ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

СХОДИМОСТЬ, СУММИРУЕМОСТЬ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И БАЗИСНОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

сборник статей

под редакцией Г. Г. Геворкяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Общие системы Франклина, порождённые квазидвоичным разбиением отрезка $[0, 1]$, были введены самим Франклином в 1928 году. Однако их систематическое изучение началось несколько лет назад, в основном усилиями ереванской школы по ортогональным рядам. Настоящий сборник статей содержит наши последние результаты в этом направлении. В статье Г. Г. Геворкяна и А. А. Саакяна доказана безусловная базисность для общей системы Франклина в пространствах $L_p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$, удовлетворяющей условию, которое слабее, чем слабая регулярность. Несколько теорем единственности рядов Франклина получены в статье М. П. Погосяна.

В своей статье А. А. Талалян указывает на класс линейных регулярных методов суммирования ортогональных рядов, обладающий тем свойством, что из суммируемости почти всюду ортогональных рядов одновременно всеми методами этого класса следует их сходимость почти всюду.

Две статьи М. Г. Григоряна посвящены свойству универсальности ортогональных рядов. Построен ортогональный ряд, который универсален относительно перестановок или в смысле частичных рядов как по метрике пространства $L_p([0,1])$ $(1 \leq p < 2)$, так и в классе всех почти всюду конечных, измеримых функций в смысле сходимости почти всюду. Предложен алгоритм построения квазиуниверсального ряда по любой полной, ортонормальной и ограниченной в $L_{p_0}([0,1])$, $p_0 > 2$ системе.

Ереван, август 2000 Г. Г. Геворкян

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ ОБЩИХ СИСТЕМ ФРАНКЛИНА

Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

В статье изучаются общие системы Франклина, которые распространяют построение Франклина на произвольные множества узлов, и выводятся условия, при которых общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах L_p, $1 < p < \infty$.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая система Франклина, введённая им в 1928 году [1], как первый пример ортонормированного базиса в пространстве $C([0,1])$, является полной ортонормированной системой непрерывных, кусочно-линейных функций с двоичными узлами. Система Франклина полезна в изучении различных функциональных пространств, таких как $L^p(0,1)$, H^p или BMO. С. Бочкарёв [2] доказал, что система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$. П. Войтащик [3] получил характеристику пространства BMO в терминах разложений по базису Франклина и доказал, что система Франклина является безусловным базисом в вещественном пространстве Харди H^1.

В настоящей статье изучаются общие системы Франклина, которые расширяют конструкцию Франклина до произвольных узлов. Выводятся условия, при которых общая система Франклина является безусловным базисом в пространствах L_p при $1 < p < \infty$.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность разбиений отрезка $[0,1]$:

$$P_j = \{t_{j,i} : 0 \le i \le 2^j\}, \quad 0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \cdots < t_{j,2^j} = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

такая, что

$$t_{j+1,2i} = t_{j,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad \lim_{j\to\infty} \max_{0 \le i < 2^j} |t_{j,i+1} - t_{j,i}| = 0. \tag{2}$$

Положим $\pi_1 = P_0$ и

$$\pi_n = P_j \cup \{t_{j+1,2l-1} : 1 \le l \le k\} \quad \text{при} \quad n = 2^j + k, \quad 1 \le k \le 2^j. \tag{3}$$

Через $L_n = L_n(P)$ обозначим пространство непрерывных, кусочно-линейных функций на $[0,1]$ с множеством узлов π_n, $n \ge 1$. Ясно, что разбиение π_n получается из π_{n-1} добавлением единственной точки $t_n = t_{j+1,2k-1}$. Следовательно, $L_n \supset L_{n-1}$ и $\dim L_n = \dim L_{n-1} + 1$.

Определение 1. Общей системой Франклина, соответствующей $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$, называется система функций $F_P = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $x \in [0,1]$, а при $n = 2, 3, \ldots$ функции f_n определяются (единственным образом) условиями $f_n \in L_n$, $f_n \perp L_{n-1}$, $\|f_n\|_2 = 1$, $f_n(t_n) > 0$. Общие системы Франклина были рассмотрены в [4], [5]. Ясно, что при любом разбиении P вида (1), (2) F_P является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1]$, а при $t_{j,i} = \frac{i}{2^j}$ система F_P совпадает с классической системой Франклина.

Так как ортопроекторы на L_n равномерно ограничены в $C(0,1)$ ([6], см. также [7], гл. 6, Теорема 5), то при любом разбиении P вида (1), (2) соответствующая общая система Франклина F_P будет базисом в пространствах $C(0,1)$ и $L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$ (см. [7], гл. 1, Теоремы 6 и 8).

Свойство безусловной базисности общих систем Франклина в пространствах H^1 и L^p, $1 < p < \infty$ было исследовано Г. Геворкяном и А. Камонтом [5]. Следуя [5], разбиение P вида (1), (2) назовем **слабо регулярным**, если оно удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{t_{j,2i-1} - t_{j,2i-2}}{t_{j,2i} - t_{j,2i-1}} \le \gamma, \quad i = 1, \ldots, 2^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и **сильно регулярным**, если

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{t_{j,i+1} - t_{j,i}}{t_{j,i} - t_{j,i-1}} \le \gamma, \quad i = 1, \ldots, 2^j, \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{5}$$

где γ - положительная постоянная, не зависящая от i и j.

Г. Геворкян и А. Камонт [5] доказали, что сильная регулярность последовательности разбиений P является необходимым и достаточным условием для базисности и безусловной базисности общей системы Франклина F_P в пространстве H^1, а при слабой регулярности из (4) следует, что F_P является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$.

В настоящей статье рассматриваются последовательности разбиений P вида (1), (2), удовлетворяющие следующему условию :

(*) Существует постоянная $M > 0$ такая, что для произвольной последовательности i_j, $1 \le i_j \le 2^j$, $j = 1, 2, \dots$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_{j,i_j}| \le M \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{j,i_j} \right), \tag{6}$$

где $\Delta_{j,i} = [t_{j,i-1}, t_{j,i}]$ и μ – мера Лебега.

Легко проверить, что из слабой (и тем более сильной) регулярности последовательности разбиений P следует (*), однако существуют последовательности разбиений P, удовлетворяющие (*), но не условиям (4) и (5). Всякая последовательность разбиений P, для которой существует натуральное число J, обладающее свойством

$$\text{если} \quad j_2 \ge j_1 + J \text{ и } \Delta_{j_2,i_2} \subset \Delta_{j_1,i_1}, \quad \text{то} \quad |\Delta_{j_2,i_2}| \le \frac{1}{2} |\Delta_{j_1,i_1}|, \tag{**}$$

удовлетворяет (*). Цель данной работы – доказать, что при выполнении условия (*) общая система Франклина F_P является безусловным базисом в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$. Отметим, что методы, приведенные в [2] и [5], не пригодны в этом случае (даже если $J = 2$). Поэтому здесь предлагается как новый подход, так и использование некоторых результатов из [2] и [5].

Начнём с некоторых свойств общих систем Франклина при произвольных разбиениях. Для $n = 2^j + k$, $k = 1, \dots, 2^j$, $j = 0, 1, \dots$ точки разбиения π_n обозначим через τ_i^n в возрастающем порядке :

$$0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \dots < \tau_n^n = 1, \quad \tau_{2k-1}^n = t_n = t_{j+1,2k-1}, \tag{7}$$

и пусть $\tau_{-1}^n = 0$, $\tau_{n+1}^n = 1$. Положим также

$$\{n\} = (\tau_{2k-2}^n, \tau_{2k}^n), \quad \{n^-\} = (\tau_{2k-3}^n, \tau_{2k-1}^n), \quad \{n^+\} = (\tau_{2k-1}^n, \tau_{2k+1}^n),$$

$$\nu_n = |\{n\}|, \quad \nu_n^- = |\{n^-\}|, \quad \nu_n^+ = |\{n^+\}|, \quad \mu_n = \frac{1}{\nu_n^-} + \frac{1}{\nu_n} + \frac{1}{\nu_n^+}. \tag{8}$$

В следующих двух леммах числа j и k определяются из представления $n = 2^j + k$ с $1 \le k \le 2^j$ и $j \in \{0, 1, \dots\}$. Доказательство Леммы 1 можно найти в [5].

Лемма 1. 1) $\|f_n\|_p \asymp \mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, $1 \le p \le \infty$, где $a_n \asymp b_n$ означает существование постоянных $0 < c_1 < c_2 < \infty$ таких, что $c_1|a_n| \le b_n \le c_2|a_n|$, $n = 1, 2, \ldots$,

2) $\left|f(\tau^n_{2k-2})\right| \asymp \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-}$, $\left|f\left(\tau^n_{2k-1}\right)\right| \asymp \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n}$, $\left|f\left(\tau^n_{2k}\right)\right| \asymp \dfrac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+}$,

3) если $i < 2k-2$, то

$$\left|f\left(\tau^n_i\right)\right| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau^n_{i+1} - \tau^n_i}{\tau^n_{i+1} - \tau^n_{i-1}} \cdot \left|f\left(\tau^n_{i+1}\right)\right|, \tag{9}$$

4) если $i > 2k$, то

$$\left|f\left(\tau^n_i\right)\right| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau^n_i - \tau^n_{i-1}}{\tau^n_{i+1} - \tau^n_{i-1}} \cdot \left|f\left(\tau^n_{i-1}\right)\right|. \tag{10}$$

Для формулировки следующей леммы нам понадобятся обозначения :

$$\lambda^n_i = \tau^n_i - \tau^n_{i-1}, \quad \lambda^-_n = \tau^n_{2k-2} - \tau^n_{2k-3} = |\Delta_{j+1,2k-2}|, \quad \lambda^+_n = \tau^n_{2k+1} - \tau^n_{2k} = |\Delta_{j,k+1}|,$$

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|, \quad \text{при} \ \ A, B \subset [0, 1], \tag{11}$$

$d_n(x) =$ количество узлов разбиения π_n, лежащих в интервале (x, t_n).

Лемма 2. 1) Если $\tau^n_{i-1} < x \le \tau^n_i$, $i \le 2k-2$, то

a) $$|f_n(x)| \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \cdot \frac{\lambda^-_n}{\left(\tau^n_{2k-2} - \tau^n_{i-1}\right)} \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \cdot \frac{\lambda^-_n}{\rho(x, \{n\}) + \lambda^-_n};$$

b) $$\int_0^x |f_n(t)|^p \, dt \le C_p \int_{\tau^n_{i-1}}^{\tau^n_i} |f_n(t)|^p \, dt, \quad 1 \le p < \infty;$$

2) если $\tau^n_i < x < \tau^n_{i+1}$, $i \ge 2k$, то

c) $$|f_n(x)| \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+} \cdot \frac{\lambda^+_n}{\tau^n_{i+1} - \tau^n_{2k}} \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+} \cdot \frac{\lambda^+_n}{\rho(x, \{n\}) + \lambda^+_n};$$

d) $$\int_x^1 |f_n(t)|^p \, dt \le C_p \int_{\tau^n_i}^{\tau^n_{i+1}} |f_n(t)|^p \, dt, \quad 1 \le p < \infty;$$

3) если $J = (a, b) \subset (0, 1)$, то

$$\int_J |f_n(x)|^p \, dx \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{p d_n(J)} \mu_n^{p/2-1}, \quad d_n(J) = \min_{x \in J} d_n(x).$$

Доказательство : Для доказательства пункта а) применим индукцию по $i = 2k-2, 2k-3, \ldots, 1$. При $i = 2k-2$ результат непосредственно следует из утверждения 2) Леммы 1. Предположим, что a) имеет место при $\tau_{i-1}^n < x \le \tau_i^n$. С учетом (9), при $\tau_{i-2}^n < x \le \tau_{i-1}^n$ имеем

$$|f_n(x)| \le \left|f_n(\tau_{i-1}^n)\right| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_i^n - \tau_{i-2}^n} \cdot |f_n(\tau_i^n)| \le$$

$$\le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(\tau_i^n)+1} \frac{\lambda_n^-}{\tau_{2k-2}^n - \tau_{i-1}^n} \cdot \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_i^n - \tau_{i-2}^n} \le C\left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{\lambda_n^-}{\tau_{2k-2}^n - \tau_{i-2}^n},$$

где последнее неравенство следует из неравенства

$$\frac{c-b}{(d-b)(c-a)} \le \frac{1}{d-a}, \quad 0 < a < b < c < d.$$

Неравенства в b) и 3) следуют из (см. (9))

$$\int_{\tau_{i-2}^n}^{\tau_{i-1}^n} |f_n(x)|^p dx \le a_p \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |f_n(x)|^p dx, \quad i < 2k-2,$$

где a_p, $0 < a_p < 1$ – постоянные, зависящие только от p. Неравенства в c) и d) доказываются аналогично. Лемма 2 доказана.

Для любого интервала I обозначим через $\widetilde{I}$ интервал длины $3|I|$ с тем же центром, что I.

Лемма 3. Пусть P – последовательность разбиений, обладающая свойством (*), и пусть $p \in (1,2)$. Существует постоянная $M_p > 0$ такая, что для произвольного $I \subset (0,1)$

$$\sum_{n=n(I)}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|_{L^q(I)}^p \cdot \|f_n\|_{L^p\left((0,1)\setminus\widetilde{I}\right)}^p \le M_p,$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad n(I) = \min\{n : \pi_n \cap I \ne \emptyset\}. \tag{12}$$

Доказательство : Пусть $I = (\alpha, \beta)$, $\widetilde{I} = \left(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right)$, и пусть $\tau = t_{n(I)} \in I$ – узел, принадлежащий всем π_n при $n \ge n(I)$. Положим

$$A_n = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|_{L^q(I)}^p \cdot \|f_n\|_{L^p\left((0,1)\setminus\widetilde{I}\right)}^p = A_n^- + A_n^+,$$

где

$$A_n^- = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|_{L^q(I)}^p \cdot \|f_n\|_{L^p(0,\widetilde{\alpha})}^p,$$

$$A_n^+ = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|^p_{L^q(I)} \cdot \|f_n\|^p_{L^p(\widetilde{\beta},1)}.$$

Докажем, что существует постоянная $M_p > 0$ такая, что

$$\Omega := \sum_{n=n(I)}^{\infty} A_n^- \leq M_p \tag{13}$$

(сумма $\sum\limits_{n=n(I)}^{\infty} A_n^+$ оценивается аналогично). Положим

$$\Gamma_1 = \{n : n \geq n(I), \quad \{n\} \subset [0, \widetilde{\alpha})\},$$

$$\Gamma_2 = \{n : n \geq n(I), \quad \widetilde{\alpha} \in \{n\}, \quad \alpha \notin \{n\}, \quad \text{card } (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha)) = 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{n : n \geq n(I), \quad \{n\} \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha) \neq \emptyset, \quad \text{card } (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha)) \geq 2\},$$

$$\Gamma_4 = \{n : n \geq n(I), \quad \{n\} \supset (\widetilde{\alpha}, \alpha)\},$$

$$\Gamma_5 = \{n : n \geq n(I), \quad \widetilde{\alpha} \notin \{n\}, \alpha \in \{n\}, \quad \text{card } (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha)) = 1\},$$

$$\Gamma_6 = \left\{n : n \geq n(I), \quad \{n\} \subset [\alpha, 1], \quad \{n\} \cap \left[\alpha, \widetilde{\beta}\right] \neq \emptyset\right\},$$

$$\Gamma_7 = \left\{n : n \geq n(I), \quad \{n\} \subset \left(\widetilde{\beta}, 1\right]\right\},$$

и обозначим

$$\Omega_i = \sum_{n \in \Gamma_i} A_n^-, \quad i = 1, ..., 7. \tag{14}$$

Для доказательства (13) достаточно показать, что

$$\Omega_i \leq M_p, \quad i = 1, \ldots, 7. \tag{15}$$

При $n \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$ из неравенства с) Леммы 2 следует

$$\int_I |f_n(x)|^q \, dx \leq C_q \left(\frac{2}{3}\right)^{qd_n(I)} \frac{\mu_n^{-q/2}}{(\nu_n^+)^q} \cdot \frac{(\lambda_n^+)^q}{[\rho(I, \{n\}) + \lambda_n^+]^q} |I|. \tag{16}$$

Поэтому из неравенства 1) Леммы 1 при $n \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$ получим

$$A_n^- \leq \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)} \|f_n\|_p^p \cdot \left\{\int_I |f_n(x)|^q \, dx\right\}^{p/q} \leq$$

$$\leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{(p-\frac{p}{2})d_n(I)} \frac{\mu_n^{-p/2}}{(\nu_n^+)^p} \cdot \frac{(\lambda_n^+)^p |I|^{p/q} \mu_n^{\frac{p}{2}-1}}{(\rho(I, \{n\}) + \lambda_n^+)^p} =$$

$$= C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2} d_n(I)} \frac{\mu_n^{-1}}{(\nu_n^+)^p} \cdot \frac{(\lambda_n^+)^p |I|^{p-1}}{(\rho(I, \{n\}) + \lambda_n^+)^p}, \tag{17}$$

при этом (см. (8), (11))

$$\mu_n^{-1} \leq \min\{\nu_n, \nu_n^+\}, \quad \lambda_n^+ \leq \nu_n^+. \tag{18}$$

Для доказательства оценки (15), в отдельности рассмотрим случаи $i = 1, ..., 7$.

Доказательство оценки (15) для $i = 1$. Положим

$$\Omega_1(m) = \sum_{n\in\Gamma_1(m)} A_n^-, \quad \Gamma_1(m) = \{n \in \Gamma_1 : d_n(I) = m\}, \quad m = 0, 1, ... \tag{19}$$

Отметим, что при фиксированном m множество $\Gamma_1(m)$ содержит не более одного номера из каждого двоичного интервала $(2^j, 2^{j+1})$, $j = 0, 1, ...$. Из (17) – (19) следует, что при $m = 0, 1, ...$

$$\Omega_1(m) \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2} |I|^{p-1} \sum_{n\in\Gamma_1(m)} \frac{\lambda_n^+}{\rho^p(I, \{n\})} =$$

$$= C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2} |I|^{p-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n\in\Gamma_1(m,l)} \frac{\lambda_n^+}{\rho^p(I, \{n\})}, \tag{20}$$

где

$$\Gamma_1(m,l) = \{n \in \Gamma_1(m) : 2^l|I| \le \rho(I, \{n\}) < 2^{l+1}|I|\} \tag{21}$$

((20) вытекает из того, что $\rho(I, \{n\}) \ge |I|$, если $n \in \Gamma_1$).

Так как при $n = 2^{j_n} + k_n \in \Gamma_1(m,l)$ интервал $\Delta_{j_n+1,2k_n}$ лежит в $(\alpha - 2^{l+1}|I|, \tau)$, то в силу свойства (*) и (8) получим

$$\sum_{n\in\Gamma_1(m,l)} \frac{\lambda_n^+}{\rho^p(I, \{n\})} \le \frac{1}{2^{pl}|I|^p} \sum_{n\in\Gamma_1(m,l)} |\Delta_{j_n+1,2k_n}| \le$$

$$\le M \cdot \frac{1}{2^{pl}|I|^p} \cdot (\tau - \alpha + 2^{l+1}|I|) \le \frac{4M}{2^{(p-1)l}|I|^{p-1}}.$$

Отсюда и из (20) вытекает оценка

$$\Omega_1(m) \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2} |I|^{p-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)l}} \cdot |I|^{1-p} \le C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2}.$$

Следовательно, учитывая (14) и (19), получим

$$\Omega_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_1(m) \le C_p \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{mp/2}, \tag{22}$$

что доказывает (15) для $i = 1$.

Доказательство (15) для $i = 2$. Для $n \in \Gamma_2$ имеем $d_n(I) = 1$, $\nu_n^+ > |I|$. Согласно (17) и (18), имеем

$$A_n^- \le C_p \frac{\mu_n^{-1}}{(\nu_n^+)^p} \cdot |I|^{p-1} \le C_p \frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p} \cdot |I|^{p-1}.$$

Следовательно, в силу (14), имеем

$$\Omega_2 \le C_p|I|^{p-1}\sum_{n\in\Gamma_2}\frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p} = C_p|I|^{p-1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n\in\Gamma_2(l)}\frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p}, \tag{23}$$

где $\Gamma_2(l) = \left\{n \in \Gamma_2 : \ 2^l|I| \le \nu_n^+ < 2^{l+1}|I|\right\}$. Если $n = 2^{j_n} + k_n \in \Gamma_2(l)$, то в силу (8), получим $\nu_n^+ = \left|\{n^+\}\right| = |\Delta_{j_n+1,2k_n}| + |\Delta_{j_n,k_n+1}|$, и $\{n^+\}\cap I \ne \emptyset$, $\{n^+\} \subset (\alpha - 2^{l+1}|I|, \tau)$. Поэтому, согласно свойству (*)

$$\sum_{n\in\Gamma_2(l)}\frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p} \le \frac{1}{2^{lp}|I|^p}\sum_{n\in\Gamma_2(l)}\left(|\Delta_{j_n+1,2k_n}| + |\Delta_{j_n,k_n+1}|\right) \le$$

$$\le 2M\frac{1}{2^{lp}|I|^p}2^{l+2}|I| = \frac{8M}{2^{l(p-1)}|I|^{p-1}}.$$

Отсюда и из (23) получим

$$\Omega_2 \le 8M\cdot C_p\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{l(p-1)}} \le M_p < \infty, \tag{24}$$

что и доказывает оценку (15) для $i = 2$.

Доказательство (15) для $i = 3$. Согласно утверждению 3) Леммы 2, из $n \in \Gamma_3$ следует

$$A_n^- \le C_p\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(\alpha)}\left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\widetilde{\alpha})}\mu_n^{\frac{p}{2}-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\alpha)}\mu_n^{\frac{p}{q}(\frac{q}{2}-1)} \le$$

$$\le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{(d_n(\alpha)+d_n(\widetilde{\alpha}))p/2} \le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{u_np/2}, \tag{25}$$

где $u_n = \mathrm{card}\ \ (\pi_n \cap (\widetilde{\alpha}, \alpha))$. Легко проверить, что

$$\mathrm{card}\ \left\{n\in\Gamma_3 : \ 2^l \le u_n < 2^{l+1}\right\} \le 2^{l+1}, \quad l = 0, 1, \ldots \tag{26}$$

Из (25) и (26) получим

$$\Omega_3 \le C_p\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}\cdot 2^l}2^{l+1} \le M_p < \infty. \tag{27}$$

Доказательство (15) для $i = 4$. Положим $\Gamma_4(1) = \{n \in \Gamma_4 : t_n \le \widetilde{\alpha}\}$, $\Gamma_4(2) = \{n \in \Gamma_4 : \widetilde{\alpha} < t_n < \alpha\}$, $\Gamma_4(3) = \{n \in \Gamma_4 : t_n > \alpha\}$. В силу оценок 2) Леммы 1 и c) Леммы 2 при $n \in \Gamma_4(1)$ имеем

$$|f_n(x)| \le C\left(\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n} + \frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^+}\right), \quad x \in I. \tag{28}$$

Следовательно, в силу 1) Леммы 1 имеем

$$A_n^- \le \|f_n\|_p^p \cdot \left\{\int_I |f_n(x)|^q\, dx\right\}^{p/q} \le C_p \mu_n^{p/2-1}\left(\frac{\mu_n^{-p/2}}{\nu_n^p} + \frac{\mu_n^{-p/2}}{(\nu_n^+)^p}\right)|I|^{p-1} \le$$

$$\le C_p \frac{\nu_n}{\nu_n^p}\cdot |I|^{p-1} + C_p \frac{\nu_n^+}{(\nu_n^+)^p}\cdot |I|^{p-1}, \quad n \in \Gamma_4(1). \tag{29}$$

Если $n \in \Gamma_4(1)$, то $(\widetilde{\alpha}, \alpha) \subset \{n\} \cap \{n^+\}$. Следовательно $\nu_n = |\{n\}| \ge |I|$, $\nu_n^+ = |\{n^+\}| \ge |I|$. Пусть $\Gamma_4(1,l) = \{n \in \Gamma_4(1): \ 2^l|I| \le |\{n\}| < 2^{l+1}|I|\}$, $l = 0, 1, \ldots$ Так как $\{m\} \subset \{n\}$ при $n < m$ и $n, m \in \Gamma_4(1)$, то применив свойство (*), получим

$$\sum_{n\in\Gamma_4(1)} \frac{\nu_n}{\nu_n^p} \le \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n\in\Gamma_4(1,l)} \frac{|\{n\}|}{2^{lp}|I|^p} \le C|I|^{-p}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{lp}} \sup_{n\in\Gamma_4(1,l)} |\{n\}| \le$$

$$\le C|I|^{-p}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^{lp}}\cdot 2^{l+1}|I| \le C|I|^{1-p}. \tag{30}$$

Оценивая аналогичным образом сумму вторых слагаемых в (29), получим

$$\sum_{n\in\Gamma_4(1)} A_n^- \le C_p < \infty. \tag{31}$$

Из условия 1) Леммы 1 имеем

$$\|f_n\|_p \cdot \|f_n\|_q \le C\mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} = C < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Множество $\Gamma_4(2)$ содержит не более одного элемента. Следовательно

$$\sum_{n\in\Gamma_4(2)} A_n^- \le \sum_{n\in\Gamma_4(2)} \|f_n\|_p^p \cdot \|f_n\|_q^p \le C_p < \infty. \tag{33}$$

Далее, для всех $n \in \Gamma_4(3)$ кроме, быть может, наименьшего номера $n \in \Gamma_4(3)$, для которого величину A_n^- можно оценить, используя (32), имеем

$$\{n^+\} \subset (\alpha, \tau) \subset I, \quad \{n\} \subset \{n^-\} \cup I, \quad \{n^-\} \supset (\widetilde{\alpha}, \alpha),$$

$$\nu_n^- = |\{n^-\}| \ge |I|, \quad |I| \le \nu_n \le 2\nu_n^-. \tag{34}$$

Следовательно, $\mu_n^{-1} \le \nu_n^+ = |\{n^+\}| \le |I|$ и в силу 2) Леммы 1 и а) Леммы 2, получим

$$|f_n(x)| \le C\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \le C\cdot\frac{|I|^{1/2}}{\nu_n^-}, \quad x \in \{\tau_{2k-3}^n, \tau_{2k-2}^n\},$$

$$|f_n(x)| \le C\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n} + C\frac{\mu_n^{-1/2}}{\nu_n^-} \le 3C\cdot\frac{|I|^{1/2}}{\nu_n}, \quad x \in \{\tau_{2k-2}^n, \tau_{2k-1}^n\}.$$

Из пункта 1) Леммы 1 и b) Леммы 2 при $n \in \Gamma_4(3)$ имеем

$$A_n^- \leq \|f_n\|_q^p \int\limits_0^{\widetilde{\alpha}} |f_n(x)|^p\,dx \leq C_p \mu_n^{\frac{p}{2}-\frac{p}{q}} \left\{ \int\limits_{\tau_{2k-3}^n}^{\tau_{2k-2}^n} |f_n(x)|^p\,dx + \int\limits_{\tau_{2k-2}^n}^{\tau_{2k-1}^n} |f_n(x)|^p\,dx \right\} \leq$$

$$\leq C_p |I|^{p-1} \cdot \left\{ \frac{\nu_n^-}{(\nu_n^-)^p} + \frac{\nu_n}{\nu_n^p} \right\} \leq C_p |I|^{p-1} \cdot \frac{\nu_n}{\nu_n^p}. \tag{35}$$

В силу (34) имеем $\nu_n \geq |I|$ при $n \in \Gamma_4(3)$. Поэтому, оценивая сумму $\sum\limits_{n\in\Gamma_4(3)} \frac{\nu_n}{\nu_n^p}$ так же, как в (30), получим $\sum_{n\in\Gamma_4(3)} A_n^- \leq C_p < \infty$. Из этого неравенства вместе с (31) и (33) получаем

$$\Omega_4 = \sum_{l=1}^{3} \sum_{n\in\Gamma_4(l)} A_n^- \leq M_p < \infty. \tag{36}$$

Доказательство (15) для $i = 5$. При $n \in \Gamma_5$ интервал $(\widetilde{\alpha}, \alpha)$ содержит только один узел из множества π_n. Следовательно, $\tau_{2k-3}^n \leq \widetilde{\alpha} \leq \tau_{2k-2}^n \leq \alpha \leq \tau_{2k-1}^n$. Рассуждая как в (35), получим

$$A_n^- \leq \|f_n\|_q^p \int\limits_0^{\widetilde{\alpha}} |f_n(x)|^p\,dx \leq C_p \cdot \mu_n^{\frac{p}{2}-\frac{p}{q}} \int\limits_{\tau_{2k-3}^n}^{\tau_{2k-2}^n} |f_n(x)|^p\,dx \leq C_p |I|^{p-1} \cdot \frac{\nu_n^-}{(\nu_n^-)^p},$$

откуда получим

$$\Omega_5 = \sum_{n\in\Gamma_5} A_n^- \leq M_p < \infty. \tag{37}$$

Доказательство оценки (15) для $i = 6$. Для $n \in \Gamma_6$ имеем

$$\mu_n^{-1} \leq 2|I|, \quad \rho(\widetilde{\alpha}, \{n\}) \geq |I|, \tag{38}$$

и согласно пункту 1) Леммы 1

$$\|f_n\|_{L^q(I)}^p \leq C_p |I|^{\frac{p}{q}-1}. \tag{39}$$

Обозначим через $(\widetilde{\gamma}_n, \gamma_n)$ интервал линейности функции f_n, содержащий $\widetilde{\alpha}$. В силу (38) и пункта а) Леммы 2, при $n \in \Gamma_6$, $x \in (\widetilde{\gamma}_n, \gamma_n)$ будем иметь

$$|f_n(x)| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(\widetilde{\alpha})} \frac{|I|^{1/2}}{\nu_n^-} \cdot \frac{\lambda_n^-}{\rho(\widetilde{\gamma}_n, \{n\})} \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(\widetilde{\alpha})} \frac{|I|^{1/2}}{\rho(\widetilde{\gamma}_n, \{n\})}.$$

Следовательно, в силу (39) и пункта b) Леммы 2

$$A_n^- \leq C_p \|f_n\|_{L^q(I)}^p \int\limits_{\widetilde{\gamma}_n}^{\gamma_n} |f_n(x)|^p\,dx \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\widetilde{\alpha})} |I|^{p-1} \frac{\gamma_n - \widetilde{\gamma}_n}{\rho^p(\widetilde{\gamma}_n, \{n\})}. \tag{40}$$

Положим

$$\Gamma_6(m) = \{n \in \Gamma_6 : d_n(\widetilde{\alpha}) = m\}, \qquad \Omega_6(m) = \sum_{n\in\Gamma_6(m)} A_n^-, \tag{41}$$

$$\Gamma_6(m,l) = \left\{n \in \Gamma_6(m) : 2^l|I| \le \rho(\widetilde{\gamma}_n, \{n\}) < 2^{l+1}|I|\right\}, \quad m, l = 0, 1, \ldots$$

В силу (40) и свойства (*) находим

$$\Omega_6(m,l) := \sum_{n\in\Gamma_6(m,l)} A_n^- \le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{pm}|I|^{p-1}\frac{1}{2^{lp}|I|^p}\sum_{n\in\Gamma_6(m,l)}(\gamma_n - \widetilde{\gamma}_n) \le$$

$$\le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{pm}\frac{1}{2^{lp}|I|}\cdot\mu\left(\alpha - 2^{l+1}|I|, \widetilde{\beta}\right) \le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{pm}\frac{1}{2^{l(p-1)}}.$$

Отсюда и из (41) и (38) получим

$$\Omega_6(m) = \sum_{l=0}^{\infty}\Omega_6(m,l) \le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{pm}, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

Следовательно

$$\Omega_6 = \sum_{m=0}^{\infty}\Omega_6(m) \le M_p < \infty. \tag{42}$$

Доказательство (15) для $i = 7$. В силу пункта 3) Леммы 2 при $n \in \Gamma_7$ имеем

$$A_n^- \le C_p\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I)}\left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(I)}\mu_n^{\frac{p}{2}-\frac{p}{q}}\left(\frac{2}{3}\right)^{pd_n(\widetilde{\alpha})}\mu_n^{\frac{p}{2}-1} \le$$

$$\le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}d_n(I)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{2}d_n(\widetilde{\alpha})} \le C_p\left(\frac{2}{3}\right)^{pu_n}, \tag{43}$$

где $u_n = \operatorname{card}\ (\pi_n \cap I)$. Так как $\operatorname{card}\ \left\{n \in \Gamma_7 :\ 2^l \le u_n < 2^{l+1}\right\} \le 2^{l+1}$, $l = 0, 1, \ldots$, то из (43) получим

$$\Omega_7 = \sum_{n\in\Gamma_7} A_n^- \le C_p\sum_{l=0}^{\infty}2^{l+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{p2^l} \le M_p < \infty. \tag{44}$$

Из (22), (24), (27), (36), (37), (42) и (44) следует (15). Доказательство Леммы 3 завершено.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ **обладает свойством (*). Тогда общая система Франклина** $F = F_P$ **является безусловным базисом в пространствах** $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Для функции $f \in L^1(0,1)$ обозначим через $P(f,x)$ её функцию Пэли :

$$P(f,x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2(f)f_n^2(x)\right\}^{1/2},$$

где $a_n(f) = \int_0^1 f(x)f_n(x)\,dx$, $n = 0, 1, \ldots$. Для доказательства Теоремы 1 достаточно (см. [7], гл. 1, Теорема 11) доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*). Тогда для произвольного p, $1 < p < \infty$ существуют постоянные $C_p, c_p > 0$ такие, что

$$c_p \|f\|_p \leq \|P(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(0,1). \tag{45}$$

Достаточно доказать Теорему 2 для $1 < p < 2$ (см. [7], гл. 1, Следствие 3 и Теорему 11). Доказательство второго неравенства в (45) основано на следующих результатах. Через χ_I обозначим характеристическую функцию множества I.

Лемма 4. Пусть $I = (\alpha, \beta)$, и пусть функция $T_I(f,x)$ равна нулю при $x \in (0,1) \setminus I$ и совпадает с ортогональной проекцией функции $f(x)\chi_I(x)$ на пространстве линейных функций на I. Если $\int_I |f(x)|\,dx \leq y|I|$, то

$$\text{a)} \quad \|T_I(f)\|_2^2 \leq y^2|I|, \qquad \text{b)} \quad \|T_I(f)\|_p \leq A_p \|f\|_{L^p(I)}. \tag{46}$$

Доказательство : Положим

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|I|}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{3}|I|^{3/2}}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Легко видеть, что функции φ_1 и φ_2 образуют ортонормированный базис в пространстве линейных функций на I. Следовательно

$$T_I(f) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad c_i = \int_I f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1,2. \tag{47}$$

Имеем $|c_i| = \|f\|_1 \cdot \|\varphi_i\|_\infty \leq y|I|^{1/2}$, $i = 1,2$. Отсюда вытекает пункт а) формулы (46). Второе неравенство в (46) следует из неравенства $\|c_i\varphi_i\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|\varphi_i\|_q \cdot \|\varphi_i\|_p \leq A_p \cdot \|f\|_p$, $i = 1,2$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*) и $1 < p < 2$. Существует постоянная $C_p > 0$ такая, что для произвольной функции $f \in L^p(0,1)$

$$\mu\{x \in (0,1) : P(f,x) > y\} \leq \frac{C_p}{y^p}\|f\|_p^p, \quad y > 0. \tag{48}$$

Доказательство : Пусть $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < 2$. Не умаляя общности можем считать, что $\|f\|_p = 1$ и $y > 1$. Рассмотрим множество $G_y = \{x \in (0,1) : M(f,x) > y\} = \bigcup_k I_k$, где I_k – непересекающиеся интервалы из $(0,1)$. Хорошо известно (см. [7], Приложение 1), что

$$\mu(G_y) \leq \frac{C_p}{y^p}\|f\|_p^p, \tag{49}$$

$$\text{a) } |f(x)| \le M(f,x) \text{ п.в.}, \quad \text{b) } \int\limits_{I_k} |f(x)|\,dx \le y|I_k|, \quad k = 1, 2, \dots \tag{50}$$

Функцию f представим в виде

$$f(x) = h(x) + \phi(x), \tag{51}$$

где

$$h(x) = f(x)\chi_{(0,1)\setminus G}(x) + \sum_k T_{I_k}(f,x). \tag{52}$$

Согласно пункту a) из (50), $|h(x)| \le y$ п.в. на $(0,1)\setminus G$, и применяя Лемму 4, получим

$$\|h\|_2^2 = \int_{(0,1)\setminus G} f^2(x)\,dx + \sum_k \int_{I_k} T_{I_k}^2(f,x)\,dx \le$$

$$\le y^{2-p}\int_{(0,1)\setminus G} |f(x)|^p\,dx + y^2\mu(G) \le C_p y^{2-p}\|f\|_p^p.$$

Поэтому

$$\mu\left\{x : P(h,x) > \frac{y}{2}\right\} \le \frac{4}{y^2}\|P(h)\|_2^2 = \frac{4}{y^2}\|h\|_2^2 \le \frac{C_p}{y^p}\|f\|_p^p. \tag{53}$$

Следовательно, для доказательства (48) достаточно показать, что

$$\mu\left\{x : P(\phi,x) > \frac{y}{2}\right\} \le \frac{C_p}{y^p}\|f\|_p^p. \tag{54}$$

Так как $p < 2$, то имеем

$$|P(\phi,x)|^p = \left(\sum_n a_n^2(\phi) f_n^2(x)\right)^{p/2} \le \sum_n |a_n(\phi) f_n(x)|^p.$$

Полагая $\widetilde{G} = \bigcup \widetilde{I}_k$, запишем

$$\mu\left\{x : P(\phi,x) > \frac{y}{2}\right\} \le \mu\left(\widetilde{G}\right) + \mu\left\{x \in (0,1)\setminus\widetilde{G} :\ P(\phi,x) > \frac{y}{2}\right\} \le$$

$$\le 3\mu(G) + \frac{2^p}{y^p}\int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |P(\phi,x)|^p\,dx \le \frac{C_p}{y^p}\|f\|_p^p + \frac{2^p}{y^p}\sum_n \int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi) f_n(x)|^p\,dx. \tag{55}$$

Докажем теперь, что

$$\sum_n \int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi) f_n(x)|^p\,dx \le C_p\|\phi\|_p^p, \tag{56}$$

откуда, в силу (55), будет следовать оценка (54). Положим

$$\phi_k(x) = \phi(x)\chi_{I_k}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(x). \tag{57}$$

Из (52) следует, что для произвольной линейной на I_k функции $l(x)$

$$\int\limits_{I_k} \phi(x)l(x)\,dx = 0.$$

В частности, $a_n(\phi_k) = 0$, если $n < n(I_k)$. Следовательно, в силу (57), имеем

$$|a_n(\phi)| = \left|\sum_{k:n\geq n(I_k)} a_n(\phi_k)\right| \leq \sum_{k:n\geq n(I_k)} \int\limits_{I_k} |\phi_k(x)f_n(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p \|f_n\|_{L^q(I_k)} = \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p (\sqrt{\frac{3}{2}})^{d_n(I_k)} (\sqrt{\frac{2}{3}})^{d_n(I_k)} \|f_n\|_{L^q(I_k)} \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p (\sqrt{3/2})^{pd_n(I_k)} \|f_n\|_{L^q(I_k)}^p\right\}^{1/p} \times \left\{\sum_{k:n\geq n(I_k)} (\sqrt{2/3})^{qd_n(I_k)}\right\}^{1/q}.$$

Если $n \geq n(I_k)$, то интервал I_k содержит по крайней мере один узел разбиения π_n. Следовательно, для любого натурального m равенство $d_n(I_k) = m$ может выполняться для не более двух значений k, удовлетворяющих условию $n \geq n(I_k)$. Следовательно

$$\left\{\sum_{k:n\geq n(I_k)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{qd_n(I_k)}\right\}^{1/q} \leq C,$$

где C – абсолютная постоянная. Из предыдущих двух оценок вытекает

$$|a_n(\phi)| \leq C_p \left\{\sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I_k)} \|f_n\|_{L^q(I_k)}^p\right\}^{1/p}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi)f_n(x)|^p\,dx \leq$$

$$\leq C_p^p \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p (\sqrt{3/2})^{pd_n(I_k)} \|f_n\|_{L^q(I_k)}^p \cdot \|f_n\|_{L^p(0,1)\setminus\widetilde{I}_k}^p.$$

Применяя Лемму 3, получим

$$\sum_n \int\limits_{(0,1)\setminus\widetilde{G}} |a_n(\phi)f_n(x)|^p\,dx \leq$$

$$\leq C_p \sum_n \sum_{k:n\geq n(I_k)} \|\phi_k\|_p^p \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I_k)} \|f_n\|_{L^q(I_k)}^p \cdot \|f_n\|_{L^p(0,1)\setminus\widetilde{I}_k}^p =$$

$$= C_p \sum_k \|\phi_k\|_p^p \sum_{n=n(I_k)}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{pd_n(I_k)} \|f_n\|^p_{L^q(I_k)} \cdot \|f_n\|^p_{L^p(0,1)\setminus\widetilde{I}_k} \leq$$

$$\leq C_p \sum_k \|\phi_k\|_p^p = C_p \|\phi\|_p^p.$$

Отсюда следует оценка (56). Лемма 5 доказана.

Лемма 5 показывает, что оператор $P(f)$ имеет слабый тип (p,p) при $1 < p < 2$. Так как $P(f)$ ограничен в $L^2(0,1)$ (точнее $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2$), то в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича (см. [7], Приложение 1), получим

$$\|P(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(0,1), \quad 1 < p < 2. \tag{58}$$

Для завершения доказательства Теоремы 2 остается установить обратное неравенство при $1 < p < 2$:

$$c_p \|f\|_p \leq \|P(f)\|_p, \quad f \in L^p(0,1). \tag{59}$$

Эта оценка непосредственно вытекает из нижеследующей леммы. Для функции $f \in L^1(0,1)$ положим

$$S^*(f,x) = \sup_{1 \leq m < \infty} \left| \sum_{n=0}^{m} a_n(f) f_n(x) \right|.$$

Лемма 6. Пусть последовательность разбиений $P = \{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает свойством (*). Тогда для произвольного $f \in L^1(0,1)$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \mu\{x \in (0,1) :\ S^*(f,x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \|P(f)\|_1, \quad \lambda > 0, \\ &\text{b)} \quad \|S^*(f)\|_p \leq C_p \|P(f)\|_p, \quad 1 < p < 2, \end{aligned} \tag{60}$$

где постоянная C_p не зависит от f.

Доказательство : Не умаляя общности можно считать, что f – полином : $f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n$. Для $\lambda > 0$ рассмотрим множества $E_\lambda = \{x \in (0,1) : P(f,x) > \lambda\}$, $B_\lambda = \{x : M(\chi_{E_\lambda}, x) > \frac{1}{4}\}$. Из свойств максимальной функции следует, что

$$B_\lambda = \cup_k I_k, \quad \mu(B_\lambda) \leq C\mu(E_\lambda), \tag{61}$$

где I_k, $k = 1, 2, \ldots$ – непересекающиеся интервалы. Если $x_0 \in (0,1) \setminus B_\lambda$, то $M(\chi_{E_\lambda}, x_0) \leq \frac{1}{4}$. Следовательно, для любого отрезка Δ, содержащего x_0, имеем

$$\mu(E_\lambda \cap \Delta) \leq \frac{1}{4}\mu(\Delta). \tag{62}$$

Положим $\Gamma_1 = \bigcup_k \Gamma_{1k}$, $\Gamma_{1k} = \{n : t_n \in I_k, \text{ card } (\pi_n \cap I_k) > 2\}$, $\Gamma_2 = \{1, ..., N\} \setminus \Gamma_1$, и пусть $\phi_i = \sum_{n \in \Gamma_i} a_n f_n$, $i = 1, 2$. Докажем, что неравенства в (60) вытекают из следующих свойств a) и b) :

$$\text{a)} \int\limits_{(0,1)\setminus \widetilde{B}_\lambda} \sum_{n \in \Gamma_1} |a_n f_n(x)| \, dx \le C_0 \int\limits_{B_\lambda} P(f, x) \, dx, \quad \text{b)} \; \|P(\phi_2)\|_{C(0,1)} \le C_0 \lambda, \tag{63}$$

где $\widetilde{B}_\lambda = \cup_k \widetilde{I}_k$. Из (61) и (63) имеем

$$\mu\left\{x : S^*(\phi_1, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \mu\left\{\widetilde{B}_\lambda\right\} + \mu\left\{x \in (0,1) \setminus \widetilde{B}_\lambda : S^*(\phi_1, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le$$

$$\le 3\mu(B_\lambda) + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{(0,1)\setminus \widetilde{B}_\lambda} S^*(\phi_1, x) \, dx \le 3C\mu(E_\lambda) + \frac{C_0}{\lambda} \int\limits_{\widetilde{B}_\lambda} P(f, x) \, dx \le \frac{C}{\lambda} \|P(f)\|_1 . \tag{64}$$

Так как $S^*(f) \le C \cdot M(f)$ (см. [4]), то из неравенства b) в (63) следует

$$\mu\left\{x : S^*(\phi_2, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{4}{\lambda^2} \|M(\phi_2)\|_2^2 \le \frac{C}{\lambda^2} \|\phi_2\|_2^2 = \frac{C}{\lambda^2} \|P(\phi_2)\|_2^2 \le \frac{c}{\lambda} \|P(f)\|_1 . \tag{65}$$

Так как $f = \phi_1 + \phi_2$, то из (64) и (65) получим пункт a) в (60).

Для доказательства b) в (60) заметим сначала, что из (61) и пункта a) в (63) имеем

$$\psi_1(\lambda) := \mu\left\{x \in (0,1) : S^*(\phi_1, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda} \int\limits_{\widetilde{B}_\lambda} P(f, x) \, dx \le$$

$$\le C\mu(E_\lambda) + C\mu\left(\widetilde{B}_\lambda \setminus E_\lambda\right) + \frac{C}{\lambda} \int\limits_{E_\lambda} P(f, x) \, dx \le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda} \int\limits_{E_\lambda} P(f, x) \, dx.$$

В силу (65) получим

$$\psi_2(\lambda) := \mu\left\{x \in (0,1) : S^*(\phi_2, x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda^2} \int\limits_{(0,1)\setminus E_\lambda} P^2(f, x) \, dx.$$

Следовательно

$$\psi(\lambda) := \mu\{x \in (0,1) : S^*(f, x) > \lambda\} \le \psi_1(\lambda) + \psi_2(\lambda) \le$$

$$\le C\mu(E_\lambda) + \frac{C}{\lambda} \int\limits_{E_\lambda} P(f, x) \, dx + \frac{C}{\lambda^2} \int\limits_{(0,1)\setminus E_\lambda} P^2(f, x) \, dx.$$

Отсюда получаем (см. [7], Приложение 1)

$$\|S^*(f)\|_p^p = p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \psi(\lambda) \, d\lambda \le C_p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(E_\lambda) \, d\lambda +$$

$$+C_p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{E_\lambda} P(f,x)\,dx\,d\lambda + C_p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \int_{(0,1)\setminus E_\lambda} P^2(f,x)\,dx\,d\lambda =$$

$$= C_p \|P(f)\|_p^p + C_p \int_0^1 P(f,x) \int_0^{P(f,x)} \lambda^{p-2}\,d\lambda\,dx +$$

$$+C_p \int_0^1 P^2(f,x) \int_{P(f,x)}^\infty \lambda^{p-3}\,d\lambda\,dx \le C_p \|P(f)\|_p^p .$$

Для завершения доказательства Леммы 6 остается установить неравенства (63). Пусть $I = (\alpha.\beta) = I_k$ при некотором k. Положим

$$\Gamma_{2,1} = \{n : \text{card } (\pi_n \cap I) \le 1, \quad 1 \le n \le N\},$$

$$\Gamma_{2,2} = \{n : \text{card } (\pi_n \cap I) = 2, \quad \{n\} \cap I \ne \emptyset, \quad 1 \le n \le N\},$$

$$\Gamma_{2,3} = \{n : t_n \ge \beta, \quad \text{card } (\pi_n \cap I) \ge 2, \quad 1 \le n \le N\}, \tag{66}$$

$$\Gamma_{2,4} = \{n : t_n \le \alpha, \quad \text{card } (\pi_n \cap I) \ge 2, \quad 1 \le n \le N\},$$

$$\phi_{2,i} = \sum_{n\in\Gamma_{2,i}} a_n f_n, \quad i = 1,2,3,4.$$

Пусть γ_1, γ_2 и γ_3 – узлы разбиений π_n, $n \in \Gamma_{2.1}$ такие, что $\gamma_1 \le \alpha \le \gamma_2 \le \beta \le \gamma_3$ (если I не содержит узла из π_n, считаем. что $\gamma_2 = \gamma_3$). Так как $P(f.\alpha) \le \lambda$, то из (62) имеем $\mu\{x \in (\gamma_1,\gamma_2) : P(\phi_{2.1},x) > \lambda\} \le \frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_1)$. Учитывая, что $[P(\phi_{2,1},x)]^2$ – полином второй степени на (γ_1,γ_2), имеем

$$P(\phi_{2.1},x) \le C\lambda, \quad x \in (\gamma_1,\gamma_2). \tag{67}$$

Аналогично получим (67) при $x \in (\gamma_2,\gamma_3)$, т.е.

$$P(\phi_{2.1},x) \le C\lambda, \quad x \in I. \tag{68}$$

Если множество $\Gamma_{2,2}$ непусто, то оно содержит не более трех элементов. Пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_4$ – узлы разбиения π_n такие, что $\gamma_1 \le \alpha < \gamma_2 < \gamma_3 < \beta \le \gamma_4$. Так же как и в (67), имеем $P(\phi_{2,2},x) \le C\lambda$, $x \in (\gamma_1,\gamma_2) \cup (\gamma_3,\gamma_4)$. На (γ_2,γ_3) функция $\phi_{2,2}$ является суммой не более трех функций общей системы Франклина. Таким образом, получим

$$P(\phi_{2.2},x) \le C\lambda, \quad x \in I. \tag{69}$$

Оценим теперь функцию Пэли для $\phi_{2,3}$. Положим $n_1 = \min\Gamma_{2,3}$, и пусть $\beta_1 \in \pi_{n_1}$, $\alpha < \beta_1 < \beta$, $(\beta_1,\beta) \cap \pi_{n_1} = \emptyset$, $\Gamma_{2,3,1} = \{n \in \Gamma_{2,3} : (\beta_1,\beta) \cap \pi_n = \emptyset\}$.

Далее, возьмем $n_2 = \min \Gamma_{2,3} \setminus \Gamma_{2,3,1}$, и $\beta_2 \in \pi_{n_2}$, $\beta_1 < \beta_2 < \beta$, $\Gamma_{2,3,2} = \{n \in \Gamma_{2,3} : \ n \geq n_2, \quad (\beta_2, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}$. Если множество $\Gamma_{2,3,k-1}$ и узел β_{k-1} известны, то полагаем $n_k = \min \Gamma_{2,3} \setminus \Gamma_{2,3,k-1}$, $\beta_k \in \pi_{n_k}$, $\beta_{k-1} < \beta_k < \beta$, $\Gamma_{2,3,k} = \{n \in \Gamma_{2,3} : \ n \geq n_k, \quad (\beta_k, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}$. Обозначим $\phi_{2,3,k} = \sum_{n \in \Gamma_{2,3,k}} a_n f_n$. Если $n \in \Gamma_{2,3,k}$, то f_n линейна на (β_k, β), и $\beta_1, ..., \beta_{k-1}$ являются узлами из π_n. Следовательно, $P\left(\sum_{k=1}^{k_0} \phi_{2,3,k}, x\right) \leq C\lambda$, $x \in (\beta_k, \beta)$. Так как $t_n \geq \beta$, то имеем $P(\phi_{2,3,k_0}, x) \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{k_0 - k} \lambda$, $k < k_0$, $x \in (\alpha, \beta_k)$. Отсюда получаем, что

$$P^2(\phi_{2,3}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} P^2(\phi_{2,3,k}, x) \leq C\lambda^2, \quad x \in I. \tag{70}$$

Аналогично доказывается, что

$$P(\phi_{2,4}, x) \leq C \cdot \lambda, \quad x \in I. \tag{71}$$

Из (68) – (71) находим $P(\phi_2, x) \leq C \sum_{i=1}^{4} P(f_{2,1}, x) \leq C \cdot \lambda$, $x \in B_\lambda$, откуда следует неравенство b) из (63).

Для доказательства неравенства a) из (63) достаточно показать, что

$$\int_{I_k^o} \sum_{n \in \Gamma_{1,k}} |a_n f_n(x)| \, dx \leq C \int_{I_k} P(f, x) \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{72}$$

Пусть $I = I_{k_0}$ при некотором k_0, и

$$\widetilde{\Gamma} = \Gamma_{1,k_0} = \{n : \ t_n \in I, \ \ \text{card} \ \ (\pi_n \cap I) > 2\}. \tag{73}$$

Покажем, что

$$\int_{\beta}^{1} \sum_{n \in \widetilde{\Gamma}} |a_n f_n(x)| \, dx \leq C \int_I P(f, x) \, dx. \tag{74}$$

Интеграл по интервалу $(0, \alpha)$ оценивается аналогично. Рассмотрим разложение $\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Gamma}_j$, $\widetilde{\Gamma}_j = \left\{n \in \widetilde{\Gamma} : d_n(\beta) = j\right\}$. Из (73) следует, что при $n \in \widetilde{\Gamma}$ по крайней мере один из интервалов $\{n^+\}$, $\{n\}$, $\{n^-\}$ лежит в I. Наряду с этим выберем один интервал, близкий к α и обозначим его через u_n. Если $n \in \widetilde{\Gamma}_j$, $j = 0, 1, ...$, то имеем

$$\int_{\beta}^{1} |a_n f_n(x)| \, dx \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^j \int_{u_n} |a_n f_n(x)| \, dx. \tag{75}$$

В силу (8) интервал u_n состоит из двух интервалов линейности функции f_n. Для одного из этих интервалов (скажем $\widetilde{u}_n$), имеем

$$\int_{u_n} |a_n f_n(x)| \, dx \leq 2 \int_{\widetilde{u}_n} |a_n f_n(x)| \, dx. \tag{76}$$

Обозначив через $\widetilde{u}_n^-$ левую половину интервала $\widetilde{u}_n$, с учетом линейности функции f_n на $\widetilde{u}_n$ получим

$$\int_{\widetilde{u}_n} |a_n f_n(x)|\, dx \le C \int_{\widetilde{u}_n^-} |a_n f_n(x)|\, dx \le C \int_{\widetilde{u}_n^-} P(f, x)\, dx. \qquad (77)$$

Из (75) – (77) следует, что при $j = 0, 1, \ldots$

$$\int_{\beta}^{1} \sum_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} |a_n f_n(x)|\, dx \le C \left(\frac{2}{3}\right)^j \sum_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} \int_{\widetilde{u}_n^-} P(f, x)\, dx. \qquad (78)$$

В силу свойства (*), при фиксированном j количество пересечений интервалов $\widetilde{u}_n^-$ ограничено сверху числом, зависящим от M. Следовательно,

$$\sum_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} \int_{\widetilde{u}_n^-} P(f, x)\, dx \le C \left(\frac{2}{3}\right)^j \int_U P(f, x)\, dx \le C \left(\frac{2}{3}\right)^j \int_I P(f, x)\, dx,$$

где $U = \bigcup\limits_{n\in\widetilde{\Gamma}_j} \widetilde{u}_n^-$. Суммируя эти неравенства по $j = 0, 1, \ldots$, получим (74), а следовательно и (72). Этим завершаются доказательства Леммы 6 и Теоремы 2.

ABSTRACT. The paper studies general Franklin systems, that extend Franklin's construction to arbitrary sets of knots and derives conditions, under which a general Franklin system is an unconditional basis in the spaces L_p, $1 < p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann. vol. 100, pp. 522 – 529, 1928.
2. С. В. Бочкарёв, "Некоторые неравенства для рядов Франклина", Anal. Math., vol. 1, pp. 249 – 257, 1975.
3. P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is an unconditional basis in H^1", Ark. Mat., vol. 20, pp. 293 – 300, 1982.
4. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 – 143, 1997.
5. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae, CCCLXXIV, pp. 1 – 59, 1998.
6. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1999.

5 апреля 2000

Ереванский государственный университет,
Институт математики
НАН Армении

ОБ ОДНОМ УНИВЕРСАЛЬНОМ ОРТОГОНАЛЬНОМ РЯДЕ

М. Г. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 4, 2000

В работе построен ортогональный ряд, который универсален относительно перестановок или в смысле частичных рядов как по метрике пространства $L_p([0,1])$ $(1 \le p < 2)$ так и в классе всех почти всюду конечных, измеримых функций в смысле сходимости почти всюду на $[0,1]$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с необходимых определений. Эти определения зависят как от пространства $\mathcal{S}$ функций, определённых на отрезке $[0,1]$, так и от типа сходимости $\mathcal{T}$: типичные примеры суть $\mathcal{S} = L^p[0,1]$ или $\mathcal{S} =$ класс всех измеримых функций на $[0,1]$, $\mathcal{T} =$ сходимость по метрике $L^p[0,1]$, $\mathcal{T} =$ сходимость почти всюду на отрезке $[0,1]$ и т.д.

Определение 1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1.1}$$

называется универсальным относительно перестановок в $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, если для каждой функции $f(x) \in \mathcal{S}$ члены ряда (1.1) можно переставить $k \longmapsto \sigma(k)$ так, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \tag{1.2}$$

сходился бы к функции $f(x)$ в смысле $\mathcal{T}$.

Определение 2. Ряд (1.1) называется универсальным относительно частичных рядов в $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, если для каждой функции $f(x) \in \mathcal{S}$ существует частичный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \tag{1.3}$$

ряда (1.1), который сходится к $f(x)$ в смысле $\mathcal{T}$.

Определение 3. Ряд (1.1) называется **универсальным в обычном смысле** в $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, если для каждой функции $f(x) \in \mathcal{S}$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что соответствующая последовательность частичных сумм $\sum_{j=1}^{n_k} a_j \varphi_j(x)$ сходится к $f(x)$ в смысле $\mathcal{T}$.

Вопрос существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду или по мере был рассмотрен в [1] – [11]. Приведем несколько результатов из этих работ, которые имеют отношение к утверждениям, доказанным в настоящей статье.

Первые тригонометрические ряды, универсальные в обычном смысле $\mathcal{S}$ = все измеримые функции и $\mathcal{T}$ = сходимость почти всюду, были построены Д. Е. Меньшовым [1] (см. также [2]). Этот результат был обобщён А. А. Талаляном [3] на произвольные ортонормированные полные системы. Он также установил [4], что если $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$ является произвольной ортонормированной системой, то существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, универсальный в смысле частичных рядов в $\mathcal{S}$ = класс всех измеримых функций и $\mathcal{T}$ = сходимость по мере на $[0,1]$.

Тот факт, что существуют функциональные ряды, универсальные относительно перестановок в $\mathcal{S}$ = класс почти всюду конечных измеримых функций и $\mathcal{T}$ = сходимость почти всюду, был отмечен Орличем [10]. Отметим, что Риман доказал (см. [11], стр. 317), что всякий неабсолютно сходящийся числовой ряд является универсальным относительно перестановок в $\mathcal{S}$ = все действительные числа.

Поставим вопрос : для любого фиксированного $p > 0$ и произвольной ортонормированной полной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, существует ли ряд по этой системе, который универсален относительно перестановок (в смысле частичных рядов) в классе $L^p[0,1]$ в смысле сходимости по метрике $L^p[0,1]$? Ответ существенно зависит как от числа p, так и от системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Сначала покажем, что при любом $p \geq 2$ ($p \geq 1$) и по произвольной ортонормированной (ограниченной ортонормированной) системе $\{\varphi_n(x)\}$ не существует ряда, который был бы универсален либо относительно перестановок, либо в смысле частичных рядов в $\mathcal{S} = L^p[0,1]$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по метрике $L^p[0,1]$ (при $p > 2$ предполагается, что $\varphi_n(x) \in L^p[0,1]$, $n = 1, 2, ...$).

Действительно, если при некотором $p_0 \geq 2$ ($p_0 \geq 1$) и по некоторой ортонормированной (ограниченной ортонормированной) системе $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд (1.1), универсальный относительно перестановок (в смысле частичных рядов) в

$\mathcal{S} = L^p[0,1]$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по метрике $L^p[0,1]$, то по Определению 1 (или 2) для функции $(|a_1|+1)\varphi_1(x)$ существует перестановка $k \longmapsto \sigma(k)$ (или возрастающая последовательность $n_k \uparrow \infty$) такая, что

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) - (|a_1|+1)\varphi_1(x)\right\|_{p_0} = 0$$

или

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{m} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) - (|a_1|+1)\varphi_1(x)\right\|_{p_0} = 0.$$

Так как $\varphi_1(x) \in L^{q_0}[0,1]$, $(\frac{1}{q_0}+\frac{1}{p_0} = 1$ при $p_0 > 1$, и $q_0 = \infty$ при $p_0 = 1)$, то в первом случае имеем $a_1 = 1 + |a_1|$, а во втором случае

$$1 + |a_1| = \begin{cases} a_1 & \text{при} \quad n_1 = 1, \\ 0 & \text{при} \quad n_1 > 1. \end{cases}$$

Это противоречие завершает доказательство.

В [12] автор доказал, что существует ортонормированная система $\{\omega_k(x)\}$, $x \in [0,1]$, по которой можно построить ряд $\sum c_k\omega_k(x)$, универсальный в смысле частичных рядов в $\mathcal{S} = L^p[0,1]$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по L^p-норме при любом фиксированном $p \in [1,2)$.

Теперь сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. Существует ортогональный ряд, обладающий следующими свойствами 1), 2) и 3) :

1) универсальный одновременно как относительно перестановок, так и относительно частичных рядов как в каждом $L^p[0,1]$, $p \in [1,2)$, так и в $\bigcap_{1\le p<2} L^p[0,1]$,

2) универсальный одновременно как относительно перестановок, так и относительно частичных рядов в классе $\mathcal{S}$ = всех измеримых функций и в смысле $\mathcal{T}$ = сходимости почти всюду на $[0,1]$,

3) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое измеримое множество $E \subset [0,1]$ с лебеговой мерой $|E| > 1-\varepsilon$, чтобы имела бы место универсальность ряда одновременно как относительно перестановок, так и относительно частичных рядов как в каждом $\mathcal{S} = L^p(E)$, $p \ge 2$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по $L^p(E)$-норме, так и для класса $\mathcal{S}$ всех непрерывных функций на E и $\mathcal{T}$ = равномерная сходимость на E.

Теорема 2. Существует ортонормированная система $\{\omega_k(x)\}$, $x \in [0,1]$ и последовательность коэффициентов $c_{k,n}$ такая, что двойной ряд

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \tag{1.4}$$

обладает следующими свойствами :

1) для каждого $p \in [1,2)$ и любой функции $f(x,y) \in L^p[0,1]^2$

a) члены ряда (1.4) можно переставить так, чтобы новый ряд сходился бы к $f(x,y)$ в метрике пространства $L^p[0,1]^2$ относительно как сферической, так и прямоугольной частичных сумм,

b) существует частичный ряд ряда (1.4), сходящийся к $f(x,y)$ в метрике пространства $L^p[0,1]^2$ относительно как сферической, так и прямоугольной частичных сумм ;

2) для любой измеримой на $[0,1]^2$ функции $f(x,y)$

a) члены ряда (1.4) можно переставить так, чтобы новый ряд сходился бы к $f(x,y)$ почти всюду относительно как сферической, так и прямоугольной частичных сумм,

b) существует частичный ряд ряда (1.4), сходящийся к $f(x,y)$ почти всюду относительно как сферической, так и прямоугольной частичных сумм.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Существует ортонормированная система $\{\omega_k(x)\}$, $x \in [0,1]$ такая, что для любой функции $f(x) \in L^p[0,1]$, $p > 0$ и для любых чисел $p_0 \in (1,2)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $N_0 > 1$, существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ и многочлен вида $Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k\omega_k(x)$, удовлетворяющий условиям

1) $$||f(x) - Q(x)||_{p_0} < \varepsilon_0, \quad |E| > 1 - \varepsilon_0,$$

2) $$\max_{N_0 \le m \le N} \left\| \sum_{k=N_0}^{m} a_k\omega_k(x) \right\|_p \le 2||f||_p, \quad p \in [1, p_0],$$

3) $$\max_{N_0 \le k \le N} ||a_k\omega_k(x)||_{p_0} \le \varepsilon_0,$$

4) $$\max_{N_0 \le m \le N} \left| \sum_{k=N_0}^{m} a_k\omega_k(x) \right| \le |f(x)| + \varepsilon_0, \quad x \in E,$$

5) $$\max_{N_0 \le k \le N} |a_k \omega_k(x)| \le \varepsilon_0, \quad x \in E.$$

Доказательство : Пусть
$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.1}$$
последовательность алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами. Пусть $\{\beta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность функций, удовлстворяющих условиям $\beta_k(x) = 0$, $x \notin \Delta_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, $\int_{\Delta_k} |\beta_k(x)|^2 dx < \frac{1}{k^3}$, $\beta_k(x) \notin \bigcup_{q>2} L^q[0,1]$, $k \ge 1$, и положим $g_k(x) = f_k(x) + \beta_k(x)$, $x \in [0,1]$, $k \ge 1$. Очевидно, что система функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независима, замкнута в $L^2[0,1]$ и для любой последовательности чисел $\alpha_1, , ..., \alpha_N$ с $\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| > 0$ имеем
$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k g_k(x) \notin \bigcup_{q>2} L^q[0,1].$$
Ортонормируя эту систему на $[0,1]$ получим, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает следующими свойствами :

a) $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система в $L^2[0,1]$,

b) для любой последовательности чисел $\alpha_1, , ..., \alpha_N$ с $\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| > 0$ имеем
$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x) \notin \bigcup_{q>2} L^q[0,1].$$
Теперь покажем, что для любого $N > 1$ система $\{\varphi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута во всех пространствах $L^p[0,1]$ для любого $1 \le p < 2$. Предположим противное, что при некотором $p_0 \in [1,2)$ и $N_0 > 1$ система $\{\varphi_k(x)\}_{k=N_0+1}^{\infty}$ не замкнута в $L^{p_0}[0,1]$. Тогда она не полна в $L^{q_0}[0,1]$, где $\dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{p_0} = 1$ при $p_0 > 1$, и $q_0 = \infty$ при $p_0 = 1$. Таким образом, существует функция $g(x) \in L^{q_0}[0,1]$ с $||g(x)||_2 > 0$ такая, что
$$\int_0^1 g(x)\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad k \ge N_0 + 1.$$
Следовательно, для всех $n \ge 1$ будем иметь
$$\int_0^1 \left[g(x) - \sum_{k=1}^{N_0} \alpha_k \varphi_k(x)\right] \varphi_n(x)\,dx = 0,$$
где
$$\alpha_k = \int_0^1 g(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad 1 \le k \le N_0.$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L^2[0,1]$, то

$$\sum_{k=1}^{N_0}\alpha_k\varphi_k(x)\,dx = g(x)\in L^{q_0}[0,1], \quad \sum_{k=1}^{N_0}\alpha_k^2 = \int_0^1 g^2(x)\,dx \neq 0.$$

Это противоречит свойству b) системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Пользуясь только что доказанным свойством, по индукции выберем попарно непересекающиеся многочлены

$$h_i^{(k)} = \sum_{j=N_{i-1}^{(k)}}^{N_i^{(k)}-1} a_j\varphi_j(x), \quad 1\le i\le \nu(k), \quad k\ge 1,$$

$$1 = N_0^{(1)}, \quad N_0^{(k)} < N_1^{(k)} < \dots < N_{\nu_k}^{(k)} = N_0^{(k+1)} < \dots < N_{\nu_{k+1}}^{(k+1)},$$

так, чтобы для каждой $f_k(x)$ из (2.1) при $k\ge 1$ выполнялись бы соотношения

$$\left\|f_k(x) - h_i^{(k)}\right\|_{p_k} = \left(\int_0^1 \left|f_k(x)-h_i^{(k)}\right|^{p_k} dx\right)^{1/p_k} < 2^{-2(k+i)}, \quad 1\le i\le\nu(k), \quad (2.2)$$

где

$$p_k = 2-\frac{1}{k}, \quad \nu(k) = \left[k + 2^k \max_{x\in[0,1]}|f(x)|\right]+1, \quad k=1,2,\dots. \quad (2.3)$$

и $[y]$ – целая часть числа y. Согласно (2.2) имеем

$$\left\|f_k(x) - \frac{1}{\nu(k)}\sum_{i=1}^{\nu(k)} h_i^{(k)}(x)\right\|_{p_k} < 2^{-2(k+1)}, \quad k\ge 1.$$

Определим ортонормированную систему $\{\omega_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ следующим образом :

$$\omega_j(x) = \frac{h_i^{(k)}(x)}{\|h_i^{(k)}\|_2}, \quad j=\mu_{k-1}+i, \quad 1\le i\le\nu(k), \quad k\ge 1, \quad (2.4)$$

где

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_m = \sum_{k=1}^{m}\nu(k), \quad m=1,2,\dots.$$

и покажем, что (2.4) есть искомая система. Пусть $p_0\in(1,2)$ и $f(x)\in L^2[0,1]$. Возьмём функцию $f_{k_0}(x)$ из (2.1) такую, что

$$\begin{gathered}\|f(x)-f_{k_0}(x)\|_{p_0} < \varepsilon^2, \quad \varepsilon = \min\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \|f\|_1\right), \\ k_0 > \log_{\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad p_{k_0} > p_0, \quad \mu_{k_0-1} > N_0.\end{gathered} \quad (2.5)$$

Отсюда и из (2.4) следует

$$\left\|f(x) - \frac{1}{\nu(k_0)}\sum_{i=1}^{\nu(k_0)} h_i^{(k_0)}(x)\right\|_{p_0} < \varepsilon^2 + 2^{-k_0} < \varepsilon_0. \quad (2.6)$$

В силу (2.2), (2.3) и (2.5) получим

$$\max_{1\le m\le\nu(k_0)}\left\|\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i^{(k_0)}(x)}{\nu(k_0)}\right\|_p\le\frac{1}{\nu(k_0)}\sum_{i=1}^{\nu(k_0)}\left\|f_{k_0}(x)-h_i^{(k_0)}(x)\right\|_p+\|f_{k_0}(x)\|_p<$$

$$<\varepsilon+\|f(x)\|_p\le 2\cdot\|f(x)\|_p,\quad p\in[1,p_0],\tag{2.7}$$

$$\max_{1\le i\le\nu(k_0)}\left\|\frac{1}{\nu(k_0)}h_i^{(k_0)}(x)\right\|_{p_0}\le\frac{1}{\nu(k_0)}\max_{1\le i\le\nu(k_0)}\left\|f_{k_0}(x)-h_i^{(k_0)}(x)\right\|_{p_0}+$$

$$+\frac{1}{\nu(k_0)}\|f_{k_0}(x)\|_{p_0}<2\cdot 2^{-k_0}<\varepsilon.\tag{2.8}$$

Положим $E_0=\{x\in[0,1]:\ |f(x)-f_{k_0}(x)|<\varepsilon\}$,

$$E_i=\left\{x\in[0,1]:\ |f_{k_0}(x)-h_i^{(k_0)}(x)|<2^{-k_0}\right\},\quad 1\le i\le\nu(k_0),$$

$$E=\bigcap_{i=0}^{\nu(k_0)}E_i.\tag{2.9}$$

По неравенству Чебышева, из (2.3) и (2.5) следует $|E_0|>1-\varepsilon$, $|E_i|>1-2^{-(k_0+i)}$, $1\le i\le\nu(k_0)$. Следовательно, из (2.5) и (2.9) получаем $|E|>1-\varepsilon$. Согласно (2.2), (2.3), (2.5) и (2.9) имеем

$$\max_{1\le m\le\nu(k_0)}\left|\frac{1}{\nu(k_0)}\sum_{i=1}^{m}h_i^{(k_0)}(x)\right|\le\frac{1}{\nu(k_0)}\sum_{i=1}^{\nu(k_0)}\left|f_{k_0}(x)-h_i^{(k_0)}(x)\right|+$$

$$+|f_{k_0}(x)|<|f(x)|+\varepsilon,\quad x\in E.\tag{2.10}$$

$$\max_{1\le m\le\nu(k_0)}\left|\frac{1}{\nu(k_0)}h_i^{(k_0)}(x)\right|\le\frac{1}{\nu(k_0)}\left|f_{k_0}(x)-h_i^{(k_0)}(x)\right|+\frac{1}{\nu(k_0)}|f_{k_0}(x)|<$$

$$<2^{-k_0}+\frac{1}{\nu(k_0)}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|<\varepsilon_0,\quad x\in E.\tag{2.11}$$

Используя ортонормированную систему (2.4), определим

$$Q(x)=\sum_{j=N_0}^{N}a_j\omega_j(x)=\sum_{i=1}^{\nu(k_0)}\frac{1}{\nu(k_0)}h_i^{(k_0)}(x),$$

где $N=\mu_{k_0}+1$ и

$$a_j=\begin{cases}\frac{1}{\nu(k_0)}\|h_i^{(k_0)}(x)\|_2, & \text{при } j=\mu_{k_0-1}+i,\quad 1\le i\le\nu(k_0),\\ 0, & \text{при } j\in[N_0,\mu_{k_0-1}].\end{cases}$$

В силу (2.4), (2.6) – (2.8), (2.10) и (2.11) многочлен $Q(x)$ и множество E удовлетворяют всем утверждениям Леммы 1. Следовательно, $\{\omega_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ является искомой системой. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\{\omega_k(x)\}$, $x \in [0,1]$ – ортонормированная система, построенная в Лемме 1. Тогда для любого квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T = [0,1]^2$ и любых чисел $\gamma \neq 0$, $\delta \in (0,1)$, $p_0 \in (1,2)$, $N > 1$ существуют измеримое множество $E \subset T$ и многочлен

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y),$$

обладающие следующими свойствами 1) – 6) :

1) $$|E| > 1 - \delta,$$

2) $$||\gamma\chi_\Delta(x,y) - Q(x,y)||_{p_0} = \left(\iint_T |\gamma\chi_\Delta(x,y) - Q(x,y)|^{p_0} dx\, dy\right)^{1/p_0} < \delta,$$

где χ_Δ – характеристическая функция множества Δ,

3) $$\max_{N \le \bar{k},\bar{n} \le M} \left\| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left\| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p \le$$

$$\le 9|\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p_0}, \quad p \in [1, p_0],$$

4) $$\max_{N \le k,n \le M} ||c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)||_{p_0} < \delta,$$

5)
$$\max_{N \le \bar{k},\bar{n} \le M} \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right| + \max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right| \le$$

$$\le 2|\gamma|\chi_\Delta(x,y) + \delta, \quad (x,y) \in E,$$

6) $$\max_{N \le k,n \le M} |c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)| < \delta, \quad (x,y) \in E.$$

Доказательство : Применим Лемму 1, полагая $f(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_1}(x)$, $N_0 = N$, $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{4}$. Тогда существуют измеримое множество $E_1 \subset [0,1]$ и многочлен $Q_1(x) = \sum_{k=N}^{N_1} a_k\omega_k(x)$, удовлетворяющие следующим условиям

$$1^0) \quad |E_1| > 1 - \frac{\delta}{2}, \qquad 2^0) \quad ||\gamma \cdot \chi_{\Delta_1}(x) - Q_1(x)||_{p_0} < \frac{\delta}{4},$$

3⁰) $$\max_{N\le \bar{k}\le N_1}\left\|\sum_{k=N}^{\bar{k}} a_k\omega_k(x)\right\|_p \le 2\gamma\cdot|\Delta_1|^{1/p}, \quad p\in[1,p_0],$$

4⁰) $$\max_{N\le k\le N_1}||a_k\omega_k(x)||_{p_0}\le\frac{\delta}{4},$$

5⁰) $$\max_{N\le \bar{k}\le N_1}\left|\sum_{k=N}^{\bar{k}} a_k\omega_k(x)\right| \le |\gamma|\cdot\chi_{\Delta_1}(x)+\frac{\delta}{4}, \quad x\in E_1,$$

6⁰) $$\max_{N\le \bar{k}\le N_1}|a_k\omega_k(x)|<\frac{\delta}{4}, \quad x\in E_1.$$

Положим
$$M_0=2\cdot\left(N_1^2+1\right). \tag{2.12}$$

Снова применим Лемму 1, полагая $f(y)=\chi_{\Delta_2}(y)$, $N_0=M_0$, $\varepsilon=\frac{\delta\cdot|\Delta_2|^{1/p_0}}{4(|\gamma|+1)}$. Тогда существуют измеримое множество $E_2\subset[0,1]$ и многочлен $Q_2(y)=\sum_{n=M_0}^{M}b_n\omega_n(y)$, удовлетворяющие следующим условиям :

$$1^{00})\quad |E_2|>1-\frac{\delta}{2}, \qquad 2^{00})\quad ||\chi_{\Delta_2}(x)-Q_2(x)||_{p_0}<\frac{\delta}{2||Q_1||_{p_0}+1},$$

3⁰⁰) $$\max_{M_0\le \bar{n}\le M}\left\|\sum_{n=M_0}^{\bar{n}} b_n\omega_n(y)\right\|_p \le 2|\Delta_2|^{1/p}, \quad p\in[1,p_0],$$

4⁰⁰) $$\max_{M_0\le n\le M}||b_n\omega_n(y)||_{p_0}<\delta\cdot|\Delta_2|^{1/p_0},$$

5⁰⁰) $$\max_{M_0\le \bar{n}\le M}\left|\sum_{n=M_0}^{\bar{n}} b_n\omega_n(y)\right| \le \chi_{\Delta_2}(x)+\frac{\delta}{4(|\gamma|+1)}, \quad y\in E_2,$$

6⁰⁰) $$\max_{M_0\le n\le M}|b_n\omega_n(y)|<\delta, \quad y\in E_2.$$

Положим теперь
$$E=E_1\times E_2, \quad Q(x,y)=Q_1(x)Q_2(y)=\sum_{k,n=M_0}^{M}c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y), \tag{2.13}$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} a_k b_n, & \text{при } N \le k \le N_1, \ M_0 \le n \le M, \\ 0, & \text{при } k \notin [N, N_1], \quad n \notin [M_0, M]. \end{cases}$$

Отсюда и из 1^0), 1^{00}), 4^0), 4^{00}), 6^0), 6^{00}) вытекает, что $|E| > 1 - \delta$,

$$\max_{N \le k,n \le M} ||c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)||_{p_0} < \delta,$$

$$\max_{N \le k,n \le M} |c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)| < \delta, \quad (x, y) \in E,$$

$$||Q(x, y) - \gamma \cdot \chi_\Delta(x, y)||_{p_0} \le ||Q_2(y) - \chi_{\Delta_2}(y)||_{p_0} \cdot ||Q_1(x)||_{p_0} +$$

$$+ ||Q_1(x) - \gamma \cdot \chi_{\Delta_1}(x)||_{p_0} \cdot ||\chi_{\Delta_2}(y)||_{p_0} < \delta.$$

Вернемся к утверждениям 3) и 5) Леммы 2. Если $N^2 + M_0^2 < R^2 < N_1^2 + M^2$, то для некоторого m_0 имеем $m_0 \le R < m_0 + 1$. Из (2.12) следует, что $R^2 - N_1^2 \ge (m_0 - 1)^2$. Следовательно, из 5^0), 5^{00}) и (2.13) при $(x, y) \in E$ получим

$$\left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right| \le \left| \sum_{k=N}^{N_1} \sum_{n=m_0}^{m_0-1} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right| +$$

$$+ \max_{N \le s \le N_1} \left| \sum_{k=N}^{s} c_{k,m_0}\omega_k(x)\omega_{m_0}(y) \right| == \left| \sum_{k=N}^{N_1} a_k\omega_k(x) \right| \cdot \left| \sum_{n=1}^{m_0-1} b_n\omega_n(y) \right| +$$

$$+ |b_{m_0}\omega_{m_0}(y)| \max_{N \le s \le N_1} \left| \sum_{k=N}^{s} a_k\omega_k(x) \right| <$$

$$< (|\gamma| \cdot \chi_{\Delta_1}(x) + \delta_1)(\chi_{\Delta_2} + \delta_1) + \delta_2(|\gamma| \cdot \chi_{\Delta_1}(x) + \delta_1) < |\gamma|\chi_\Delta(x, y) + \frac{\delta}{2}.$$

Аналогично, в силу условий 3^0), 3^{00}) и (2.13) для всех $p \in [1, p_0]$ получим

$$\max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left\| \sum_{2N^2 \le k^2 + n^2 \le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p \le 5|\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}.$$

Учитывая соотношения 3^0), 5^0), 3^{00}), 5^{00}) и (2.13) при $N \le \overline{k} \le N_1$, $M_0 \le \overline{n} \le M$ получим

$$\left| \sum_{k,n=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right| \le |\gamma| \cdot \chi_\Delta(x, y) + \frac{\delta}{2}, \quad (x, y) \in E,$$

$$\left\| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p \le 4|\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}, \quad p \in [1, p_0].$$

Этим завершается доказательство Леммы 2.

Лемма 3. Существует ортонормированная система $\{\omega_k(t)\}$, $t \in [0,1]$ такая, что для любой функции $f(x,y) \in L^2(T)$ и для любых чисел $p \in (1,2)$, $\varepsilon > 0$, $N > 1$ можно найти измеримое множество $E \subset T = [0,1]^2$ и многочлен

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y),$$

удовлетворяющие условиям :

$$1) \quad |E| > 1-\varepsilon, \qquad 2) \quad ||f(x,y) - Q(x,y)||_{p_0} < \varepsilon,$$

3)
$$\max_{N\le \bar{k},\bar{n}\le M} \left\| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right\|_p +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N\le R\le \sqrt{2}M} \left\| \sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right\|_p \le 2||f(x,y)||_p + \varepsilon,$$

4)
$$\max_{N\le k,n\le M} ||c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)||_p < \varepsilon,$$

$$\max_{N\le \bar{k},\bar{n}\le M} \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right| + \max_{\sqrt{2}N\le R\le \sqrt{2}M} \left| \sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right| \le$$

5)
$$\le 4|f(x,y)| + \varepsilon, \quad (x,y) \in E.$$

6)
$$\max_{N\le k,n\le M} |c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in E.$$

Доказательство : Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x,y) \tag{2.14}$$

такую, что

$$\max_{1\le\nu\le\nu_0} \left(|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p}\right) + ||f(x,y) - \varphi(x,y)||_p < \frac{\varepsilon^2}{4^4}, \tag{2.15}$$

где Δ_ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ – прямоугольная область постоянства функции $\varphi(x,y)$. Пусть $\{\omega_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in [0,1]$ – ортонормированная система, построенная в Лемме 1. Пусть ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ – заданное натуральное число и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{16\nu_0}$. В силу Леммы 2 существуют измеримое множество $E_\nu \subset T$ и многочлен

$$Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N_\nu}^{M_\nu} c_{k,n}^{(\nu)}\omega_k(x)\omega_n(y), \tag{2.16}$$

удовлетворяющие условиям

$$|E_\nu| > 1 - \frac{\varepsilon}{4 \cdot \nu_0}, \tag{2.17}$$

$$||\gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x, y) - Q_\nu(x, y)||_{p_0} < \left(\frac{\varepsilon}{16\nu_0}\right)^2, \tag{2.18}$$

$$\max_{\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}M_\nu} \left\| \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{k,n}^{(\nu)} \omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p +$$

$$+ \max_{N_\nu \le \bar{k}, \bar{n} \le M_\nu} \left\| \sum_{k,n=N_\nu}^{\bar{k},\bar{n}} c_{k,n}^{(\nu)} \omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p \le 9|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p}, \tag{2.19}$$

$$\max_{N_\nu \le k,n \le M_\nu} \left\| c_{k,n}^{(\nu)} \omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p < \varepsilon, \tag{2.20}$$

$$\max_{\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}M_\nu} \left| \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{k,n}^{(\nu)} \omega_k(x)\omega_n(y) \right| +$$

$$+ \max_{N_\nu \le \bar{k}, \bar{n} \le M_\nu} \left| \sum_{k,n=N_\nu}^{\bar{k},\bar{n}} c_{k,n}^{(\nu)} \omega_k(x)\omega_n(y) \right| \le$$

$$\le 2|\gamma_\nu| \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x, y) + \frac{\varepsilon}{2\nu_0} < \varepsilon, \quad (x, y) \in E_\nu. \tag{2.21}$$

$$\max_{N_\nu \le k,n \le M_\nu} \left| c_{k,n}^{(\nu)} \omega_k(x)\omega_n(y) \right| < \varepsilon, \quad (x, y) \in E_\nu. \tag{2.22}$$

Положим

$$\begin{gathered} B_\nu = \left\{(x, y) \in T : |\gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x, y) - Q_\nu(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4\nu_0}\right\}, \quad \nu = 1, ..., \nu_0. \\ B_0 = \left\{(x, y) \in T : |f(x, y) - \varphi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{gathered} \tag{2.23}$$

В силу (2.15) и (2.18) имеем

$$|B_0| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad |B_\nu| > 1 - \frac{\varepsilon}{4\nu_0}, \quad 1 \le \nu \le \nu_0. \tag{2.24}$$

Таким образом, для фиксированного ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ определяются множество $E_\nu \subset T$ и многочлен $Q_\nu(x, y)$, удовлетворяющие условиям (2.16) – (2.22). Отметим, что можно взять

$$N_1 = N, \quad N_\nu = M_{\nu-1} + 1, \quad 1 \le \nu \le \nu_0. \tag{2.25}$$

Определим теперь множество E и многочлен $Q(x, y)$ следующим образом :

$$E = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \bigcap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} B_\nu\right), \tag{2.26}$$

$$Q(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y)=\sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y),\quad M=M_{\nu_0},\tag{2.27}$$

где

$$c_{k,n}=\begin{cases} c_{k,n}^{(\nu)}, & \text{при } N_\nu\le k,n\le M_\nu,\\ 0, & \text{при } k,n\notin[N_\nu,M_\nu],\end{cases}\quad 1\le\nu\le\nu_0.$$

Из (2.15) - (2.18), (2.20) и (2.24) - (2.27) следует, что $|E|>1-\varepsilon$,

$$||f(x,y)-Q(x,y)||_{p_0}<||f(x,y)-\varphi(x,y)||_{p_0}+\sum_{\nu=1}^{\nu_0}||\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x,y)-Q_\nu(x,y)||_{p_0}\le\varepsilon,$$

$||c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)||_{p_0}<\varepsilon$, $|c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)|<\varepsilon$, $(x,y)\in E$. Таким образом, утверждения 1), 2), 4) и 6) Леммы 3 доказаны. Для доказательства утверждений 3) и 5) сперва заметим, что для всех $p\in[2,p_0]$ и $\nu\in[1,\nu_0]$ имеем (см. (2.14) и (2.15))

$$\sum_{i=1}^{\nu-1}||\gamma_i\chi_{\Delta_i}(x,y)||_p\le||\varphi(x,y)||_p\le||f(x,y)||_p+\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu-1}|\gamma_i\chi_{\Delta_i}(x,y)|\le|\varphi(x,y)|\le|f(x,y)|+\varepsilon,\quad (x,y)\in E.\tag{2.28}$$

Для $R\in[\sqrt{2}N,\sqrt{2}M]$ и некоторого $\nu\in[1,\nu_0]$ имеем $\sqrt{2}N_\nu\le R\le\sqrt{2}M_\nu$. Следовательно, из (2.27) будем иметь

$$\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)=\sum_{s=1}^{\nu-1}Q_s(x,y)+\sum_{2N_\nu^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y).\tag{2.29}$$

Из (2.15), (2.18), (2.19) и (2.29) для всех $p\in[1,p_0]$ получим

$$\left\|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right\|_p\le\sum_{s=1}^{\nu-1}\left\|Q_s(x,y)-\gamma_s\chi_{\Delta_s}(x,y)\right\|_p+$$

$$+\left\|\sum_{s=1}^{\nu-1}\gamma_s\chi_{\Delta_s}(x,y)\right\|_p+\left\|\sum_{2N_\nu^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right\|_p\le||f(x,y)||_p+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любых $(x,y)\in E$, всех $R\in[\sqrt{2}N_\nu,\sqrt{2}M_\nu]$ и $\nu\in[1,\nu_0]$, из (2.21), (2.23), (2.28) и (2.29) вытекает

$$\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right|\le\sum_{s=1}^{\nu-1}|Q_s(x,y)-\gamma_s\chi_{\Delta_s}(x,y)|+\left|\sum_{s=1}^{\nu-1}\gamma_s\chi_{\Delta_s}(x,y)\right|+$$

$$+\left|\sum_{2N_\nu^2\le k^2+n^2\le R^2} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y)\right|\le\frac{\varepsilon}{4}+\sum_{s=1}^{\nu-1}|\gamma_s\chi_{\Delta_s}(x,y)|+2|\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x,y)|+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\nu_0} \le 2|f(x,y)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично. для всех $\overline{k} \in [N, M]$, $\overline{n} \in [N, M]$ получим

$$\left\| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right\|_p \le \|f(x,y)\|_p + \frac{\varepsilon}{2}, \quad p \in [1, p_0],$$

$$\left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{k,n}\omega_k(x)\omega_n(y) \right| \le 2|f(x,y)| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x,y) \in E.$$

Этим завершается доказательство Леммы 3.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство Теоремы 1. Пусть

$$\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1] \tag{3.1}$$

– ортонормированная система, построенная в Лемме 1. Последовательно применяя Лемму 1 к функциям f_k из (2.1), находим последовательность множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность многочленов

$$Q_k(x) = \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} a_n^{(k)}\omega_n(x), \quad 1 \le N_0 < \ldots < N_k < N_{k+1} < \ldots., \quad k = 1, 2, \ldots., \tag{3.2}$$

которые удовлетворяют следующим условиям (3.3) – (3.8) :

$$\|f_k(x) - Q_k(x)\|_{p_k} < 2^{-2(k+1)}, \quad p_k = 2 - \frac{1}{k}, \quad k \ge 1, \tag{3.3}$$

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \left\| \sum_{n=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)}\omega_n(x) \right\|_p \le 2\|f_k\|_p. \quad p \in [1, p_k], \tag{3.4}$$

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \left\| a_m^{(k)}\omega_m(x) \right\|_{p_k} < 2^{-2k}, \tag{3.5}$$

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \left| \sum_{k=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)}\omega_n(x) \right| < |f_k(x)| + 2^{-2k}, \quad x \in E_k, \tag{3.6}$$

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \left| a_m^{(k)}\omega_m(x) \right| < 2^{-2k}, \quad x \in E_k, \tag{3.7}$$

$$|E_k| > 1 - 2^{-2k}. \tag{3.8}$$

Определим ряд по системе (3.1) следующим образом :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\omega_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} a_n^{(k)}\omega_n(x) \right], \quad a_n = a_n^{(k)}, \quad N_{k-1} \le n < N_k. \tag{3.9}$$

Покажем теперь, что ряд (3.9) удовлетворяет требованиям Теоремы 1. Пусть $f(x) \in \bigcap_{1\le p<3} L^p[0,1]$. Предположим, что определены числа $2 < \nu_1 < \ldots < \nu_{q-1}$, $1 = s(1), \ldots, s(q-1)$, функции $a_{s(1)}\omega_{s(1)}, \ldots, a_{s(q-1)}\omega_{s(q-1)}$ и многочлены

$$Q_{\nu_n}(x) = \sum_{i=N_{\nu_n-1}}^{N_{\nu_n}-1} a_i^{(\nu_n)}\omega_i(x), n = 1, \ldots, m-1 \tag{3.10}$$

и для $p \in [1, p_j]$ и $1 \le j \le m-1$ удовлетворяют условиям

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{j}[Q_{\nu_n}(x) + a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)]\right\|_p < 2^{-(j+3)} + ||a_{s(j)}\omega_{s(j)}(x)||_p,$$

$$\max_{N_{\nu_j-1}\le N<N_{\nu_j}}\left\|\sum_{i=N_{\nu_j-1}}^{N} a_i^{(\nu_j)}\omega_i(x)\right\|_p < 2^{-j} + ||a_{s(j-1)}\omega_{s(j-1)}(x)||_p, \tag{3.11}$$

$$s(j) = \min\left\{n \in N:\ n \notin \left[\{N_{\nu_k-1}, \ldots, N_{\nu_k} - 1\}_{k=1}^{j} \cup \{s(n)\}_{n=1}^{j-1}\right]\right\}, \quad s(1) \equiv 1.$$

Рассмотрим функцию $f_{\nu_m}(x)$, $\nu_m > \nu_{m-1}$ из (2.1) такую, что

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{m-1}[Q_{\nu_n}(x) + a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)] - f_{\nu_m}(x)\right\|_{p_m} < \frac{1}{2^{m+4}}. \tag{3.12}$$

Для выбранного числа $\nu_m > \nu_{m-1}$ и соответственного многочлена $Q_{\nu_m}(x)$ вида (3.10) положим

$$s(m) = \min\left\{n \in N:\ n \notin \left[\{N_{\nu_k-1}, N_{\nu_k-1}+1, \ldots, N_{\nu_k} - 1\}_{k=1}^{m} \cup \{s(k)\}_{k=1}^{m-1}\right]\right\}. \tag{3.13}$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$||f_{\nu_m}(x)||_p < 2 \cdot 2^{m+4} + ||a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)||_p, \quad p \in [1, p_m].$$

Отсюда и из условий (3.3), (3.4) и (3.12) при $p \in [1, p_m]$ будем иметь

$$\max_{N_{\nu_m-1}\le N<N_{\nu_m}}\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x)\right\|_p < 2^{-m} + 2||a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)||_p, \tag{3.14}$$

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{m}[Q_{\nu_n}(x) + a_{s(n)}\omega_{s(n)}(x)]\right\|_p < 2^{-(m+3)} + ||a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)||_p. \tag{3.15}$$

Таким образом, из ряда (3.9) можно выбрать последовательность многочленов $Q_{\nu_m}(x)$ вида (3.10) и последовательность функций $\left\{a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)\right\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (3.13) - (3.15) для всех $m \ge 1$. В силу выбора $Q_{\nu_m}(x)$ и $a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)$ (см. (3.11), (3.13)), заключаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\omega_{\sigma(k)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x) + a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)\right] \tag{3.16}$$

получается из ряда (3.9) перестановкой его членов. Ввиду (3.5), (3.9) и (3.13) имеем $\lim_{m\to\infty}\|a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)\|_p = 0, \quad p \in [1,2)$. Отсюда и из (3.14) и (3.15) вытекает, что ряд (3.16) сходится к $f(x)$ во всех метриках L^p, $1 \le p < 2$. Следовательно, получаем требуемую универсальность ряда (3.9). Аналогично можно доказать, что ряд (3.9) является универсальным относительно перестановок в любом пространстве $S = L^p[0,1]$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по метрике $L^p[0,1]$, $1 \le p < 2$.

Пусть $p \in (1,2)$ – фиксировано. Легко видеть по индукции, что для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ из последовательностей (2.1) и (3.2) можно выбрать последовательность многочленов $Q_{\nu_k}(x)$ вида (3.10) и последовательность функций $\{f_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} Q_{\nu_k}(x) - f_{\nu_n}(x) \right\|_p < 2^{-(n+3)}, \quad n \ge 1.$$

Отсюда и из (3.3), (3.4) для всех $n \ge 1$ получим

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=N_{\nu_{k-1}}}^{N_{\nu_k}-1} a_i^{(\nu_k)}\omega_i(x) - f(x) \right) \right\|_p < 2^{-n},$$

$$\sup_{N_{\nu_{n-1}} \le N < N_{\nu_n}} \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x) \right\|_p < 2^{-n}.$$

Следовательно, ряд (3.9) является универсальным относительно частичных рядов в смысле $S = L^p[0,1]$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по метрике $L^p[0,1]$. Аналогично доказывается, что ряд (3.9) универсален относительно частичных рядов в смысле $S = \bigcap_{1\le p<2} L^p[0,1]$ и $\mathcal{T}$ = сходимость по L^p-норме при любых $p \in [1,2)$. Этим доказывается утверждение 1) Теоремы 1.

Для доказательства утверждения 2) рассмотрим произвольную измеримую функцию $F(x)$, определенную на $[0,1]$ и положим $A = \{x \in [0,1]: \ |F(x)| < \infty\}$, $A^+ = \{x \in [0,1]: \ F(x) = +\infty\}$, $A^- = \{x \in [0,1]: \ F(x) = -\infty\}$. Предположим, что определены числа $2 < \nu_1 < \ldots < \nu_{q-1}$, $1 = s(1), \ldots, s(q-1)$, функции $\{a_{s(k)}\omega_{s(k)}\}_{k=1}^{m-1}$ и $\{F_k(x)\}_{k=1}^{m-1}$, множества $\{G_k\}_{k=1}^{m-1}$ и многочлены $Q_{\nu_k}(x)$ вида (3.10), и для всех $k = 1, \ldots, m-1$ они удовлетворяют условиям

$$F_k(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{j=1}^{k}[Q_{\nu_j}(x) + a_{s(j)}\omega_{s(j)}(x)], & x \in A, \\ \frac{1}{k+1} - a_{s(k)}\omega_{s(k)}(x), & x \in A^+, \\ -\frac{1}{k+1} - a_{s(k)}\omega_{s(k)}(x), & x \in A^-, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$|G_k| > 1 - 2^{-2k}, \quad |F_k(x)| = 2^{-(k+3)} + |a_{s(k)}\omega_{s(k)}(x)| + \frac{1}{k+1}, \quad x \in G_k, \tag{3.18}$$

$$\max_{N_{\nu_{k-1}}\le N<N_{\nu_k}}\left|\sum_{i=N_{\nu_{k-1}}}^{N} a_i^{(\nu_k)}\omega_i(x)\right| < \frac{1}{k}+2^{-k}+2|a_{s(k-1)}\omega_{s(k-1)}(x)|, \quad x\in G_{k-1}\cap G_k.$$

Рассмотрим функцию $f_{\nu_m}(x)$, $\nu_m>\nu_{m-1}$ из (2.1) такую, что

$$\left|\left\{x\in[0,1]:\ |F_{m-1}-f_{\nu_m}(x)|>2^{-4(m+1)}\right\}\right|<2^{-2(m+1)}. \tag{3.19}$$

Выберем число ν_m и множество

$$s(m)=\min\left\{n\in N: n\notin\left[\{N_{\nu_k-1},N_{\nu_k-1}+1,\dots,N_{\nu_k}-1\}_{k=1}^{m}\cup\{s(k)\}_{k=1}^{m-1}\right]\right\}, \tag{3.20}$$

полагая

$$\begin{aligned} G_m^{(1)} &= \left\{x\in[0,1]:\ |F_{m-1}-f_{\nu_m}(x)|<2^{-4(m+1)}\right\},\\ G_m^{(2)} &= \left\{x\in[0,1]:\ |f_{\nu_m}(x)-Q_{\nu_m}(x)|<2^{-2(m+1)}\right\},\\ G_m &= E_{\nu_m}\cap G_m^{(1)}\cap G_m^{(2)}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

где множества $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ были определены в начале этого параграфа. Из (3.3), (3.8), (3.19) и (3.21) следует, что

$$|G_m|>1-2^{-m}. \tag{3.22}$$

В силу (3.17), (3.18) и (3.21) имеем

$$|f_{\nu_m}(x)|<2^{-4(m+1)}+2^{-(m+2)}+2|a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)|+\frac{1}{m-1}, \quad x\in G_{m-1}\cap G_m.$$

Отсюда и из (3.6), (3.21) вытекает

$$\max_{N_{\nu_{m-1}}\le N<N_{\nu_m}}\left|\sum_{i=N_{\nu_{m-1}}}^{N} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x)\right| < 2^{-k}+|f_{\nu_m}(x)|\le$$

$$\le\frac{1}{m}+2^{-m}+2|a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)|, \quad x\in G_{m-1}\cap G_m, \tag{3.23}$$

$$|F_m(x)|<\frac{1}{m+1}+2^{-m}+|a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)|, \quad x\in G_m, \tag{3.24}$$

где $F_m(x)$ определяется согласно (3.17). По индукции можем определить последовательности $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{s(m)\}_{m=1}^{\infty}$ и множества $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$, и следовательно можем выбрать функции $\{a_{s(m)}\omega_{s(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ и многочлены $\{Q_{\nu_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ из ряда (3.9), удовлетворяющие условиям (3.20) и (3.22) – (3.24) для всех $m \geq 1$. Ясно (см. (3.2), (3.19), (3.20), (3.23)), что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\omega_{\sigma(k)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=N_{\nu_m-1}}^{N_{\nu_m}-1} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x) + a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)\right) \qquad (3.25)$$

получается из (3.9) перестановкой его членов. Этот ряд сходится к $F(x)$ почти всюду на $[0,1]$. Положим $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}(G_m \cap E_m)$. Так как $s(m) \to \infty$ при $m \to \infty$ (см. (3.20)), то из (3.7) – (3.9) будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} |a_{s(m)}\omega_{s(m)}| = 0, \quad x \in G. \qquad (3.26)$$

Ясно (см. (3.8), (3.22)), что $|G| = 1$. Если $x \in A \cap G$, то существует число m_0 такое, что $x \in A\cap G_m\cap E_m$, $\quad m \geq m_0$. Отсюда и из (3.23), (3.24) для всех $m > m_0$ получим

$$\left|F(x) - \left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=N_{\nu_k-1}}^{N_{\nu_k}-1} a_i^{(\nu_k)}\omega_i(x)\right) + a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)\right]\right| < \frac{1}{m} + 2^{-m} + |a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)|,$$

$$\max_{N_{\nu_m-1}\leq N<N_{\nu_m}}\left|\sum_{i=N_{\nu_m-1}}^{N} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x)\right| < \frac{1}{m} + 2^{-m} + |a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)|.$$

Учитывая (3.26) заключаем, что ряд (3.25) сходится к $F(x)$ почти всюду на A. Осталось доказать, что ряд (3.25) сходится к $+\infty$ почти всюду на A^+. Сначала заметим, что в силу (3.17) и (3.19) – (3.21) имеем

$$\left|\frac{1}{m} - Q_{\nu_m}(x) - a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)\right| < 2^{-m}, \quad x \in A^+ \cap G_m, \quad m \geq 1. \qquad (3.27)$$

Ясно, что для каждой точки $x \in A^+ \cap G_m$ существует натуральное число $m_0(x)$ такое, что $x \in A^+ \cap G_m \cap E_m$ при $m \geq m_0$. Для заданного произвольного положительного K, ввиду (3.26) возьмем натуральное число $m_1 > m_0(x)$ такое, что $|a_{s(m)}\omega_{s(m)}(x)| < 1$, $m \geq m_0$

$$\ln\frac{m_1}{m_0} > K + 6 + 2\sum_{k=1}^{m_0+1}\left[|Q_{\nu_k}(x)| + |a_{s(k)}\omega_{s(k)}(x)|\right].$$

Следовательно, в силу (3.23) и (3.27), для всех $N \in [N_{\nu_m-1}, N_{\nu_m})$ и $m > m_1$ получим

$$\left|\sum_{k=1}^{m-1}\left[Q_{\nu_k}(x) + |a_{s(k)}\omega_{s(k)}(x)|\right] + \sum_{i=N_{\nu_m-1}}^{N} a_i^{(\nu_m)}\omega_i(x)\right| >$$

$$> \sum_{k=m_0+1}^{m-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=m_0+1}^{m-1} \left| \frac{1}{k} - Q_{\nu_k}(x) - |a_{s(k-1)}\omega_{s(k-1)}(x) \right| - \sum_{k=1}^{m_0+1} \left[|Q_{\nu_k}(x)| + \right.$$

$$\left. + |a_{s(k)}\omega_{s(k)}(x)| \right] - \frac{1}{m} - 2^{-m} - 3|a_{s(m-1)}\omega_{s(m-1)}(x)| - |a_{s(m_0)}\omega_{s(m_0)}(x)| > K.$$

Отсюда и из $|G| = 1$ вытекает, что ряд (3.25) сходится к $+\infty$ почти всюду на A^+. Подобными рассуждениями можно доказать, что ряд (3.25) сходится к $-\infty$ почти всюду на A^-.

Вернемся к утверждению 3) Теоремы 1. Положим

$$H_k = \left[x \in [0, 1] : \ |f_k(x) - Q_k(x)| < 2^{-k} \right]. \tag{3.28}$$

В силу неравенства Чебышева и (3.3) будем иметь

$$|H_k| > 1 - 2^{-(k+2)}. \tag{3.29}$$

Пусть $B \subset [0, 1]$ - измеримое множество с лебеговой мерой $|B| > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ такое, что все функции $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ непрерывны на B. Положим

$$D = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} (E_n \cap H_n) \bigcap B, \tag{3.30}$$

где n_0 – целая часть числа $\log_{1/2} \varepsilon$. Из (3.7), (3.29) и (3.30) получим $|D| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $E \subset D$ – некоторое замкнутое множество с мерой $|E| > |D| - \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что $|E| > 1 - \varepsilon$. Неравенства (см. (3.28) и (3.30))

$$\max_{x \in E} |Q_k(x) - f_k(x)| < 2^{-k},$$

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \left| \sum_{n=N_{k-1}}^{m} a_n^{(k)} \omega_n(x) \right| < |f_k(x)| + 2^{-2k}, \quad x \in E, \quad k \ge n_0,$$

$$\max_{N_{k-1} \le m < N_k} \left| a_n^{(k)} \omega_n(x) \right| < 2^{-2k}, \quad x \in E, \quad k \ge n_0$$

завершают доказательство утверждения 3). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Идея доказательства аналогична доказательству вышеприведенной Теоремы 1. Разница лишь в том, что здесь мы используем Лемму 3 вместо Леммы 1.

ABSTRACT. An orthogonal series is constructed, which is universal simultaneously with respect to rearrangements and in the partial series sense. This property holds for convergence in every space $L^p[0, 1]$, $p \in [1, 2)$ as well as in the class of all measurable functions for almost everywhere convergence on $[0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "О частичных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, № 2, стр. 197 – 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций". Мат. Сборник, том 26, № 3, стр. 351 – 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов". Изв. АН АрмССР, Математика, том 10, № 3, стр. 17 – 34, 1975.
4. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, том 15, № 5, стр. 567 – 604, 1960.
5. П. Л. Ульянов, "О безусловной сходимости и суммируемости", Изв. АН СССР, серия Математика, том 22, стр. 811 – 840, 1958.
6. П. Л. Ульянов, "Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$", УМН, том 25, № 2, стр. 3 – 52, 1972.
7. А. М. Олевский, "О некоторых особенностях рядов Фурье в пространстве L^p, $p < 2$", Мат. Сборник, том 77, № 2, стр. 251 – 258, 1968.
8. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН АрмССР, том 64, № 2, стр. 72 – 76, 1976.
9. Н. Г. Погосян, "Представление измеримых функций базисами в $L^p[0,1]$, $p \geq 2$", ДАН АрмССР, том 64, № 4, стр. 205 – 209, 1976.
10. W. Orlicz, "Ueber die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Reihen", Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences, vol. 81, pp. 117 - 125, 1927.
11. Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления II, Наука, Москва, 1996.
12. М. Г. Григорян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами", ДАН АрмССР, том 67, № 5, стр. 269 – 274, 1978.
13. А. А. Талалян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$ ортогональными рядами", Acta Math., Scientiarum Hungaricae Tomus, том 21, № 1-2, стр. 1 – 9, 1978.
14. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН (серия Математика), том 57, № 5, стр. 75 – 105, 1993.
15. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces, Studia. Math., vol. 134, no. 3, pp. 207 – 216, 1999.

5 апреля 2000 Ереванский государственный университет

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ И КВАЗИУНИВЕРСАЛЬНЫХ В $L^p[0,1]$ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

М. Г. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная и полная в пространстве $L^2[0,1]$ система такая, что $\|\varphi_n\|_{p_0} \le const$, $n \ge 1$ при некотором $p_0 > 2$. В работе построен ряд $\sum c_k\varphi_k(x)$, который квазиуниверсален в пространстве $L^p[0,1]$ для любого $p \in [2, p_0]$ относительно перестановок, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой Лебега $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^p(E)$ члены ряда $\sum c_k\varphi_k(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы к $f(x)$ в метрике пространства $L^p(E)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Начнём с некоторых определений, касающихся перестановок функциональных рядов, подпоследовательностей их частичных сумм или подрядов.

Определение 1. 1) Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) \in L^p[0,1], \quad p > 0 \tag{1.1}$$

называется **универсальным относительно перестановок** в пространстве $L^p[0,1]$, если для любой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ члены ряда (1.1) можно переставить $k \longmapsto \sigma(k)$ так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x) \tag{1.2}$$

сходился бы к $f(x)$ в метрике пространства $L^p[0,1]$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} f_{\sigma(k)}(x) - f(x) \right|^p dx = 0.$$

2) Ряд (1.1) называется **универсальным в обычном смысле** в пространстве $L^p[0,1]$, если для любой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ существует возрастающая

последовательность натуральных чисел n_k такая, что соответствующая последовательность частичных сумм $\sum_{j=1}^{n_k} f_j(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике пространства $L^p[0,1]$.

3) Ряд (1.1) называется **универсальным относительно частичных рядов** в пространстве $L^p[0,1]$, если для любой функции $f(x) \in L^p[0,1]$, существует частичный ряд ряда (1.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x), \tag{1.3}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике пространства $L^p[0,1]$.

Определение 2. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) \in \bigcap_{1\le p<2} L^p[0,1] \tag{1.4}$$

называется **универсальным относительно перестановок (или частичных рядов)** в пространстве $\bigcap_{1\le p<2} L^p[0,1]$, если он универсален в смысле Определения 1 во всех пространствах $L^p[0,1]$, $1 \le p < 2$.

Определение 3. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) \in L^2[0,1], \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

называется **квазиуниверсальным относительно перестановок (или частичных рядов)** в пространстве $L^p[0,1]$, $p > 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с лебеговой мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что ряд (1.5) универсален в пространстве $L^p(E)$ в смысле Определения 1.

Определение 4. Система $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **обладает свойством** Γ^q, если все ненулевые многочлены по системе $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не принадлежат $L^q[0,1]$.

В настоящей статье изучаются вопросы существования рядов по заданной ортонормированной системе $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которые универсальны или квазиуниверсальны в пространстве $L^p[0,1]$, $p > 0$ относительно перестановок, относительно частичных рядов или в обычном смысле. Вопросу существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду и по мере посвящено много работ (см. [1] – [11]). Первые универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в смысле сходимости почти всюду были построены Д. Е. Меньшовым [1] и В. Я. Козловым [2]. Они построили ряды вида

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1.6}$$

такие, что для любой измеримой на $[0, 2\pi]$ функции $f(x)$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k таких, что последовательность частичных сумм ряда (1.6) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$. (Отметим, что этот результат не имеет места для $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$ и сходимости по метрике пространства $L^1[0, 2\pi]$). Этот результат А. А. Талаляном (см. [3]) был распространён на произвольные ортонормированные полные системы. Им же установлено (см. [4]), что если $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является нормированным базисом пространства $L^p[0, 1]$, $p > 1$, то существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad a_k \to 0, \tag{1.7}$$

который обладает свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$ члены ряда (1.7) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы к $f(x)$ по мере на $[0, 1]$.

Отметим, что Риман доказал (см. [5], стр. 317), что всякий неабсолютно сходящийся числовой ряд является универсальным относительно перестановок в классе всех целых чисел. В работе автора [6] установлено, что для любой полной ортонормированной системы $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2[0, 1]$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел N_k и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \phi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q < \infty, \quad q > 2$$

такой, что для всякой измеримой на $[0, 1]$ функции $f(x)$ можно найти числа $\epsilon_k = 1$ или 0 такие, что

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{N_k} \epsilon_i b_i \phi_i(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [0, 1].$$

Отметим, что в примере построенном Б. С. Кашиным [7], невозможно заменить N_k на k. Заметим также, что для любого $p > 1$ не существует тригонометрического ряда, который был бы универсален относительно перестановок, частичных рядов или в обычном смысле в пространстве $L^p[0, 2\pi]$. Кроме того, имеем следующий общий результат.

Предложение. Пусть $p \geq 1$ и $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на $[0, 1]$ (для $p > 2$ предполагаем, что $\phi_n(x) \in L^p[0, 1]$). Предположим, что существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x), \tag{1.8}$$

который универсален либо относительно перестановок либо относительно частичных рядов, или в обычном смысле в пространстве $L^p[0,1]$. Тогда $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Γ^q при $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Доказательство : Пусть ряд (1.8) универсален в пространстве $L^p[0,1]$ относительно перестановок. Покажем, что система $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Γ^q. Предположим противное, т.е. существует ненулевой многочлен

$$Q_0(x) = \sum_{k=1}^{N_0} b_k \phi_k(x) \in L^q[0,1].$$

Положим

$$\lambda = \left(\sum_{k=1}^{N_0} b_k^2\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_0} |c_k b_k| + 1\right).$$

Согласно Определению 1, существует перестановка $k \longmapsto \sigma(k)$ натуральных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)} \phi_{\sigma(k)}(x) - \lambda Q_0(x) \right|^p dx = 0.$$

Так как $Q_0(x) \in L^q[0,1]$, то

$$\sum_{k=1}^{N_0} c_k b_k = \lambda \int_0^1 Q_0^2(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N_0} |c_k b_k| + 1.$$

Пришли к противоречию. Аналогичными рассуждениями рассматриваются случаи универсальности ряда (1.8) относительно частичного ряда или в обычном смысле в пространстве $L^p[0,1]$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Для любого $p \geq 2$ и для любой ортонормированной системы $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не существует ряда $\sum c_k \phi_k(x)$, который был бы универсален в пространстве $L^p[0,1]$ либо относительно перестановок, либо в смысле частичного ряда, либо в обычном смысле.*

Следствие 2. Пусть $p \in [1,2)$ и $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на $[0,1]$. Если при некотором натуральном n_0, $\phi_{n_0}(x) \in L^q[0,1]$ для $q = \dfrac{p}{p-1}$, то не существует ряда $\sum c_k \phi_k(x)$, который был бы универсален в пространстве $L^p[0,1]$ либо относительно перестановок, либо в смысле частичного ряда, либо в обычном смысле.

Отметим, что в работах автора [11] и [12] были доказаны следующие результаты :

1) Существует ортогональный ряд $\sum c_k \phi_k(x)$, который универсален относительно частичных рядов как в пространстве $L^p[0,1]$ для любого $p \in [1,2)$, так и в $\bigcap\limits_{1 \le p < 2} L^p[0,1]$.

2) Если полная в $L^p[0,1]$ ортонормированная система $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством Γ^q для некоторого $q > 2$, то по этой системе можно построить ряд, который универсален в обычном смысле в пространстве $L^p[0,1]$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
В связи с этим, было бы интересным изучить следующий вопрос : пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система, обладающая при некотором $q > 2$ свойством Γ^q. Можно ли по этой системе построить ряд $\sum a_k \phi_k(x)$, который был бы универсален относительно перестановок в пространстве $L^p[0,1]$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$?
В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. **Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в пространстве $L^2[0,1]$ ортонормированная система такая, что**

$$||\varphi_n||_{p_0}^{p_0} = \int_0^1 |\varphi_n(x)|^{p_0} dx \le const, \quad n \ge 1$$

для некоторого $p_0 > 2$. Тогда существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^r < \infty, \quad r > 2, \tag{1.9}$$

обладающий следующими свойствами :

1) для каждого $p \in [2, p_0]$ ряд (1.9) квазиуниверсален в пространстве $L^p[0,1]$ относительно перестановок ;

2) члены ряда (1.9) можно переставить так, что вновь полученный ряд был бы квазиуниверсален относительно частичного ряда в пространстве $L^p[0,1]$, $p \in [2, p_0]$.

Теорема 2. **Для любой полной в пространстве $L^2[0,1]$ ортонормированной системы $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ существует ряд вида (1.9) со свойствами :**

1) для каждого $p \ge 1$ ряд (1.9) – квазиуниверсальный в обычном смысле в пространстве $L^p[0,1]$;

2) ряд (1.9) – квазиуниверсальный в обычном смысле в $\bigcap\limits_{p \ge 1} L^p[0,1]$, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с лебеговой мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что ряд (1.9) универсален в обычном смысле в пространстве $L^p(E)$, $p \ge 1$.

Известно (см. [16], [17]), что много классических результатов (например, Теоремы Л. Карлесона, М. Рисса, А. Колмогорова [13] – [15]) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный. В этом случае сферические, прямоугольные и квадратные частичные суммы резко отличаются друг от друга в вопросе сходимости в пространстве L^p, $p \geq 1$ (детали в обзорных статьях Л. В. Жижиашвили [18], Б. Голубов [19] и М. Дьяченко [20]). Имеет место следующая двумерная версия Теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в пространстве $L^2[0,1]$ ортонормированная система такая, что $||\varphi_n||_{p'} \leq const$, $n \geq 1$ при некотором $p' > 2$. Тогда существует двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(x), \qquad \sum_{k,n=1}^{\infty} |c_{k,n}|^r < \infty, \quad r > 2, \tag{1.10}$$

обладающий следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с лебеговой мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждого $p \in [2, p']$ и для всякой функции $f(x,y) \in L^p(E)$ члены ряда (1.10) можно переставить так, что вновь полученный ряд сходится к $f(x,y)$ в метрике $L^p(E)$ как по сферическим, так и по прямоугольным частичным суммам (т.е. ряд (1.10) квазиуниверсален в пространстве $L^p[0,1]^2$)относительно перестановок.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Обозначим через χ_E характеристическую функцию множества E. Мы будем использовать следующее неравенство А. Гарсия (см. [21], стр. 72) :

$$\left[\frac{1}{N!}\sum_{\sigma}\left(\max_{1\leq n\leq N}\left|\sum_{k=1}^{n} X_{\sigma(k)}\right|^p\right)\right]^{1/p} \leq A_p\left[\left|\sum_{k=1}^{N} X_k\right| + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}\right], \quad p \geq 1, \tag{2.1}$$

где суммирование производится по множеству всех перестановок $\{1,...,N\}$, а $\{X_k\}_{k=1}^N$ суть действительные числа, A_p – константа, зависящая только от p.

Лемма 1. Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в пространстве $L^2[0,1]$ ортонормированная система такая, что для некоторого $p_0 > 2$ имеем

$$||\varphi_n||_{p_0} = \left(\int_0^1 |\varphi_n(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} \leq B_{p_0} = const, \quad n \geq 1. \tag{2.2}$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L^{p_0}[0,1]$ и для любых $\varepsilon_0 > 0$ и $N_0 > 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$, многочлен $Q(x) =$

$\sum_{k=N_0}^{N} a_k\phi_k(x)$ и перестановка $\sigma(n)$ натуральных чисел $N_0, ..., N$, удовлетворяющие условиям

$$1) \quad |E| > 1-\varepsilon_0, \qquad 2) \quad \sum_{k=N_0}^{N} |a_k|^{2+\varepsilon_0} < \varepsilon_0,$$

$$3) \qquad \left(\int_E |Q(x)-f(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} < \varepsilon_0,$$

4)

$$\max_{N_0\le n<N}\left[\int_E\left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right]^{1/p} \le \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \varepsilon_0, \quad p\in[2,p_0].$$

Доказательство : Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x), \tag{2.3}$$

где Δ_ν, $1\le\nu\le\nu_0$ – интервалы постоянства функции $\varphi(x)$ такие, что

$$||\varphi - f||_{p_0} + \left(\frac{32}{\varepsilon_0}A_{p_0}B_{p_0}|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p_0}\right)^{p_0} < \varepsilon, \quad \nu=1,...,\nu_0, \tag{2.4}$$

где

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4\nu_0 A_{p_0}}, \frac{\varepsilon_0^2}{4(||f||_{p_0}+1)}\right\}, \tag{2.5}$$

причём A_{p_0} и B_{p_0} суть постоянные из (2.1) и (2.2). Положим

$$I_\nu(x) = \begin{cases} -\frac{2-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\gamma_\nu & \text{при } x\in[0,\varepsilon_0/2],\\ \gamma_\nu & \text{при } x\in[\varepsilon_0/2,1],\end{cases} \quad \nu=1,...,\nu_0, \tag{2.6}$$

и периодически продолжим эту функцию при любом фиксированном $\nu=1,...,\nu_0$ на всю $\mathbb{R}^1$ с периодом 1. Нетрудно убедиться, что существует натуральное число $s_1 > 2\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1 I_1(2^{s_1}x)\chi_{\Delta_1}(x)\phi_n(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon^2}{16\sqrt{N_0}}, \quad n=1,...,N_0. \tag{2.7}$$

Положим

$$g_1(x) = I_1(2^{s_1}x)\chi_{\Delta_1}(x), \quad E_1 = \{x\in[0,1]: g_1(x)=\gamma_1\}. \tag{2.8}$$

В силу (2.6) и (2.8) получим

$$|E_1| > (1-\varepsilon_0)\cdot|\Delta_1|. \tag{2.9}$$

Так как система $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L^2[0,1]$, то можно найти достаточно большое натуральное число N_1 такое, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N_1-1} a_k^{(1)}\phi_k(x) - g_1(x)\right| dx < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

где

$$a_k^{(1)} = \int_0^1 \phi_k(x) g_1(x)\, dx.$$

Отсюда и из (2.7) и (2.8) получим

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k^{(1)}\phi_k(x) - g_1(x)\right| dx < \frac{\varepsilon^2}{4} + \left[\sum_{k=1}^{N_0}\left(a_k^{(1)}\right)^2\right]^{1/2} < \frac{\varepsilon^2}{2}. \qquad (2.10)$$

Предположим, что определены числа $N_1 < ... < N_{\nu-1}$, функции $g_1(x), ..., g_{\nu-1}(x)$, множества $E_1, ..., E_{\nu-1}$ и многочлены $Q_1(x), ..., Q_{\nu-1}(x)$. Возьмем достаточно большие натуральные числа s_ν и N_ν такие, что

$$\left|\int_0^1 I_\nu(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x)\phi_n(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon^2}{16^\nu\sqrt{N_{\nu-1}}}, \quad n = 1, ..., N_{\nu-1},$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N_\nu-1} a_k^{(\nu)}\phi_k(x) - g_\nu(x)\right| dx < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

где

$$g_\nu(x) = I_\nu(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x), \quad a_k^{(\nu)} = \int_0^1 \phi_k(x) g_\nu(x)\, dx, \qquad (2.11)$$

и положим

$$E_\nu = \{x \in \Delta_\nu :\ g_\nu(x) = \gamma_\nu\}. \qquad (2.12)$$

Рассуждая как и выше (см. (2.9), (2.10)) заключаем, что функция $g_\nu(x)$, множество E_ν и многочлен

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} a_k^{(\nu)}\phi_k(x) \qquad (2.13)$$

удовлетворяют условиям

$$|E_\nu| > (1-\varepsilon_0)\cdot|\Delta_\nu|, \quad g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, & x \in E_\nu, \\ 0 & \text{вне } \Delta_\nu, \end{cases} \qquad (2.14)$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \qquad (2.15)$$

Положим

$$\begin{gathered} G_\nu = \left\{x \in [0,1] :\ |Q_\nu(x) - g_\nu(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\ E = \left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} G_\nu\right). \end{gathered} \qquad (2.16)$$

Из (2.5), (2.15) и (2.16) следует, что $|G_\nu| > 1-\varepsilon > 1-\frac{\varepsilon_0}{4\nu_0}$. Следовательно, ввиду (2.15) и (2.16) имеем $|E| > 1-\varepsilon_0$. На основании неравенства Бесселя из (2.3), (2.6) и (2.11) для всех $\nu \in [1,\nu_0]$ имеем

$$\left[\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\left(a_k^{(\nu)}\right)^2\right]^{1/2} \le \left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le \tag{2.17}$$
$$\left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \le \left[\frac{2}{\varepsilon_0}|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p_0}\right].$$

Из неравенства Гарсия (2.1) следует, что существует перестановка $\sigma_\nu(n)$ натуральных чисел $N_{\nu-1},\ldots,N_\nu-1$ такая, что

$$\int_E\left[\max_{N_{\nu-1}\le n<N_\nu}\left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)}\phi_{\sigma_\nu(k)}(x)\right|\right]^{p_0} dx \le$$
$$\le (A_{p_0})^{p_0}\int_E\left[\left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} a_k^{(\nu)}\phi_k(x)\right| + \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\left[a_k^{(\nu)}\phi_k(x)\right]^2\right)^{1/2}\right]^{p_0} dx.$$

В силу неравенства Минковского из (2.4), (2.12), (2.13), (2.16) и (2.17), для всех $\nu \in [1,\nu_0]$ имеем

$$\max_{N_{\nu-1}\le n<N_\nu}\left(\int_E\left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)}\phi_{\sigma_\nu(k)}(x)\right|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \le$$
$$\le A_{p_0}\left[\left(\int_E |Q_\nu(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} + \left(\int_E\left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\left[a_k^{(\nu)}\phi_k(x)\right]^2\right)^{p_0/2} dx\right)^{1/p_0}\right] \le$$
$$\le A_{p_0}\left[\left(\int_E |Q_\nu(x)-g_\nu(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} + \left(\int_E |g_\nu(x)|^{p_0/2}dx\right)^{1/p_0}\right] +$$
$$+ A_{p_0}\left[\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\left(\int_0^1\left[a_k^{(\nu)}\phi_k(x)\right]^{p_0}dx\right)^{2/p_0}\right]^{1/2} \le \tag{2.18}$$
$$\le A_{p_0}\varepsilon + A_{p_0}\left[|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p_0} + B_{p_0}\left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\left|a_k^{(\nu)}\right|^2\right)^{1/2}\right] \le$$
$$\le A_{p_0}\varepsilon + \frac{4}{\varepsilon_0}A_{p_0}B_{p_0}|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь определим перестановку $\sigma(k)$ натуральных чисел $\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$ для $N_{\nu-1} \le k \le N$, $1 \le \nu \le \nu_0$ и положим

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k\phi_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x), \tag{2.19}$$

где $a_k = a_k^{(\nu)}$ для $N_{\nu-1} \le k \le N$, $1 \le \nu \le \nu_0$ и $N = N_{\nu_0} - 1$. Из (2.3), (2.4), (2.17) и (2.19) следует, что

$$\sum_{k=N_0}^{N} |a_k|^{2+\varepsilon_0} < \left(\max_{N_0\le k\le N} |a_k|\right)^{\varepsilon_0} < \sum_{k=N_0}^{N} |a_k|^2 =$$

$$= \left[\sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left|a_k^{(\nu)}\right|^2\right] \left(\max_{N_0\le k\le N} |a_k|\right)^{\varepsilon_0} \le$$

$$\le \left(\max_{N_0\le k\le N} |a_k|\right)^{\varepsilon_0} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^1 g_\nu^2(x)\,dx \le \left(\max_{N_0\le k\le N} |a_k|\right)^{\varepsilon_0} \frac{2}{\varepsilon_0} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu^2 |\Delta_\nu| \le$$

$$\le \max_{1\le\nu\le\nu_0} \left(\frac{2}{\varepsilon_0}\gamma_\nu |\Delta_\nu|^{1/p_0}\right)^{\varepsilon_0} \frac{2}{\varepsilon_0} \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx < \varepsilon_0.$$

Принимая во внимание (2.3) – (2.5), (2.12), (2.14), (2.16) и (2.19), получим

$$\left(\int_E |Q(x) - f(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \le \left(\int_E |f(x) - \varphi(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \le \frac{\varepsilon_0}{4} + \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \frac{\varepsilon_0}{4\nu_0} < \varepsilon_0.$$

Таким образом, утверждения 1) – 3) Леммы 1 доказаны. Для доказательства утверждения 4) заметим, что при фиксированном $n \in [N_0, N]$ существует $\nu' \in [1, \nu_0]$ такое, что $N_{\nu'-1} \le n < N'_\nu$. Следовательно, из (2.19) имеем

$$\sum_{k=N_0}^{N} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu'-1} \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^{(\nu)}\phi_k(x) + \sum_{k=N_{\nu'-1}}^{n} a_{\sigma(k)}^{(\nu')}\phi_{\sigma(k)}(x).$$

Учитывая (2.3) – (2.5), (2.14), (2.16) и (2.18), для каждого $p \in [2, p_0]$ получим

$$\left(\int_E \left|\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le \sum_{\nu=1}^{\nu'} \left(\int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_E \left[\sum_{\nu=1}^{\nu'-1} g_\nu(x)\right]^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_E \left|\sum_{k=N_{\nu'-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \frac{\varepsilon_0}{4\nu_0} + \left(\int_E |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon_0}{2} \le \varepsilon_0 + \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Из доказательства Леммы 1 следует, что мы воспользовались предположением (2.2) только при доказательстве утверждения 4). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. **Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система. Тогда для любого $p \geq 1$, любой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ и любых чисел $\varepsilon > 0$ и $N_0 > 1$, существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ и многочлен $Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k\phi_k(x)$, удовлетворяющие условиям**

$$|E| > 1-\varepsilon, \quad \sum_{k=N_0}^{N} |a_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon, \quad \left(\int_E |Q(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Обозначим через T плоский единичный квадрат $T = [0,1]^2$.

Лемма 3. **Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система, для некоторого $p_0 > 2$ удовлетворяющая (2.2). Тогда для каждого квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T$ и любых $\gamma \neq 0$, $\delta \in (0,1)$, $N > 1$ существуют измеримое множество $E \subset T$, многочлен**

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}\phi_k(x)\phi_n(y) \tag{2.20}$$

и перестановка $\sigma(n)$ натуральных чисел $N,\dots,M$, обладающие следующими свойствами :

$$1)\quad |E| > 1-\delta, \qquad 2)\quad \sum_{k,s=N}^{M} |c_{k,s}|^{2+\delta} < \delta,$$

$$3)\qquad \left(\iint_E |Q(x,y) - \gamma\cdot\chi_\Delta(x,y)|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p_0} < \delta,$$

$$4)\qquad \max_{N\leq \overline{k},\overline{n}\leq M}\left(\iint_E \left|\sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\phi_{\sigma(k)}(x)\phi_{\sigma(n)}(y)\right|^{p_0} dx\,dy\right)^{1/p_0} +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N\leq R\leq\sqrt{2}M}\left(\iint_E \left|\sum_{2N^2\leq k^2+n^2\leq R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\phi_{\sigma(k)}(x)\phi_{\sigma(n)}(y)\right|^{p_0} dx\,dy\right)^{1/p_0} \leq$$

$$\leq 16|\gamma|\cdot|\Delta|^{1/p_0}.$$

Доказательство : Применяя Лемму 1, полагая в её формулировке

$$f(x) = \gamma\cdot\chi_{\Delta_1}(x), \quad N_0 = N, \quad \varepsilon_0 = \frac{\delta|\gamma|\cdot|\Delta_1|^{1/p_0}}{2(|\gamma| + |\Delta_2|^{1/p_0}+1)},$$

определим измеримое множество $E_1 \subset [0,1]$, многочлен $Q_1(x) = \sum_{k=N}^{N_1} a_k \phi_k(x)$ и перестановку $\sigma_1(n)$ натуральных чисел $N, ..., N_1$, удовлетворяющие условиям

$$1^0)\quad |E_1| > 1 - \frac{\delta}{2}, \qquad 2^0)\quad \sum_{k=N}^{N_1} |a_k|^{2+\delta} < \delta,$$

$$3^0)\qquad \left(\int_{E_1} |Q_1(x) - \gamma \cdot \chi_{\Delta_1}(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} < \frac{\delta}{2|\Delta_2|^{1/p_0}},$$

$$4^0)\qquad \max_{N \le n < N_1} \left[\int_{E_1} \left|\sum_{k=N}^{n} a_{\sigma_1(k)} \phi_{\sigma_1(k)}(x)\right|^{p_0} dx\right]^{1/p_0} \le 2|\gamma| \cdot |\Delta_1|^{1/p_0}.$$

Теперь используя Лемму 1 для

$$f(y) = \chi_{\Delta_2}(y), \quad N_0 = M_0 = 2(N_1^2 + 1), \quad \varepsilon_0 = \frac{\delta |\Delta_2|^{1/p_0}}{2||Q_1(x)||_{p_0} + 1}, \tag{2.21}$$

определим измеримое множество $E_2 \subset [0,1]$, многочлен $Q_2(y) = \sum_{k=M_0}^{M} b_k \phi_n(y)$ и перестановку $\sigma_2(n)$ натуральных чисел $M_0, ..., M$, удовлетворяющие условиям

$$1^{00})\quad |E_2| > 1 - \frac{\delta}{2}, \qquad 2^{00})\quad \sum_{n=M_0}^{M} |b_n|^{2+\delta} < \delta,$$

$$3^{00})\qquad \left(\int_{E_2} |Q_2(y) - \chi_{\Delta_2}(y)|^{p_0} dy\right)^{1/p_0} < \frac{\delta}{2||Q_1(x)||_{p_0} + 1},$$

$$4^{00})\qquad \max_{M_0 \le m < M} \left[\int_{E_2} \left|\sum_{n=M_0}^{m} b_{\sigma_2(n)} \phi_{\sigma_2(n)}(y)\right|^{p_0} dy\right]^{1/p_0} \le 2|\Delta_2|^{1/p_0}.$$

Положим

$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma_1(n) & \text{при } N \le n \le N_1, \\ n & \text{при } N_1 \le n \le M_0, \\ \sigma_2(n) & \text{при } M_0 \le n \le M, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$E = E_1 \times E_2, \quad Q(x,y) = Q_1(x) Q_2(y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n} \phi_n(y) \phi_k(x), \tag{2.23}$$

где

$$c_{k,n} = \begin{cases} a_k b_n & \text{при } N \le k \le N_1, \ M_0 \le n \le M, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из условий 1^0), 1^{00}), 2^0), 2^{00}) и (2.23) следует, что

$$|E| > 1 - \delta, \quad \sum_{k,n=N}^{M} |c_{k,n}|^{2+\delta} = \sum_{k=N}^{N_1} |a_k|^{2+\delta} \sum_{n=M_0}^{M} |b_n|^{2+\delta} < \delta.$$

В силу 3^0), 3^{00}) и (2.23)

$$\left(\iint_E |Q(x,y)-\gamma\cdot\chi_\Delta(x,y)|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p_0} \le$$

$$\le \left(\int_{E_2}' |Q_2(y)-\chi_{\Delta_2}(y)|^{p_0}dy\right)^{1/p_0}\left(\int_{E_1}|Q_1(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} +$$

$$+\left(\int_{E_1}|Q_1(x)-\gamma\cdot\chi_{\Delta_1}(x)|^{p_0}dx\right)^{1/p_0}\left(\int_{E_2}|\chi_{\Delta_2}(y)|^{p_0}dy\right)^{1/p_0} \le \delta.$$

Теперь проверим выполнение утверждения 4) Леммы 3. Пусть $N^2+M_0^2<R^2\le N_1^2+M^2$, тогда для некоторого $m_0\ge M_0$ будем иметь $m_0<R\le m_0+1$. В силу (2.21) имеем $R^2-N_1^2>(m_0-1)^2$. Следовательно, из 4^0), 4^{00}), (2.22) и (2.23)

$$\left(\iint_E\left|\sum_{N^2+M_0^2<k^2+n^2\le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\phi_{\sigma(k)}(x)\phi_{\sigma(n)}(y)\right|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p} \le$$

$$\le\left(\iint_E\left|\sum_{k=N}^{N_1}\sum_{n=M_0}^{m_0-1} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\phi_{\sigma(k)}(x)\phi_{\sigma(n)}(y)\right|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p} +$$

$$+\max_{N<s\le N_1}\left(\iint_E\left|\sum_{k=N}^{s} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\phi_{\sigma(k)}(x)\phi_{\sigma(n)}(y)\right|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p} \le$$

$$\le\left[\int_{E_1}\left|\sum_{k=N}^{N_1} a_{\sigma_1(k)}\phi_{\sigma_1(k)}(x)\right|^{p_0}dx\right]^{1/p_0}\left[\int_{E_2}\left|\sum_{n=M_0}^{m_0-1} b_{\sigma_2(n)}\phi_{\sigma_2(n)}(y)\right|^{p_0}dy\right]^{1/p_0} +$$

$$+|b_{m_0}|\left(\int_{E_2}|\phi_{\sigma_2(n)}(y)|^{p_0}dy\right]^{1/p_0}\max_{N\le n<N_1}\left[\int_{E_1}\left|\sum_{k=N}^{n} a_{\sigma_1(k)}\phi_{\sigma_1(k)}(x)\right|^{p_0}dx\right]^{1/p_0} \le$$

$$\le 12|\gamma|\cdot|\Delta|^{1/p_0}.$$

Аналогично, для $N\le s\le N_1$ и $M_0<m\le M$ получаем

$$\left(\iint_E\left|\sum_{k,n=N}^{s,m} c_{\sigma(k),\sigma(n)}\phi_{\sigma(k)}(x)\phi_{\sigma(n)}(y)\right|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p} \le 4|\gamma|\cdot|\Delta|^{1/p_0}.$$

Доказательство Леммы 3 завершено.

Лемма 4. *Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система, удовлетворяющая при некотором $p_0>2$ условию (2.2). Тогда для* любой функции $f(x,y) \in L^2(T)$ и любых $\varepsilon > 0$, $N > 1$, существуют измеримое множество $E \subset T$, многочлен $Q(x,y)$ вида (2.20) и перестановка $\sigma(n)$ натуральных чисел $N, ..., M$, удовлетворяющие условиям

$$1) \quad |E| > 1 - \varepsilon, \qquad 2) \quad \sum_{k,s=N}^{M} |c_{k,s}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon,$$

$$3) \qquad \left(\iint_E |Q(x,y) - f(x,y)|^{p_0} dx\, dy \right)^{1/p_0} < \varepsilon,$$

$$4) \qquad \max_{N \le \bar{k},\bar{n} \le M} \left(\iint_E \left| \sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \phi_{\sigma(k)}(x) \phi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx\, dy \right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left(\iint_E \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \phi_{\sigma(k)}(x) \phi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx\, dy \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2 \left(\iint_E |f(x,y)|^p\, dx\, dy \right)^{1/p} + \varepsilon, \quad p \in [2, p_0].$$

Доказательство : Рассмотрим ступенчатую функцию $\varphi(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x,y)$ такую, что

$$\left(\iint_T |\varphi(x,y) - f(x,y)|^{p_0} dx\, dy \right)^{1/p_0} + \max_{1 \le \nu \le \nu_0} \left(|\gamma_\nu| \cdot \Delta_\nu|^{1/p_0} \right) < \frac{\varepsilon}{4^4}, \qquad (2.24)$$

где Δ_ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ – прямоугольное множество постоянства функции $\varphi(x,y)$. Если ν – заданное число и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{16\nu_0}$, то в силу Леммы 3 существуют измеримое множество $E_\nu \subset T$, многочлен вида

$$Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} c_{k,n}^{(\nu)} \phi_k(x) \phi_n(y) \qquad (2.25)$$

и перестановка $\sigma_\nu(n)$ натуральных чисел $N_\nu, ..., m_\nu$, обладающие следующими свойствами :

$$|E_\nu| > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{\nu_0}}, \quad \sum_{k,n=N_\nu}^{m_\nu} \left| c_{k,n}^{(\nu)} \right|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\nu_0}, \qquad (2.26)$$

$$\left(\iint_{E_\nu} |Q_\nu(x,y) - \gamma_\nu \cdot \chi_{\Delta_\nu}(x,y)|^{p_0} dx\, dy \right)^{1/p_0} < \frac{\varepsilon}{16\nu_0}, \qquad (2.27)$$

$$\max_{N_\nu\le\bar{k},\bar{n}\le m_\nu}\left(\iint\limits_{E_\nu}\left|\sum_{k,n=N_\nu}^{\bar{k},\bar{n}} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}\phi_{\sigma_\nu(k)}(x)\phi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p_0}+ \tag{2.28}$$

$$+\max_{\sqrt{2}N_\nu\le R\le\sqrt{2}m_\nu}\left(\iint\limits_{E_\nu}\left|\sum_{2N_\nu^2\le k^2+n^2\le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}\phi_{\sigma_\nu(k)}(x)\phi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|^{p_0}dxdy\right)^{1/p_0}\le$$

$$\le 16|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|^{1/p_0}<\frac{\varepsilon}{4^2}.$$

Пусть определены $N_1=N$, $N_\nu=m_{\nu-1}+1$, множество

$$E=\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0}E_\nu \tag{2.29}$$

и перестановка $\sigma(k)$ натуральных чисел $\sigma(k)=\sigma_\nu(k)$ при $N_\nu\le k\le m_\nu$, $1\le\nu\le\nu_0$ и многочлен

$$Q(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}Q_\nu(x,y)=\sum_{k,n=N}^{M}c_{k,n}\phi_n(y)\phi_k(x),\quad M=m_\nu, \tag{2.30}$$

где

$$c_{k,n}=\begin{cases}c^{(\nu)}_{k,n} & \text{при } N_\nu\le k,n\le m_\nu,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Из (2.24) - (2.30) получаем, что

$$|E|>1-\varepsilon,\quad \sum_{k,n=N}^{M}|c_{k,n}|^{2+\epsilon}=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\left[\sum_{k,n=N_\nu}^{m_\nu}\left|c^{(\nu)}_{k,n}\right|^{2+\epsilon}\right]<\varepsilon,$$

$$\left(\iint\limits_{E}|Q(x,y)-f(x,y)|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p_0}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\left(\iint\limits_{E}|Q_\nu(x,y)-\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y)|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p_0}+$$

$$+\left(\iint\limits_{T}|\varphi(x,y)-f(x,y)|^{p_0}dx\,dy\right)^{1/p_0}<\frac{\varepsilon}{4\nu_0}\nu_0+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, утверждения 1) – 3) Леммы 4 доказаны. Для доказательства утверждения 4) сначала заметим, что для всех $p\in[2,p_0]$ и $\nu\in[1,\nu_0]$ из (2.24) имеем

$$\left(\iint\limits_{E}\left|\sum_{i=1}^{\nu-1}\gamma_i\cdot\chi_{\Delta_i}(x,y)\right|^{p}dx\,dy\right)^{1/p}\le\left(\iint\limits_{E}|\varphi(x,y)|^{p}\,dx\,dy\right)^{1/p}\le$$

$$\le\left(\iint\limits_{E}|f(x,y)|^{p}\,dx\,dy\right)^{1/p}+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.31}$$

Если $\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M$, то $\sqrt{2}N_\nu \le R \le \sqrt{2}N_{\nu+1}$ для некоторого $\nu \in [1,\nu_0]$. Поэтому из (2.30) получаем

$$\sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \phi_{\sigma(k)}(x) \phi_{\sigma(n)}(y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu-1} Q_i(x,y) + \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \phi_{\sigma_\nu(k)}(x) \phi_{\sigma_\nu(n)}(y).$$

Отсюда и из (2.27), (2.28) и (2.31) для всех $p \in [2, p_0]$ имеем

$$\left(\iint_E \left| \sum_{2N^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \phi_{\sigma(k)}(x) \phi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx\, dy \right)^{1/p} \le$$
$$\le \sum_{s=1}^{\nu-1} \left(\iint_E |Q_s(x,y) - \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x,y)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} +$$
$$+ \left(\iint_E \left| \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x,y) \right|^p dx\, dy \right)^{1/p} +$$
$$+ \left(\iint_E \left| \sum_{2N_\nu^2 \le k^2+n^2 \le R^2} c^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \phi_{\sigma_\nu(k)}(x) \phi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dx\, dy \right)^{1/p} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{16\nu_0}\nu_0 + \left(\iint_E |f(x,y)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{16} \le \left(\iint_E |f(x,y)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, для всех $p \in [2, p_0]$ получим

$$\max_{N \le \overline{k},\overline{n} \le M} \left(\iint_E \left| \sum_{k,n=N}^{\overline{k},\overline{n}} c_{\sigma(k),\sigma(n)} \phi_{\sigma(k)}(x) \phi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dx\, dy \right)^{1/p} \le$$
$$\le \left(\iint_E |f(x,y)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Лемма 4 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все алгебраические многочлены с рациональными коэффициентами можно представить в виде последовательности

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система, удовлетворяющая (2.2) при некотором $p_0 > 2$. Последовательно применяя Лемму 1 к $f = f_k$ из (3.1), определим последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$ и последовательность многочленов

$$Q_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} \phi_{\sigma_n(k)}(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} \phi_k(x), \quad m_\nu > m_{\nu-1}, \tag{3.2}$$

где $\{\sigma_n(k)\}$ – некоторая перестановка натуральных чисел $m_{\nu-1}, \dots, m_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$|E_n| > 1 - 2^{-2n}, \quad \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} \left|a_k^{(n)}\right|^{2+2^{-2n}} < 2^{-2n}, \tag{3.3}$$

$$\left(\int_{E_n} |Q_n(x) - f_n(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} < 2^{-4n}, \tag{3.4}$$

$$\max_{m_{n-1} \le s \le m_n} \left[\int_{E_n} \left| \sum_{k=m_{n-1}}^{s} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} \phi_{\sigma_n(k)}(x) \right|^p dx \right]^{1/p} \le$$
$$\le \left(\int_{E_n} |f_n(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + 2^{-2n}, \quad p \in [2, p_0]. \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующие ряды :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} \phi_k(x) \right), \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \phi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_{\sigma_n(k)}^{(n)} \phi_{\sigma_n(k)}(x) \right), \tag{3.7}$$

где $a_k = a_k^{(n)}$ и $\sigma(k) = \sigma_n(k)$ для $m_{n-1} \le k \le m_n$. Из (3.3) имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^s < \infty$ для всех $s > 2$.

Теперь покажем, что ряд (3.6) удовлетворяет условиям Теоремы 1. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно и n_0 – целая часть числа $\log_{1/2} \varepsilon$. Полагая

$$E = \bigcap_{\nu=n_0}^{\infty} E_\nu, \tag{3.8}$$

из (3.3), (3.4) и (3.8) находим $|E| > 1 - \varepsilon$. Пусть $f(x) \in L^p(E)$ для некоторого $p \in [2, p_0]$. Рассмотрим функцию $f_{n_1}(x)$ из (3.1) такую, что

$$||f(x) - f_{n_1}(x)||_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x) - f_{n_1}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < 2^{-4(1+1)}.$$

Используя (2.2), (3.4) и (3.8), получаем

$$\|f(x) - [Q_{n_1}(x) + a_1\phi_1(x)]\|_{L^p(E)} < 2^{-2n_1} + 2^{-8} + B_{p_0}|a_1|.$$

Предположим, что члены

$$\begin{gathered} a_{\sigma(m_{n_1-1})}\phi_{\sigma(m_{n_1-1})}(x), \ldots, a_{\sigma(m_{n_1}-1)}\phi_{\sigma(m_{n_1}-1)}(x), \ldots, \\ a_{\sigma(m_{n_\nu-1})}\phi_{\sigma(m_{n_\nu-1})}(x), \ldots, a_{\sigma(m_{n_\nu}-1)}\phi_{\sigma(m_{n_\nu}-1)}(x) \end{gathered} \tag{3.9}$$

ряда (3.6) или (3.7) выбраны так, чтобы

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{\nu} \left[Q_{n_j}(x) + a_{s_j}\phi_{s_j}(x)\right] \right\|_{L^p(E)} \le 2^{-2n_\nu} + 2^{-4(\nu+1)} + B_{p_0}|a_{s_\nu}|, \tag{3.10}$$

$$\max_{m_{n_\nu-1} \le m \le m_{n_\nu}} \left\| \sum_{k=m_{n_\nu-1}}^{m} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) \right\|_{L^p(E)} < 2^{-\nu} + B_{p_0}|a_{s_{\nu-1}}|. \tag{3.11}$$

Для функции $f_{n_{\nu+1}}$ из (3.1) такой, что

$$\left\| f_{n_{\nu+1}}(x) - f(x) + \sum_{j=1}^{\nu} \left[Q_{n_j}(x) + a_{s_j}\phi_{s_j}(x)\right] \right\|_{L^p(E)} < 2^{-4(\nu+1)},$$

из (3.10) находим $\|f_{n_{\nu+1}}(x)\|_{L^p(E)} \le 2^{-2(\nu+1)} + B_{p_0}|a_{s_\nu}|$. Следовательно, согласно (3.2), (3.5) и (3.8), имеем

$$\max_{m_{n_{\nu+1}-1} \le s \le m_{n_{\nu+1}}} \left\| \sum_{k=m_{n_{\nu+1}-1}}^{s} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) \right\|_{L^p(E)} < 2^{-(\nu+1)} + B_{p_0}|a_{s_\nu}|,$$

$$\left\| Q_{n_{\nu+1}}(x) - f(x) + \sum_{j=1}^{\nu} \left[Q_{n_j}(x) + a_{s_j}\phi_{s_j}(x)\right] \right\|_{L^p(E)} < 2^{-4(\nu+1)} + 2^{-4n_{\nu+1}}. \tag{3.12}$$

После выбора функций (см. (3.2) и (3.7))

$$a_{\sigma(m_{n_{\nu+1}-1})}\phi_{\sigma(m_{n_{\nu+1}-1})}(x), \ldots, a_{\sigma(m_{n_{\nu+1}}-1)}\phi_{\sigma(m_{n_{\nu+1}}-1)}(x),$$

выбирается функция $a_{s_{\nu+1}}\phi_{s_{\nu+1}}(x)$ с наименьшим номером, отличным от номеров всех функций системы (3.9). Согласно (3.12) получаем

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{\nu+1} \left[Q_{n_j}(x) + a_{s_j}\phi_{s_j}(x)\right] \right\|_{L^p(E)} \le 2^{-2(\nu+1)} + B_{p_0}|a_{s_{\nu+1}}|.$$

Таким образом, по индукции из ряда (3.6) получим некоторый переставленный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=m_{n_{j-1}}}^{m_{n_j}-1} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) + a_{s_j}\phi_{s_j}(x)\right), \qquad (3.13)$$

члены которого удовлетворяют условиям (3.10) и (3.11) для всех $\nu > 1$. Следовательно, ряд (3.13) сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(E)$. Утверждение а) Теоремы 1 доказано. Подобными рассуждениями, из (3.2) выбирается последовательность многочленов (см. (3.7))

$$Q_{\nu_s}(x) = \sum_{k=m_{\nu_s-1}}^{m_{\nu_s}-1} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x), \quad m_{\nu_s-1} < m_{\nu_s}, \quad s = 1, 2, ...,$$

удовлетворяющая условиям

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{N} Q_{n_j}(x) \right\|_{L^p(E)} \le 2^{-2N}, \quad N = 1, 2, ...,$$

$$\max_{m_{\nu_s-1}\le m \le m_{\nu_s}} \left\| \sum_{k=m_{\nu_s-1}}^{m} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) \right\|_{L^p(E)} < 2^{-s}, \quad s = 1, 2, ...$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{k=m_{\nu_s-1}}^{m_{\nu_s}-1} a_{\sigma(k)}\phi_{\sigma(k)}(x)\right),$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in [m_{\nu_s-1}, m_{\nu_s} - 1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad s = 1, 2, ...,$$

сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(E)$, т.е. ряд (3.7) квазиуниверсален относительно частичных рядов в $L^p[0,1]$, $p \in [2, p_0]$. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Пусть $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система. Последовательно применяя Лемму 2 к функциям $f_k(x)$ из (3.1), определим последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$, и последовательность многочленов вида $Q_n(x) = \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)}\phi_k(x)$, $m_n > m_{n-1}$, удовлетворяющих условиям

$$|E_n| > 1 - 2^{-n}, \qquad \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} \left|a_k^{(n)}\right|^{2+2^{-n}} < 2^{-n}, \qquad (3.14)$$

$$\left(\int_{E_n}\left|f_n(x)-\sum_{i=1}^{n}Q_i(x)\right|^{p_n}dx\right)^{1/p_n}<2^{-n}, \tag{3.15}$$

где $\{p_n\}$ – монотонно стремящаяся к бесконечности последовательность положительных чисел. Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\phi_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}a_k^{(n)}\phi_k(x)\right), \tag{3.16}$$

где $a_k = a_k^{(n)}$ для $m_{n-1}\le k\le m_n$ квазиуниверсален в обычном смысле в $\bigcap\limits_{p\ge1}L^p[0,1]$. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольно и n_0 – целая часть числа $\log_{1/2}\varepsilon$. Полагая

$$E=\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty}E_n, \tag{3.17}$$

из (3.14) и (3.17) имеем $|E|>1-\varepsilon$. Для каждой функции $f(x)\in\bigcap\limits_{p\ge1}L^p(E)$ из (3.1) выберем последовательность $\{f_{n_\nu}(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$ такую, что

$$\left(\int_E|f(x)-f_{n_\nu}(x)|^{p_\nu}dx\right)^{1/p_\nu}<2^{-\nu}.$$

Отсюда и из (3.11), (3.15), (3.17) вытекает

$$\left(\int_E\left|f(x)-\sum_{n=1}^{n_\nu}\left(\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}a_k^{(n)}\phi_k(x)\right)\right|^{p_\nu}dx\right)^{1/p_\nu}\le$$

$$\le\left(\int_E\left|f_{n_\nu}(x)-\sum_{n=1}^{n_\nu}Q_n(x)\right|^{p_\nu}dx\right)^{1/p_\nu}+\left(\int_E|f(x)-f_{n_\nu}(x)|^{p_\nu}dx\right)^{1/p_\nu}\le$$

$$\le2^{-n_\nu}+2^{-\nu}.$$

Так как $p_n\uparrow\infty$, то в силу (3.16) для всех $p\ge1$ имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\int_E\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N_\nu}a_k\phi_k(x)\right|^{p}dx\right)^{1/p},$$

где $N_\nu=m_{n_\nu}-1$. Аналогично доказывается, что ряд (3.16) квазиуниверсален в обычном смысле в пространстве $L^p[0,1]$ при любом $p\ge1$. Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Идея доказательства аналогична доказательству вышеприведенной Теоремы 1. Разница лишь в том, что здесь мы используем Лемму 4 вместо Леммы 1.

ABSTRACT. Let $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ be an orthonormal complete in $L^2[0,1]$ system, such that $\|\varphi_n\|_{p_0}\le const$, $n\ge1$ for some $p_0>2$. In the paper a series $\sum c_k\varphi_k(x)$ is constructed, which is quasiuniversal with respect to rearrangements in $L^p[0,1]$ for any $p\in[2,p_0]$. This means that for any $\varepsilon>0$ there exists a measurable set $E\subset[0,1]$ with Lebesgue measure $|E|>1-\varepsilon$, such that for any function $f(x)\in L^p(E)$ the series $\sum c_k\varphi_k(x)$ can be rearranged, so that the new series converges to $f(x)$ in $L^p(E)$ metric.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "О частичных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сборник, том 20, № 2, стр. 197 – 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. Сборник, том 26, № 3, стр. 351 – 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм общих ортогональных рядов", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 10, № 3, стр. 17 – 34, 1975.
4. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, том 15, № 5, стр. 567 – 604, 1960.
5. Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференциального и Интегрального Исчисления II, Наука, Москва, 1996.
6. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Сборник, том 181, № 8, стр. 1011 – 1030, 1990.
7. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Мат. Сборник, том 99(141), стр. 356 – 365, 1976.
8. П. Л. Ульянов, "О безусловной сходимости и суммируемости", Изв. АН СССР, серия Математика, том 22, стр. 811 – 840, 1958.
9. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН Арм.ССР, том 64, № 2, стр. 72 – 76, 1976.
10. А. М. Олевский, "О некоторых особенностях рядов Фурье в пространстве L^p, $p < 2$", Мат. Сборник, том 77, № 2, стр. 251 – 258, 1968.
11. М. Г. Григорян, "Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 \le p < 2$ ортогональными рядами", ДАН Арм.ССР, том 67, № 5, стр. 269 – 274, 1978.
12. М. Г. Григорян, "О системах, универсальных в $L^p[0,1]$, $1 \le p < 2$", Изв. Вузов, Математика, том 456, № 5, стр. 19 – 22, 2000.
13. L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math., vol. 116, pp. 135 – 157, 1966.
14. M. Riesz, "Sur les functions conjugees", Math. Zeit., vol. 27, pp. 218 – 244, 1927.
15. A. N. Kolmogorov, "Sur les functions harmoniques conjugees et les de Fourier", FM., vol. 7, pp. 23 – 28, 1925.
16. C. Fefferman, "The multiple problem for the ball", Ann. Math., vol. 7, no. 2, pp. 330 – 336, 1971.
17. С. В. Конягин, "О расходимости кратных тригонометрических рядов Фурье", Тезисы Докл. Всесоюзн. Шк. по Теории Функций, Ереван, 1987.
18. Л. В. Жижиашвили, "О некоторых вопросах теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов", УМН, том 28, № 2, стр. 65 – 119, 1973.
19. Б. И. Голубов, "Кратные ряды и интегралы Фурье", Мат. Анализ, Итоги науки и техники, том 19, стр. 3 – 54, 1982.
20. М. И. Дьяченко, "Некоторые проблемы кратных тригонометрических рядов", УМН, том 47, № 5, стр. 97 – 162, 1992.
21. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1999.

27 апреля 2000

Ереванский государственный университет

О СУММИРУЕМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

А. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

В статье указывается класс линейных регулярных методов суммирования, обладающий тем свойством, что из суммируемости почти всюду ортогональных рядов одновременно всеми методами этого класса следует их сходимость почти всюду. Доказывается также, что суммируемость числового ряда всеми методами указанного класса не влечёт сходимости этого ряда.

§1. ЛЕММА

Лемма 1. Пусть $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$1 \leq \omega(1) \leq \cdots \leq \omega(k) \leq \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} \omega(k) = \infty. \tag{1.1}$$

Тогда существует последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$2 < \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty, \quad \mu_n = o(n), \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{k}{\mu_k}\right| \leq C_1\omega(k), \quad \sum_{n=1}^{k-1} e^{-2|k/n|^{\mu_n}} \leq C_2\omega(k), \quad k \geq 2, \tag{1.3}$$

где C_1 и C_2 – постоянные, не зависящие от k.

Доказательство : Пользуясь условием (1.1) выберем возрастающую последовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел таких, что

$$2^{\nu-j} > \nu \quad \text{при} \quad \nu \geq k_j, \quad j = 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

$$\omega(k) \geq 2^j \quad \text{при} \quad 2^{k_j} \leq k < 2^{k_{j+1}}, \quad j = 1, 2, ... \tag{1.5}$$

Положим

$$\mu_n = 2^{\nu}\epsilon_{\nu} \quad \text{при} \quad 2^{\nu} \leq n < 2^{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, ..., \tag{1.6}$$

где

$$\varepsilon_\nu = 2^{-j} \quad \text{при} \quad k_j \le \nu < k_{j+1}, \quad j = 0, 1, ..., \quad k_0 = 1. \tag{1.7}$$

Из (1.4), (1.6) и (1.7) следует, что

$$\mu_n = 2^\nu \varepsilon_\nu \ge \nu \quad \text{при} \quad \nu \ge k_1, \quad 2^\nu \le n < 2^{\nu+1}. \tag{1.8}$$

Так как $\varepsilon_\nu = 1$ при $\nu < k_1$, то имеют место следующие неравенства :

$$\mu_n = 2^\nu \varepsilon_\nu \ge \nu \quad \text{при} \quad 2^\nu \le n < 2^{\nu+1}. \tag{1.9}$$

Из (1.4), (1.6) и (1.7) следует, что μ_n удовлетворяет (1.2). Далее, если ν удовлетворяет условиям $2^\nu \le k < 2^{\nu+1}$, то в силу (1.7) имеем

$$\frac{k}{\mu_k} = \frac{k}{2^\nu \varepsilon_\nu} < 2^{j+1} \quad \text{при} \quad k_j \le \nu < k_{j+1}, \quad j = 0, 1, ... \tag{1.10}$$

Из (1.5) - (1.7) и (1.10) следует, что $\dfrac{k}{\mu_k} \le 2\omega(k)$ для всех k, $2^{k_j} \le k < 2^{k_{j+1}}$. С другой стороны, если $1 \le k < 2^{k_1}$, то $\dfrac{k}{\mu_k} \le 2 \le 2\omega(k)$. Этим доказывается первое неравенство условия (1.3). Для доказательства второго неравенства заметим, что

$$\sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le \sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad k \ge 2. \tag{1.11}$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] = \sum_{n=1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] + \sum_{n=2^\nu+1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right], \tag{1.12}$$

где $2^\nu \le k < 2^{\nu+1}$, $k_j \le \nu < k_{j+1}$, $j = 1, 2...$ и при $k = 2^\nu$ второе слагаемое в (1.12) отсутствует. В силу (1.6) и (1.7) имеем

$$A_3 = \sum_{n=2^\nu+1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] = \sum_{n=2^\nu+1}^{k} \exp\left[-\left(1 + \frac{k-n}{n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-2^\nu-1} \exp\left[-\left(1 + \frac{n}{k-n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu}\right] \le e^{-1} + \sum_{n=1}^{k-2^\nu} \exp\left[-\left(1 + \frac{n}{k-n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu}\right]. \tag{1.13}$$

Так как $n \le k - n \le 2^\nu$, то из неравенства $(1+\alpha)^{1/\alpha} \ge 2$ при $\alpha \le 1$ следует

$$\left(1 + \frac{n}{k-n}\right)^{2^\nu \varepsilon_\nu} > 2^{2^\nu \varepsilon_\nu \frac{n}{k-n}} > 2^{n\varepsilon_\nu}. \tag{1.14}$$

Легко видеть, что из (1.13) и (1.14) следует

$$A_3 \le e^{-1} + \sum_{n=1}^{k-2^\nu} \exp[-2^{n\varepsilon_\nu}] \le C_0 + \sum_{n=1}^{2^\nu} \exp[-2n\varepsilon_\nu] < \frac{C_1}{\varepsilon_\nu}. \tag{1.15}$$

Пусть

$$A_1 = \sum_{n=1}^{2^{\nu-1}} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad A_2 = \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right]. \tag{1.16}$$

Используя (1.8), получим

$$A_1 \le 1 + \sum_{j=0}^{\nu-2} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le 1 + \sum_{j=0}^{\nu-2} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \exp\left[-(2^{\nu-j-1})^j\right] \le$$

$$\le 1 + \sum_{j=0}^{\nu-2} 2^j 2^{-2^j} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} < C. \tag{1.17}$$

Далее,

$$A_2 = \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{2^{\nu-1}} \varepsilon_{\nu-1}\right] =$$

$$= \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-\left(1+\frac{2^\nu - n}{n}\right)^{\frac{n}{2^\nu-n} 2^{\nu-1}\varepsilon_{\nu-1}\frac{2^\nu-n}{n}}\right].$$

Из $\dfrac{2^\nu - n}{n} < 1$ имеем

$$\left(1+\frac{2^\nu-n}{n}\right)^{\frac{n}{2^\nu-n}} > 2.$$

Следовательно, получим

$$A_2 \le \sum_{n=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \exp\left[-2^{\varepsilon_{\nu-1}2^{\nu-1}\frac{2^\nu-n}{n}}\right] \le \sum_{n=0}^{2^{\nu-1}} \exp\left[-2^{\varepsilon_{\nu-1}n/2}\right] < \frac{C}{\varepsilon_{\nu-1}}, \tag{1.18}$$

где согласно (1.7), $\varepsilon_{\nu-1} \ge 2\varepsilon_\nu$. Суммируя (1.12), (1.13), (1.15) – (1.18), получим

$$\sum_{n=1}^{k} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le \frac{C_1}{\varepsilon_\nu}, \quad 2^\nu \le k < 2^{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots \tag{1.19}$$

Таким образом, из (1.5), (1.7), (1.11) и (1.19) вытекает (см. также (1.10))

$$\sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] \le C_2\omega(k), \quad k \ge 2.$$

Лемма 1 доказана.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty, \tag{2.1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на отрезке $[a, b]$. Для заданной последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.2), рассмотрим средние

$$T_{\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Ряды в правой части (2.2) сходятся почти всюду, и почти всюду на $[a, b]$ выполняются равенства

$$T_{\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(1)}(\mu_n) S_k(x), \quad T_{\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \Delta_k^{(2)}(\mu_n) \sigma_k(x), \tag{2.3}$$

где $S_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \varphi_j(x)$, $\sigma_k(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} S_j(x)$, $\Delta_k^{(2)}(\mu_n) = \Delta_k^{(1)}(\mu_n) - \Delta_{k+1}^{(1)}(\mu_n)$,

$$\Delta_k^{(1)}(\mu_n) = \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \exp\left[-\left(\frac{k+1}{n}\right)^{\mu_n}\right].$$

Равенства (2.3) получаются последовательным применением преобразования Абеля, которое возможно, поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \varphi_k^2(x) < \infty \quad \text{п.в. на } [a, b].$$

Следовательно

$$|S_m(x)| \le \sqrt{m+1} \sqrt{\sum_{k=0}^{m} a_k^2 \varphi_k^2(x)} = O(\sqrt{m}) \quad \text{п.в. на } [a, b].$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{m} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\left(\frac{k+1}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right) S_k(x) + \exp\left[-\left(\frac{m}{n}\right)^{\mu_n}\right] S_m(x),$$

откуда следует

$$\lim_{k\to\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] S_k(x) = 0 \quad \text{п.в. на } [a, b].$$

Из последних двух равенств следует первое равенство из (2.3). Второе равенство из (2.3) доказывается аналогично.

Линейный метод суммирования, определяемый матрицей $||a_{nk}||$, где $a_{nk} = \Delta_k^{(1)}(\mu_n)$ и μ_n удовлетворяют условиям (1.2), является положительным регулярным методом суммирования, обладающим свойством

$$\lim_{n\to\infty} \max_k |a_{nk}| = 0. \tag{2.4}$$

Действительно, имеем

$$\Delta_k^{(1)}(\mu_n) = \frac{1}{n}\mu_n \left(\frac{k+\theta}{n}\right)^{\mu_n - 1} \exp\left[-\left(\frac{k+\theta}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad 0 \le \theta \le 1, \tag{2.5}$$

и согласно (1.2) остается проверить, что функции $x^{\mu_n - 1}\exp[-x^{\mu_n}]$ равномерно ограничены на $[0,\infty)$. Максимум функции $x^{\mu_n-1}\exp[-x^{\mu_n}]$ достигается в точке $x_0 = (\mu_{n-1}/\mu_n)^{1/\mu_n}$. Следовательно

$$\max_x \left(x^{\mu_n - 1}\exp[-x^{\mu_n}]\right) \le \left(\frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right)^{(\mu_n - 1)/\mu_n} \le 1, \quad n \ge 1. \tag{2.6}$$

Теорема 1. Если средние $T_{\mu_n}(x)$ сходятся почти всюду для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (1.2), то ряд (2.1) сходится почти всюду.

Доказательство : Согласно (2.1) существует последовательность $\omega(k)$, удовлетворяющая условию (1.1) такая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \omega(k) < \infty. \tag{2.7}$$

В силу Леммы 1 существует последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая (1.2) и (1.3), где $\omega(k)$ удовлетворяет (2.7). Положим

$$Q_{n,\mu_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x),$$

$$R_{n,\mu_n}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k \varphi_k(x). \tag{2.8}$$

Ясно, что

$$||Q_{n,\mu_n}(x) - S_n||^2 = \int_a^b |Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right)^2 a_k^2,$$

$$||R_{n,\mu_n}(x)||^2 = \int_a^b R_{n,\mu_n}^2(x)\, dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right] a_k^2. \tag{2.9}$$

Так как $1 - e^{-x} \le x$, то получим

$$\|Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)\|^2 \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{2\mu_n} a_k^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{2\mu_n} \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 k^{2\mu_k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2\mu_k}}.$$

Имеем также

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2\mu_k}} \le \frac{1}{(2\mu_k - 1)(k-1)^{2\mu_k - 1}},$$

$$\frac{k^{2\mu_k}}{(2\mu_k - 1)(k-1)^{2\mu_k - 1}} = \frac{k}{2\mu_k - 1} \left[\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\right]^{(2\mu_k - 1)/(k-1)} \le$$

$$\le \frac{k}{2\mu_k - 1} \exp\left(\frac{2\mu_k - 1}{k-1}\right).$$

Учитывая (1.1) и (1.2), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)\|^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} \omega(k) a_k^2 < \infty. \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.10) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} (Q_{n,\mu_n}(x) - S_n(x)) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{2.11}$$

Используя (2.9), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|R_{n,\mu_n}(x)\|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 \sum_{n=1}^{k-1} \exp\left[-2\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right].$$

Следовательно, согласно выбору последовательности $\{\mu_n\}$ (см. второе неравенство в (1.3)), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|R_{n,\mu_n}(x)\|^2 \le \sum_{k=2}^{\infty} \omega(k) a_k^2 < \infty. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,\mu_n}(x) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{2.13}$$

Из (2.2), (2.8), (2.11) и (2.13) получим

$$\lim_{n\to\infty} (T_{\mu_n}(x) - S_n(x)) = 0 \quad \text{п.в. на } [a,b]. \tag{2.14}$$

Так как по условию Теоремы 1 средние $T_{\mu_n}(x)$ сходятся почти всюду при $n \to \infty$, то из (2.14) следует сходимость почти всюду на $[a,b]$ ряда (2.1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. **Если чезаровские средние $\sigma_k(x)$ ортогонального ряда (2.1) сходятся к $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$ со скоростью $O(1/k)$, т.е. для почти всех $x \in [a,b]$ существует постоянная $C(x) > 0$ такая, что**

$$|\sigma_k(x) - f(x)| \le \frac{C(x)}{k}, \quad k = 1,2,..., \tag{2.15}$$

то ряд (2.1) сходится почти всюду.

Доказательство : По Теореме 1 достаточно доказать, что из (2.15) следует почти всюду на $[a,b]$ сходимость средних $T_{\mu_n}(x)$ к $f(x)$, для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.2). Заметим, что вторая производная функции $\exp[-x^{\mu_n}]$ положительна справа от точки $x_n = ((\mu_n-1)/\mu_n)^{1/\mu_n}$, и отрицательна на $(0, x_n)$. Обозначив через k_n наибольшее натуральное число, для которого $k_n \le nx_n$, получим

$$\begin{cases} \Delta_k^{(2)}(\mu_n) \le 0 & \text{при} \quad k \le k_n - 2, \\ \Delta_k^{(2)}(\mu_n) \ge 0 & \text{при} \quad k \ge k_n + 1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Так как

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(2)}(\mu_n)(k+1)f(x),$$

то из (2.3), (2.15) и (2.16) получим

$$|T_{\mu_n}(x) - f(x)| \le C(x) \left(\sum_{k=0}^{k_n-2} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| + \left|\Delta_{k_n-1}^{(2)}(\mu_n)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\Delta_{k_n}^{(2)}(\mu_n)\right| + \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| \right). \tag{2.17}$$

Из (2.16) следует, что

$$\sum_{k=0}^{k_n-2} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| = \left|\Delta_0^{(1)} - \Delta_{k_n}^{(1)}(0)\right| =$$

$$= \left|1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \exp\left[-\left(\frac{k_n-1}{n}\right)^{\mu_n}\right] + \exp\left[-\left(\frac{k_n}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right|, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \left|\Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| = \left|\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \Delta_k^{(2)}(\mu_n)\right| =$$

$$= \left|\exp\left[-\left(\frac{k_n+1}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \exp\left[-\left(\frac{k_n+2}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right|. \tag{2.19}$$

С другой стороны, из (2.5) и (2.6) следует

$$\left|\Delta_k^{(1)}(\mu_n)\right| \le \frac{\mu_n}{n}, \quad k = 1,2,... \tag{2.20}$$

Из (2.17) – (2.20) получим

$$|T_{\mu_n}(x) - f(x)| \le 7C(x)\frac{\mu_n}{n},$$

где $\frac{\mu_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ согласно (1.2). Таким образом, для любой последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1.2), почти всюду на $[a,b]$ имеем $T_{\mu_n}(x) \to f(x)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В Теореме 1 исключительное множество меры нуль, на котором средние $T_{\mu_n}(x)$ могут расходиться, зависит от $\{\mu_n\}$. Кроме того, нетрудно видеть, что для числовых рядов Теорема 1 не верна. Например, расходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ суммируется к 1/2 одновременно всеми методами T_{μ_n}. Обозначим через A_n T_{μ_n} – средние указанного ряда. Имеем

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{n}\right)^{\mu_n}\right](-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left[-\left(\frac{2k}{n}\right)^{\mu_n}\right] - \right.$$

$$\left. - \exp\left[-\left(\frac{2k+1}{n}\right)^{\mu_n}\right]\right) = \mu_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\theta(n,k)}{n}\right)^{\mu_n - 1} \exp\left[-\left(\frac{\theta(n,k)}{n}\right)^{\mu_n}\right], \quad (2.21)$$

где $2k \le \theta(n,k) \le 2k+1$. Положим

$$\varphi_n(x) = (2x)^{\mu_n - 1}\exp[-(2x)^{\mu_n}], \quad \alpha_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n - 1}{\mu_n}\right)^{1/\mu_n},$$

и заметим, что $\varphi_n(x)$ возрастает на $(0, \alpha_n)$ и убывает на (α_n, ∞). С другой стороны, имеем $A_n = \mu_n I_n$, где

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}\varphi_n\left(\frac{\theta'(n,k)}{n}\right), \quad \theta'(n,k) = \frac{1}{2}\theta(n,k). \quad (2.22)$$

Так как $2k \le \theta(n,k) \le 2k+1$, то

$$\frac{k}{n} \le \frac{\theta'(n,k)}{n} \le \frac{k+1}{n}. \quad (2.23)$$

Далее, имеем

$$B_n = \int_0^{\infty} \varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{2\mu_n}, \qquad \max_{x\in(0,\infty)} |\varphi_n(x)| \le \varphi_n(\alpha_n) \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (2.24)$$

Обозначив через k_n наибольшее натуральное число k, для которого $k \le n\alpha_n$, получим

$$I_n = I'_n + I''_n + I'''_n, \quad B_n = B'_n + B''_n + B'''_n, \quad (2.25)$$

где

$$I'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k_n-1} \varphi_n\Big(\frac{\theta'(n,k)}{n}\Big), \quad I''_n = \frac{1}{n}\varphi_n\Big(\frac{\theta'(n,k_n)}{n}\Big), \quad I'''_n = \frac{1}{n}\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \varphi_n\Big(\frac{\theta'(n,k)}{n}\Big),$$

$$B'_n = \int_0^{(k_n-1)/n} \varphi_n(x)\,dx, \quad B''_n = \int_{(k_n-1)/n}^{(k_n+2)/n} \varphi_n(x)\,dx, \quad B'''_n = \int_{(k_n+2)/n}^{\infty} \varphi_n(x)\,dx.$$

Из (2.22) и (2.23) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|A_n - \frac{1}{2}\right| = \lim_{n\to\infty}|I_n - B_n|. \tag{2.26}$$

Достаточно доказать, что

$$|I_n - B_n| = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right), \tag{2.27}$$

Из (2.24) и (2.25) следует, что

$$|B_n - I_n| \le |B'_n - I'_n| + |B''_n| + |I''_n| + |B'''_n - I'''_n|, \tag{2.28}$$

и ввиду (2.24) получим

$$\begin{aligned} |B''_n| &\le \frac{3}{n}\max|\varphi_n(x)| \le \frac{3}{n} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right), \\ |I''_n| &\le \frac{1}{n}\max|\varphi_n(x)| \le \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Так как функция $\varphi_n(x)$ убывает на интервале $(k_n+1)/n, \infty)$, то из равенств (2.25) следует

$$I'''_n - \frac{1}{n}\varphi_n\left(\frac{\theta'(n,k_n+1)}{n}\right) \le B'''_n \le I'''_n,$$

и поэтому

$$|I'''_n - B'''_n| \le \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\mu_n}\right). \tag{2.30}$$

Так как на интервале $(0,\alpha_n)$ функция $\varphi_n(x)$ возрастает, то

$$I'_n - \frac{1}{n}\varphi_n\left(\frac{\theta'(n,k_n-1)}{n}\right) \le \int_0^{(k_n-2)/n} \varphi_n(x)\,dx \le I'_n.$$

Следовательно

$$\left|I'_n - \int_0^{(k_n-2)/n} \varphi_n(x)\,dx\right| \le \frac{1}{n}. \tag{2.31}$$

Так как

$$\left|B'_n - \int_0^{(k_n-2)/n} \varphi_n(x)\,dx\right| = \int_{(k_n-2)/n}^{(k_n-1)/n} \varphi_n(x)\,dx \le \frac{1}{n}, \tag{2.32}$$

то из (2.31), (2.32) получим

$$|I'_n - B'_n| \le \frac{2}{n}. \tag{2.33}$$

Из (2.28) – (2.30) и (2.33) вытекает (2.27).

Замечание 2. Следуя Д. Е. Меньшову, линейные регулярные методы суммирования матрицы $||a_{nk}||$, которые удовлетворяют условию (2.4), будем называть T'-методами.

Теорема 3 (Д. Е. Меньшов [1]). **Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на отрезке $[a,b]$, и $M = M(T')$ – любое счетное множество T'-методов. Существует перестановка $\{\varphi_{\nu(n)}(x)\}$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что любой ряд**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_{\nu(k)}(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \tag{2.34}$$

суммируется почти всюду на $[a,b]$ одновременно всеми методами, принадлежащими множеству M.

В Теореме 3 перестановка $\nu(n)$ натурального ряда такова, что если $\{\varphi_n(x)\}$ является системой расходимости, то $\{\varphi_{\nu(n)}(x)\}$ также является системой расходимости. Поэтому, вообще говоря, ряд (2.34) расходится на множестве положительной меры.

Как было показано выше, методы T_{μ_n} при $\mu_n = o(n)$ являются T'-методами. Следовательно, из Теорем 1 и 3 получим, что для заданного счетного множества M методов T_{μ_n} существует ортогональный ряд (2.1), суммируемый почти всюду одновременно всеми методами из множества M. Вместе с тем, этот ряд не суммируется почти всюду всеми методами T_{μ_n}.

Замечание 3. Для числовых рядов Теорема 2 не верна, поскольку чезаровские средние σ_n частичных сумм расходящегося ряда $\sum(-1)^k$ сходится к 1/2 со скоростью $O(1/n)$.

ABSTRACT. The paper describes a class of linearly regular methods of summation possessing the property : almost everywhere summability of an orthogonal series simultaneous by all methods of the class yields almost everywhere convergence of the series. Summability of numerical series by all methods of the class does not necessarily yield convergence of a series.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "Суммирование рядов по ортогональным функциям линейными методами", Изв. АН СССР, серия Математика, стр. 203 – 207, 1937.

2 июня 1999

Институт математики
НАН Армении

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

М. П. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 4, 2000

В статье исследуется единственность почти всюду сходящихся рядов по общей системе Франклина.

Определение 1. Квазидвоичным разбиением отрезка $[0,1]$ называется последовательность $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ конечных подмножеств $\mathcal{P}_j = \{t_{j,i} : 0 \leq i \leq 2^j\}$, где $\mathcal{P}_0 = \{0;1\}$; $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$ для всех $j \geq 0$; $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < \ldots < t_{j,2^j} = 1$ и $t_{j+1,2k} = t_{j,k}$, когда $j \geq 0$, $k = 0, \ldots, 2^j$, т.е. $\mathcal{P}_{j+1}$ получается из $\mathcal{P}_j$ добавлением по одной точке из каждого интервала $(t_{j,k-1}; t_{j,k})$ для всех $k = 1, \ldots, 2^j$. Точки множества $\mathcal{P}_{j+1} \setminus \mathcal{P}_j$ называются точками порядка $j+1$.

Положим $I_{j,k} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$; $\mathcal{I}_j = \{I_{j,k} : 1 \leq k \leq 2^j\}$ и $\mathcal{I} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j$. Элементы множества $\mathcal{I}_j$ называются интервалами порядка j. Положим также $\tau_0 = t_{0,0} = 0$, $\tau_1 = t_{0,1} = 1$ и при $n = 2^j + k$, $k = 1, 2, \ldots, 2^j$, $\tau_n = t_{j+1,2k-1}$, так что $\{\tau_n : n \geq 0\} = \{t_{j,i} : j \geq 0; 0 \leq i \leq 2^j\}$.

Пусть $S_n = \{f \in C[0,1] : \; f''(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin \{\tau_k\}_{k=0}^{n}\}$ - линейное пространство кусочно-линейных функций. Тогда размерность S_n равна $n+1$, $S_n \subset S_{n+1}$, а коразмерность $[S_{n+1} : S_n] = 1$. Следовательно, существует единственная функция $f_{n+1} \in S_{n+1}$ такая, что $f_{n+1} \perp S_n$ в смысле $L_2(0,1)$, $\|f_{n+1}\|_{L_2(0,1)} = 1$ и $f_{n+1}(\tau_{n+1}) > 0$. Положим $f_0 \equiv 1$.

Определение 2. Система функций $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ называется общей системой Франклина, соответствующей квазидвоичному разбиению $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$.

Обозначим через $\lambda_{j,k} = |I_{j,k}| = t_{j,k} - t_{j,k-1}$. Для $n = 2^j + k$, $k = 1, \ldots, 2^j$ обозначим через $\langle n \rangle = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$ и $[n] = j$. $\langle n \rangle$ называется интервалом пика функции f_n.

Определение 3. Квазидвоичное разбиение $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$ называется сильно регулярным, если существует $\gamma \geq 1$ такое, что

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{j,k+1}}{\lambda_{j,k}} \leq \gamma \quad \text{для всех} \quad k = 1, ..., 2^j - 1 \quad \text{и} \quad j \geq 0.$$

Через $C_0, C_1, C_2, ...$ обозначим абсолютные постоянные, а через E^c – множество $[0,1] \setminus E$. Для ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, f_k(x)$ обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, f_k(x)$ и $S^*(x) = \sup_n |S_n(x)|$. В [1] доказано, что если точки разбиения $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ всюду плотны в $[0,1]$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, f_k(x)$ – ряд Фурье по общей системе Франклина функции $f \in L_1(0,1)$, то

$$S_n(f,x) \to f(x) \tag{1}$$

п.в. на $[0,1]$ при $n \to +\infty$ и

$$\sup_n \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k(x)\Big| \leq C \cdot \mathcal{M}(f,x), \tag{2}$$

где $\mathcal{M}(f,x)$ – максимальная функция Харди–Литтлвуда (см., например, [2]), а C – абсолютная постоянная.

Нам нужна следующая оценка (см. [3]) : если $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{f_n(x)\}$ – соответствующая общая система Франклина, то

$$\|f_n\|_\infty \leq C_0 \sqrt{|\{n\}|^{-1}}. \tag{3}$$

Как увидим ниже, п.в. сходимость частичных сумм $S_n(x)$ не гарантирует единственности ряда. Следовательно, для получения теорем единственности для п.в. сходящихся рядов по общей системе Франклина нужны дополнительные условия на ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, f_k(x)$. Ниже приводится условие на функцию распределения мажоранты $S^*(x)$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, f_k(x)$.

Прежде, чем перейти к формулировкам теорем, рассмотрим следующий пример. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – классическая система Франклина. Тогда имеет место следующая оценка :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_n(0)\, f_n(x)\right| \leq C_1 \cdot n \cdot q^{n \cdot x}, \tag{4}$$

где $0 < q < 1$.

Действительно, поскольку $\sum_{k=0}^{n} f_n(t)\, f_n(x) = K_n(t,x)$ – ядро Дирихле, то имеем $K_n(t,x) \leq C_1 \cdot n \cdot q^{n \cdot |t-x|}$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(0)\, f_n(x)$ имеет сумму нуль всюду, кроме точки $x = 0$. Легко проверить, что из (4) следует

$$\mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = O(\frac{1}{\lambda}). \tag{5}$$

Впредь мы будем рассматривать только сильно регулярные квазидвоичные разбиения отрезка $[0,1]$.

Теорема 1. Если $S_n(x) \to f(x)$ п.в. на $[0,1]$ и

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = 0, \tag{6}$$

то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ – ряд Фурье функции f.

Из (5) следует, что (6) – минимальное условие на функцию распределения мажоранты ряда, обеспечивающее единственность ряда.

Теорема 1 следует из более общего утверждения.

Теорема 2. Пусть $S_n(x)$ сходится п.в. к функции $f(x)$ при $n \to \infty$, $\lambda_k \uparrow +\infty$ и $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda_k\}) = 0$. Тогда $\lim_{k \to +\infty} \int_0^1 [f(x) \cdot f_n(x)]_{\Lambda_k^{(n)}} dx = a_k$, где

$$[g(t)]_\lambda = \begin{cases} g(t), & \text{когда} \quad |g(t)| \le \lambda, \\ 0, & \text{когда} \quad |g(t)| > \lambda, \end{cases} \qquad \Lambda_k^{(n)} = C_0 \cdot \lambda_k \cdot \sqrt{|\{n\}|^{-1}},$$

с постоянной C_0 из (3).

Напомним, что функция $g(x)$ называется A-интегрируемой на $[0,1]$, если $\mu(\{t \in [0,1] : |g(t)| > \lambda\}) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и существует $\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^1 [g(t)]_\lambda dt = (A) \int_0^1 g(t)\, dt$. Отметим, что из условия

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = 0 \tag{7}$$

следует п.в. сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ (см. [4]). Следовательно, из Теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ удовлетворяет условию $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu(\{x : S^*(x) > \lambda\}) = 0$, то он является рядом Фурье по общей системе Франклина некоторой функции $f(x)$ в смысле A-интегрирования.

Известно (см. [5]), что если $f \in L_1(0,1)$, то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mu(\{x : \mathcal{M}(f,x) > \lambda\}) = 0. \tag{8}$$

Следовательно, из (1) – (4) и Теоремы 1 вытекает

Теорема 4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ является рядом Фурье по общей системе Франклина функции $f \in L_1(0,1)$ тогда и только тогда, когда выполняются

следующие условия : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1]$ и $\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\,\mu(\{x\in[0,1]: S^*(x) > \lambda\}) = 0$.

Теоремы 1 – 4 являются обобщениями теорем Г. Г. Геворкяна [6] для классической системы Франклина.

Для доказательства Теоремы 2 нам понадобятся несколько лемм.

Положим $E_\lambda = \{t\in[0,1]: S^*(t) > \lambda\}$ и $B_\lambda = \{x\in[0,1]: \mathcal{M}^*(\chi_{E_\lambda}, x) > 1/2\}$, где

$$\mathcal{M}^*(f,x) = \sup_{\substack{I\ni x\\ I\in\mathcal{I}}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(t)|\,dt.$$

Ясно, что $E_\lambda \subset B_\lambda$ и $\mu(B_\lambda) \le 2\cdot\mu(E_\lambda)$.

Лемма 1. Для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{B_\lambda^c} \sup_N \Big|\sum_{\substack{\langle n\rangle\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)\Big|\,dt \le C_2\,\lambda\,\mu(E_\lambda). \tag{9}$$

Лемма 2. Для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\int_{B_\lambda} \sup_N \Big|\sum_{\substack{\langle n\rangle\not\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)\Big|\,dt \le C_3\,\lambda\,\mu(E_\lambda). \tag{10}$$

Доказательство Леммы 1 : Положим $\mathcal{N}_1^\lambda = \{n\in N: \langle n\rangle \subset B_\lambda\}$ и $\mathcal{N}_2^\lambda = N\setminus\mathcal{N}_1^\lambda$, где N – множество неотрицательных целых чисел. Пусть $n\in\mathcal{N}_2^\lambda$, тогда $\|a_n\, f_n(x)\|_\infty \le C_4\cdot\lambda$. Действительно, из $n\in\mathcal{N}_2^\lambda$ получим $\langle n\rangle \not\subset B_\lambda$, и поэтому $\mu(\langle n\rangle\cap E_\lambda) < \frac{1}{2}\mu(\langle n\rangle)$. Кроме того, на множестве E_λ^c имеем $\sup_N|\sum_{n=0}^N a_n\, f_n(t)| \le \lambda$, и, следовательно, $|a_n\, f_n(t)| \le 2\cdot\lambda$, когда $t\in E_\lambda^c$. С точностью до счетного множества точек имеем $B_\lambda = \bigcup_{k,j} I_k^{(j,\lambda)}$, где $I_k^{(j,\lambda)}$ – квазидвоичный интервал порядка k (см. [4]). Положим

$$\varphi_1^\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad t\notin B_\lambda,\\ \sum_{\substack{\langle n\rangle\cap I_{k_0}^{(j,\lambda)}\neq\emptyset\\ [n]\ge k_0\\ n\in\mathcal{N}_2^\lambda}} |a_n\, f_n(t)|, & \text{когда} \quad t\in I_{k_0}^{(j,\lambda)}.\end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^1 \varphi_1^\lambda(t)\,dt = \sum_{k_0,j}\int_{I_{k_0}^{(j,\lambda)}} \sum_{\substack{\langle n\rangle\cap I_{k_0}^{(j,\lambda)}\neq\emptyset\\ [n]\ge k_0\\ n\in\mathcal{N}_2^\lambda}} |a_n\, f_n(t)| \le C\cdot\lambda\cdot\sum_{k_0,j}\mu(I_{k_0}^{(j,\lambda)}) = C\cdot\lambda\cdot\mu(B_\lambda).$$

Представим множество B_λ в виде $B_\lambda = \bigcup_{q=1}^\infty I_q$, где интервалы I_q не имеют общих концов. Зафиксируем некоторое q и рассмотрим наибольший квазидвоичный интервал, содержащийся в I_q. Пусть это будет интервал I_{j,k_0}. Через $I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$ обозначим наибольший интервал с концами порядка k, содержащийся в I_q. Положим

$$S_{j_0,k_0,k,m}(t) = \sum_{\substack{(n)\subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}\\ [n]=k\\ n\le m}} a_n\, f_n(t) = \sum_{\substack{(n)\subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}\\ [n]=k\\ n\in \mathcal{N}_2^\lambda\\ n\le m}} a_n\, f_n(t).$$

Последнее равенство выполняется, поскольку если существует $n \in \mathcal{N}_2^\lambda$ такое, что $\{n\} \subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$, то $\{n\} \not\subset B_\lambda$. Это противоречит условиям $\{n\} \subset I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$ и $I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)} \subset B_\lambda$.

Следовательно, $|S_{j_0,k_0,k,m}(t)| \le C_8 \cdot \lambda$ при $t \in J$, где J – интервал порядка k, ближайший к $I_{k_0,k}^{(j_0,\lambda)}$ справа (см. [4]). Пусть

$$\varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad x \in I_{k_0}^{(j,\lambda)}, \\ \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & \text{при} \quad x \in I_{k_0,p}^{(j,\lambda)} \setminus I_{k_0,p-1}^{(j,\lambda)} \ (p > k_0) \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & \text{где} \quad x \notin \cup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j,\lambda)}. \end{cases}$$

Тогда $\int_0^1 \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(x)\,dx \le C \cdot \lambda \cdot \mu(I_{k_0}^{(j,\lambda)})$.

Имеем также $\sup_N |\sum_{\substack{(n)\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)$ при $t \notin B_\lambda$. Тогда

$$\int_{B_\lambda^c} \sup_N |\sum_{\substack{(n)\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)|\,dt \le \int_{B_\lambda^c} \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)\,dt \le$$

$$\le \int_0^1 \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)\,dt \le C \cdot \lambda \cdot \sum_{k_0,j} \mu(I_{k_0}^{(j,\lambda)}) = C \cdot \lambda \cdot \mu(B_\lambda).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2 : В [1] доказано, что $|\sum_{\substack{(n)\not\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le C\cdot\lambda + \varphi_1(\lambda)(t) + \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)$ при $t \in B_\lambda$. Следовательно

$$\sup_N |\sum_{\substack{(n)\not\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le C\cdot\lambda + \varphi_1(\lambda)(t) + \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j,\lambda)}(t)$$

при $t \in B_\lambda$, т.е.

$$\int_{B_\lambda} \sup_N |\sum_{\substack{(n)\not\subset B_\lambda\\ n\le N}} a_n\, f_n(t)| \le C_{10} \cdot \lambda \cdot \mu(B_\lambda).$$

Доказательство Теоремы 2 : Пусть $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k \cdot \mu(\{t \in [0,1] : S^*(t) > \lambda_k\}) = 0$ и $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to +\infty$ п.в. на $[0,1]$. Тогда

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\,dt = \int_{B_{\lambda_k}} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\,dt + \int_{B_{\lambda_k}^c} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\,dt,$$

где $\Lambda_k^{(n)} := C_0 \cdot \lambda_k \cdot |\{n\}|^{-\frac{1}{2}}$. Имеем

$$\left|\int_{B_{\lambda_k}} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt\right| \le \Lambda_k^{(n)} \cdot \mu(B_{\lambda_k}) \le C_0 \cdot \lambda_k \cdot |\{n\}|^{-1/2} \cdot \mu(B_{\lambda_k}) \le$$
$$\le C_0 \cdot \lambda_k \cdot |\{n\}|^{-1/2} \cdot \mu(E_{\lambda_k}) \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Следовательно

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_{B^c_{\lambda_k}} [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}} dt + o(1), \quad k \to +\infty. \tag{11}$$

При $x \in B^c_{\lambda_k}$ имеем $x \in E^c_{\lambda_k}$ (поскольку из $E_\lambda \subset B_\lambda$ вытекает $B^c_\lambda \subset E^c_\lambda$), следовательно, $\sup_N |\sum_{n=0}^N a_n\, f_n(x)| \le \lambda_k$, и наконец, $|f(x)| \le \lambda_k$. С другой стороны, $|f_n(t)| < C_0 \cdot |\{n\}|^{-1/2}$ для любого n, и из (11) получим

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_{B^c_{\lambda_k}} f(t)\, f_n(t)\, dt + o(1), \quad k \to +\infty. \tag{12}$$

Действительно, на множестве $B^c_{\lambda_k}$ имеем $f \cdot f_n = [f \cdot f_n]_{\Lambda_k^{(n)}}$ (если $x \in B^c_{\lambda_k}$, то $|f(x)\, f_n(x)| \le \lambda_k \cdot C_0 \cdot |\{n\}|^{-1/2} = \Lambda_k^{(n)}$). Учитывая Лемму 1, из (12) получим

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_{B^c_{\lambda_k}} \{ \sum_{\{m\}\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t) + \sum_{\{m\}\not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)\} \cdot f_n(t)\, dt +$$
$$+ o(1) = \int_{B^c_{\lambda_k}} (\sum_{\{m\}\not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)) \cdot f_n(t)\, dt + o(1).$$

Из Леммы 2 следует, что

$$\int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{\{m\}\not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t) \right) \cdot f_n(t) dt + o(1).$$

Так как ряд $\sum_{\{m\}\not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)$ имеет интегрируемую мажоранту, то он является рядом Фурье–Франклина некоторой интегрируемой функции. Следовательно, взяв k достаточно большим, будем иметь $\{m\} \not\subset B_{\lambda_k}$. Таким образом, получим

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 [f(t)\, f_n(t)]_{\bar\Lambda_k^{(n)}}\, dt = \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 (\sum_{\{m\}\not\subset B_{\lambda_k}} a_m\, f_m(t)) \cdot f_n(t)\, dt = a_n.$$

Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates uniqueness of a.e. convergent series by general Franklin system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projection onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 — 143, 1997.
2. Б. Кашин, А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.
3. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae, CCCLXXIV, 1998.
4. М. П. Погосян, "Критерий почти всюду сходимости рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, Математика, том 35, № 2, стр. 61 — 73, 2000.
5. М. Гусман, Дифференцирование Интегралов в $\mathbb{R}^n$", Мир, Москва, 1973.
6. Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. заметки, том 59(4), стр. 521 — 545, 1996.
7. Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", Analysis Math., том 16, стр. 87 — 114, 1990.

15 марта 2000

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35 НОМЕР 4 2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

СХОДИМОСТЬ, СУММИРУЕМОСТЬ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И БАЗИСНОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Сборник статей

Страницы