ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

КВАЗИПОЛИНОМЫ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

В вещественном и комплексном анализах хорошо известна теорема Мюнца о плотности множества квазиполиномов в пространстве $C_R[a, b]$ непрерывных, действительнозначных функций на замкнутом интервале $[a, b]$, $a \geq 0$. В настоящей статье исследуются версии теоремы Мюнца в случае, когда квазиполиномиальные коэффициенты берутся из заданной возрастающей последовательности положительных чисел.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Конечная сумма $p(x) = \sum_{n=0}^m p_n x^{\lambda_n}$ с произвольными вещественными коэффициентами p_n, $n = 0, 1, \ldots, m$ называется **квазиполиномом** по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty$ ($\lambda_0 = 0$, $x \geq 0$). Обозначим через $C_R[a, b]$ подпространство $C[a, b]$, состоящее из всех вещественнозначных функций. По известной теореме Мюнца [7], множество всех квазиполиномов по системе $\{x^{\lambda_n}\}_0^\infty$ плотно в $C_R[a, b]$ ($a \geq 0$) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty. \tag{1}$$

Возникает естественный вопрос относительно версий теоремы Мюнца при различных ограничениях на коэффициенты p_n. В настоящей статье рассматривается случай, когда эти коэффициенты берутся из множества $\{\pm a_n\}_1^\infty$, где $\{a_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty, \quad a_{n+1} - a_n \leq M, \tag{2}$$

где $M > 0$ – постоянная. Частный случай этой задачи, когда $\{a_n\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ есть множество всех натуральных чисел) был рассмотрен в [1], [4], [5], [8].

Основными результатами являются Теоремы 1 – 4, касающиеся аппроксимаций в $C^*_R[a,b]$ = функции $f \in C_R[a,b]$, удовлетворяющие условию $f(0) = f(1) = 0$, если $[a,b] \cap \{0,1\}) \neq \emptyset$. Заметим, что $C^*_R[a,b] = C_R[a,b]$, если $[a,b] \cap \{0,1\} = \emptyset$. Теорема 4 обобщает и усиливает некоторые результаты из [2], [4].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (1). Тогда системы функций

$$\left\{x^{\lambda_{2n-1}} - x^{\lambda_{2n}}\right\}_1^\infty \quad \text{и} \tag{3}$$

$$\left\{x^{\lambda_{2n}} - x^{\lambda_{2n+1}}\right\}_1^\infty \tag{4}$$

плотны в пространстве $C^*_R[0,b]$ для каждого $b \geq 1$.

Доказательство : Дадим доказательство для системы (3), случай системы (4) доказывается аналогично. Пусть ν – функция ограниченной вариации, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^b (x^{\lambda_{2n-1}} - x^{\lambda_{2n}})\, d\nu(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

В полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ рассмотрим голоморфную функцию

$$\varphi(z) = \int_0^b x^z\, d\nu(x). \tag{5a}$$

Из (5) следует, что $\varphi(\lambda_{2n-1}) = \varphi(\lambda_{2n})$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, существуют числа $\mu_n \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ такие, что

$$\varphi'(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Так как последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ монотонна, то из (1) получим

$$\sum_{n=1}^\infty \mu_n^{-1} = \infty. \tag{7}$$

При $\operatorname{Re} z > 0$ имеем неравенство

$$\left|x^{\operatorname{Re} z} \log x\right| \leq \frac{1}{e \operatorname{Re} z}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда производная $\varphi'(z) = \int_0^b x^z \log x\, d\nu(x)$ является голоморфной функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|\varphi'(z)| \leq C(\delta, b) b^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z \geq \delta \in (0, \lambda_1), \tag{8}$$

где постоянная $C(\delta, b) \geq 1$ не зависит от z. По теореме единственности ограниченных функций, голоморфных в полуплоскости, из (6) - (8) следует $\varphi'(z) \equiv 0$ при $\operatorname{Re} z \geq \delta$. Следовательно, по теореме единственности аналитических функций, получим $\varphi'(z) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Таким образом

$$\varphi(z) \equiv C_1, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{9}$$

Положив в (9) $\operatorname{Im} z = 0$ и перейдя к пределу под знаком интеграла при $\operatorname{Re} z \to +0$, получим $\int_0^b d\nu(x) = C_1$. Итак, (9) запишется в виде $\int_0^b (x^z - 1)\, d\nu(x) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Так как система $\{x^n - 1\}_1^\infty$ плотна в $C_R^*[0, b]$, то доказательство Леммы 1 следует из Теорем Хана–Банаха и Рисса.

Лемма 2. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=2i-1}^{2n+1}$ – положительные числа, причем $\lambda_{2i-1} < \lambda_{2i} < \ldots < \lambda_{2n} < \lambda_{2n+1}$. Для $i = 1, \ldots, n-1$ положим

$$A_{i,n} = \min_{\{c_j\}_{j=i+1}^n} \left\| x^{\lambda_{2i-1}} - x^{\lambda_{2i}} - \sum_{j=i+1}^n c_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\|,$$

$$B_{i,n} = \min_{\{c_j\}_{j=i+1}^n} \left\| x^{\lambda_{2i}} - x^{\lambda_{2i+1}} - \sum_{j=i+1}^n c_j (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j+1}}) \right\|,$$

где $\{c_j\}_{j=i+1}^n$ – вещественные числа, а $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $C_R^*[0, b]$, $b \geq 1$. Тогда справедливы неравенства

$$A_{i,n} \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\lambda_{2i}} \exp\left\{ -(\lambda_{2i-1} - \delta) \sum_{j=i+1}^n \lambda_{2j}^{-1} \right\},$$

$$B_{i,n} \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i+1} - \lambda_{3i}) b^{\lambda_{2i+1}} \exp\left\{ -(\lambda_{2i} - \delta) \sum_{j=i+1}^n \lambda_{2j+1}^{-1} \right\},$$

где $\delta \in (0, \lambda_1)$ – произвольное число.

Доказательство : Докажем первую оценку (вторая доказывается аналогично). Как показано в [3], стр. 25, имеем

$$A_{i,n} = \sup_{\{\nu\}} A_{i,n}(\nu), \quad A_{i,n}(\nu) = \left| \int_0^b (x^{\lambda_{2i-1}} - x^{\lambda_{2i}})\, d\nu(x) \right|,$$

где ν – функция ограниченной вариации, для которой

$$\nu(0) = \nu(1) = 0, \quad \int_0^b |d\nu| \leq 1, \quad \int_0^b (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\, d\nu(x) = 0, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

Рассмотрим функцию (5a). Рассуждая как и в доказательстве Леммы 1, получим неравенство (8). Следовательно, $\varphi'(z)b^{-z} = B(z)f(z)$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, где $B(z) = \prod_{j=i+1}^{n} \frac{z-\mu_j}{z+\mu_j}$, а $f(z)$ голоморфна в $\mathrm{Re}\, z > 0$. Так как

$$|B(\delta+iy)|^2 = \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(\mu_j-\delta)^2+y^2}{(\mu_j+\delta)^2+y^2} \geq \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(\mu_j-\delta)^2}{(\mu_j+\delta)^2}, \quad y \in [-\infty, +\infty],$$

то получим

$$|f(z)| \leq C(\delta, b) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j+\delta}{\mu_j-\delta}, \qquad \mathrm{Re}\, z \geq \delta.$$

Отсюда следует, что

$$|\varphi'(z)| \leq C(\delta, b) b^{\,\mathrm{Re}\, z} |B(z)| \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j+\delta}{\mu_j-\delta}, \qquad \mathrm{Re}\, z \geq \delta. \tag{10}$$

Имеем

$$A_{i,n}(\nu) = |\varphi(\lambda_{2i-1}) - \varphi(\lambda_{2i})| = |\varphi'(\theta_i)|(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}), \quad \theta_i \in (\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}).$$

Используя (10) и элементарное неравенство $1 - x \leq e^{-x}$, $x \geq 0$, получим

$$A_{i,n}(\nu) \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\theta_i} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(\mu_j+\delta)(\mu_j-\theta_i)}{(\mu_j-\delta)(\mu_j+\theta_i)} \leq$$

$$\leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\theta_i} \exp\left\{-2 \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\mu_j(\theta_i - \delta)}{(\mu_j-\delta)(\mu_j+\theta_i)}\right\}.$$

Следовательно

$$A_{i,n}(\nu) \leq C(\delta, b)(\lambda_{2i} - \lambda_{2i-1}) b^{\lambda_{2i}} \exp\left\{-(\lambda_{2i-1} - \delta) \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_{2j}^{-1}\right\}.$$

Остается отметить, что правая часть последнего неравенства не зависит от ν. Лемма 2 доказана.

Для функции $f \in C_R^*[0, b]$, $b \geq 1$ положим

$$E_n(f) = \min_{\{c_j\}_1^n} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\|,$$

$$E_n^*(f) = \min_{\{c_j\}_1^n} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j+1}}) \right\|,$$

где $\{c_j\}_1^n$ – вещественные числа.

Лемма 3. **Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям (1), а r, s $(r < s)$ – произвольные натуральные числа. Для произвольной функции $f \in C_R^*[0, b]$, $b \geq 1$ и $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{2s}$ существуют числа $b_1, \ldots, b_s$ такие, что $\{|b_i|\}_1^s \subset \{a_n\}_1^\infty$ и**

$$\left\|f(x) - \sum_{j=1}^{s} b_j(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right\| \leq E_s(f) + M\sum_{i=1}^{r} A_{i,s} +$$

$$+M\max\left\{\frac{\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}}{\lambda_{2s}}, (\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1})b^{\lambda_{2s}}\log b\right\},$$

$$\left\|f(x) - \sum_{j=1}^{s} b_j(x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j+1}})\right\| \leq E_s^*(f) + M\sum_{i=1}^{r} B_{i,s} +$$

$$+M\max\left\{\frac{\lambda_{2s+1} - \lambda_{2r+2}}{\lambda_{2s+1}}, (\lambda_{2s+1} - \lambda_{2r+2})b^{\lambda_{2s+1}}\log b\right\}.$$

Доказательство : Пусть $c_j(i, s)$ – последовательность, на которой $A_{i,s}$ достигает своего максимума, а $c_{j,0}$ – последовательность на которой $E_s(f)$ достигает своего максимума, т.е.

$$A_{i,s} = \left\|x^{\lambda_{2i-1}} - x^{\lambda_{2i}} - \sum_{j=i+1}^{s} c_j(i, s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right\|,$$

$$E_s(f) = \left\|f(x) - \sum_{j=1}^{s} c_{j,0}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right\|.$$

Определим числа $b_1, \ldots, b_r$ по индукции. Обозначим через b_1 ближайший элемент к числу $c_{1,0}$ из последовательности $\{\pm a_n\}_1^\infty$. Далее

$$c_{j,1} = c_{j,0} + (c_{1,0} - b_1)c_j(1, s), \quad 2 \leq j \leq s.$$

Тогда

$$\left\|f(x) - b_1(x^{\lambda_1} - x^{\lambda_2}) - \sum_{j=2}^{s} c_{j,1}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right\| =$$

$$= \left\|f(x) - \sum_{j=1}^{s} c_{j,0}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) + (c_{1,0} - b_1)\left(x^{\lambda_1} - x^{\lambda_2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=2}^{s} c_j(1, s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right)\right\| \leq \left\|f(x) - \sum_{j=1}^{s} c_{j,0}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right\| +$$

$$+\left\|(c_{1,0} - b_1)\left(x^{\lambda_1} - x^{\lambda_2} - \sum_{j=2}^{s} c_j(1, s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}})\right)\right\| \leq E_s(f) + MA_{1,s}.$$

Пусть $b_1, \dots, b_k$ определяются из условия

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{k} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) - \sum_{j=k+1}^{s} c_{j,k}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{k} A_{j,s}.$$

Обозначим через b_{k+1} элемент из $\{\pm a_n\}_1^\infty$, ближайший к числу $c_{k+1,k}$, и положим $c_{j,k+1} = c_{j,k} + (c_{k+1,k} - b_{k+1}) c_j(k+1, s)$, $k+2 \le j \le s$. Тогда

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{k+1} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) - \sum_{j=k+2}^{s} c_{j,k+1}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| =$$

$$= \Bigg\| f(x) - \sum_{j=1}^{k} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) - \sum_{j=k+1}^{s} c_{j,k}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) -$$

$$-b_{k+1}(x^{\lambda_{2(k+1)-1}} - x^{\lambda_{2(k+1)}}) + c_{k+1,k}(x^{\lambda_{2(k+1)-1}} - x^{\lambda_{2(k+1)}}) -$$

$$-(c_{k+1,k} - b_{k+1}) \sum_{j=k+2}^{s} c_j(k+1, s)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \Bigg\| \le$$

$$\le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{k} A_{j,s} + M A_{k+1,s} = E_s(f) + M \sum_{j=1}^{k+1} A_{j,s}.$$

Таким образом, числа $b_1, \dots, b_r$ определены. Теперь определим $b_{r+1}, \dots, b_s$. Обозначим через b_j, $j = r+1, \dots, s$ элемент из последовательности $\{\pm a_n\}_1^\infty$, ближайший к числу $c_{j,r}$. Так как при $x \in [0, 1]$

$$\left\| \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| = \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \le x^{\lambda_{2r+1}} - x^{\lambda_{2s}} \le \frac{\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}}{\lambda_{2s}},$$

а при $x \in (1, b]$

$$\left\| \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| = \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j}} - x^{\lambda_{2j-1}}) \le$$

$$\le x^{\lambda_{2s}} - x^{\lambda_{2r+1}} \le (\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}) b^{\lambda_{2s}} \log b,$$

то имеем

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| = \Bigg\| f(x) - \sum_{j=1}^{r} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) -$$

$$- \sum_{j=r+1}^{s} c_{j,r}(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) + \sum_{j=r+1}^{s} (c_{j,r} - b_j)(x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \Bigg\| \le$$

$$\le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{r} A_{j,s} + M \left\| \sum_{j=r+1}^{s} (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \le$$

$$\le E_s(f) + M \sum_{j=1}^{r} A_{j,s} + M \max\left\{ \frac{\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}}{\lambda_{2s}}, (\lambda_{2s} - \lambda_{2r+1}) b^{\lambda_{2s}} \log b \right\}.$$

Лемма 3 доказана.

следует оценка

$$\|f\|_2 \le \left\| J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})f \right\|_2 + \left\| \frac{\widetilde{f}(\xi)}{1+|\xi_1|^{2m_1}\cdots|\xi_n|^{2m_n}} \right\|_2 .$$

Следовательно, если $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})f = 0$, то $f = 0$. Кроме того, оператор (1.10) – самосопряжен. Так как ограниченный самосопряженный инъективный оператор всегда имеет плотную область изменения, то заключаем, что $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})L_2$ плотно в L_2. Легко видеть, что $(I+J_{\mathcal{A},m})L_2$ является пространством Волевича-Панеяха (см. [12]), а функции из C_0^∞ плотны в нем [12]. Множество $J^{-1}_{\mathcal{A},m}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в L_2 по норме $L_2(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$J^{-1}_{\mathcal{A},m} = J_{\mathcal{A}} D_1^{2m_1}\cdots D_n^{2m_n}, \tag{1.11}$$

где $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ – обобщенные производные. Так как $D_1^{2m_1}\cdots D_n^{2m_n}C_0^\infty \subset \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, то из (1.11) следует, что множество $J_{\mathcal{A}}\Phi_\Gamma$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Докажем теперь последнюю часть Теоремы 1.1. Оператор (1.7) по непрерывности продолжается на функции из S, ортогональные полиномам $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Последние образуют замкнутое множество в S', и следовательно, сопряженное пространство можно отождествить с фактор-пространством $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Так как область изменения оператора $J_{\mathcal{A}}$ плотна в L_2, то пространство линейных непрерывных функционалов на ней можно отождествить с L_2. Переходя к сопряженным, получим ограниченную инъекцию (1.8). Доказательство завершено.

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный набор векторов с неотрицательными компонентами, имеющий точки на каждой координатной оси $\mathbb{R}^n_{++}$. **Пространство** $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ является образом оператора $J_{\mathcal{A}}$ на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\left\| J_{\mathcal{A}}\varphi, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\| = \|\varphi\|_2. \tag{1.12}$$

Очевидно, если $\mathcal{A} = \{0\}$, то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} = L_2$. По Теореме 1.1, пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) = J_{\mathcal{A}}(L_2)$ является подпространством фактор-пространства $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Если $\theta_0 > 1$ (т.е. если $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ является допустимым многогранником), то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} \subset S'$, если же $0 < \theta_0 \le 1$, то элементами $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ будут классы, в которых функции, отличающиеся на многочлен $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$, отождествляются.

Норма (1.12) на C_0^∞ имеет удобный эквивалентный вид

$$\left\| f, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\| = \left\| \left(\sum_{r\in\mathcal{A}} \prod_{k=1}^{n} |\xi_k|^{r_k} \right) \widetilde{f} \right\|_2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Теорема 2. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающие последовательности положительных чисел, $\{a_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (2), а $\{\lambda_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\log n}=0, \tag{15}$$

и $b>1$. Произвольную функцию $f\in C_R^*[0,b]$ можно равномерно аппроксимировать на $[0,b]$ квазиполиномами вида (11).

Доказательство : Положим $l_n=\lambda_n/\log n$, $n=2,3,\ldots$. Так как числа $l_n>0$ удовлетворяют (15), то существует (см. [6], стр. 40, 107) последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} l_{n_i}=0,\quad l_{n_i}<l_s,\quad s=2,3,\ldots,n_i-1,\quad i=1,2,\ldots.$$

Не умаляя общности можем считать, что $n_i=2s_i$ (s_i – натуральное число). Определим последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^\infty$, где $m_i=2r_i+1=n_i-\left[\sqrt{n_i}\right]$ или $n_i-\left[\sqrt{n_i}\right]-1$, а $[a]$ – целая часть числа a. Так как λ_n монотонна, то для достаточно больших i имеем

$$\sum_{j=r_i+1}^{s_i}\lambda_{2j}^{-1}\ge\frac{s_i-r_i}{\lambda_{2s_i}}\ge C\frac{\sqrt{2s_i}}{\log 2s_i}, \tag{16}$$

где $C>0$ – постоянная. Докажем равенство

$$\lim_{i\to\infty} b^{\lambda_{2s_i}}(\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i+1})=0. \tag{17}$$

Так как λ_n монотонно возрастают и

$$\lim_{i\to\infty} l_{2s_i}=\lim_{i\to\infty}\frac{b^{\lambda_{2s_i}}}{\sqrt{2s_i}}=0,$$

то достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\sqrt{2s_i}(\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i})<\infty. \tag{18}$$

Легко проверить, что

$$0<\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i}=l_{2s_i}\log\frac{s_i}{r_i}-(l_{2r_i}-l_{2s_i})\log 2r_i.$$

Так как $l_{2r_i}-l_{2s_i}>0$, то получим

$$0<\lambda_{2s_i}-\lambda_{2r_i}<l_{2s_i}\log(1+(2s_i-2r_i)/2r_i),\quad i=1,2,\ldots,$$

откуда следует (18).

Заметим теперь, что в силу условия (15), $\{\lambda_n\}_1^\infty$ удовлетворяет (1). По теореме Мюнца при $s \to \infty$ имеем $E_s(f) \to 0$. С учетом (16) и (17), для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число s_i такое, что

$$E_{s_i}(f) < \varepsilon, \tag{19}$$

$$s_i - r_i \geq 1, \quad 2s_i b^{\lambda_{2s_i}} \exp\left\{-(\lambda_1 - \delta)\sum_{j=r_i+1}^{s_i} \lambda_{2j}^{-1}\right\} < \varepsilon, \tag{20}$$

$$(\lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i+1}) \max(\lambda_{2s_i}^{-1}, b^{\lambda_{2s_i}} \log b) < \varepsilon. \tag{21}$$

Согласно Лемме 3, существуют числа $b_1, \ldots, b_{s_i}$ из $\{\pm a_n\}_1^\infty$ такие, что

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s_i} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| \leq E_{s_i}(f) + M \sum_{k=1}^{r_i} A_{k,s_i} +$$

$$+ M(\lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i+1}) \max(\lambda_{2s_i}^{-1}, b^{\lambda_{2s_i}} \log b).$$

Отсюда и из (19) – (21) получим

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{s_i} b_j (x^{\lambda_{2j-1}} - x^{\lambda_{2j}}) \right\| < (2M+1)\varepsilon.$$

Доказательство завершено.

Замечание 2. В частом случае $\lim_{n\to\infty} \lambda_n < \infty$, Теорема 2 непосредственно следует из (14).

Теорема 3. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – строго монотонно возрастающие последовательности положительных чисел, $\{a_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (2), а $\{\lambda_n\}_1^\infty$ условию

$$\lambda_n / \log n \downarrow a \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и $b < e^{1/a}$. Тогда любую функцию $f \in C^\circ_{\mathbb{R}}[0,b]$ можно равномерно аппроксимировать на $[0,b]$ квазиполиномами вида (11).

Доказательство : Положим

$$l_n = \frac{\lambda_n - a\log n}{\log n}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Так как $l_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$, то существует, как и в доказательстве Теоремы 2, последовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что

$$\lim_{i\to\infty} l_{n_i} = 0, \quad l_{n_i} < l_s, \quad s = 2, 3, \ldots, n_i - 1.$$

Не умаляя общности можем считать, что $n_i = 2s_i$ (s_i – натуральное число), $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, где

$$m_i = 2r_i + 1 = n_i - [n_i^{1-p_0}] \quad \text{или} \quad n_i - [n_i^{1-p_0}] - 1, \quad a\log b < p_0 < 1.$$

Так как λ_n монотонно возрастают, то для достаточно большого i получим

$$\sum_{j=r_i+1}^{s_i} \lambda_{2j}^{-1} \geq \frac{s_i - r_i}{\lambda_{2s_i}} \geq C\frac{(2s_i)^{1-p_0}}{\log 2s_i},$$

где $C > 0$ – постоянная. Чтобы доказать (17) заметим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{b^{\lambda_{2s_i}}}{(2s_i)^{p_0}} \leq \frac{b^{(a+\varepsilon)\log 2s_i}}{(2s_i)^{p_0}} = \frac{(2s_i)^{(a+\varepsilon)\log b}}{(2s_i)^{p_0}} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Поскольку λ_n монотонны, то достаточно доказать, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,(2s_i)^{p_0}(\lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i}) < \infty. \tag{22}$$

Легко проверить, что

$$0 < \lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i} = l_{2s_i}\log\frac{s_i}{r_i} - (l_{2r_i} - l_{2s_i})\log 2r_i + a\log\frac{s_i}{r_i}.$$

Так как $l_{2r_i} - l_{2s_i} > 0$, то получим

$$0 < \lambda_{2s_i} - \lambda_{2r_i} < l_{2s_i}\log\frac{s_i}{r_i} + a\log\frac{s_i}{r_i} = (l_{2s_i} + a)\log(1 + (2s_i - 2r_i)/2r_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

откуда вытекает (22). Остальная часть доказательства совпадает с заключительной частью доказательства Теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Условие $b < e^{1/a}$ в Теореме 3 является точным (см. [5]).

Теорема 4. *Пусть $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ – строго монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \lambda_n/\lambda_{n+1})^2 < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\quad 1-\lambda_n/\lambda_{n+1}\downarrow 0\quad \text{при } n\to\infty.$$

Тогда любую функцию $f\in C^*_R[0,1]$ можно равномерно аппроксимировать на $[0,1]$ квазиполиномами вида (11).

Доказательство : Согласно Лемме 3 из [4], для любого $\varepsilon>0$ существует число n_0 такое, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}|<\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in[0,1]. \tag{23}$$

По Лемме 2 из [4] существует многочлен с действительными коэффициентами

$$p_1(x)=\sum_{n=n_0}^{N}c_n(x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}})$$

такой, что $|f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $x\in[0,1]$. Заменяя числа $|c_n|$, $n=n_0,\ldots,N$ соответствующим ближайшим элементом последовательности $\{a_n\}_1^\infty$, из $p_1(x)$ получим квазиполином $p(x)$ вида (11). Так как имеет место (23), то получим

$$|p(x)-p_1(x)|\le M\sum_{n=n_0}^{N}|x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. Muntz theorem on density of the set of quasipolynomials in the space $C_R[a,b]$ of continuous real-valued functions on a closed interval $[a,b]$, $a\ge 0$ is well known in real and complex analysis. The present paper studies the question about versions of Muntz theorem in the situation, where quasipolynomial coefficients are taken from a given increasing sequence of positive numbers.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Ferguson, M. Golitschek, "Muntz-Satz theorem with integer coefficients. II", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 213, pp. 115 – 126, 1975.
2. А. О. Гельфонд, "О приближении многочленами со специально выбранными коэффициентами", УМН, том 21, № 3, стр. 225 – 229, 1966.
3. Н. П. Корнейчук, Экстремальные Задачи Теории Приближений, Наука, Москва, 1976.
4. В. А. Мартиросян, "О равномерном приближении многочленами по системе Мюнца с целыми коэффициентами", Изв. АН АрмССР, Математика, том 8, № 2, стр. 167 – 175, 1973.
5. В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения квазиполиномами с целыми коэффициентами", Мат. заметки, том 27, № 2, стр. 237 – 243, 1980.
6. Г. Полиа, Г. Сегё, Задачи и Теоремы из Анализа, Москва, ГИТТЛ. 1, 1956.
7. W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc.Graw-Hill, London, 1966.
8. J. Tzimbalario, "Approximation by generalized polynomials with integer coefficients", Can. Math. Bull., vol. 20, no. 1, pp. 129 – 131, 1977.

20 марта 2000

Ереванский государственный университет

О ПРОБЛЕМЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПЕТРЕ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

В статье доказываются некоторые утверждения, относящиеся к проблеме пересечения Петре. Для произвольной интерполяционной пары получены некоторые условия на пространство, обеспечивающие выполнение равенства Петре. Объясняется роль равенств, дуальных к равенствам Петре.

ВВЕДЕНИЕ

Интерполяционное пространство, полученное методом вещественной интерполяции (см. [2], [3]) обычно обозначают через $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$. В [1] Петре поставил вопрос : при каких условиях справедливо равенство

$$(A, A_0 \cap A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \le q \le \infty. \tag{1}$$

В той же статье [1] (см. также Теорему 1.12.1 из [2] и литературу в [1], [2]) указаны некоторые достаточные условия для выполнения равенства (1) в терминах "квазилинеаризуемости" соответствующих интерполяционных пар. Равенства (1) изучались в [4] – [6].

В настоящей статье вместе с равенством (1) и его дуальным равенством

$$(A, A_0 + A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}, \tag{2}$$

рассматриваются также следующие соотношения :

$$A + (A_0 \cap A_1) = (A + A_0) \cap (A + A_1), \tag{3}$$

$$A \cap (A_0 + A_1) = (A \cap A_0) + (A \cap A_1). \tag{4}$$

Оказывается, что существует тесная связь между равенствами (1), (2) и (3), (4). Равенства (1) и (2) будем называть **равенствами Петре**, а (3) и (4) – **равенствами типа Петре**.

§1. О РАВЕНСТВАХ ТИПА ПЕТРЕ

Определение 1 (см. [2], [3]). **Интерполяционная пара** $\{A_0, A_1\}$ **является парой** банаховых пространств A_0 и A_1, линейно и непрерывно вложенных в линейное топологическое пространство T. Аналогично определяется **интерполяционная тройка**.

Теорема 1. Пусть $\{A, B, C\}$ – интерполяционная тройка. Если одно из пространств тройки вложено в другое, то равенства типа Петре (3) и (4) выполняются.

Доказательство : Ясно, что для произвольной тройки имеем вложения

$$(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C), \tag{5}$$

$$A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C). \tag{6}$$

Обратные вложения к (5) и (6) легко проверяются при $C \subset B$ (или $B \subset C$). Кроме того вложение, обратное к (5), очевидно при $A \subset B$ (или $A \subset C$), а вложение, обратное к (6,) очевидно при $B \subset A$ (или $C \subset A$).

Пусть теперь $B \subset A$. Тогда вложение, обратное к (5), имеет вид

$$A \cap (B + C) \subset B + (A \cap C). \tag{7}$$

Докажем (7). Пусть $a \in A \cap (B + C)$, тогда $a \in A$ и $a = a_0 + a_1$, $a_0 \in B$, $a_1 \in C$. Так как $a_1 = a - a_0$, $a_0 \in B \subset A$ и $a \in A$, то имеем $a_1 \in A$ и, следовательно, $a_1 \in A \cap C$. Таким образом, $a \in B + (A \cap C)$. Вложение (7) доказано.

Для доказательства непрерывности вложения (7) заметим, что при $B \subset A$ имеем

$$\|a\|_{B+(A\cap C)} = \inf_{a=a_0+a_1, a_0\in B, a_1\in C} \left(\|a_0\|_B + \|a_1\|_{A\cap C}\right) \le$$

$$\le c\left(\|a_0'\|_B + \|a_1'\|_A + \|a_1'\|_C\right) \le c'\left(\|a\|_A + \|a_0'\|_B + \|a_1'\|_C\right).$$

Беря нижнюю грань по всем $a = a_0' + a_1'$, $a_0' \in B$, $a_1' \in C$, получим (7). Аналогично можно доказать вложение, обратное к (6) при $A \subset B$ (или $A \subset C$). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара, $A = (A_0, A_1)_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$. Для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ имеют место равенства (3) и (4), т.е.

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left[A_0 + (A_0, A_1)_{\theta,q}\right] \cap \left[A_1 + (A_0, A_1)_{\theta,q}\right], \tag{8}$$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q}\right]. \tag{9}$$

Доказательство : Согласно следствию 3.6.2 из [3], для функционала Петре

$$K(s, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1, a_j \in A_j} \left(\|a_0\|_{A_0} + s\|a_1\|_{A_1}\right), \quad s > 0$$

имеем

$$K(t, a; A_0, A) \sim t\left[\int_{t^{1/\theta}} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1)\,\frac{ds}{s}\right]^{1/q}, \tag{10}$$

$$K(t, a; A, A_1) \sim \left[\int_0^{t^{1/(1-\theta)}} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1)\,\frac{ds}{s}\right]^{1/q}. \tag{11}$$

Здесь знак $\sim$ означает двустороннюю оценку. Суммируя (10) и (11), при $t = 1$ получим

$$\|a\|_{(A+A_0)\cap(A+A_1)} \sim \|a\|_{A+A_0} + \|a\|_{A+A_1} \sim K(1, a; A_0, A) + K(1, a; A_1, A) \sim$$

$$\sim \left[\int_0^{\infty} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1)\,\frac{ds}{s}\right]^{1/q} = \|a\|_A.$$

Равенство (8) доказано. Теперь докажем (9). Так как $A_0 \cap A \subset A$, то применим Теорему 1 к тройке $\{A_0 \cap A, A_1, A\}$. Применяя равенство (3) к этой тройке, получаем

$$(A_0 \cap A) + (A \cap A_1) = [(A \cap A_0) + A_1] \cap A. \tag{12}$$

На основании (8), из (12) получаем

$$(A_0 \cap A) + (A \cap A_1) = \left([A_0 \cap (A + A_1)] + A_1\right) \cap A. \tag{13}$$

Так как $A_1 \subset A_1 + A$, то к тройке $\{A_1, A_0, A_1 + A\}$ можно применить Теорему 1. Тогда из (13) получаем $(A_0 \cap A) + (A \cap A_1) = (A_0 + A_1) \cap (A + A_1) \cap A = A$. В последнем равенстве использовали свойство промежуточности пространства A, т.е. $A \subset A_0 + A_1$. Доказательство завершено.

§2. О РАВЕНСТВАХ ПЕТРЕ

Определение 2. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Банахово пространство A обладает **свойством (P)** относительно $\{A_0, A_1\}$, если для всех $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$ имеют место равенства Петре (1) и (2).

Предложение 1. **Пространства A_0, A_1 обладают свойством (P) относительно $\{A_0, A_1\}$.**

Доказательство : Как отмечено в [6], равенство (1) выполняется, если A совпадает с A_0 или A_1. Достаточно проверить, что равенство (2) также имеет место. По Следствию 3.6.2 из [3] имеем

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1} = K(1,a;(A_0,A_1)_{\theta,q},A_1) \sim \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s,a;A_0,A_1)\,\frac{ds}{s}\right]^{1/q} \tag{14}$$

Используя Теорему 2 из [7] и обозначая $\Sigma = A_0 + A_1$, получим

$$\|a\|_{(\Sigma,A_1)_{\theta,q}} = \left[\int_0^\infty s^{-\theta q} K^q(s,a;\Sigma,A_1)\,\frac{ds}{s}\right]^{1/q} \geq$$
$$\geq \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s,a;A_0,A_1)\,\frac{ds}{s}\right]^{1/q} \sim \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1}.$$

Следовательно, $(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \subset (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1$. Так как обратное вложение очевидно, то равенство (2) выполняется при $A = A_1$. Аналогично, можно доказать (2) для $A = A_0$. Предложение 1 доказано.

Теорема 3. **Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Пространства $\Sigma = A_0+A_1$ и $\Delta = A_0 \cap A_1$ обладают свойством (P) относительно $\{A_0, A_1\}$.**

Доказательство : Докажем, что (2) выполняется при $A = \Delta$. Используя (1) при $A = A_j$, $j = 0, 1$ и Теорему 3.4.1 из [3], получим $(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1 \cap (A_0, A_1)_{1-\theta,q}$. Из Теоремы 2 вытекает

$$(A_0,\Delta)_{\theta,q} + (A_1,\Delta)_{\theta,q} = \left(A_0 \cap \left[(A_0,A_1)_{\theta,q} + A_0\right] \cap \left[(A_0,A_1)_{\theta,q} + A_1\right]\right) +$$
$$+ \left(A_1 \cap \left[(A_0,A_1)_{1-\theta,q} + A_0\right] \cap \left[(A_0,A_1)_{1-\theta,q} + A_1\right]\right) = \tag{15}$$
$$= \left(A_0 \cap \left[(A_0,A_1)_{\theta,q} + A_1\right]\right) + \left(A_1 \cap \left[(A_0,A_1)_{1-\theta,q} + A_0\right]\right).$$

Применяя Теорему 1 к тройке $\{A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1]\ ,\ A_1\ ,\ (A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0\}$ и используя (3), из (15) получим

$$(A_0,\Delta)_{\theta,q} + (A_1,\Delta)_{\theta,q} = \left(A_0 \cap \left[(A_0,A_1)_{\theta,q} + A_1\right] + A_1\right) \cap$$
$$\cap \left(A_0 \cap \left[(A_0,A_1)_{\theta,q} + A_1\right] + \left[(A_0,A_1)_{1-\theta,q} + A_0\right]\right) = \tag{16}$$
$$= \left(A_0 \cap \left[(A_0,A_1)_{\theta,q} + A_1\right] + A_1\right) \cap \left((A_0,A_1)_{1-\theta,q} + A_0\right).$$

Применяя Теорему 1 к тройке $\{A_0, (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1, A_1\}$, из (16) получим

$$(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = \left[(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1\right] \cap \left[(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0\right].$$

Применяя (2) при $A = A_j$, $j = 0, 1$ и Теорему 3.4.1 из [3], находим

$$(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_0)_{\theta,q} \supset (\Sigma, \Delta)_{\theta,q}.$$

Так как обратное вложение очевидно, то приходим к равенству (2) при $A = \Delta$. Равенство (1) при $A = \Sigma$ было доказано в [6]. Для завершения доказательства заметим, что

$$(\Sigma, A_1)_{\theta,q} + (\Sigma, A_0)_{\theta,q} = A_0 + (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1 + (A_0, A_1)_{\theta,q} = \Sigma = (\Sigma, \Sigma)_{\theta,q}.$$

Следовательно, (2) имеет место при $A = \Sigma$. Аналогично получаем

$$(\Delta, A_1)_{\theta,q} + (\Delta, A_0)_{\theta,q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} \cap A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} = \Delta = (\Delta, \Delta)_{\theta,q}.$$

Следовательно, (1) имеет место при $A = \Delta$. Теорема 3 доказана.

Определение 3 (см. [2], [3]). Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Банахово пространство A принадлежит классу $B(\eta, A_0, A_1)$, если

$$(A_0, A_1)_{\eta,1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\eta,\infty}, \quad 0 < \eta < 1. \tag{17}$$

Предположим, что $A_j \in B(j, A_0, A_1)$, $j = 0, 1$.

Теорема 4. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Если пространство $A \in B(\eta, A_0, A_1)$, $0 < \eta < 1$, то A обладает свойством (P) относительно пары $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство : Имеем

$$(A_0, \Delta)_{\theta,q} \supset \left((A \cap A_0) + (A \cap A_1), \Delta\right)_{\theta,q} \supset (A \cap A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A \cap A_1, \Delta)_{\theta,q}, \tag{18}$$

и поскольку $A \in B(\eta, A_0, A_1)$, то $(A_0, \Delta)_{\eta,1} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta,1} \subset A_0 \cap A_1$, $(A_0, \Delta)_{\eta,\infty} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta,\infty} \supset A_0 \cap A_1$. Следовательно

$$A_0 \cap A \in B(\eta, A_0, \Delta), \quad 0 < \eta < 1. \tag{19}$$

Аналогично получаем

$$A_1 \cap A \in B(\eta, \Delta, A_1), \quad 0 < \eta < 1. \tag{20}$$

Соотношения (19), (20) и вложения $\Delta \in B(1, A_0, \Delta)$, $\Delta \in B(0, \Delta, A_1)$ показывают, что можно применить теорему реитерации (см. Теорему 3.5.3 из [3]). Из этой теоремы и (18) имеем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\eta(1-\theta),q}. \tag{21}$$

Применяя равенство (1) к правой части (21), получим

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset \left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right]. \tag{22}$$

Согласно Теореме 3.4.1 из [3] имеем

$$(A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \subset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta),q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} \subset (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}. \tag{23}$$

Итак, можно применить Теорему 1 к $\{A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}, A_1, (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\}$. Из (9), (22) и (23) следует, что

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + A_1\right) \cap \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] +\right.$$

$$\left. + (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right) == \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + A_1\right) \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} \supset \tag{24}$$

$$\supset \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right]\right) \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} =$$

$$= (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}.$$

Ещё раз используя реитерационную теорему, получаем

$$(A_0, \Delta)_{\theta,q} \supset (A, A_0)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Так как обратное вложение очевидно, то приходим к равенству (1). Равенство (2) доказывается аналогично. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. **Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара, Δ плотно в A_0 и A_1. Если A – интерполяционное пространство типа $\eta \in (0,1)$ (см. [2], [3]) относительно пары $\{A_0, A_1\}$, то A обладает свойством (P) относительно этой пары.**

Доказательство : На основании Теоремы 3.9.1 из [3] заключаем, что $A \in B(\eta, A_0, A_1)$. Остаётся применить Теорему 4.

Теорема 6. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Положим

$$B_0 = (A_0, A_1)_{\alpha, q_0}, \quad (\text{или} \quad [A_0, A_1]_\alpha\ ), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq q_0 \leq \infty,$$

$$B_1 = (A_0, A_1)_{\beta, q_1}, \quad (\text{или} \quad [A_0, A_1]_\beta\ ), \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 \leq q_1 \leq \infty.$$

Если A – интерполяционное пространство типа $\eta \in (0, 1)$ относительно пары $\{B_0, B_1\}$, то A обладает свойством (P) относительно $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство : Согласно реитерационной теореме

$$(B_0, B_1)_{\eta, r} = (A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, r}, \quad 1 \leq r \leq \infty. \tag{25}$$

Теорема 3.4.2 из [3] (Теорема 4.2.2 для метода комплексного интерполирования) утверждает, что $A_0 \cap A_1$ плотно как в B_0 так и в B_1. Тогда пространство $B_0 \cap B_1$ плотно в B_0 и B_1. Из Теоремы 3.9.1, [3] следует, что

$$(B_0, B_1)_{\eta, 1} \subset A \subset (B_0, B_1)_{\eta, \infty}. \tag{26}$$

Учитывая (25), вложения (26) можно переписать в виде $(A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, 1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, \infty}$. Следовательно, $A \in B(\alpha(1-\eta)+\beta\eta, A_0, A_1)$. Теперь Теорема 6 следует из Теоремы 4.

В заключение приведем одно следствие равенства (1), которое обращает классический результат о вложении интерполяционных пространств (см. Теоремы 3.4.1 и 4.2.1 из [3]).

Теорема 7. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Если для некоторого $q \in [1, \infty]$ и $\eta, \theta \in (0, 1)$, $\eta < \theta$ имеет место одно из вложений

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} \subset (A_0, A_1)_{\eta, q} \tag{27}$$

или

$$[A_0, A_1]_\theta \subset [A_0, A_1]_\eta, \tag{28}$$

то $A_1 \subset A_0$.

Доказательство : Пусть имеет место вложение (27). Тогда из (1) при $A = A_1$ (см. [6]) имеем

$$(\Delta, A_1)_{\theta, q} = A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta, q} \subset A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta, q} = (\Delta, A_1)_{\eta, q}. \tag{29}$$

Так как $1 - \theta < 1 - \eta$ и $\Delta \subset A_1$, то согласно Теореме 3.4.1 из [3] получим

$$(\Delta, A_1)_{\theta, q} = (A_1, \Delta)_{1-\theta, q} \supset (A_1, \Delta)_{1-\eta, q} = (\Delta, A_1)_{\eta, q}. \tag{30}$$

Из вложений (29) и (30) вытекает $(\Delta, A_1)_{\theta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}$, следовательно (см. §3.13 из [3]) $\Delta = A_1$. Таким образом, $A_1 \subset A_0$.

Теперь пусть имеет место вложение (28). Используя Теорему 1.10.3/2 из [2], получаем

$$(A_0, A_1)_{(1+\theta)/2,q} = \left([A_0, A_1]_\theta, A_1\right)_{1/2,q} \subset \left([A_0, A_1]_\eta, A_1\right)_{1/2,q} = (A_0, A_1)_{(1+\eta)/2,q}.$$

Следовательно, $A_1 \subset A_0$. Теорема 7 доказана.

Используя Теорему 7 и Теоремы 3.4.1 и 4.2.1 из [3], получим следующее утверждение.

Предложение 2. **Для выполнения каждого из вложений (27) и (28) необходимо и достаточно, чтобы $A_1 \subset A_0$.**

ABSTRACT. The paper proves some assertions concerning Peetre intersection problem. For any interpolation pair some conditions on the space, which guarantee the validity of Peetre equality, are obtained. The role of equalities dual to Peetre's is revealed.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Peetre, "Ueber den Durchschnitt von Interpolationsräumen", Arch. Math., vol. 25, pp. 511 – 513, 1974.
2. Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
3. Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, Мир, Москва, 1980.
4. P. Grisvard, "Interpolation non commutative", Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., vol. 52, pp. 11 – 15, 1972.
5. J. Peetre, "Non-commutative interpolation", Le Matematiche, vol. 25, pp. 1 – 15, 1970.
6. L. Maligranda, "On commutativity of interpolation with intersection", 13th Winter School on Abstract Analysis, pp. 113 – 118, 1985.
7. L. Maligranda, "The K-functional for symmetric spaces", Lecture Notes in Math., vol. 1070, pp. 169 – 182, 1988.

22 октября 1998

Ереванский государственный университет

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ МИНИМАКСНОГО РИСКА ОЦЕНОК ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

Для вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$ рассматривается задача непараметрического статистического оценивания линейного функционала $L(f)$ на основе выборки $X(1), \ldots, X(T)$. Для спектральных плотностей, принадлежащих классам Гёльдера $H_p(\beta)$, получены асимптотически точные оценки для минимаксного среднеквадратического риска Δ_T^2. Доказано, что $\Delta_T^2 \asymp T^{-a}$ $(a > 0)$ при $T \to \infty$, где число a определяется параметрами p и β.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – вещественнозначный стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$ с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. В работе рассматривается следующая общая задача непараметрического статистического оценивания ([2] — [4], [6] — [9]). Пусть наблюдается конечная частная реализация $\mathbf{X}_T = \{X(1), \ldots, X(T)\}$ процесса $X(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $f(\lambda) \in \Sigma$, где Σ – некоторый заданный класс спектральных плотностей, причем $\Sigma \subset \mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$, $p > 1$. Пусть $L(\cdot)$ – линейный функционал, определенный на пространстве $\mathbf{L}_p$. Задача состоит в следующем : на основе наблюдений $\mathbf{X}_T$ оценить значение $L(f)$ функционала $L(\cdot)$ в точке $f \in \Sigma$.

Предполагается, что функционал $L(\cdot)$ непрерывен в $\mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$, $p > 1$ и поэтому допускает представление (см. [11])

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda,$$

где $g(\lambda) \in \mathbf{L}_q[-\pi, \pi]$; $1/p + 1/q = 1$ и $||L|| = ||g||_q$. Здесь и ниже $||\cdot||_q$ обозначает $\mathbf{L}_q$-норму.

Для заданных чисел $1 \le p \le \infty$, $0 < \alpha < 1$ и $r \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0$ обозначает множество неотрицательных целых чисел, положим $\beta = r + \alpha$, и обозначим через $\mathbf{H}_p(\beta)$ класс Гёльдера, т.е. класс функций $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, обладающих r-ыми производными в $\mathbf{L}_p$ и удовлетворяющих условию

$$\|\psi^{(r)}(\cdot + h) - \psi^{(r)}(\cdot)\|_p \le C\,|h|^\alpha.$$

Здесь и ниже буквой C обозначаются различные положительные постоянные. Пусть $\Sigma_p(\beta)$ – множество всех спектральных плотностей, принадлежащих классу $\mathbf{H}_p(\beta)$. Статистическая оценка функционала $L(f)$ определяется как измеримое отображение $\widehat{L}_T = \widehat{L}_T(\mathrm{X}_T) : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^1$. Качество оценки $\widehat{L}_T$ функционала $L(f)$ измеряется риском

$$\Delta_T^2(\widehat{L}_T, f) = \mathbb{E}_f|\widehat{L}_T - L(f)|^2,$$

где $\mathbb{E}_f\{\cdot\}$ – математическое ожидание относительно меры, порожденной спектральной плотностью f. Пусть Δ_T^2 обозночает минимаксный среднеквадратический риск статистической оценки $\widehat{L}_T$, т.е.

$$\Delta_T^2 \stackrel{def}{=} \sup_{\|L\|=1} \inf_{\widehat{L}_T} \sup_{f\in\Sigma} \mathbb{E}_f|\widehat{L}_T - L(f)|^2.$$

В настоящей работе получены асимптотически точные оценки для риска Δ_T^2 при $T \to \infty$. Эти оценки зависят от свойств функционала $L(f)$ и множества Σ. Доказано, что $\Delta_T^2 \asymp T^{-a}$ $(a > 0)$, где число a определяется параметрами p и β. (Здесь и ниже $a_T \asymp b_T$ означает, что отношение a_T/b_T асимптотически (при $T \to \infty$) отделено от нуля и бесконечности).

Отметим, что эта задача ранее была рассмотрена автором в [3] (см. также [4]), где были получены асимптотически верхние границы, аналогичная задача для плотности вероятностей была рассмотрена Ибрагимовым и Хасьминским в [7].

§1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом работы является следующая теорема, которая содержит асимптотически точные границы для риска Δ_T^2.

Теорема 1. Для $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$, $\beta > 0$, и любого непрерывного линейного функционала $L(f)$ в пространстве $\mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$ имеют место следующие утверждения :

А) Если $p \ge 2$ и $\beta > 1/p$, то

$$\Delta_T^2 \asymp T^{-3p\beta(p+2p\beta-2)^{-1}} \ ;$$

B) Если или $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$, или $1 < p \leq 2$ и $\beta \leq 1/2$, то

$$\Delta_T^2 \asymp T^{-2\beta} \ ;$$

C) Если $1 < p \leq 2$ и $\beta \geq 1/2$, то

$$\Delta_T^2 \asymp T^{-1}.$$

Соответствующие верхние границы были получены в [3] (см. также [4]), где была доказана нижеследующая Теорема 2.

Теорема 2. При условиях Теоремы 1 имеем

$$\Delta_T^2 \leq \begin{cases} C_1 \cdot T^{-2p\beta(p+2p\beta-2)^{-1}}, & \text{для} \quad p \geq 2, \ \beta > 1/p \\ C_2 \cdot T^{-2\beta}, & \text{для} \quad p \geq 2, \ \beta \leq 1/p \\ C_3 \cdot T^{-2\beta}, & \text{для} \quad 1 < p \leq 2, \ \beta \leq 1/2 \\ C_4 \cdot T^{-1}, & \text{для} \quad 1 < p \geq 2, \ \beta \geq 1/2, \end{cases}$$

где C_k, $k = 1, 2, 3, 4$ суть положительные постоянные.

Следовательно, для доказательства Теоремы 1 нам необходимо доказать соответствующие нижние границы. С этой целью нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые приведены в следующем параграфе.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\psi_A(\lambda)$ сингулярный интеграл Дирихле, определенный для всех $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p[-\pi, \pi]$ $(1 < p < \infty)$ по формуле (см. [1], [10])

$$\psi_A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin A(\lambda - x)}{\sin(\lambda - x)} \psi(x) \, dx. \tag{1}$$

Заметим, что $\psi_A(\lambda)$ является тригонометрическим многочленом степени не выше A. В лемме 1 приведены свойства функции $\psi_A(\lambda)$. Ниже через $C(h_1, \ldots, h_k)$ обозначаются различные положительные ограниченные постоянные, зависящие от параметров $h_1, \ldots, h_k$.

Лемма 1. Имеют место следующие утверждения :

a) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\beta)$, $1 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда

$$||\psi_A||_p \leq C(p) \, ||\psi||_p \quad \text{и} \quad ||\psi - \psi_A||_p \leq C(p, \beta) \, A^{-\beta}.$$

b) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, $p \geq 1$. Тогда $||\psi_A||_q \leq 2 \, A^{1/p - 1/q} \, ||\psi_A||_p$, где $p < q \leq \infty$.

c) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\beta)$ с $\beta = r + \alpha$, $r \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha < 1$ и $p \geq 1$. Тогда $||\psi^{(j)}||_p \leq C < \infty$ для $j = \overline{1, r}$.

d) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$ **с** $p \geq 1$, $\beta > 0$, $q > p$ **и** $\beta \neq 1/p - 1/q$. **Тогда**

$$\|\psi_A\|_q \leq C \cdot \max\{1; A^{1/p-1/q-\beta}\}.$$

Доказательства утверждений a) – c) можно найти в [10] (см. также [1]), а доказательство d) – в работе [7].

Следующая лемма является теоремой вложения типа Харди–Литтлвуда для классов $\mathrm{H}_p(\beta)$ (см. [10], стр. 232).

Лемма 2. Имеют место следующие утверждения :

a) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, $p \geq 1$ **с** $0 < \beta \leq 1/p$ **и** $p < p_1 < p/(1-\beta p)$. **Тогда**

$$\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_{p_1}(\beta - 1/p + 1/p_1).$$

b) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$ **с** $p \geq 1$ **и** $\beta > 1/p$. **Тогда** $\psi(\lambda)$ **непрерывна и** $\|\psi\|_\infty < \infty$.

§3. НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ

В следующей теореме приводятся нижние границы для риска Δ_T^2.

Теорема 3. Для $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$, $\beta > 0$, **и любого непрерывного линейного функционала** $\varphi(f)$ **в пространстве** $\mathrm{L}_p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$ **имеют место следующие утверждения :**

A) Если $p \geq 2$ **и** $\beta > 1/p$, **то**

$$\Delta_T^2 \geq C_1 T^{-2p\beta(p+2p\beta-2)^{-1}};$$

B) Если $p \geq 2$ **и** $\beta \leq 1/p$ **или** $1 < p \leq 2$ **и** $\beta \leq 1/2$, **то**

$$\Delta_T^2 \geq C_2 T^{-2\beta};$$

C) Если $1 < p \leq 2$ **и** $\beta \geq 1/2$, **то**

$$\Delta_T^2 \geq C_3 T^{-1},$$

где C_k, $(k = 1, 2, 3)$ **– некоторые положительные постоянные.**

Доказательство : Рассмотрим статистическую оценку $\widehat{L}_{T,A}$ линейного функционала $L(f)$ (ср. [2] – [4], [8], [9]) :

$$\widehat{L}_{T,A} = \int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda)\, g_A(\lambda)\, d\lambda,$$

где $A = A(T) \le T$, $A(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, $g_A(\lambda)$ – сингулярный интеграл Дирихле (1), порожденный функцией $g(\lambda)$, а $I_T(\lambda)$ – периодограмма процесса $X(t)$:

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=1}^{T} X(t)\, e^{-it\lambda}\right|^2.$$

Положим $\Sigma'_p(\beta) = \{f \in \Sigma_p(\beta);\ f(\lambda) \ge C > 0\}$ и

$$h_A(\lambda) = \frac{g_A(\lambda)}{T^{1/2}\|f\, g_A\|_2^2}. \tag{2}$$

Пусть $f(\lambda) \in \Sigma'_p(\beta)$ – некоторая спектральная плотность, удовлетворяющая условию $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$. Тогда для достаточно больших значений T функция

$$\theta(\lambda) = \theta_{T,h}(\lambda) \stackrel{def}{=} f(\lambda)\,(1 + h_A(\lambda)), \quad A = A(T)$$

является спектральной плотностью из класса $\Sigma'_p(\beta)$.

Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение гауссовского вектора $\mathbf{X}_T = \{X(1), \ldots, X(T)\}$ со спектральной плотностью $\theta(\lambda)$. Согласно Теореме 1 из [5] (см. также пример 2.3 в [9]) семейство гауссовских распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Sigma'_p(\beta)\}$ локально асимптотически нормально (ЛАН) в точке f в направлении пространства $\mathrm{L}_2[-\pi,\pi]$. Следовательно, используя Теорему 4.1 из [9], для функции потерь $w(x) = x^2$ получаем

$$\sup_{\theta\in\Sigma_p(\beta)} \inf_{\widehat{L}_T} \mathbb{E}_\theta|\widehat{L}_T - L(\theta)|^2 \ge \frac{C_0}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)\, g_A^2(\lambda)\, d\lambda, \tag{3}$$

где $\widehat{L}_T$ – произвольная статистическая оценка функционала $L(\theta)$, построенного на основе наблюдения $\mathbf{X}_T$, а C_0 – положительная постоянная.

Следовательно, для завершения доказательства Теоремы 3 нам остается подобрать $A = A(T)$ так, чтобы были выполнены следующие условия :

1) $f(\lambda)\, h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$;

2) правая сторона (3) имеет вид T^{-a}, где число a определяется Теоремой 3.

Доказательство утверждения C) тривиально, поэтому мы доказываем только утверждения A) и B).

Предположим, что $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta)$, где $p \ge 2$ и $\beta > 1/p$. Покажем, что $f(\lambda)\, h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, где $h_A(\lambda)$ определяется формулой (2). Пусть $\beta = \alpha + r$, где $r \in \mathbb{N}_0$ и $0 < \alpha < 1$. Используя формулу Лейбница для вычисления производной $(fh_A)^{(r)}$, получаем

$$J \stackrel{def}{=} \left\|(fh_A)^{(r)}(\cdot+\delta)-(fh_A)^{(r)}(\cdot)\right\|_p \leq$$
$$\leq C\sum_{k=0}^{r}\left\|f^{(k)}(\cdot+\delta)h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)h_A^{(r-k)}(\cdot)\right\|_p. \tag{4}$$

Сперва рассмотрим случай $r \geq 1$. Имеем

$$\left(fh_A^{(r-k)}\right)(\cdot+\delta)-\left(fh_A^{(r-k)}\right)(\cdot)=$$
$$=f(\cdot+\delta)\left[h_A^{(r)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r)}(\cdot)\right]+h_A^{(r)}(\cdot)\left[f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\right]$$

и

$$f^{(k)}(\cdot+\delta)h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)h_A^{(r-k)}(\cdot)=$$
$$=f^{(k)}(\cdot+\delta)\left[h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r-k)}(\cdot)\right]+h_A^{(r-k)}(\cdot)\left[f^{(k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)\right].$$

Применяя неравенства Минковского и Гёльдера (см. [10]), из (4) получаем

$$\begin{aligned}J &\leq C\left\|f(\cdot+\delta)h_A^{(r)}(\cdot+\delta)-f(\cdot)h_A^{(r)}(\cdot)\right\|_p+\\&+C\sum_{k=1}^{r}\left\|f^{(k)}(\cdot+\delta)h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)h_A^{(r-k)}(\cdot)\right\|_p\leq\\&\leq C\|f\|_\infty\left\|h_A^{(r)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r)}(\cdot)\right\|_p+\\&+C\|h_A^{(r)}\|_\infty\|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_p+\\&+C\sum_{k=1}^{r}\|f^{(k)}\|_p\left\|h_A^{(r-k)}(\cdot+\delta)-h_A^{(r-k)}(\cdot)\right\|_\infty+\\&+C\sum_{k=1}^{r}\|h_A^{(r-k)}\|_\infty\left\|f^{(k)}(\cdot+\delta)-f^{(k)}(\cdot)\right\|_p.\end{aligned} \tag{5}$$

Так как $f(\lambda)\in \mathbf{H}_p(\beta)$, $\beta=\alpha+r$, то согласно лемме 1 c) имеем

$$\|f^{(k)}\|_p \leq C < \infty, \qquad k=1,2,\ldots,r. \tag{6}$$

Далее, так как $r\geq 1$, имеем $\beta > 1/p$, и из леммы 2 b) получим

$$\|f\|_\infty \leq C < \infty. \tag{7}$$

Функция $h_A(\lambda)$ является тригонометрическим многочленом степени A. Следовательно, по неравенству Бернштейна (см. [1], стр. 100), имеем

$$\|h_A^{(k)}\|_s \leq 2^k A^k\|h_A\|_s, \qquad 1\leq s\leq\infty, \tag{8}$$

а по неравенству (см. лемму 1 b))

$$\|h_A\|_s \leq C\,A^{1/t-1/s}\|h_A\|_t, \qquad t<s\leq\infty, \tag{9}$$

имеем

$$\|h_A^{(k)}\|_\infty \le 2^k A^k \|h_A\|_\infty \le 2^k A^{k+1/q} \|h_A\|_q. \tag{10}$$

Из неравенств (8) — (10) для $q_1 > q$ и $k \le r$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| h_A^{(k)}(\cdot+\delta) - h_A^{(k)}(\cdot) \right\|_{q_1} &= \left\| \int_x^{x+\delta} h_A^{(k+1)}(y)\,dy \right\|_{q_1} \le \\ &\le \min\left(\delta \left\| h_A^{(k+1)} \right\|_{q_1}, 2\left\| h_A^{(k)} \right\|_{q_1}\right) \le \\ &\le \min\left(\delta A^{k+1+1/q-1/q_1} \|h_A\|_q, A^{k+1/q-1/q_1} \|h_A\|_q\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, для $q_1 > q$ и $k \le r$ имеем

$$\left\| h_A^{(k)}(\cdot+\delta) - h_A^{(k)}(\cdot) \right\|_{q_1} \le C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{12}$$

Согласно (5) — (7), (10) и (12), для $r \ge 1$, имеем

$$\left\| (fh_A)^{(r)}(\cdot+\delta) - (fh_A)^{(r)}(\cdot) \right\|_p \le C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{13}$$

Пусть теперь $r = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p \le \|f\|_\infty \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p + \\ &+ \|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_p \le C \cdot \{\|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p + \delta^\alpha \|h_A\|_\infty\}. \end{aligned} \tag{14}$$

По неравенству (12) имеем

$$\|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p \le C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{15}$$

Принимая во внимание условие $\beta > 1/p$, из (10) получаем

$$\|h_A\|_\infty \le C \cdot A^{1/q} \|h_A\|_q \le C \cdot \delta^\alpha A^{1/q+\beta-1/p} \|h_A\|_q. \tag{16}$$

Комбинируя (14) — (16) находим

$$\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p \le C \cdot \delta^\alpha A^{\beta+1/q-1/p} \|h_A\|_q. \tag{17}$$

Из (2), (13) и (17) следует, что для всех $r \in \mathbb{N}_0$, $p \ge 2$ и $\beta > 1/p$ справедливо неравенство

$$\left\| (fh_A)^{(r)}(\cdot+\delta) - (fh_A)^{(r)}(\cdot) \right\|_p \le C \cdot M_T \delta^\alpha, \tag{18}$$

где

$$M_T \stackrel{def}{=} T^{-1/2} \cdot A^{\beta+1/q-1/p} \|fg_A\|_2^{-2}. \tag{19}$$

Следовательно, утверждение $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$ будет заведомо выполнено, если мы сможем подобрать A так, чтобы сделать величину M_A задаваемую по (19), столь малой, сколь нужно. Положим

$$g_A(\lambda) = A^{-1/p} \cdot \frac{\sin A\lambda}{\sin \lambda}.$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin A\lambda}{\sin \lambda}\, d\lambda = 2\pi A$, то из предположения $f(\lambda) \geq C > 0$ следует

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda) f^2(\lambda)\, d\lambda = A^{-2/p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2 \lambda} f^2\left(\frac{\lambda}{A}\right) d\lambda \geq \\ \geq C \cdot A^{-2/p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2 \lambda} = C \cdot A^{1-2/p}.\end{aligned} \tag{20}$$

Полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$ и учитывая, что $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, из (19) и (20) находим

$$M_T \leq C \cdot \frac{T^{-1/2} \cdot A^{\beta+1/q-1/p}}{A^{1-2/p}} = T^{(2-p)(4p\beta+2p-4)^{-1}}. \tag{21}$$

Из предположения $p \geq 2$, и из (18) и (21) заключаем, что $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$. Далее, полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, из (3) и (20) находим

$$\Delta_T^2 \geq \frac{C_0}{T} \int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda) f^2(\lambda)\, d\lambda \geq C \cdot T^{-1} A^{1-2/p} \geq T^{-2p\beta(2p\beta+p-2)^{-1}}.$$

Это завершает доказательство утверждения A).

Прейдем к доказательству утверждения B). Пусть $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta)$, где $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$. Вначале покажем, что $f(\lambda)h_A(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, где $h_A(\lambda)$ определена по формуле (2). В этом случае необходимо $r = 0$ и $\beta = \alpha < 1$. Поэтому нам необходимо оценить только величину $\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p$. Обозначая через $f_A(\lambda)$ интеграл Дирихле спектральной плотности $f(\lambda)$, из неравенств Минковского и Гёльдера получаем

$$\begin{aligned}\|(fh_A)(\cdot+\delta) - (fh_A)(\cdot)\|_p \leq \|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_p + \\ + \|f(\cdot) - f_A(\cdot)\|_p \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_\infty + \|f_A\|_\infty \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_p.\end{aligned} \tag{22}$$

Используя неравенство (9) для $s = \infty$ и $t = q$, получаем

$$\|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_p \leq C \cdot \delta^\alpha A^{1/q} \|h_A\|_q. \tag{23}$$

Согласно второму неравенству из леммы 1 а) имеем

$$\|f(\cdot) - f_A(\cdot)\|_p \leq C \cdot A^{-\beta} = C \cdot A^{-\alpha}.$$

Следовательно, используя неравенство (11) для $k=0$ и $q_1=\infty$, находим

$$\begin{aligned} &\|f(\cdot)-f_A(\cdot)\|_p \, \|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_\infty \le \\ &\le C\cdot A^{-\alpha}\min\left(\delta A^{1+1/q}\|h_A\|_q, 2A^{1/q}\|h_A\|_q\right) \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q. \end{aligned} \tag{24}$$

Согласно лемме 1 d) имеем $\|f_A\|_\infty \le C\cdot A^{1/p-\beta} = C\cdot A^{1/p-\alpha}$. Следовательно, применяя неравенство (11) для $k=0$ и $q_1=p$, получаем

$$\begin{aligned} &\|f_A\|_\infty \, \|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_p \le \\ &\le C\cdot A^{1/p-\alpha}\min\left(\delta A^{1+1/q-1/p}\|h_A\|_q, 2A^{1/q-1/p}\|h_A\|_q\right) \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q. \end{aligned} \tag{25}$$

Комбинируя (22) — (25), находим

$$\|(fh)(\cdot+\delta)-(fh_A)(\cdot)\|_p \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q. \tag{26}$$

Следовательно, из (2) и (26) получаем

$$\|(fh_A)(\cdot+\delta)-(fh_A)(\cdot)\|_p \le C\cdot M_T\delta^\alpha, \tag{27}$$

где

$$M_T \stackrel{def}{=} T^{-1/2}\cdot A^{1/q}\|fg_A\|_2^{-2}. \tag{28}$$

Полагая $g_A(\lambda) = A^{-\beta}\cdot\dfrac{\sin A\lambda}{\sin\lambda}$ и учитывая соотношения $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin A\lambda}{\sin\lambda}\,d\lambda = 2\pi A$ и $f(\lambda)\ge C>0$, находим

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda)f^2(\lambda)\,d\lambda = A^{-2\beta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2\lambda}f^2\left(\frac{\lambda}{A}\right)d\lambda \ge \\ &\ge C\cdot A^{-2\beta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 A\lambda}{\sin^2\lambda} = C\cdot A^{1-2\beta}. \end{aligned} \tag{29}$$

Полагая $A=T$, из (28) и (29) получим

$$M_T \le C\cdot T^{-1/2+1/q-1+2\beta} = C\cdot T^{2(\beta-1/p)+(2-p)/(2p)}. \tag{30}$$

Учитывая, что по предположению $p\ge 2$ и $\beta\le 1/p$, из (27) и (30) заключаем $f(\lambda)\,h_A(\lambda)\in \mathbf{H}_p(\beta)$. Вновь полагая $A=T$, из (3) и (29) получаем

$$\Delta_T^2 \ge \frac{C_0}{T}\int_{-\pi}^{\pi} g_A^2(\lambda)f^2(\lambda)\,d\lambda \ge C\cdot T^{-1}A^{1-2\beta} \ge C\cdot T^{-2\beta}.$$

Таким образом, утверждение B) для $p\ge 2$ и $\beta\le 1/p$ доказано.

Теперь докажем B) для $1<p\le 2$ и $\beta\le 1/2$. Из предыдущих рассуждений следует, что нам нужно доказать лишь аналог неравенства (26).

Используя неравенства Минковского и Гёльдера, получаем следующий аналог неравенства (22) :

$$\|(fh_A)(\cdot+\delta)-(fh_A)(\cdot)\|_p \le \|h_A\|_\infty \|f(\cdot+\delta)-$$
$$-f(\cdot)\|_p + \|f(\cdot)-f_A(\cdot)\|_p \|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_\infty + \tag{31}$$
$$+\|f_A\|_{2q/(q-2)} \|h_A(\cdot+\delta) - h_A(\cdot)\|_2 \stackrel{def}{=} J_1+J_2+J_3.$$

Величины J_1 и J_2 совпадают, соответственно, с первым и вторым слагаемыми из (22). Следовательно, из (23) и (24) имеем

$$J_1 \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q \quad \text{и} \quad J_2 \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q. \tag{32}$$

Теперь оценим J_3. Полагая $q_1 = \frac{2q}{q-2}$, имеем $q_1 > p = \frac{q}{q-1}$. Следовательно

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}-\beta = \frac{1}{2}-\beta > 0.$$

Поэтому по лемме 1 d) и лемме 2 a) имеем

$$\|f_A\|_{q_1} \le C\cdot A^{1/p-1/q_1-\beta}. \tag{33}$$

Далее, так как $q\ge 2$, из (9) для $s=2$ и $t=q$ получаем

$$\|h_A\|_2 \le C\cdot A^{1/q-1/2}\|h_A\|_q. \tag{34}$$

Используя неравенства (33), (34) и (8) для $s=2$ и $k=1$, находим

$$J_3 = \|f_A\|_{q_1}\|h_A(\cdot+\delta)-h_A(\cdot)\|_2 \le C\cdot A^{1/p-1/q_1-\beta}\min(\delta\|h'_A\|_2, 2\|h_A\|_2) \le$$
$$\le C\cdot A^{1/p-(q-2)/(2q)-\beta}\min(A\delta,1)\|h_A\|_2 \le$$
$$\le C\cdot A^{1/p-(q-2)/(2q)-\beta}A^{1/q-1/2}\|h_A\|_q \le C\cdot\delta^\alpha A^{1/q}\|h_A\|_q. \tag{35}$$

Комбинируя (31), (32) и (35) получаем (26). Оставшаяся часть доказательства повторяет предыдуюий случай. Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 1. Комбинируя Теоремы 2 и 3 получаем требуемый результат.

ABSTRACT. For a zero mean real-valued stationary Gaussian process $X(t)$, $t\in\mathbb{Z}$ possessing a spectral density $f(\lambda)$ the paper considers the problem of nonparametric statistical estimation of a linear functional $L(f)$ on the basis of a sample $X(1),\dots,X(T)$. For spectral densities from Hölder classes $\mathrm{H}_p(\beta)$ we obtain asymptotically exact bounds for the minimax mean square risk Δ_T^2. We prove that $\Delta_T^2 \asymp T^{-a}$ $(a>0)$ as $T\to\infty$, where the number a is determined by the parameters p and β.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Butzer and R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Vol. I, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgard, 1971.
2. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", Теория вероятн. и ее примен., том 33, стр. 315 — 322, 1988.
3. M. S. Ginovian, "On Toeplitz Type Quadratic Functionals in Gaussian Stationary Process", Probability Theory and Related Fields, vol. 100, pp. 395 — 406, 1994.
4. М. С. Гиновян, "Асимптотические верхние границы для риска оценок линейных функционалов от спектральной плотности", Известия НАН Армении, серия Математика, том 31, № 5, стр. 5 — 13, 1996.
5. М. С. Гиновян, "Локально асимптотически нормальные семейства гауссовских распределений", Известия НАН Армении, серия Математика, том 34, № 4, стр. 18 — 28, 1999.
6. I. A. Ibragimov and R. Z. Khas'minskii, Statistical Estimation : Asymptotic Theory, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1981.
7. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, "Об оценке значения линейного функцио--нала от вероятностной плотности", Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, том 153, стр. 45 — 59, 1986.
8. R. Z. Has'minskii and I. A. Ibragimov, "Asymptotically Efficient Nonparametric Estimation of Functionals of Spectral Density Function", Probability Theory and Related Fields, vol. 73, pp. 447 — 461, 1986.
9. I. A. Ibragimov and R. Z. Khas'minskii, "Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation", The Annals of Statistics, vol. 19, no. 4, pp. 1681 — 1724, 1991.
10. С. М. Никольский, Приближение Функций Нескольких Переменных и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1977.
11. F. Riesz and B. Sz. Nagy, Lecons d'Analyse Fonctionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1972.

25 сентября 1999

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Г. Г. Джебеян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

В настоящей статье рассматривается пространство соленоидальных вектор-функций, определенных в конечной трехмерной области Ω, граница которой обладает плоской частью Σ, содержащей ортогональный базис двумерных вектор-функций, определенных на Σ. Показано, что каждый элемент этого базиса порождает пространство трехмерных соленоидальных векторов в Ω, и соответствующее пространство соленоидальных векторов допускает ортогональное разложение по этим индуцированным пространствам.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть (X, Y, Z) – трёхмерная декартова система координат, а Σ – ограниченное подмножество в плоскости XOY с достаточно гладкой границей l. Обозначим через $L_2(\Sigma)$ гильбертово пространство двумерных вектор-функций, интегрируемых с квадратом на Σ, с метрикой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Sigma = \int_\Sigma (u_x v_x^* + u_y v_y^*)\, d\sigma.$$

Ниже будем использовать следующие обозначения :

$\widetilde{M}(\Sigma)$ = линеал градиентов гладких на Σ функций,

$\widetilde{M}_0(\Sigma)$ = линеал градиентов функций, гладких на Σ и обращающихся в нуль на контуре l,

$\widetilde{M}_1(\Sigma)$ = линеал градиентов функций, гладких на Σ, нормальная производная которых равна нулю на контуре l,

$\widetilde{N}(\Sigma)$ = линеал гладких на Σ двумерных соленоидальных векторов,

$\widetilde{N}_0(\Sigma)$ = линеал гладких на Σ двумерных соленоидальных векторов, нормальная компонента которых равна нулю на контуре l,

$\widetilde{N}_1(\Sigma)$ = линеал гладких на Σ двумерных соленоидальных векторов, касательная компонента которых на l равна нулю,

$\widetilde{U}(\Sigma)$ = линеал градиентов гармонических на Σ функций,

$M(\Sigma), M_k(\Sigma), N(\Sigma), N_k(\Sigma), U(\Sigma)$ = замыкания на $L_2(\Sigma)$ линеалов $\widetilde{M}(\Sigma)$, $\widetilde{M}_k(\Sigma)$, $\widetilde{N}(\Sigma)$, $\widetilde{N}_k(\Sigma)$, $\widetilde{U}(\Sigma)$ соответственно, $k = 0, 1$.

Имеем следующие разложения, см. [5] :

$$L_2(\Sigma) = M_0 \oplus N_1 \oplus U, \quad L_2(\Sigma) = M_1 \oplus N_0 \oplus U. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что в общем случае, гладкие векторы $\mathbf{u}$ из $L_2(\Sigma)$ имеют на контуре l ненулевые нормальную и касательную компоненты, которые обозначим через $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{u}_\tau$. Через $\mathbf{u}_n\big|_l$ и $\mathbf{u}_\tau\big|_l$ обозначим сужения этих компонент на l.

Лемма 1.1. Всякие гладкие вектор-функции $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Sigma$, удовлетворяющие на l условию $v_n\big|_l = 0$, $\mathbf{u}_\tau\big|_l = 0$, допускают представления в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_1 \in \widetilde{M}_0, \quad \mathbf{u}_2 \in \widetilde{N}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \in \widetilde{M}_1, \quad \mathbf{v}_2 \in \widetilde{N}_0 \tag{1.2}$$

с попарно ортогональными $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, как и $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.

Доказательство : Пусть φ_0 – решение двумерной задачи

$$\Delta_\perp \varphi = div\, \mathbf{u}, \quad \varphi\big|_l = 0,$$

где $\mathbf{u}$ – гладкий двумерный вектор на Σ. Имеем $\mathbf{u}_1 = grad_\perp \varphi_0 \in \widetilde{M}_0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$. Так как $div\ \mathbf{u}_2 = 0$, получим представление $\mathbf{u}_2 = \mathbf{z}_0 \times grad_\perp \varphi_1$, где $\mathbf{z}_0$ – единичный вектор, ортогональный к Σ и φ_1 – гладкая функция. Предположим, что φ_1 является решением задачи

$$\Delta_\perp \varphi = div\ (\mathbf{u} \times \mathbf{z}_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_l = 0,$$

где $\mathbf{n}$ – нормальное направление к l. Легко проверить, что $(\mathbf{u}_2)_\tau\big|_l = 0$, следовательно $\mathbf{u}_2 \in \widetilde{N}_1(\Sigma)$, что доказывает первое представление из (1.2). Аналогично доказывается второе представление.

Теперь проверим ортогональность построенных вектор-функций $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Так как $(\mathbf{u}_1)_\tau\big|_l = 0$ и из $\varphi_0\big|_l = 0$ следует $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \tau}\bigg|_l = 0$, то имеем

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_\Sigma = \int_\Sigma grad_\perp \varphi_0 (grad_\perp \varphi_1 \times \mathbf{z}_0)\, d\sigma = \int_\Sigma div(grad_\perp \varphi_0 \times \varphi_1 \mathbf{z}_0)\, d\sigma =$$

$$= \oint_l (grad_\perp \varphi_0 \times \varphi_1 \mathbf{z}_0)\mathbf{n}\, dl = \oint_l \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \varphi_1\, dl = 0.$$

Аналогично проверяется ортогональность $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Лемма 1.1 доказана.

В подпространствах $M_0(\Sigma), M_1(\Sigma), N_0(\Sigma), N_1(\Sigma)$ существуют [5] ортонормированные базисы, состоящие из элементов

$$\mathbf{F}^e_m = grad_t \gamma_m \in M_0, \quad \mathbf{G}^e_m = \mathbf{z}_0 \times grad_t \gamma_m \in N_0,$$

$$\mathbf{G}^h_m = grad_t \zeta_m \in M_1, \quad \mathbf{F}^h_m = grad_t \zeta_m \times \mathbf{z}_0 \in N_1,$$

где $\{\gamma_m\}_1^\infty$ и $\{\zeta_m\}_1^\infty$ – системы собственных функций мембранных задач

$$\Delta_\perp \gamma_m + \mu_m^2 \gamma_m = 0, \quad \gamma_m\big|_l = 0, \quad m = 1, 2, ..., \tag{1.3a}$$

$$\Delta_\perp \zeta_m + \nu_m^2 \zeta_m = 0, \quad \frac{\partial \zeta_m}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_l = 0, \quad m = 1, 2, ..., \tag{1.3b}$$

соответствующие собственным значениям $\{\mu_m^2\}_1^\infty$ и $\{\nu_m^2\}_1^\infty$. Собственные функции нормированы следующим образом : $||\gamma_m||_\Sigma = \mu_m^{-2}$, $||\zeta_m||_\Sigma = \nu_m^{-2}$, обеспечивающие нормировку базисных элементов $||\mathbf{F}^{e,h}_m||_\Sigma = 1$ и $||\mathbf{G}^{e,h}_m||_\Sigma = 1$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей S, и Ω_d – цилиндр с бесконечно малой высотой d и с базисами $\Sigma \subset S$ и Σ_d, $\Sigma_d \cap \Omega = \emptyset$. Рассмотрим область $\Omega_1 = \Omega \cup \Omega_d$. Области такого типа часто встречаются при постановке задач в теории волноводных систем, см. [6].

Выберем декартову систему координат (X, Y, Z) так, чтобы $\Sigma \subset XOY$, а ось OZ была направлена во внутрь области Ω.

Лемма 1.2. Пусть f – достаточно гладкая функция, определенная в Ω и удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_\Sigma \neq 0 \text{ и } f\big|_{S\setminus\Sigma} = 0 \text{ или } \frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{S\setminus\Sigma} = 0.$$

Если функция $f^0 = f\big|_\Sigma$ удовлетворяет условиям

$$(f^0, \gamma_k)_\Sigma \neq 0, \quad (f^0, \gamma_m)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \quad \text{при} \quad f\big|_{S\setminus\Sigma} = 0, \tag{1.4a}$$

$$(f^0, \zeta_k)_\Sigma \neq 0, \quad (f^0, \zeta_m)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \quad \text{при} \quad \frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{S\setminus\Sigma} = 0, \tag{1.4b}$$

то имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \gamma_k\right)_\Sigma \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \gamma_m\right)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \quad \text{при} \quad f\big|_{S\setminus\Sigma} = 0, \tag{1.5a}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \zeta_k\right)_\Sigma \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \zeta_m\right)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \qquad \text{при} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{S\setminus\Sigma} = 0, \qquad (1.5b)$$

где $\{\gamma_m\}_1^\infty$ и $\{\zeta_m\}_1^\infty$ – системы собственных функций мембранных задач (1.3a) и (1.3b).

Доказательство : В Ω_d рассмотрим функцию $\tilde{f}$, удовлетворяющую граничным условиям при $m \neq k$

$$\left.\tilde{f}\right|_{S_d} = 0, \quad \left.\tilde{f}\right|_\Sigma = \left.f\right|_\Sigma, \quad \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right|_\Sigma = -\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_\Sigma, \quad (\tilde{f}, \gamma_k)_{\Sigma_d} \neq 0, \quad (\tilde{f}, \gamma_m)_{\Sigma_d} = 0, \quad (1.6)$$

где S_d – боковая поверхность цилиндра Ω_d. Функцию $\tilde{f}$ можно представить в виде $\tilde{f} = \psi(z)\phi(x,y)$, где ϕ – достаточно гладкая функция поперечных координат, равная нулю на контуре, охватывающем поперечное сечение Σ. Следовательно, ϕ допускает разложение в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям мембранной задачи (1.3a) :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\gamma}_n, \quad \tilde{\gamma}_n = \mu_n \gamma_n.$$

Из краевых условий (1.6) следует, что

$$(\tilde{f}, \tilde{\gamma}_k)_{\Sigma_d} = \psi(-d)c_k \neq 0, \quad (\tilde{f}, \tilde{\gamma}_m)_{\Sigma_d} = \psi(-d)c_m = 0, \quad m \neq k,$$

откуда следует, что $c_m = 0$ при всех $m \neq k$. Следовательно, всюду в Ω_d имеем

$$\tilde{f} = \psi(z)c_k\tilde{\gamma}_k, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = \psi'(z)c_k\tilde{\gamma}_k.$$

Таким образом, выполняются краевые условия

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_k\right)_{\Sigma_d} = \psi'(-d)c_k \neq 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_k\right)_\Sigma = \psi'(0)c_k = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \tilde{\gamma}_k\right)_\Sigma,$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_m\right)_{\Sigma_d} = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}, \tilde{\gamma}_m\right)_\Sigma = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \tilde{\gamma}_m\right)_\Sigma = 0.$$

Вычисляя предел при $d \to 0$ ($\Omega_1 \to \Omega$, $\Sigma_d \to \Sigma$), получим (1.5a). Аналогично можно доказать (1.5b). Лемма 1.2 доказана.

Отметим, что при $\left.f\right|_\Sigma \neq 0$ имеет место и обратное утверждение, т.е. из (1.5a), (1.5b) следуют (1.4a), (1.4b).

§2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $S \cup \Sigma$, и пусть $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство трехмерных вектор-функций, определенных на Ω и интегрируемых с квадратом в Ω с метрикой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \int_\Omega (u_x v_x^* + u_y v_y^* + u_z v_z^*)\, d\omega.$$

Используем обозначения из [1] – [3] для следующих линеалов :

$\widetilde{J}(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{u}$, у которых $div\ \mathbf{u} = 0$,

$\widetilde{J}_1(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{u}$, у которых $div\ \mathbf{u} = 0$ и $u_z\big|_\Sigma = 0$,

$\widetilde{J}_2(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{v}$, у которых $div\ \mathbf{v} = 0$ и $v_n\big|_S = 0$,

$\widetilde{J}_0(\Omega) =$ гладкие векторы $\mathbf{v}$, у которых $div\ \mathbf{v} = 0$, $v_z\big|_\Sigma = 0$ и $v_n\big|_S = 0$,

$\widetilde{U}_1(\Omega) =$ градиенты гармонических функций, обращающихся в нуль на S,

$\widetilde{U}_2(\Omega) =$ градиенты гармонических функций, нормальная производная которых равна нулю на S.

Далее, пусть $J(\Omega), J_1(\Omega), J_2(\Omega), J_0(\Omega), U_1(\Omega), U_2(\Omega)$ – замыкания в $L_2(\Omega)$ линеалов $\widetilde{J}(\Omega), \widetilde{J}_1(\Omega), \widetilde{J}_2(\Omega), \widetilde{J}_0(\Omega), \widetilde{U}_1(\Omega), \widetilde{U}_2(\Omega)$, соответственно.

Имеем следующие ортогональные разложения, см. [3] :

$$J = J_1 \oplus U_1, \quad J_2 = J_0 \oplus U_2. \tag{2.1}$$

В Ω рассмотрим гладкую вектор-функцию $\mathbf{u} \in \widetilde{J}(\Omega)$, удовлетворяющую условию $\mathbf{u}_t\big|_S = 0$, где $\mathbf{u}_t$ – поперечная компонента вектора $\mathbf{u}$ на Σ. Если предполагать, что касательные компоненты непрерывны на границе l между S и Σ, то получим условие $\mathbf{u}_t\tau\big|_l = 0$, где τ – касательный единичный вектор в l. Согласно Лемме 1.1 имеем

$$\mathbf{u}_t\big|_\Sigma = \mathbf{u}_t^e + \mathbf{u}_t^h = \sum_{m=1}^\infty a_m^e \mathbf{F}_m^e + \sum_{m=1}^\infty a_m^h \mathbf{F}_m^h. \tag{2.2}$$

Так как Ω является предельной областью, то продольная компонента удовлетворяет условию $u_z\big|_l = 0$, Следовательно

$$u_z\big|_\Sigma = \sum_{n=1}^\infty c_n^e \widetilde{\gamma}_n, \quad \widetilde{\gamma}_n = \mu_n \gamma_n,$$

где γ_n – нормированные собственные функции мембранной задачи (1.3a).

Граничные значения на Σ поперечных компонент гладких вектор-функций $\mathbf{v} \in \widetilde{J}_2(\Omega)$ удовлетворяют условию $\mathbf{v}_t \mathbf{n}\big|_l = 0$. Следоватсльно, в силу Леммы 1.1, имеем

$$\mathbf{v}_t\big|_\Sigma = \mathbf{v}_t^e + \mathbf{v}_t^h = \sum_{m=1}^{\infty} b_m^e \mathbf{G}_m^e + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^h \mathbf{G}_m^h.$$

Для продольных компонент предполагаем, что они удовлетворяют условию $\left.\dfrac{\partial v_z}{\partial n}\right|_l = 0$, и тогда они могут быть представлены на Σ в виде регулярно сходящихся рядов

$$v_z\big|_\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^h \widetilde{\zeta}_n, \quad \widetilde{\zeta}_n = \nu_n \zeta_n,$$

где ζ_n – нормированные собственные функции мембранной задачи (1.3b).

Из (2.1), (2.2) следует, что в случае когда вектор $\mathbf{u} \in \widetilde{J}(\Omega)$ и $\mathbf{u}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{N}_1(\Sigma)$, то $\mathbf{u} \in \widetilde{J}_1(\Omega)$. Следовательно, в $\widetilde{J}_1(\Omega)$ существуют, по крайней мере, два множества гладких вектор-функций $\widetilde{J}_1^e(\Omega)$ и $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$, поперечные компоненты которых на Σ принадлежат $\widetilde{M}_0(\Sigma)$ и $\widetilde{N}_1(\Sigma)$, соответственно. Аналогично, в $\widetilde{J}_0(\Omega)$ существуют два линеала $\widetilde{J}_0^h(\Omega)$ и $\widetilde{J}_0^e(\Omega)$, поперечные компоненты которых на Σ принадлежат $\widetilde{M}_1(\Sigma)$ и $\widetilde{N}_0(\Sigma)$, соответственно.

Линеалы $\widetilde{J}_1^e(\Omega)$, $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$, $\widetilde{J}_0^h(\Omega)$ и $\widetilde{J}_0^e(\Omega)$ будем рассматривать как множества гладких соленоидальных вектор-функций в Ω, индуцированные ортогональными линеалами $\widetilde{M}_0(\Sigma)$, $\widetilde{N}_1(\Sigma)$, $\widetilde{M}_1(\Sigma)$ и $\widetilde{N}_0(\Sigma)$ соответственно.

Рассмотрим следующие множества :

$\widetilde{J}^e(\Omega)$ = гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{u}$, для которых $\mathbf{u}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{M}_0(\Sigma)$,

$\widetilde{J}_2^h(\Omega)$ = гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{v}$, для которых $\mathbf{v}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{M}_1(\Sigma)$ и $v_n\big|_S = 0$,

$\widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$ = гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{u}$, для которых $\mathbf{u}_t\big|_\Sigma \in \widetilde{M}_0(\Sigma)$, $(u_z, \gamma_k)_\Sigma \neq 0$ и $(u_z, \gamma_m)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$,

$\widetilde{J}^{k,h}(\Omega)$ = гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{u}$, для которых $u_z\big|_\Sigma = 0$, $(\mathbf{u}_t, \mathbf{F}_k^h)_\Sigma \neq 0$ и $(\mathbf{u}_t, \mathbf{F}_m^h)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$,

$\widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$ = гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{v}$, для которых $v_n\big|_S = v_z\big|_\Sigma = 0$, $(\mathbf{v}_t, \mathbf{G}_k^e)_\Sigma \neq 0$ и $(\mathbf{v}_t, \mathbf{G}_m^e)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$,

$\widetilde{J}_2^{k,h}(\Omega)$ = гладкие соленоидальные вектор-функции $\mathbf{v}$, для которых $v_n\big|_S = 0$, $(v_z, \zeta_k)_\Sigma \neq 0$ и $(v_z, \zeta_m)_\Sigma = 0$ при $m \neq k$.

Через $J^{e,h}, J_i^{e,h}, J_i^{k,e,h}$ обозначим замыкания в $L_2(\Omega)$ соответственных множеств, $i = 0, 1, 2$.

Ортогональные разложения (2.1) для индуцированных подпространств имеют вид

$$J^e = J_1^e \oplus U_1, \quad J_2^h = J_0^h \oplus U_2. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. Пусть γ_m – гармонические функции в Ω, удовлетворяющие граничным условиям

$$\gamma_m\big|_\Sigma = \gamma_m^0, \quad \gamma_m\big|_S = 0. \tag{2.4}$$

Система вектор-функций $\{\mathbf{w}_m = grad\ \gamma_m\}$ образует ортогональный базис в индуцированном подпространстве U_1 со свойством

$$||\mathbf{w}_m||_\Omega \approx \mu_m^{-1}, \quad m \to \infty, \tag{2.5}$$

где μ_m^2 – собственные значения мембранной задачи (1.3а), отвечающие собственным функциям γ_m^0. Для U_1 имеет место разложение

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus U_k^e, \tag{2.6}$$

где U_k^e – подпространства, индуцированные вектор-функциями $\mathbf{F}_k^e$.

Доказательство : Как показано в [5], функции $\mathbf{w}_m$ линейно независимы и система $\{\mathbf{w}_m\}_1^\infty$ полна в U_1. Так как γ_m удовлетворяют условию (1.4а), то по Лемме 1.2 имеем

$$(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_n)_\Omega = \left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial z}, \gamma_n^0\right)_\Sigma = \begin{cases} = 0, & m \neq n, \\ \neq 0, & m = n. \end{cases}$$

Следовательно. $\{\mathbf{w}_m\}$ является ортогональным базисом в U_1. Чтобы получить (2.5) рассмотрим гармонические функции $\widetilde{\gamma}_m$, удовлетворяющие граничным условиям (ср. (1.6))

$$\widetilde{\gamma}_m|_{S_d} = 0, \quad \widetilde{\gamma}_m|_\Sigma = \gamma_m\big|_\Sigma, \quad \widetilde{\gamma}_m|_{\Sigma_d} = \gamma_m^0, \quad \frac{\partial \widetilde{\gamma}_m}{\partial z}\bigg|_\Sigma = \frac{\partial \gamma_m}{\partial z}\bigg|_\Sigma. \tag{2.7}$$

Так как в Ω_d функция $\widetilde{\gamma}_m$ допускает разделение переменных, то решение уравнения Лапласа в этой области, удовлетворяющее краевому условию (2.7), имеет вид

$$\widetilde{\gamma}_m(x, y, z) = f_m(z)\gamma_m^0(x, y) = [(e^{-\mu_m d} - b_m e^{-2\mu_m d})e^{-\mu_m z} + b_m e^{\mu_m z}]\gamma_m^0(x, y),$$

где b_m – некоторые постоянные. Легко видеть, что $f_m(-d) = 1$. Подставляя $\widetilde{\gamma}_m$ в (2.7) и вычисляя предел при $d \to 0$, получим

$$\gamma_m|_\Sigma = \gamma_m^0, \quad \frac{\partial \gamma_m}{\partial z}\bigg|_\Sigma = \mu_m g_m \gamma_m^0,$$

где $g_m = 1 - 2b_m$. Следовательно

$$\|\mathbf{w}_m\|^2_\Omega = \int_\Sigma \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \gamma^0_m \, d\sigma = g_m \mu_m^{-1}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь функцию φ, гармоническую в Ω и равную нулю на S, а на Σ принимающую значение φ^0. Пусть φ^0 – достаточно гладкая вектор-функция, обращающаяся в нуль на $l = S \cap \Sigma$. Далее, предположим, что на Σ нормальная производная φ непрерывна. Так как $\varphi\big|_l = \varphi^0\big|_l = 0$, то имеем $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_l = 0$. Тогда

$$(grad\, \varphi, \mathbf{w}_m)_\Omega = \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma^0_m \, d\sigma = \int_\Sigma \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} \varphi^0 \, d\sigma = \mu_m g_m \int_\Sigma \varphi^0 \gamma^0_m \, d\sigma. \tag{2.9}$$

На Σ граничные функции φ^0 и $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_\Sigma$ допускают разложения в регулярно сходящиеся ряды по ортонормированному базису $\{\widetilde{\gamma}^0_m = \mu_m \gamma^0_m\}_1^\infty$. Так как этот базис является полным, то имеют место равенства Парсеваля

$$\|\varphi^0\|^2_\Sigma = \sum_{m=1}^\infty \left|(\varphi^0, \widetilde{\gamma}^0_m)_\Sigma\right|^2, \quad \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\|^2_\Sigma = \sum_{m=1}^\infty \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \widetilde{\gamma}^0_m\right)_\Sigma\right|^2.$$

Следовательно, получим минимально возможные оценки

$$\left|(\varphi^0, \widetilde{\gamma}^0_m)_\Sigma\right| \approx m^{-(1+\varepsilon)/2}, \quad \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \widetilde{\gamma}^0_m\right)_\Sigma\right| \approx m^{-(1+\varepsilon)/2}, \quad 0 \le \varepsilon < 1, \quad m \to \infty.$$

Из (2.9) следует, что $g_m \approx \mu_m^{-1}$, а из (2.8) вытекает (2.5).

Обозначим через $\widetilde{U}^e_k(\Omega)$ линеал градиентов гармонических функций φ, для которых

$$\varphi\big|_S = 0, \quad (\varphi^0, \widetilde{\gamma}^0_k)_\Sigma \ne 0, \quad (\varphi^0, \widetilde{\gamma}^0_m)_\Sigma = 0, \quad m \ne k.$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{w} = grad\varphi \in \widetilde{U}^e_k(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{w}_r\big|_S = 0, \quad (\mathbf{w}_t, \mathbf{F}^e_k)_\Sigma \ne 0, \quad (\mathbf{w}_t, \mathbf{F}^e_m)_\Sigma = 0, \quad m \ne k.$$

Согласно Лемме 1.2 любые векторы из $\widetilde{U}^e_k(\Omega)$ и $\widetilde{U}^e_m(\Omega)$ взаимно ортогональны, и поскольку система $\{\mathbf{w}_m\}_1^\infty$ полна (см. [5]), то получим (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Так как $J^e \subset J$ и $J^e_0 \subset J_0$, то в силу теоремы единственности представления J и J_0 (см. [3]), имеем

$$\mathbf{u} = rot\, \widetilde{\mathbf{v}}, \quad \widetilde{v}_n\big|_S = 0, \quad \widetilde{v}_z\big|_\Sigma = 0, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{J}^e(\Omega), \tag{2.10a}$$

$$\mathbf{v} = rot\, \widetilde{\mathbf{u}}, \quad \widetilde{\mathbf{u}_r}\big|_S = 0, \quad \widetilde{\mathbf{u}_r}\big|_\Sigma = 0, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{J}^e_0(\Omega). \tag{2.10b}$$

Из (2.10a) следует, что для всех $\mathbf{w}^k \in U_1 \subset J^e$, удовлетворяющих $\mathbf{w}_t^k|_\Sigma = \mathbf{F}_k^e$, существует соленоидальная вектор-функция $\mathbf{p}^k \in \widetilde{J}_0(\Omega)$ такая, что

$$rot\ \mathbf{p}^k = \mathbf{w}^k, \quad p_n^k|_S = p_z^k|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1. \tag{2.11}$$

Так как Ω является предельной областью, то можно доказать, что

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{G}_k^e)_\Sigma \neq 0, \quad (\mathbf{p}^k, \mathbf{G}_m^e)_\Sigma = 0, \quad m \neq k, \tag{2.12}$$

т.е. $\mathbf{p}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$. Ввиду (2.10b) для вектора $\mathbf{p}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega) \subset \widetilde{J}_0(\Omega)$ существует соленоидальная вектор-функция $\mathbf{q}^k$ такая, что

$$rot\ \mathbf{q}^k = \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{q}_r^k|_S = \mathbf{q}_t^k|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1. \tag{2.13}$$

Имеем

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{G}_m^e)_\Sigma = \int_\Sigma rot\ \mathbf{q}^k\ rot\ (\gamma_m^0 \mathbf{z}_0)\ d\sigma = \oint_l rot\ (\gamma_m^0 \mathbf{z}_0)[\mathbf{q}^k \times \tau_0]\ dl +$$

$$+ \int_\Sigma \mathbf{q}^k [grad\ div\ (\gamma_m^0 \mathbf{z}_0) - \mathbf{z}_0 \Delta_\perp \gamma_m^0]\ d\sigma = - \int_\Sigma q_z^k \Delta_\perp \gamma_m^0\ d\sigma = \mu_m^2 (q_z^k, \gamma_m^0)_\Sigma.$$

Согласно (2.12) получим $\mathbf{q}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$rot\ \mathbf{g}^k = \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{g}_t^k|_S = 0, \quad k \geq 1, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{p}^k$ – решения задачи (2.11). Общее решение задачи (2.14) можно представить в виде

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{q}^k + C\mathbf{w}^k, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{q}^k$ - частное решение задачи (2.14), удовлетворяющее краевым условиям (2.13), а C – постоянная. Нетрудно видеть, что $\mathbf{g}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{h}^k$ – решение краевой задачи

$$rot\ \mathbf{h}^k = \mathbf{g}^k, \quad \mathbf{h}_n^k|_S = h_z^k|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{g}^k$ – решение задачи (2.14). В силу (2.15) получим $\mathbf{g}_t^k|_\Sigma = C\mathbf{F}_k^e$. Следовательно, $\mathbf{h}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$.

Теорема 2.2. Системы вектор-функций $\{\mathbf{h}^k\}_1^\infty$ и $\{\mathbf{g}^k\}_1^\infty$, которые являются решениями задач (2.16) и (2.14), порождают ортогональные базисы в J_0^e и J^e, соответственно. Индуцированные подпространства J_0^e и J^e допускают представления вида

$$J_0^e = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J_2^{k,e}, \quad J^e = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J^{k,e}. \tag{2.17}$$

Доказательство : Сначала рассмотрим вектор-функции $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$. Используя (2.11) и (2.13), получим

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{p}^m)_\Omega = (\mathbf{q}^k, rot\ \mathbf{p}^m)_\Omega - \int_{S\cup\Sigma} (\mathbf{q}^k \times \mathbf{p}^m)\mathbf{n}\, d\sigma = (\mathbf{q}^k, \mathbf{w}^m)_\Omega = (q_z^k, \gamma_m^0)_\Sigma.$$

По определению $\widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$ заключаем, что векторы $\{\mathbf{p}^k\}$ попарно ортогональны. Пусть теперь $\mathbf{v} \in \widetilde{J}_0(\Omega)$ допускают представление (2.10b) и

$$(\mathbf{v}, \mathbf{p}^k)_\Omega = 0, \quad k \geq 1. \tag{2.18}$$

В силу (2.10b) и (2.13) имеем

$$(\mathbf{v}, \mathbf{p}^k)_\Omega = (rot\ \mathbf{u}, rot\ \mathbf{q}^k)_\Omega = (\mathbf{u}, rot\ rot\ \mathbf{q}^k)_\Omega + \int_{S\cup\Sigma} [\mathbf{u} \times rot\ \mathbf{q}^k]\mathbf{n}\, d\sigma =$$

$$= (\mathbf{u}, \mathbf{w}^k)_\Omega = (u_z, \gamma_k^0)_\Sigma = \mu_k^{-2}(\mathbf{v}_t, \mathbf{G}_k^e)_\Sigma = 0, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, $\mathbf{v}_t\big|_\Sigma = 0$. С другой стороны, из (2.10b) вытекает $\|\mathbf{v}_t\|_\Sigma \neq 0$ (см. [2]). Таким образом, равенства (2.18) будут иметь место только в случае $\mathbf{v} \equiv 0$, что означает полноту системы $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$ в J_0^e. Таким образом, мы доказали, что система вектор-функций $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$ образует ортогональный базис в J_0^e.

Рассмотрим теперь вектор-функции $\mathbf{q}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$, удовлетворяющие (2.13). Согласно (2.10a) имеем

$$\mathbf{q}^k = rot\ \dot{\mathbf{h}}^k, \quad \dot{h}_n^k\big|_S = 0, \quad \dot{h}_z^k\big|_\Sigma = 0. \tag{2.19}$$

Вектор-функции $\dot{\mathbf{h}}^k \in \widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$ удовлетворяют уравнениям $rot\ rot\ \dot{\mathbf{h}}^k = \mathbf{p}^k$. В силу (2.13) получим $\left.\dfrac{\partial \dot{\mathbf{h}}_t^k}{\partial z}\right|_\Sigma = 0$. Используя ортогональность линеалов $\widetilde{J}_2^{k,e}(\Omega)$ и $\widetilde{J}_2^{m,e}(\Omega)$, получим

$$(\mathbf{q}^k, \mathbf{q}^m)_\Omega = (\dot{\mathbf{h}}^k, rot\ \mathbf{q}^m)_\Omega - \int_{S\cup\Sigma} (\dot{\mathbf{h}}^k \times \mathbf{q}^m)\mathbf{n}\, d\sigma = (\dot{\mathbf{h}}^k, \mathbf{p}^m)_\Omega = \begin{cases} = 0, & m \neq k, \\ \neq 0, & m = k, \end{cases}$$

т.е. система $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty$ ортогональна. Имеем

$$(\mathbf{u}, \mathbf{q}^k)_\Omega = (\mathbf{v}, rot\ \mathbf{q}^k)_\Omega - \int_{S\cup\Sigma} (\mathbf{v}\times\mathbf{q}^k)\mathbf{n}\, d\sigma = (\mathbf{v}, \mathbf{p}^k)_\Omega.$$

Следовательно, ортогональность $\mathbf{u} \in \widetilde{J}^e(\Omega)$ ко всем векторам $\mathbf{q}^k \in \widetilde{J}^{k,e}(\Omega)$ эквивалентна ортогональности $\mathbf{v} \in \widetilde{J}_0^e(\Omega)$ к базису $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$, т.е. $\mathbf{u} \equiv 0$. Мы доказали, что система ортогональных вектор-функций $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty$ полна в J^e, т.е. $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty$ является базисом в J^e.

Вернемся теперь к функциям $\mathbf{g}^k \in J^{k,e}(\Omega)$, которые являются решениями задачи (2.14). В силу (2.15), имеем

$$\mathbf{g}^k = C_1\tilde{\mathbf{q}}^k + C_2\tilde{\mathbf{w}}^k, \quad \tilde{\mathbf{q}}^k = \frac{\mathbf{q}^k}{||\mathbf{q}^k||}, \quad \tilde{\mathbf{w}}^k = \frac{\mathbf{w}^k}{||\mathbf{w}^k||}, \tag{2.20}$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные. Тогда

$$(\mathbf{g}^k, \mathbf{g}^m) = (C_1C_1' + C_2C_2')\delta_{k,m} + C_1C_2'(\tilde{\mathbf{q}}^k, \tilde{\mathbf{w}}^m) + C_1'C_2(\tilde{\mathbf{w}}^k, \tilde{\mathbf{q}}^m),$$

где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Так как

$$(\tilde{\mathbf{q}}^k, \tilde{\mathbf{w}}^m) = \frac{(\mathbf{q}^k, grad\ \gamma_m^0)}{||\mathbf{q}^k||\cdot||\mathbf{w}^m||} = \frac{(q_z^k, \gamma_m^0)_\Sigma}{||\mathbf{q}^k||\cdot||\mathbf{w}^m||} = \begin{cases} = 0, & m\neq k, \\ \neq 0, & m = k, \end{cases}$$

то система $\{\mathbf{g}^k\}_1^\infty$ ортогональна. Для произвольной вектор-функции $\mathbf{u} \in J^e(\Omega)$ имеем

$$||\mathbf{u}||^2 = \sum_{k=1}^\infty |(\mathbf{u}, \mathbf{g}^k)|^2 = \sum_{k=1}^\infty \left|(\mathbf{u}, C_1\mathbf{q}^k + C_2\mathbf{w}^k)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2C_1^2\sum_{k=1}^\infty \left|(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{q}}^k)\right|^2 + 2C_2^2\sum_{k=1}^\infty \left|(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{w}}^k)\right|^2 < \infty.$$

Согласно равенству Парсеваля система $\{\mathbf{g}^k\}_1^\infty$ полна в J^e. Следовательно, ортогональное разложение (2.17) для J^e доказано. Аналогично можно доказать ортогональное разложение (2.17) для J_0^e. Теорема 2.2 доказана.

Рассуждая как в Теоремах 2.1 и 2.2, можно доказать следующие утверждения для индуцированных подпространств J_1^h, J_2^h и U_2.

Теорема 2.3. **Пусть ζ_m – гармонические в Ω функции, удовлетворяющие граничным условиям**

$$\zeta_m\big|_\Sigma = \zeta_m^0, \quad \frac{\partial\zeta_m}{\partial z}\bigg|_S = 0.$$

Система вектор-функций $\{\mathbf{w}_m = grad\ \zeta_m\}$ образует ортогональный базис в индуцированном подпространстве U_2. Справедлива оценка $||\mathbf{w}_m||_\Omega \approx \nu_m^{-1}$ при $m\to\infty$, где ν_m^2 – собственные значения мембранной задачи (1.3b), отвечающие собственным функциям ζ_m^0, и $U_2 = \sum_{k=1}^\infty \oplus U_k^h$, где U_k^h – подпространства, индуцированные вектор-функциями $\mathbf{G}_k^h$.

Теорема 2.4. **Индуцированные подпространства J_1^h и J_2^h допускают представления вида**

$$J_1^h = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J^{k,h}, \quad J_2^h = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus J_2^{k,h}.$$

Теперь докажем основной результат настоящей статьи.

Теорема 2.5. **Пространства соленоидальных вектор-функций J и J_2 можно представить в виде ортогональных сумм индуцированных подпространств**

$$J = J^e \oplus J_1^h, \quad J_2 = J_0^e \oplus J_2^h, \tag{2.21}$$

где J_0^e, J^e и J_1^h, J_2^h удовлетворяют условиям Теорем 2.2 и 2.4, соответственно.

Доказательство : Для доказательства первой части (2.21), достаточно проверить, что линеал $\widetilde{J}(\Omega)$ можно однозначно представить в виде прямой суммы линеалов $\widetilde{J}^e(\Omega)$ и $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$, $\widetilde{J}^e \cap \widetilde{J}_1^h = \emptyset$. Пусть $\mathbf{u} \in \widetilde{J}(\Omega)$ – гладкая вектор-функция, касательная компонента которой обращается в нуль на $S \cup \Sigma$. Линеал таких функций является плотным в J (см. [4]). Положим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^h, \quad \mathbf{u}^e \in \widetilde{J}^e(\Omega), \quad \mathbf{u}^h \in \widetilde{J}_1^h(\Omega), \tag{2.22}$$

и допустим, что $\mathbf{u} = 0$. Согласно Лемме 1.1 имеем

$$\mathbf{u}_t^e\big|_\Sigma \in \widetilde{M_0}(\Sigma), \quad \mathbf{u}_t^h\big|_\Sigma \in \widetilde{N}_1(\Sigma), \quad \mathbf{u}_t^e\big|_\Sigma \perp \mathbf{u}_t^h\big|_\Sigma,$$

откуда следует $\mathbf{u}_t^e\big|_\Sigma = \mathbf{u}_t^h\big|_\Sigma = 0$. Таким образом, $\mathbf{u}^h \in H$ = линеал гладких векторов $\mathbf{u} \in \widetilde{J}_1^h(\Omega)$, для которого $\mathbf{u}_r\big|_S = \mathbf{u}_t\big|_\Sigma = 0$ и $u_z\big|_\Sigma = 0$. Линеал H является плотным в $\widetilde{J}_1^h(\Omega)$. Однако, H является подмножеством $\widetilde{J}^{k,h}(\Omega) \cap \widetilde{J}^{m,h}(\Omega)$ для любых $m, k \geq 1$, пересечение которых пусто согласно Теореме 2.4. Следовательно, $\mathbf{u}^h = 0$, и поэтому $\mathbf{u}^e = 0$. Мы доказали однозначность представления (2.22).

Ортогональность подпространств J^e и J_1^h эквивалентна ортогональности их базисов $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty \in J^e$ и $\{\mathbf{q}^k\}_1^\infty \in J_1^h$, где $\mathbf{p}^k$ – решение краевой задачи

$$rot\ \mathbf{p}^k = \mathbf{w}^k, \quad p_r^k\big|_S = p_z^k\big|_\Sigma = 0, \quad k \geq 1,$$

а $\mathbf{q}^k$ допускают представление (2.19). Тогда

$$(\mathbf{p}^k, \mathbf{q}^m)_\Omega = (\dot{\mathbf{h}}^k, \mathbf{w}^m)_\Omega - \int_\Sigma (\dot{\mathbf{h}}_t^k \times \mathbf{q}_t^m)\mathbf{z}_0\, d\sigma = \int_{S\cup\Sigma} \dot{h}_n^k \zeta_m\, d\sigma - (\mathbf{F}_k^e, \mathbf{F}_m^h)_\Sigma.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю в силу краевого условия $\dot{h}_n^k\big|_S = \dot{h}_z^k\big|_\Sigma = 0$, а последнее слагаемое равно нулю согласно Лемме 1.1. Следовательно, $(\mathbf{p}^k, \mathbf{q}^m)_\Omega = 0$ при всех k и m, т.е. $\{\mathbf{p}^k\}_1^\infty$ и $\{\mathbf{q}^m\}_1^\infty$ ортогональны. Первое разложение в (2.21) доказано. Аналогично доказывается справедливость второго разложения. Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper considers the space of solenoidal vector-functions defined in a bounded three-dimensional domain Ω, whose surface possesses a planar part Σ. The latter contains orthogonal basis of two-dimensional vector-functions defined on Σ. We prove that any element of the basis generates a space of three-dimensional solenoidal vectors in Ω, and the corresponding space of solenoidal vectors admits an orthogonal expansion by thus induced function spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Б. Быховский, "Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы", вестник ЛГУ, том 13, стр. 50 – 66, 1957.
2. Э. Б. Быховский., "Оценка вектора через его ротор и начально-краевая задача электродинамики в случае смешанных граничных условий", Вестник ЛГУ, том 19, стр. 161 – 164, 1961.
3. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, "Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа", Труды МИАН СССР, том 59, стр. 5 – 36, 1960.
4. Г. Г. Джебеян, Э. Р. Цекановский, "Об одной несамосопряженной краевой задаче в теории волноводов", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 1, № 6, стр. 359 – 373, 1966.
5. Г. Г. Джебеян, "Об операторе Максвелла в ограниченной области при некоторых краевых условиях", Изв. АН АрмССР, Математика, том 2, № 5, стр. 318 – 328, 1967.
6. В. В. Никольский, Т. И. Никольская, Электродинамика и Распространение Радиоволн, Наука, Москва, 1989.

28 марта 2000

Ереванский физический институт
E-mail : rjh@arminco.com

СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ ПРОСТЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Г. Г. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

При изучении локальной разрешимости дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами возникает естественный вопрос описания характеристически простых многочленов. Для (негипоэллиптического) многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ с постоянными коэффициентами описывается набор $\{\alpha\}$ мультииндексов, для которых $P(\xi)$ мощнее чем $D^\alpha P$. Как следствие получен критерий простоты для характеристик многочленов.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n–мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, и через $\mathbb{N}_0^n$ – множество n–мерных мультииндексов, т.е. последовательностей $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ целых неотрицательных чисел. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$. Пусть $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ является линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами и $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ). Сумма берется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Определение 1.1. Пусть $P_1(D)$ и $P_2(D)$ – дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Будем говорить, что оператор P_1 мощнее оператора P_2 (многочлен P_1 мощнее многочлена P_2) и писать $P_2 < P_1$, если для некоторой постоянной $c > 0$ и для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $|P_2(\xi)| \leq c\, |P_1(\xi) + 1|$.

Определение 1.2. (см. [1], Определение 14.3.1). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется характеристически простым, если для некоторой постоянной

$c > 0$ и для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} |\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi)| \le c \left[\sum_{|\nu| \le 1} |\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi)| + 1 \right],$$

где $|\nu| = \sum_{i=1}^n \nu_i$, $\nu \in \mathbb{N}_0^n$.

Определение 1.3. (см. [2], Определение 8.3.5). Однородный оператор $\mathbf{R}(\mathbf{D})$ порядка m называется (вещественного) главного типа, если $\sum_{|\nu|=1} |\mathbf{D}^\nu \mathbf{R}(\xi)| \neq 0$ при $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Из формулы Эйлера для однородных функций следует, что если $\mathbf{R}(\mathbf{D})$ не является оператором главного типа, то $\mathbf{R}(\mathbf{D})$ не эллиптичен. Очевидно, что гипоэллиптические операторы и операторы главного типа являются характеристически простыми. Если порядок локализаций на бесконечности многочлена $\mathbf{P}$ (см. [1], [3]) есть единица, то оператор $\mathbf{P}$ является характеристически простым.

Цель настоящей статьи – нахождение алгебраических условий, при которых $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} < \mathbf{P}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ и при которых негипоэллиптический оператор $\mathbf{P}$ неглавного типа является характеристически простым. Нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения, и мы часто будем ссылаться на [4], где есть много полезных результатов. В частности, в [4] содержатся алгебраические условия, при которых оператор $\mathbf{P}$ является почти гипоэллиптическим, т.е. $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} < \mathbf{P}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$. В настоящей статье рассматривается случай, когда соотношение $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} < \mathbf{P}$ выполняется для множества мультииндексов $\{\nu\}$ и не выполняется для других.

Определение 1.4. Многогранником Ньютона или характеристическим многогранником набора мультииндексов $\{\alpha^1, ..., \alpha^N\}$ (см. [5] — [7]) является наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки $\{\alpha^1, ..., \alpha^N\}$. Многогранник Ньютона $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ набора мультииндексов $(\mathbf{P}) \cup \{0\}$ назовем многогранником Ньютона оператора $\mathbf{P}$ (или многочлена $\mathbf{P}$).

Многогранник $\mathcal{N}$ с вершинами из $\mathbb{N}_0^n$ называется полным, если $\mathcal{N}$ имеет вершину в начале координат и отличные от нее вершины на каждой оси координат. Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник. Множество $\Gamma \subset \mathcal{N}$ называется гранью $\mathcal{N}$, если существуют единичный вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ и число $d = d(\lambda) = d(\lambda, \Gamma) \ge 0$ такие, что $(\lambda, \alpha) \equiv \lambda_1\alpha_1 + ... + \lambda_n\alpha_n = d$ для всех точек $\lambda \in \Gamma$, и $(\lambda, \beta) < d$ при $\beta \in \mathcal{N} \setminus \Gamma$. Вектор λ называется внешней нормалью ($\mathcal{N}$-нормалью) грани Γ. Множество всех $\mathcal{N}$-нормалей грани Γ обозначим через $\Lambda(\Gamma)$.

Определение 1.5. Грань Γ многогранника $\mathcal{N}$ называется главной, если существует вектор $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$, хотя бы одна координата которого положительна. Если в множестве $\Lambda(\Gamma)$ существует вектор λ с неотрицательными (положительными) координатами, то грань Γ называется правильной (вполне правильной). Многогранник $\mathcal{N}$ называется правильным (вполне правильным), если $\mathcal{N}$ – полный и все $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\mathcal{N}$ правильны (вполне правильны).

Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ – многогранник Ньютона многочлена $\mathbf{P}$ и $\mathcal{N}_i^k$ – k-мерные правильные грани $\mathcal{N}$ $(i = 1, ..., M_k,\ k = 0, 1, ..., n-1)$. Каждой такой грани сопоставим подмногочлен $\mathbf{P}^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Легко видеть, что $\mathbf{P}^{i,k}$ является λ-однородным для любого $\lambda \in \Lambda_i^k \equiv \Lambda(\mathcal{N}_i^k)$, т.е. существует число $d(\lambda) = d_{i,k}(\lambda)$ такое, что $\mathbf{P}^{i,k}(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Кроме того, если грань $\mathcal{N}_i^k$ – главная, то $d(\lambda) > 0$.

Определение 1.6. Грань $\mathcal{N}_i^k$ многогранника $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ называется невырожденной (см. [5]), если $\mathbf{P}^{i,k}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^{n,0} \equiv \{\eta\colon \eta \in \mathbb{R}^n,\ \eta_1, ..., \eta_n \neq 0\}$. Если $\mathbf{P}^{i,k}(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$, то грань $\mathcal{N}_i^k$ называется вырожденной.

С каждой (вполне правильной) вырожденной гранью многогранника $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ многочлена $\mathbf{P}$ свяжем некоторые точки и множества.

Пусть $\xi,\ \mu \in \mathbb{R}^n$, $\mu_j > 0$ $(j = 1, ..., n)$. Положим $|\xi|_\mu = \left[\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2/\mu_i}\right]^{1/2}$. Пусть $\mathbf{R}(\xi)$ – μ-однородный многочлен и

$$\Sigma(\mathbf{R}) \equiv \Sigma(\mu, \mathbf{R}) = \{\eta\colon \eta \in \mathbb{R}^{n,0},\ |\eta|_\mu = 1,\ \mathbf{R}(\eta) = 0\}.$$

Очевидно, что если $\mathbf{R}(D)$ – полуэллиптический оператор (эллиптический в однородном случае), то $\Sigma(\mathbf{R}) = \emptyset$. Пусть $\Sigma(\mathbf{R}) \neq \emptyset$ и $\eta \in \Sigma(\mathbf{R})$. Положим

$$\Delta(\eta, \mathbf{R}) = \Delta(\mu, \eta, \mathbf{R}) = \min_\nu\{(\mu, \nu)\colon \nu \in \mathbb{N}_0^n,\ \mathbf{D}^\nu \mathbf{R}(\eta) \neq 0\}. \qquad (1.1)$$

Предположим, что $\Gamma \equiv \mathcal{N}_i^k$ – вырожденная грань многогранника Ньютона $\mathcal{N}(\mathbf{P})$. Для любого $\mu \in \Lambda(\Gamma)$ существуют натуральное число $M = M(\mu, \Gamma)$ и числа $d_j = d_j(\mu, \Gamma)$, $d_0 > d_1 > ... > d_M \geq 0$ такие, что многочлен $\mathbf{P}$ представаляется в виде суммы μ-однородных многочленов

$$\mathbf{P}(\xi) = \sum_{j=0}^M \mathbf{P}(\xi) = \sum_{j=0}^M \sum_{(\mu,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \qquad (1.2)$$

Очевидно, что $\mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{P}^{i,k}$.

Для $\mu \in \Lambda(\Gamma)$ и $\eta \in \Sigma(\mu, \mathbf{P}_j)$ обозначим

$$\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\mu,\alpha)=d_j-(\mu,\beta)} \gamma_{\alpha,\beta}\, \xi^\alpha.$$

Рассмотрим теперь лишь "двуслойные" многочлены, т.е. многочлены, для которых $\mathbf{P}_1(\eta) \neq 0$ при $\eta \in \Sigma(\mu, \mathbf{P}_0)$. Для таких многочленов слои $(\mu, \alpha) = d_i$, $i = 0, 1$ являются главными. В добавление к теоремам 3.2 и 3.3 из [4], докажем следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть $|\mathbf{P}(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. Пусть все правильные грани правильного многогранника $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ невырождены за исключением $(n-1)$–мерной вполне правильной грани $\Gamma = \mathcal{N}_1^{n-1}$. Пусть μ – $\mathcal{N}$–нормаль этой грани (которая определяется однозначно) и $\Sigma(\mathbf{P}_0) \cap \Sigma(\mathbf{P}_1) = \emptyset$. Тогда

a) если $\Sigma^*(\mathbf{P}_0) = \{\eta : \ \eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0),\ d_0 - \Delta(\eta, \mathbf{P}_0) > d_1\} = \emptyset$, то $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P} < \mathbf{P}$ для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^n$;

b) если $\Sigma^*(\mathbf{P}_0) \neq \emptyset$, $(\mu, \beta) \geq d_0 - d_1$, то $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P} < \mathbf{P}$;

c) если $\Sigma^*(\mathbf{P}_0) = \emptyset$, $(\mu, \beta) < d_0 - d_1$ и для некоторой точки $\eta^0 \in \Sigma^*(\mathbf{P}_0)$, $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta^0) \neq 0$, то $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P} \not< \mathbf{P}$;

d) если $\Sigma^*(\mathbf{P}_0) = \emptyset$, $(\mu, \beta) < d_0 - d_1$, $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta) = 0$ для всех $\eta \in \Sigma^*(\mathbf{P}_0)$ и для некоторой точки $\eta^0 \in \Sigma^*(\mathbf{P}_0)$, $\Delta(\eta^0, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0) = \Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0) - (\mu, \beta)$, то $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P} \not< \mathbf{P}$.

Замечание 1.1. В Лемме 2.1 из [4] доказано, что многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена может иметь лишь вполне правильные вырожденные грани.

Замечание 1.2. Из Леммы 2.1 работы [8] следует, что при $n = 2$ соотношение $\Delta(\eta, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0) = \Delta(\eta, \mathbf{P}_0) - (\mu, \beta)$ справедливо для любого мультииндекса такого, что $(\mu, \beta) \leq \Delta(\eta, \mathbf{P}_0)$. Следовательно, при $n = 2$ утверждение Теоремы 1.1 можно перефразировать так :

Теорема 1. 1°. Пусть $n = 2$ и $|\mathbf{P}(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. Пусть все правильные грани правильного многогранника $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ невырождены за исключением одномерной вполне правильной грани $\Gamma = N$ с $\mathcal{N}$–нормалью μ и $\Sigma(\mathbf{P}_0) \cap \Sigma(\mathbf{P}_1) = \emptyset$. Тогда справедливы утверждения a), b) Теоремы 1.1 и кроме того

c′) если $\Sigma^*(\mathbf{P}_0) = \emptyset$, $(\mu, \beta) < d_0 - d_1$ и $(\mu, \beta) < \Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0)$ для некоторой точки $\eta^0 \in \Sigma^*(\mathbf{P}_0)$, то $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P} \not< \mathbf{P}$.

Доказательство Теоремы 1.1 : а) следует из Леммы 1.1 работы [12]. Так как $(\mu,\beta) \geq d_0 - d_1$ и $N(\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}) \subset \mathbb{N}^*(\mathbf{P}) \equiv \{\alpha : \alpha \in \mathbb{N}(\mathbf{P}),\ (\mu,\alpha) < d_1\}$, то из Леммы 2.1 работы [9] следует b).

Пункт с). Положим $\xi = t^\mu \cdot \eta^0$ ($\xi_i = t^{\mu_i} \cdot \eta_i^0$, $i = 1,...,n$, $t > 0$). Тогда из простых геометрических соображений следует, что при $t \to 0$ имеем

$$|\mathbf{P}(\xi)| = t^{d_1} \cdot |\mathbf{P}_1(\eta^0)| + o(t^{d_1}), \qquad |\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}(\xi)| = t^{d_0-(\mu,\beta)} \cdot |\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}_0(\eta^0)| + o(t^{d_0-(\mu,\beta)}).$$

Так как $\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}_0(\eta^0) \neq 0$ и $d_0 - (\mu,\beta) > d_1$ при $t \to \infty$, то получим $|\xi| \to \infty$ и $|\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}(\xi)|/[1 + P(xi)] \to \infty$, т.е. $\mathbf{D}^\beta\mathbf{P} \not< \mathbf{P}$.

Докажем пункт d). По определению числа $\Delta(\eta^0, \mathbf{D}^\beta\mathbf{P}_0)$ можно выбрать вектор $b \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$A = \sum_{(\mu,\alpha)=\Delta(\eta^0,\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}_0)} \frac{b^\alpha}{\alpha!}\mathbf{D}^\alpha\left[\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}_0(\eta^0)\right] \neq 0. \tag{1.3}$$

При $k > 0$ и $t > 0$ положим

$$\xi = \xi(t) = t^\mu\left(\eta^0 + b\,t^{-k\mu}\right), \quad \xi_i = t^{\mu_i}\left(\eta_i^0 + b_i\,t^{-k\mu_i}\right), \quad i = 1,...,n,$$

и рассмотрим поведение многочленов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}$ на множестве $\{\xi(t)\}$ при $t \to \infty$. Из формулы Тейлора имеем

$$\mathbf{P}_0(\xi) = t^{d_0} \cdot \mathbf{P}_0\left(\eta^0 + b\,t^{-k\mu}\right) = t^{d_0} \cdot \sum_\alpha t^{-k(\mu,b)}\,\frac{b^\alpha}{\alpha!}\mathbf{D}^\alpha\mathbf{P}_0(\eta^0) =$$
$$= t^{d_0-k\Delta(\eta^0,\mathbf{P}_0)} \cdot \sum_{(\mu,\alpha)=\Delta(\eta^0,\mathbf{P}_0)} \frac{b^\alpha}{\alpha!}\mathbf{D}^\alpha\mathbf{P}_0(\eta^0) +$$
$$+ t^d \cdot \sum_{(\mu,\alpha)>\Delta(\eta^0,\mathbf{P}_0)} t^{-k(\mu,\alpha)}\frac{b^\alpha}{\alpha!}\mathbf{D}^\alpha\mathbf{P}_0(\eta^0).$$

Тогда, существует число $C_1 \geq 0$ такое, что для достаточно больших t имеем $|\mathbf{P}_0(\xi)| \leq C_1\,t^{d_0-k\Delta(\eta^0,\mathbf{P}_0)}$, а также число $C_2 > 0$ такое, что для всех $t \geq 1$ имеем $|\mathbf{P}_1(\xi)| \leq C_2\,t^{d_1}$. Выберем число $k > 0$ так, чтобы $d_0 - k\Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0) = d_1$. При $t \to \infty$, $|\mathbf{P}(\xi) - \mathbf{P}_0(\xi) - \mathbf{P}_1(\xi)| = o(t^{d_1})$, из двух последних оценок получаем

$$|\mathbf{P}(\xi)| \leq C_3\,t^{d_1} \tag{1.4}$$

для достаточно больших t и некоторой постоянной $C_3 > 0$.

Аналогично, при $t \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}_0(\xi)| &= |A| \cdot t^{d_0-(\mu,\beta)-k\Delta(\eta^0,\mathbf{P}_0)} + o\left(t^{d_0-(\mu,\beta)-k\Delta(\eta^0,\mathbf{P}_0)}\right), \\ |\mathbf{D}^\beta[\mathbf{P}(\xi) - \mathbf{P}_0(\xi)]| &\leq C_4 \cdot t^{d_1-(\mu,\beta)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

некоторой постоянной $C_4 \geq 0$.

Так как $\eta^0 \in \Sigma^*(\mathbf{P}_0)$, то $d_0 - d_1 > \Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0)$. Следовательно, из условия $\Delta(\eta^0, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0) = \Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0) - (\mu, \beta)$ и из определения числа k имеем

$$a \equiv d_0 - (\mu,\beta) - k\Delta(\eta^0, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0) = d_0 - (\mu,\beta) - \frac{\Delta(\eta^0, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0)}{\Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0)}(d_0 - d_1) =$$
$$= \frac{d_0 - d_1}{\Delta(\eta^0, \mathbf{P}_0)}(\mu,\beta) - (\mu,\beta) + d_1 > d_1.$$

Так как $A \neq 0$, то из (1.5) для достаточно больших t получим $|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi)| \geq C_5 \cdot t^a$, где $C_5 > 0$ – постоянная. Так как $a > d_1$, то из (1.4) при $t \to \infty$ получим $|\xi| \to \infty$ и $|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi)|/[1 + |\mathbf{P}(\xi)|] \to \infty$, т.е. $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P} \not< \mathbf{P}$. Теорема 1.1 доказана.

§2. ОБОБЩЕННО-ОДНОРОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ ПРОСТЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Однородный многочлен $\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{R}(\xi_1, \xi_2)$ порядка $m > 0$ с вещественными коэффициентами можно представить в виде (см. [10] или [8])

$$\mathbf{R}(\xi) = r(\xi) \cdot \prod_{j=1}^{M} (\xi_1 - \tau_j \xi_2)^{l_j}, \tag{2.1}$$

где τ_j – попарно различные вещественные числа, а $r(\xi)$ – однородный многочлен порядка $m - (l_1 + \ldots + l_M)$, при этом $r(\xi) \neq 0$ при $\xi_1 \cdot \xi_2 \neq 0$.

Лемма 2.1. Пусть $\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{R}(\xi_1, \xi_2)$ – характеристически простой однородный многочлен порядка m неглавного типа. Тогда в представлении (2.1) имеем $M = 1$, т.е.

$$\mathbf{R}(\xi) = a \cdot (\xi_1 - \tau \xi_2)^m, \tag{2.2}$$

где $a \neq 0$, $\tau \neq 0$.

Доказательство : Пусть $M > 1$. Представим $\mathbf{R}$ в виде

$$\mathbf{R}(\xi) = r_1(\xi)\,(\xi_1 - \tau_1 \xi_2)^{l_1} \cdot (\xi_1 - \tau_2 \xi_2)^{l_2}, \tag{2.3}$$

где $0 \neq \tau_1 \neq \tau_2 \neq 0$ и $l_1, l_2 \geq 1$.

Пусть $\eta^j \in \mathbb{R}^2$, $\eta_1^j - \tau_j \eta_2^j = 0$, $j = 1, 2$. Тогда $r_1(\eta^j) \neq 0$. По формуле Ньютона–Лейбница и из (2.3) имеем

$$\mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{R}(\xi) = l_1!\, r_1(\xi) \cdot (\xi_1 - \tau_2 \xi_2)^{l_2} + r_2(\xi) \cdot (\xi_1 - \tau_1 \xi_2).$$

Из (2.5), (2.15) и (2.16) следует, что $|G_\nu| > 1 - \varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4\nu_0}$. Следовательно, ввиду (2.15) и (2.16) имеем $|E| > 1 - \varepsilon_0$. На основании неравенства Бесселя из (2.3), (2.6) и (2.11) для всех $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем

$$\begin{gathered}\left[\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left(a_k^{(\nu)}\right)^2\right]^{1/2} \le \left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le \\ \left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \le \left[\frac{2}{\varepsilon_0}|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p_0}\right].\end{gathered} \tag{2.17}$$

Из неравенства Гарсия (2.1) следует, что существует перестановка $\sigma_\nu(n)$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, \dots, N_\nu - 1$ такая, что

$$\begin{gathered}\int_E \left[\max_{N_{\nu-1} \le n < N_\nu} \left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)} \phi_{\sigma_\nu(k)}(x)\right|\right]^{p_0} dx \le \\ \le (A_{p_0})^{p_0} \int_E \left[\left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^{(\nu)} \phi_k(x)\right| + \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left[a_k^{(\nu)} \phi_k(x)\right]^2\right)^{1/2}\right]^{p_0} dx.\end{gathered}$$

В силу неравенства Минковского из (2.4), (2.12), (2.13), (2.16) и (2.17), для всех $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем

$$\begin{gathered}\max_{N_{\nu-1} \le n < N_\nu} \left(\int_E \left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)} \phi_{\sigma_\nu(k)}(x)\right|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \le \\ \le A_{p_0}\left[\left(\int_E |Q_\nu(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} + \left(\int_E \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left[a_k^{(\nu)} \phi_k(x)\right]^2\right)^{p_0/2} dx\right)^{1/p_0}\right] \le \\ \le A_{p_0}\left[\left(\int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} + \left(\int_E |g_\nu(x)|^{p_0/2} dx\right)^{1/p_0}\right] + \\ + A_{p_0}\left[\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left(\int_0^1 \left[a_k^{(\nu)} \phi_k(x)\right]^{p_0} dx\right)^{2/p_0}\right]^{1/2} \le \\ \le A_{p_0}\varepsilon + A_{p_0}\left[|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p_0} + B_{p_0}\left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left|a_k^{(\nu)}\right|^2\right)^{1/2}\right] \le \\ \le A_{p_0}\varepsilon + \frac{4}{\varepsilon_0} A_{p_0} B_{p_0} |\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p_0} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Теперь определим перестановку $\sigma(k)$ натуральных чисел $\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$ для $N_{\nu-1} \le k \le N$, $1 \le \nu \le \nu_0$ и положим

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \phi_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x), \tag{2.19}$$

Если $\beta \neq 0$, то легко показать, что в многочлене $r(\xi)$ коэффициент при $\xi_1^{l_1-1}$ не зависит от ξ_2. Пусть при $|\alpha| \leq 1$ имеем $\eta \in \mathbf{R}^{2,0}$, $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{R}(\eta) = 0$. Рассуждая как и выше, но заменяя $\mathbf{D}^{l_1-1}\mathbf{R}$ на $\mathbf{D}^{l_1+\beta_1-1}\mathbf{R}$ придем к противоречию. Доказательство завершено.

Из Леммы 2.2 следует, что характеристически простой и обобщенно-однородный многочлен является однородным, а из Леммы 2.1, такой многочлен имеет представление (2.2). Очевидно, многочлен вида (2.2) является характеристически простым. Таким образом, мы доказали следующее предложение.

Теорема 2.1. Обобщенно–однородный многочлен $\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{R}(\xi_1, \xi_2)$ неглавного типа является характеристически простым тогда и только тогда, когда он имеет вид (2.2).

§3. ОБОБЩЕННО–ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сначала рассмотрим обобщенно-однородные (λ–однородные) многочлены, многогранники Ньютона которых являются полными. Если $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{R})$ - многогранник Ньютона многочлена $\mathbf{R}(\xi)$ из этого класса и $\lambda_j > 0$, $j = 1, ..., n$, то

1) $\mathcal{N}$ – вполне правильный ;

2) $\mathcal{N}$ имеет только одну $(n-1)$–мерную главную грань $\Gamma = \mathcal{N}_1^{n-1}$, на которой сосредоточены все мультииндексы $\alpha \in (R)$;

3) многочлен $\mathbf{R}$ имеет вид

$$\mathbf{R}(\xi) = a_1 \xi_1^{l_1} + ... + a_n \xi_n^{l_n} + \sum_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.1}$$

где $a_1 \cdot a_2 ... a_n \neq 0$, l_j – натуральные числа, $\lambda_j = d/l_j$, $(j = 1, ..., n)$, d является λ–порядком многочлена $\mathbf{R}$.

Далее, для определённости будем считать, что $l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_n$. Следующее предложение является n-мерным аналогом Леммы 2.2.

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{R}(\xi) = \mathbf{R}(\xi_1, ..., \xi_n)$ – λ–однородный многочлен неглавного типа вида (3.1), а $(n-1)$–мерная грань Γ, содержащая все мультииндексы $\alpha \in (\mathbf{R})$, нерегулярна. Если $\mathbf{R}$ характеристически простой, то $l_1 = l_2$.

Доказательство : Так как многочлен $\mathbf{R}$ неглавного типа и грань Γ нерегулярна, имеем $l_1 > 1$ и для некоторый точки $\eta \in \mathbf{R}^{n,0}$ получаем $\mathbf{D}^\nu \mathbf{R}(\eta) = 0$ для всех

$|\nu| \le 1$. Пусть, обратно $l_1 > l_2$. Тогда коэффициент при $\xi_1^{l_1-1}$ в многочлене (3.1) является постоянным. Положим $\xi^s = \eta \cdot s^\lambda$, $s = 1, 2, \ldots$. Тогда для $|\nu| \le 1$, $D^\nu R(\xi^s) = s^{d-(\lambda,\nu)} \cdot D^\nu R(\eta) = 0$, в то время как при $s \to \infty$ имеем $D^{l_1-1}R(\xi^s) = a_1 \cdot l! \cdot \eta_1 \cdot s^{\lambda_1} + \mathrm{const} \to \infty$. Полученные соотношения противоречат тому, что многочлен R характеристически простой. Лемма 3.1 доказана.

Пусть теперь $\Gamma = \mathcal{N}_m^k$ - некоторая k-мерная $(0 < k \le n-1)$ вполне-правильная грань многогранника $\mathcal{N}(R)$. За счёт возможной перенумерации можно считать, что многочлен $R^{m,k}(\xi)$, отвечающий грани Γ, имеет вид

$$R^{m,k}(\xi) = a_1\xi_1^{l_1} + \ldots + a_{k+1}\xi_{k+1}^{l_{k+1}} + \sum_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha^{m,k} \cdot \xi^\alpha, \tag{3.2}$$

где $\alpha_j < l_j$, $j = 1, \ldots, k+1$, $\gamma_\alpha^{m,k} = 0$ для $\alpha_{k+2} \ldots \alpha_n \ne 0$ и $\gamma_\alpha^{m,k} = \gamma_\alpha$ - в противном случае.

Следующее предложение обобщает Лемму 3.1.

Лемма 3.1$'$. Пусть R – λ–однородный многочлен неглавного типа, имеющий вид (3.1), а грань $\Gamma = \mathcal{N}_m^k$, $0 < k \le n-1$ многогранника $\mathcal{N}(R)$ нерегулярна, и подмногочлен $R^{m,k}$ имеет вид (3.2). Если R характеристически простой, то $l_1 = l_2$.

Доказательство : При $k = n-1$ следует из предыдущей леммы. Пусть $k < n-1$. Тогда из (3.1), (3.2) следует, что подмногочлен $R^{m,k}(\xi)$ зависит только от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}$, т.е. $R^{m,k}(\xi) \equiv R(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}, 0, \ldots, 0)$. Так как грань Γ нерегулярна, то множество $\Sigma(\Gamma) = \{\tilde\eta = (\tilde\eta_1, \ldots, \tilde\eta_{k+1}) \in R^{k+1}, \tilde\eta_1, \ldots, \tilde\eta_{k+1} \ne 0, R^{m,k}(\tilde\eta) = 0\}$ непусто. Так как R - многочлен неглавного типа и $R(\eta) = 0$ для любой точки $\eta = (\tilde\eta_1, \ldots, \tilde\eta_{k+1}, 0, \ldots, 0) \in \Sigma(\Gamma)$, то существует точка $\eta^0 = (\tilde\eta_1, \ldots, \tilde\eta_{k+1}, 0, \ldots, 0) \in \Sigma(\Gamma)$ такая, что $D^\nu R(\eta^0) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ и $|\nu| \le 1$. Далее, если $l_1 > l_2$, то коэффициент при $\xi_1^{l_1-1}$ в многочлене (3.2) не зависит от ξ_2, ..., ξ_{k+1}. Рассматривая для $|\nu| \le 1$ поведение многочленов $D_1^{l_1-1}R$ и $D^\nu R$ на последовательности $\xi^s = \eta^0 \cdot s^\lambda$, как и выше придём к противоречию. Доказательство леммы завершено.

Следствие 3.1. Если нерегулярны $(n-1)$ одномерных граней многогранника $\mathcal{N}$ характеристически простого многочлена R неглавного типа и вида (3.1), то $l_1 = l_2 = \ldots = l_n$.

§4. НЕОДНОРОДНЫЕ ДВУСЛОЙНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Пусть $\Gamma = \mathcal{N}_l^k$, $1 \le l \le M_k$, $0 < k \le n-1$ – некоторая правильная нерегулярная грань правильного многогранника Ньютона $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ некоторого многочлена $\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi_1, ..., \xi_n)$. Используя $\mu \in \Lambda(\Gamma)$, представим многочлен $\mathbf{P}$ в виде (1.2). Как и в работе [4], многочлен $\mathbf{P}$ назовём двуслойным, если $\mathbf{P}_1(\eta) \neq 0$ при любом $\mu \in \Lambda(\Gamma)$ и $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$. Таким образом, для двуслойных многочленов в (1.2) основную роль играют лишь два слоя $(\mu, \alpha) = d_0$ и $(\mu, \alpha) = d_1$ многогранника $\mathcal{N}$.

Лемма 4.1. Пусть $|\mathbf{P}(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, и $\Gamma = \mathcal{N}_l^k$ – правильная нерегулярная грань правильного многогранника $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ характеристически простого многочлена $\mathbf{P}$, $\mu \in \Lambda(\Gamma)$, $\eta \in \Sigma'(\mathbf{P}_0) \equiv \{\xi\colon\ \xi \in \Sigma(\mathbf{P}_0),\ D_j\mathbf{P}_0(\xi) = 0,\ j = 1, ..., n\}$. Тогда

$$d_0(\mu) - \Delta(\eta, \mathbf{P}_0) \le d_1(\mu). \tag{4.1}$$

Доказательство : Предположим обратное, т.е.

$$d_0(\mu) - \Delta(\eta, P_0) > d_1(\mu). \tag{4.2}$$

По определению множества $\Sigma'(\mathbf{P}_0)$ и числа $\Delta(\eta, \mathbf{P}_0)$, существует мультииндекс β, $|\beta| > 1$ такой, что $(\mu, \beta) = \Delta(\eta, \mathbf{P}_0)$ и $D^\beta \mathbf{P}_0(\eta) \neq 0$. Тогда для последовательности $\{\xi^s\} = \{s^\mu \cdot \eta\}$, при $s \to \infty$ и $j = 1, ..., n$ имеем

$$|\mathbf{P}(\xi^s)| = s^{d_1}\,|\mathbf{P}_1(\eta)| + o(s^{d_1}), \quad |\mathbf{D}_j\mathbf{P}(\xi^s)| = s^{d_1-\mu_j}\,|\mathbf{D}_j\mathbf{P}_1(\eta)| + o\left(s^{d_1-\mu_j}\right),$$

$$|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)| = s^{d_0-(\mu,\beta)}\,|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta)| + o\left(s^{d_0-(\mu,\beta)}\right).$$

Так как $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta) \neq 0$, $(\mu,\beta) = \Delta(\eta, \mathbf{P}_0)$ и $\mu_j \ge 0$, $j = 1, ..., n$, то эти соотношения вместе с предположением (4.2) показывают, что при $s \to \infty$ имеем $|\xi^s| \to \infty$ и

$$\frac{|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)|}{\sum_{|\nu| \le 1} |\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi^s)| + 1} \to \infty,$$

что противоречит характеристической простоте многочлена P. Доказательство завершено.

Следующее утверждение даёт критерий характеристической простоты для одного класса двуслойных многочленов.

Теорема 4.1. Пусть $\mathbf{P}(\xi)$ – двуслойный многочлен, $|\mathbf{P}(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, и пусть регулярны все правильные грани правильного многогранника Ньютона $\mathcal{N}(\mathbf{P})$, за исключением $(n-1)$-мерной правильной грани

$\Gamma = \mathcal{N}_1^{n-1}$. **Пусть μ – $\mathcal{N}$–нормаль этой грани и $\mathbf{P}_0(\xi) \equiv \mathbf{P}_{d_0}(\xi) \equiv \mathbf{P}^{1,n-1}(\xi)$ – многочлен с изолированными характеристиками (см. [4], Определение 2.1). Для того, чтобы многочлен P был бы характеристически простым, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\eta \in \Sigma'(\mathbf{P}_0)$ выполнялось бы неравенство**

$$d_0 - \Delta(\eta, \mathbf{P}_0) \leq d_1. \tag{4.3}$$

Замечание 4.1. Напомним определение многочленов с изолированными характеристиками. Пусть $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$. μ–однородный многочлен R имеет изолированные характеристики, если для каждой точки $\eta \in \Sigma(\mathbf{R})$ существуют окрестность $U(\eta)$, гладкие μ–однородные функции $q(\xi) = q(\xi,\eta)$, $r(\xi) = r(\xi,\eta)$ и натуральное число $m = m(\eta)$ такие, что $R(\xi) = [q(\xi)]^m\, r(\xi)$, $\quad \xi \in U(\eta)$, при этом $r(\eta,\eta) \neq 0$, $\mathbf{D}_n q(\eta,\eta) \neq 0$.

Замечание 4.2. Из Леммы 2.1 работы [8] следует, что при $n = 2$ любой обобщенно–однородный многочлен $\mathbf{P}_0(\xi)$ имеет лишь изолированные характеристики. Следовательно, в двумерном случае ограничения на характеристики многочлена $\mathbf{P}_0(\xi)$ снимаются. С другой стороны, изучение многочленов, обладающих $(n-1)$–мерными вырожденными гранями по существу не умаляет общности.

Доказательство Теоремы 4.1 : Необходимость следует из Леммы 4.1.

Достаточность. Предположим обратное, что в условиях теоремы существуют мультииндексы $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\frac{|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)|}{1 + \sum_{|\nu|\leq 1} |\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi^s)|} \to \infty. \tag{4.4}$$

Не умаляя общности можно предположить, что $\xi_i^s > 0$, $i = 1,\ldots,n$, $s = 1,2,\ldots$. Положим

$$\lambda_i^s = \ln \xi_i^s \left[\sum_{j=1}^n (\ln \xi_j^s)^2\right]^{-1/2}, \qquad \rho_s = \exp\sqrt{\sum_{j=1}^n (\ln \xi_j^s)^2}.$$

Сосредоточимся на случае, когда при $s \to \infty$ имеем $\lambda^s \to \infty$ и $\eta^s = \rho_s^{\lambda_s - \mu} \to \eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$. Все остальные случаи рассматриваются как в Теореме 2.1 работы [4], так и в Теореме 2 из [8] и Лемме 1.1 из [9] с надлежащими модификациями.

Рассмотрим многочлены $\mathbf{P}(\xi)$, $\mathbf{D}_j\mathbf{P}(\xi)$, $j = 1,\ldots,n$ и $\mathbf{D}^\beta\mathbf{P}(\xi)$ на последовательности $\{\xi^s\} = \{\rho_s^\mu \cdot \eta^s\}$. По условиям теоремы $\mathbf{P}_0(\xi)$ – многочлен с изолированными характеристиками. Тогда (см. [4]) для точки $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$ существуют окрестность

$U(\eta)$, гладкие μ-однородные функции $q(\xi) = q(\xi, \eta)$, $r(\xi) = r(\xi, \eta)$ и натуральное число $m = m(\eta)$ такие, что

$$\mathbf{P}_0(\xi) = [q(\xi)]^m \, r(\xi), \tag{4.5}$$

при этом $r(\eta, \eta) \neq 0$ и $\mathbf{D}_n q(\eta, \eta) \neq 0$ если $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$.

Положим $Q(\xi) = \mathbf{P}(\xi) - \mathbf{P}_0(\xi) - \mathbf{P}_1(\xi)$. В силу (1.2), (4.5) и μ-однородности многочленов $\mathbf{P}_0(\xi)$ и $\mathbf{P}_1(\xi)$ имеем

$$\mathbf{P}(\xi^s) = \rho_s^{d_0} [q(\eta^s)]^m \; r(\eta^s) + \rho_s^{d_1} \cdot \mathbf{P}_1(\eta^s) + Q(\xi^s), \qquad s = 1, 2, ..., \tag{4.6}$$

$$\mathbf{D}_j\mathbf{P}(\xi^s) = \rho_s^{d_0 - \mu_j} [q(\eta^s)]^{m-1} \; r_j(\eta^s) + \rho_s^{d_1 - \mu_j} \cdot \mathbf{D}_j \mathbf{P}_1(\eta^s) + \mathbf{D}_j Q(\xi^s), \qquad j = 1, ..., n. \tag{4.7}$$

где $r_j(\xi) = m\, r(\xi)\, \mathbf{D}_j q(\xi) + q(\xi)\, \mathbf{D}_j r(\xi)$, $r_n(\eta) \neq 0$ и

$$\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s) = \rho_s^{d_0 - (\mu, \beta)}\, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta^s) + \rho_s^{d_1 - (\mu,\beta)}\, \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_1(\eta^s) + \mathbf{D}^\beta Q(\xi^s). \tag{4.8}$$

Из простых геометрических соображений следует, что при $s \to \infty$ имеем

$$|Q(\xi^s)| = o(\rho_s^{d_1}), \quad |\mathbf{D}^\beta Q(\xi^s)| = o(\rho_s^{d_1 - (\mu,\beta)}), \tag{4.9}$$

$$|\mathbf{D}_j Q(\xi^s)| = o(\rho_s^{d_1 - \mu_j}), \quad j = 1, ..., n. \tag{4.10}$$

Возможны два случая :

1) $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}) \setminus \Sigma'(\mathbf{P}_0)$, тогда $m = 1$ и 2) $\eta \in \Sigma'(\mathbf{P}_0)$.

Если для всех $s = 1, 2, ..., \eta^s = \eta$, то в случае 1), из (4.6) — (4.10) при $s \to \infty$ следует

$$|\mathbf{P}(\xi^s)| = \rho_s^{d_1}\, |\mathbf{P}_1(\eta)| + o(\rho_s^{d_1}), \tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{D}_j \mathbf{P}(\xi^s)| \geq C_1\, \rho_s^{d_0 - \mu_n}\, |r_n(\eta)| + o(\rho_s^{d_0 - \mu_n}), \tag{4.12}$$

где $C_1 > 0$. Существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что

$$|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)| \leq C_2\, \rho_s^{d_0 - (\mu,\beta)}, \quad s = 1, 2, ..., \tag{4.13}$$

Так как $r_n(\eta) \neq 0$ и $(\mu, \beta) \geq \mu_n$, то соотношения (4.11) — (4.13) противоречат предположению (4.4). В случае 2), из условий Теоремы и Леммы 1.2 работы [4] существует постоянная $C_3 > 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, ...$ $|\mathbf{P}(\xi^s)| \geq C_3\, |\mathbf{P}_1(\eta)| \cdot \rho_s^{d_1}$. Имеем также

$$|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)| \leq |\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta)|\, \rho_s^{d_0 - (\mu,\beta)} + |\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_1(\eta)|\, \rho_s^{d_1 - (\mu,\beta)} + |\mathbf{D}^\beta Q(\xi^s)|.$$

Эти соотношения противоречат (4.4) : если $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta) \neq 0$, то имеем $(\mu, \beta) \geq \Delta(\eta, \mathbf{P}_0)$ и поэтому $d_0 - (\mu, \beta) \leq d_0 - \Delta(\eta, P_0) \leq d_1$; если $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_0(\eta) = 0$, то противоречие очевидно.

Пусть теперь $\eta^s \neq \eta$ для некоторого s. Взяв подпоследовательность можно предположить, что $\eta^s \neq \eta$ для всех $s = 1, 2, \ldots$. При $s \to \infty$ имеем $r_j(\eta^s) \to r_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, n$, при этом $r_n(\eta) \neq 0$ (см. (4.7)). Следовательно, в случае 1), т.е. при $m = 1$, из (4.7) для всех s имеем

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{D}_j \mathbf{P}(\xi^s)| \geq C_4 \rho_s^{d_0 - \mu_n}, \tag{4.14}$$

где $C_4 > 0$ – постоянная. Используя (4.8) — (4.10), получим

$$|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)| \leq C_5 \rho_s^{d_0 - (\mu, \beta)}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{4.15}$$

где $C_5 \geq 0$ – постоянная.

Так как $|\beta| > 1$, то в случае 1) $(\mu, \beta) \geq \mu_n |\beta| > \mu_n$, и соотношения (4.14), (4.15) противоречат (4.4). В случае 2) имеем $m > 1$. Разобьем этот случай на два подслучая : 2.1) $|\beta| < m$ и 2.2) $|\beta| \geq m$. В случае 2.1), согласно (4.5) имеем

$$|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\eta^s)| = |q(\eta^s)|^{m_\beta} \cdot Q_\beta(\eta^s), \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{4.16}$$

где $m_\beta \geq m - |\beta|$.

По условию, $|\mathbf{P}(\xi)| \to \infty$ при $s \to \infty$, и следовательно (см. Лемму 1.2 из [4]), для достаточно больших s (например, $s \geq s_0$) $\mathbf{P}_0(\eta^s) \geq 0$, $\mathbf{P}_1(\eta^s) > 0$ и $r(\eta^s) \neq 0$. Таким образом, из (4.6), (4.9) имеем

$$1 + |\mathbf{P}(\xi^s)| \geq C_6 \left[1 + \rho_s^{d_0} |q(\eta^s)|^m + \rho_s^{d_1}\right], \qquad s \geq s_0, \tag{4.17}$$

где $C_6 > 0$ – постоянная. Из (4.8) и (4.16), при $|\beta| < m$ получим

$$|\mathbf{D}^\beta P(\xi^s)| \leq C_7 \left[\rho_s^{d_0 - (\mu, \beta)} |q(\eta^s)|^{m_\beta} + \rho_s^{d_1 - (\mu, \beta)}\right], \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{4.18}$$

где $C_7 \geq 0$ – постоянная. Из (4.17), (4.18) следует, что

$$\frac{|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)|}{1 + |\mathbf{P}(\xi^s)|} \leq C_8 \frac{\rho_s^{d_0 - (\mu, \beta)} |q(\eta^s)|^{m_\beta}}{1 + \rho_s^{d_0} |q(\eta^s)|^m + \rho_s^{d_1}}, \qquad s \geq s_0, \tag{4.19}$$

где $C_8 > 0$ – постоянная. Теперь применим Лемму 1.3 работы [4] при $x = \rho_s$, $y = |q(\eta^s)|$, $a = d_0 - (\mu, \beta)$, $b = m_\beta \geq m - |\beta|$, $c = d_0$, $d = m$, $e = d_1$ к правой части

(4.19). Из (4.5) и условия $\mathbf{D}_n q(\eta,\eta) \neq 0$ следует, что $\mathbf{D}_n^m \mathbf{P}_0(\eta) \neq 0$, и поэтому, $\Delta(\eta, \mathbf{P}_0) = \mu_n \cdot m$. Используя предположение $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$ получим, что условие (4.3) эквивалентно $d_0 - \mu_n\, m \leq d_1$. Следовательно

$$\frac{(\mu,\beta)}{d_0 - d_1} \geq \frac{(\mu,\beta)}{\mu_n\, m} \geq \frac{|\beta|}{m}$$

и числа (a, b, c, d, e) удовлетворяют условию (1.1) Леммы 1.3 из [4]. Следовательно, правая часть (4.19) ограничена числом C_8 для всех $s \geq s_0$, в противоречии с (4.4). Доказательство для случая 2.1) завершено.

В случае 2.2) наряду с (4.17) рассмотрим следующее очевидное неравенство : $|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)| \leq C_9\, \rho_s^{d_0 - (\mu,\beta)}$ $s = 1, 2, ...,$ где $C_9 \geq 0$ – постоянная. Так как $d_0 - (\mu,\beta) \leq d_0 - \mu_n\, |\beta| \leq d_0 - \mu_n\, m \leq d_1$, то (4.20) и (4.17) противоречат (4.4). Доказательство случая 2.2) завершено. Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. Пусть многочлен P удовлетворяет условиям Теоремы 4.1, при этом $\Sigma(\mathbf{P}_0) = \Sigma'(\mathbf{P}_0)$. Тогда многочлен P является характеристически простым тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} < \mathbf{P}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$.

Доказательство : следует из Теоремы 4.1 и Теоремы 3.1 работы [4].

§5. МНОГОСЛОЙНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Пусть $\Gamma = \mathcal{N}_1^k$ – правильная вырожденная грань многогранника Ньютона $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ многочлена $\mathbf{P}(\xi)$ и $\mu \in \Lambda(\Gamma)$. Для вектора μ представим P в виде (1.2) суммы μ-однородных многочленов.

В Определении 1.2 характеристически простых многочленов участвует аддитивная постоянная $c > 0$. Следовательно, можно предположить, что в (1.2) $d_{\mathcal{M}} = 0$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{M}}(\xi) \equiv \text{const} \neq 0$. Тогда для каждой точки $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$ существуют числа $m = m(\eta)$ и $m' = m'(\eta)$ $(1 \leq m \leq M,\ 1 \leq m' \leq m)$ такие, что $\mathbf{P}_0(\eta) = \mathbf{P}_1(\eta) = ... = \mathbf{P}_{m-1}(\eta) = 0$, $\mathbf{P}_m(\eta) \neq 0$ и

$$|\mathbf{P}_j(\eta)| + |\mathrm{grad}\, \mathbf{P}_j(\eta)| = 0, \quad j = 0, 1, ..., m'-1, \quad |\mathbf{P}_{m'}(\eta)| + |\mathrm{grad}\, \mathbf{P}_{m'}(\eta)| \neq 0.$$

В предыдущем параграфе (и в [4]) мы изучали двуслойные многочлены, т.е. многочлены, для которых $m(\eta) = 1$ для всех $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$. В этом параграфе предполагаем, что $m(\eta) \geq 1$ для $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$.

Пусть $\mu \in \Lambda(\Gamma)$, $0 \leq i \leq M$. Положим

$$\Sigma_i = \Sigma_i(\mu) = \{\eta\colon\ \eta \in \mathbb{R}^{n,0},\ \mathbf{P}_0(\eta) = \mathbf{P}_1(\eta) = ... = \mathbf{P}_i(\eta) = 0,\ \mathbf{P}_{i+1}(\eta) \neq 0\}, \quad (5.1)$$

$$\Sigma_i' = \Sigma_i'(\mu) = \{\eta:\ \eta \in \mathbb{R}^{n,0}, |\mathbf{P}_j(\eta)| + |\mathrm{grad}\, \mathbf{P}_j(\eta)| = 0, \quad j = 1, ..., i,$$
$$|\mathbf{P}_{i+1}(\eta)| + |\mathrm{grad}\, \mathbf{P}_{i+1}(\eta)| \neq 0\}. \tag{5.2}$$

Следующее предложение обобщает Лемму 4.1 и Лемму 1.4 из [4].

Лемма 5.1. Пусть $\Gamma = \mathcal{N}_1^k$ – правильная вырожденная грань (правильного) многогранника Ньютона $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ многочлена $\mathbf{P}$:

a) если $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} < \mathbf{P}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, $\mu \in \Lambda(\Gamma)$, $\eta \in \Sigma_m(\mu)$, $0 \leq j \leq m$, то

$$d_j - \Delta(\eta, \mu, \mathbf{P}_j) \leq d_{m+1}, \tag{5.3}$$

b) если $\mathbf{P}$ является характеристически простым многочленом, $\mu \in \Lambda(\Gamma)$, $\eta \in \Sigma_m'(\mu)$, $0 \leq j \leq m$, то имеем (5.3).

Доказательство : Допустим обратное

$$\delta \equiv d_j - \Delta(\eta, \mu, \mathbf{P}_j) > d_{m+1}, \tag{5.4}$$

и для μ, η обозначим через j наименьший номер, для которого выполняется неравенство (5.4). Очевидно, j определяется однозначно. Пусть мультииндекс ν выбран так, что

$$\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}_j(\eta) \neq 0, \qquad (\mu, \nu) = \Delta(\eta, \mu, \mathbf{P}_j). \tag{5.5}$$

Рассмотрим поведение многочленов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}$ на последовательности $\xi^s = s^\mu \cdot \eta$, $s = 1, 2, ...$ Согласно (1.2) и определению номеров j и m имеем

$$|\mathbf{P}(\xi^s)| = s^{d_{m+1}} \cdot |\mathbf{P}_{m+1}(\eta)| + o(s^{d_{m-1}}), \quad \mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi^s) = s^{d_j - (\mu,\nu)} \cdot \mathbf{D}^\nu \mathbf{P}_j(\eta) + ..., \tag{5.6}$$

с точностью до бесконечно малых членов высокого порядка. Используя (5.5) при $s \to \infty$ получим

$$|\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi^s)| = s^\delta \cdot |\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}_j(\eta)| + 0(s^\delta). \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.4) следует, что при $s \to \infty$

$$\frac{|\mathbf{D}^\nu \mathbf{P}(\xi^s)|}{1 + |\mathbf{P}(\xi^s)|} \to \infty, \tag{5.8}$$

т.е. $|\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} \not< \mathbf{P}$. Таким образом, пункт a) доказан и мы переходим к пункту b). Пусть как и выше, при $\mu \in \Lambda(\Gamma)$ и $\eta \in \Sigma_m'(\mu)$ выполняется соотношение (5.5), при этом номер j выбран наименьшим. Тогда для последовательности $\{\xi^s\}$ имеем

$$\mathbf{P}(\xi^s) = s^{d_{m+1}} \cdot |\mathbf{P}_{m+1}(\eta)| + s^{d_{m+2}} \cdot \mathbf{P}_{m+2}(\eta) + ...,$$

$$\mathbf{D}_i\mathbf{P}(\xi^s) = s^{d_{m+1}-\mu_i} \cdot \mathbf{D}_i\mathbf{P}_{m+1}(\eta) + s^{d_{m+2}-\mu_i} \cdot \mathbf{P}_{m+2}(\eta) + \dots, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, для всех достаточно больших s

$$|\mathbf{P}(\xi^s)| + \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{D}_i\mathbf{P}(\xi^s)| \leq C \cdot s^{d_{m+1}}, \tag{5.9}$$

где $C > 0$ – постоянная. Пусть мультииндекс ν выбран как в (5.5). Тогда многочлен $\mathbf{D}^\nu\mathbf{P}$ удовлетворяет (5.7). Используя (5.9), (5.4), при $s \to \infty$ получим

$$\frac{|\mathbf{D}^\nu\mathbf{P}(\xi^s)|}{1 + \sum_{|\alpha|\leq 1} |\mathbf{D}^\alpha\mathbf{P}(\xi^s)|} \to \infty,$$

что противоречит характеристической простоте многочлена $\mathbf{P}$. Доказательство завершено.

Переходим теперь к достаточным условиям выполнимости соотношений $\mathbf{D}^\nu\mathbf{P} < \mathbf{P}$ (для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$) и как следствие, характеристической простоте многослойных многочленов. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Общий случай получается аналогично, если $\mathbf{P}_j(\xi)$, $j = 0, 1, \dots, m$ – многочлены с изолированными характеристиками.

Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ – правильный многогранник Ньютона многочлена $\mathbf{P}(\xi_1, \xi_2)$ и $\Gamma = \mathcal{N}_1^1$ – некоторая одномерная правильная вырожденная грань $\mathcal{N}$ с нормалью μ. Для некоторого вектора μ представим многочлен $\mathbf{P}$ в виде (1.2). Наложим следующее условие.

Условие А. Для каждой точки $\eta \in \Sigma_m$ существует окрестность $\cup(\eta)$ такая, что $\mathbf{P}_j(\xi) \geq 0 (\leq 0)$ для всех $\xi \in \cup(\eta)$ и $j = 0, 1, \dots, m + 1$.

Замечание 5.1. Согласно Лемме 1.2 работы [4], двуслойные многочлены, для которых $|\mathbf{P}(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, удовлетворяют Условию А. С другой стороны (см. [11]), для возрастающих на бесконечности многослойных многочленов существуют j, $0 \leq j \leq m$ такие, что условие $\mathbf{P}_j(\xi) \geq 0 (\leq 0)$ выполняется в некоторых окрестностях характеристических точек. Следовательно, достаточно требовать вариант Условия А лишь для некоторых номеров j, $0 \leq j \leq m+1$. Однако, будем предполагать, что Условие А имеет место для всех $j = 0, 1, \dots, m+1$. Согласно Лемме 2.1 из [8], при $n = 2$ и для каждой точки $\eta \in \Sigma_m$ многочлены $\mathbf{P}_j$ можно представить в виде

$$\mathbf{P}_j(\xi) = [q_j(\xi)]^{k_j} \cdot r_j(\xi), \qquad j = 0, 1, \dots, m, \tag{5.10}$$

где k_j – натуральные числа, $q_j(\xi)$, $r_j(\xi)$ – гладкие функции (при $\mu_1 = \mu_2$ многочлены), $r_j(\eta) \neq 0$, $\mathbf{D}_i q_j(\eta) \neq 0$, $i = 1,2$; $j = 0,1,...,m$. Используя это представление, условие можно перефразировать так : числа k_j в (5.10) четные и $r_j(\eta) > 0$, $j = 0,1,...,m$, $\mathbf{P}_m(\eta) > 0$.

Теперь докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ – многогранник Ньютона многочлена $\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi_1, \xi_2)$, $\Gamma = \mathcal{N}_1^1$ – единственная вполне правильная вырожденная грань $\mathcal{N}$ и μ – $\mathcal{N}$–нормаль этой грани. Если при этом $\mathbf{P}$ удовлетворяет Условию А, то $\mathbf{D}^\nu \mathbf{P} < \mathbf{P}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ тогда и только тогда, когда для всех точек $\eta \in \Sigma_m$ и $j = 0,1,...,m$ выполняется неравенство (5.3).

Доказательство : Необходимость следует из Леммы 5.1.

Достаточность : Предположим обратное, т.е. что при выполнении условий (5.3) существуют мультииндекс β и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что при $s \to \infty$ выполняется $|\xi^s| \to \infty$ и (5.8) при $\nu = \beta$. Положим $\xi_i^s = \rho_s^{\mu_i} \cdot \eta_i^s$, где $\rho_s > 0$, $|\eta^s|_\mu = 1$, $i = 1,2$, $s = 1,2,....$ Очевидно, что $\{\eta^s\}$ имеет предельную точку. Взяв подпоследовательность можно предположить, что $\eta^s \to \eta$. Случаи $\eta \notin \Sigma(\mathbf{P}_0)$ и $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$ аналогичны соответствующим случаям Леммы 1.1 из [9], поэтому рассмотрим лишь случай $\eta \in \Sigma(\mathbf{P}_0)$.

Если для всех $s = 1,2,...$ имеем $\eta^s = \eta$, то $\mathbf{P}_j(\eta) = 0$, $j = 0,1,...,m$, $\mathbf{P}_{m+1}(\eta) \neq 0$ и из (1.2) следует

$$|\mathbf{P}(\xi^s)| = |\mathbf{P}_{m+1}(\eta)| \cdot \rho_s^{d_{m+1}} (1 + o(1)), \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{5.11}$$

Если для некоторого j, $0 \leq j \leq m$ имеем $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\eta) \neq 0$, то по определению числа $\Delta(\eta, \mathbf{P}_j)$, $(\mu, \beta) \geq \Delta(\eta, \mathbf{P}_j)$. Выбирая j наименьшим номером, удовлетворяющим условию $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\eta) \neq 0$, из (1.2) для достаточно больших s и постоянной $C_1 > 0$ получим

$$|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)| \leq C_1 \cdot |\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\eta)| \cdot \rho_s^{d_j - \Delta(\eta, \mathbf{P}_j)}.$$

Вместе с (5.11) и (5.3) это противоречит (5.8). Пусть теперь $\eta^s \neq \eta$ для бесконечного множества $\{s\}$. Не умаляя общности можно предположить, что $\eta^s \neq \eta$ для всех $s = 1,2,....$ Так как $\mathbf{P}_j(\eta) = 0$, $j = 0,1,...,m$, то по Лемме 2.1 из [8], многочлены $\{\mathbf{P}_j\}$ можно представить в виде (5.10), при этом $q_1(\xi) \equiv q_2(\xi) \equiv ... \equiv q_m(\xi) \equiv q(\xi)$. Из (5.10) следует, что для всех $j = 0,1,...,m$, $s = 1,2,...$

$$\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\eta^s) = [q(\eta^s)]^{k_j(\beta)} \cdot Q_{j,\beta}(\eta^s), \tag{5.12}$$

где $k_j(\beta) \geq k_j - |\beta|$ при $|\beta| < k_j$ и $k_j(\beta) = 0$ – в противном случае, $Q_{j,\beta}(\eta) \neq 0$, $j = 0, 1, ..., m$. Согласно (1.12), (5.10) и μ-однородности многочленов $\mathbf{P}_j(\xi)$ и $\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\xi)$, $j = 0, 1, ..., M$ имеем

$$\mathbf{P}(\xi^s) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_j(\xi^s) + \mathbf{P}_{m+1}(\xi^s) + \mathbf{R}(\xi^s) =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \rho_s^{d_j} [q(\eta)]^{k_j} r_j(\eta^s) + \rho_s^{d_{m+1}} \mathbf{P}_{m+1}(\xi^s) + \mathbf{R}(\xi^s), \tag{5.13}$$

$$\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s) = \sum_{j=0}^{m} \rho_s^{d_j - (\mu,\beta)} \cdot \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_j(\eta^s) + \rho_s^{d_{m+1} - (\mu,\beta)} \cdot \mathbf{D}^\beta \mathbf{P}_{m+1}(\eta^s) + \mathbf{D}^\beta \mathbf{R}(\xi^s). \tag{5.14}$$

Из очевидных геометрических соображений следует, что

$$|\mathbf{R}(\xi^s)| = o(\rho_s^{d_{m+1}}), \qquad |\mathbf{D}^\beta \mathbf{R}(\xi^s)| = o(\rho_s^{d_{m+1} - (\mu,\beta)}). \tag{5.15}$$

Так как многочлен $\mathbf{P}$ удовлетворяет Условию A, то для достаточно больших s и постоянной $C_2 > 0$, из (5.13), (5.15), $r_j(\eta) \neq 0$, $j = 0, 1, ..., m$ и $\mathbf{P}_{m+1}(\eta) \neq 0$ следует

$$1 + |\mathbf{P}(\xi^s)| \geq C_2 \cdot \left[\sum_{j=0}^{m} \rho_s^{d_j} |q(\eta^s)|^{k_j} + \rho_s^{d_{m+1}} \right]. \tag{5.16}$$

Далее, из (5.12) и условий $\mathbf{D}_1 q(\eta) \neq 0$, $\mathbf{D}_2 q(\eta) \neq 0$ следует, что $\mathbf{D}_i^{k_j} \mathbf{P}_j(\eta) \neq 0$, поэтому $\Delta(\eta, \mathbf{P}_j) = \mu_0 \cdot k_j$ при $i = 1, 2$, $j = 0, 1, ..., m$, где $\mu_0 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Тогда (5.3) можно переписать в виде

$$d_j - \mu_0 \cdot k_j \leq d_{m+1}, \qquad j = 0, 1, ..., m. \tag{5.17}$$

Из (5.16), (5.12), для достаточно больших s и постоянной $C_3 > 0$ получим

$$\frac{|\mathbf{D}^\beta \mathbf{P}(\xi^s)|}{1 + |\mathbf{P}(\xi^s)|} \leq C_3 \cdot \frac{\sum_{j=0}^{m} \rho_s^{d_j - (\mu,\beta)} \cdot |q(\eta^s)|^{k_j(\beta)}}{1 + \sum_{j=0}^{m} \rho_s^{d_j} \cdot |q(\eta^s)|^{k_j} + \rho_s^{d_{m+1}}}. \tag{5.18}$$

Применим к каждому слагаемому правой части (5.18) Лемму 1.3 из [4] с обозначениями $x = \rho_s$, $y = |q(\eta^s)|$, $a = d_j - (\mu, \beta)$, $b = k_j(\beta)$, $c = d_j$, $d = k_j$, $e = d_{m+1}$, $j = 0, 1, ..., m$. Если $k_j(\beta) = 0$, т.е. $|\beta| \geq k_j$, то $(\mu, \beta) \geq \Delta(\eta, \mathbf{P}_j)$ и в силу (5.17) получим $d_j - (\mu, \beta) \leq d_j - \Delta(\eta, \mathbf{P}_j) \leq d_{m+1}$. Для таких j соответствующие слагаемые в правой части (5.18) ограничены. Однако, если $k_j(\beta) \neq 0$, то $k_j(\beta) \geq k_j - |\beta|$, и из (5.17) следует, что числа $\{a, b, c, d, e\}$ удовлетворяют условиям Леммы 1.3 работы [4]. Таким образом, получаем, что правая часть (5.18) ограничена. Это противоречит (5.9). Теорема 5.1 доказана.

ABSTRACT. In the study of local solvability of differential operators with constant coefficients the question of description of simple by characteristic polynomials naturally arises. For a (nonhypoelliptic) polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ with constant coefficients we describe the collection $\{\alpha\}$ of multi-indices for which $P(\xi)$ is more powerful than $D^\alpha P$. As a corollary a simplicity criterion for polynomial characteristics is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, том 2, Мир, Москва, 1986.
2. Ю. В. Егоров, Линейные Дифференциальные Уравнения Главного Типа, Москва, Наука, 1984.
3. Г. Г. Казарян, "О локализациях на бесконечности дифференциальных многочленов с постоянными коэффициентами", Изв. НАН Армении, том 29, № 3, стр. 50 — 62, 1994.
4. Г. Г. Казарян, "Об оценках производных многочленов многих переменных", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 3, стр. 44 — 63, 1999.
5. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН, том 91, стр. 59 — 81, 1967.
6. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических многочленов", Мат. сборник, том 75, № 3, стр. 400 — 416, 1968.
7. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Многогранник Ньютона и локальная разрешимость", Труды Моск. Мат. Общества, том 48, 1985.
8. Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических многочленов", Изв. АН Армении. Математика, том 9, № 3, стр. 189 — 211, 1974.
9. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Труды МИАН, том 140, стр. 130 — 161, 1976.
10. B. Pini, "Osservazoni sulla ipoellitticita", Boll. Unione Mat. Ital., Ser. 3, vol. 18, no. 4, pp. 420 — 433, 1963.
11. В. Н. Маркарян, "Добавление младших членов, сохраняющих гипоэллиптичность операторов", Изв. АН Армении. Математика, том 15, № 6, стр. 443 — 460, 1980.
12. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН Армении. Математика, том 21, № 5, стр. 453 — 470, 1986.

22 сентября 1999

Ереванский государственный университет

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ И СВОЙСТВАХ ГРАФОВ СРАВНЕНИЯ

С. Е. Маркосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 3, 2000

Если граф и его дополнение являются графами сравнения, то при любой транзитивной ориентации этих графов существуют вершины *minmin, minmax, maxmin* **и** *maxmax* (*minmin* **– вершина, которая** *min* **в графе и в его дополнении,** *minmax* **– вершина, которая** *min* **в графе и** *max* **в его дополнении , и т.д.). Из этого свойства следует теорема Пнуели, Лемпела и Эвена о графах подстановок. Разработаны алгоритмы решения для таких задач как нахождение максимального числа попарно непересекающихся максимальных независимых множеств и наибольшего** q**-хроматического подграфа.**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный неориентированный граф и $G' = (V, E')$ – дополнение графа G. G будем называть графом сравнения, если его рёбра можно ориентировать так, чтобы полученный ориентированный граф $\vec{G} = (V, \vec{E})$ был бы транзитивен. Будем называть G графом ко-сравнения, если его дополнение G' является графом сравнения. Для удобства иногда будем использовать следующие обозначения : $\vec{G} = (V, \Gamma)$ и $\vec{G'} = (V, \Gamma')$, где Γ и Γ' – многозначные отображения в смысле Бержа [1], а Γ^{-1} и $(\Gamma')^{-1}$ суть обратные отображения.

Вершина $v \in V$ называется minimal (min), если $\Gamma^{-1}x = \emptyset$. Она называется maximal (max), если $\Gamma x = \emptyset$. Аналогично, эти понятия определяются для $\vec{G'}$. Вершина $v \in V$ называется minmax, если она min в $\vec{G}$ и max в $\vec{G'}$. Вершины, называемые maxmin, minmin и maxmax определяются аналогично.

В параграфе 2 доказывается следующая теорема :

Теорема 1. Пусть G **– граф сравнения и ко–сравнения. Тогда при любой транзитивной ориентации графа** $G = (V, E)$ **и его дополнения** $G' = (V, E')$ **существуют вершины maxmin, minmin, maxmax, minmax.**

Следствие 1.(см. [10]) Граф G является графом подстановок, если как G, так и его дополнение G', являются графами сравнения.

Если через T, T' и P обозначим классы графов сравнения, ко-сравнения и подстановок, соответственно, то из Теоремы 1 следует, что $P = T \cap T'$.

В параграфе 3 рассмотрены следующие задачи : 1) нахождение наибольшего независимого множества ; 2) нахождение наибольшей клики ; 3) нахождение минимальной раскраски ; 4) нахождение минимального покрытия вершин кликами ; 5) нахождение максимального q-хроматического подграфа (максимального q независимого множества) ; 6) нахождение максимальных q-клик, т.е. таких непересекающихся q клик, имеющих наибольшее число вершин ; 7) нахождение максимального числа попарно непересекающихся α-независимых множеств, где α – число независимости графа (α-независимое множество содержит α вершин) ; 8) нахождение максимального числа попарно непересекающихся ω-клик, где ω – плотность графа (мощность наибольшей клики).

Задачи 1 – 8 в общем случае NP-трудны. Однако для решения большинства из этих задач разработаны эффективные алгоритмы для отдельных подклассов графов. Для графов интервалов в работах [9], [11] были разработаны эффективные алгоритмы для решения Задач 1 – 5, а для решения Задачи 8 (в §3 настоящей статьи). Задача 5 впервые была сформулирована и решена для графов интервалов в [9], [6-8]. В дальнейшем аналогичные алгоритмы были предложены в работах [13], [15]. Как вытекает из следствия, для графов перестановок все Задачи 1 – 8 имеют эффективные алгоритмы решения.

Для графов сравнения общеизвестны эффективные алгоритмы решения Задач 1 – 4. Для Задачи 6 в работе [4] разработаны некоторые алгоритмы, а для Задач 7, 8 приведены алгоритмы в §3 настоящей статье. Задачи 1, 4 решаются на основе теоремы Дилворта, применением алгоритма нахождения максимального потока (см. [3]). Все эти алгоритмы эффективны, так как их порядок не превосходит $|V|^2$ или $|V|^3$, когда применяются потоковые алгоритмы. Пока не известен эффективный алгоритм для Задачи 5. Однако, Задача 5 для графа подстановок сводится к Задаче 6 для дополнения этого графа, и поэтому эффективно решается, так как дополнение также есть граф сравнения.

В параграфе 3 мы опишем эффективные алгоритмы для оптимального решения Задач 7 и 8, и алгоритм решения Задачи 5 для графов сравнения. Для последнего алгоритма оптимальность не доказана, и поэтому важно выяснить Задача 5 NP-трудна или нет. Также неизвестно, эта задача NP-трудна или нет даже для совершенных графов.

§2 СВОЙСТВА MAXMIN, MINMIN, MAXMAX И MINMAX

Доказательство Теоремы 1 : 1. Вначале докажем существование minmin. Пусть $\vec{G} = (V, \vec{E}) = (V, \vec{\Gamma})$ и $\vec{G'} = (V, \vec{E'}) = (V, \vec{\Gamma'})$ - транзитивно ориентированные графы, полученные после ориентации графов G и G', соответственно. Разобьём V на подмножества $X_1, X_2, ..., X_{\omega(G)}$ следующим образом :

$$X_1 = \{x / x \in X, \quad \Gamma^{-1} x = \emptyset\},$$

$$X_2 = \{x / x \in X \setminus X_1, \quad \Gamma^{-1} x \subseteq X_1\},$$

....

$$X_{\omega(G)} = \{x / x \in X \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq \omega(G)-1} Xj, \quad \Gamma^{-1} x \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq \omega(G)-1} Xj\},$$

где $\omega(G)$ - плотность графа. Каждое X_j - независимое множество. Разбиение $X_1, X_2, ..., X_{\omega(G)}$ является минимальной раскраской графа, и для любой вершины $x_{\omega(G)} \in X_{\omega(G)}$ можно построить наибольшую клику $Q = \{x_{\omega(G)}, x_{\omega(G)-1}, ..., x_1 / x_j \in X_j\}$. Любой подграф $\vec{G'_j} = \vec{G'}(X_j)$ $(j = 1, 2, ..., \omega(G))$, порожденный подмножеством X_j, является полным. Так как $\vec{G'}$ - транзитивно ориентированный граф, то вершины подмножества X_j образуют ориентированную цепь $\mu = (x_1^j, x_2^j, ..., x_{k_j}^j)$. Предположим, что дуги графа $\vec{G}$ окрашены красным, а дуги $\vec{G'}$ синим цветом. Докажем, что вершина $x_1^1 \in X_1$ является minmin. Очевидно, все вершины подмножества X_1 являются min в графе $\vec{G}$. Остаётся показать, что x_1^1 является min в графе $\vec{G'}$, т.е. $(\Gamma')^{-1} x_1^1 = \emptyset$, или в x_1^1 не входят синие дуги. Покажем более общее утверждение : если $p < q \leq \omega(G)$, $x_q \in X_q$, то не существует дуги (x_q, x_p^1). Если мы предположим, что такая дуга существует, то из построения множества X_j $(j = 1, 2, ..., \omega(G))$, для x_q существует $x_{q-1} \in X_{q-1}$ такая, что $x_{q-1} \in \Gamma^{-1} x_q$ (в противном случае $x_q \in X_k$ для $k < q$). Таким образом, $\Gamma^{-1} x_q \cap X_p \neq \emptyset$, т.е. существует красная цепь между множеством X_p и вершиной x_q. Но по предположению существует синяя дуга (x_q, x_p^1), а x_p^1 соединена синей дугой с любой вершиной $x_p^j \in X_p$. Так как граф $\vec{G}$ транзитивно ориентирован, то любая вершина $x_p^j \in X_p$ соединена синей дугой с x_q. Это противоречит с существованием красной дуги между множеством X_p и вершиной x_q. Таким образом, вершина x_1^1 является minmin.

2. Существование minmax.

Покажем теперь, что последняя вершина x^1_{k1} цепи, индуцированная подмножеством X_1, является minmax. Как и в предыдущем пункте можно доказать, что из x^1_{k1} не выходит синих дуг. Это означает, что x^1_{k1} в $\vec{G}'$ является max. Из $x^1_{k1} \in X_1$ следует, что x^1_{k1} является min в $\vec{G}$, т.е. вершина x^1_{k1} является minmax.

3. Существование maxmin.

Пусть x^m_1 – первая вершина из x^j_1 $(j = 1, 2, ..., \omega(G))$, из которой не выходит красная дуга. Покажем, что вершина x^m_1 является maxmin. Для этого нужно показать, что x^m_1 есть min в $\vec{G}'$, т.е. в x^m_1 не входит синяя дуга. Из доказательства пункта 1 мы знаем, что в x^m_1 не входит синяя дуга (x_j, x^m_1), где $x_j \in X_j$, $j \geq m$. Остаётся доказать, что в x^m_1 не входит синяя дуга (x_j, x^m_1), где $x_j \in X_j$, $j < m$. Предположим, что в x^m_1 входит синяя дуга (x^i_s, x^m_1), где $x^i_s \in X_i$, $i < m$. Тогда ясно, что (x^i_1, x^m_1) также является синей дугой. Предположим, что i является последним индексом, для которого (x^i_1, x^m_1) является синей дугой. По выбору вершины x^m_1 из вершины x^i_1 выходят красные дуги. Если (x^i_1, y) – красная дуга, то $y \in X_j$, где $i < j < m$, так как (x^i_1, x^j) - синяя дуга для любого $x^j \in X_j$ $(j = m, m+1, ..., \omega(G))$ (следует из того факта, что дуги (x^i_1, x^m_1) и (x^m_1, x_j), $x_j \in X_j$, $j > m$ – синие). Пусть (x^i_1, x_t), $x^t \in X_t$, $i < t < m$ – последняя красная дуга, выходящая из x^i_1, т.е. t – наибольший индекс, для которого дуга (x^i_1, x^t) – красная. Следовательно, x^t и x^m_1 соединены синей дугой (x^t, x^m_1), а не (x^m_1, x^t). Так как (x^t, x^m_1) является синей дугой, то (x^t_1, x^m_1) также является синей дугой. Но i является последним индексом, для которого (x^i_1, x^m_1) является синей дугой. Это противоречие доказывает, что в x^m_1 не входит синяя дуга, т.е. она является maxmin вершиной.

4. Существование maxmax.

Пусть x^m_{km} – первая вершина из x^j_{kj}, из которой не выходит красной дуги (x^j_{kj} – последняя вершина цепи $\mu_j = (x^j_1, x^j_2, ..., x^j_{kj})$, индуцированная множеством X_j). Как и в пункте 3 можно доказать, что из x^m_{km} не выходит синей дуги, т.е. x^m_{km} является maxmax вершиной. Теорема 1 доказана.

Вышеприведенное доказательство Теоремы 1 является конструктивным, т.е. в доказательстве явно отмечено, какие вершины maxmin, minmin, minmax, maxmax. Можно привести более короткое доказательство Теоремы 1, но оно лишено этого преимущества.

Второе доказательство Теоремы 1 : Дадим новое доказательство только для одного из пунктов. Пусть $\vec{G_\alpha}$ и $\vec{G'_\beta}$ суть ориентированные графы, полученные из транзитивной ориентации α и β графов G и G', соответственно. Предположим, что известно существование minmin вершины из вышеприведенного доказательства, и пусть мы хотим найти вершину minmax для ориентаций α и β. Возьмем ориентации α и β^{-1}, соответствующие G и G' (β^{-1} – обратная ориентация к β). Существование minmin вершины для ориентаций α, β^{-1} следует из первой части этого доказательства. Вершина minmax для ориентаций α и β. Существование maxmin и maxmax доказываются аналогично. Доказательство завершено.

Доказательство Следствия 1 : Пусть транзитивно ориентированные G и G' суть $\vec{G}$ и $\vec{G'}$. Построим подстановку, граф которой изоморфен G. Первую строку $(i_1, i_2, ..., i_n)$ этой подстановки строим следующим образом : первый элемент i_1 есть вершина minmin для графов $\vec{G}$ и $\vec{G'}$, элемент i_2 – вершина minmin для подграфов $\vec{G} - \{i_1\}$ и $\vec{G'} - \{i_1\}$, элемент i_3 – вершина minmin для подграфов $\vec{G} - \{i_1.i_2\}$ и $\vec{G'} - \{i_1.i_2\}$, и т.д. Вторую строку $(j_1, j_2, ..., j_n)$ этой подстановки строим аналогичным путём только каждый раз вместо minmin выбираем maxmin. Нетрудно проверить, что граф подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & ..., & i_n \\ j_1, & j_2, & ..., & j_n \end{pmatrix}$$

изоморфен графу G. Следствие доказано.

§3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 5, 7, 8 ДЛЯ ГРАФОВ СРАВНЕНИЯ

3.1. Алгоритм для Задачи 7.

Задача 7 для графа сравнения G находит наибольшее число попарно непересекающихся независимых множеств мощности $\alpha = \alpha(G)$ = число независимости (стабильности) графа G. Аналогично формулируется Задача 8 для максимального несмежного ω-клика и алгоритм решения которой приведен в пункте 2 этого параграфа.

Алгоритм решения Задачи 7, описанный ниже, включает алгоритм решения Задачи 4, т.е. задача минимального покрытия. Алгоритмы транзитивной ориентации обычно имеют сложность $O(n^3)$, где n – число вершин. Однако разработаны более экономные алгоритмы, имеющие сложность $O(m * \Delta)$, где m – число рёбер, а Δ – максимальная степень графа. Сложность нашего алгоритма имеет тот же порядок. Прежде чем перейти к описанию алгоритма, приведем некоторые факты для транзитивно ориентированных графов, которые будут служить теоретической основой алгоритма.

Пусть $G = (V, E)$ – граф сравнения и $\vec{G} = (V, \vec{E})$ – транзитивно ориентированный граф, полученный из G с помощью некоторой транзитивной ориентации. Если $\Delta = \{Q_1, Q_2, ..., Q_\alpha\}$ (где α – число стабильности) – минимальное покрытие графа G, то каждой клике Q_j $j = 1, 2, ..., \alpha$ соответствует ориентированная цепь $\mu = (x_1^j, x_2^j, ..., x_{k_j}^j)$, т.е. вершины клики Q_j упорядочены. Вообще, вершины графа $\vec{G}$ частично упорядочены, скажем $x > y$, если (x, y) является дугой в $\vec{G}$.

Опишем простой алгоритм нахождения наибольшего независимого множества (α-независимого множества) графа $\vec{G}$ из покрытия $\vec{\Delta} = \{\vec{Q_1}, \vec{Q_2}, ..., \vec{Q_\alpha}\}$. Назовём x α-вершиной, если x содержится в некотором α-независимом множестве. Рассмотрим $S = \{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^\alpha\}$. Если (x_1^p, x_1^q) является дугой, то вершина x_1^p соединена со всеми вершинами клики Q_q, и она не является α-вершиной. Следовательно, α-независимое множество можно получить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм А. Положим $S = \{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^\alpha\}$.

1. Проверяем, содержит ли S дугу или нет. Если нет, то S является α-независимым множеством.

2. Если S содержит дугу $(x_{i_p}^p, x_{i_q}^q)$, то вместо $x_{i_p}^p$ берём $x_{i_p+1}^p$ и переходим к 1.

Для получения максимального числа попарно непересекающихся α-независимых множеств Алгоритм А изменим следующим образом.

Алгоритм В. Начинаем с $S = \{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^\alpha\}$. Пусть текущее состояние $S = \{x_{i1}^1, x_{i2}^2, ..., x_{i\alpha}^\alpha\}$.

1. Проверяем, содержит ли S дугу или нет. Если да– переход к 2, а если нет – переход к 3.

2. Пусть S содержит дугу (x_{ip}^p, x_{iq}^q), тогда берём $S = (S \setminus \{x_{ip}^p\}) \cup \{x_{ip+1}^p\}$, если $i_p + 1 \leq k_p$, то переход к 1, в противном случае конец.

3. Берем $S = \{x_{i1}^1, x_{i2}^2, ..., x_{i\alpha}^\alpha\}$ как очередное α-независимое множество. Если $i_t + 1 \leq k_t$, $t = 1, 2, ..., \alpha$, то переход к 1, приняв $S = \{x_{i1+1}^1, x_{i2+1}^2, ..., x_{i\alpha+1}^\alpha\}$, в противном случае конец.

Теперь мы можем полностью описать алгоритм решения Задачи 7.

Алгоритм 7. Пусть дан граф $G = (V, E)$.

1. Транзитивно ориентируем G и получаем $\vec{G} = (V, \vec{E})$.

2. Находим минимальное покрытие графа $\vec{G}$, $\vec{\Delta} = \{\vec{Q_1}, \vec{Q_2}, ..., \vec{Q_\alpha}\}$.

3. Применяя Алгоритм B, находим максимальное число попарно непересекающихся α-независимых множеств.

Теорема 2. Алгоритм 7 даёт максимальное число попарно непересекающихся α-независимых множеств.

Доказательство : Мы должны показать, что применяя Алгоритм B к некоторому минимальному покрытию $\vec{\Delta} = \{\vec{Q_1}, \vec{Q_2}, ..., \vec{Q_\alpha}\}$ графа $\vec{G}$, получаем максимальное число попарно непересекающихся α-независимых множеств. Легко убедиться, что для этого достаточно показать, что если $S_1 = \{x^1_{i1}, x^2_{i2}, ..., x^\alpha_{i\alpha}\}$ и $S_2 = \{x^1_{j1}, x^2_{j2}, ..., x^\alpha_{j\alpha}\}$ – два произвольных α-независимых множеств графа $\vec{G}$, то подмножества $S_M = \{x^1_{r1}, x^2_{r2}, ..., x^\alpha_{r\alpha}\}$ и $S_m = \{x^1_{t1}, x^2_{t2}, ..., x^\alpha_{t\alpha}\}$, где $x^k_{rk} = \max(x^k_{ik}, x^k_{jk})$ и $x^k_{tk} = \min(x^k_{ik}, x^k_{jk})$ также являются α-независимыми множествами.

Покажем, что две произвольные вершины в S_M несмежны (для S_m доказательство аналогично). Предположим, что вершины x^1_{r1} и x^2_{r2} смежны. Если эти две вершины принадлежат или S_1 или S_2, то, очевидно, они не смежны. Пусть $x^1_{r1} = x^1_{i1}$ и $x^2_{r2} = x^2_{j2}$. Это означает, что $x^1_{j1} < x^1_{i1}$ и $x^2_{i2} < x^2_{j2}$. Тогда (x^1_{r1}, x^2_{r2}) не является дугой, так как из существования дуги (x^1_{i1}, x^2_{j2}) следовало бы существование дуги (x^1_{i1}, x^2_{i2}), что противоречит условию $(x^1_{i1}, x^2_{i2}) \subseteq S_1$. Аналогично, (x^2_{r2}, x^1_{r1}) не есть дуга, так как из этого следовало бы, что $\{x^1_{j1}, x^2_{j2}\} \subseteq S_2$. Поэтому, S_M и S_m являются независимыми множествами. Теорема 2 доказана.

Из доказательства Теоремы 2 видно как можно построить максимальное число попарно непересекающихся α-независимых множеств. В каждой клике $\vec{Q_j}$ пронумеруем α-вершины натуральными числами : максимальные α-вершины в каждой клике получат номер 1, следующие α-вершины – номер 2, и т.д. Ясно, что число α-вершин в каждой клике одинаково, оно равно числу попарно непересекающихся α-независимых множеств. Все α-вершины с одинаковыми номерами образуют α-назависимое множество.

3.2. Алгоритм решения Задачи 8. Доказательство оптимальности для Задачи 8 легче, чем для Задачи 7. Здесь опять используются алгоритмы транзитивной ориентации, ранжировки и максимального потока. Порядок алгоритма ранжировки меньше порядка алгоритма транзитивной ориентации и максимального потока. Поэтому сложность этого алгоритма равна сложности последнего алгоритма. Известные алгоритмы максимального потока имеют сложность $O(n^3)$, где n – число вершин.

Пусть $G = (V, E)$ – граф сравнения, а $\vec{G} = (V, \bar{E}) = (V, \Gamma)$ – транзитивно ориентированный граф, полученный из G некоторой транзитивной ориентацией. Пусть $X_1, X_2, ..., X_{\omega(G)}$ – подмножества вершин, полученные после ранжировки (см. §2). Построим граф $\vec{G_1} = (V, \vec{E_1})$ из графа $\vec{G} = (V, \bar{E})$, где $\vec{E_1} = \{(x, y)/\ x \in X_i, y \in X_{i+1}, i = 1, 2, ..., \omega - 1\}$, т.е. $\vec{G_1}$ содержит те рёбра графа $\vec{G}$, соединяющие соседние множества X_i и X_{i+1}. Ясно, что все ω-клики содержат только дуги из $\vec{G_1}$. Построим транспортную сеть $N = \vec{E_1} \cup \{s, t\} \cup A)$ на $\vec{G_1}$, добавив две вершины : вход s и выход t сети N, и пусть $A = \vec{E_1} \cup (s, X_1) \cup (X_\omega, t)$, т.е. s соединена со всеми вершинами X_1, а все вершины X_ω соединены с t. Пропускные способности $c(e)$ и $c(v)$ дуги $e \in A$ и вершины $v \in V$ мы полагаем равной единице и $c(s) = c(t) = \infty$. Ясно, что если найден максимальный поток в N, то каждая цепь, по которой идет поток, является ω-кликой в $\vec{G}$ (без s и t) и они не пересекаются. Число этих ω-клик максимально. Задача 8 решена.

Алгоритм 8. Пусть G – граф сравнения.

1. Транзитивно ориентируем граф G, получаем граф $\vec{G} = (V, \bar{E})$.
2. Делаем ранжировку и строим подмножества $X_1, X_2, ..., X_{\omega(G)}$.
3. Строим граф $\vec{G_1}$ и сеть N.
4. Используя максимальный поток, строим ω-клики. Это те цепи из s в t (без s и t) по которым идет поток.

3.3. Алгоритм решения Задачи 5.

Предложенный нами алгоритм на каждом шаге работает как алгоритм решения Задачи 8, описанный в пункте 2 этого параграфа. Но на каждом шаге вместо максимального потока нам нужен минимальный вершинный разрез Y_k. Всего имеем $\omega - q$ шагов, где $\omega = \omega(G)$ – плотность графа. Пусть на текущем шаге $k = \omega, \omega - 1, ..., q + 1$ получены графы $\vec{G_k}$, $\vec{G'_k}$ и минимальный вершинный разрез Y_k, а $\vec{G_\omega} = \vec{G}$ получен транзитивным ориентированием графа G. Граф $\vec{G'_k}$ получается из $\vec{G_k}$ и содержит только те дуги из $\vec{G_k}$, соединяющие вершины соседних подмножеств после ранжировки $\vec{G_k}$ (см. Алгоритм 8). Добавляя две вершины s и t, получаем сеть N'_k из $\vec{G'_k}$ как это сделано в Алгоритме 8. Вход s соединен со всеми вершинами первого подмножества вершин ранжировки $\vec{G_k}$, а все вершины последнего подмножества вершин ранжировки соединены с t. Пропускные способности $c(s) = c(t) = \infty$, $c(v) = 1$ для $v \in \vec{G'_k}$, а для всех дуг пропускная способность равна 2. Для нахождения минимального вершинного разреза в сети N'_k, как обычно это делают, нужно построить новую сеть N''_k, где вершины заменены дугами. Тогда найдём минимальный разрез на N''_k, состоящий из рёбер, которым будут соответствовать вершины.

На k-м шаге мощность клики графа $\vec{G_k} = \vec{G} - Y_{k+1}$ не больше чем k. В конце работы алгоритма получим граф $\vec{G_q}$, который можно раскрасить q цветами, так как $\omega(\vec{G_q}) \leq q$. Множество вершин этого графа есть $V_q = V \setminus \bigcup_{q+1 \leq k \leq \omega} Y_k$. Теперь опишем алгоритм решения Задачи 5.

Алгоритм решения Задачи 5.

1. Построим транзитивную ориентацию графа G и получим граф $\vec{G_\omega} = \vec{G}$.
2. Определим $k = \omega$.
3. Сделаем ранжировку графа $\vec{G_k}$.
4. Построим $\vec{G'_k}$ из $\vec{G_k}$.
5. Построим N'_k из $\vec{G'_k}$.
6. В N'_k найдем минимальный вершинный разрез Y_k.
7. Построим $\vec{G_{k-1}} = \vec{G_k} - Y_k$.
8. Если $k = q + 1$, то заканчиваем, в противном случае $k = k - 1$ и переходим к 3.

Пункты 1 и 6 определяют сложность Алгоритма 5. Сложность алгоритма транзитивной ориентации есть $O(n^3)$ [10], [14], где n – число вершин графа. Сложность нахождения максимального потока и минимального разреза есть $O(n^3)$ (хотя для графов сравнения порядок – $O(n^2)$). Следовательно, сложность Алгоритма 5 зависит от сложности потокового алгоритма, т.е. если последний имеет сложность $f(n)$, то сложность Алгоритма 5 есть $O((\omega - q - 1) * f(n))$.

3.4. Примеры. Для иллюстрации работы Алгоритма 5 приведем несколько примеров. Вначале сделаем несколько замечаний.

Возьмем например $k = \omega$. Алгоритм 5 выбирает минимальное $s - t$ разделяющее множество вершин Y_ω в графе $\vec{G_\omega}$, т.е. из каждой $s - t$ цепи выбираем хотя бы одну вершину, отличную от s и t. Из теоремы Менгера следует, что число вершин в Y_ω равно наибольшему числу попарно непересекающихся (по вершинам) $s - t$ цепей в $\vec{G_\omega}$. Важно, что Алгоритм 5 выбирает не произвольное $s - t$ разделяющее множество, а такое, которое получается с помощью потокового алгоритма.

Минимальный разрез состоит из "первых старших вершин" ("первая старшая" означает, что для любой вершины $z \in Z_\omega$, где Z_ω – произвольный минимальный $s-t$ вершинный разрез, существует $y \in Y_\omega$, $y \geq z$, т.е. существует $(y-z)$ цепь). Это следует из факта, что если (V_1, V_2), минимальный разрез, полученный из максимального потока, то для любого минимального разреза (V_1', V_2'), $V_1 \subseteq V_1'$ [3]. Этот факт и является главной причиной того, что Алгоритм 5 все таки может быть оптимальным.

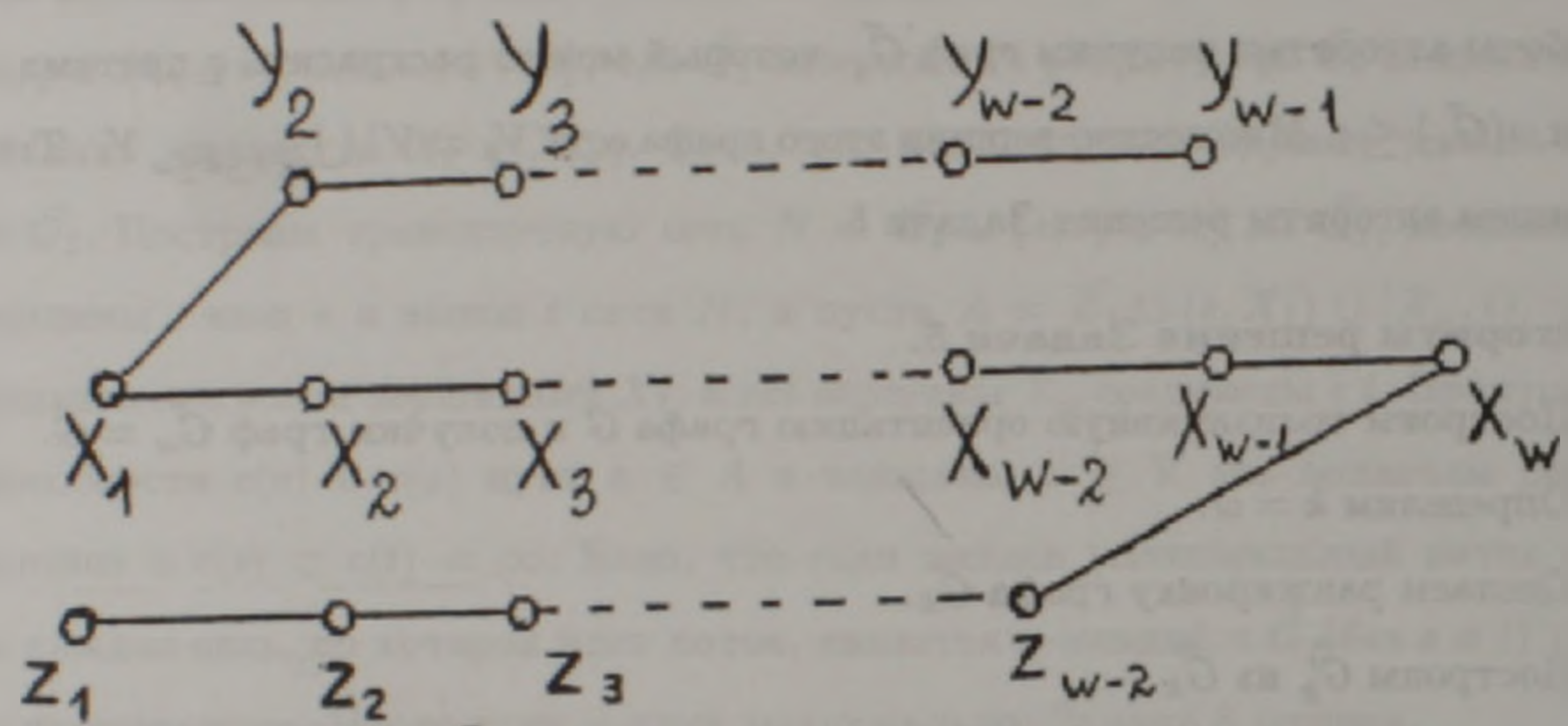

Рис. 1. Дуги графа $\vec{G}$ ориентированы слева направо. Для простоты на рисунке дуги (x_i, x_j), (x_1, y_j), (y_i, y_j), (z_i, z_j), (z_i, x_ω) опущены.

Пусть $\vec{G}$ – транзитивно ориентированный граф, заданный на Рис. 1. Пусть $q = \omega - 2$, т.е. нужно найти максимальный $(\omega-2)$–хроматический подграф. Если возьмем минимальный разрез $Y_\omega = \{x_2\}$ в $\vec{G_\omega} = \vec{G}$, то в графе $\vec{G_\omega} - \{x_2\}$ минимальным разрезом $Y_{\omega-1}$ будет подмножество $\{x_1, x_\omega\}$. Полученный $(\omega-2)$–хроматический подграф будет $\vec{G} - \{x_2, x_1, x_\omega\}$, т.е. не максимальный $(\omega-2)$-хроматический подграф графа $\vec{G}$. На ω шаге Алгоритм 5 выберет $Y_\omega = \{x_1\}$ в качестве "первой старшей вершины". После удаления которой не остаётся ω-клик. На втором шаге $Y_{\omega-1} = \{x_\omega\}$ и полученный $(\omega-2)$-хроматический подграф $\vec{G} - \{x_1, x_\omega\}$ является максимальным. В [2] введено понятие связанного семейства кликов, из существования которого следует оптимальность q-раскраски.

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф, $S = \{S_1, S_2, ..., S_q\}$ – множество q независимых подмножеств, т.е. некоторая частная раскраска q цветами, а $C = \{C_j / \ j \in J\}$ – некоторое семейство клик. Будем говорить, что S и семейство клик C образуют связанное семейство кликов, если

(A1) $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$.

(A2) $(\bigcup_{i \leq q} S_i) \cup (\bigcup_{j \in J} C_i) = V$.

(A3) $S_i \cap C_j \neq \emptyset$ для любых i и j.

Существование связанного семейства кликов для q-раскраски, полученное Алгоритмом 5 (ранжировкой графа $\vec{G}_q$) доказывает оптимальность Алгоритма 5. Для этого достаточно найти такое семейство кликов в графе $\vec{G}$, что

1. $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$.
2. $(\bigcup_{j\in J} C_j) \supset Y$, $Y = (\bigcup_{q+1\leq k\leq \omega} Y_k$.
3. $|C_j \setminus Y| = q$, $j \in J$.

Для графа $\bar{G}$ на Рис. 1 связанное семейство кликов для получения $\vec{G}_{\omega-2}$ Алгоритмом 5может быть $C = \{C_1\}$, где $C_1 = \{x_1, x_2, ..., x_\omega\}$ или $C = \{C_1, C_2\}$, причём $C_1 = \{x_1, y_2, ..., y_{\omega-1}\}$, $C_2 = \{z_1, z_2, ..., z_{\omega-2}, x_\omega\}$.

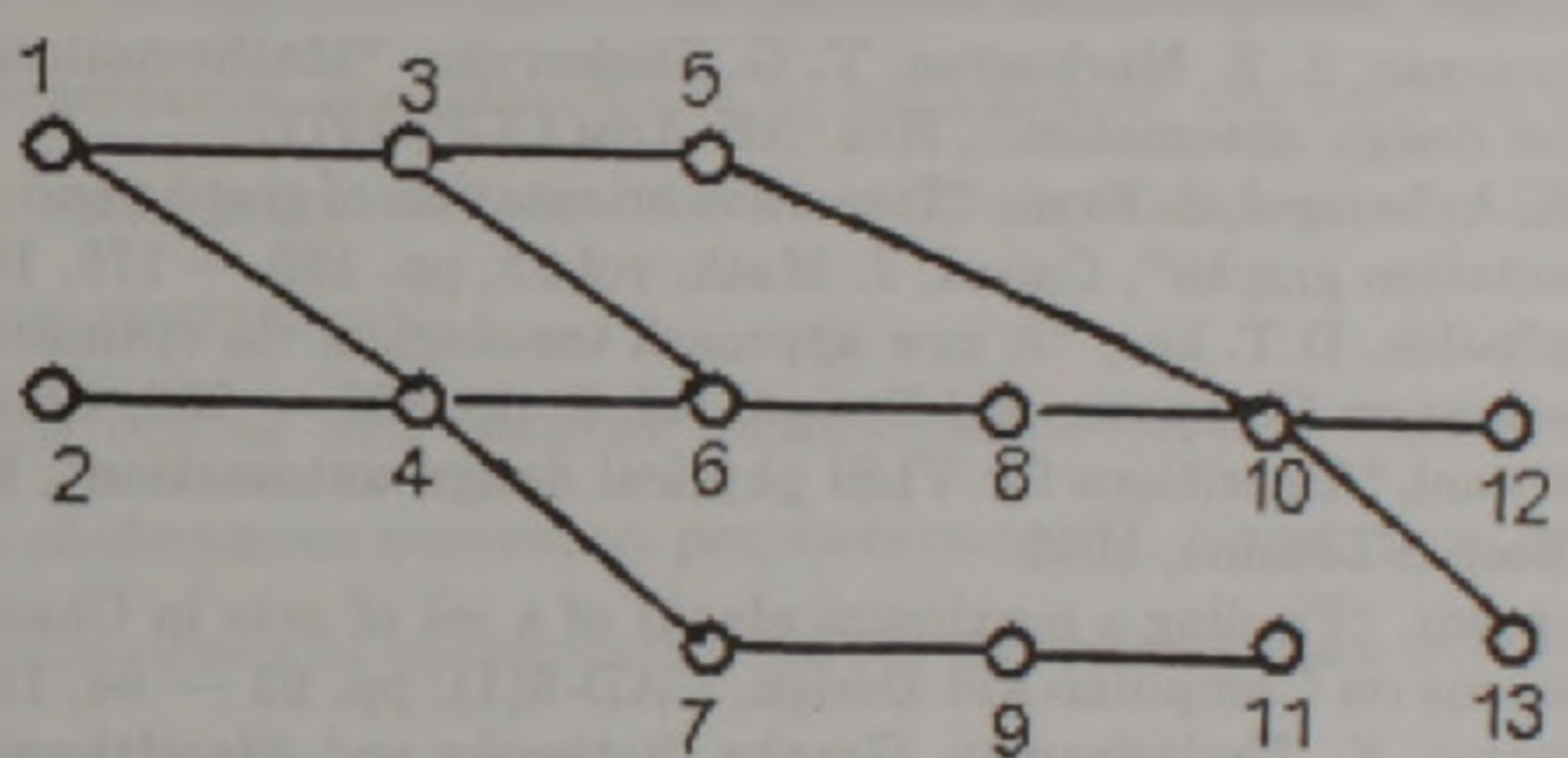

Рис. 2. Ориентация и некоторые дуги графа $\bar{G}$ на рисунке опущены.

Рассмотрим пример на Рис. 2. Пусть $\omega = 6$, $q = \omega - 2 = 4$. Алгоритм 5 на шаге ω даёт $Y_\omega = \{6\}$, хотя $\{8\}$ и $\{10\}$ также являются минимальными разрезами в $\vec{G}_\omega$. На $(\omega-1)$-м шаге Алгоритм 5 даёт $Y_{\omega-1} = \{1, 2\}$, хотя $\{4, 10\}$ и $\{7, 10\}$, ... также являются минимальными разрезами в $\vec{G}_{\omega-1}$.

Для полученного $Y = \{1, 2, 6\}$ связанное семейство кликов будет $C = \{C_1, C_2\}$, где $C_1 = \{1, 3, 6, 8, 10, 12\}$ и $C_2 = \{2, 4, 7, 9, 11\}$.

ABSTRACT. If a graph and its complement are comparability graphs, then for any transitive orientation of these graphs there exist a *minmin*, *minmax*, *maxmin* and *maxmax* vertices (*minmin* is the vertex that is *min* in both the graph and its complement, *minmax* is the vertex that is *min* in the graph and *max* in its complement, etc.). From this property the theorem of Pnueli, Lempel and Even about permutation graphs is obtained. Some algorithms are developed for the problems of maximal number of pairwise non-intersecting maximal independent sets and of maximal q-chromatic subgraph.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Berge, Theorie des Graphs et ses Applications, Paris, 1958.
2. C. Berge, "Minmax relations for the partial q-coloring of graphs", Discrete Math. 74, pp. 3 — 4, 1989.
3. L. R. Ford, D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1962.
4. F. Gavril, "Algorithms for maximum k coloring and k covering of transitive graphs", Networks, 17, pp. 465 — 470, 1987.
5. R. D. Lou, M. Sarrafzadeh, D. T. Lee, "An optimal algorithm for the maximum two-chain problem", Proceeding of first SIAM-ACM Conference of Discrete Algorithms, 1990.
6. С. Е. Маркосян, "О раскраске вершин графов интервалов", Вопросы радиоэлектроники, серия ЭВТ, вып. 4, стр. 3 — 6, 1972.
7. С. Е. Маркосян, Г. А. Газарян, "О некоторых задачах линейной трассировки", Вопросы радиоэлектроники, серия ЭВТ, вып. 9, стр. 16 — 23, 1974.
8. С. Е. Маркосян, А. Г. Маркосян, "Некоторые алгоритмы сравнения графов интервалов", Кибернетика, № 2, стр. 72 — 81, 1976.
9. A. W. Petrosyan, S. E. Markosyan, Y. G. Shukuryan, "Mathematical questions of computer design automation", Изд. АН Арм.ССР, 1977.
10. A. Pnueli, A. Lempel, S. Even, "Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs", Canad. J. Math. vol.23, pp. 160 — 175, 1971.
11. M. Sarrafzadeh, D.T. Lee, "A new approach topological via optimization", IEEE Transactions on Computer-Aid Design, vol. 8, pp. 890 — 900, 1989.
12. N. A. Serwani, "Algorithms for VLSI physical design automation", Kluwer Acad. Publ., Boston-London, 1999.
13. K. J. Supowit, "Finding a maximum planar of a set of nets in Channel", IEEE Transactions on Computer-Aid Design, CAD-6(1), pp. 93 — 94, 1987.
14. M. N. Swamy, K. Thulasiraman, Graphs, Networks and Algorithms, New York, Toronto, 1981.
15. M. Yannakakis, F. Gavril, "The maximum k-colorable problem for chordal graphs", Information processing letters, pp. 133 — 137, 1987.

27 апреля 2000

Ереванский государственный университет
E-mail : smarkosyan@ysu.am

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ПОДВИЖНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

П. С. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика. том 35, № 3, 2000

Понятия M-доминирования и M-эквивалентности были определены в [1] для метризуемых компактов. Дж. Олендский [1] использовал эти понятия при изучении различных типов подвижности (A-, n– и $\mathcal{R}$-подвижности, где $\mathcal{R}$ – семейство метризуемых компактов).

В настоящей статье эти понятия рассматриваются для топологических пространств и обобщаются некоторые результаты из [1]. Кроме того, для некоторых классов топологических пространств даётся положительный ответ на проблему (3.9) из [1] (см. Проблему ниже).

Пусть X – топологическое пространство и $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ - спектр, ассоциированный с X (в смысле Мориты [2]).

Определение 1. Топологическое пространство X называется **подвижным**, если спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ удовлетворяет условию : для любого $\alpha \in A$ и $\alpha'' \geq \alpha$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и непрерывное отображение $r^{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что $p_{\alpha\alpha'} \cong p_{\alpha\alpha''} \circ r^{\alpha'\alpha''}$.

Определение 2. Топологическое пространство X называется **n-подвижным**, если спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ удовлетворяет условию : для любых $\alpha \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, спектра P ($dim\ P \leq n$) и отображения $f' : P \longmapsto X_{\alpha'}$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и отображение $f'' : P \longmapsto X_{\alpha''}$ такие, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$.

Если в Определении 2 потребовать, чтобы P принадлежал семейству $\mathcal{R}$ топологических пространств (без условия $dim\ P \leq n$), то получим понятие $\mathcal{R}$-подвижности. Если семейство $\mathcal{R}$ состоит из единственного пространства A, то мы приходим к понятию A-подвижности пространства X. Как и в [1], для топологических пространств можно определить понятия доминирования и эквивалентности.

Определение 3. Семейство топологических пространств $\mathcal{R}$ называется **доминируемым** к семейству $\mathcal{R}'$ (пишем $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$), если из $\mathcal{R}'$-подвижности пространства X следует $\mathcal{R}$-подвижность пространства X. Семейства топологических пространств $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ называются **эквивалентными** (пишем $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}'$), если $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}' \leq \mathcal{R}$.

Топологическое пространство A можно рассматривать как одночленное семейство $\{A\}$. Следовательно, предыдущее определение определяет обычную эквивалентность топологических пространств. Последнее обеспечивает непересекаемость классов эквивалентных топологических пространств. Через $sh\ A$ обозначим шейп пространства A.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ – семейства топологических пространств. Если для всякого пространства $A \in \mathcal{R}$ существует пространство $A' \in \mathcal{R}'$ такое, что $sh\ A \leq sh\ A'$, то $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$.

Доказательство : Пусть X – произвольное $\mathcal{R}'$-подвижное пространство. Докажем, что X $\mathcal{R}$-подвижен. Пусть $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ – спектр, ассоциированный с X. Так как X $\mathcal{R}'$-подвижен, то для любых $\alpha \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, $A' \in \mathcal{R}'$ и отображения $\tilde{f}' : A' \longmapsto X_{\alpha'}$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и отображение $\tilde{f}'' : A' \longmapsto X_{\alpha''}$ такие, что $p_{\alpha\alpha'} \circ \tilde{f}' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ \tilde{f}''$. Теперь докажем, что этот α' удовлетворяет условию $\mathcal{R}$-подвижности, т.е. для любых $\alpha'' \geq \alpha$, $A \in \mathcal{R}$ и $f' : A \longmapsto X_{\alpha'}$ существует отображение $f'' : A \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. В условиях Теоремы 1 существуют шейповые морфизмы $s' : A \longmapsto A'$ и $s : A' \longmapsto A$ такие, что

$$s \circ s' = i, \tag{1}$$

где $i : A \longmapsto A$ – тождественный шейповый морфизм. По определению шейпового морфизма (см. [3]), каждому отображению $A \longmapsto X_{\alpha'}$ с помошью морфизма s соответствует отображение $A' \longmapsto X_{\alpha'}$. Следовательно, отображению $f' : A \longmapsto X_{\alpha'}$ соответствует отображение $s(f') : A' \longmapsto X_{\alpha'}$. Так как X $\mathcal{R}'$-подвижен, то для $s(f')$ существует отображение $g : A' \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что

$$p_{\alpha\alpha''} \circ g \cong p_{\alpha\alpha'} \circ s(f'). \tag{2}$$

Поэтому имеем $s'(g) : A \longmapsto X_{\alpha''}$. Отображение $f'' = s'(g)$ является искомым отображением, так как в силу (1) и (2) имеем $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если $sh\ A \leq sh\ B$, то $A \leq B$.

Теорема 2. Шейпово эквивалентные пространства эквивалентны.

Из Теоремы 2 следует, что $[A]_{sh} \subset [A]_M$, где $[A]_M$ – класс пространств, эквивалентных A, а $[A]_{sh}$ – класс пространств, шейпово эквивалентных A. Ниже мы докажем (Пример 1), что это вложение является строгим, т.е. Теорема 2 не допускает обращения. Тот же пример показывает, что эквивалентные пространства могут иметь неизоморфные группы гомологий.

Теорема 3. Существует метризуемый компакт A такой, что A-подвижность произвольного топологического пространства эквивалентна подвижности.

Теорема 4. Существует метризуемый компакт A с $dim\ A \leq n$ такой, что A-подвижность произвольного топологического пространства эквивалентна n-подвижности.

Доказательства Теорем 3, 4 по существу повторяет доказательства соответствующих Теорем для метризуемых компактов (см. [1]), и поэтому опускаются. Теоремы 3 и 4 сводят вопрос n-подвижности к изучению A-подвижности для метризуемого компакта A. Возникает следующий вопрос : можно ли изучение $\mathcal{R}$-подвижности свести к изучению A-подвижности ? Точнее говоря : для любого семейства $\mathcal{R}$ топологических пространств существует ли топологическое пространство A такое, что $\mathcal{R} \sim \{A\}$? Этот вопрос был поставлен для метризуемого компакта (см. [1], Проблема (3.9)). Поставим этот вопрос в более общем виде.

Проблема. Пусть K – класс топологических пространств и $\mathcal{R} \subset K$. Существует ли пространство $A \in K$ такое, что $\mathcal{R} \sim \{A\}$?

Следующая теорема дает положительный ответ для классов топологических пространств, которые замкнуты относительно операции $\coprod$ несвязной топологической суммы.

Теорема 5. Пусть K – класс топологических пространств, замкнутый относительно несвязной топологической суммы. Для произвольного семейства $\mathcal{R} \subset K$ существует топологическое пространство A такое, что $\mathcal{R} \sim \{A\}$.

Доказательство : Обозначим через T_i, $i \in I$ элементы семейства $\mathcal{R}$. Рассмотрим несвязную топологическую сумму $R = \coprod_{i\in I} T_i$ всех элементов $T_i \in \mathcal{R}$. Имеем $R \in K$. Для завершения доказательства нам нужна следующая Лемма.

Лемма 1. $R \sim \{T_i : i \in I\}$.

Доказательство : Так как $sh\ T_i \leq sh\ R$, $i \in I$, то согласно Следствию 1 имеем $\{T_i\} \leq R$. Остается доказать обратное утверждение $R \leq \{T_i\}$. Пусть X – произвольное $\{T_i\}$-подвижное пространство и $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \Lambda\}$ – спектр, ассоциированный с X. Докажем, что X является R-подвижным пространством. Из $\{T_i\}$-подвижности пространства X следует, что для любых $\alpha \in \Lambda$, $\alpha'' \geq \alpha$ и всякого отображения $f'_i : T_i \longmapsto X_{\alpha'}$, $i \in I$ существуют $\alpha' \geq \alpha$ и отображение $f'' : T_i \longmapsto X_{\alpha''}$ такие, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$.

Теперь покажем, что для любого $\alpha \in \Lambda$ элемент $\alpha' \geq \alpha$ удовлетворяет определению R-подвижности. Пусть f' есть отображение $f' : R \longmapsto X_{\alpha'}$. Рассмотрим отображение $f'_i \equiv f'\big|_{T_i} : T_i \longmapsto X_{\alpha'}$, $i \in I$. Из $\{T_i\}$-подвижности пространства X следует, что для f'_i существует отображение $f''_i : T_i \longmapsto X_{\alpha''}$ такое, что $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. Легко установить, что отображение $f'' \equiv \coprod_i f''\big|_{T_i} : T_i \longmapsto X_{\alpha''}$ будет искомым, т.е. $p_{\alpha\alpha'} \circ f' \cong p_{\alpha\alpha''} \circ f''$. Лемма 1 и Теорема 5 доказаны.

Пример эквивалентных пространств, имеющих неизоморфные группы гомологий (и, следовательно, различные шейпы). Пусть A и B – топологические пространства, имеющие неизоморфные группы k-гомологий : $H_k(A) \not\sim H_k(B)$. Рассмотрим несвязные топологические суммы $A \coprod A \coprod B$ и $A \coprod B \coprod B$. Ввиду Леммы 1 получим $A \coprod A \coprod B \sim \{A, A, B\} \sim \{A, B\}$, $A \coprod B \coprod B \sim \{A, B, B\} \sim \{A, B\}$. Следовательно, имеем $A \coprod A \coprod B \sim A \coprod B \coprod B$. Однако $H_k(A \coprod A \coprod B) \not\sim H_k(A \coprod B \coprod B)$, так как $H_k(A \coprod A \coprod B) \sim H_k(A) \oplus H_k(A) \oplus H_k(B)$, $H_k(A \coprod B \coprod B) \sim H_k(A) \oplus H_k(B) \oplus H_k(B)$ и $H_k(A) \oplus H_k(A) \oplus H_k(B) \not\sim H_k(A) \oplus H_k(B) \oplus H_k(B)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Olendski, "On movability and other similar shape properties", Fund. Math., vol. 88, no. 3, pp. 179 – 191, 1975.
2. K. Morita, "On shapes of topological spaces", Fund. Math., vol. 86, no. 3, pp. 251 – 259, 1975.
3. S. Mardesic, "Shapes for topological spaces", Gen. Topol. and Appl., vol. 3, no. 3, pp. 265 – 282, 1973.

2 февраля 2000

Арцахский государственный университет,
Степанакерт, Нагорно-Карабахская республика
E-mail : pgev@arsu.nk.am

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35 НОМЕР 3 2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы