systems via generalizations of proofs", Commentationes Mathematicae Univ. Carolinae, Vol. 30, pp. 137 — 140.
3. S. R. Buss, "Some remarks on lengths of propositional proofs", Arch. Math. Logic, Vol. 34, pp. 377 — 394, 1995.
4. P. Pudlak, "The lengths of proofs", Handbook of proof theory, North-Holland, pp. 547 — 637, 1998.
5. H. Bolibekyan, A. A. Chubaryan, "The research of the complexity of some proofs" [in Armenian], EGU, Yerevan, 2000.
6. A. A. Chubaryan, "The powers of the essential subformulae sets in Frege proofs and Frege proofs with substitution", Math. Problem of Comp. Science 21, pp. 116 — 118, 2000.
7. А. А. Чубарян, "О сложности выводов в некоторой системе классического исчисления высказываний", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 16 - 26, 1999.
8. А. А. Чубарян, "О нижних оценках сложности выводов в системах Фреге с подстановками", Докл. НАН Армении, Прикладная математика, том 100, № 3, стр. 223 — 227, 2000.

14 мая 2000

Ереванский государственный университет
E-mail : achubaryan@ysu.am

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

В статье доказана теорема о единственности решений смешанных граничных задач для некоторого класса параболических уравнений четвёртого порядка с переменными коэффициентами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение четвертого порядка вида

$$u_t + \Delta^2 u + L\,u - m(x,t)\,u = f(x,t), \tag{1}$$

где Δ^2 – бигармонический оператор и

$$L\,u = -\sum_{i,j=1}^{3} \left(a_{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Поставим смешанную (начальную и краевую) задачу :

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_\Sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \tag{3}$$

где $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, а ν – направление внешней нормали к границе Γ.

Пусть $\|a_{ij}(x)\|$ – симметрическая матрица, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, и пусть для любого $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq 0. \tag{4}$$

В статье исследуется вопрос о единственности решений задачи (1) — (3) при предположении

$$m \in L^{7/4}(Q), \tag{5}$$

обусловленном тесной связью задачи (1) — (3) с задачей существования оптимального управления нелинейной системой с распределенными параметрами вида (см. [1])

$$u_t + \Delta^2 u + L u - u^3 = v. \tag{6}$$

Фактически, доказательство существования оптимального управления для задачи (6), (2) и (3) существенно опирается на теорему о единственности решений соответствующей линейной задачи (1) — (3) при условии (5).

При более жёстких ограничениях на $m(x,t)$ и при отсутствии младших членов, доказательство единственности для уравнения четвёртого порядка вида (1) приводится в [2].

§2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Обозначим $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ пространство Соболева функций $u(x)$, определенных на Ω, с нормой

$$\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$.

$\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$ = замыкание в норме $H^s(\Omega)$ множества финитных, бесконечно дифференцируемых функций. $H^{-s}(\Omega)$ = пространство, сопряжённое к $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$.

$L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))$ = гильбертово пространство функций $u(x,t)$, наделённое нормой

$$\|u\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_s^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

$L^\lambda(0,T; L^\alpha(\Omega))$ = пространство функций $u(x,t)$ с нормой

$$\|u\|_{L^\lambda(0,T;L^\alpha(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^\alpha(\Omega)}^\lambda \, dt \right)^{1/\lambda}.$$

Определение. Пусть $f \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Функцию $u \in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, $u(x,0) = 0$ назовем решением задачи (1) — (3), если для любого $v \in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$ имеет место интегральное тождество

$$\begin{gathered} \iint_Q (u_t - m(x,t)\,u)\, v \, dx\, dt + \iint_Q \Delta u \cdot \Delta v \, dx\, dt + \\ + \sum_{i,j} \iint_Q a_{ij}(x)\, u_{x_i} v_{x_j} \, dx\, dt = \iint_Q f(x,t)\, v \, dx\, dt. \end{gathered} \tag{7}$$

Тот факт, что $m u \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ будет доказан ниже. Сходимость остальных интегралов в (7) очевидна.

§3. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Теорема 1. **Пусть функция** $u(x,t)$ **является решением однородного уравнения**

$$u_t + \Delta^2 u + L\,u - m(x,t)\,u = 0,$$

удовлетворяющего условиям (2) и (3), а коэффициенты оператора L **и** $m(x,t)$ **удовлетворяют условиям (4) и (5), соответственно. Тогда** $u = 0$**.**

Теорема 1 вытекает из априорной оценки для решения задачи (1) — (3).

Предложение. **Пусть функция** $u(x,t)$ **есть решение задачи (1) — (3), где коэффициенты оператора** L **и** $m(x,t)$ **удовлетворяют условиям (4) и (5), соответственно, а** $f \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$**. Тогда справедлива априорная оценка**

$$\|u\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))} \le C\,\|f\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}. \tag{8}$$

Доказательство Предложения : Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1) — (3), принадлежащее пространству $L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$. Рассуждая как и в доказательстве, приведенном в [2], умножим тождество (1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем обе его части по области Ω. Интегрируя по частям и используя условие (3), получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega \left[|\Delta u|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,u_{x_i}\,u_{x_j}\right]dx = \\ = \int_\Omega m(x,t)\,u^2\,dx + \int_\Omega f(x,t)\,u\,dx.\end{gathered} \tag{9}$$

Из условий $u(t) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, свойств пространства $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ (см. [1]) и положительности матрицы $\|a_{ij}(x)\|$ следует двусторонняя оценка

$$C_1\,\|u(t)\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)} \le \int_\Omega \left(|\Delta u|^2 + \sum_{i,j} a_{ij}(x)\,u_{x_i}\,u_{x_j}\right)dx \le C_2\,\|u(t)\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)} \tag{10}$$

с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2. В дальнейшем через C_i, $i > 2$ будем обозначать различные постоянные. Оценим в отдельности интегралы, входящие в (9). Имеем

$$|<f,u>| \le \|f(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}\,\|u(t)\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)} \le C_3\,\|f(t)\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + C_4\,\|u(t)\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)}, \tag{11}$$

где $< \cdot >$ означает распределение. Постоянная $C_4 > 0$ будет выбрана ниже. Имеем

$$\begin{gathered}\left|\int_\Omega m(x,t)\,u^2\,dx\right| \le \left(\int_\Omega |m|^{7/4}\,dx\right)^{4/7}\left(\int_\Omega |u|^{14/3}\,dx\right)^{3/7} = \\ = \|m(t)\|_{L^{7/4}(\Omega)}\cdot\|u(t)\|^2_{L^{14/3}(\Omega)}.\end{gathered} \tag{12}$$

Далее

$$\int_\Omega |u|^{14/3}\,dx = \int_\Omega |u|^4 \cdot |u|^{2/3}\,dx \le \left(\int_\Omega |u|^6\,dx\right)^{2/3} \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/3} = \tag{13}$$
$$= \|u(t)\|^4_{L^6(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{2/3}_{L^2(\Omega)}.$$

При $n = 3$ имеем непрерывное вложение $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, в силу теорем вложения Соболева т.е. $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ (см., например, [1]), т.е.

$$\|u(t)\|_{L^6(\Omega)} \le C\,\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{14}$$

В силу известного интерполяционного неравенства для пространств Соболева (см. [3])

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \le C\,\|u\|^{s/2}_{H^2(\Omega)} \cdot \|u\|^{1-s/2}_{L^2(\Omega)}, \quad (0 \le s \le 2),$$

при $s = 1$ имеем

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \le C_5\,\|u(t)\|^{1/2}_{H^2(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}. \tag{15}$$

Теперь, учитывая (13) — (15), неравенство (17) можно записать в виде

$$\left|\int_\Omega m(x,t)\,u^2\,dx\right| \le \|m(t)\|_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{12/7}_{L^6(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{2/7}_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le C_6\,\|m(t)\|_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{6/7}_{\dot{H}^2(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{8/7}_{L^2(\Omega)}.$$

По неравенству Юнга получаем

$$\left|\int_\Omega m(x,t)\,u^3\,dx\right| \le \varepsilon\,\|u(t)\|^2_{\dot{H}^2(\Omega)} + C_7\,\|m(t)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0$ будет выбрано ниже.

Подставляя оценки (10), (11), (16) в (9), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (C_1 - C_4 - \varepsilon)\,\|u(t)\|^2_{\dot{H}^2(\Omega)} \le$$
$$\le C_8\,\|m(t)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3\,\|f(t)\|^2_{H^{-2}(\Omega)}.$$

Выбирая $C_4 > 0$ и $\varepsilon > 0$ из условия $C_9 = 2(C_1 - C_4 - \varepsilon) > 0$, получаем следующую оценку :

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_9\,\|u(t)\|^2_{\dot{H}^2(\Omega)} \le C_{10}\,\|m(t)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{11}\,\|f(t)\|^2_{H^{-2}(\Omega)}. \tag{17}$$

Согласно неравенству Гронуолла, поскольку $u(0) = 0$, $m \in L^{7/4}(Q)$, $f \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, то из (17) получим

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{11} \exp\left(C_{10} \int_0^t \|m(\tau)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} d\tau\right) \times$$
$$\times \int_0^t \|f(\tau)\|^2_{H^{-2}(\Omega)} \exp\left(-C_{10} \int_0^\tau \|m(\sigma)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} d\sigma\right) d\tau \leq C_{12} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}. \tag{18}$$

В частности, из (18) следует, что

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{12} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}. \tag{19}$$

Интегрируя (17) по $t \in [0,T]$ и учитывая оценки (18) и (19), получим

$$\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_9 \|u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))} \leq C_{10} \int_0^T \|m(t)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt +$$
$$+ C_{11} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C_{13} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)} \cdot \|m\|^{7/4}_{L^{7/4}(Q)} + \tag{20}$$
$$+ C_{11} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)} \leq C_{14} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}.$$

Итак, приходим к искомой оценке $\|u\|_{L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))} \leq C_{15} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}$, которая непосредственно следует из (20). Доказательство Предложения завершено. Теперь, полагая в уравнении (1) $f = 0$, в силу линейности, из оценки (8) следует единственность решения задачи. Таким образом, Теорема 1 также доказана.

Докажем теперь корректность задачи (1) — (3), т.е. что из условий $u \in L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))$, $m \in L^{7/4}(Q)$ следует $m\,u \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Действительно, имеем

$$\int_\Omega |m\,u|^{42/31} dx \leq \left(\int_\Omega |m|^{7/4} dx\right)^{24/31} \cdot \left(\int_\Omega |u|^6 dx\right)^{7/31} = \tag{21}$$
$$= \|m(t)\|^{42/31}_{L^{7/4}(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{42/31}_{L^6(\Omega)}.$$

Интегрируя обе части (21) по $t \in [0,T]$ и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_0^T \|m\,u(t)\|^{42/31}_{L^{42/31}(\Omega)} dt \leq \int_0^T \|m(t)\|^{42/31}_{L^{7/4}(\Omega)} \|u(t)\|^{42/31}_{L^6(\Omega)} dt \leq$$
$$\leq \left(\int_0^T \|m(t)\|^{7/4}_{L^{7/4}(\Omega)} dt\right)^{24/31} \left(\int_0^T \|u(t)\|^6_{L^6(\Omega)} dt\right)^{7/31},$$

что равносильно неравенству

$$\|m\,u\|_{L^{42/31}(Q)} \leq \|m\|_{L^{7/4}(Q)} \|u\|_{L^6(Q)}. \tag{22}$$

Из оценки (19) следует, что для решения u задачи (1) — (3) имеем

$$u \in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Поскольку при $n = 3$ имеем непрерывные вложения $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ и $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, то $u \in L^6(Q)$.

Из (22) и (5) получаем $mu \in L^{42/31}(Q)$. Следовательно, из очевидного вложения $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \subset L^{42/11}(\Omega) = \left(L^{42/31}(\Omega)\right)^*$ ($*$ означает сопряженное пространство) следует, что $L^{42/31}(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega)$. Но для сопряжённых пространств имеем вложения $L^{42/11}(0,T;L^{42/31}(\Omega)) \subset L^{42/11}(0,T;H^{-2}(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Иными словами, $mu \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Доказательство завершено.

ABSTRACT. A theorem on uniqueness of solutions of mixed boundary value problems for some class of fourth order parabolic equations with varying coefficients is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. - Л. Лионс. Управление Сингулярными Распределенными Системами, Москва, Наука. 1987.
2. Р. Л. Шахбагян, "Единственность слабых решений эволюционных уравнений", Изв. НАН Армении. Математика. том 34, № 3, стр. 75 - 84. 1999.
3. J. - L. Lions, Perturbations Singulieres Dans les Problemes aux Limites et en Controle Optimal, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.

3 марта 2000 Ереванский государственный университет

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 5, 2000

Вопросы единственности ортогональных рядов остаются одними из важнейших вопросов в теории ортогональных рядов. Основной литературой в этом направлении являются работы [1 – 12]. Известно, что для тригонометрической системы существует ряд, который п.в. сходится к нулю, и при этом не все коэффициенты равны нулю [11]. Возникает следующий вопрос : при каких дополнительных условиях из п.в. сходимости ряда к нулю следует, что все коэффициенты равны нулю.

В [3] доказано, что если для ряда по тригонометрической системе имеет место равенство

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\mu\{x : S^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{*}$$

где $S^*(x)$ – мажоранта ряда, то из п.в. сходимости к нулю частичных сумм этого ряда следует, что все коэффициенты равны нулю. Это утверждение было доказано для систем Хаара, Уолша, Радемахера и Франклина. Возникает вопрос : можно ли обобщить это утверждение для рядов по произвольным ортонормированным системам ? В настоящей заметке доказывается, что такое обобщение невозможно, а конкретно, доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой функции $\varphi(x)$, $x \in (0,1)$, удовлетворяющей условиям

1° $\varphi(x) \geq 0$, $x \in (0,1)$,

2° $\varphi(x)$ **убывает на** $(0,1)$,

3° $\int_0^1 \varphi(x)dx = +\infty$,

существуют ортогональная система $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0,1]$ и последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такие, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| > 0. \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad [0,1], \tag{2}$$

$$\mu\{x \in [0,1] : S^*(x) > \lambda\} \le \mu\{x \in [0,1] : \varphi(x) > \lambda\}, \tag{3}$$

где $S^*(x) := \sup\limits_N \left|\sum\limits_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right|$ – мажоранта ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x)$.

Доказательство : Будем определять функции $f_n(x)$ по индукции. Пусть $a_0 f_0(x) = a_0^{(1)} f_0^{(1)}(x) \equiv 1/2 \cdot \varphi(1/2)$ (функция ранга 0),

$$a_1 f_1(x) = a_1^{(1)} f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \varphi\left(\frac{1}{2}\right), & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \varphi\left(\frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

(функция ранга 1). Тогда

$$S^{(0)}(x) := a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{2}\right), & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Интервал $[0.1/2]$ назовем интервалом порядка 1 и обозначим через $I_1^{(1)} := [0, 1/2]$. Функцию $a_2 f_2(x) = a_2^{(1)} f_2^{(1)}(x)$ определим следующим образом : пусть $a_2 f_2(x) = 0$ при $x \notin I_1^{(1)}$, $a_2 f_2(x) = -S^{(0)}(x)$ на правой половине $I_1^{(1)}$, а на левой половине $a_2 f_2(x)$ определим кусочно-постоянным на конечном числе интервалов так, что

$$\int_0^1 a_2 f_2(x)\,dx = \int_{I_1^{(1)}} a_2 f_2(x)\,dx = 0,$$

$$\mu\{x \in [0,1] : S^{(0)}(x) + a_2 f_2(x) > \lambda\} \le \mu\{x \in [0,1] : \varphi(x) > \lambda\}$$

при $\lambda \ge \varphi(1/2)$. Так как $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = +\infty$, то этого всегда можно достичь. Интервалы постоянства функции $S^{(1)} := S^{(0)} + a_2 f_2(x)$ назовем интервалами порядка 2, а функцию $a_2 f_2(x)$ назовем функцией ранга 2.

Пусть построены функции ранга меньше n, обладающие свойствами :

функции $f_k^{(i)}$ и $f_m^{(j)}$ ортогональны при $(k,i) \ne (m,j)$;

функция $f_k^{(i)}$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов ;

для функции $S^{(n)} = \sum\limits_{\substack{k<n \\ i}} a_k^{(i)} f_k^{(i)}$ имеем $\mu\{x \in [0,1] : S^{(n)}(x) > \lambda\} \le \mu\{x \in [0,1] : \varphi(x) > \lambda\}$.

Интервалы постоянства функции $S^{(n)}$ назовем интервалами порядка $n-1$ и обозначим их через $I_{n-1}^{(i)}$ $i=1,\dots,k_{n-1}$, занумеровав слева направо. Положим $M=\max_{x\in[0,1]} S^{(n)}(x)$. Тогда определим функцию $f_n^{(i)}(x)$ и число $a_n^{(i)}$. $i=1,\dots,k_{n-1}$ следующим образом : пусть $a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)=0$ при $x\notin I_{n-1}^{(i)}$, $a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)=-S^{(n)}(x)$ на правой половине $I_{n-1}^{(i)}$, а на левой половине $a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)$ определим кусочно-постоянным на конечном числе интервалов так, что

$$\int_0^1 a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)dx=\int_{I_{n-1}^{(i)}} a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)dx=0,$$

$$S^{(n)}(x)+a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)>M \quad \text{при} \quad x\in \operatorname{supp} f_n^{(i)}(x)\cap I_{n-1,1}^{(i)},$$

$$\mu\{x\in I_{n-1}^{(i)}: S^{(n)}(x)+a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)>\lambda\}\le \frac{1}{k_{n-1}}\mu\{x\in[0,1]:\varphi(x)>\lambda\}$$

при $\lambda\ge M$, где $I_{n-1,1}^{(i)}$ – левая половина интервала $I_{n-1}^{(i)}$. Можно выбрать $f_n^{(i)}(x)$ и $a_n^{(i)}$, удовлетворяющие приведенным условиям, так как $\int_{\{x:\varphi(x)>M\}}\varphi(x)dx=+\infty$. Если перенумеровать функции последовательности $\{a_n^{(i)} f_n^{(i)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательно, то для полученной последовательности $\{a_n f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, будут выполняться свойства (1) – (3). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 59(4), стр. 521 — 545, 1996.
2. Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 46(2), стр. 51 — 58, 1989.
3. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 180(11), стр. 1462 — 1474, 1989.
4. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 184(11), стр. 93 — 130, 1993.
5. С. Ш. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегмента и тригонометрических рядов", Мат. Заметки, том 56(4), стр. 38, 1994.
6. Ф. Г. Арутюнян, "О единственности рядов по системе Хаара", Докл. АН СССР, том 38, № 3, стр. 129 — 134, 1964.
7. Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, "О единственности рядов по системе Уолша и Хаара", Изв. АН СССР, Математика, том 28, стр. 1391 — 1408, 1964.
8. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
9. Г. Г. Геворкян, "О представлении и единственности измеримых функций мартингалами", ДАН Арм. ССР, том 74(3), стр. 113 — 117, 1982.
10. Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по центрированным H-системам", Acta Math. Acad. Sci. Hung., vol. 40(1-2), 1982.
11. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
12. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 1, Мир, Москва, 1965.

15 мая 2000 Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35 НОМЕР 5 2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы