ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

О ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА СОБОЛЕВА

А. А. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье рассматриваются семиэллиптические псевдодифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в некоторых пространствах типа риссовых потенциалов. Выводятся несколько оценок в пространствах Соболева и доказывается теорема о гладкости решения.

ВВЕДЕНИЕ

Пространства риссовых потенциалов (см. [1]) и их анизотропные аналоги пригодны при изучении однородных (квазиоднородных) эллиптических (семиэллиптических) псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (см. [2], [3]). Более общие пространства $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ естественно возникают при исследовании граничных задач эллиптического типа, т.е. когда функция в правой части принадлежит анизотропному пространству (см. [4]). Пространства $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ введены в [4], где они интерпретировались как фактор-пространства по полиномам произвольного порядка.

В данной работе указывается несколько иная интерпретация пространств $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ (§1), основанная на точном виде полиномов, которые возникают при определении пространств типа риссовых потенциалов (см. [15]). В §2 рассматриваются семиэллиптические псевдодифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в пространствах $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$. В §3 выводятся априорные оценки в пространствах Соболева и приводится доказательство анонсированной в [4] Теоремы 2 о гладкости решения.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$

Эти пространства зависят от $\mathcal{A} = \{r^j\}_1^N$ = конечного набора векторов r^j =

$(r_1^j, \ldots, r_n^j) \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий точки $r^1, \ldots, r^N$, называется **многогранником Ньютона** набора $\mathcal{A}$ и обозначается через $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Предположим, что $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ имеет отличные от нуля вершины на каждой оси координат, и что многогранник Ньютона $\mathcal{N}(\mathcal{A} \cup \{0\})$ является правильным, т.е. все внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A} \cup \{0\})$ имеют неотрицательные координаты.

Через S обозначим пространство Шварца быстро убывающих функций, а через S' – пространство медленно растущих распределений. Случай, когда $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ содержит начало координат приводит к пространствам Соболева $W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, см. [5], [6]. По определению, $f \in S'$ принадлежит $W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, если ее норма

$$\|f, W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{r \in \mathcal{A}} \left\| \prod_{i=1}^{n} (1+\xi_i^2)^{r_i/2} \tilde{f}(\xi) \right\|_2$$

конечна. Здесь и ниже $\tilde{f} = \mathcal{F} f$ означают преобразование Фурье функции f.

П. И. Лизоркиным были введены пространства Φ (см. [7], [8]), состоящие из функций $\varphi \in S$, ортогональных пространству многочленов. Пространство Φ инвариантно относительно дробного интегрирования, дифференцирования и риссова потенциала. Рассмотрим подпространство S, состоящее из функций, ортогональных многочленам конечного порядка. В этом случае используем C_0^∞-функции. Аналогичные построения использовались в [9].

Пусть $\mathcal{M}$ – полный многогранник в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathcal{M}$ имеет вершину в начале координат и отличные от нее вершины на каждой оси координат. Через $P_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство полиномов вида

$$P_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ p(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M} \cap N_0^n} c_\alpha x^\alpha \right\},$$

где N_0^n – множество n-мерных мультииндексов.

По аналогии с пространством Лизоркина Φ определим

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} u(x) p(x)\, dx = 0,\ p \in P_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{1.1}$$

Обозначим через $s\mathcal{M}$, $s > 0$ многогранник с вершинами $sr^0, \ldots, sr^N$, где $r^0, \ldots, r^N$ – вершины правильного многогранника $\mathcal{M}$.

Определение 1. Объединение компактных граней выпуклой оболочки множества $\bigcup_{r\in V(\mathcal{N})}(r+\mathbb{R}^n_{++})$ называется **диаграммой Ньютона** $\Gamma(\mathcal{N})$ многогранника $\mathcal{N}$, где $V(\mathcal{N})$ – множество вершин многогранника $\mathcal{N}$ и

$$\mathbb{R}^n_{++}=\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\quad x_j\geq 0,\quad j=1,...,n\}.$$

Через g_Γ обозначим каноническую функцию диаграммы $\Gamma(\mathcal{N})$, т.е. [10]

$$g_\Gamma(\xi)=\sum_r|\xi_1|^{r_1}\cdots|\xi_n|^{r_n}, \tag{1.2}$$

где сумма берется по всем вершинам r выпуклой оболочки диаграммы $\Gamma(\mathcal{N})$.

Лемма 1.1. Пусть Γ – диаграмма Ньютона многогранника $\mathcal{N}$, имеющего вершины на каждой оси координат $\mathbb{R}^n_{++}$. Пусть функция f аналитична в окрестности полидиска

$$\Delta(0,1)=\{z\in\mathbf{C}^n:\ |z_j|\leq 1,\ j=1,...,n\},$$

и в разложении в ряд Тейлора функции f показатели всех ненулевых мономов лежат не ниже Γ. Если $|f(z)|\leq M$ при $z\in\Delta(0,1)$, то $|f(z)|\leq cMg_\Gamma(z)$, где c не зависит от f.

Доказательство: Пусть $\beta^i=(0,...,0,\beta_i,0,...,0)$, $i=1,...,n$ – вершина выпуклой оболочки Γ, лежащая на i-ой координатной оси. Разложение функции f в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha+\sum_{(\alpha:\beta)\geq 1}a_\alpha z^\alpha,\quad \beta=(\beta_1,...,\beta_n),$$

где первая сумма распространена на мультииндексы α, лежащие не ниже Γ и ниже гиперплоскости, проходящей через точки $\beta^1,...,\beta^n$ и

$$(\alpha:\beta)=\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Функция $f(z)-\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ аналитична, поэтому имеем

$$\left|f(z)-\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha\right|\leq|f(z)|+\sum_\alpha|a_\alpha|<cM,\quad z\in\Delta(0,1),$$

где c не зависит от f. Используя Лемму 1 из [11], получим

$$\left|f(z)-\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha\right|\leq cM\sum_{i=1}^n|z^{\beta^i}|.$$

Так как (см. [6]) z^α оценивается через $\sum|z^\gamma|$, где γ – вершины многогранника, ограниченного диаграммой Γ и гиперплоскостью, проходящей через $\beta^1,...,\beta^n$, то доказательство завершено.

Следствие. Если у аналитической в $\Delta(0,1)$ функции f в разложении в ряд Тейлора показатели ненулевых мономов лежат не ниже $(1-\theta)\Gamma$ при некотором $\theta \in [0,1)$, то при условиях Леммы 1.1 имеем $|f(z)| \le M g_\Gamma^{1-\theta}(z)$.

Заметим, что, вообще говоря, имеем $g_\Gamma^{-1} \notin L_{2,loc}$. Однако существует число $\theta \in [0,1)$ такое, что $g_\Gamma^{-\theta} \in L_{2,loc}$.

Определение 2. Наибольшее число $\theta_0 \in [0,1)$, при котором $g_\Gamma^{-\theta} \in L_{2,loc}$ для любого $\theta < \theta_0$, называется **предельным числом** многогранника. Если $g_\Gamma^{-1} \in L_{2,loc}$ (т.е. $\theta_0 = 1$), то многогранник называется **допустимым.**

Приведем некоторые примеры. Для многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, где

$$\mathcal{A} = \{(e_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, e_n)\}, \quad e_j > 0, \quad j = 1, ..., n \tag{1.3}$$

предельным числом является

$$\theta_0 = \begin{cases} \eta & \text{при} \quad \eta \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad \eta > 1, \end{cases} \qquad \eta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{e_j}.$$

Суммой Минковского двух наборов $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^2$ является множество

$$\mathcal{A}^1 + \mathcal{A}^2 = \{r \in \mathbb{R}^n_{++} : r = r^1 + r^2, \ r^1 \in \mathcal{A}^1, \ r^2 \in \mathcal{A}^2\}.$$

Каждому вектору $a = (a_1, ..., a_n)$ с положительными компонентами сопоставим набор $\{a\}$ вида (1.3) и число $a^* = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)^{-1}$.

Предложение 1.1. Пусть $e = (e_1, ..., e_n)$ и $r = (r_1, ..., r_n)$ – векторы с положительными компонентами. Если $e^* + r^* < n/2$, то многогранник $\mathcal{N}(\{e\}+\{r\})$ будет допустимым, в противном случае число $\theta_0 = \dfrac{n}{2(e^* + r^*)}$ является предельным для многогранника $\mathcal{N}(\{e\} + \{r\})$.

Доказательство : Положим $\rho_\lambda(\xi) = |\xi_1|^{1/\lambda_1} + \cdots + |\xi_n|^{1/\lambda_n}$, $\rho_\mu(\xi) = |\xi_1|^{1/\mu_1} + \cdots + |\xi_n|^{1/\mu_n}$, где $\lambda_j = r^*/r_j$, $\mu_j = e^*/e_j$, $j = 1, ..., n$. Тогда $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n$ и $|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n = n$.

Пусть Γ – диаграмма Ньютона многогранника $\mathcal{N}(\{e\} + \{r\})$. Вершинами выпуклой оболочки диаграммы Γ являются точки

$$(e_1 + r_1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, e_n + r_n), \tag{1.4}$$

и еще не более $n(n-1)/2$ точек вида $(0, ..., 0, e_i, 0, ..., 0, r_j, 0, ..., 0)$ или

$(0, ..., 0, r_i, 0, ..., 0, e_j, 0, ..., 0)$, которые расположены ниже гиперплоскости, проходящей через точки (1.4). Согласно (1.2) существует постоянная c_R такая, что

$$\rho_\lambda^{r^*}(\xi)\rho_\mu^{e^*}(\xi) < c_R g_\Gamma(\xi),$$

когда ξ лежит в шаре радиуса R с центром в начале координат. Если $e^* + r^* < n/2$, то существует $\varepsilon \in (0, n/2)$ такое, что

$$e^* < \varepsilon, \quad r^* < \frac{n}{2} - \varepsilon. \tag{1.5}$$

Используя неравенство Гельдера с показателями $p = \dfrac{n}{n-2\varepsilon}$ и $q = \dfrac{n}{2\varepsilon}$, получим

$$\int_{|\xi|<R} [g_\Gamma(\xi)]^{-2} d\xi \le c_R \int_{|\xi|<R} \rho_\lambda^{-2r^*}(\xi)\rho_\mu^{-2e^*}(\xi)\, d\xi \le$$

$$\le \left\| \rho_\lambda^{-2r^*} L_p(|\xi| < R) \right\| \cdot \left\| \rho_\mu^{-2e^*} L_q(|\xi| < R) \right\|.$$

Как следует из условий (1.5), из $r^* < \dfrac{n}{2p}$ и $e^* < \dfrac{n}{2q}$ вытекает конечность последних двух норм. Аналогично доказывается вторая часть Предложения 1.1.

Пусть Γ – диаграмма Ньютона многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ с вершинами на каждой оси координат $\mathbb{R}^n_{++}$. Рассмотрим пространство Лизоркина (ср. (1.1))

$$\Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} u(x) x^\alpha \, dx = 0 \right\}, \tag{1.6}$$

для любого мультииндекса α, лежащего не выше $(1-\theta_0)\Gamma$, где θ_0 – предельное число для многогранника $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Заметим, что если $\mathcal{N}$ – допустимый многогранник, то $\theta_0 > 1$ и $\Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, если $f \in \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, то $\widetilde{f} \in S$ и $D^\alpha \widetilde{f}(0) = 0$ для любого мультииндекса α, лежащего не выше $(1-\theta_0)\Gamma$. Пространство $\Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$ – линейное топологическое с топологией, индуцированной топологией пространства Шварца S.

Пусть $J_\mathcal{A}$ – оператор с символом $\mu_\mathcal{A}(\xi) = \sum\limits_{r\in\mathcal{A}} |\xi_1|^{r_1} \cdots |\xi_n|^{r_n}$, т.е. $\mathcal{F}(J_\mathcal{A}\varphi) = (\mu_\mathcal{A}(\xi))^{-1}\widetilde{\varphi}(\xi)$.

Теорема 1.1. Оператор

$$J_\mathcal{A} : \ \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n) \longmapsto L_2(\mathbb{R}^n) \tag{1.7}$$

ограничен, и множество $\{J_\mathcal{A}\varphi : \varphi \in \Phi_\Gamma\}$ плотно в L_2. $J_\mathcal{A}$ также ограничен как оператор

$$J_\mathcal{A} : \ L_2 \longmapsto S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}, \tag{1.8}$$

где $P_{\Gamma}^{1-\theta_0}$ – пространство полиномов, показатели ненулевых мономов которых лежат не выше $(1-\theta_0)\Gamma$.

Доказательство : Функции из класса Φ_Γ ортогональны многочленам, ненулевые показатели которых лежат не выше $(1-\theta_0)\Gamma$. Однако диаграмма $(1-\theta_0)\Gamma$ может не содержать мультииндексов. Обозначим через θ_1 наибольшее действительное число строго меньшее θ_0 такое, что $(1-\theta_1)\Gamma$ содержит хотя бы один мультииндекс. Через θ_2 обозначим наименьшее действительное число такое, что $\theta_2 \geq \theta_0$ и $(1-\theta_2)\Gamma$ содержит хотя бы один мультииндекс. Тогда, если $f \in \Phi_\Gamma$, то $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)x^\alpha\, dx = 0$ для любого мультииндекса α, лежащего не выше $(1-\theta_2)\Gamma$. Следовательно, $D^\alpha \widetilde{f}(0) = 0$ для таких α. Тогда, согласно Лемме 1.1 имеем

$$\left|\widetilde{f}(\xi)\right| \leq M g_\Gamma^{1-\theta_1}(\xi), \quad \xi \in \Pi_1, \tag{1.9}$$

где $\Pi_1 = \{\eta \in \mathbb{R}^n : \quad |\eta_i| < 1, \quad i = 1, ..., n\}$ и $M = \sup_{\xi\in\Pi_1}\left|\widetilde{f}(\xi)\right| \leq ||f, L_1(\mathbb{R}^n)||$. Положим $\varepsilon = \theta_2 - \theta_1, \quad \delta = \theta_2 - \theta_0$. Так как $\theta_1 < \theta_0 \leq \theta_2$, то имеем $0 < \delta < \varepsilon$. В силу (1.9)

$$||J_{\mathcal{A}}f||_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\mu_{\mathcal{A}}(\xi))^{-2}\left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq \int_{\Pi_1}(g_\Gamma(\xi))^{-2}\left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n/\Pi_1}\left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq$$

$$\leq M\int_{\Pi_1}\frac{[g_\Gamma(\xi)]^{2(1-\theta_0+\varepsilon-\delta)}}{[g_\Gamma(\xi)]^2}\,d\xi + ||f||_2 \leq cM + ||f||_2 \leq c(||f||_1 + ||f||_2).$$

Здесь мы использовали, что при $\xi \in \mathbb{R}^n/\Pi_1$ выполнены неравенства $\mu(\xi) \geq g_\Gamma(\xi)$ и $\mu(\xi) \geq 1$. Первое утверждение Теоремы 1.1 доказано.

Для доказательства плотности $J_{\mathcal{A}}\Phi_\Gamma$ в L_1 выберем натуральные числа $m_1, ..., m_n$ такие, что $2m_i > r_i$, $i = 1, ..., n$ для любого $r \in \mathcal{A}$ и рассмотрим оператор

$$J_{\mathcal{A},m}^{-1}(I + J_{\mathcal{A},m}) : \; L_2 \longmapsto L_2, \tag{1.10}$$

где $J_{\mathcal{A},m}$ – оператор с символом

$$b_1(\xi) = \sum_{r\in\mathcal{A}} |\xi_1|^{r_1-2m_1}\cdots|\xi_n|^{r_n-2m_n},$$

а I - тождественный оператор. Символом оператора $I + J_{\mathcal{A},m}$ является

$$b_2(\xi) = \sum_{r\in\mathcal{A}}\prod_{i=1}^{n}(1+\xi_i^2)^{r_i/2}(1 + |\xi_1|^{2m_1}\cdots|\xi_n|^{2m_n})^{-1}.$$

Оператор (1.10) ограничен, так как $b_2/b_1 \leq c$. Он инъективен, поскольку из очевидного неравенства

$$\left|\widetilde{f}(\xi)\right| - \left|\widetilde{f}(\xi)\right|(1 + |\xi_1|^{2m_1}\cdots|\xi_n|^{2m_n})^{-1} \leq \frac{b_2(\xi)}{b_1(\xi)}\widetilde{f}(\xi)$$

следует оценка

$$\|f\|_2 \le \left\|J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})f\right\|_2 + \left\|\frac{\widetilde{f}(\xi)}{1+|\xi_1|^{2m_1}\cdots|\xi_n|^{2m_n}}\right\|_2 .$$

Следовательно, если $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})f=0$, то $f=0$. Кроме того, оператор (1.10) – самосопряжен. Так как ограниченный самосопряженный инъективный оператор всегда имеет плотную область изменения, то заключаем, что $J^{-1}_{\mathcal{A},m}(I+J_{\mathcal{A},m})L_2$ плотно в L_2. Легко видеть, что $(I+J_{\mathcal{A},m})L_2$ является пространством Волевича-Панеяха (см. [12]), а функции из C_0^∞ плотны в нем [12]. Множество $J^{-1}_{\mathcal{A},m}C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в L_2 по норме $L_2(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$J^{-1}_{\mathcal{A},m} = J_{\mathcal{A}} D_1^{2m_1}\cdots D_n^{2m_n}, \tag{1.11}$$

где $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ – обобщенные производные. Так как $D_1^{2m_1}\cdots D_n^{2m_n}C_0^\infty \subset \Phi_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, то из (1.11) следует, что множество $J_{\mathcal{A}}\Phi_\Gamma$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Докажем теперь последнюю часть Теоремы 1.1. Оператор (1.7) по непрерывности продолжается на функции из S, ортогональные полиномам $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Последние образуют замкнутое множество в S', и следовательно, сопряженное пространство можно отождествить с фактор-пространством $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Так как область изменения оператора $J_{\mathcal{A}}$ плотна в L_2, то пространство линейных непрерывных функционалов на ней можно отождествить с L_2. Переходя к сопряженным, получим ограниченную инъекцию (1.8). Доказательство завершено.

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный набор векторов с неотрицательными компонентами, имеющий точки на каждой координатной оси $\mathbb{R}^n_{++}$. Пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ является образом оператора $J_{\mathcal{A}}$ на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\left\|J_{\mathcal{A}}\varphi, \dot{w}_2^{\mathcal{A}}\right\| = \|\varphi\|_2. \tag{1.12}$$

Очевидно, если $\mathcal{A}=\{0\}$, то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} = L_2$. По Теореме 1.1, пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) = J_{\mathcal{A}}(L_2)$ является подпространством фактор-пространства $S'/P_\Gamma^{1-\theta_0}$. Если $\theta_0 > 1$ (т.е. если $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ является допустимым многогранником), то $\dot{w}_2^{\mathcal{A}} \subset S'$, если же $0 < \theta_0 \le 1$, то элементами $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ будут классы, в которых функции, отличающиеся на многочлен $p \in P_\Gamma^{1-\theta_0}$, отождествляются.

Норма (1.12) на C_0^∞ имеет удобный эквивалентный вид

$$\|f, \dot{w}_2^{\mathcal{A}}\| = \left\|\left(\sum_{r\in\mathcal{A}}\prod_{k=1}^{n}|\xi_k|^{r_k}\right)\widetilde{f}\right\|_2, \quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Можно показать, что $J_{\mathcal{A}}^{-1}C_0^{\infty}$ плотно в L_2, где $J_{\mathcal{A}}^{-1}$ – оператор с символом $\mu_{\mathcal{A}}^{-1}(\xi)$. Поскольку $J_{\mathcal{A}}$ является обратным к $J_{\mathcal{A}}^{-1}$ на C_0^{∞}, а оператор $J_{\mathcal{A}} : L_2 \longrightarrow \dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ – изоморфизм, то пространство $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ по норме (1.13). Следовательно, $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ есть пополнение $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ по норме (1.13).

Из определений пространств $W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ и $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ следует вложение

$$W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n), \tag{1.14}$$

которое является непрерывным и плотным, т.е. любая функция из $W_2^{\mathcal{A}}$ принадлежит некоторому классу из $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$ с соответствующей оценкой норм. Заметим, что вложение (1.14) строгое. Если $f \in \dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$, то, вообще говоря, $f \notin L_2$. Однако можем утверждать, что $D^{\nu} f \in L_2$ для любого мультииндекса $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, причем

$$\|D^{\nu} f\|_2 \leq c \left\| f, \dot{w}_2^{\mathcal{A}} \right\|. \tag{1.15}$$

Оценка (1.15) следует из неравенства (см. [6])

$$|\xi^{\nu}| \leq c \sum_{j=1}^{M} |\xi_1|^{e_1^j} \cdots |\xi_n|^{e_n^j},$$

где $e^1, ..., e^M \in V(\mathcal{N})$. Отсюда получим

$$\dot{w}_2^{\mathcal{A}_1} \subset \dot{w}_2^{\mathcal{A}_2}, \quad \text{если} \quad \mathcal{N}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{N}(\mathcal{A}_1). \tag{1.16}$$

Отметим также, что на функциях f, равных нулю вне некоторого шара, нормы $\|f\|_{W_2^{\mathcal{A}}}$ и $\|f\|_{\dot{w}_2^{\mathcal{A}}}$ эквивалентны (локальная эквивалентность пространств $W_2^{\mathcal{A}}$ и $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}$). Ниже мы воспользуемся очевидным соотношением

$$W_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) = \dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n). \tag{1.17}$$

§2. СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Прежде, чем перейти к этой теме, рассмотрим пространство $\dot{w}_2^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^n)$ в случае $\mathcal{A} = \{e\} + \{m\}$, где $e = (e_1, ..., e_n)$ и $m = (m_1, ..., m_n)$ – векторы с положительными компонентами. В силу Предложения 1.1 и Теоремы 1.1 $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} \subset S'$, если $e^* + m^* < n/2$. Обозначим через J^e λ-анизотропный потенциал порядка e^*, т.е.

$$J^e \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y)}{\rho_e^{n-e^*}(x-y)}\, dy, \quad 0 < e^* < n,$$

а через J^m – соответствующий μ-анизотропный потенциал порядка m^*. Интегральный оператор

$$J\varphi = J^m J^e \varphi \tag{2.1}$$

определен, т.е. соответствующий интеграл абсолютно сходится на функциях $\varphi \in L_2$, если $e^* + m^* < n/2$. Действительно, оператор J^e определен на L_2 при $e^* < n/2$, и по теореме В. П. Ильина (см. [13]) $J^e\varphi \in L_p$, где $p = \dfrac{2n}{n-2e^*}$. По этой же теореме имеем

$$J\varphi \in L_q, \quad q = \frac{2n}{n - 2(e^* + m^*)}.$$

Во всяком случае для $\varphi \in \Phi$ (2.1) дает $\mathcal{F}(J\varphi) = \mathcal{F}(\rho_e^{-n+e^*})\mathcal{F}(\rho_m^{-n+m^*})\widetilde{\varphi}$. Напомним, что по определению

$$\mathcal{F}(J_{\{e\}+\{m\}}\varphi) = \sum_{r\in\{e\}+\{m\}} |\xi_1|^{r_1}\cdots|\xi_n|^{r_n}\widetilde{\varphi}(\xi).$$

Поскольку величины

$$\left[\sum_{r\in\{e\}+\{m\}} \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|^{r_i}\right] \cdot \left[\mathcal{F}(\rho_e^{-n+e^*})\mathcal{F}(\rho_m^{-n+m^*})\right]^{-1},$$

$$\left[\sum_{r\in\{e\}+\{m\}} \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|^{r_i}\right]^{-1} \left[\mathcal{F}(\rho_e^{-n+e^*})\mathcal{F}(\rho_m^{-n+m^*})\right]$$

ограничены, то имеем $J_{\{e\}+\{m\}}(L_2) = J^e J^m(L_2)$. Следовательно, для $e^* + m^* < n/2$ имеем $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} \subset L_q$. В противном случае пространство $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}}$ содержит полиномы, порядки которых определяются Теоремой 1.1 при $\theta_0 = \dfrac{n}{2(e^* + m^*)}$.

Замечание. Легко проверить, что $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} = \dot{w}_2^{\overline{m}+\overline{e}}$, если $\dfrac{m_i}{e_i} = \dfrac{m_j}{e_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$. Однако, если $\dfrac{m_i}{e_i} \neq \dfrac{m_j}{e_j}$ для некоторых $i \neq j$, согласно (1.16) имеем $\dot{w}_2^{\{e\}+\{m\}} \subset \dot{w}_2^{\overline{m}+\overline{e}}$. Каждое из этих пространств содержит полиномы. В частности, $\dot{w}_2^{\overline{m}+\overline{e}}(\mathbb{R}^n)$ содержит мономы ξ^α, где

$$\frac{\alpha_1}{m_1+e_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{m_n+e_n} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i+e_i}.$$

Рассмотрим действие псевдодифференциального оператора Ψ с обобщенно-однородным символом $\Psi(\xi)$ на пространства $\dot{w}_2^A$. Предположим, что существует вектор $e = (e_1,\ldots,e_n)$ с положительными компонентами такой, что

$$\Psi(t^{1/e_1}\xi_1,\ldots,t^{1/e_n}\xi_n) = t\Psi(\xi). \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. Пусть $r = (r_1, ..., r_n)$ – вектор с положительными компонентами. Псевдодифференциальный оператор Ψ с непрерывным символом $\psi(\xi)$ при $\xi \neq 0$ удовлетворяет оценке

$$\|\Psi u, \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)\| \leq c \left\| u, \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}} \right\|, \quad u \in C_0^\infty,$$

и следовательно, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$\Psi: \ \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство : Согласно (2.2) и непрерывности $\Psi(\xi)$ имеем

$$|\Psi(\xi)| = \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j} \left| \Psi\left(\xi_1 \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}\right]^{-1/e_1}, ..., \xi_n \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}\right]^{-1/e_n}\right) \right| \leq c \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}.$$

Для завершения доказательства заметим, что если $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|\Psi u, \dot{w}_2^r\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} |\psi(\xi)\widetilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\xi_i|^{e_i} |\xi_j|^{r_j} |\widetilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi = c \left\| u, \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}} \right\|^2.$$

Исследуем теперь вопрос о разрешимости в $\dot{w}_2^A$ уравнения

$$\Psi u = f. \tag{2.3}$$

Псевдодифференциальный оператор Ψ с символом $\Psi(\xi)$, удовлетворяющий (2.2) (условию обобщенной однородности), называется **семиэллиптическим**, если $\Psi(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$.

Теорема 2.1. Пусть Ψ – псевдодифференциальный оператор с непрерывным символом $\Psi(\xi)$ при $\xi \neq 0$, удовлетворяющий (2.2). Следующие утверждения эквивалентны :

1) уравнение (2.3) разрешимо в $\dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}}(\mathbb{R}^n)$ при любом $f \in \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$,

2) уравнение $\Psi u = 0$ имеет только тривиальное решение в $\dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}}$,

3) оператор Ψ – семиэллиптический.

Доказательство : Утверждения 1) и 2) эквивалентны существованию правого и левого обратных операторов к оператору Ψ. Пусть Q – псевдодифференциальный оператор с символом

$$Q(\xi) = \Psi(\xi) \left[\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{e_j}\right]^{-1}.$$

Тогда $Q(\xi)$ – e-однородная функция нулевого порядка. Заметим, что оператор с символом $\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j|^{e_j}$ изоморфно отображает $\dot{w}_2^{(e)+(r)}$ на $\dot{w}_2^{r}$. Действительно, оператор с символом $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|\xi_i|^{r_i}|\xi_j|^{e_j}$ является обратным к оператору с символом $\left[\sum\limits_{i,j=1}^{n}|\xi_i|^{r_i}|\xi_j|^{e_j}\right]^{-1}$ и осуществляет изоморфизм между $\dot{w}_2^{(e)+(r)}$ и L_2, а оператор с символом $\left[\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j|^{r_j}\right]^{-1}$ является изоморфизмом между L_2 и $\dot{w}_2^{r}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, их композиция, т.е. оператор с символом $\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j|^{e_j}$ осуществляет искомый изоморфизм.

Так как оператор с символом $\sum\limits_{j=1}^{n}|\xi_j|^{e_j}$ – изоморфизм, то Ψ обратим слева (справа) тогда и только тогда, когда Q имеет левый (правый) обратный оператор.

Пусть Ψ – семиэллиптический оператор. Ввиду непрерывности $Q(\xi)$ существует постоянная c такая, что $|Q(\xi)| > c$ при $\xi \neq 0$. Следовательно, обратным оператором к Q будет псевдодифференциальный оператор с символом $[Q(\xi)]^{-1}$. Таким образом, Q – изоморфизм, т.е. доказано, что 3) $\Longrightarrow$ 1) и 3) $\Longrightarrow$ 2).

Предположим, что 2) $\Longrightarrow$ 3) не выполняется. Тогда существует точка $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такая, что $Q(\eta) = 0$. Выберем неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, удовлетворяющую $||\varphi||_2 = 1$ и $\varphi(\xi) = 0$ при $|\xi| > 1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим

$$u_\varepsilon = \varepsilon^{-n/2}\varphi\left(\frac{\xi-\eta}{\varepsilon}\right).$$

Тогда $||u_\varepsilon||_2 = 1$, однако

$$||Qu_\varepsilon||_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n}|Q(\xi)\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \sup_{|\xi-\eta|<\varepsilon}|Q(\xi)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т.е. нарушен критерий существования левого обратного оператора. Следовательно, 2) $\Longrightarrow$ 3).

Оператор Q^*, сопряженный к Q, является псевдодифференциальным оператором с символом $\overline{Q(\xi)}$. Поэтому Q^* имеет левый обратный оператор тогда и только тогда, когда $Q(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Следовательно, 1) $\Longrightarrow$ 3). Теорема 2.1 доказана.

§3. КОЭРЦИТИВНЫЕ СВОЙСТВА СЕМИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Используя результаты §2, установим априорные оценки в $\mathbb{R}^n$ для семиэллиптических дифференциальных операторов $P(D)$ с постоянными коэффициентами и символами вида

$$P(\xi) = \sum_{(\alpha:e)\le 1} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{3.1}$$

где $e = (e_1, ..., e_n)$ – вектор с целыми положительными компонентами, определяющий "порядок" оператора P, а α – мультииндекс. Положим

$$P_0(D) = \sum_{(\alpha:e)=1} \gamma_\alpha D^\alpha, \quad P_1(D) = P(D) - P_0(D).$$

Заметим, что $W_2^{\{r\}} = W_2^r$ – классическое анизотропное пространство Соболева.

Теорема 3.1. Пусть P – семиэллиптический дифференциальный оператор с символом вида (3.1). Существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| \le c\left(\|P(D)u, W_2^r\| + \|u\|_2 \right) \tag{3.2}$$

для любой функции $u \in W_2^{\{e\}+\{r\}}$, носитель которой содержится в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство : Сначала докажем, что для каждого $\epsilon > 0$ существует постоянная $c_\epsilon > 0$ такая, что

$$\|P_1(D)u, W_2^r\| \le \epsilon \left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| + c_\epsilon \|u\|_2, \quad u \in W_2^{\{e\}+\{r\}}(\mathbb{R}^n).$$

Ввиду очевидного неравенства

$$|\xi^\alpha| < c_\epsilon \left[\sum_{j=1}^n (1+\xi_j^2)^{r_j/2} \right]^{-1} + \epsilon \sum_{j=1}^n (1+\xi_j^2)^{e_j/2}, \quad (\alpha : e) < 1,$$

получим

$$\|D^\alpha u, W_2^r\| = \left\| |\xi^\alpha \tilde{u}(\xi)| \sum_{j=1}^n (1+\xi_j^2)^{r_j/2} \right\|_2 \le c_\epsilon \|u\|_2 + \epsilon \left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\|.$$

Так как

$$\|P_0 u, W_2^r\| \le \|Pu, W_2^r\| + \|P_1 u, W_2^r\|,$$

то достаточно получить неравенство (3.2) с P_0 вместо P. По Теореме 2.1, для любой функции $u \in C_0^\infty(B)$ выполнено неравенство

$$\left\| u, \dot{w}_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| \le c \|P_0 u, \dot{w}_2^r\|.$$

Однако, на финитных в B функциях нормы пространств $\dot{w}_2^A$ и W_2^A эквивалентны (см. §1). Следовательно

$$\left\| u, W_2^{\{e\}+\{r\}} \right\| \le c \|P_0 u, W_2^r\|, \quad u \in C_0^\infty(B).$$

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Пусть P – семиэллиптический дифференциальный оператор с символом (3.1). Если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $Pu \in W_2^r(\mathbb{R}^n)$, то $u \in W_2^{(e)+(r)}(\mathbb{R}^n)$, где $r = (r_1, ..., r_n)$ – вектор с положительными компонентами.

Доказательство : При $r = (0, ..., 0)$ утверждение доказано в [14]. Вообще говоря, оно следует из условия $P_0 u \in \dot{w}_2^r$. Действительно, если P_0 – обобщенно-однородный оператор, то по Теореме 2.1 имеем

$$\left\| u, \dot{w}_2^{(e)+(r)} \right\| \sim \|P_0 u, \dot{w}_2^r\|.$$

Следовательно, $u \in \dot{w}_2^{(e)+(r)}$, и согласно (1.17) получим $u \in \dot{w}_2^{(e)+(r)} \cap L_2 = W_2^{(e)+(r)}$. Покажем теперь, что $P_0 u \in \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$P_1(\xi) = \sum_{(\alpha:e)\leq 1-\delta} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

для некоторого $\delta > 0$. Положим

$$s_0 = \max\left\{0, 1 - \frac{\delta \min_i e_i}{\max_i r_i}\right\}.$$

Если $s_0 = 0$, то согласно упомянутому результату работы [14], $u \in W_2^e$. В случае $s_0 > 0$ предположим, что $u \in W_2^{(e)+s_0(r)}$. Покажем, что из $Pu \in W_2^r$ следует $u \in W_2^{(e)+(r)}$. Как отмечено выше, достаточно показать, что $P_0 u \in \dot{w}_2^r$. Так как $u \in W_2^{(e)+s_0(r)}$, то имеем $P_1 u \in W_2^r$. Объяснение : величины

$$b_1(\xi) = \xi^\alpha \left[\sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{e_i/2}\right]^{\delta-1},$$

$$b_2(\xi) = \sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{r_i/2} \left[\sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{e_i/2}\right]^{-\delta} \left[\sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{s_0 r_i/2}\right]^{-1}$$

ограничены и при $(\alpha : e) < 1$ имеем

$$\|D^\alpha u, W_2^r\| = \left\|\xi^\alpha \sum_{i=1}^n (1+\xi_i^2)^{r_i/2}\tilde{u}\right\| = \left\|b_1(\xi) b_2(\xi) \sum_{i,j=1}^n (1+\xi_i^2)^{e_i/2}(1+\xi_j^2)^{s_0 r_j/2}\tilde{u}\right\|.$$

С другой стороны, из $Pu \in W_2^r$ получим $P_0 u = Pu - P_1 u \in W_2^r$. Так как $W_2^r \subset \dot{w}_2^r$, то $P_0 u \in \dot{w}_2^r(\mathbb{R}^n)$, и следовательно $u \in W_2^{(e)+(r)}$.

Чтобы показать, что $u \in W_2^{(e)+s_0(r)}$, предположим, что $u \in W_2^{(e)+s_1(r)}$, где

$$s_1 = s_0 \max\left\{0, 1 - \frac{\delta \min_i e_i}{s_0 \max_i r_i}\right\}.$$

Ясно, что $s_1 < s_0$. Повторяя вышеприведенные рассуждения для $u \in W_2^{(e)+s_1(r)}$, через конечное число шагов приходим к предположению $u \in W_2^{(e)+s_k(r)}$, где

$$s_k = s_{k-1} \max\left\{0, 1 - \frac{\delta \min_i e_i}{s_{k-1} \max_i r_i}\right\} = 0, \quad s_k < s_{k-1} < \cdots < s_0,$$

т.е. $u \in W_2^e$. Но это предположение выполняется согласно отмеченному результату работы [14]. Рассуждая теперь в обратном порядке, приходим к требуемому результату. Теорема 3.2 доказана.

ABSTRACT. The paper considers semielliptical pseudodifferential operators with constant coefficients in certain spaces of Riesz potential type. Some estimates in Sobolev spaces are derived and a theorem on smoothness of solutions is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. Н. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Наука и Техника, Минск, 1987.
2. A. J. Pryde, "Higher order elliptic boundary value problems in spaces with homogeneous norms", J. Austral. Math. Soc, ser. A, vol. 31, pp. 92 – 113, 1981.
3. А. А. Давтян, "Анизотропные потенциалы, их обращение и некоторые приложения", ДАН СССР, том 285, № 3, стр. 537 – 541, 1985.
4. А. А. Давтян, "О пространствах $\dot{w}_2^A$ и коэрцитивных свойствах уравнений эллиптического типа", ДАН СССР, том 316, № 1, стр. 18 – 22, 1991.
5. С. М. Никольский, "Вариационная задача", Мат. сборник, том 62(104), № 1, стр. 53 – 75, 1963.
6. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
7. П. И. Лизоркин, "Характеристика граничных значений функций из $L_p^r(E_n)$ на гиперплоскостях", ДАН СССР, том 150, стр. 984 – 986, 1963.
8. П. И. Лизоркин, "Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций", Труды МИАН СССР, том 105, стр. 89 – 167, 1969.
9. A. J. Pryde, "Spaces with homogeneous norms", Bull. Austral. Math. Soc, pp. 189 – 205, 1980.
10. В. А. Васильев, "Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума", Функ. Анализ, № 3, стр. 1 – 12, 1977.
11. А. А. Давтян, "Пространства анизотропных потенциалов. Приложения", Труды МИАН СССР, том 150, стр. 174 – 197, 1989.
12. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теорема вложения", Усп. Мат. Наук, том 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
13. В. П. Ильин, "О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных", Труды МИАН СССР, том 84, стр. 144 – 173, 1965.
14. E. Pehkonen, "Regularit: at der schwachen Lösungen linear quasielliptischer Dirichlet-probleme", Berl. Univ., Jyväskylä Math. Inst., vol. 16, 1976.
15. А. А. Давтян, "Пространства Соболева–Лиувилля с квазиоднородной нормой", Изв. Вузов, Серия Математика, № 5, 1986.

10 апреля 1999 Ереванский государственный университет

КОСОЭРМИТОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПУЧКИ ОПЕРАТОРОВ : ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В. Л. Даллакян, А. Г. Руткас

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье показано, что класс функций, позитивных и аналитических в открытой правой полуплоскости, совпадает с классом характеристических функций косоэрмитовых линейных пучков операторов в гильбертовом пространстве. Таким пучкам операторов ставятся в соответствие операторные узлы, вводятся понятия эквивалентности для пучков и операторных узлов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Спектральная теория операторов и аналитическая теория сжимающих и J-сжимающих матриц-функций нашла применения в анализе и синтезе электрических цепей, фильтрах и других физических системах. Сжимающая функция рассеяния $s(\lambda)$ и J-сжимающая передаточная функция $w(\lambda)$ отождествлялись либо с характеристической функцией оператора (М. С. Лившиц [1]), либо с пучком операторов (А. Г. Руткас [2], [3], [5]), отметим также работы [10], [11], [14].

В аналитической теории цепей наиболее важными были функции сопротивления (импеданс), проводимости (адмиттанс) и гибридного отображения, которые позитивны или неванлинновы в правой полуплоскости [1], [8], [12], [13], [15]. Интерпретация позитивной функции $z(\lambda)$ как характеристическая функция косоэрмитивного оператора $B = -B^*$ была получена М. С. Лившицом лишь для функций, аналитических вне конечной области комплексной плоскости, включая точку $\lambda = \infty$. Такая функция $z(\lambda)$ называется **характеристической функцией d-узла**, и при $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ она определяется резольвентой косоэрмитивого оператора B, окаймленной постоянными каналовыми операторами.

В настоящей работе показано, что класс позитивных и аналитических функций в открытой полуплоскости совпадает с классом характеристических функций косоэрмитовых линейных пучков операторов в гильбертовом пространстве. Операторные Σ-узлы, соответствующие пучкам операторов, рассматриваются наряду с преобразованиями, не выводящими операторные узлы из класса эквивалентности.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $X, Y, \mathcal{E}$ – гильбертовы пространства с индефинитными метриками j_X, j_Y, $\mathcal{J}_\mathcal{E}$, соответственно. Для $x \in X$, $y \in Y$, $e \in \mathcal{E}$ положим

$$[x, x] = (j_X x, x), \quad [y, y] = (j_Y y, y), \quad [e, e] = (\mathcal{J}_\mathcal{E} e, e)$$

(пространства Крейна). Пусть $\mathcal{F}_X = X \oplus X \oplus \mathcal{E}$ – гильбертово пространство с индефинитной метрикой, задаваемой оператором Грама

$$\mathcal{J}^X = \begin{bmatrix} 0 & -j_X & 0 \\ j_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_\mathcal{E} \end{bmatrix}.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}_Y = Y \oplus Y \oplus \mathcal{E}$ определяется аналогично. Рассмотрим ортогональные проекторы в пространствах $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$:

$$P_X : \mathcal{F}_X \to X \oplus X, \quad Q_X : \mathcal{F}_X \to \mathcal{E}; \qquad P_Y : \mathcal{F}_Y \to Y \oplus Y, \quad Q_Y : \mathcal{F}_Y \to \mathcal{E}.$$

Определение 2.1. Оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$$

с ограниченными операторными блоками называется **операторным узлом**, а оператор-функция комплексной переменной λ

$$w(V, \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L$$

называется **характеристической функцией** пучка $\lambda A + B$ и операторного узла V.

Функция $w(V, \lambda)$ рассматривается на множестве

$$\{\lambda : \lambda \text{ не является собственным значением пучка } \lambda A + B\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функция } \Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} L \text{ голоморфна}\} \cap$$
$$\cap \{\lambda : \text{ функции } (\mu A^+ + B^+)^{-1} M^+ \text{ и } (\mu A^+ + B^+)^{-1} N^+ \text{ голоморфны по } \mu = \overline{\lambda}\}.$$

Характеристическая функция $w(V,\lambda)$ операторного узла V голоморфна в области регулярности $\rho = \rho(A,B)$ операторного пучка $\lambda A + B$. Пусть $\Pi_- =$ – левая полуплоскость ($\operatorname{Re}\lambda < 0$) и $\Pi_+ =$ – правая полуплоскость ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). Предположим, что пучок $\lambda A + B$ имеет хотя бы одну регулярную точку в Π_- и хотя бы одну в Π_+ (см. [3]).

Будем говорить, что линейная система $\Phi_V = \{(f,x,g)\}$ с вектором входа $f \in \mathcal{E}$, вектором выхода $g \in \mathcal{E}$ и внутренним состоянием $x \in X$ **связана** с операторным узлом V, если векторы ее состояния удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x. \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что при любом $\lambda \in \rho(A,B)$ отображение $f \longmapsto g$ линейной системы Φ_V совпадает с характеристической функцией $w(V,\lambda)$ операторного узла V.

Система $\widehat{\Phi} = \{(\widehat{f},\widehat{x},\widehat{g})\}$ называется [1] **диагональю** системы $\Phi = \{(f,x,g)\}$ (используем обозначение $\widehat{\Phi} = d(\Phi)$), если векторы состояния этих систем удовлетворяют соотношениям

$$\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f+g), \quad \widehat{x} = x, \quad \widehat{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f-g). \tag{2.2}$$

Заметим, что диагональ системы $d(\Phi)$ совпадает с исходной системой Φ. Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Характеристические функции операторных узлов V и $\widehat{V}$, связанных с системами $\Phi = \Phi_V$ и $\widehat{\Phi} = d(\Phi_V)$, удовлетворяют соотношению

$$w(\widehat{V},\lambda) = [I + w(V,\lambda)]^{-1}[I - w(V,\lambda)]. \tag{2.3}$$

Определение 2.2. [3] Операторный узел $\widehat{V} : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ называется Π–узлом, если он $(\mathcal{J}^X, \mathcal{J}^Y)$-унитарен :

$$\widehat{V}\widehat{V}^+ = I, \quad \widehat{V}^+\widehat{V} = I, \quad (\widehat{V}^+ = \mathcal{J}^X\widehat{V}^*\mathcal{J}^Y). \tag{2.4}$$

Системы рассеяния и передачи, как и электрические цепи и волноводы, связаны с линейными пучками операторов, а спектральный параметр λ имеет физический смысл частоты колебаний. Функции рассеяния $s(\lambda)$ и передачи $w(\lambda)$ совпадают [2] – [5] с характеристической функцией линейного пучка $\lambda\widehat{A} + \widehat{B}$ и операторного Π-узла $\widehat{V}$. Если уравнение $\widehat{A} = I$ (при $X = Y$) и условия нормировки

$\lim_{\lambda\to\infty} w(\widehat{V},\lambda) = I$ выполняются, имеем операторный П-узел

$$\widehat{V}_0 = \begin{bmatrix} I & \widehat{B} & \widehat{L} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \widehat{L}^+ & I \end{bmatrix},$$

а соотношения (2.4) эквивалентны одному равенству : $\widehat{B} + \widehat{B}^+ = \widehat{L}\widehat{L}^+$. Тогда функция $s(i\omega) = w(\widehat{V}_0, i\omega)$ является характеристической функцией одного оператора $T = iB$ в пространстве X с индефинитной метрикой $(j_X x, x)$ [6]. При дефинитной метрике ($j_X = I$) она является характеристической функцией несамосопряженного оператора [1], [7].

Линейная система $\Phi_{\widehat{V}} = \{(\widehat{f},\widehat{x},\widehat{g})\}$, связанная с П-узлом $\widehat{V}$, называется [3] **системой рассеяния или прохождения волн** и ее состояния определяются из соотношений

$$(\lambda\widehat{A} + \widehat{B})\widehat{x} = \widehat{L}\widehat{f}, \quad \widehat{g} = \widehat{K}\widehat{f} - (\lambda\widehat{M} + \widehat{N})\widehat{x}. \tag{2.5}$$

Для системы рассеяния $\Phi_{\widehat{V}} = \{(\widehat{f},\widehat{x},\widehat{g})\}$ вектор $\widehat{f}$ играет роль амплитуды падающей волны, вектор $\widehat{g}$ – амплитуды отраженной волны, а $\widehat{x}$ представляет внутреннее состояние системы. В случае радиофизических систем операторные коэффициенты в (2.5) явно выражаются (см. [4], [8]).

§3. ОПЕРАТОРНЫЕ Σ-УЗЛЫ

Определение 3.1. Операторный узел $V : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ называется Σ-узлом, если относительно индефинитных метрик $\mathcal{J}^X$ и $\mathcal{J}^Y$ выполняются соотношения

$$VQ_Y + Q_XV^+ = VP_XV^+ - P_Y, \quad V^+Q_X + Q_YV = V^+P_YV - P_X. \tag{3.1}$$

В терминах блочного оператора Σ-узла V, соотношения (3.1) эквивалентны следующим :

$$\begin{array}{ll}
1)\ AD^+ + BC^+ = I, & 7)\ D^+A + B^+C = I, \\
2)\ AB^+ + BA^+ = 0, & 8)\ C^+A + A^+C = 0, \\
3)\ CD^+ + DC^+ = 0, & 9)\ D^+B + B^+D = 0, \\
4)\ MD^+ + NC^+ = -R^+, & 10)\ D^+L + B^+R = -N^+, \\
5)\ MB^+ + NA^+ = -L^+, & 11)\ C^+L + A^+R = -M^+, \\
6)\ MN^+ + NM^+ = -(K + K^+), & 12)\ R^+L + L^+R = -(K + K^+).
\end{array} \tag{3.2}$$

Последние три соотношения следуют из предыдущих шести.

Линейная система $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$, связанная с Σ-узлом V, определяется уравнениями

$$(\lambda A + B)x = Lf, \quad g = Kf - (\lambda M + N)x. \tag{3.3}$$

В зависимости от типов входного и выходного векторов, передаточное отображение

$$z(\lambda) = w(V, \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L \tag{3.4}$$

имеет физический смысл импеданса, адмиттанса или гибридной матрицы электрического многополюсника [8]. Поэтому, линейную систему $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$, связанную с Σ-узлом V, будем называть импедансной системой.

Частным случаем Σ-узла является оператор (где $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}$, $B^* = B$)

$$V_0 = \begin{bmatrix} I & -iB & \frac{1}{\sqrt{2}}L \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{J}L^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая функция этого узла равна

$$z_d(\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{J}L^*(\lambda I - iB)^{-1}L,$$

она совпадает с передаточной функцией диагональной системы (диагонального операторного узла) М. С. Лившица [1]. Функция $z_d(\lambda)$ является неванлинновской в Π_+ и аналитической на бесконечности.

Импедансная система с входом $f = \vec{I}$ и выходом $g = \vec{U}$ является моделью электрического $2n$-полюсника с вектором внешних токов $\vec{I}$ и вектором внешних направлений $\vec{U}$. Она является системой рассеяния, если в качестве входа и выхода выбраны векторы $\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I} + \vec{U})$ и $\widehat{g} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{I} - \vec{U})$, соответственно.

Теорема 3.1. **Пусть система $\Phi_{\widehat{V}} = \{(\widehat{f}, \widehat{x}, \widehat{g})\}$ соответствует некоторому П-узлу $\widehat{V}$ и оператор $I + \widehat{K}$ имеет ограниченный обратный. Тогда существует однозначное преобразование $\Delta(\widehat{V})$, отображающее $\widehat{V}$ в Σ-узел $V = \Delta(\widehat{V})$. Система Φ_V является диагональю системы $\Phi_{\widehat{V}}$. Верно и обратное утверждение.**

Доказательство : С помощью соотношений (2.2) перейдем от состояний системы $\Phi_{\widehat{V}}$ к состояниям системы $\Phi_V = d(\Phi_{\widehat{V}})$. Тогда уравнения (2.5) примут вид (3.3) для системы Φ_V, где

$$A = \widehat{A} - \widehat{L}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{M}, \quad B = \widehat{B} - \widehat{L}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{N},$$

$$L = \sqrt{2}\widehat{L}(I + \widehat{K})^{-1}, \quad M = -\sqrt{2}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{M}, \tag{3.5}$$

$$N = -\sqrt{2}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{N}, \quad K = (I + \widehat{K})^{-1}(I - \widehat{K}).$$

Положим

$$C = \widehat{C} - \widehat{R}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{M}, \quad D = \widehat{D} - \widehat{R}(I + \widehat{K})^{-1}\widehat{N}, \quad R = \sqrt{2}\widehat{R}(I + \widehat{K})^{-1}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим блочный оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Начиная с $\widehat{V}$ и применяя (2.4), (3.5) и (3.6) можно получить (3.2). Следовательно, V является Σ-узлом, и соотношения (3.5) и (3.6) задают преобразование $V = \Delta(\widehat{V})$. В силу симметрии существует преобразование $\widehat{V} = \widehat{\Delta}(V)$. П-узел $\widehat{V}$ связан с диагональной системой $\widehat{\Phi} = d(\Phi)$. Так как $\widehat{\Delta} = \Delta^{-1}$, то композиция $\widehat{\Delta}\Delta$ является тождественным преобразованием. Теорема 3.1 доказана.

Соотношения 10, 11 в (3.2) эквивалентны следующим двум $-M = R^+A + L^+C$, $-N = R^+B + L^+D$. Следовательно, характеристическая функция Σ-узла может быть представлена в виде

$$z(\lambda) = H + L^+(\lambda C + D)(\lambda A + B)^{-1}L, \tag{3.8}$$

где $H = K + R^+L$ и оператор H, согласно соотношению 12 в (3.8), удовлетворяет условию $H + H^+ = 0$.

Лемма 3.1. Воспроизводящее ядро

$$\Psi(\lambda, \mu) = \frac{z(\lambda) + z^+(\mu)}{\lambda + \overline{\mu}}$$

характеристической функции Σ-узла представляется в виде

$$\Psi(\lambda, \mu) = \Gamma^+(\mu)\Gamma(\lambda), \qquad \Gamma(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}L.$$

Доказательство : следует из представления (3.8) и соотношений 7 – 9 в (3.2).

Ядро $\Psi(\lambda, \mu)$ называется **эрмитово-положительным** в области ρ, если при всяком n и для любых $\lambda_j \in \rho$, $\xi_j \in \mathbf{C}$, $f_j \in \mathcal{E}$ $(j = 1, \ldots, n)$ квадратичная форма

$$\sum_{k,j=1}^{n} (\Psi(\lambda_k, \lambda_j)f_k, f_j)\xi_k\overline{\xi}_j$$

является положительно полуопределенной.

Лемма 3.2. В случае (дефинитный случай) $j_X = I$, $j_Y = I$, $\mathcal{J}_\mathcal{E} = I$ воспроизводящее ядро $\Psi(\lambda,\mu)$ характеристической функции $z(\lambda)$ Σ-узла эрмитово-положительно при λ,μ из области определения ρ функции $z(\lambda)$. Область ρ содержит обе открытые полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Доказательство : В дефинитном случае имеем $\Gamma^+(\mu) = \Gamma^*(\mu)$, и эрмитово положительность ядра $\Psi(\lambda,\mu)$ следует из Леммы 3.1. Каждая из пучков имеет хотя бы одну регулярную точку в Π_+ и в Π_-. Тогда, с учетом соотношения 2) в (3.2), пучок $\lambda A + B$ является косоэрмитовым и, следовательно, все точки $\lambda \in \Pi_+$ или Π_- являются для него регулярными [3], [9]. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.2. В дефинитном случае характеристическая функция $z(\lambda)$ Σ-узла V позитивна всюду в Π_+ и негативна всюду в Π_- :

$$
\begin{aligned}
z(\lambda) + z^*(\lambda) &\geq 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0,\\
z(\lambda) + z^*(\lambda) &= 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda = 0,\\
z(\lambda) + z^*(\lambda) &\leq 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\lambda < 0.
\end{aligned}
$$

Доказательство : следует из Леммы 3.2.

Теорема 3.3. Голоморфная в окрестности ε_ν точки $\nu \in \rho(A,B)$ оператор-функция $z(\lambda)$ является характеристической функцией дефинитного Σ-узла тогда и только тогда, когда воспроизводящее ядро $\Psi(\lambda,\mu)$ эрмитиво положительно при $\lambda,\mu \in \varepsilon_\nu$, или, что эквивалентно, $z(\lambda)$ имеет аналитическое продолжение до позитивной функции в Π_+.

Доказательство : Эквивалентность эрмитивой положительности воспроизводящего ядра

$$\Psi(\lambda,\mu) = \frac{z(\lambda) + z^*(\mu)}{\lambda + \overline{\mu}}$$

и позитивности аналитической функции $z(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ является известным фактом в теории неванлинновских функций. Итак, необходимость следует из Леммы 3.2.

Достаточность. Пусть $z(\lambda)$ - аналитическая и позитивная в Π_+ оператор-функция. Преобразование

$$s(\lambda) = [I - z(\lambda)][I + z(\lambda)]^{-1}$$

существует и приводит к сжимающей всюду в Π_+ оператор-функции $s(\lambda)$: $\|s(\lambda)\| < 1$. Но тогда существует П-узел $\widehat{V}$, характеристическая функция которого совпадает с $s(\lambda)$ в Π_+ [3]. Перейдя от П-узла $\widehat{V}$ к Σ-узлу $V = \Delta(\widehat{V})$, заметим, что характеристическая функция $w(V, \lambda)$ последнего совпадает с $z(\lambda)$. Теорема 3.3 доказана.

§4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЗЛОВ

Рассмотрим преобразования над пучками и над Σ-узлами, которые не меняют характеристическую функцию $z(\lambda)$, и соответствующие свойства импедансной системы.

Определение 4.1. Пучки $\lambda A + B$, $\lambda A_1 + B_1 : X \to Y$ называются **унитарно эквивалентными**, если существуют ограниченно обратимый оператор $Q : Y \to Y$ и унитарный оператор $U : X \to X$ такие, что при любом λ

$$\lambda A_1 + B_1 = Q(\lambda A + B)U^*. \tag{4.1}$$

Спектры таких пучков одинаковы, левые резольвенты унитарно эквиваленты :

$$(\lambda A_1 + B_1)^{-1} A_1 = U(\lambda A + B)^{-1} A U^*, \tag{4.2}$$

и поэтому совпадают их системы собственных и присоединенных векторов и других инвариантов.

Определение 4.2. Операторные Σ-узлы $V, V_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ называются **унитарно эквивалентными**, если их блоки удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 = QAU^*, \quad B_1 = QBU^*, \quad L_1 = QL, \\ M_1 = MU^*, \quad N_1 = NU^*, \quad K_1 = K, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $Q : Y \to Y$ – ограниченно обратимый оператор, а $U : X \to X$ – унитарный оператор.

Определение 4.3. Линейные системы $\Phi_1 = \{(f_1, x_1, g_1)\}$ и $\Phi_2 = \{(f_2, x_2, g_2)\}$ называются **эквивалентными** ($\Phi_1 \sim \Phi_2$), если из равенства векторов входных состояний f_1 и f_2 следует равенство векторов выходных состояний g_1 и g_2. Они называются **унитарно эквивалентными**, если из равенства $f_1 = f_2$ следует и $g_1 = g_2$ и $x_2 = Ux_1$, где $U^* = U^{-1}$.

Очевидно, что если Σ-узлы V и $V_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ унитарно эквивалентны, то пучки $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1$, составленные из их внутренних системных блоков, унитарно эквивалентны. Кроме того, их характеристические функции совпадают, а связанные импедансные системы $\Phi_V = \{(f, x, g)\}$ и $\Phi_{V_1} = \{(f_1, x_1, g_1)\}$ унитарно эквивалентны.

Определение 4.4. Операторные Σ-узлы $V : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$ и $V_1 : \mathcal{F}_{X_1} \to \mathcal{F}_{Y_1}$ называются **эквивалентными**, если их характеристические функции совпадают :

$$w(V, \lambda) = w(V_1, \lambda), \quad \lambda \in \rho(A, B) = \rho(A_1, B_1). \tag{4.4}$$

Импедансные системы Φ_V и Φ_{V_1}, соответствующие эквивалентным Σ-узлам V и V_1, имеют одинаковые передаточные функции и эквивалентны ($\Phi_V \sim \Phi_{V_1}$).

Определение 4.5. Операторный Σ-узел V называется **нормированным в точке** ν, если $\nu M + N = 0$.

Заметим, что угловой блок K нормированного в точке ν Σ-узла V совпадает со значением характеристической функции в этой точке : $K = z(\nu)$.

Определение 4.6. Представление оператор-функции $z(\lambda)$ в виде характеристической функции операторного узла V

$$z(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L, \qquad \mathrm{Re}\, \lambda > 0 \tag{4.5}$$

называется **реализацией функции $z(\lambda)$ в правой полуплоскости**, а представление функции $\theta(\zeta)$ в виде

$$\theta(\zeta) = S + \zeta G(I - \zeta T)^{-1} F, \quad |\zeta| < 1 \tag{4.6}$$

называется **реализацией в единичном круге**.

Существует преобразование χ, переводящее коэффициенты реализации (4.5) Σ-узла V в коэффициенты реализации (4.6). Для этого произведем замену переменной

$$\zeta = \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}}, \quad \nu \in \Pi_+ \cap \rho(A, B).$$

Используя представление (3.8), получим

$$\theta(\zeta) = z\left(\frac{\nu + \overline{\nu}\zeta}{1 - \zeta}\right).$$

Тогда имеем

$$\theta(\zeta) = K + R^* L + L^* [\zeta(\overline{\nu} C - D) + (\nu C + D)][I + \zeta(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu} A - B)]^{-1}(\nu A + B)]^{-1} L.$$

Обозначим

$$T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B). \tag{4.7}$$

Тогда

$$\theta(\zeta) = K + R^* L + L^*[\zeta(\overline{\nu}C - D) + (\nu C + D)(\zeta T + I - \zeta T)][I - \zeta T]^{-1}(\nu A + B)^{-1}L =$$

$$= z(\nu) + \zeta L^*[\overline{\nu}C - D + (\nu C + D)T][I - \zeta T]^{-1}(\nu A + B)^{-1}L.$$

В силу $AB^* + BA^* = 0$, имеем

$$(\overline{\nu}A - B)(\nu A^* - B^*) = (\nu A + B)(\overline{\nu}A^* + B^*), \tag{4.8}$$

откуда следует $T^*T = I$ и $TT^* = I$, т.е. оператор T является унитарным. Кроме (4.7), имеет место представление

$$T = -(\overline{\nu}A^* + B^*)(\nu A^* - B^*)^{-1}. \tag{4.9}$$

Кроме того, выполняются равенства

$$\begin{aligned} I - T &= (\nu + \overline{\nu})(\nu A + B)^{-1}A = (\nu + \overline{\nu})A^*(\nu A^* - B^*)^{-1}, \\ \overline{\nu}I + \nu T &= (\nu + \overline{\nu})(\nu A + B)^{-1}B = (\nu + \overline{\nu})B^*(\nu A^* - B^*)^{-1}, \\ I + T &= (\nu A + B)^{-1}[(\nu - \overline{\nu})A + 2B] = [(\nu - \overline{\nu})A^* - 2B^*](\nu A^* - B^*)^{-1}, \\ \overline{\nu}I - \nu T &= (\nu A + B)^{-1}[2\nu\overline{\nu}A - (\nu - \overline{\nu})B] = [2\nu\overline{\nu}A^* + (\nu - \overline{\nu})B^*](\nu A^* - B^*)^{-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно, получим

$$\overline{\nu}C - D + (\nu C + D)T = -(\nu + \overline{\nu})(\nu A^* - B^*)^{-1}. \tag{4.10}$$

Полагая

$$\sigma = \sqrt{\nu + \overline{\nu}}, \quad G = -\sigma L^*(\nu A^* - B^*)^{-1}, \quad F = \sigma(\nu A + B)^{-1}L, \tag{4.11}$$

получим требуемую реализацию для $\theta(\zeta)$ в единичном круге $|\zeta| < 1$. Таким образом, преобразование

$$\mathcal{V} = \chi(V) = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B) & \sigma(\nu A + B)^{-1}L \\ -\sigma L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & z(\nu) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

переводит коэффициенты реализации (4.5) в коэффициенты реализации (4.6). Используя (4.8), представления (4.6) и (4.9) и Лемму 3.1, получим доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. Блоки оператора $\mathcal{V} = \chi(V)$ Σ-узла V удовлетворяют соотношениям

$$TT^* = I, \quad T^*T = I; \quad TG^* = F, \quad T^*F = G^*; \quad GG^* = F^*F = S + S^*. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим реализацию в круге некоторой функции $\theta(\zeta)$, коэффициенты которой образуют блочный оператор

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \mathcal{E} \to X \oplus \mathcal{E} \qquad (4.14)$$

и удовлетворяют соотношениям (4.13). Если $\nu \in \Pi_+$, то блочный оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I-T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{\overline{\nu}I+\nu T}{\nu+\overline{\nu}} & \dfrac{1}{\sigma}F \\ \dfrac{I+T}{2} & \dfrac{\overline{\nu}I-\nu T}{2} & -\dfrac{\Sigma}{2}F \\ -\dfrac{1}{\Sigma}G & \dfrac{\nu}{\sigma}G & S \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

задает реализацию в правой полуплоскости для функции $z(\lambda) = \theta\left(\dfrac{\lambda-\nu}{\lambda+\overline{\nu}}\right)$ и является Σ-узлом. Σ-узел V (4.15) нормирован в точке ν, и $\nu A + B = I$. Таким образом, построено преобразование π, которое блочный оператор $\mathcal{V}$ (4.14) переводит в нормированный в некоторой точке ν Σ-узел $V = \pi(\mathcal{V}) : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X$.

Определение 4.7. Операторный Σ-узел V называется **простым**, если линейная оболочка $X_0 = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} (T^n F\mathcal{E})$, получаемая с помощью операторов $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$ и F из (4.11), совпадает с основным внутренним пространством Σ-узла : $X_0 = X$.

Лемма 4.1. Операторы всякого косоэрмитового пучка $\lambda A + B : X \to Y$ допускают включение в некоторый простой нормированный Σ-узел.

Доказательство : Для точки $\nu \in \rho(A, B)$ положим $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$. Из условия косоэрмитивности пучка $\lambda A + B$ следует унитарность оператора T. Пусть X_0 – подпространство в X такое, что

$$X = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} (T^n X_0).$$

В частности, если спектр оператора T простой, то в качестве X_0 можно взять оболочку циклического вектора и $dim\, X_0 = 1$. В качестве $\mathcal{E}$ выберем любое гильбертово пространство, допускающее изометрическое отображение $U_0 : \mathcal{E} \to X_0$. Пусть $X_1 = X \ominus X_0$ и

$$F = \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{E} \to X = X_0 \oplus X_1, \quad G = F^*T, \quad S = \frac{1}{2}I_{\mathcal{E}}.$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям (4.13). Следовательно, оператор $\pi(\mathcal{V}) = V_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_X$, полученный с помощью оператора

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : X \oplus \mathcal{E} \to X \oplus \mathcal{E},$$

является Σ-узлом. Основные операторные блоки Σ-узла V_1 равны

$$\frac{I-T}{\nu+\overline{\nu}} = (\nu A + B)^{-1}A, \quad \frac{\overline{\nu}I + \nu T}{\nu + \overline{\nu}} = (\nu A + B)^{-1}B, \tag{4.16}$$

и ясно, что при любом ограниченно обратимом операторе $Q : X \to Y$ преобразование $(Q \oplus Q^{*^{-1}} \oplus I_{\mathcal{E}})$ переводит Σ-узел в $V_1 = \pi(\mathcal{V})$ Σ-узел V. Следовательно, полагая $Q = (\nu A + B)$, получим искомый Σ-узел V, основные блоки которого совпадают с исходными операторами A и B :

$$\begin{array}{cccc} & A & B & L \\ V = & \left[\begin{array}{c} Q^{*^{-1}}Q^{-1}\left(\dfrac{\nu-\overline{\nu}}{2}A + B\right) \\ -\dfrac{1}{\sigma}G \end{array}\right. & \begin{array}{c} Q^{*^{-1}}Q^{-1}\left(\nu\overline{\nu}A - \dfrac{\nu-\overline{\nu}}{2}B\right) \\ \dfrac{\nu}{\sigma}G \end{array} & \left.\begin{array}{c} -\dfrac{\sigma}{2}Q^{*^{-1}}F \\ \dfrac{1}{2}I_{\mathcal{E}} \end{array}\right]. \end{array}$$

Σ-узел V нормирован в точке ν по построению. Его простота вытекает из равенства $T^n F\mathcal{E} = T^n X_0$ и того факта, что после преобразования χ над Σ-узлом V, получим оператор

$$\mathcal{V} = \chi(V) = \begin{bmatrix} T & F \\ \widetilde{G} & \widetilde{S} \end{bmatrix}.$$

Лемма 4.1 доказана.

Теорема 4.2. **Пусть функции**

$$z(\lambda) = w(V, \lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}L,$$

$$z_1(\lambda) = w(V_1, \lambda) = K_1 - (\lambda M_1 + N_1)(\lambda A_1 + B_1)^{-1}L_1$$

являются характеристическими для косоэрмитовых пучков $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1 : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_Y$, построенные по простым Σ-узлам V и V_1. Если $z(\lambda) = z_1(\lambda)$ (Re $\lambda > 0$), то пучки унитарно эквивалентны. Если, более того, Σ-узлы V и V_1 нормированы, то они унитарно эквивалентны.

Доказательство : Применяя последовательно преобразования (4.12) и (4.15) к Σ-узлам V и V_1, построим эквивалентные им Σ-узлы $\widetilde{V} = (\pi \circ \chi)V$ и $\widetilde{V}_1 = (\pi \circ \chi)V_1$. Узел $\widetilde{V}$ имеет вид (4.15), где операторы T, F, G, S выражаются через узел V формулами (4.12). Представляя $z(\lambda)$ по формуле характеристической функции Σ-узла $\widetilde{V}$, получим

$$z(\lambda) = \widetilde{K} - (\lambda\widetilde{M} + \widetilde{N})(\lambda\widetilde{A} + \widetilde{B})^{-1}\widetilde{L} = z(\nu) - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} G \left[I - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} T \right]^{-1} F.$$

Аналогично, получим

$$z_1(\lambda) = z_1(\nu) - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} G_1 \left[I - \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \overline{\nu}} T_1 \right]^{-1} F_1.$$

Из $z_1(\lambda) = z(\lambda)$ при $\lambda \in \Pi_+$ следует, что для всякого целого $n \geq 0$ имеем $GT^n F = G_1 T_1^n F_1$. Так как согласно Теореме 4.1 коэффициенты этих представлений удовлетворяют равенствам $G = F^* T$, $G_1 = F_1^* T_1$ и

$$F^* F = GG^* = S + S^* = z(\nu) + z^*(\nu) = G_1 G_1^* = F_1^* F_1,$$

то при всяком $n \geq 0$ имеем

$$F^* T^n F = F_1^* T_1^n F_1. \tag{4.17}$$

Далее, учитывая унитарность оператора T, получим

$$F^* T^{-n} F = F^* T^{*^n} F = (F^* T^n F)^* = (F_1^* T_1^n F_1)^* = F_1^* T_1^{*^n} F_1 = F_1^* T_1^{-n} F_1,$$

и следовательно, при всяком целом n имеет место равенство (4.17).

Покажем теперь, что из условия унитарной эквивалентности (4.1) следует существование унитарного оператора $U : X \to X$ и ограниченно обратимого оператора $Q : Y \to Y$. На векторах $\varphi, \psi \in X$ вида

$$\varphi = \sum_{k=-n}^{n} T^k F e_k, \quad \psi = \sum_{k=-n}^{n} T_1^k F_1 e_k, \quad e_k \in \mathcal{E}.$$

определим отображение U равенством $U\varphi = \psi$. В виду простоты Σ-узлов V и V_1, область определения и область значений преобразования U плотны в X. Рассмотрим скалярное произведение (ψ, ψ). В силу (4.17) имеем

$$(\psi, \psi) = \left(\sum_{k=-n}^{n} T_1^k F_1 e_k, \sum_{j=-n}^{n} T_1^j F_1 e_j \right) = \left(\sum_{k=-n}^{n} T^k F e_k, \sum_{j=-n}^{n} T^j F e_j \right) = (h, h).$$

Следовательно, отображение U является линейным, однозначным, сохраняет скалярное произведение и допускает продолжение по непрерывности до унитарного оператора, который мы будем обозначать той же буквой U. По построению имеем $UF = F_1$, $UT = T_1U$ и поэтому

$$U(\nu A + B)^{-1}L = (\nu A_1 + B_1)^{-1}L_1, \quad (I \pm T_1) = U(I \pm T)U^*.$$

Из (4.16) и $T = -(\nu A + B)^{-1}(\overline{\nu}A - B)$, $T_1 = -(\nu A_1 + B_1)^{-1}(\overline{\nu}A_1 - B_1)$ получим равенства

$$A_1 = QAU^*, \quad B_1 = QBU^*, \quad L_1 = QL, \tag{4.18}$$

где $Q = (\nu A_1 + B_1)U(\nu A + B)^{-1} : Y \to Y$. Итак, пучки $\lambda A + B$ и $\lambda A_1 + B_1$ унитарно эквивалентны.

Предположим теперь, что узлы V и V_1 нормированы в точке ν. Тогда $K_1 = K$, $N^* = -\overline{\nu}M^*$, $N_1^* = -\overline{\nu}M_1^*$, и из соотношения 5) из (3.2) вытекают равенства

$$L = -(BM^* + AN^*) = (\overline{\nu}A - B)M^*, \quad L_1 = (\overline{\nu}A_1 - B_1)M_1^*.$$

Следовательно, третье соотношение в (4.18) можно представить в виде

$$(\overline{\nu}A_1 - B_1)M_1^* = (\nu A_1 + B_1)U(\nu A + B)^{-1} \cdot (\overline{\nu}A - B)M^*,$$

откуда получим $M_1^* = -T_1^*UTM^*$.

Окончательно имеем соотношения $M_1 = MU^*$, $N_1 = NU^*$ и $K_1 = K$, т.е. нормированные в точке ν Σ-узлы V и V_1 унитарно эквивалентны. Теорема 4.2 доказана.

Введенное отношение эквивалентности операторных Σ-узлов разбивает множество всех Σ-узлов на классы эквивалентности. Рассмотрим некоторые группы преобразований над Σ-узлами, сохраняющие эквивалентность классов. Сначала рассмотрим преобразование $(\pi \circ \chi)$, определенное формулой

$$(\pi \circ \chi)V = (\pi \circ \chi)\begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} = \tag{4.19}$$

$$= \begin{bmatrix} t^{-1}A & t^{-1}B & t^{-1}L \\ t^{-1}(\frac{\nu-\overline{\nu}}{2}A + B) & t^{-1}(\nu\overline{\nu}A - \frac{\nu-\overline{\nu}}{2}B) & -\frac{\nu+\overline{\nu}}{2}t^{-1}L \\ -L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & \nu L^*(\nu A^* - B^*)^{-1} & K - (\nu M + N)t^{-1}L \end{bmatrix},$$

где $t = \nu A + B$.

Для произвольного ограниченно обратимого оператора $Q : Y \to Y$ и унитарного оператора $U : X \to X$ преобразование $\{Q, U\}$, определяемое формулой

$$\{Q, U\} V = (Q \oplus Q^{*^{-1}} \oplus I_{\mathcal{E}}) V (U \oplus U \oplus I_{\mathcal{E}}), \tag{4.20}$$

является преобразованием унитарной эквивалентности. Если $Q_1, \ Q_2 : Y \to Y$ суть ограниченно обратимые операторы, а $U_1, \ U_2 : X \to X$ унитарны, то суперпозиция $\{Q_1, U_1\} \circ \{Q_2, U_2\} = \{Q_1 Q_2, U_1 U_2\}$ является преобразованием того же типа. Следовательно, преобразования $\{Q, U\}$ образуют группу относительно операции суперпозиции.

Пусть $\psi : Y \to Y$ – произвольный косоэрмитовый оператор $\psi + \psi^* = 0$. Определим преобразование $< \psi >$ над Σ-узлами по следующему правилу :

$$< \psi > V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \psi & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Легко проверить, что оператор $< \psi > V$ является Σ-узлом, унитарно эквивалентным Σ-узлу V. Кроме того, суперпозиция $< \psi_1 > \circ < \psi_2 > = < \psi_1 + \psi_2 >$ и множество преобразований этого типа образуют коммутативную группу относительно операции суперпозиции.

Для произвольного оператора $\varphi : Y \to \mathcal{E}$ определим преобразование $[\varphi]$ на множестве Σ-узлов по формуле

$$[\varphi] V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \varphi & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R \\ M & N & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^+ \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & B & L \\ C & D & R - \varphi^+ \\ M + \varphi A & N + \varphi B & K + \varphi L \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Нетрудно проверить выполнение соотношений (3.2). Тогда оператор $[\varphi] V$ является Σ-узлом, эквивалентным Σ-узлу V. Характеристическая функция Σ-узла $[\varphi] V$ равна

$$w([\varphi] V, \lambda) = K + \varphi L - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L - \varphi (\lambda A + B)(\lambda A + B)^{-1} L = w(V, \lambda).$$

Ясно, что при определении операции суперпозиции $[\varphi_1] \circ [\varphi_2] = [\varphi_1 + \varphi_2]$, множество преобразований этого типа образует коммутативную группу. Заметим, что $< \psi > [\varphi] = [\varphi] < \psi >$.

Рассмотрим теперь преобразование над классами эквивалентности Σ-узлов. Характеристические функции эквивалентных узлов совпадают. Для заданного класса эквивалентности $\mathcal{Z}$, характеристическую функцию $z(\lambda) = w(V, \lambda)$ некоторого узла-представителя $V \in \mathcal{Z}$ назовем **характеристической функцией** класса $\mathcal{Z}$ и обозначим через $z(\mathcal{Z}; \lambda)$.

Пусть $\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}$ – унитарный оператор в пространстве $\mathcal{E}$. На множестве классов эквивалентных Σ-узлов оператор $\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}$ задает преобразование χ_1. По определению, класс $\mathcal{Z}_1 = \chi_1(\mathcal{Z})$ с представителем

$$V_1 = (I_Y \oplus I_Y \oplus \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}) V (I_X \oplus I_X \oplus \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^*) = \begin{bmatrix} A & B & L\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* \\ C & D & R\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* \\ \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} M & \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} N & \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} K \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* \end{bmatrix}$$

соответствует классу $\mathcal{Z}$ с представителем V.

Теорема 4.3. **Характеристические функции классов $\mathcal{Z}$ и $\chi_1(\mathcal{Z})$ связаны соотношением**

$$z(\chi_1(\mathcal{Z}); \lambda) = \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} z(\mathcal{Z}; \lambda) \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^*. \tag{4.23}$$

Доказательство :

$$z(\chi_1(\mathcal{Z}); \lambda) = \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} K \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^* - (\lambda \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} M + \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}} N)(\lambda A + B)^{-1} L \bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{E}}^*.$$

Пусть $\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_{\mathcal{E}}$ – операторы сопряжения в пространствах $X, Y, \mathcal{E}$. Операторы сопряжения $\Omega_X^{\mathcal{F}} = \Omega_X \oplus \Omega_X \oplus \Omega_{\mathcal{E}}$, $\Omega_Y^{\mathcal{F}} = \Omega_Y \oplus \Omega_Y \oplus \Omega_{\mathcal{E}}$ на множестве классов эквивалентных Σ-узлов задают инволютивное преобразование χ_2, ставящее в соответствие классу $\mathcal{Z}$ с представителем V класс с представителем $V_2 = \Omega_Y^{\mathcal{F}} V \Omega_X^{\mathcal{F}}$.

Теорема 4.4. **Характеристические функции классов $\mathcal{Z}$ и $\chi_2(\mathcal{Z})$ удовлетворяют соотношению** $z(\chi_2(\mathcal{Z}); \lambda) = \Omega_{\mathcal{E}} z(\mathcal{Z}; \bar{\lambda}) \Omega_{\mathcal{E}}$. В заключение заметим, что аналитическое представление в виде (4.5) реализации на плоскости для гибридного оператора (матрицы) линейной структуры на графе изучено в [8]. Работа [12] посвящена изучению дробно-линейных представлений таких матриц-функций и вопросам их реализаций. Вопросы аддитивной реализации рациональных вещественных симметрических матриц-функций исследуются в [13], [15].

ABSTRACT. **The paper shows that the class of functions positive and analytical in the open right half-plane coincides with the class of characteristic functions of skew-Hermitian linear operator pencils acting in a Hilbert space. The basic tools are the operator knots that correspond to operator pencils and equivalence relations for pencils and operator knots.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц, Операторы, Колебания. Волны. Открытые системы. Наука, Москва, 1966.
2. А. Г. Руткас, "Унитарные реализации голоморфных функций в пространстве с индефинитной метрикой", Докл. АН УССР, сер. А, том 4, стр. 16 – 19, 1984.
3. А. Г. Руткас, "Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов", Теория Функций, Функ. Анализа и их Приложения, Харьков, том 45, стр. 98 – 111, 1986.
4. А. Г. Руткас, "Свойства функций рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией", ДАН СССР, том 230, № 1, стр. 38 – 40, 1976.
5. А. Г. Руткас, "К теории характеристических функций линейных операторов", ДАН СССР, том 229, № 3, стр. 546 – 549, 1976.
6. А. Г. Руткас, Д. М. Чаусовский, "Индефинитные операторные узлы и волновые функции дискретных структур", Теория Функций, Функ. Анализа и их Приложения, Харьков, том 23, стр. 93 – 109, 1975.
7. М. С. Бродский, Треугольные и Жордановы Представления Линейных Операторов, Наука, Москва, 1969.
8. В. Л. Даллакян, "Внешний гибридный оператор линейной структуры на графе", Мат. вопросы кибернетики и выч. техники, Изд.ВЦ, АН Арм.ССР и ЕГУ, Ереван, том 14, стр. 87 – 101, 1985.
9. А. Г. Руткас, "О классификации и свойствах решения уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$", Дифф. Ур., том 25, № 7, стр. 1150 – 1155, 1989.
10. А. В. Ефимов, В. П. Потапов, "J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей", Успехи Мат. Наук, том 28, № 1(169), стр. 66 – 130, 1973.
11. Т. А. Товмасян, "Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций", Уч. Зап. ЕГУ, № 1, стр. 11 – 25, 1971.
12. В. Л. Даллакян, "Обобщение теоремы Дарлингтона для вещественных позитивных J-симметрических матриц-функций", Изв. АН Армении. Математика, том 29, № 2, стр. 22 – 31, 1994.
13. Т. А. Товмасян, "Об аддитивной реализации некоторых классов рациональных матриц-функций", Уч. записки ЕГУ, Ереван, том 2, стр. 13 – 21, 1995.
14. Д. З. Аров, "Гамма-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции", Мат. Физика, Анализ, Геометрия, Харьков, том 2, № 1, стр. 3 – 14, 1995.
15. V. L. Dallakian, "The synthesis for structural Systems of signal processing", Proc. of Conf. Computer Science и Information Techn., Yerevan, pp. 283 – 286, 1999.

27 июля 1999

Институт проблем информатики
и автоматизации НАН Армении
e-mail : spl@ipia.sci.am,

Харьковский государственный университет
Харьков, Украина
e-mail : rut@nikon.kharkov.ua

ОБ УРАВНЕНИИ ax - xb= c В КОМПЛЕКСНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье получено необходимое и достаточное условие для разрешимости уравнения $ax - xb = c$ в комплексной банаховой алгебре A с единицей.

1. Разрешимость уравнения

$$ax - xb = c \tag{1}$$

для операторных матриц рассмотрена в [1] — [3]. В. Рот [3] показал, что условие разрешимости матричного уравнения (1) и условие подобия матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ равносильны. М. Розенблюм [4] и А. Швайнсберг [5] показали, что для самосопряженных и нормальных операторов разрешимость операторного уравнения (1) в алгебре $BL(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, равносильна подобию операторных матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Эти результаты были распространены автором [6] на случай операторной алгебры $BL(X)$, где X – слабо полное (в частности, рефлексивное) банахово пространство.

В настоящей статье обобщаются и уточняются результаты [1] — [6] для задачи комплексной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ с единицей.

План работы таков. В пункте I исследуем вопрос, когда эрмитово разложимый элемент является эрмитово нормальным, и получаем строгую версию теоремы С. Путнама [7]. Пункт II посвящен вопросам разрешимости уравнения (1) в алгебре $\mathcal{A}$, пологая, что $a, b \in \mathcal{A}$ – квазинормальные элементы.

I. Пусть $\mathcal{A}$ - комплексная банахова алгебра с единицей. Напомним, что если элемент $a \in \mathcal{A}$ таков, что $\|\mathbf{1} - a\| < 1$, где $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ - единичный элемент, то

$a \in \mathcal{A}^{-1}$, где $\mathcal{A}^{-1}$ – группа обратимых элементов алгебры $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1}$ есть открытое множество в $\mathcal{A}$. Обозначим через $S(\mathcal{A})$ единичную сферу в алгебре $\mathcal{A}$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется топологическим делителем нуля, если $\inf\{\|ax\| + \|xa\|\colon x \in S(\mathcal{A})\} = 0$ или, другими словами, существует последовательность элементов $\{x_n\} \subset S(\mathcal{A})$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|ax_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n a\| = 0$. Легко видеть, что если $a \in \partial\mathcal{A}^{-1}$, то a – топологический делитель нуля (см. [8]). В частности, если число $\lambda \in Sp(a)$ – граничная точка спектра элемента a, то элемент $a\mathbf{1} - a \in \partial\mathcal{A}^{-1}$ является топологическим делителем нуля.

Комплексная банахова алгебра $\mathcal{B}$ с единицей называется расширением алгебры $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ – подалгебра в алгебре $\mathcal{B}$, единичный элемент алгебры $\mathcal{A}$ есть единичный элемент $\mathcal{B}$, и норма на $\mathcal{A}$ эквивалентна сужению на $\mathcal{A}$ нормы алгебры $\mathcal{B}$. Пусть $Sing(\mathcal{A})$ – множество всех сингулярных элементов алгебры $\mathcal{A}$. Элемент $a \in Sing(\mathcal{A})$ называется наследственно сингулярным, если он остается сингулярным в любом расширении алгебры $\mathcal{A}$. Легко видеть, что если элемент $a \in \mathcal{A}$ – топологический делитель нуля, то он является наследственно сингулярным. Следовательно, все элементы $\partial\mathcal{A}^{-1}$ обладают этим свойством.

Отображение $a \to a^*$ называется инволюцией в комплексной банаховой алгебре $\mathcal{A}$, если

$$1)(a+b)^* = a^* + b^*; \quad 2)(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \quad \lambda \in \mathbf{C}; \quad 3)a^{**} = a; \quad 4)(ab)^* = b^* a^*.$$

Элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $a = a^*$, назовем самосопряженным и множество всех таких элементов обозначим $Sym(\mathcal{A})$. Ясно, что $Sym(\mathcal{A})$ – линейное вещественное подпространство в $\mathcal{A}$. Заметим, что для $a \in \mathcal{A}$ элементы $a + a^*$, $i(a - a^*)$, aa^* принадлежат $Sym(\mathcal{A})$, и $(a^*)^{-1} = a^{-1}$, $Sp(a^*) = \overline{Sp(a)}$, $\rho(a^*) = \overline{\rho(a)}$, где $\rho(a)$ – спектральный радиус a.

Вообще говоря, инволюция в алгебре $\mathcal{A}$ может не быть непрерывным отображением. Банахова алгебра $\mathcal{A}$ называется инволютивной, если она обладает инволюцией, и называется инволютивно-нормированной, если она обладает непрерывной инволюцией. Инволюция непрерывна тогда и только тогда, когда $Sym(\mathcal{A})$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{A}$. Будем считать, что $\mathcal{A}$ – инволютивно–нормированная банахова алгебра. Ясно, что $\mathcal{A} = Sym(\mathcal{A}) \oplus i\,Sym(\mathcal{A})$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется нормальным относительно данной инволюции, если $[a, a^*] = a\,a^* - a^*\,a = 0$.

Будем говорить, что нормальные элементы $a, b \in \mathcal{A}$ удовлетворяют условию фон

Нейман-Фугледе-Путнама (НФП), если при $x \in \mathcal{A}$ из условия $a\,x = x\,b$ следует $a^*\,x = x^*\,b$. Как отмечено в [9], [10], условие НФП не выполняется для каждого нормального элемента инволютивной банаховой алгебры.

Пусть $\mathcal{A}^*$ – сопряженное пространство к $\mathcal{A}$. Положим $D(\mathcal{A}, \mathbf{1}) = \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1\}$ и заметим, что $D(\mathcal{A}, \mathbf{1})$ является множеством нормализированных состояний на $\mathcal{A}$. При $a \in \mathcal{A}$ множество $V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in D(\mathcal{A}, \mathbf{1}) \subset \mathbf{C}$ (числовой образ элемента a) есть непустое, выпуклое, компактное подмножество в $\mathbf{C}$. Оно допускает представление $V(a) = \cap_{\lambda \in \mathbf{C}} \Delta(\lambda_j \|\lambda\,\mathbf{1} - a\|)$, где $\Delta(\lambda_j \|\lambda\,\mathbf{1} - a\|) = \{\xi \in \mathbf{C} : |\xi - \lambda| \leq \|\lambda\,\mathbf{1} - a\|\}$, откуда следует, что

i) $V(\alpha\,\mathbf{1} + \beta\,a) = \alpha + \beta\,V(a), \quad V(a+b) \subset V(a) + V(b), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}$;

ii) $Sp(a) \subset V(a) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$;

iii) $\frac{\|a\|}{e} \leq V(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(a)\} \leq \|a\|$.

Пусть $Sp(h)$ – спектр элемента h. Элемент $h \in Sym(\mathcal{A})$ называется слабо-эрмитовым, если $Sp(h) \subset \mathbb{R}$ и называется слабо-положительным, если $Sp(h) \subset \mathbb{R}_+$, $(h \geq 0)$.

Элемент $h \in Sym(\mathcal{A})$ называется эрмитовым, если $V(h) \subset \mathbb{R}$. Это равносильно условию $\|\exp(ith)\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Множество $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ всех эрмитовых элементов алгебры $\mathcal{A}$ есть вещественное подпространство в $Sym(\mathcal{A})$. Легко видеть, что если $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, то $i\,[h, k] \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Элемент $k \in \mathcal{A}$ называется положительным, если $V(k) \subset \mathbb{R}_+$, $(k \geq 0)$. Множество всех положительных элементов $\mathcal{A}$, которое обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, есть конус в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется эрмитово-разложимым, если $a = h + i\,k$, где $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Если кроме этого $[h, k] = 0$, то a называется эрмитово-нормальным. Алгебра $\mathcal{A}$ называется эрмитово-разложимой, если она допускает представление $\mathcal{A} = \mathcal{H}(A) \oplus i\,\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Как показано в [8], для эрмитово-нормального элемента $a \in \mathcal{A}$ числовой образ $V(a)$ совпадает с выпуклой оболочкой спектра элемента a, т.е. $V(a) = co(Sp(a))$.

Напомним (см. [11], [12]), что элемент $h \in Sym(\mathcal{A})$ называется квазиэрмитовым, если $\|\exp(ith)\| = o(|t|^{1/2})$ при $t \to \pm\infty$. Пусть $\mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A})$ – множества квазиэрмитовых и слабо-эрмитовых элементов алгебры $\mathcal{A}$, соответственно. Имеем $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A}) \subset Sym(\mathcal{A})$. Легко видеть, что если $\mathcal{A}$ есть B^*-алгебра, то $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$. Обратное тоже верно, т.е., если инволютивная банахова алгебра $\mathcal{A}$ такова, что $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$, то в силу теоремы Видава–Пальмера (см. [13]), $\mathcal{A}$ есть B^*–алгебра относительно сильно-эрмитовой инволюции $a = h + i\,k \mapsto a^* = h - i\,k$.

Отметим, что если $h \in \mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$, то $Sp(h) \subset \mathbb{R}$, хотя числовой образ $V(h)$ может выйти за числовую ось $\mathbb{R}$. В пространстве $Sym(\mathcal{A})$ множество $\mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$ есть максимальное подмножество, порождающее нормальные (квазинормальные) элементы $a = h + i\,k$, $[h,k] = 0$, $h, k \in \mathcal{H}^{<q>}(\mathcal{A})$, удовлетворяющие условию НФП. Условие квазинормальности элемента $a \in \mathcal{A}$ равносильно условию $\|\exp(\overline{\lambda}\,a - \lambda\,a^*)\| = o(|\lambda|^{1/2}$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Для данной последовательности $\{c_n\}$ элементов алгебры $\mathcal{A}$ будем говорить, что $Sp(c_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N_ε такое, что $Sp(c_n) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < \varepsilon\}$ при $n > N_\varepsilon$.

Отметим, что отображение $a \mapsto Sp(a)$ непрерывно. Действительно, если $\mathcal{A} = BL(l^2(\mathbf{Z}))$ и $\{a_k\} \subset \mathcal{A}$ – операторы двустороннего взвешенного сдвига (т.е. $a_k(e_n) = e_{n+1}$ при $n \neq 0$ и $a_k(e_0) = \frac{1}{k}e_1$, $\frac{1}{\infty} = 0$), то $Sp(a_k) = T = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$, $a_k \to a_\infty \in BL(l^2(\mathbf{Z}))$ при $k \to \infty$, однако $Sp(a_\infty = \Delta = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$ (см. [14]). Это означает, что существует оператор с "жирным" спектром, в каждой операторной окрестности которого находятся операторы с относительно малым спектром. Интересно также заметить, что можно построить последовательность нильпотентных операторов $\{a_n\}$ таких, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$, однако $\rho(a) > 0$. Первый пример такого типа указал Какутани (см., например, [14]). Тем не менее имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – комплексная банахова алгебра с единицей, и пусть $a, b \in \mathcal{A}$ – такие элементы, что коммутант $c = [a, b]$ удовлетворяет условию $[a, c] = 0$. Тогда существует последовательность элементов $\{c_n\} \subset \mathcal{A}$ такая, что $c_n \to c$ и $Sp(c_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство : В силу теоремы Клейнеке–Широкова (см. [15]) имеем $\rho(c) = 0$. Следовательно, $Sp(c) = \{0\}$ и значит $c \in rad(\mathcal{A})$ (радикал алгебры $\mathcal{A}$). С другой стороны, условие $[a, c] = 0$ не изменится, если заменить a на $a + \lambda\,\mathbf{1}$. Поэтому можно считать, что $a \in \mathcal{A}^{-1}$. Из условия $[a, c] = 0$ следует $[a^n, b] = n\,a^{n-1}\,c$ для всех натуральных n. Следовательно, $c - c_n = \frac{ab}{n}$, где $c_n = -\frac{a^{-n}\,(ab)\,a^n}{n}$. Так как $\frac{\|ab\|}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то имеем $c_n \to c$. Учитывая $Sp(c_n) = Sp(-\frac{ab}{n})$ заключаем, что $Sp(c_n) \to 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}$ – комплексная банахова алгебра, и пусть $a \in \mathcal{A}$ – эрмитово-разложимый элемент, т.е. $a = h + ik$, где $h, k \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$. Если $[a, [a, a^*]] = 0$, где $a^* = h - ik$, то a - эрмитово-нормальный элемент.

Доказательство : Так как $c = [a, a^*] = 2i[k, h] \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$, то в силу теоремы Капнельсона (см. [16]) имеем $\rho(c) = ||c||$. Так как $\rho(c) = 0$, то $[a, a^*] = 0$. Теорема 2 доказана.

Инволютивная банахова алгебра $\mathcal{A}$ называется слабо-эрмитовой, если каждый самосопряженный элемент $a \in Sym(\mathcal{A})$ – слабо-эрмитовый. Для банаховых алгебр имеем $\mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$, и согласно результату Птака (см. [17]), действительнозначная функция $s(a) = \sqrt{\rho(a^*a)}$ на $\mathcal{A}$ есть B^*-полунорма. В силу теоремы Ширали–Форда [18], для каждого элемента a слабо-эрмитовой банаховой алгебры $\mathcal{A}$ имеем $aa^* \geq 0$. Заметим, что если инволютивная банахова алгебра $\mathcal{A}$ обладает свойством $s = m$, то $\mathcal{A}$ есть слабо-эрмитова банахова алгебра.

Для слабо-эрмитовых банаховых алгебр имеем следующий результат.

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{A}$ – слабо-эрмитова банахова алгебра и пусть $h \in \mathcal{A}$ – слабо-эрмитовый сингулярный элемент. Тогда h является топологическим делителем нуля.

Доказательство : Пусть $h \in \mathcal{H}^{<w>}(\mathcal{A}) \cap Sing(\mathcal{A})$. Имеем $h - \dfrac{i1}{n} \in \mathcal{A}^{-1}$. Поэтому $h \in \partial\mathcal{A}^{-1}$. Утверждение доказано.

II. Линейный оператор $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется дифференцированием на алгебре $\mathcal{A}$, если $D(ab) = (Da)b + a(Db)$. При $a \in \mathcal{A}$ оператор $\delta_a(x) = [a, x]$ – дифференцирование на $\mathcal{A}$, называемое внутренним дифференцированием. Имеем $\delta_a \in BL(\mathcal{A})$ и $||\delta_a|| \leq 2\,||a||$. Заметим, что если дифференцирование $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ непрерывно и $D^2(a) = 0$, то $D(a) \in rad(\mathcal{A})$, где $a \in \mathcal{A}$.

Обозначим через $M_2(\mathcal{A})$ алгебру матриц $\widehat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка, где $a_{ij} \in \mathcal{A}$, с естественными операциями и операторной нормой. Ясно, что $M_2(\mathcal{A})$ – инволютивная банахова алгебра относительно инволюции $\widehat{a} \to \widehat{a}^*$, где $\widehat{a}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$, и $a_{ij}^* \in \mathcal{A}$.

Обратимая матрица $\widehat{a} \in M_2(\mathcal{A})$ называется сильно-обратимой, если $a_{21}a_{21}^* + a_{22}a_{22}^* \in \mathcal{A}^{-1}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ является эрмитово разложимой банаховой алгеброй, то каждая обратимая матрица $\widehat{a} \in M_2(\mathcal{A})$ сильно обратима. Две матрицы $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ называются сильно подобными, если существует сильно обратимая матрица $\widehat{q} \in M_2(\mathcal{A})$, для которой $\widehat{q}\,\widehat{a} = \widehat{b}\,\widehat{q}$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивно–нормированная банахова алгебра над полем C с единицей, и пусть $a, b \in \mathcal{A}$ – квазинормальные элементы.

Тогда для разрешимости уравнения (1) в $\mathcal{A}$, где $c \in \mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ были сильно подобны.

Доказательство : Необходимость следует из тождества

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ax-xb \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Пусть матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ сильно подобны, где $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q & r \\ s & \tau \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A})$. Имеем $qa-aq = cs$, $rb-ar = c\tau$, $sa = bs$ и $\tau b = b\tau$. Используя обобщенную теорему фон Неймана–Фугледе–Путнама (см. [11], [12]), получим $s\,a^* = b^*\,s$, $\tau\, b^* = b^*\,\tau$ и $a\,s^* = s^*\,b$, $b\,\tau^* = \tau^*\,b$. Так как $b\,s\,s^* = s\,a\,s^* = s^*\,s\,b$ и $b\,\tau\,\tau^* = \tau\,b\,\tau^* = \tau\tau^*\,b$, то $[s\,s^* + \tau\,\tau^*, b] = 0$. Следовательно $c\,(s\,s^* + \tau\,\tau^*) = (q\,a - a\,q)\,s^* + (r\,b - a\,r)\,\tau^* = a\,\{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\} - \{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\}\,b$. Умножая обе части полученного соотношения справа на $(s\,s^* + \tau\,\tau^*)^{-1}$ и учитывая равенство $[s\,s^* + \tau\,\tau^*, b] = 0$, получим $c = a\,\{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\,(s\,s^* + \tau\,\tau^*)^{-1}\} - \{-(q\,s^* + r\,\tau^*)\,(s\,s^* + \tau\,\tau^*)^{-1}\}\,b$. Доказательство Теоремы 3 завершено.

Сделаем следующие замечания.

a) В силу доказательства необходимости Теоремы 3, если уравнение (1), где $a, b, c \in \mathcal{A}$, разрешимо в $\mathcal{A}$, то матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ подобны, причем элементы q_{11}, q_{22} матрицы подобия $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяют условию $q_{11}, q_{22} \in \mathcal{A}^{-1}$. Таким образом, для разрешимости уравнения (1) в $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала обратимая матрица $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, где $q_{11}, q_{22} \in \mathcal{A}^{-1}$ такая, что $\widehat{q}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\widehat{q}$.

b) Пусть $\mathrm{H} = l^2(\mathbf{Z}_+)$ и $U \in BL(\mathrm{H})$ – оператор одностороннего сдвига, т.е. $U(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$. Тогда $U^*(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, а оператор $U\,U^*$ – проектор и $U\,U^* = \mathbf{1}$. Рассмотрим уравнение (1) при $a = U$, $b = 0$, $c = p$, где $p = \mathbf{1} - U\,U^*$ – одномерный проектор. Это уравнение не имеет решения, так как в противном случае $x = U^*\,U\,x = U^*\,p = 0$, что невозможно. С другой стороны, матрицы $\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} U & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ сильно подобны, так как полагая $\widehat{q} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix}$, получим $\widehat{q}^{-1}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\widehat{q} = \begin{pmatrix} U & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что матрица $\widehat{q}$ сильно обратима, однако $U^* \notin BL^{-1}(\mathrm{H})$. Этот пример показывает, что условие квазинормальности в Теореме 3 существенно.

c) В случае $\mathrm{H} = l^2(\mathbf{Z})$, оператор одностороннего сдвига есть нормальный оператор и условие b) нарушается.

Следствие 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивно-нормированная алгебра с единицей и $a, b \in \mathcal{A}$ – эрмитово-нормальные элементы. Тогда разрешимость уравнения (1), где $c \in \mathcal{A}$, равносильна сильному подобию матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Следствие 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ – инволютивно-нормированная банахова алгебра с единицей и $a \in \mathcal{A}$ – квазинормальный (в частности, эрмитово-нормальный) элемент. Для того, чтобы элемент $c \in \mathcal{A}$ принадлежал образу $\mathrm{Im}(\delta_a)$ оператора δ_a необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ были сильно подобными.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ – множество пар элементов (a, b), $a, b \in \mathcal{A}$, для которых разрешимость уравнения (1) равносильна сильному подобию матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Тогда из $(a, b) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ следует

a) $(a_1, b_1) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, если a_1 и b_1 подобны a и b, соответственно;

b) $(b^*, a^*) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$;

c) $(a^{-1}, b^{-1}) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, если $a, b \in \mathcal{A}^{-1}$;

d) $(a + \lambda \cdot 1, b + \lambda 1) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство : a) Пусть элементы $s, \tau \in \mathcal{A}^{-1}$ таковы, что $s^{-1} a_1 s = a$, $\tau^{-1} b_1 \tau = b$, $\widehat{q}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \widehat{q} = \begin{pmatrix} a_1 & c \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$, где матрица $\widehat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ сильно обратима. Имеем $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & s^{-1} c \tau \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ и $\widehat{v} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \widehat{q}$ сильно обратима, так как $v_{21} v_{21}^* + v_{22} v_{22}^* = \tau^{-1}(q_{21} q_{21}^* + q_{22} q_{22}^*)(\tau^{-1})^* \in \mathcal{A}^{-1}$.

Из предположения $(a, b) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ следует, что уравнение $s^{-1} c \tau = ax - xb$ разрешимо в $\mathcal{A}$. Следовательно, $c = a_1(s x \tau^{-1}) - (s x \tau^{-1}) b_1$, откуда получим $(a_1, b_1) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

b) Если матрицы $\begin{pmatrix} b^* & c \\ 0 & a^* \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b^* & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix}$ сильно подобны, то матрицы $\begin{pmatrix} a & c^* \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ обладают тем же свойством. Это означает, что $c^* = ax - xb$ разрешимо в $\mathcal{A}$. Следовательно, $c = b^*(-x^*) - (-x^*) a^*$, откуда получим $(b^*, a^*) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

c) Пусть $a, b \in \mathcal{A}^{-1}$. Как и в Теореме 3, из сильного подобия матриц $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a^{-1} & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ следует сильное подобие матриц $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & -a c b \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Тогда из разрешимости уравнения $-a c b = a x - x b$ следует $c = a^{-1} x - x b^{-1}$. Следовательно, $(a^{-1}, b^{-1}) \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Утверждение d) очевидно. Теорема 4 доказана.

Для инволютивной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ дифференцирование на $\mathcal{A}$ симметрично, если $D(a^*) = D(a)^*$. Как показано в [19], если $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана и D – ограниченное симметрическое дифференцирование, то существует элемент $h \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ такой, что $\|h\| \leq \frac{1}{2}\|D\|$ и $D(a) = i\delta_n(a) = i[h, a]$. Таким образом, имеют место такие следствия.

Следствие 2.3. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана и D – симметрическое дифференцирование на $\mathcal{A}$. Тогда для того, чтобы элемент c принадлежал $\mathrm{Im}(\frac{1}{i}D)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} h & c \\ 0 & h \end{pmatrix}$ были сильно подобны.

Следствие 2.4. Пусть $\mathcal{A}$ есть B^*-алгебра и D – симметрическое дифференцирование на $\mathcal{A}$. Пусть $\Pi(\mathcal{A})$ – представление алгебры $\mathcal{A}$. Тогда для того, чтобы оператор $c \in BL(\mathrm{H})$ принадлежал образу $\frac{1}{i}\Pi(D)$, необходимо и достаточно, чтобы операторные матрицы $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} h & c \\ 0 & h \end{pmatrix}$ были подобны, где $h = h^* \in \Pi(\mathcal{A})^{cc}$ и $\Pi(\mathcal{A})^{cc}$ – второй коммутант для $\Pi(\mathcal{A})$.

Отметим, что в случае B^*-алгебры $\mathcal{A}$ имеем have $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = Sym(\mathcal{A})$, и подобие и обратимость матриц равносильны сильному подобию и сильной обратимости, соответственно. Следовательно, для B^*-алгебр из Теоремы 3, квазинормальность и сильное подобие можно заменить эрмитово-нормальностью и подобием, соответственно.

ABSTRACT. The paper obtains necessary and sufficient condition for solvability of the equation $ax - xb = c$ in a complex Banach algebra A with unit.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Москва, Наука, 1967.
2. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость Решений Дифференциальных Уравнений в Банаховом Пространстве, Москва, Наука, 1970.
3. W. E. Roth, "The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3, pp. 392 — 396, 1952.
4. M. Rosenblum, "The operator equation $BX - XA = Q$ with selfadjoint A and B", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 20, pp. 115 — 120, 1969.
5. A. Schweinsgberg, "The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B", Pacif. J. Math., vol. 102, no. 2, pp. 447 — 453, 1982.
6. М. И. Караханян, "Об операторном уравнении $HY - YK = C$", Изв. АН Армении. Математика, том 25, № 4, стр. 353 — 360, 1990.
7. C. Putnam, "On the spectra of commutators", Proc. Amer. Math. Soc. (december), pp. 929 — 931, 1954.
8. F. F. Bonsall, T. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, 1973.

9. В. Рудин. Функциональный Анализ. Изд. Мир, Москва, 1975.
10. Е. А. Горин. Обобщение Одной Теоремы Фугледе, Российск. АН, Алгебра и Анализ, том 5, вып. 5, 1993.
11. Е. А. Горин, М. И. Караханян, " Асимптотический вариант теоремы Фугледе–Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, том 22, № 2, стр. 179 — 189, 1977.
12. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв. АН Армении. Математика, том 29, № 1, стр. 50 — 58, 1994.
13. I. Vidav, "Eine metrishe kennzeichnung der selbstatdjungierten operatoren", Math. Z., vol. 66, pp. 121 — 128, 1956.
14. П. Халмош, Гильбертовы Пространства в Задачах, Москва, 1970.
15. D. C. Kleinecke, "On operator's commutators", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 8, pp. 535 — 536, 1957.
16. В. Е. Кацнельсон, "У консервативного оператора норма совпадает со спектральным радиусом", Мат. исслед., том 5, № 3, стр. 186 — 189, 1970.
17. V. Ptak, "Banach algebras with involution, Man. Math., vol. 6, pp. 245 — 290, 1972.
18. S. Shirali, J. W. Ford, "Symmetry in complex Banach algebras, II", Duke Math. J., vol. 37, pp. 275 — 280, 1970.
19. У. Браттели, Д. Робинсон, Операторные Алгебры и Квантовая Статистическая Механика, Мир, Москва, 1982.

29 октября 1999

Ереванский государственный университет

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

В статье рассматриваются так называемые канонические дифференциальные уравнения и дается описание их спектральных функций и ортогональных спектральных функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть $N = \mathbf{C}^n$ – n-мерное унитарное пространство, а J – сигнатурный оператор в $N : J^* = J = J^{-1}$. Его можно представить в виде $J = iP_+ + iP_-$, где $P_\pm = (I_n \mp iJ)/2$ суть взаимнодополнительные ортопроекторы : $P_\pm^* = P_\pm = P_\pm^{-1}$. Начнем с ортогонального разложения $N = P_+N \oplus P_-N$ $(N_\pm = P_\pm N)$, и рассмотрим операторы N в виде двумерных блочных матриц. Например

$$I_n = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} iP_+ & 0 \\ 0 & -iP_- \end{pmatrix}.$$

Каноническими дифференциальными уравнениями порядка n являются уравнения вида

$$J\frac{dx(r)}{dr} - \lambda H(r)\, x(r) = f(r), \quad 0 < r < l, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

где $H(r)$ – $n \times n$ самосопряженная (т.е. $H^*(r) = H(r)$) матрица-функция (м-функция), суммируемая на интервале $(0, l)$: $\int_0^l \|H(r)\| dr < \infty$; $x(r) \in N$ и $f(r) \in N$ – n-мерные вектор-функции (в-функции), а $\lambda \in \mathbf{C}$ – комплексный параметр.

Заметим, что к уравнению вида (1) приводится более общее уравнение

$$W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, \tilde{x}(r)) - V(r)\, \tilde{x}(r) - \lambda\, \tilde{H}(r)\, \tilde{x}(r) = \tilde{f}(r), \tag{2}$$

где $W^*(r)\, J\, W(r) = J$ и $V^*(r) = V(r)$ для всех $r \in (0, l)$. Это достигается с помощью преобразования $\tilde{x}(r) = U_0(r)\, x(r)$, где $U_0(r)$ – J-унитарное решение задачи Коши :

$$W^*(r)\,J\,\frac{d}{dr}(W(r)\,U_0(r)) - V(r)\,U_0(r) = 0; \quad U_0(0) = I_n.$$

В результате приходим к уравнению (1) с $H(r) = U_0^*(r)\tilde{H}(r)\,U_0(r)$ и $f(r) = U_0^*\,\tilde{f}(r)$.

Работы [1] и [2] являются основной литературой канонических уравнений с элементами спектральной теории.

В этой статье дается полное описание всех спектральных функций канонического дифференциального уравнения (1) вместе с описанием ортогональных спектральных функций.

Эта задача связана с задачей описания спектральных функций самосопряженных операторов [3].

В частном случае каноническое уравнение преобразовывается в уравнение струны. Описание спектральных функций одномерного уравнения струны дано в [4]. Аналогичная задача для оператора, порожденного дифференциальным выражением $W^*(r)\,J\,d(W(r)\,x(r))/dr$ рассмотрена в [5], [6].

Мы основываемся на описании матриціанта $U(r,l)$ канонического уравнения (1), т.е. на матричное решение задачи Коши :

$$J\,\frac{dU(r,\lambda)}{dr} - \lambda\,H(r)\,U(r,\lambda) = 0, \quad U(0,\lambda) = I_n.$$

Как показано в [1], $U(r,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\,A_k(r)$, где

$$A_k(r) = -J\int_0^r H(s)\,A_{k-1}(s)\,ds. \quad (k = 1,2,\ldots); \quad A_0(r) = I_k.$$

Матрицант $U(r,\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа относительно $\lambda \in \mathbf{C}$: $\|U(r,\lambda)\| = 0\left(e^{c|\lambda|}\right)$. С другой стороны, при $r \in [0,l]$, $U(r,\lambda)$ удовлетворяет тождеству

$$U^*(r,\mu)\,J\,U(r,\lambda) - J = (\lambda - \bar{\mu})\int_0^r U^*(r,\mu)\,H(r)\,U(r,\lambda)\,dr.$$

Отсюда непосредственно следуют характеристические соотношения

$$U^*(r,\bar{\lambda})\,J\,U(r,\lambda) = J = U(r,\lambda)\,J\,U^*(r,\bar{\lambda}), \quad (\lambda \in \mathbf{C}), \tag{3}$$

$$\frac{U^*(r,\lambda)\,J\,U(r,\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0, \quad \frac{U(r,\lambda)\,J\,U^*(r,\lambda) - J}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0, \quad \left(\Im\lambda = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} \neq 0\right). \tag{4}$$

В дальнейшем предполагается, что эрмитиан $H(r)$ положительного типа, т.е. выполняются условия

$$1)\ (H(r)\,x, x) \geq 0, \quad 2)\ \int_0^l (H(r)\,x, x)\,dr > 0, \quad x \in N.$$

Как показано в [1], отсюда следует, что

$$\int_0^l U^*(r,\lambda)\,H(r,\lambda)\,U(r,\lambda)\,dr > 0, \quad l \in \mathbf{C}.$$

2. Пусть $C_H(0,l;N)$ – пространство n-мерных непрерывных в-функций со скалярным произведением

$$(f,g)_H = \int_0^l (H(r)\,f(r), g(r))_N\,dr.$$

Его можно пополнить до гильбертова пространства $L^2_H(0,l;N)$. Рассмотрим "линейное отношение" $\mathbf{W}$ в пространстве $L^2_H(0,l;N) \oplus L^2_H(0,l;N)$, определенное следующим образом. Пара $\{x,f\}$, $x,f \in L^2_H(0,l;N)$ принадлежит $\mathbf{W}$ тогда и только тогда, когда $x(r)$ абсолютно непрерывна и

$$J\,\frac{dx(r)}{dr} = H(r)\,f(r).$$

Если $\{x,f\}$ и $\{y,g\}$ принадлежат $\mathbf{W}$, то

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}\right)_{L^2_H \oplus L^2_H} = \left(\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(l) \\ x(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(l) \\ y(0) \end{pmatrix}\right)_{N \oplus N}.$$

Следовательно, задача описания симметрических, диссипативных и аккумулятивных сужений линейного отношения $\mathbf{W}$ сводится к описанию J-нейтральных или J-дефинитных подпространств в индефинитном J-пространстве $\widehat{N} = N \oplus N$ с

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -iJ & 0 \\ 0 & iJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ - P_- & 0 \\ 0 & P_- - P_+ \end{pmatrix}.$$

Известно (см. [7]), что такие подпространства задаются с помощью нерастягивающих "угловых" операторов

$$K_+ : \widehat{N}_+ \to \widehat{N}_- \quad \text{или} \quad K_- : \widehat{N}_- \to \widehat{N}_+, \quad (\widehat{N}_\pm = \widehat{P}_\pm \widehat{N}; \quad \widehat{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm \mathbf{J})).$$

Это приводит к следующему утверждению.

Предложение 1. Каждое максимальное диссипативное или аккумулятивное сужение W_K линейного отношения W определяется граничными условиями

$$(P_-x(l)+P_+x(0))+K_+(P_+x(l)+P_-x(0))=0 \quad \text{диссипативное. л.о.,}$$

$$(P_+x(l)+P_-x(0))+K_-(P_-x(l)+P_+x(0))=0 \quad \text{аккумулятивное. л.о.,} \tag{5}$$

где K_+ (K_-) – нерастягивающий оператор, действующий из пространства $\widehat{N}_+$ $(\widehat{N}_-)$ в пространство $\widehat{N}_-$ $(\widehat{N}_+)$. Если K унитарен, то эти условия определяют самосопряженное линейное отношение W_K.

В дальнейшем, будем рассматривать операторы K, принадлежащие единичному матричному кругу Θ или окружности Θ_0 :

$$\Theta=\{K\in[N]/K^*K\le I_n\};\quad \Theta_0=\{K\in[N]/K^*K=I_n\}.$$

Для каждого элемента $f\in L^2_H(0,l;N)$ определим преобразование Фурье

$$F(\lambda,f)=\int_0^l U^*(r,\bar\lambda)\,H(r)\,f(r)\,dr. \tag{6}$$

Для $f\in L^2_H(0,l;N)$ эти образы образуют пространство L целых в-функций, если скалярное произведение определить по $(F(\lambda,f),F(\lambda,g))_L\overset{def}{=\!=}(f,g)_H$. Ниже мы докажем, что L является пространством де Бранжа с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda,\mu)=\int_0^l U^*(r,\bar\lambda)\,H(r)\,U(r,\bar\mu)\,dr=\frac{U^*(l,\bar\lambda)\,J\,U(l,\bar\mu)-J}{\bar\mu-\lambda}. \tag{7}$$

Определение 1. Неубывающая матричная мера $\sigma(\xi)$ $(-\infty<\xi<\infty)$ называется спектральной функцией канонического уравнения (1) или линейного отношения W, если для всех $f\in L^2_H(0,l;N)$ выполняется тождество Парсеваля :

$$(f,g)_H=\int_{-\infty}^{\infty}(F(\xi,f),d\sigma(\xi)\,F(\xi,g)).$$

Пусть $L^2(-\infty,\infty;d\sigma)$ – гильбертово пространство в-функций $F(\xi)$, $-\infty<\xi<\infty$ со скалярным произведением

$$(F,G)_{L^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(F(\xi,f),d\sigma(\xi)\,F(\xi,g)).$$

Используя пространство $L^2(-\infty,\infty;d\sigma)$ можно дать эквивалентное определение.

Определение 2. Неубывающая матричная мера $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ называется спектральной функцией канонического уравнения (1) (или линейного отношения $\mathbf{W}$), если оператор сужения функций $F(l, f)$ на вещественную ось является изометрическим вложением $L^2_H(0, l; N)$ в $L^2_{d\sigma}(-\infty, \infty; N)$. Если это вложение является унитарным оператором из $L^2_H(0, l; N)$ на $L^2_{d\sigma}(-\infty, \infty; N)$, то $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ называется ортогональной спектральной функцией.

3. Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} J\,\dfrac{dx(r,\lambda)}{dr} - \lambda\, H(r)\, x(r,\lambda) = H(r)\, f(r) \\ (P_+ x(l,\lambda) + P_- x(0,\lambda)) + K(P_- x(l,\lambda) + P_+ x(0,\lambda)) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ее решение можно представить в виде

$$x(r,\lambda) = \int_0^l R_K(r,s,\lambda)\, f(s)\, ds, \tag{9}$$

где

$$R_K(r,s,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda) - J)\, U^*(s,\bar{\lambda})\, H(s) & s < r, \\ U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda) + J)\, U^*(s,\bar{\lambda})\, H(s) & s > r. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь м-функция $\omega(\lambda)$ определяется дробно–линейным преобразованием

$$\begin{gathered} \omega(\lambda) = \omega_K(\lambda) = [(P_+ U(l,\lambda) + P_-) + K(P_- U(l,\lambda) + P_+)]^{-1} \times \\ \times [(P_+ U(l,\lambda) - P_-)J + K(P_- U(l,\lambda) - P_+)J] \end{gathered} \tag{11}$$

и является матричной R-функцией. Вышеописанная конструкция сохраняет смысл, если нерастягивающие операторы K заменить нерастягивающими м-функциями $K(\lambda)$, аналитическими в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+ : K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$. Дробно-линейное преобразование $\omega_K(\lambda)$ м-функции $K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$ является матричной R-функцией и допускает интегральное представление с некоторой матричной мерой $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$. Эта мера называется спектральной функцией м-функции $\omega_K(\lambda)$. В §3 доказана следующая теорема.

Теорема 1. Множество всех спектральных функций канонического уравнения (1) совпадает с множеством спектральных функций дробно-линейных преобразований $\omega_K(\lambda)$, отвечающих м-функциям $K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$. Спектральная функция ортогональна тогда и только тогда, когда $K(\lambda) \in \Theta(\mathbf{C}_+)$ является постоянной унитарной матрицей.

В §4 рассмотрим краевые задачи с распадающимися краевыми условиями. В случае полуоси спектральные функции обладают определенной симметрией, что позволяет "вдвое" понизить размерность их спектральных функций. Теорема 2 дает соответствующее описание.

В заключение укажем на связь наших рассмотрений с теорией пространств де Бранжа.

Пусть $U(\lambda)$ - $(n \times n)$ целая м-функция, удовлетворяющая условиям

1) при всех вещественных λ, $U(\lambda)$ есть J-унитарная матрица : $U^*(\lambda)\,J\,U(\lambda) = J$,

2) при всех $l \in \mathbf{C}_+$, $U(l)$ является J-несжимающей матрицей : $U^*(\lambda)(-i\,J)\,U(\lambda) \geq (-iJ)$.

Тогда $U(\lambda)$ порождает пространство де Бранжа $B(U)$ с порождающим ядром $\Phi(\lambda, \mu)$, определенное формулой (7) (см. [9]). По теореме Потапова (см. [10])м-функцию $U(\lambda)$ можно рассматривать как значение матрицанта $U(l, \lambda)$ некоторого канонического уравнения. Тогда $B(U) = L$ - пространство преобразований Фурье, введенное по формуле (7).

Это позволяет описать все матричные меры, решающие задачу о равенстве Парсеваля в пространстве $B(U)$.

§2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Докажем теперь, что решение краевой задачи (8) представляется формулой (9) (см. также (10) и (11)). Легко установить, что решение $x(r, l)$ уравнения

$$J\,\frac{dx(r,\lambda)}{dr} - \lambda\,H(r)\,x(r,\lambda) = H(r)\,f(r) \tag{12}$$

допускает представление

$$x(r,\lambda) = U(r,\lambda)(c - J\int_0^r U^*(s,\bar{\lambda})\,H(s)\,f(s)\,ds) \quad (c \in N). \tag{13}$$

Граничное условие (8) запишем в виде

$$\begin{aligned}&[(P_+U(l,\lambda) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda) + P_+]c = \\ &= (P_+ + KP_-)\,U(l,\lambda)\,J\int_0^l U^*(s,\bar{\lambda})\,H(s)\,f(s)\,ds.\end{aligned}$$

Так как при $K \in \Theta$ и $\lambda \in \mathbf{C}_+$ оператор слева обратим, то

$$c = \Phi(l,\lambda)\,(P_+ + KP_-)\,U(l,\lambda)\,J\int_0^l U^*(s,\bar{\lambda})\,H(s)\,f(s)\,ds,$$

где $\Phi(l,\lambda) = [(P_+U(l,\lambda) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda) + P_+)]^{-1}$.

Следовательно, решение $x(r,\lambda)$ краевой задачи (8) можно представить в виде

$$x(r,\lambda) = U(r,\lambda)\{\Phi(l,\lambda)(P_+ + KP_-)\,U(l,\lambda)J - J\}\int_0^r U^*(s,\bar\lambda)\,H(s)\,f(s)\,ds +$$

$$+\,U(r,\lambda)\{\Phi(l,\lambda)(P_+ + KP_-)\,U(l,\lambda)\,J\}\int_r^l U^*(s,\bar\lambda)\,H(s)\,f(s)\,ds.$$

Легко проверить, что выражения в скобках можно представить в виде $(\omega(\lambda)-J)/2$ и $(\omega(\lambda)+J)/2$, соответственно, где $\omega(\lambda)$ – дробно-линейное преобразование (11) оператора $K\in\Theta$.

Обозначим через $\Omega(\lambda)$ ($\Omega_0(\lambda)$) образ единичного матричного круга Θ (окружности Θ_0) при дробно-линейном преобразовании (11), $\lambda\in\mathbf{C}_+$.

Через $\Omega(\mathbf{C}_+)$ обозначим образ множества нерастягивающих аналитических в $\mathbf{C}_+$ м-функций $K(\lambda)\in\Theta(\mathbf{C}_+)$ при дробно-линейном преобразовании (11). Через $\Omega_0(\mathbf{C}_+)$ обозначим образ унитарных м-функций K.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование (11). Исходя из матрицанта $U(r,\lambda)$, введем "основную" $(2n\times 2n)$-матрицу $A(\lambda)$ по формуле

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} P_+U(l,\lambda)+P_- & (P_+U(l,\lambda)-P_-)\,J \\ P_-U(l,\lambda)+P_+ & (P_-U(l,\lambda)-P_+)\,J\end{pmatrix}.$$

Положим $V(\mu,\lambda) = (U^*(l,\mu)\,J\,U(l,\lambda) - J)/2$. Непосредственным вычислением получим

$$V(\mu,\lambda) = V(\mu,\nu) + V(\bar\nu,\lambda) - 2V(\mu,\nu)\,J\,V(\bar\nu,\lambda). \tag{14}$$

Следовательно

$$V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda) + V^{-1}(\lambda,\lambda) = 2\,J. \tag{15}$$

Из тождества

$$A^*(\mu)\begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n\end{pmatrix}A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(\mu,\lambda) & V(\mu,\lambda)J \\ -JV(\mu,\lambda) & -JV(\mu,\lambda)J\end{pmatrix} \tag{16}$$

следует

$$A^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0\end{pmatrix}A^*(\bar\lambda)\begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iA_{12}^*(\bar\lambda) & -iA_{22}^*(\bar\lambda) \\ -iA_{11}^*(\bar\lambda) & iA_{21}^*(\bar\lambda)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из (17), (3) и (4) вытекает

$$A_{11}^*(\lambda)\,A_{11}(\lambda) - A_{21}^*(\lambda)\,A_{21}(\lambda) = i\,V(\lambda,\lambda)\begin{cases} >0 & \lambda\in\mathbf{C}_+, \\ =0 & \lambda\in R, \\ <0 & \lambda\in\mathbf{C}_-.\end{cases}$$

Предложение 2. Пусть при $\lambda \in \mathbf{C}_+$ существуют операторы $A_{21}(\lambda)\,A_{11}^{-1}(\lambda)$ и $A_{22}(\lambda)\,A_{12}^{-1}(\lambda)$ и являются строго сжимающими. Тогда для всех $K \in \Theta$ операторы $(A_{11}(\lambda)+K\,A_{21}(\lambda))$ и $A_{12}(\lambda)+K\,A_{22}(\lambda))$ обратимы. Кроме того, операторы $(A_{11}(\lambda)+K\,A_{21}(\lambda))^{-1}$ и $A_{12}(\lambda)+K\,A_{22}(\lambda))^{-1}$ равномерно ограничены относительно $K \in \Theta$. При $\lambda \in \mathbf{C}_-$ аналогичные утверждения справедливы относительно операторов $A_{21}(\lambda)\,A_{11}^{-1}(\lambda)$ и $A_{22}(\lambda)\,A_{12}^{-1}(\lambda)$.

Таким образом, при всех $\lambda \in \mathbf{C}_+$ и для всех $K \in \Theta$ существует дробно-линейное преобразование (11) :

$$\omega(\lambda) = \Delta(K) = (A_{11}(\lambda) + K\,A_{21}(\lambda))^{-1}(A_{12}(\lambda) + K\,A_{22}(\lambda)).$$

Из (17) следует, что оператор K однозначно восстанавливается :

$$K = -(A_{12}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\,A_{11}^*(\bar\lambda))^{-1}(A_{22}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\,A_{21}^*(\bar\lambda)). \tag{18}$$

Предложение 3. При каждом $\lambda \in \mathbf{C}_+$ дробно-линейное преобразование (11) взаимно-однозначно отображает единичный матричный круг Θ и окружность Θ_0 на образы $\Omega(\lambda)$ и $\Omega_0(\lambda)$, соответственно. Множество $\Omega(\lambda) = \{\omega(\lambda) = \Delta(K)/K \in \Theta\}$ является матричным кругом (окружностью $\Omega(\lambda) = \{\omega(\lambda) = \Delta(K)/K \in \Theta_0\}$), лежащим в верхней матричной полуплоскости $\Im\omega(\lambda) = -i(\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) \geq 0$, и определяется соотношениями

$$2\Im\omega(\lambda) \geq (\omega^*(\lambda) + J)\{-i\,V(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J),$$

$$(2\Im\omega(\lambda) = (\omega^*(\lambda) + J)\{-i\,V(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J)). \tag{19}$$

Круг $\Omega(\lambda)$ (окружность $\Omega_0(\lambda)$) допускает параметрическое представление

$$\omega(\lambda) = C + (-i\,V(\lambda,\lambda))^{-1/2}\,Z(i\,V(\bar\lambda,\bar\lambda))^{-1/2},$$

где $Z \in \Theta$ ($Z \in \Theta_0$) и $C = J - V^{-1}(\lambda,\lambda) = V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda) - J$.

Доказательство : В силу (11) имеем

$$A(\lambda)\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K \\ I_n \end{pmatrix}(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix}^* A^*(\lambda)\begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} A(\lambda)\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix}^* \left\{\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(\mu,\lambda) & V(\mu,\lambda)J \\ -JV(\mu,\lambda) & -JV(\mu,\lambda)J \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} = \\
&= (\omega^*(\lambda) - \omega(\lambda)) + (\omega^*(\lambda) + J)\,V(\lambda,\lambda)(\omega(\lambda) - J).
\end{aligned} \tag{20}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix}^* A^*(\lambda) \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} A(\lambda) \begin{pmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{pmatrix} =$$
$$= (A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda))^* i(K^*K - I_n)(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)).$$

Отсюда следует соотношение (19), причем для $K \in \Theta_0$ имеет место равенство. Обратно, пусть $\omega(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (19). Тогда в силу (20) для всех $x \in N$ имеем

$$\left(J \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)x \end{pmatrix} \right) \leq 0.$$

Обозначим через $-K$ нерастягивающий оператор J-неположительного подпространства

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)x \end{pmatrix} / x \in N \right\}$$

пространства $\widehat{N}$. Тогда $-K(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)) = A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)$, т.е. $\omega(\lambda)$ определяется преобразованием (11). Заметим, что равенство в (20) дает J-нейтральность рассматриваемого подпространства. Тогда его угловой оператор унитарен, и $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$.

Из Предложения 3 следует, что м-функции $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ являются матричными R-функциями. Следовательно, они допускают представление (см. [11])

$$\omega(\lambda) = A + \lambda B + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi - \lambda} - \frac{\xi}{1+\xi^2}\right) d\sigma(\xi),$$

где A эрмитова, B – положительная матрица, а $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ – неубывающая м-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{1+\xi^2} < \infty.$$

Матричная мера $\sigma(\xi)$ называется спектральной функцией R-функции $\omega(\lambda)$. Множество спектральных функций $\sigma(\xi)$ R-функций $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ обозначим через T. Пусть также $T_0 = \{\sigma(\xi) \in T / \omega(\lambda) \in \Omega_0\}$.

§3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лемма 1. **Пусть $\sigma(\xi)$ – спектральная функция R-функции $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и оператор R_λ определяется соотношениями (12) и (13). Тогда для**

каждого фиксированного $f \in L^2(0,l;N)$ **функция** $(R_\lambda f, f)_H$ **является** R_0–**функцией (см. [11]) и**

$$(R_\lambda f, f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi,f), d\sigma(\xi)\, F(\xi,f))}{\xi - \lambda}. \tag{21}$$

Доказательство : Для в-функции $x(r,l) = (R_\lambda f)(r)$, которая является решением краевой задачи (8), имеем

$$(f, R_\lambda f)_H = (f,x)_H = \int_0^l (H(r)f(r), x(r,\lambda))dr = \int_0^l (Jx'(r,\lambda), x(r,\lambda))dr - \lambda(x,x)_H.$$

Следовательно

$$\Im(R_\lambda f, f)_H = \Im\lambda(x,x)_H + \frac{i}{2}[(Jx(l,\lambda), x(l,\lambda)) - (Jx(0,\lambda), x(0,\lambda))].$$

В силу краевого условия получим

$$i/2[(Jx(l,\lambda), x(l,\lambda)) - (Jx(0,\lambda), x(0,\lambda))] \geq 0.$$

Следовательно, $\Im(R_\lambda f, f)_H \geq \Im\lambda(x,x)_H$. Это означает (см. [11]), что $(R_\lambda f, f)_H$ является R_0-функцией и

$$(R_\lambda f, f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_f(\xi)}{\xi - \lambda}, \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_f(\xi) = \lim_{\eta \nearrow 0} \eta \mathrm{Im}(R_{i\eta} f, f)_H \leq (f,f)_H.$$

Отсюда, в силу формулы обращения Стилтьеса, для каждых двух точек непрерывности a и b функции $\tau_f(\xi)$ имеем

$$\tau_f(b) - \tau_f(a) = \pi^{-1} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \Im(R_{\xi+i\epsilon} f, f)_H\, d\xi. \tag{22}$$

С другой стороны, из представления (10) следует

$$(R_\lambda f, f)_H = (\frac{1}{2}\omega(\lambda)\, F(\lambda,f), F(\bar\lambda,f))_N + (G_\lambda f, f)_H, \tag{23}$$

где G_λ - оператор в $L^2(0,l;N)$, действующий по формуле

$$(G_\lambda f)(r) = \int_0^l G(r,s,\lambda)\, f(s)\, ds,$$

где

$$G(r,s,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} -U(r,\lambda)JU^*(s,\bar\lambda)H(s), & s < r \\ U(r,\lambda)JU^*(s,\bar\lambda)H(s), & s > r. \end{cases}$$

Легко установить, что $(G_\lambda f, f)_H)$ является вещественной целой функцией. Используя обобщенную формулу Стилтьеса (см. [10]), из (23) получим

$$\pi^{-1} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \Im(R_{\xi+i\epsilon} f, f)\, d\xi = \int_a^b (F(\xi,f), d\sigma(\xi)F(\xi,f)), \tag{24}$$

где a и b – произвольные точки непрерывности функции $\sigma(\xi)$.

Сопоставляя равенства (22) и (24) и учитывая, что общие точки непрерывности функций $\tau_f(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ плотны на вещественной оси, получим

$$\tau_f(b) - \tau_f(a) = \int_a^b (F(\xi,f), d\sigma(\xi)F(\xi,f)), \quad a,b \in (-\infty,\infty),$$

которое равносильно равенству (21). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Из равенства (23) следует, что при таких $\lambda \in \mathbf{C}_+$ и $f \in L^2(0,l;N)$ множество $(R_\lambda f, f)$ описывает круг $\Omega(\lambda, f)$ (окружность $\Omega_0(\lambda, f)$) в верхней полуплоскости, когда $\omega(\lambda)$ пробегает множество $\Omega(\mathbf{C}_+)$ $(\Omega_0(\mathbf{C}_+))$. Параметрическое представление круга $\Omega(\mathbf{C}_+)$ $(\Omega_0(\mathbf{C}_+))$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
(R_\lambda f, f)_H &= \frac{1}{2}((-iV(\lambda,\lambda)^{-1/2}Z(iV(\bar\lambda,\bar\lambda)^{-1/2}F(\lambda,f), F(\bar\lambda,f))_N +\\
&+ \frac{1}{2}(V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda)F(\lambda,f), F(\bar\lambda,f))_N -\\
&- \int_0^l (U(r,\lambda)J\int_0^r U^*(s,\bar\lambda,)H(s)f(s)ds, H(r)f(r))dr.
\end{aligned}
$$

2. Рассмотрим гильбертово пространство L целых в-функций $F(\lambda, f)$ $(f \in L^2(0,l;N))$. Так как L является пространством с порождающим ядром $\Phi(\lambda,\mu)$, определяемым формулой (7), то для всех $F \in L$ и $x \in N$ имеем

$$
\begin{aligned}
(F(\lambda), \Phi(\lambda,\mu)x)_L &= \int_0^l (H(r)f(r), U(r,\bar\mu)x) =\\
&= \left(\int_0^l U^*(r,\bar\mu)H(r)f(r)dr, x\right)_N = (F(\mu), x)_N.
\end{aligned} \tag{25}
$$

В силу тождества (14) (см. [9]) L является пространством де Бранжа. Из (25) следует, что линейный оператор из L в N, отображающий $F(\lambda) \to F(\mu)$, непрерывен. Тогда множество $\{\Phi(\lambda,\mu_n)x\}$ при $x \in N$ и $\mu_n \not\to \infty$ $(\mu_n \in \mathbf{C})$ плотно в L. Таким образом, множество $\{U(r,\mu_n)x\}$ плотно в $L^2(0,l;N)$. Из (25) следует также, что многообразие $M_\mu = \{F \in L / F(\mu) = 0\}$ является подпространством и

$$M_\mu^\perp = N\mu = \{\Phi(\lambda,\mu)x / x \in N\}.$$

Следовательно, $L = M_\mu \oplus N_\mu$, и ортопроектор P_{M_μ} на подпространство M_μ имеет вид

$$P_{M_\mu} F(\lambda) = F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)c, \quad \text{где} \quad c = \Phi^{-1}(\mu,\mu)F(\mu) (\in N).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. При произвольном $F(\lambda) \in L$ и $\mu \in \mathbf{C}_+$ функция $G(\lambda) = (\lambda-\mu)^{-1}F(l) - \Phi(\lambda,\mu)c$ принадлежит L. Точнее, $G(\lambda) = F(\lambda, g)$, где $g(r)$ определяется равенством

$$
\begin{aligned}
g(r) &= -U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)(f(s) - U(s,\bar\mu)c)ds =\\
&= -U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)f(s)ds - \frac{U(r,\bar\mu) - U(r,\mu)}{\bar\mu - \mu}c.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Функция $(\lambda-\mu)^{-1}F(\lambda)$ принадлежит L тогда и только тогда, когда $F \in M_\mu$.

Доказательство : Непосредственно проверяется, что в-функция $g(r)$, определенная равенством (26), является решением уравнения (12) при $\lambda = \mu$ с правой частью $H(r)\,(f(r) - U(r,\mu)\,c)$. Кроме того, имеем $g(l) = g(0) = 0$. Это равносильно равенству $G(\lambda) = (F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)\,c)/(\lambda - \mu)$.

Обратимся теперь к рассмотрению множества Σ всех спектральных функций канонических дифференциальных уравнений (1) и его подмножества Σ_0 ортогональных спектральных функций. Отметим, что если $\sigma(\xi) \in \Sigma$, то обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} U(r,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\,F(\lambda,f).$$

Действительно, имеем

$$(f(r), U(r,\bar\mu)x)_H = (F(\lambda,f), \Phi(\lambda,\mu)x)_L = \int_{-\infty}^{\infty} (d\sigma(\lambda)F(\lambda,f), \Phi(\lambda,\mu)x) =$$

$$= \int_0^l (\int_{-\infty}^{\infty} (U(r,\lambda)d\sigma(\lambda)F(\lambda,f), H(r)U(r,\bar\mu)x)dr =$$

$$= (\int_{-\infty}^{\infty} (U(r,\lambda)d\sigma(\lambda)F(\lambda,f), U(r,\bar\mu)x)_H.$$

Зафиксируем некоторую спектральную функцию $\sigma(\xi)$ и $\mu \in \mathbf{C}_+$, и в пространстве $L^2(R^1; d\sigma)$ рассмотрим оператор умножения на $(\xi - \bar\mu)/(\xi - \mu)$. Этот оператор является унитарным и отображает M_μ на $M_{\bar\mu}$. Функция $(\xi - \bar\mu)/(\xi - \mu)\,\Phi(\xi,\mu)\,x \in L^2(R^1; d\sigma)$ ортогональна подпространству $M_{\bar\mu}$, так как если $F \in M_{\bar\mu}$, то $(l - \bar\mu)/(l - \mu)\,F(l) \in M_\mu$. Следовательно

$$(\frac{\xi - \bar\mu}{\xi - \mu}\Phi(\xi,\mu)x, F(\xi))_{L^2} = (\Phi(\xi,\mu)x, \frac{\xi - \mu}{\xi - \bar\mu}F(\xi))_{L^2} = (\Phi(\lambda,\mu)x, \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \bar\mu}F(\lambda))_L = 0.$$

Обозначим через P_L ортопроектор из $L^2(R^1; d\sigma)$ на L. Тогда для каждого $x \in N$ существует элемент $y \in N$ такой, что

$$P_L \frac{\lambda - \bar\mu}{\lambda - \mu}\Phi(\lambda,\mu)\,x = \Phi(\lambda,\bar\mu)\,y \quad (x, y \in N).$$

Сопоставим каждому $\sigma \in \Sigma$ оператор $C_\mu(\sigma)$, действующий в N по формуле $C_\mu(\sigma)\,x = y$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\Phi(\lambda,\bar\mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)x\| \le \|\Phi(\lambda,\mu)x\|, \tag{27}$$

в смысле норм пространств $L^2(R^1; d\sigma)$ и L. Для всех $x \in N$ в неравенстве (27) имеет место равенство тогда и только тогда, когда $\sigma(\lambda)$ является ортогональной спектральной функцией. Следовательно

$$\int_0^l (H(r)\,U(r,\mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x, U(r,\mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x)\,dr \le \int_0^l (H(r)\,U(r,\bar\mu)\,x, U(r,\bar\mu)\,x)\,dr.$$

Таким образом, в силу (7) и (25) получим

$$\mathbf{C}^*_\mu(\sigma)\,\Phi(\bar\mu,\bar\mu)\mathbf{C}_\mu(\sigma) \le \Phi(\mu,\mu). \tag{28}$$

Последнее неравенство определяет круг $\Sigma(\mu)$. Окружность $\Sigma_0(\mu)$ получается в случае, когда в (28) имеем равенство. Параметрическое представление круга $\Sigma(\mu)$ (окружности $\Sigma_0(\mu)$) задается формулой

$$\Sigma(\mu) = \mathbf{C}_\mu(\sigma) = \{\Phi^{-1/2}(\bar\mu,\bar\mu)\,Z\,\Phi^{1/2}(\mu,\mu)\ /\ Z \in \Theta(Z \in \Theta_0)\}.$$

3. Обозначим через $\Sigma(F,\mu)$ $(\Sigma_0(F,\mu))$ множество функций

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi), d\sigma(\xi)\,F(\xi))}{\xi-\mu},$$

получаемое при фиксированных $F \in \mathbf{L}$ и $\mu \in \mathbf{C}_+$, а $\sigma(\xi)$ пробегает множество всех спектральных функций (ортогональных спектральных функций) канонических дифференциальных уравнений.

Лемма 2. При произвольном $F \in \mathbf{L}$ и $\mu \in \mathbf{C}_+$ множество $\Sigma(F,\mu)$ $(\Sigma_0(F,\mu))$ совпадает с множеством $\Omega(\mu,f)$ $(\Omega_0(\mu,f))$.

Доказательство : Используя Предложение 4, представим $I_{F,\mu}(\sigma)$ в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F(\xi,f)-\Phi(\xi,\mu)c_0}{\xi-\mu}, d\sigma(\xi)F(\xi), f\right) = (F(\lambda,g), F(\lambda,f))_L = (g,f)_H =$$
$$= -\int_0^l (U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)f(s)ds, H(r)f(r))dr -$$
$$-\frac{1}{\bar\mu-\mu}\int_0^l (U(r,\bar\mu)c_0, H(r)f(r))dr + \frac{1}{\bar\mu-\mu}\int_0^l (U(r,\mu)c_0, H(r)f(r)) =$$
$$= -\int_0^l (U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar\mu)H(s)f(s)ds, H(r)f(r))dr +$$
$$+\frac{1}{\mu-\bar\mu}(c_0, F(\mu,f)) + \frac{1}{\bar\mu-\mu}(c_0, F(\bar\mu,f)).$$

Далее

$$\frac{1}{\mu-\bar\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi-\bar\mu}{\xi-\mu}(\Phi(\xi,\mu)c_0, d\sigma(\xi)F(\xi,f)) =$$
$$= \frac{(\Phi(\lambda,\bar\mu)C_\mu(\sigma)c_0, F(\lambda,f))_L}{\mu-\bar\mu} = \frac{(C_\mu(\sigma)c_0, F(\bar\mu,f))_N}{\mu-\bar\mu},$$

и наконец

$$\frac{1}{\mu-\bar\mu}\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi(\xi,\mu)c_0, d\sigma(\xi)F(\xi,f)) = \frac{1}{\mu-\bar\mu}(c_0, F(\mu,f))_N.$$

Таким образом

$$I_{F,\mu}(\sigma) = \frac{1}{\mu-\bar{\mu}}(C_\mu(\sigma)c_0, F(\bar{\mu}, f))_N + \frac{1}{\bar{\mu}-\mu}(c_0, F(\bar{\mu}, f)) -$$
$$- \int_0^l (U(r,\mu)J\int_0^r U^*(s,\bar{\mu})H(s)f(s)ds, H(r)f(r))dr.$$

Параметрическое представление $C_\mu(\sigma)$, равенства

$$c_0 = \Phi^{-1}(\mu,\mu)F(\mu), \quad \Phi((\mu,\mu) = \frac{2V(\bar{\mu},\bar{\mu})}{\bar{\mu}-\mu},$$

и параметрическое представление $(R_\lambda f, f)_H$ из Замечания 1, взятые вместе, завершают доказательство.

Рассмотрим теперь м-функции $\omega \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и $\sigma \in \Sigma$, определенные параметрами $iZ \in \Theta$ и $Z \in \Theta$, соответственно. По Лемме 2 выражения $I_{F,\lambda}(\sigma)$ и $(R_\lambda f, f)_H$ совпадают. Следовательно, их спектральные функции также совпадают. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Множества спектральных функций R-функций $\omega(\lambda) \in \Omega(\mathbf{C}_+)$ и канонических дифференциальных уравнений (1) совпадают. Спектральная функция ортогональна тогда и только тогда, когда $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\mathbf{C}_+)$.

4. Из Теоремы 1 следует, что ортогональные спектральные функции порождаются краевой задачей

$$\begin{cases} J\dfrac{du(r,\lambda)}{Dr} & -\lambda H(r)u(r,\lambda) = 0 \\ (P_+u(l,\lambda) + P_-u(0,\lambda)) & +K(P_-u(l,\lambda) + P_+u(0,\lambda)) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

где K – унитарный оператор $(K^*K = I_n)$.

Число $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, при котором существует нетривиальное решение $u(r,\lambda_0)$ краевой задачи (28), называется собственным значением этой задачи, а $u(r,\lambda_0)$ – собственной функцией. Множество собственных значений задачи (29) обозначим через $Sp\mathbf{W}_K$. Собственные значения задачи (29) вещественны и собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в $L^2_H(0,l;N)$. Ясно также, что $\lambda_k \in \mathbb{R}$ будет собственным значением задачи (29) тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение $x_0 \in N$ уравнения

$$[(P_+U(l,\lambda_k) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_k) + P_+)]x_0 = 0.$$

Таким образом, $Sp\mathbf{W}_K$ определяется условием

$$\det[(P_+U(l,\lambda_k) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda_k) + P_+)] = 0.$$

Собственные функции $u(r, \lambda_0)$ определяются равенством $u(r, \lambda_k) = U(l, \lambda_k) x_0$, где

$$x_0 \in \Pi_k = \mathrm{Ker}[(P_+ U(l, \lambda_k) + P_-) + K(P_- U(l, \lambda_k) + P_+)],$$

кратность значения $\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K$ равна $\pi_k = \dim \Pi_k$.

Базис $\{x_p\}_{p=1}^{\pi_k}$ подпространства Π_k можно выбрать так, чтобы собственные функции $u_p(r, \lambda_k) = U(r, \lambda_k) x_{kp}$ $(p = 1, 2, ..., \pi_k)$ были ортонормированы (см. [2]). М-функция $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$, определенная преобразованием (11) при унитарном K, удовлетворяет условию $\omega^*(\lambda) = \omega(\bar{\lambda})$. Следовательно, мероморфная м-функция $\omega(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda_n \in Sp\mathbf{W}_K$ и может быть представлена в виде

$$\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-1} P_k + \text{члены, регулярные в окрестности точки } \lambda_k.$$

Матрица P_k эрмитова, поэтому λ можно устремить к λ_k по вещественной оси. Далее, $[(P_+ U(l, \lambda_n) + P_-) + K(P_- U(l, \lambda_n) + P_+)] P_n = 0$, и, следовательно, $\mathrm{rank} P_k \leq \pi_k$. Можно доказать (см. [2]), что

$$P_k = \sum_{p=1}^{\pi_k} x_{kp} x_{kp}^*,$$

где базис $\{x_{kp}\}_{p=1}^{\pi_k}$ подпространства Π_n удовлетворяет условию

$$(U(r, \lambda_k) x_{kp}, U(r, \lambda_k) x_{kq})_H = \delta_{pq}.$$

Предложение 5. Ортогональные спектральные функции $\sigma(\xi)$ уравнения (1) имеют вид

$$\sigma(\xi) = \sum_{\lambda_k (\in Sp\mathbf{W}_K) < \xi} P_k.$$

Система в-функций $\{u_p(r, \lambda_k) = U(r, \lambda_k) x_{kp};\ p = 1, 2, ..., pi_k,\ \lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K\}$ образует ортонормированный базис в $L_H^2(0, l; N)$.

Доказательство : Мероморфная в-функция $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\mathbf{C}_+)$ вещественна : $\omega^*(\lambda) = \omega(\bar{\lambda})$. Тогда она имеет аналитическое продолжение вдоль интервалов $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ $(\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K)$. Следовательно, м-функция $\sigma(\xi)$ является шаговой функцией, которая постоянна на интервалах $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ $(\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K)$ и со скачком $\sigma(l_k + 0) - \sigma(l_k - 0) = P_k$ в точках $\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K)$. Тождество Парсеваля вершает доказательство :

$$(f,f)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi,f), d\sigma(\xi)F(\xi,f)) = \sum_{\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K} (F(\lambda_k,f), P_k F(\lambda_k,f)) =$$

$$= \sum_{\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K} \left(\sum_{p=1}^{n_k} \int_0^l (U^*(r,\lambda_k)H(r)f(r)dr, x_{kp}x_{kp}^* \int_0^l (U^*(r,\lambda_k)H(r)f(r)dr \right) =$$

$$= \sum_{\lambda_k \in Sp\mathbf{W}_K} \sum_{p=1}^{n_k} |(f, u_p(r,\lambda_k))|^2.$$

§4. ОПИСАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Предположим, что $\dim N_+ \geq \dim M_-$. Граничное условие является распадающимся, если в (5) оператор K удовлетворяет $P_+ K P_+ = P_- K P_- = 0$, т.е. в разложении $N = N_+ \oplus N_-$ имеет место представление

$$K = \begin{bmatrix} 0 & K_l \\ K_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда (5) принимает следующий вид :

$$P_+ x(l) + K_l P_- x(l) = 0; \quad P_- x(0) + K_0 P_+ x(0) = 0,$$

где $K_l : N_- \to N_+$ и $K_0 : N_+ \to N_-$ – произвольные нерастягивающие операторы. Отсюда следует, что распадающиеся граничные условия определяют самосопряженные расширения $\mathbf{W}_K$ в том и только том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$, а оба оператора K_0 и K_l унитарны. В этом случае

$$\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda) & U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda) \\ K_0 & P_- \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} i(U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda)) & -i(U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda)) \\ -iK_0 & iP_- \end{pmatrix}.$$

Положим

$$T(\lambda) = [U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda)]^{-1}[U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda)]. \tag{30}$$

Из свойств матрицы $U(l,\lambda)$ следует, что для произвольного нерастягивающего оператора $K_l : N_- \to N_+$, дробно-линейное преобразование (30) хорошо определено, и $T(\lambda)$ является нерастягивающим оператором из N_- в N_+. Теперь функцию $\omega(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega(\lambda) = i \begin{pmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_+ & -T(\lambda) \\ -K_0 & P_- \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & -T(\lambda)(P_- - K_0T(\lambda))^{-1} \\ -K_0(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & (P_- - K_0T(\lambda))^{-1} \end{pmatrix},$$

то

$$\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} \omega_+(\lambda) & -T(\lambda)(iP_- + \omega_-(\lambda)) \\ -K_0(iP_+ + \omega_+(\lambda)) & \omega_-(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_+(\lambda) &= i(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}(P_+ + T(\lambda)K_0), \\ \omega_-(\lambda) &= i(P_- - K_0T(\lambda))^{-1}(P_- + K_0T(\lambda)). \end{aligned} \tag{31}$$

Ясно, что $\omega_\pm(\lambda)$ являются матричными R-функциями, действующими в $N_\pm$.

Зафиксируем некоторое граничное условие в нуле, задав изопериметрический оператор $K_0 : N_+ \to N_-$ ($K_0K_0^* = P_-$), и рассмотрим задачу описания спектральных функций линейного отношения $\mathbf{W}_{K_0} \subset \mathbf{W}$, действующего на многообразии

$$\mathcal{D}(\mathbf{W}_{K_0}) = \{x \in D(\mathbf{W})/P_-x(0) + K_0P_+x(0) = 0;\ x(l) = 0\}.$$

Так как $\omega_-(\lambda) = K_0\omega_+(\lambda)K_0^*$, то имеем $(P_- \pm K_0T(\lambda)) = K_0(P_+ \pm T(\lambda)K_0)K_0^*$. С другой стороны

$$-2T(\lambda)(P_- - K_0T(\lambda))^{-1} = -2(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}T(\lambda)K_0K_0^* = (iP_+ - \omega_+(\lambda))K_0^*.$$

Следовательно

$$\omega(\lambda) = \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix} \omega_+(\lambda) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Для нахождения соответственного резольвентного ядра рассмотрим следующую $(2n \times n)$ матрицу-функцию :

$$\begin{aligned} \Phi(r,\lambda) &= \begin{pmatrix} \phi_1(r,\lambda) \\ \phi_2(r,\lambda) \end{pmatrix} = U(r,\lambda) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}, \\ \Psi(r,\lambda) &= \begin{pmatrix} \psi_1(r,\lambda) \\ \psi_2(r,\lambda) \end{pmatrix} = U(r,\lambda) \begin{pmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

В силу (32) имеем

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) - J &= \left(\begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix} \omega_+(\lambda) + \begin{pmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}^*, \\ \omega(\lambda) + J &= \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix} \left(\omega_+(\lambda) \begin{pmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{pmatrix}^* + \begin{pmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{pmatrix}^* \right). \end{aligned}$$

Из (33) получим

$$R_K(r,s,\lambda) = \begin{cases} (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))\Phi^*(s,\bar\lambda))\,H(s) & s < r, \\ \Phi(r,\lambda)(\Psi^*(s,\bar\lambda) + \omega_+(\lambda)\Phi^*(s,\bar\lambda))\,H(s) & s > r. \end{cases} \tag{34}$$

Множество $\Omega(\lambda)$ матриц $\omega(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbf{C}_+)$ описывается неравенством

$$\frac{2Im\omega(\lambda)}{Im\lambda} \geq (\omega^*(\lambda) + J)\int_0^l U^*(r,\lambda)H(r)U(r,\lambda)dr(\omega(\lambda) - J).$$

Следовательно, $\omega_+(\lambda)$ заполняет круг $\Omega_{K_0}(\lambda)$, задаваемый неравенством

$$\frac{2Im\omega_+(\lambda)}{Im\lambda} \geq \int_0^l (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))^* H(r)(\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))dr.$$

Отметим, что если $\dim N_+ = \dim N_-$ и K_0 является унитарным оператором, то окружность $\Omega_0(\lambda, K_0)$ задается соответствующим равенством, когда K_l пробегает множество унитарных операторов. В силу (32) соотношение (23) в этом случае представляется в виде

$$\begin{aligned}(R_\lambda f, f) = 2^{-1}(\omega_+(\lambda)\, F_1(\lambda, f), F_1(\bar\lambda, f))_H +\\ + \left(\begin{pmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{pmatrix} F(\lambda, f), F(\bar\lambda, f)\right) + (G_\lambda f, f)_H,\end{aligned}$$

где

$$F_1(\lambda, f) = [P_+ - K_0^*]\int_0^l U^*(r,\bar\lambda)\, H(r)\, f(r)\, dr \quad f \in L^2(0, l; N).$$

Отсюда следует, что

$$(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty}(F_1(\xi, f), d\sigma_+(\xi)F_1(\xi, f)),$$

где $\sigma_+(\xi)$ – спектральная функция матричной R-функции $\omega_+(\lambda)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. **Множество спектральных функций линейного отношения $\mathbf{W}_{K_0}$ совпадает с множеством всех спектральных функций $\sigma_+(\xi)$ матричных R–функций $\omega_+(\lambda)$, задаваемых дробно–линейным преобразованием (30), когда $K_l(\lambda)$ пробегает множество всех нерастягивающих функций, аналитических в верхней полуплоскости. Ортогональные спектральные функции существуют в том и только том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$, а матрица K_0 унитарна. В этом случае они определяются постоянными унитарными матрицами K_l $(K_l(\lambda) \equiv K_l)$.**

ABSTRACT. The paper considers the so–called canonical differential equations and gives a description of their spectral functions as well as of orthogonal spectral functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Теория Вольтерровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и ее Применения, Москва, Наука, 1967.
2. Ф. В. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Москва, Мир, 1968.
3. М. Г. Крейн, "Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве", Труды междунар. конгр. мат., Мир, Москва, 1968.
4. И. С. Кац, М. Г. Крейн, О спектральных функциях струны, Дополнение 2 в [2].
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 2, стр. 54 — 74, 1999.
6. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов с распадающимися граничными условиями", Изв. АН Армении. Математика, том 34. № 3, стр. 64 — 74, 1999.
7. М. Г. Крейн, "Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах", Вторая летняя матем. школа (Кацевели, июнь-июль, 1964), Инст. Матем. АН УССР, Киев, стр. 15 — 92, 1965.
8. М. Г. Крейн, Ю. Шмулян, "О дробно-линейном преобразовании с операторными коэффициентами", Мат. Иследования, том 7, 1967.
9. D. Aplay и H. Dym, "Hilbert space of analytic functions, inverse scattering and operators models 1", In : Integral Equation and Operator Theory, vol. 7, 1985.
10. В. П. Потапов, "Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций", Труды моск. мат. общества, том 4. 1955.
11. И. С. Кац, М. Г. Крейн, "R-функции – аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя", Дополнение 1 в [2].

12 октября 1999 Ереванский государственный университет

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

М. П. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

Получен критерий почти всюду сходимости рядов по общей системе Франклина, обобщающий результат Г. Г. Геворкяна для классической системы Франклина (Analysis Math., том 16, стр. 87 — 114, 1990).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Определение. Последовательность $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ конечных подмножеств $\mathcal{P}_j = \{t_{j,i} : 0 \leq i \leq 2^j\}$ отрезка $[0,1]$ называется квазидвоичным разбиением этого отрезка, если $\mathcal{P}_0 = \{0;1\}$; $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$ для всех $j \geq 0$; $0 = t_{j,0} < t_{j,1} < ... < t_{j,2^j} = 1$ и $t_{j+1,2k} = t_{j,k}$, когда $j \geq 0$, $k = 0, ..., 2^j$, т.е. $\mathcal{P}_{j+1}$ получается из $\mathcal{P}_j$ прибавлением по одной точке в каждом интервале $(t_{j,k-1}; t_{j,k})$ для всех $k = 1, ..., 2^j$. Положим $I_{j,k} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$; $\mathcal{I}_j = \{I_{j,k} : 1 \leq k \leq 2^j\}$ и $\mathcal{I} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j$. Элементы множества $\mathcal{I}_j$ называются интервалами порядка j. Пусть $\{\tau_n : n \geq 0\} = \{t_{j,i} : j \geq 0;\ 0 \leq i \leq 2^j\}$, где $\tau_0 = t_{0,0}$, $\tau_1 = t_{0,1} = 1$ и при $n = 2^k + m$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, $k = 0, 1, ...$, $\tau_n = t_{k+1,2m-1}$.

Обозначим через S_n линейное пространство кусочно-линейных функций

$$S_n = \{f \in C[0,1] : \ f''(x) = 0 \quad \text{if} \quad x \notin \{\tau_k\}_{k=0}^{n}\}.$$

Тогда размерность S_n равна $n+1$, $S_n \subset S_{n+1}$ и коразмерность $[S_{n+1} : S_n] = 1$. Отсюда следует существование единственной функции $f_{n+1} \in S_{n+1}$ такой, что $f_{n+1} \perp S_n$ в смысле $L_2(0,1)$, $||f_{n+1}||_{L_2(0,1)} = 1$ и $f_{n+1}(\tau_{n+1}) > 0$. Ниже положим $f_0 \equiv 1$.

Определение. Система функций $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ называется общей системой Франклина, соответствующей квазидвоичному разбиению $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$. Классическая система Франклина получается, если $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ совпадает с двоичным разбиением отрезка $[0,1]$. Она впервые была рассмотрена Ф.

Франклином [1], который доказал, что эта ортонормальная система является базисом в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$. З. Чисельским [2], [3] были получены так называемые экспоненциальные оценки для функций классической системы Франклина. Эти оценки сыграли фундаментальную роль почти во всех исследованиях классических систем Франклина. Используя систему Франклина, С. В. Бочкарев [4] построил первый базис в пространстве функций, аналитических в единичном открытом круге и непрерывных в его замыкании. Система Франклина обладает многими свойствами системы Хаара (см. [4]-[7], [9]). В 1990 Г. Геворкяном [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $E \subset [0,1]$ – множество положительной меры Лебега $\mu(E) > 0$. Для почти всюду (п.в.) сходимости на E ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ по классической системе Франклина необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$ п.в. сходился бы на E.

В работах [8], [10] многие результаты, касающиеся классической системы Франклина, были обобщены на общие системы Франклина. Однако, для функций общей системы Франклина отсутствуют экспоненциальные оценки. В работе [8] были введены понятия слабого и сильного регулярного разбиения отрезка $[0,1]$.

Обозначим $\lambda_{j,k} = |I_{j,k}| = t_{j,k} - t_{j,k-1}$. Для $n = 2^j + k$, $k = 1, ..., 2^j$ обозначим $\{n\} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}]$ и $[n] = j$. $\{n\}$ называется интервалом пика функции f_n.

Определение. Квазидвоичное разбиение $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$ называется сильно регулярным, если существует $\gamma \geq 1$ такое, что

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{j,k+1}}{\lambda_{j,k}} \leq \gamma \quad \text{для всех} \quad k = 1, ..., 2^j - 1 \quad \text{и} \quad j \geq 0.$$

Напомним (см. [8]), что общая система Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в $H_1[0,1]$ тогда и только тогда, когда она порождена сильно регулярным разбиением отрезка $[0,1]$.

В настоящей работе Теорема 1 распространяется на общие системы Франклина, порожденные сильно регулярными квазидвоичными разбиениями отрезка $[0,1]$.

Теорема 2. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая система Франклина. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ п.в. сходится на множестве $E \subset [0,1]$ с $\mu(E) > 0$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$ п.в. сходится на E.

§2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 1, [8]. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ с коэффициентом $\gamma \geq 1$. Тогда

1. для всех $j \geq 0$ и $k = 1, \dots, 2^j$

$$\frac{1}{\gamma+1}\,|I_{j,k}| \leq |I_{j+1,i}| \leq \frac{\gamma}{\gamma+1}\,|I_{j,k}|, \quad i = 2k-1, 2k;$$

2. если $I_{m,l} \subset I_{j,k}$ для некоторых j, k, m, l, то

$$\left(\frac{1}{\gamma+1}\right)^{m-j} |I_{j,k}| \leq |I_{m,l}| \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{m-j} |I_{j,k}|;$$

3. для всех $j \geq 0$ и $1 \leq k \leq 2^j$, $1 \leq l \leq 2^j$

$$\gamma^{-2}\left(|k-l|+1\right)^{-\log_2\gamma} |I_{j,k}| \leq |I_{j,l}| \leq \gamma^2\left(|k-l|+1\right)^{\log_2\gamma} |I_{j,k}|.$$

Предложение 2, [8]. Для сильно регулярного разбиения $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ отрезка $[0,1]$ и для $n = 2^j + k$; $1 \leq k \leq 2^j$

$$f_n(t_{j+1,i}) = (-1)^{2k-1-i}\,|f_n(t_{j+1,i})|; \; |f_n(t_{j+1,i-1})| \leq \frac{1}{2}\,|f_n(t_{j+1,i})| \text{ при } i \leq 2k-2.$$

и (для $i \geq 2k$ и $i = 2l$)

$$f_n(t_{j+1,i}) = (-1)^{k-1-i/2}\,|f_n(t_{j+1,i})|; \quad |f_n(t_{j+1,i+2})| \leq \frac{1}{2}\,|f_n(t_{j+1,i})|.$$

Предложение 3, [8]. Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – квазидвоичное разбиение отрезка $[0,1]$, $n = 2^j + k$ и $m = 2^j + l$, где $1 \leq k < l \leq 2^j$. Тогда существуют числа α, β, зависящие только от n и m такие, что

$$f_n(u) = \alpha\, f_m(u) \quad \text{при} \quad u \leq t_{j+1,2k-2} \quad \text{и} \quad f_n(u) = \beta\, f_m(u) \quad \text{при} \quad u \geq t_{j+1,2l}.$$

Предложение 4, [9]. Для любого натурального числа m и любого $0 < \varepsilon \leq 1$ существует постоянная $C(m,\varepsilon)$ такая, что для любого полинома $P(x)$ степени m, для всякого множества $A \subset [a,b]$, удовлетворяющего условию $\mu(A) \geq \varepsilon\,(b-a)$, имеем

$$\max_{u\in[a,b]} |P(u)| \leq C(m,\varepsilon)\, \sup_{u\in A} |P(u)|.$$

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И ЛЕММЫ

Определение. Функция

$$\mathcal{M}^*(f,x) = \sup_{\substack{I \ni x \\ I \in \mathcal{I}}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(u)|\, du$$

называется максимальной функцией, соответствующей f и квазидвоичному разбиению $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$.

Положим $E^c = [0,1] \setminus E$, E^o – внутренность множества E, а $\chi_E = \chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E.

Предложение 5. Пусть $M > 0$, $0 < \delta < 1$ и $A \subset [0,1]$ – множество, на котором $\sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n\, f_n(x) \right| < M$. Положим $\mathcal{B} = \{x \in [0,1] :\ \mathcal{M}^*(\chi_{[0,1]\setminus A}, x) > 1-\delta\}$. Тогда

a) $\mathcal{B} = \cup_{j,k} I_k^{(j)}$, где $I_k^{(j)} \in \mathcal{I}_k$ имеют непересекающиеся внутренности;

b) для любого j, k имеем $\mu(I_k^{(j)} \cap A) < \delta\, \mu(I_k^{(j)})$, где $I_k^{(j)}$ – множество из пункта a);

c) если $\{n\}^o \cap \mathcal{B} = \emptyset$, то $\|a_n\, f_n(x)\|_{L_\infty(0,1)} < C_0(M, \delta)$.

Доказательство : a) Пусть $x_0 \in \mathcal{B}$. По определению максимальной функции, существует $I_0 \in \mathcal{I}$ такое, что $x_0 \in I_0$ и $\dfrac{1}{|I_0|}\mu(I_0 \cap ([0,1] \setminus A)) > 1-\delta$, т.е для любого $x \in I_0$ имеем $\mathcal{M}^*(\chi_{[0,1]\setminus A}, x) > 1-\delta$.

b) Так как $I_k^{(j)} \subset \mathcal{B}$, то имеем $\mu(I_k^{(j)} \cap ([0,1] \setminus A)) > (1-\delta)\, \mu(I_k^{(j)})$. Следовательно,

$$\mu(I_k^{(j)} \cap A) = \mu(I_k^{(j)}) - \mu(I_k^{(j)} \cap ([0,1] \setminus A)) < \mu(I_k^{(j)}) - (1-\delta)\, \mu(I_k^{(j)}) = \delta\, \mu(I_k^{(j)}).$$

c) Так как $\sup_{x \in A} |a_n\, f_n(x)| \leq 2M$ и $\{n\}^o \cap \mathcal{B} = \emptyset$, то имеем $\mu(\{n\} \cap A) \geq \delta\, \mu(\{n\})$ и в силу Предложения 4, $\|a_n\, f_n(x)\|_{L_\infty(\{n\})} \leq C_0(M, \delta)$. Следовательно, c) вытекает из Предложения 2.

Лемма 1. Пусть $I \in \mathcal{I}_{j_0}$ и $\mathcal{W} = \{n : \{n\} \cap I^o = \emptyset;\ [n] \geq j_0;\ \|a_n\, f_n(x)\|_{L_\infty(0,1)} \leq C\}$ для некоторого постоянного $C > 0$. Тогда существует $C_1(\gamma)$ такое, что

$$\int_I \sum_{n \in \mathcal{W}} |a_n\, f_n(x)|\, dx \leq C_1(\gamma) \cdot |I|.$$

Доказательство : Пусть $I = I_{j_0,k_0}$. Положим $k > k_0$ и оценим интеграл

$$\int_{I_{j_0,k_0}} \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{j_0,k} \\ n \in \mathcal{W}}} |a_n\, f_n(x)|\, dx.$$

Если $\{n\} \subset I_{j_0,k}$, то $n = 2^j + m$ $(j \geq j_0)$ и $\{n\} = [t_{j,m-1}; t_{j,m}]$. Так как $\{n\} \subset I_{j_0,k} = [t_{j,2^{j-j_0}(k-1)}; t_{j,2^{j-j_0}k}]$, то $2^{j-j_0}(k-1) < m \leq 2^{j-j_0}k$. Пусть $x \in I_{j,l} \subset I_{j_0,k_0}$. Из Предложения 2 следует, что

$$\sum_{\substack{2^j < n \leq 2^{j+1} \\ (n) \subset I_{j_0,k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)| \leq C \sum_{2^{j-j_0}(k-1) < m \leq 2^{j-j_0}k} 2^{-|m-l|} \leq C_2 \cdot 2^{-|2^{j-j_0}k - l|}.$$

Следовательно

$$\int_{I_{j,l}} \sum_{\substack{2^j < n \leq 2^{j+1} \\ (n) \subset I_{j_0,k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)|\, dx \leq C_2 \cdot |I_{j,l}|\, 2^{-|2^{j-j_0}k - l|}. \tag{1}$$

Так как $|I_{j,p}| \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{j-j_0} |I_{j_0,k_0}|$ for $I_{j,p} \subset I_{j_0,k_0}$, то из (1) получаем

$$\int_{I_{j_0,k_0}} \sum_{\substack{2^j < n \leq 2^{j+1} \\ (n) \subset I_{j_0,k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)|\, dx = \sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} \int_{I_{j,p}} \sum_{\substack{2^j < n \leq 2^{j+1} \\ (n) \subset I_{j_0,k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)|\, dx \leq$$

$$\leq C_2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{j-j_0} |I_{j_0,k_0}| \sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} 2^{-|2^{j-j_0}k - p|}.$$

Так как $k > k_0$, получим

$$\sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} 2^{-|2^{j-j_0}k - p|} = 2^{-2^{j-j_0}k} \sum_{p=2^{j-j_0}(k_0-1)}^{2^{j-j_0}k_0} 2^p \leq C_3 \cdot 2^{-2^{j-j_0}(k-k_0)}.$$

Следовательно

$$\int_{I_{j_0,k_0}} \sum_{\substack{[n] \geq j_0 \\ (n) \subset \cup_{k > k_0} I_{j_0,k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)|\, dx \leq C_4 \cdot |I_{j_0,k_0}| \sum_{j=j_0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{j-j_0} \leq C_5(\gamma) \cdot |I_{j_0,k_0}|.$$

Аналогично имеем

$$\int_{I_{j_0,k_0}} \sum_{\substack{[n] \geq j_0 \\ (n) \subset \cup_{k < k_0} I_{j_0,k} \\ n \in W}} |a_n f_n(x)|\, dx \leq C_6(\gamma) \cdot |I_{j_0,k_0}|.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть A и B – как и в Предложении 5. Из представления a) множества B вытекает, что существуют некоторые замкнутые интервалы $I_q = [t_q, t'_q]$, удовлетворяющие условию $I_q \cap I_{q'} = \emptyset$ для $q \neq q'$ и $B = \bigcup_{q=1}^{\infty} I_q$.

Лемма 2. **Пусть** $\eta > 0$ **и пусть** J'_q **– интервал концентрический с** I_q **такой, что** $\mu(J'_q) = (1+2\eta)\,\mu(I_q)$, $D = [0,1] \setminus \cup_{q=1}^{\infty} J'_q$. **Тогда**

$$\int_D \sum_{(n)\subset B} |a_n\, f_n(x)|\, dx < +\infty.$$

Доказательство :

$$\int\limits_D \sum_{\{n\}\subset B} |a_n\, f_n(x)|\, dx \le \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[0,1]\setminus J'_q} \sum_{\substack{(n)\subset I_q\\ [n]=k}} |a_n\, f_n(x)|\, dx \le$$

$$\le \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{[0,1]\setminus J'_q} S_k(x)\, dx,$$

где k_0 – минимальное натуральное число, для которого $I_{k_0}^{(j)} \subset I_q$ и $S_k(x) = \sum\limits_{\substack{(n)\subset I_q\\ [n]=k}} |a_n\, f_n(x)|$.

Пусть $I_q = [t_q, t'_q]$ и $I_{k,p} \in \mathcal{I}_k$ – ближайший интервал слева от t_q, и удовлетворяющий условию $I_{k,p} \not\subset B$. Ясно, что $\mu(I_{k,p} \cap A) \ge \delta\,\mu(I_{k,p})$. Так как $|a_n\, f_n(x)| \le 2M$ при $x \in A$ и $a_n\, f_n(x)$ является линейной функцией на $I_{k,p}$ (при $[n]=k$), из Предложения 4 получаем $|a_n\, f_n(x)| < C_7(M,\delta)$ на $I_{k,p}$, когда $\{n\} \subset I_q$ и $[n]=k$. Отсюда следует, что $S_k(x) \le C_7(M,\delta)\, 2^{k-k_0}$ для $x \in I_{k,p}$.

Следовательно, $S_k(x) \le C_7(M,\delta)\, 2^{k-k_0} \dfrac{1}{2^{p-v}}$ для $x \in I_{k,v}$: $v = 1,\dots,p$ (см. Предложение 2). Теперь мы хотим показать, что

$$S_k(x) \le C_7(M,\delta)\, 2^{k-k_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-t_{k,p}|\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k}} =: R(x) \quad \text{для} \quad x \le t_{k,p}. \tag{2}$$

Из Предложения 3 следует, что оценку (2) достаточно доказать для $x = t_{k,v}$, $v = 1,\dots,p$.

Неравенство $S_k(t_{k,p-1}) \le R(t_{k,p-1})$ следует из $|t_{k,p} - t_{k,p-1}|\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k} \le 1$, которое является одним из свойств сильно регулярного разбиения (см. Предложение 1). Пусть $J'_q = [\overline{t_q}; \overline{t'_q}]$. Имеем

$$\int_0^{\overline{t_q}} S_k(x)\, dx \le C_7(M,\delta)\, 2^{k-k_0} \int_{\eta|I_q|}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{t\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k}} dt \le$$

$$\le C_7(M,\delta)\, 2^{k-k_0} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k}|I_q|}.$$

Так как мы имеем аналогичную оценку для $\int\limits_{\overline{t'_q}}^{1} S_k(x)\, dx$, то из неравенства

$$\int_{[0,1]\setminus J'_q} S_k(x)\, dx \le C_7(M,\delta)\, 2^{k-k_0} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k}|I_q|}$$

вытекает

$$\int_D \sum_{\{n\}\subset B} |a_n\, f_n(x)|\, dx \le C_7(M,\delta) \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{-k}|I_q|} \le$$
$$\le C_8(M,\delta,\gamma) \sum_{I_q} 2^{-k_0}.$$

Теперь покажем, что $\sum_{I_{k_0}^{(j)}} 2^{-k_0} < +\infty$. Обозначим через $\{P_j' : j \ge 0\}$ двоичное разбиение отрезка $[0,1]$. Тогда существует непрерывное и взаимно–однозначное отображение $\varphi_n : [0,1] \leftrightarrow [0,1]$, линейное на интервалах из $\mathcal{I}_n$, сильно монотонное и $\varphi_n(t_{n.k}) = \dfrac{k}{2^n}$. Если или $k_0 \ne k_1$ или $k_0 = k_1$, но не $j_0 \ne j_1$, то $\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j_0)}) \cap \varphi_{k_1}(I_{k_1}^{(j_1)}) = \emptyset$ (так как φ_0 – сильно монотонное и $I_{k_0}^{(j_0)} \cap I_{k_1}^{(j_1)} = \emptyset$. Следовательно, из $k_0 = k_1$ и $j_0 \ne j_1$ следует, что $\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j_0)}) \cap \varphi_{k_1}(I_{k_1}^{(j_1)}) = \emptyset$.) Пусть теперь $k_0 \ne k_1$. Предположим, что $k_0 > k_1$. Если $I_{k_0}^{(j_0)}$ лежит слева от $I_{k_1}^{(j_1)}$, и t_0 – левый конец интервала $I_{k_1}^{(j_1)}$, то $\varphi_{k_0}(x) < \varphi_{k_0}(t_0)$ для $x \in I_{k_0}^{(j_0)}$ и $\varphi_{k_1}(t_0) < \varphi_{k_1}(y)$ для $y \in I_{k_1}^{(j_1)}$. Так как $\varphi_{k_0}(t_0) = \varphi_{k_1}(t_0)$, то необходимо $\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j_0)}) \cap \varphi_{k_1}(I_{k_1}^{(j_1)}) = \emptyset$. Имеем $\mu(\cup_{I_{k_0}^{(j)}} \varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j)})) = \sum_{k_0,j} \mu(\varphi_{k_0}(I_{k_0}^{(j)})) = \sum_{k_0,j} \dfrac{1}{2^{k_0}} \le 1$. Лемма 2 доказана.

Следствие. $\sum_{\{n\}\subset B} |a_n\, f_n(x)| < +\infty$ п.в. на $[0,1] \setminus B$.

Доказательство : Следует из Леммы 2 при $\eta \to 0$

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 2. Достаточность : Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на E и $\delta > 0$. Тогда существуют множество $A \subset E$ и $M > 0$ такие, что $\mu(A) > \mu(E) - \delta$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, f_n^2(x) < M < +\infty, \quad x \in A. \tag{3}$$

Очевидно, что $[0,1] \setminus B \subset A$, где B определено в Предложении 5. Пусть $N_1 = \{n : n = 0, 1, ...; \{n\} \subset B\}$, и N_2 = дополнение к N_1 в множестве неотрицательных целых чисел. Далее, если $\{n\} \not\subset B$, то $|a_n\, f_n(x)| < \sqrt{M}$ дляг $x \in A$. Следовательно, из Предложения 4 и Леммы 1, при $I = I_{k_0}^{(j)}$ получаем

$$\int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{\{n\}\cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \ge k_0 \\ n \in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\, dx \le C_0(M,\delta) \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{\{n\}\cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \ge k_0 \\ n \in N_2}} |a_n\, f_n(x)|\, dx \le \tag{4}$$
$$\le C_9(M,\delta,\gamma)\, |I_{k_0}^{(j)}|.$$

Так как $[0,1]\setminus B \subset A$, то имеет место (3) при $[0,1]\setminus B$. Следовательно

$$\int_0^1 \sum_{n\in N_2} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \le M + \int_{\bigcup_{k_0,j} I_{k_0}^{(j)}} \sum_{n\in N_2} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx =: M + V. \tag{5}$$

Используя (4) получим

$$\begin{aligned} V = \sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_j \left\{ \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{[n]\ge k_0\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx + \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{[n]\le k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \right\} \le \\ \le C_9(M,\delta,\gamma) + \sum_{k_0,j} \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{[n]\le k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $J_{k_0,j}$ – интервал порядка k_0-1, удовлетворяющий условиям $I_{k_0}^{(j)} \subset J_{k_0,j}$ и $J = J_{k_0,j}\setminus I_{k_0}^{(j)}$. Тогда $J_{k_0,j} \not\subset B$ и $J \not\subset B$, и имеем $\mu(J\cap A) \ge \delta\,\mu(J)$, $\mu(J_{k_0,j}\cap A) \ge \delta\,\mu(J_{k_0,j})$. Следовательно, $\sum\limits_{\substack{[n]=k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)$ является квадратичным трехчленом на J. Из Предложения 4 и (3) получаем

$$\Big\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \Big\|_{L_\infty(J)} \le C_{10}(M,\delta).$$

Аналогично, из $\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \|_{L_\infty(I_{k_0}^{(j)})} \le C_{10}(M,\delta)$ и

$$\Big\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \Big\|_{L_\infty(I_{k_0}^{(j)})} \asymp \Big\| \sum_{\substack{[n]=k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \Big\|_{L_\infty(J)}$$

вытекает

$$\Big\| \sum_{\substack{[n]\le k_0-1\\ n\in N_2}} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \Big\|_{L_\infty(I_{k_0}^{(j)})} \le C_{11}(M,\delta). \tag{7}$$

Таким образом, из неравенств (5), (6) и (7) получаем

$$\int_0^1 \sum_{n\in N_2} a_n^2\, f_n^2(x)\,dx \le M + C_9(M,\delta,\gamma) + C_{11}(M,\delta) < +\infty.$$

Так как рассматриваем сходящуюся систему, то $\sum\limits_{n\in N_2} a_n\, f_n(x)$ сходится п.в. на $[0,1]$. Из следствия Леммы 2 получим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, f_n(x)$ сходится п.в. на A. Устремив δ к нулю, получим сходимость п.в. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, f_n(x)$ на множестве E.

Необходимость : вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. **Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – сильно регулярное разбиение отрезка $[0,1]$ с коэффициентом $\gamma \geq 1$ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая система Франклина. Если**

$$\sup_N \left|\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right| < +\infty \quad \text{п.в. на} \quad E, \tag{8}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)$ сходится п.в. на множестве E.

Доказательство Теоремы 3 : Из (8) вытекает, что для любого $\delta > 0$ существуют множество $E_\delta \subset E$ и число $M > 0$ такие, что

$$\|\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\|_{L_\infty(E_\delta)} < M \quad \text{для любого} \quad N, \tag{9}$$

а также $\|a_n f_n(x)\|_{L_\infty(E_\delta)} < M$ для любого n, и $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$.

Положим $\mathcal{B} = \{x : \mathcal{M}^*(\chi_{[0,1]\setminus E_\delta}, x) > 1 - \delta\}$, $\mathcal{B} = \bigcup_{k,j} I_k^{(j)}$. Рассмотрим функцию $f_n(x)$ с $n \in N_2$, которая соответствует $\mathcal{B}$. По Лемме 1 и Предложению 5, при любом k_0 имеем

$$\int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{\{n\}\cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)|\, dx \leq C_{12}(M,\delta)\, |I_{k_0}^{(j)}|,$$

и, следовательно

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathcal{B} \\ \sum_{\substack{\{n\}\cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)|, & x \in I_{k_0}^{(j)} \end{cases}$$

корректно определена. Поэтому имеем

$$\int_0^1 \varphi_1(x) dx = \sum_{k_0,j} \int_{I_{k_0}^{(j)}} \sum_{\substack{\{n\}\cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset \\ [n] \geq k_0 \\ n \in N_2}} |a_n f_n(x)|\, dx \leq$$

$$\leq C_{12}(M,\delta) \sum_{k_0,j} |I_{k_0}^{(j)}| \leq C_{12}(M,\delta) < +\infty.$$

Пусть теперь $n \in N_1$, $\{n\} \subset I_{k_0}^{(j)}$ и $[n] = k$. Предположим, что $I_{k_0,k}^{(j)}$ – наибольший интервал типа $[t_{k,p}; t_{k,q}]$, содержащий $I_{k_0}^{(j)}$ и $I_{k_0,k}^{(j)} \subset \mathcal{B}$. Обозначим $J = [t_{k,q}; t_{k,q+1}]$. Легко убедиться, что $J^o \cap (\cup_{p \leq k} \cup_j I_p^{(j)}) = \emptyset$. Так как $J \not\subset \mathcal{B}$, то из Предложения 4 получаем

$$|a_n f_n(x)| \leq C_{13}(M,\delta) \quad \text{при} \quad x \in J \quad \text{и} \quad n \in N_1. \tag{10}$$

Следовательно

$$|S_{j,k_0,k,m}(x)| \le C_{13}(M,\delta) \quad \text{для} \quad x \in J, \tag{11}$$

где $S_{j,k_0,k,m}(x) = \sum\limits_{\substack{[n]=k \\ (n)\subset I^{(j)}_{k_0,k} \\ n\le m \\ n\in N_1}} a_n\, f_n(x)$.

Поэтому имеем $I^{(j)}_{k_0,k} \subset \cup_{p\le k} \cup_j I^{(j)}_p$ и

$$\mu(I^{(j)}_{k_0,k}) \le (\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1)\,\mu(I^{(j)}_{k_0}). \tag{12}$$

Положим

$$\varphi^{(j)}_{k_0}(x) = \begin{cases} 0, & x \in I^{(j)}_{k_0} \\ \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & x \in I^{(j)}_{k_0,p} \setminus I^{(j)}_{k_0,p-1}, \quad p > k_0. \\ \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|, & x \notin \cup_{k=k_0}^{\infty} I^{(j)}_{k_0,k} \end{cases}$$

Следовательно

$$\int_0^1 \varphi^{(j)}_{k_0}(x)\,dx = \sum_{p=k_0+1}^{\infty} \int_{I^{(j)}_{k_0,p}\setminus I^{(j)}_{k_0,p-1}} \sum_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx +$$
$$+ \int_{[\cup_{k=k_0}^{\infty} I^{(j)}_{k_0,k}]^c} \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx =: V_1 + V_2.$$

Пусть $R_p(x) = \sum\limits_{k=k_0}^{p-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|$. Таким образом, имеем $R_{p+1}(x) = R_p(x) + \max_m |S_{j,k_0,p,m}(x)|$. Для $x \in I^{(j)}_{k_0,k_0+1} \setminus I^{(j)}_{k_0,k_0}$ имеем $R_{k_0+1}(x) = \max\limits_m |S_{j,k_0,k_0,m}(x)| \le C_{16}(M,\delta)$ и $R_{k_0+2}(x) = R_{k_0+1}(x) + \max_m |S_{j,k_0,k_0,m}(x)| \le R_{k_0+1}(x) + C_{13}(M,\delta) \le 2\,C_{13}(M,\delta)$ для $x \in I^{(j)}_{k_0,k_0+2} \setminus I^{(j)}_{k_0,k_0+1}$. Аналогично, получаем $R_{k_0+3}(x) \le 2\,C_{13}(M,\delta)$ для $x \in I^{(j)}_{k_0,k_0+3} \setminus I^{(j)}_{k_0,k_0+2}$, и, вообще, для $x \in I^{(j)}_{k_0,v} \setminus I^{(j)}_{k_0,v-1}$ имеем $R_v(x) \le 2\,C_{13}(M,\delta)$. Следовательно, из (12) находим

$$V_1 \le 2\,C_{13}(M,\delta) \sum_{p=k_0+1}^{\infty} \mu(I^{(j)}_{k_0,p} \setminus I^{(j)}_{k_0,p-1}) \le 2\,C_{13}(M,\delta)\,\mu(I^{(j)}_{k_0})(\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1). \tag{13}$$

С другой стороны

$$V_2 \le \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{[I^{(j)}_{k_0,k}]^c} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx.$$

Положим $I^{(j)}_{k_0,k} = [t_{k,p}; t_{k,q}]$. Пусть $I_{k,v}$, $v = 1,\dots,2^k$ – интервалы порядка k, и пусть p удовлетворяет условиям $I^o_{k,p} \cap I^{(j)}_{k_0,k} = \emptyset$ и $I_{k,p+1} \subset I^{(j)}_{k_0,k}$. Таким образом, из (11) получаем, что $\max\limits_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \le C_{13}(M,\delta)$ на $I_{k,p}$. Поэтому необходимо $\max\limits_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \le \frac{1}{2^{p-v}} C_{16}(M,\delta)$ на $I_{k,v}$, $v = 1, \dots, p$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{k,p}} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx = \sum_{v=1}^{p} \int_{I_{k,v}} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx \le \\ \le C_{13}(M,\delta) \sum_{v=1}^{p} \frac{1}{2^{p-v}} |I_{k,v}|. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть $I_{k_0}^{(j)} = I_{k_0,m_0}$. Тогда из $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,k}^{(j)}$ вытекает или $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0-2}$ или $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0-1}$ или $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0}$. Предположим, что $I_{k,p+1} \subset I_{k_0,m_0-2}$. Тогда из условий $|I_{k,p+1}| \le \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0,m_0-2}|$ и $|I_{k_0,m_0-2}| \le \gamma^2 3^{\log_2 \gamma} |I_{k_0,m_0}|$ (см. Предложение 1), получаем

$$|I_{k,p+1}| \le C_{14}(M,\delta,\gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0,m_0}| = C_{14}(M,\delta,\gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0}^{(j)}|.$$

С другой стороны, по Предложению 1, из $|I_{k,v}| \le \gamma^2(|v-p-1|+1)^{\log_2\gamma} |I_{k,p+1}| = \gamma^2(p+2-v)^{\log_2\gamma}|I_{k,p+1}|$, $v = 1, \dots, p$ получаем

$$|I_{k,v}| \le C_{15}(M,\delta,\gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} (p+2-v)^{\log_2\gamma} |I_{k_0}^{(j)}|. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), получим

$$\int_0^{t_{k,p}} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx \le C_{16}(M,\delta,\gamma) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} |I_{k_0}^{(j)}|,$$

так как

$$\sum_{v=1}^{p} \frac{1}{2^{p-v}} (p+2-v)^{\log_2\gamma} \le 2^{\log_2\gamma} + \dots + \frac{1}{2^{p-2}} p^{\log_2\gamma} + \frac{1}{2^{p-1}} (p+1)^{\log_2\gamma} + \dots < +\infty.$$

Аналогичные неравенства имеют место для $\int\limits_{t_{k,q}}^{1} \max\limits_m |S_{j,k_0,k,m}(x)|\,dx$. Следовательно

$$V_2 \le C_{16}(M,\delta,\gamma)\, |I_{k_0}^{(j)}| \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{k-k_0} \le C_{17}(M,\delta,\gamma)\, |I_{k_0}^{(j)}|. \tag{16}$$

Из (13) и (16) получим

$$\int_0^1 \varphi_{k_0}^{(j)}(x)\,dx \le C_{18}(M,\delta,\gamma)\, |I_{k_0}^{(j)}|.$$

Обозначая $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \sum\limits_{k,j} \varphi_k^{(j)}(x)$, имеем $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx < +\infty$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{n\in N_2} a_n f_n(x)$. Для $x\notin B$ и любого m, из (9) получим

$$|\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_2}} a_n f_n(x)| \le |\sum_{n\le m} a_n f_n(x)| + |\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_1}} a_n f_n(x)| \le M + |\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_1}} a_n f_n(x)|.$$

Очевидно, из $x\notin B$ вытекает $x\notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$ для всех k_0. Таким образом, $B=\bigcup_m I_m$, где I_m имеют не пересекающиеся внутренности. Имеем $N_1=\bigcup_m\{n: n\in N_1; \{n\}\subset I_m\}$ и $\{n: n\in N_1; \{n\}\subset I_m\} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty}\{n: n\in N_1; \{n\}\subset I_{k_0,k}^{(j)}; [n]=k\}$, где k_0 – минимальное число такое, что $I_m=\bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$. Тогда из неравенства

$$|\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_1}} a_n f_n(x)| = |\sum_p \sum_{\substack{(n)\subset I_p\\ n\le m\\ n\in N_1}} a_n f_n(x)| \le$$

$$\le \sum_{k_0,J}\sum_{k=k_0}^{\infty}\max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \le \sum_{k_0 J}\varphi_{k_0}^{(j)}(x)\le\varphi(x)$$

вытекает, что

$$|\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_2}} a_n f_n(x)| \le M+\varphi(x), \quad x\notin B. \tag{17}$$

Пусть теперь $x\in I_{k_0}^{(j)}$ и $m\le 2^{k_0-1}$. Имеем $m\le 2^{k_0-1}$, $n\in N_1$ и $n\le m$, т.е. $[n]\le k_0-1$. Откуда следует,что $\{n\}\subset I_{k_0}^{(j)}$ не существует. Пусть $\{n\}\subset I_{m_0} = \cup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$. Тогда существует $p_0<k_0$ такое, что $\{n\}\subset I_{p_0}^{(j_0)}$ и $I_{p_0}^{(j_0)}\cap I_{k_0}^{(j)}=\emptyset$. Следовательно, из $x\in I_{k_0}^{(j)}$ и $\{n\}\subset I_{p_0}^{(j_0)}$ следует, что $x\in I_{p_0,k_0}^{(j)}\setminus I_{p_0,k_0-1}^{(j)} (k_0>p_0)$ и получаем

$$\left|\sum_{\substack{(n)\subset I_{p_0}^{(j_0)}\\ n\le m}} a_n f_n(x)\right| \le \sum_{p=p_0}^{k_0-1}\left|\sum_{\substack{(n)\subset I_{p_0}^{(j_0)}\\ [n]=p\\ n\le m}} a_n f_n(x)\right| \le \sum_{p=p_0}^{k_0-1}\max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \le \varphi_{p_0}^{j_0}(x)$$

для $x\in I_{k_0}^{j}$. Если $m\le 2^{k_0-1}$ и $x\in I_{k_0}^{(j)}$, то функция $\sum\limits_{n\le m} a_n f_n(x)$ – линейная на интервалах порядка k_0-1. Один из этих интервалов не есть интервал типа $I_{k_0-1}^{(j)}$ (в противном случае не было бы интервала $I_{k_0}^{(j)}$). Для этого интервала $\mu(I\cap E_\delta)\ge\delta\,\mu(I)$, откуда получим $|\sum\limits_{n\le m} a_n f_n(x)| \le C_{19}(M,\delta)$ для $x\in I_{k_0}^{(j)}$.

Наконец

$$\left|\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_2}} a_n f_n(x)\right| \le C_{19}(M,\delta)+\varphi(x) \quad \text{при} \quad x\in I_{k_0}^{(j)}. \tag{18}$$

Если же $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $m > 2^{k_0-1}$, то

$$\left|\sum_{\substack{n\le m\\ n\in N_2}} a_n\, f_n(x)\right| \le \left|\sum_{n=1}^{2^{k_0-1}} a_n\, f_n(x)\right| + \left|\sum_{\substack{n\le 2^{k_0-1}\\ n\in N_1}} a_n\, f_n(x)\right| + \left|\sum_{\substack{2^{k_0-1}<n\le m\\ n\in N_2}} a_n\, f_n(x)\right| \le$$

$$\le C_{19}(M,\delta) + \sum_{k,j}\varphi_k^{(j)}(x) + \varphi_1(x). \tag{19}$$

Таким образом, из (17), (18), (19) получаем $\sup_N \left|\sum_{\substack{n\le N\\ n\in N_2}} a_n\, f_n(x)\right| \in L_1(0,1)$. Откуда имеем (см. [8])

$$\left[\sum_{n\in N_2} a_n^2\, f_n^2(x)\right]^{1/2} \in L_1(0,1)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n\in N_2} a_n^2\, f_n^2(x) < +\infty \quad \text{п.в. на} \quad [0,1]. \tag{20}$$

Согласно Следствию, на множестве $[0,1]\setminus B$ имеем

$$\sum_{n\in N_1} a_n^2\, f_n^2(x) \le +\infty. \tag{21}$$

При $\delta\to 0$, из (20) и (21) вытекает, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, f_n^2(x) < +\infty$ п.в. на E. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Следующие утверждения эквивалентны :

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2\, f_n^2(x) < +\infty$ **п.в. на** E **;**
2. $\sup_N \left|\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\, f_n(x)\right| < +\infty$ **п.в. на** E **;**
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, f_n(x)$ **сходится п.в. на** E **;**
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, f_n(x)$ **сходится по мере безусловно на** E.

Доказательство : Условия 1., 2., 3. эквивалентны Теоремам 1, 2. Эквивалентность 3. и 4. очевидна.

В заключение хотел бы выразить благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постановку задачи и ценные советы.

ABSTRACT. A criterion for almost everywhere convergence of series by generalized Franklin systems is derived extending a result for classical Franklin system proved by G. G. Gevorkian (Analysis Math., vol. 16, pp. 87 — 114, 1990).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., vol. 100, pp. 522 — 529, 1928.
2. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 — 157, 1963.
3. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 — 323, 1966.
4. С. В. Бочкарев, "Существование базиса в пространстве аналитических в круге функций и некоторые свойства системы Франклина", Мат. сб., том 95, стр. 3 — 18, 1974.
5. G. G. Gevorkyan, "On series by Franklin systems", Analysis Math., vol. 16, pp. 87 — 114, 1990.
6. Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", Докл. АН Арм.ССР, том 42, № 3, стр. 134 — 140, 1966.
7. R. Gundy, "Martingale theory и pointwise convergence of certain orthogonal series", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 124, pp. 228 — 248, 1966.
8. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Diss. Math., CCCLXXIV, 1998.
9. G. G. Gevorkyan, "Some theorems on unconditional convergence and a majorant of Franklin series and their application to the spaces ReH_p", Труды Матем. Инст. им. Стеклова, том 190, стр. 49 — 76, 1989.
10. Б. Кашин, А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.

15 января 2000

Ереванский государственный университет

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Г. С. Акопян, Л. П. Тепоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 35, № 2, 2000

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{A}u \equiv -(t^{\alpha}(b-t)^{\beta}u'(t))' + a(t,u) = f(t), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha, \beta \neq 1$, $t \in (0,b)$, $f(t) \in L_{2,-\alpha,-\beta}$, а функция $a(t,\xi)$ непрерывна по ξ и при любых комплексных ξ и η удовлетворяет условиям

$$|a(t,\xi)| \leq ct^{\alpha}(b-t)^{\beta}(1+|\xi|), \tag{2}$$

$$[a(t,\xi) - a(t,\eta)]\overline{(\xi-\eta)} \geq ct^{\alpha}(b-t)^{\beta}|\xi-\eta|^2). \tag{3}$$

Докажем, что при условиях (2), (3), оператор $\mathcal{A}$ является сильно монотонным и полунепрерывным (см. ниже Теорему 1). При $f \in W^{*}_{\alpha,\beta}$ основная Теорема о монотонных операторах (см. [5] или [6]) гарантирует существование обобщенного решения уравнения (1) в классе $W_{\alpha,\beta}$ (определения классов $W_{\alpha,\beta}$ и $W^{*}_{\alpha,\beta}$ см. следующий параграф). Теорема 2 доказывает единственность в классе $W_{\alpha,\beta}$ обобщенного решения уравнения (1) при $f \in W^{*}_{\alpha,\beta}$. В линейном случае с вырождением на одном конце уравнение (1) было исследовано в [1], [2].

§2. ПРОСТРАНСТВА $W_{\alpha,\beta}$

Пусть $\dot{C}^1$ - множество непрерывно дифференцируемых вещественных функций на отрезке $[0,b]$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = u(b) = 0. \tag{4}$$

Обозначим через $\dot{W}^1$ пополнение $\dot{C}^1$ по норме $\left|u, \dot{W}^1\right|^2 = \int_0^b |u'(t)|^2\, dt$,

и через $W_{\alpha,\beta}$ пополнение $\dot{W}^1$ по норме

$$|u, W_{\alpha,\beta}|^2 = \int_0^b \left[t^\alpha (b-t)^\beta |u'(t)|^2 + t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2\right]\, dt. \tag{5}$$

Очевидно, что $\dot{W}^1 \subset W_{\alpha,\beta}$, элементы $\dot{W}^1$ являются абсолютно непрерывными функциями, удовлетворяюшими (4), и нормы пространств $\dot{W}^1$ и $W_{\alpha,\beta}$ на отрезке $[\eta, b-\eta]$, $\eta > 0$ эквивалентны. Следовательно, достаточно изучить свойства $u(t) \in W_{\alpha,\beta}$ вблизи точек $t = 0$ и $t = b$.

Предложение 1. Для элементов $u(t) \in W_{\alpha,\beta}$ имеет место неравенство

$$|u(t)|^2 \le ct^{1-\alpha}(b-t)^{1-\beta} \left|u, W_{\alpha,\beta}\right|^2. \tag{6}$$

Доказательство : Так как $\dot{C}^1$ плотно в $W_{\alpha,\beta}$, то достаточно доказать неравенство (6) только при $u \in \dot{C}^1$. Отметим, что для любого $u \in W_{\alpha,\beta}$ существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что

$$c_1 \left|u, W_{\alpha,\beta}\right|^2 \le |u, W_{\alpha,0}(0, b/2)|^2 + |u, W_{0,\beta}(b/2, b)|^2 \le c_2 \left|u, W_{\alpha,\beta}\right|^2. \tag{7}$$

Оценим $|u(t)|^2$ в отдельности для $t \in (0, b/2)$ и $t \in (b/2, b)$. Пусть $t \in (0, b/2)$ и $\alpha < 1$. Тогда

$$|u(t)|^2 = \left|\int_0^t u'(\tau)\, d\tau\right|^2 \le \int_0^t \tau^{-\alpha}\, d\tau \int_0^t \tau^\alpha |u'(\tau)|^2\, d\tau \le ct^{1-\alpha} \left|u, W_{\alpha,0}(0, b/2)\right|^2.$$

Пусть теперь $\alpha > 1$. Умножая равенство

$$u(t) = u(b/2) - \int_0^{b/2} u'(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

на $t^{\alpha/2}$, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{b/2} |t^\alpha u(b/2)|^2\, dt \le \int_0^{b/2} \left(|t^\alpha u(t)|^2 + t^\alpha \left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\, d\tau\right|^2\right)\, dt.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского, получим

$$\int_0^{b/2} t^\alpha \left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\, d\tau\right|^2 dt \le \int_0^{b/2} t^\alpha \left[\int_t^{b/2} \tau^{-\alpha}\, d\tau \int_t^{b/2} \tau_1^\alpha |u'(\tau_1)|^2\, d\tau_1\right] dt.$$

С другой стороны

$$\left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\, d\tau\right|^2 \le \int_t^{b/2} \tau^{-\alpha}\, d\tau \int_t^{b/2} \tau_1^\alpha |u'(\tau_1)|^2\, d\tau_1 \le ct^{1-\alpha} \left|u, W_{\alpha,0}(0, b/2)\right|^2.$$

Из (8) следует, что $|u(t)|^2 \leq 2\left(|u(b/2)|^2 + \left|\int_t^{b/2} u'(\tau)\,d\tau\right|^2\right)$, и следовательно при $\alpha > 1$ получим

$$|u(t)|^2 \leq ct^{1-\alpha}\,|u, W_{\alpha,0}(0, b/2)|^2 . \tag{9}$$

Таким образом, мы доказали, что неравенство (9) выполняется при любых $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1$. Аналогично, при $t \in (b/2, b)$ получим

$$|u(t)|^2 \leq c(b-t)^{1-\beta}\,|u, W_{0,\beta}(b/2, b)|^2 . \tag{10}$$

Из (7), (9) и (10) следует (6). Доказательство завершено.

Из Предложения 1 имеем, что

из $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ следует (4),

из $\alpha < 1$ и $\beta > 1$ (или $\alpha > 1$ и $\beta < 1$) следует только $u(0) = 0$ (или $u(b) = 0$),

при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ значения $u(t)$ при $t = 0, b$ могут обращаться в бесконечность.

Замечание 1. При $\alpha < 1$ (или $\beta < 1$) в определении нормы (5) можно взять только первое слагаемое.

Доказательство : Из равенства $|u, W_{\alpha,\beta}| = 0$ следует, что $u(t)$ – постоянное число. Так как $u(0) = 0$ (или $u(b) = 0$), то получим $u(t) \equiv 0$.

Замечание 1 означает, что при $\alpha < 1$ (или $\beta < 1$) пространство $W_{\alpha,\beta}$ не содержит отличные от нуля постоянные функции. Однако, при $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, $u(t) \equiv 1$ принадлежит пространству $W_{\alpha,\beta}$. Действительно, пусть $u_h(t) \in \dot{C}^1$, $0 < h < b/2$ определяются согласно равенству

$$u_h(t) = \begin{cases} t^2(3h-2t)/h^3 & \text{при} \quad 0 \leq t \leq h, \\ 1 & \text{при} \quad h \leq t \leq b-h, \\ (b-t)^2(2t+3h-2b)/h^3 & \text{при} \quad b-h \leq t \leq b. \end{cases}$$

Используя (7), получим

$$|1-u_h(t), W_{\alpha,\beta}|^2 \leq c\big(|1-u_h(t), W_{\alpha,0}(0, b/2)|^2 +$$

$$+|1-u_h(t), W_{0,\beta}(b/2. b)|^2\big) \leq c_1(h^{\alpha-1} + h^{\beta-1}).$$

Поэтому $|1-u_h(t), W_{\alpha,\beta}|$ стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, $u(t) \equiv 1$ принадлежит пространству $W_{\alpha,\beta}$.

Замечание 2. В пространстве $W_{\alpha,\beta}$ существует эквивалентная норма

$$||u||^2_{\alpha,\beta} = \int_0^b \left(([t^{\alpha/2}(b-t)^{\beta/2}u(t)])^2 + t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2 \right) dt. \qquad (11)$$

Доказательство : следует из неравенства Харди, см. [3], [4].

Из Замечания 2 следует (ср. [2]), что

$$W_{\alpha,\beta} = t^{-\alpha/2}(b-t)^{-\beta/2}\dot{W}^1, \quad W^*_{\alpha,\beta} = t^{\alpha/2}(b-t)^{\beta/2}W^{-1}, \qquad (12)$$

где $W^*_{\alpha,\beta}$ – пространство, сопряженное к $W_{\alpha,\beta}$. Пусть $L_{2,\alpha,\beta}$ – пространство функций с конечной нормой $|u, L_{2,\alpha,\beta}|^2 = \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2 dt$. Вложения $L_{2,-\alpha,-\beta} \subset W^*_{\alpha,\beta}$, $W_{\alpha,\beta} \subset L_{2,\alpha,\beta}$ и $\dot{W}^1 \subset L_2(0,b)$ вытекают из (12).

§3. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ УРАВНЕНИЕ

Определение 1. Пусть X – рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Оператор $B : X \longmapsto X^*$ называется **сильно монотонным**, если

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq m||u - v||^2, \quad m > 0. \qquad (13)$$

и **коэрцитивным**, если

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq \gamma(||u||)||u||, \quad \lim_{s\to\infty} \gamma(s) = +\infty. \qquad (14)$$

Замечание 3. Каждый сильно монотонный оператор коэрцитивен.

Доказательство : Из (13) при $v = 0$ получим

$$\langle Bu, u\rangle \geq \langle B0, u\rangle + m||u||^2 \geq m||u||^2 - ||B0||_*||u|| = (m||u|| - ||B0||_*)||u||.$$

Определение 2. Оператор $B : X \longmapsto X^*$ называется **полунепрерывным**, если из $x_n \to x$ следует, что $Bx_n \rightharpoonup Bx$ (слабая сходимость).

Определим теперь оператор $\mathcal{A} : W_{\alpha,\beta} \longmapsto W^*_{\alpha,\beta}$ по формуле

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_0^b \left[t^\alpha (b-t)^\beta u'(t)\overline{v'(t)} + a(t,u)\overline{v(t)} \right] dt, \quad u, v \in W_{\alpha,\beta}. \qquad (15)$$

Теорема 1. Оператор $\mathcal{A} : W_{\alpha,\beta} \longmapsto W^*_{\alpha,\beta}$ является сильно монотонным и полунепрерывным.

Доказательство : Сначала докажем, что оператор $\mathcal{A}$ определен корректно. Существование первого слагаемого (15) следует из $u, v \in W_{\alpha,\beta}$. Оценим теперь второе слагаемое, используя условие (2)

$$\left| \int_0^b a(t,u)\overline{v(t)}\, dt \right|^2 \leq \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |v(t)|^2 dt \int_0^b t^{-\alpha}(b-t)^{-\beta} |a(t,u)|^2 dt \leq$$

$$\leq c \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |v(t)|^2 dt \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |u(t)|^2 dt.$$

Из условия (3) следует, что

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \langle Au, u - v\rangle - \langle Av, u - v\rangle = \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta |u'(t) - v'(t)|^2 dt +$$

$$+ \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta [a(t,u) - a(t,v)]\overline{[u(t) - v(t)]}\, dt \geq c|u - v, W_{\alpha,\beta}|^2. \qquad (16)$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ – сильно монотонный. Докажем теперь, что $\mathcal{A}$ полунепрерывен. Пусть $u_n \to u$ в $W_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$|\langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, v\rangle| \leq \left| \int_0^b t^\alpha (b-t)^\beta [u_n'(t) - u'(t)]\overline{v'(t)}\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int_0^b [a(t,u_n) - a(t,u)]\overline{v(t)}\, dt \right|,$$

который стремится к нулю, так как $a(t,\xi)$ непрерывна по ξ. Теорема 1 доказана.

Определение 3. Функция $u \in W_{\alpha,\beta}$ называется **обобщенным решением** уравнения (1), если для любого $v \in W_{\alpha,\beta}$ имеем $\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_0^b f(t)\overline{v(t)}\, dt$.

Теорема 2. Для любого $f \in W^*_{\alpha,\beta}$ **существует единственное обобщенное решение уравнения (1).**

Доказательство : Существование обобщенного решения уравнения (1) следует из Теоремы 1 и основной теоремы теории монотонных операторов (см. [5] или [6]). Докажем теперь единственность. Пусть $u_1, u_2 \in W_{\alpha,\beta}$ – два обобщенных решения уравнения (1). Тогда при любых $v \in W_{\alpha,\beta}$ имеем

$$\int_0^b \left[t^\alpha (b-t)^\beta (u_1'(t) - u_2'(t))\overline{v'(t)} + (a(t,u_1) - a(t,u_2))\overline{v(t)} \right] dt = 0. \qquad (17)$$

Подставляя $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ в (17) и используя (3), получим

$$\int_0^b \left[t^\alpha (b-t)^\beta |u_1'(t) - u_2'(t)|^2 + ct^\alpha (b-t)^\beta |u_1(t) - u_2(t)|^2 \right] dt \leq 0.$$

Следовательно, $u_1(t) \equiv u_2(t)$. Доказательство завершено.

Замечание 4. При $\alpha < 1$ (или $\beta < 1$) условие (3) можно заменить условием $[a(t,\xi) - a(t,\eta)]\overline{(\xi - \eta)} \geq 0$.

Доказательство : следует из (16) и Замечания 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Дезин, "Вырождающиеся операторные уравнения", Мат. сборник. том 43, № 3, стр. 287 – 298, 1982.
2. Л. П. Тепоян, "Об одном вырождающемся дифференциально–операторном уравнении высокого порядка", Изв. АН Армении. Математика, том 34, № 5, стр. 48 – 56, 1999.
3. Г. Х. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства. Москва, 1948.
4. R. Duduchava, D. Eliott, W. L. Wendland, "The spline collocation method for Mellin convolution equations", Univ. Stuttgart, Sonderforsch. 404, Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik, Bericht 96/04, 1996.
5. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, Нелинейные Операторные Уравнения и Операторные Дифференциальные Уравнения, Мир, Москва, 1978.
6. Д. Л. Лионс, Некоторые Методы Решения Нелинейных Краевых Задач, Мир, Москва, 1972.

30 января 2000

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35 НОМЕР 2 2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Краткие Сообщения