

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Սոաքելյան

Գ.Գ. Գևորգյան

Վ.Ս. Չաքարյան

Ա.Ա. Թալալյան

Ն.Ե. Թովմասյան

Վ.Ա. Մարտիրոսյան

Ս.Ն. Մերգելյան

Բ.Ս. Նահապետյան

Ա.Բ. Ներսիսյան

Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Ս.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян

Г.Г. Геворкян

В.С. Закарян

А.Г. Камалян

В.А. Мартиросян

С.Н. Мергелян

Б.С. Нагапетян

А.Б. Нерсисян

А.А. Таталян

Н.Е. Товмасян

Р.Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь

М.А. Оганесян

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, III**

сборник статей

под редакцией В. С. Закаряна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Два предыдущих сборника под тем же названием были опубликованы в этом журнале в 1998 году, том 33, № № 2 и 3. В статьях настоящего тематического выпуска рассматриваются функциональные уравнения и решаются в классе аналитических функций. Этот подход находит применения в анализе краевых задач для эллиптических уравнений. Указаны новые эффективные методы решения трансцендентных уравнений, в частности, корни многочленов представлены в виде контурных интегралов. Другой пример относится к вопросам стабильности в теории реактивного движения.

Ереван, декабрь 1999

В. С. Закарян

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье получены формулы, представляющие корни любого полинома порядка n в виде контурных интегралов. Они применяются для решения трансцендентных алгебраических уравнений.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Основная цель настоящей статьи – показать, что корни z_k любого полинома $P(z)$ порядка n можно представить в виде

$$z_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{z P'_k(z) dz}{P_k(z)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

где $P_1(z), \dots, P_n(z)$ – некоторые полиномы порядка не выше n , а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – некоторые окружности такие, что $P_k(z) \neq 0$, $z \in \gamma_k$ ($k = 1, \dots, n$). Указав алгоритм нахождения полиномов $P_k(z)$ и окружностей γ_k ($k = 1, \dots, n$).

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы порядка n и m ($n \geq m$), соответственно, не имеющие общих корней. Тогда (см. [2]) существуют полиномы $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ такие, что

$$P(z) Q_0(z) + Q(z) P_0(z) \equiv 1. \quad (1.1)$$

Сначала получим условия, при которых полиномы $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ определяются из тождества (1.1) единственным образом.

Лемма 1.1. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы порядка n и m , соответственно, и не имеют общих корней. Если порядки полиномов $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ не превышают $n - 1$ и $m - 1$, соответственно, то эти полиномы определяются из (1.1) единственным образом.

Доказательство : Пусть

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k, \quad (1.2)$$

$$P_0(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k, \quad Q_0(z) = \sum_{k=0}^{m-1} d_k z^k. \quad (1.3)$$

Коэффициенты этих полиномов, вообще говоря, комплексные постоянные, причем $a_n = 1$ и $b_m \neq 0$.

Подставляя $P(z)$, $Q(z)$, $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ из (1.2) и (1.3) в (1.1), получим систему алгебраических уравнений

$$A\alpha = \beta, \quad (1.4)$$

где A — квадратная матрица порядка $m+n$, элементами которой являются линейные комбинации коэффициентов полиномов $P(z)$ и $Q(z)$, а α и β — $(m+n)$ -мерные вектор-столбцы $\alpha = (c_0, \dots, c_{n-1}, d_0, \dots, d_{m-1})$ и $\beta = (1, 0, \dots, 0)$.

Достаточно показать, что $\det A \neq 0$. Предположим обратное. Тогда однородное уравнение $AC = 0$ имеет ненулевое решение $c = (c_0, \dots, c_{n-1}, d_0, \dots, d_{m-1})$ и полиномы в (1.3) с этими коэффициентами удовлетворяют тождеству

$$P(z)Q_0(z) + Q(z)P_0(z) \equiv 0. \quad (1.5)$$

Ясно, что хотя бы один из полиномов $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ тождественно не равен нулю. Для определенности, пусть $P_0(z) \not\equiv 0$ и пусть z_0 — один из корней полинома $P(z)$. По предположению имеем $Q(z_0) \neq 0$.

Подставляя $z = z_0$ в (1.5) получим $P_0(z_0) = 0$. Полиномы $P(z)$ и $P_0(z)$ представим в виде

$$P(z) = (z - z_0)^{n_0} R(z), \quad P_0(z) = (z - z_0)^{m_0} R_0(z), \quad (1.6)$$

где n_0 и m_0 — некоторые натуральные числа, а $R(z)$ и $R_0(z)$ — некоторые полиномы такие, что $R(z_0) \neq 0$ и $R_0(z_0) \neq 0$.

Подставляя $P(z)$ и $P_0(z)$ из (1.6) в (1.5), получим

$$Q_0(z) = - \frac{Q(z) R_0(z) (z - z_0)^{m_0 - n_0}}{R(z)}. \quad (1.7)$$

Так как полином $Q_0(z)$ непрерывен в точке z_0 и $Q(z_0) \neq 0$, $R_0(z_0) \neq 0$ и $R(z_0) \neq 0$, то из (1.7) имеем

$$m_0 \geq n_0, \quad (1.8)$$

а это означает, что полином $P_0(z)$ имеет по крайней мере n корней (учитывая кратности). Это невозможно, так как по предположению порядок полинома $P_0(z)$ не превышает $n - 1$ и $P_0(z) \not\equiv 0$. Из полученного противоречия следует, что $\det A \neq 0$ и система (1.4) имеет единственное решение. Лемма 1.1 доказана.

Пусть теперь $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы порядка n и m ($m \geq n$) соответственно, не имеющие общих корней. Мы получим равенство (1.1) при помощи алгоритма Евклида (см. [2]). Имеем

$$P(z) = Q(z) R_0(z) + r_1(z), \quad (1.9)$$

$$Q(z) = r_1(z) R_1(z) + r_2(z), \quad (1.10)$$

$$r_j(z) = r_{j+1}(z) R_{j+1}(z) + r_{j+2}(z), \quad j = 1, \dots, k, \quad (1.11)$$

где $R_0(z), \dots, R_{k+1}(z), r_1(z), \dots, r_{k+1}(z)$ – полиномы такие, что $r_{k+2}(z) \equiv C \neq 0$, причем

$$\deg r_1(z) < \deg Q(z), \quad (1.12)$$

$$1 \leq \deg r_{j+1}(z) < \deg r_j(z). \quad (1.13)$$

Из соотношений (1.9)–(1.11) полиномы $r_j(z)$ ($j = 1, \dots, k + 2$) определяются единственным образом :

$$r_1(z) = P(z) - Q(z) R_0(z), \quad (1.14)$$

$$r_j(z) = P(z) Q_j(z) + Q(z) P_j(z), \quad j = 2, \dots, k + 2, \quad (1.15)$$

где $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ – некоторые полиномы.

Так как $r_{k+2}(z) \equiv C \neq 0$, то равенство (1.15) при $j = k + 2$ можно записать в виде

$$P(z) Q_0(z) + Q(z) P_0(z) \equiv 1, \quad (1.16)$$

где

$$Q_0(z) = \frac{Q_{k+2}(z)}{C}, \quad P_0(z) = \frac{P_{k+2}(z)}{C}. \quad (1.17)$$

Покажем, что

$$\deg Q_0(z) < \deg Q(z), \quad \deg P_0(z) < \deg P(z). \quad (1.18)$$

Методом индукции можно доказать, что в (1.15) порядки полиномов $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ определяются формулами

$$\deg P_j(z) = \sum_{\nu=0}^{j-1} \deg R_\nu(z), \quad j = 2, \dots, k + 2, \quad (1.19)$$

$$\deg Q_j(z) = \sum_{\nu=1}^{j-1} \deg R_\nu(z), \quad j = 2, \dots, k+2. \quad (1.20)$$

Из (1.9)–(1.11) имеем

$$\deg P(z) = \deg Q(z) + \deg R_0(z), \quad (1.21)$$

$$\deg Q(z) = \deg r_1(z) + \deg R_1(z), \quad (1.22)$$

$$\deg r_j(z) = \deg r_{j+1}(z) + \deg R_{j+1}(z), \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.23)$$

Суммируя левые и правые части (1.21)–(1.23), получим

$$\deg P(z) = \deg r_{k+1}(z) + \sum_{j=0}^{k+1} \deg R_j(z). \quad (1.24)$$

Подставляя $\deg P(z)$ из (1.21) в (1.24), получим

$$\deg Q(z) = \deg r_{k+1}(z) + \sum_{j=1}^{k+1} \deg R_j(z). \quad (1.25)$$

Так как $\deg r_{k+1}(z) \geq 1$, то из равенств (1.19), (1.20) при $j = k+2$ и (1.17), (1.24) и (1.25) имеем $\deg P(z) > \deg P_{k+2}(z) = \deg P_0(z)$, $\deg Q(z) > \deg Q_{k+2}(z) = \deg Q_0(z)$, откуда следует (1.18).

Пусть теперь $P(z)$, $Q(z)$, $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ – полиномы (1.2) и (1.3), и пусть A – матрица, входящая в уравнение (1.4). Единственным ограничением, наложенным на $P(z)$ и $Q(z)$, являются условия $a_n \neq 1$ и $b_m \neq 0$.

Лемма 1.2. Полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней тогда и только тогда, когда

$$\det A \neq 0. \quad (1.26)$$

Доказательство : Пусть $\det A \neq 0$. Тогда имеет место тождество (1.1), где $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ определяются формулой (1.3), а $\alpha = (c_0, \dots, c_{n-1}, d_0, \dots, d_{m-1})$ – решение системы уравнений (1.4). Из тождества (1.1) следует, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней.

Предположим теперь, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих корней. Для заключения, что $\det A \neq 0$ достаточно применить доказательство Леммы 1.1. Лемма 1.2 доказана.

Пусть $P(z)$ – полином порядка n и имеет только простые корни, и пусть $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ – полиномы порядка $n-1$ и $n-2$, соответственно, удовлетворяющие

(1.1) при $Q(z) = P'(z)$. Пусть $a_0, \dots, a_n$ ($a_n = 1$) и $c_0, \dots, c_{n-1}$ — коэффициенты полиномов $P(z)$ и $P_0(z)$, соответственно. Положим

$$\mu = 1 + \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad B = \sum_{k=1}^{n-1} |c_k| \mu, \quad (1.27)$$

$$B_1 = \sum_{k=2}^n \sum_{j=k}^n \frac{j(j-1)\dots(j-(k-1))}{k!} |a_j| \mu^{j-k}, \quad (1.28)$$

$$\alpha = \min \left(1, \frac{1}{B B_1} \right). \quad (1.29)$$

Лемма 1.3. Пусть $P(z)$ — полином порядка n , имеющий только простые корни. Тогда

$$|P'(z_k)| \geq \frac{1}{B}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.30)$$

$$|z_j - z_k| \geq \alpha, \quad j \neq k, \quad (j, k = 1, \dots, n). \quad (1.31)$$

Доказательство : Подставляя в (1.1) $z = z_k$ и используя $P(z_k) = 0$ и $Q(z) = P'(z)$, получим

$$P'(z_k) P_0(z_k) = 1. \quad (1.32)$$

Из (1.32) имеем $P_0(z_k) \neq 0$ и

$$P'(z_k) = \frac{1}{P_0(z_k)}. \quad (1.33)$$

Корни полинома $P(z)$ удовлетворяют неравенству (см. [2])

$$|z_k| \leq \mu, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.34)$$

Таким образом, (1.30) следует из (1.33) и (1.34). Разлагая полином $P(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_1 , получим

$$P(z) = P(z_1) + \frac{P'(z_1)}{1!}(z - z_1) + \dots + \frac{P^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n \quad (1.35)$$

и подставим $z = z_2$. Так как $P(z_1) = P(z_2) = 0$ и $z_1 \neq z_2$, то

$$P'(z_1) = - \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(z_1)}{k!} (z_2 - z_1)^{k-1}. \quad (1.36)$$

Пусть $|z_1 - z_2| \leq 1$. Согласно (1.36) имеем

$$|P'(z_1)| \leq |z_2 - z_1| \sum_{k=2}^n \frac{|P^{(k)}(z_1)|}{k!}. \quad (1.37)$$

Ясно, что

$$P^{(k)}(z) = \sum_{j=k}^n j(j-1)\dots(j-(k-1)) a_k z^{j-k}. \quad (1.38)$$

Из (1.34) и (1.38) следует, что

$$\sum_{k=2}^n \frac{|P^{(k)}(z_1)|}{k!} \leq B_1. \quad (1.39)$$

Из неравенств (1.30), (1.37) и (1.39) имеем

$$|z_1 - z_2| \geq (B B_1)^{-1}. \quad (1.40)$$

Лемма (1.3) доказана.

Пусть $z_1, \dots, z_n$ — корни полинома $P(z)$ (1.2) и $a_n = 1$. Положим

$$\rho(P, z) = \min_{k=1, \dots, n} |z - z_k|.$$

Лемма 1.4. Имеет место оценка

$$\rho(P, z) \leq \sqrt[n]{|P(z)|}. \quad (1.41)$$

Доказательство : следует из $P(z) = (z - z_1)\dots(z - z_n)$.

§2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КОРНИ КАК КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим уравнение

$$P(z) \equiv z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (2.1)$$

Сначала рассмотрим случай, когда полином $P(z)$ имеет только простые корни (ср. с Леммой 1.2).

Пусть

$$M = n \mu^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k |a_k| \mu^{k-1}, \quad (2.2)$$

где μ определяется формулой (1.27).

Ясно, что

$$\max_{|z| \leq \mu} |P'(z)| \leq M. \quad (2.3)$$

Разделим замкнутый круг $|z| \leq \mu$ на N замкнутых частей $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, диаметры которых не превышают δ . Число δ мы выберем ниже. Заметим, что $\sigma_1, \dots, \sigma_N$

могут пересекаться. Ясно, что корень z_0 полинома $P(z)$ принадлежит некоторой части σ_j . Поэтому, взяв $\xi_k \in \sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, можем записать

$$|P(\xi_j)| \leq |P(\xi_j) - P(z_0)| \leq |\xi_j - z_0| \max_{|z| \leq \mu} |P'(z)| \leq M \delta, \quad (2.4)$$

откуда получим

$$|P(\xi_j)| < 2 M \delta. \quad (2.5)$$

Вычисляя последовательно значения $|P(z)|$ в точках $\xi_1, \dots, \xi_N$, получим точку ξ_j , удовлетворяющую неравенству (2.5). Согласно (1.41) существует хотя бы один корень полинома $P(z)$, принадлежащий кругу

$$|z - \xi_j| < \sqrt[3]{2 M \delta}. \quad (2.6)$$

Теперь число $\delta > 0$ выберем так, чтобы

$$2 \sqrt[3]{2 M \delta} < \alpha, \quad (2.7)$$

где α определяется формулой (1.29). Из (1.31) и (2.7) следует, что в замкнутом круге (2.6) полином $P(z)$ имеет не более одного корня. Следовательно, полином $P(z)$ имеет только один корень в круге (2.6) и отличен от нуля на границе этого круга. Пусть z_1 – корень полинома $P(z)$, принадлежащий кругу (2.6). Согласно теореме о вычетах имеем

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - \xi_j| = r} \frac{z P'(z)}{P(z)} dz, \quad (2.8)$$

где $r = \sqrt[3]{2 M \delta}$. Так как $P(z_1) = 0$, то из (1.35) имеем

$$P(z) = (z - z_1) Q(z), \quad \text{где} \quad Q(z) = \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^{k-1}. \quad (2.9)$$

Полином $P(z)$ имеет только простые корни. Согласно (2.9), это справедливо для $Q(z)$ и $Q(z_1) \neq 0$. Аналогично можно найти все решения уравнения (2.1) и представить их в виде (0.1).

Рассмотрим теперь случай, когда полином $P(z)$ имеет кратные корни. Тогда $P(z)$ и $P'(z)$ имеют отличный от постоянного наибольший общий делитель $P_0(z)$, который может быть найден с помощью алгоритма Евклида (1.9)–(1.11), где $Q(z) \equiv P'(z)$, $r_{j+2} \equiv C = 0$ и $R_{k+1}(z) = P_0(z)$. Полином $Q(z)$, определенный равенством $P(z) = P_0(z) Q(z)$, можно представить в виде $Q(z) = C(z - z_1) \dots (z -$

z_m), где $z_1, \dots, z_m$ – корни полинома $P(z)$ (не считая кратности), а $C \neq 0$ – постоянная. Таким образом, полином $Q(z)$ имеет только простые корни.

Решая уравнение $Q(z) = 0$, получим все корни полинома $P(z)$ (не считая кратности). Пусть γ_k – окружность с центром в точке z_k и радиусом

$$0 < r_k < \min |z_k - z_j|, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Минимум в (2.10) берется по всем $j = 1, \dots, n, j \neq k$. Пусть $z_1, \dots, z_m$ – корни полинома $P(z)$ и $n_1, \dots, n_m$ – соответствующие кратности: $n_1 + \dots + n_m = n$.

Согласно теореме о вычетах, имеем (см. [3])

$$n_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{P'(z)}{P(z)} dz, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.11)$$

откуда следует решение задачи для произвольного полинома $P(z)$.

Теперь укажем более эффективный метод решения уравнения (2.1) при $5 \leq n \leq 9$.

Этот метод проиллюстрируем на примере уравнения 5-го порядка:

$$P_5(z) \equiv z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \quad (2.12)$$

1. Предположим, что полином $P_5(z)$ имеет кратные корни. Это означает, что полиномы $P_5(z)$ и $P'_5(z)$ имеют отличный от постоянного наибольший общий делитель $P_0(z)$. Тогда

$$P_5(z) = P_0(z) Q_0(z), \quad (2.13)$$

где полиномы $P_0(z)$ и $Q_0(z)$ можно записать в явном виде и их порядок не выше четырех. Таким образом, в этом случае уравнение (2.12) можно решать квадратурой.

2. Предположим, что коэффициенты полинома $P_5(z)$ вещественны. Тогда $P_5(z)$ имеет хотя бы один вещественный корень. В §3 указан простой метод нахождения всех вещественных корней таких полиномов. Пусть $z_1, \dots, z_m$ – вещественные корни полинома $P(z)$. Предположим, что $1 \leq m < 5$. (При $m = 5$ уравнение (2.12) решено полностью в предыдущем пункте). Имеем $P(z) = (z - z_1) \dots (z - z_m) Q(z)$, где $Q(z)$ – полином порядка $5 - m$. Корни полинома $Q(z)$ можно определить квадратурой.

3. Предположим, что коэффициенты полинома $P_5(z)$ – произвольные комплексные числа и $P_5(z)$ имеет только простые корни. Не умоляя общности можно считать, что $a_0 \neq 0$. Положим

$$r_0 = \sqrt[5]{|a_0|}, \quad M_0 = 5 r_0^4 + \sum_{k=1}^4 c_k |a_k| r_0^{k-1}, \quad (2.14)$$

$$\xi_k = r_0 \exp \frac{2\pi k i}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.15)$$

где m – некоторое натуральное число такое, что

$$m \geq \frac{64\pi r_0 M_0}{\alpha^5}, \quad (2.16)$$

а α определяется формулой (1.29) при $n = 5$ и $P(z) = P_5(z)$.

Ясно, что $|\xi_k| = r_0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Положим

$$\omega_m = \min_{k=0, \dots, m-1} \{|P_5(\xi_k)|\}. \quad (2.17)$$

Существует индекс j ($0 \leq j \leq m-1$) такой, что

$$\omega_m = |P_5(\xi_j)|. \quad (2.18)$$

Согласно Лемме 1.4, $P_5(z)$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий замкнутому кругу $|z - \xi_j| \leq \sqrt[5]{\omega_m}$. Сначала предположим, что $\sqrt[5]{\omega_m} < \frac{\alpha}{2}$. Согласно неравенству (1.31), полином $P_5(z)$ имеет не более одного корня в замкнутом круге $|z - \xi_j| \leq \rho$, где ρ – произвольное фиксированное число такое, что $\sqrt[5]{\omega_m} < \rho < \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $P_5(z)$ имеет только один корень в круге $|z - \xi_j| < \rho$ и отличен от нуля на границе этого круга. Этот корень полинома $P_5(z)$ определяется формулой (2.8), где $P(z) = P_5(z)$ и $r = \rho$. Остальные корни полинома $P_5(z)$ можно найти, используя представление (2.9).

Пусть теперь

$$\sqrt[5]{\omega_m} \geq \frac{\alpha}{2}. \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) получим

$$|P_5(\xi_k)| \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^5, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (2.20)$$

Для заданной точки z , $|z| = r_0$ возьмем точку ξ_j из (2.15) такую, что

$$|z - \xi_j| \leq \frac{\pi r_0}{m}. \quad (2.21)$$

Следовательно

$$|P_5(z)| \geq |P_5(\xi_j)| - |P_5(\xi_j) - P_5(z)| \geq |P_5(\xi_j)| - |z - \xi_j| \max_{|\tau|=r_0} |P_5'(\tau)|. \quad (2.22)$$

Ясно, что

$$\max_{|z| \leq r_0} |P_5'(z)| \leq M_0, \quad (2.23)$$

где M_0 определяется формулой (2.14).

Из (2.21)–(2.23) имеем

$$|P_3(z)| \geq \frac{\alpha^5}{64} \quad \text{при} \quad |z| = r_0. \quad (2.24)$$

Поэтому число n_0 корней полинома $P_3(z)$ в круге $|z| < r_0$ определяется формулой (см. [3])

$$n_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_0} \frac{P'_3(z)}{P_3(z)} dz. \quad (2.25)$$

Пусть $z_1, \dots, z_5$ – корни полинома $P_5(z)$ такие, что имеет место представление

$$P_5(z) = (z - z_1) \dots (z - z_5). \quad (2.26)$$

Подставляя $z = 0$ в (2.26), получим

$$|z_1 \dots z_5| = |a_0| = r_0^5. \quad (2.27)$$

Из неравенства (2.24) следует $|z_k| \neq r_0$, $k = 1, \dots, 5$. Отсюда и в силу (2.27) получим $1 \leq n_0 \leq 4$.

Пусть $n_0 = 1$. Корень z_1 полинома $P_3(z)$ в круге $|z| < r_0$ определяется формулой (2.8), где $\xi_j = 0$, $r = r_0$, $P(z) = P_3(z)$. Представляя $P_3(z)$ в виде (2.9) находим остальные корни полинома $P_3(z)$.

Пусть $n_0 = 2$. Положим

$$P_2(z) = (z - z_1)(z - z_2) \equiv z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2, \quad (2.28)$$

где z_1 и z_2 – корни полинома $P_3(z)$ такие, что $|z_1| < r_0$, $|z_2| < r_0$. Полагая

$$b_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_0} \frac{z^j P'_3(z)}{P_3(z)} dz, \quad j = 1, 2$$

и используя теорему о вычетах, получим

$$b_1 = z_1 + z_2, \quad b_2 = z_1^2 + z_2^2, \quad \text{откуда} \quad z_1 z_2 = \frac{1}{2}(b_1^2 - b_2). \quad (2.29)$$

Подставляя $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$ из (2.29) в (2.28), получим

$$P_2(z) = z^2 + d_1 z + d_2, \quad (2.30)$$

где $d_1 = -b_1$ и $d_2 = \frac{1}{2}(b_1^2 - b_2)$.

Из (2.26) находим

$$P_3(z) = (z^2 + d_1 z + d_2)(z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0), \quad (2.31)$$

где c_0, c_1, c_2 — постоянные. Приравнявая коэффициенты при z^j ($j = 2, 3, 4$) в (2.31), получим систему уравнений

$$c_2 + d_1 = a_4, \quad c_1 + c_2 d_1 + d_0 = a_3, \quad c_0 + c_1 d_1 + c_2 d_0 = a_2. \quad (2.32)$$

Из (2.32) постоянные c_0, c_1, c_2 определяются однозначно. Следовательно, в этом случае уравнение $P_3(z) = 0$ сводится к квадратному и кубическому уравнениям. Пусть теперь $n_0 = 3$ или 4. Заменой переменных $z = \frac{\tau_0^2}{\xi}$ этот случай сводится к случаю $n_0 = 2$ или 1.

Аналогично можно решать уравнение (2.1) произвольной степени n , однако при $n \geq 10$ эффективность этого метода резко уменьшается.

§3. НАХОЖДЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе укажем эффективный метод нахождения вещественных корней уравнения (2.1) с вещественными коэффициентами.

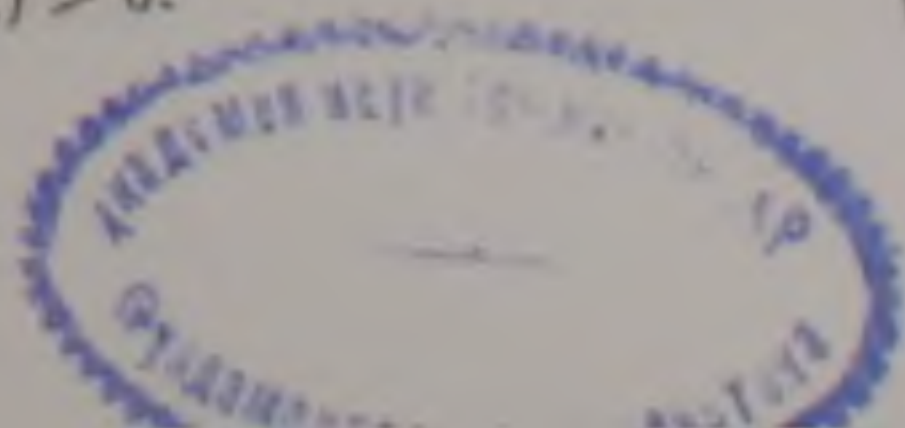
Пусть сначала полином $P(z)$ имеет только простые корни. Согласно Лемме 1.2, при минимальном расстоянии d между корнями имеем $d \geq d_0$, где d_0 — положительная постоянная, зависящая от коэффициентов полинома $P(z)$. Известно, что вещественные корни полинома $P(z)$ принадлежат отрезку $[-A, A]$, где $A = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Разделим $[-A, A]$ на N равных частей, длины которых меньше d_0 . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_N$ — точки деления этих отрезков $x_1 = -A, x_N = A$. Если $P(x_k) P(x_{k+1}) < 0$, то внутри интервала (x_k, x_{k+1}) полином $P(z)$ имеет хотя бы один корень. Так как $x_{k+1} - x_k < d_0$, то полином $P(z)$ имеет ровно один корень на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$.

Пусть τ_k — центр интервала (x_k, x_{k+1}) . Так как $x_{k+1} - x_k < d_0$, то полином $P(z)$ имеет один корень в круге с центром τ_k и радиусом $r_0 = \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$ и отличен от нуля во всех точках границы этого круга. Ясно, что этот корень ξ_k является вещественным и

$$\xi_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - \tau_k| = r_0} \frac{z P'(z)}{P(z)} dz.$$

Пусть (x_k, x_{k+1}) — интервал такой, что

$$P(x_k) > 0, \quad P(x_{k+1}) > 0. \quad (3.1)$$



На этом интервале полином $P(z)$ не имеет корней. Предположим обратное, пусть $P(\tau) = 0$ для некоторой точки $\tau \in (x_k, x_{k+1})$. Так как $x_{k+1} - x_k < d_0$, то в интервале (x_k, x_{k+1}) полином $P(z)$ не имеет других корней. Поэтому из (3.1) следует, что

$$P(x) > 0, \quad x \in (x_k, x_{k+1}), \quad x \neq \tau. \quad (3.2)$$

Из равенства $P(\tau) = 0$ и неравенства (3.2) следует, что τ является точкой минимума полинома $P(x)$ в интервале (x_k, x_{k+1}) . Поэтому, $P'(\tau) = 0$. Следовательно, τ является кратным корнем полинома $P(z)$. Полученное противоречие доказывает, что $P(z)$ не имеет корней в интервале (x_k, x_{k+1}) .

Предположим теперь, что $P(x_j) < 0$, $P(x_{j+1}) < 0$. Тогда аналогично докажем, что полином $P(z)$ не имеет корней в интервале (x_k, x_{k+1}) .

Пусть $x_{m_1}, \dots, x_{m_k}$ — точки раздела отрезка $[-A, A]$ такие, что $P(x_{m_j}) = 0$, $j = \overline{1, k}$, и пусть $(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})$ — интервалы, где $P(x_{n_k}) P(x_{n_{k+1}}) < 0$. Выше мы получили формулу нахождения корней $\xi_1, \dots, \xi_p$ в этих интервалах. Следовательно, точки $x_{m_1}, \dots, x_{m_k}, \xi_1, \dots, \xi_p$ — это все вещественные корни полинома $P(z)$.

В случае, когда полином $P(z)$ имеет кратные корни, его можно представить в виде $P(z) = P_0(z) Q(z)$, где $P_0(z)$ — наибольший общий делитель полиномов $P(z)$ и $P'(z)$, а $Q(z)$ имеет простые корни, совпадающие с корнями полинома $P'(z)$. Так как коэффициенты полинома $P(z)$ вещественны, то коэффициенты полиномов $P_0(z)$ и $Q(z)$ также вещественны. Выше мы указали метод нахождения всех вещественных простых корней $z_1, \dots, z_m$ полинома $Q(z)$. Кратности корней $z_1, \dots, z_m$ полинома $P(z)$ определяются формулой (2.11). Таким образом, мы находим все вещественные корни полинома $P(z)$ и их кратности.

ABSTRACT. In the paper we derive formulas representing the roots of an arbitrary polynomial of order n as contour integrals. They are applied for nsolution of transcendental algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Курс Высшей Математики, том I, Наука, М., 1971.
2. А. Г. Курош, Курс Высшей Алгебры, Наука, М., 1974.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.

4 августа 1999

Армянский государственный
инженерный университет

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Е. Товмасян, В. С. Захарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье изучаются несколько функциональных уравнений с особенностями и выводятся необходимые и достаточные условия для их разрешимости в классе аналитических функций. Получены формулы для решений в терминах сходящихся рядов. Результаты применяются для эффективного решения некоторых нелокальных краевых задач для уравнения Лапласа.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D^+ – односвязная ограниченная область в комплексной плоскости с достаточно гладкой границей Γ , и пусть D^- – дополнение замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \cup \Gamma$ до полной комплексной плоскости. В области D^+ рассмотрим “сингулярное” функциональное уравнение

$$z^n \varphi(z) - \alpha(z) \overline{\varphi(\beta(z))} = f(z), \quad z \in D^+, \quad (0.1)$$

где $z = x + iy$, n – натуральное число, называемое порядком особенности, $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ – аналитические функции в D^+ . Наша задача – найти функцию $\varphi(z)$, аналитическую в D^+ . Черта над комплексным числом (или комплекснозначной функцией) означает комплексное сопряжение. Предположим, что $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $f(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D^+}$ и

$$\overline{\beta(z)} \in D^+ \quad \text{при} \quad z \in \overline{D^+}, \quad (0.2)$$

$$\beta(0) = 0, \quad \alpha(0) \neq 0.$$

Уравнение (0.1) при $f \equiv 0$ называется однородным.

Будем говорить, что функция $\psi_j(z)$ исчезает на бесконечности, если $\psi_j(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Если неговорено противное, линейная зависимость или независимость понимается в поле вещественных чисел. В статье доказывается следующая теорема.

Теорема 0.1. Если $\beta'(0) \neq 0$, то однородное уравнение (0.1) имеет только нулевое решение. Необходимым и достаточным условием для разрешимости неоднородного уравнения (0.1) является условие

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\Gamma} f(z) \psi_j(z) dz \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad (0.3)$$

где $\psi_1(z), \dots, \psi_{2n}(z)$ — некоторые линейно независимые функции, аналитические в D^- , исчезающие на бесконечности. Эти функции зависят от натурального числа n и от функций $\alpha(z), \beta(z)$, но не зависят от $f(z)$. Статья состоит из четырех параграфов. В §1 доказывается Теорема 0.1. В §2 указывается метод решения уравнения (0.1). В §3 рассматривается уравнение (0.1) в случае $n \geq 1$ и $\beta'(0) = 0$. В §4 результаты применяются к нелокальным краевым задачам для уравнения Лапласа.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ (0.1)

В этом параграфе полагаем, что $n \geq 1$, $\beta'(0) \neq 0$, $\alpha(0) \neq 0$. Сначала докажем, что однородное уравнение

$$z^n \varphi(z) - \alpha(z) \overline{\varphi(\beta(z))} = 0 \quad (1.1)$$

имеет только нулевое решение. Пусть $\varphi(z)$ — решение уравнения (1.1). Подставляя $z = 0$ в (1.1), получим $\alpha(0) \overline{\varphi(0)} = 0$. Поэтому $\varphi(0) = 0$. Дифференцируя обе части уравнения (1.1) по z и используя $\varphi(z) = 0$, получим $\varphi'(0) = 0$. Аналогично получим, что $\varphi^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$. Рассмотрим краевую задачу Гильберта (задача сопряжения, [1]):

$$z^n \varphi(z) - \alpha(z) \overline{\varphi(\beta(z))} = \omega(z) + g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (1.2)$$

где $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ — искомые функции, аналитические в D^+ и D^- , соответственно, а $g(z)$ — заданная функция на контуре Γ . Предположим, что $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ непрерывны в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ соответственно, $\omega(z)$ исчезает на бесконечности, а $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ .

Прежде чем использовать несколько результатов из [1], докажем, что однородная задача (1.2) (при $g(z) \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Пусть $(\varphi(z), \omega(z))$ – решение однородной задачи (1.2). Из (1.2) при $g(z) \equiv 0$ следует, что функция $\omega(z)$ является аналитическим продолжением аналитической функции $z^n \varphi(z) - \alpha(z) \overline{\varphi(\beta(z))}$ через контур Γ на всю комплексную плоскость. Так как функция $\omega(z)$ исчезает на бесконечности, то по теореме Лиувилля (см. [2]) имеем, что $\omega(z) = 0$, $z \in D^-$, а решением уравнения

$$z^n \varphi(z) - \alpha(z) \overline{\varphi(\beta(z))} = 0, \quad z \in D^+$$

является только $\varphi(z) \equiv 0$. Следовательно, однородная задача (1.2) имеет только нулевое решение. Индекс задачи (1.2) равен $(-2n)$ (см. [1]). Так как однородная задача (1.2) имеет только нулевое решение, то (см. [1]) для разрешимости однородной задачи (1.2) необходимо и достаточно выполнение $2n$ условий вида

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} g(z) \omega_j(z) dz = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (1.3)$$

где $\omega_1(z), \dots, \omega_{2n}(z)$ – некоторые линейно независимые функции на Γ , независимые от $g(z)$.

В (1.3) возьмем $g(z) = c \omega_0(z)$, где c – комплексная постоянная, а $\omega_0(z)$ – аналитическая функция в D^- , непрерывная в замкнутой области $\overline{D^-}$ и исчезающая на бесконечности. Ясно, что для такой функции $g(z)$ задача (1.2) имеет решение $\varphi(z) = 0$, $\omega(z) = -c \omega_0(z)$. Следовательно, функция $g(z) = c \omega_0(z)$ удовлетворяет условиям (1.3). Подставляя $g(z) = \omega_0(z)$ и $g(z) = i \omega_0(z)$ в (1.3), получим

$$\int_{\Gamma} \omega_0(z) \omega_j(z) dz = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что $\omega_j(z)$ является граничным значением аналитической в D^- функции, исчезающей на бесконечности (см. [1]).

Докажем теперь, что условия (1.3) при $g(z) = f(z)$ являются необходимыми и достаточными для разрешимости уравнения (0.1). Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (0.1). Тогда задача (1.2) при $g(z) = f(z)$ имеет решение $(\varphi(z), 0)$. Следовательно, функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условиям (1.3). И обратно, пусть функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условиям (1.3). Тогда задача (1.2) имеет решение $(\varphi(z), \omega(z))$. Из (1.2) при $g(z) = f(z)$ следует, что $\omega(z)$ – аналитическое

где

$$K(\Phi_0) = \alpha(z) z^{-n} \left[\overline{\Phi_0(\beta(z))} - \sum_{k=m-n}^{m-1} \frac{\overline{\Phi_0^{(k)}(0)}}{k!} \beta^k(z) \right], \quad F_1(z) = z^{-n} F_0(z). \quad (2.17)$$

Из (2.15) следует, что $F_1^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-n-1$. Если $\Phi_0(z)$ удовлетворяет условиям (2.10), то $K(\Phi_0)$ также удовлетворяет этим условиям. Мы ищем решение уравнения (2.16) в классе аналитических в области D^+ функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяющих условиям (2.10). Норму функции $\Phi_0(z)$ в этом классе определим формулой

$$\|\Phi_0(z)\| = \max_{z \in \overline{D^+}} |\Phi_0(z)|.$$

Тогда этот класс будет банаховым пространством, которое обозначим через B_{m-n} . Оператор K , определяемый формулой (2.17), является ограниченным оператором, отображающим B_{m-n} в B_{m-n} .

Таким образом, решение уравнения (0.1) определяется формулой (2.12), где $\Phi_0(z)$ — решение уравнения (2.16), удовлетворяющее условиям (2.11), а постоянные $c_1, \dots, c_{m-1}$ определяются формулой (2.8).

2. Сначала предположим, что область D^+ является кругом $|z| \leq R$. Покажем, что если число m достаточно большое, то уравнение (2.16) имеет единственное решение и его можно найти методом последовательных приближений.

Для оценивания нормы оператора K положим

$$W(z) = \Phi_0(z) - \sum_{k=m-n}^{m-1} \frac{\overline{\Phi_0^{(k)}(0)}}{k!} z^k, \quad (2.18)$$

где $\Phi_0(z) \in B_{m-n}$. Ясно, что $W^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Согласно принципу максимума модуля (см. [2])

$$|W(z) z^{-m}| \leq \max_{|t|=R} |W(t)| R^{-m}, \quad z \leq R. \quad (2.19)$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$\left| \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{\|\Phi_0\|}{R^k}. \quad (2.20)$$

Из (2.18) и (2.20) имеем

$$\|W\| \leq (n+1) \|\Phi_0\|. \quad (2.21)$$

Из (2.19) и (2.21) следует, что $|W(z)| \leq (n+1) R^{-m} \|\Phi_0\| |z|^m$, $|z| \leq R$ и

$$|W(\overline{\beta(z)})| \leq (n+1) R^{-m} \|\Phi_0\| |\beta(z)|^m, \quad |z| \leq R. \quad (2.22)$$

Из условия (0.2) вытекает $|\beta(z)| \leq R_0 \leq R$. Так как $\beta(0) = 0$, то

$$\left| \frac{\beta(z)}{z} \right| \leq \max_{|z|=R} \left| \frac{\beta(z)}{z} \right| \leq \frac{R_0}{R}.$$

Следовательно

$$|\beta(z)| \leq \mu |z|, \quad (2.23)$$

где $\mu = \frac{R_0}{R} < 1$. Из (2.22) и (2.23) имеем

$$|z^{-n} \overline{W(\beta(z))}| \leq (n+1) R^{-m} \|\Phi_0\| \mu^m |z|^{m-n}, \quad |z| \leq R. \quad (2.24)$$

Так как $|z| \leq R$, то в силу (2.24) можем записать

$$|z^{-n} \overline{W(\beta(z))}| \leq (n+1) R^{-n} \|\Phi_0\| \mu^m. \quad (2.25)$$

В силу (2.18) оператор K запишем в виде

$$K(\Phi_0) = \alpha(z) z^{-n} \overline{W(\beta(z))}. \quad (2.26)$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что $|K(\Phi_0)| \leq \|\alpha\| (n+1) R^{-n} \|\Phi_0\| \mu^m$.

Так как $0 < \mu < 1$, то для достаточно больших натуральных значений m имеем

$$\|\alpha\| (n+1) R^{-n} \mu^m < 1, \quad (2.27)$$

т.е. норма оператора K в соответствующем пространстве B_{m-n} меньше 1. Следовательно, в этом пространстве уравнение (2.16) имеет единственное решение, задаваемое рядом Неймана (см. [3])

$$\Phi_0(z) = F_1(z) + K(F_1) + K^2(F_1) + \dots, \quad (2.28)$$

где K^j — действие оператора K j раз.

Ряд (2.28) сходится равномерно в замкнутом круге $|z| \leq R$ и

$$|K^j(F_1)| \leq \frac{q_m^j \|F_1\|}{1 - q_m}, \quad |z| \leq R,$$

где q_m — левая часть неравенства (2.27). Условие (2.11) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left(c_k - \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \right) = 0, \quad k = m-n, \dots, m-1. \quad (2.29)$$

$$\operatorname{Im} \left(c_k - \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \right) = 0, \quad k = m - n, \dots, m - 1. \quad (2.30)$$

Подставляя c_j и $\Phi_0(z)$ из (2.8) и (2.28) в (2.29) и (2.30), получим

$$L_j(f) = 0, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad (2.31)$$

где $L_j(f)$ – линейные ограниченные функционалы, определенные на B_{m-n} . Следовательно, условия (2.31) являются необходимыми и достаточными для разрешимости уравнения (0.1). Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (2.31). Тогда решение уравнения (0.1) определяется формулой (2.12), где постоянные $c_1, \dots, c_{m-1}$ и функция $\Phi_0(z)$ определяются формулами (2.8) и (2.28), соответственно. Из Теоремы 0.1 следует, что функционалы $L_1, \dots, L_{2n}$ линейно независимы и условие (2.31) можно записать в виде (0.3).

3. Теперь рассмотрим уравнение (0.1) в произвольной односвязной области D^+ . Пусть $\beta(z)$ – аналитическая функция, входящая в уравнение (0.1) и D_k ($k = 0, 1, \dots$) – последовательность замкнутых областей, где $D_0 = \overline{D^+}$, а D_n – образ области D_{n-1} при отображении $\xi = \overline{\beta(z)}$ ($n = 0, 1, \dots$). Ясно, что $D_{k+1} \in D_k \in \overline{D^+}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Лемма 2.1. Последовательность $\mu_n = \max_{z \in D_n} |z|$ монотонно сходится к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

Лемма 2.2. Имеет место оценка $|\beta'(0)| < 1$.

В случае, когда область D является кругом $|z| < R$, Леммы 2.1 и 2.2 непосредственно следуют из (2.23). Общий случай можно свести к этому при помощи конформного отображения области D на круг $|z| < R$.

Теперь решим уравнение (0.1) в области D^+ . Согласно Лемме 2.2, область D^+ содержит круг $|z| < R$ такой, что $|\beta(z)| \leq q|z|$, $|z| \leq R$, где $0 < q < 1$ – постоянная. Поэтому условия (2.31) необходимы для разрешимости уравнения (0.1) в области D^+ . Предположим, что условия (2.31) выполняются и пусть $\varphi_0(z)$ – решение уравнения (0.1) в круге $|z| < R$, т.е.

$$\varphi_0(z) = z^{-n} (f(z) + \alpha(z) \overline{\varphi_0(\beta(z))}), \quad |z| < R. \quad (2.32)$$

При $z = 0$ правая часть равенства (2.32) понимается как предел этого выражения при $z \rightarrow 0$. При $0 < |z| < R$, из (2.32) следует, что этот предел равен $\varphi_0(0)$.

Следовательно, правая часть (2.32) аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$.

Определим последовательность функций $\varphi_k(z)$ рекуррентным соотношением

$$\varphi_k(z) = z^{-n} (f(z) + \alpha(z) \overline{\varphi_{k-1}(\beta(z))}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Из (2.32) и (2.33) имеем

$$\varphi_k(z) = \varphi_0(z), \quad |z| < R, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

По Лемме 2.1 существует натуральное число ν такое, что область D_ν принадлежит кругу $|z| < R$. Поэтому неравенства (2.32) и (2.34) имеют место в области D_ν .

Так как $\varphi_0(z)$ аналитична в D_ν , то из соотношений (2.33) и (2.34) следует, что функция $\varphi_1(z)$ аналитична в области $D_{\nu-1}$. Аналогично, при $k = 2$ из этих соотношений следует, что $\varphi_2(z)$ аналитична в $D_{\nu-2}$, и т.д.. Наконец получим, что $\varphi_\nu(z)$ аналитична в D^+ .

Теперь покажем, что $\varphi_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению (0.1), т.е.

$$z^{-n} \varphi_\nu(z) - \alpha(z) \overline{\varphi_\nu(\beta(z))} = f(z), \quad z \in D^+. \quad (2.35)$$

Обе части равенства (2.35) аналитичны в D^+ . Так как $\varphi_\nu(z) = \varphi_0(z)$ при $z \in D_\nu$ и $\varphi_0(z)$ удовлетворяет (0.1) в области D_ν , то заключаем, что (2.35) справедливо сперва в D_ν , а потом в D^+ .

Из (0.2) следует, что $\overline{\varphi_\nu(\beta(z))}$ аналитична в замкнутой области $\overline{D^+}$. Поэтому из (2.35) следует, что функция $\varphi_\nu(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и на контуре Γ удовлетворяет условию Гельдера. Следовательно, условие (2.31) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (0.1) в области $\overline{D^+}$ и функция $\varphi_\nu(z)$ является решением (0.1).

§3. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Пусть $n \geq 1$, $\alpha(0) \neq 0$ и

$$\beta^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1; \quad \beta^{(\nu)}(0) \neq 0, \quad (3.1)$$

где $\nu \geq 2$ – натуральное число.

1. Сначала рассмотрим однородное уравнение (1.1). Положим

$$q = \frac{n}{\nu - 1}, \quad p = \alpha(0) \left[\frac{\beta^{(\nu)}(0)}{\nu!} \right]^q. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Если q – натуральное число и $|p| = 1$, то однородное уравнение (1.1) имеет единственное линейно независимое решение. В остальных случаях это уравнение имеет только нулевое решение.

Доказательство : Пусть уравнение (1.1) имеет нетривиальное решение. Тогда это решение можно представить в виде

$$\varphi(z) = z^m \varphi_0(z), \quad (3.3)$$

где m – натуральное число, $\varphi_0(z)$ аналитична в D^+ , непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и $\varphi_0(0) \neq 0$. Из условия (3.1) следует

$$\beta(z) = z^\nu \beta_0(z), \quad \beta_0(0) = \frac{\beta^{(\nu)}(0)}{\nu!}, \quad (3.4)$$

где $\beta_0(z)$ аналитична в D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (3.3) в (1.1) и учитывая (3.4), получим

$$z^{n+m} \varphi_0(z) = z^{m\nu} \alpha_0(z) \overline{\varphi_0(\beta(z))} = 0, \quad z \in D^+, \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_0(z) = \alpha(z) \beta_0^m(z). \quad (3.6)$$

Так как $\varphi_0(0) \neq 0$ и $\alpha_0(0) \neq 0$, то точка $z = 0$ является $(n+m)$ -кратным нулем левой части (3.5) и $m\nu$ -кратным нулем правой части (3.5). Следовательно, $m+n = m\nu$. Отсюда следует, что

$$q \equiv \frac{n}{\nu-1} = m. \quad (3.7)$$

Следовательно, q есть натуральное число.

Разделив обе части (3.5) на z^{n+m} и учитывая (3.7), получим

$$\varphi_0(z) = \alpha_0(z) \overline{\varphi_0(\beta(z))}, \quad z \in D^+. \quad (3.8)$$

Подставляя $z = 0$ в (3.8), получим

$$\varphi_0(0) = \alpha_0(0) \overline{\varphi_0(0)} \quad \text{или} \quad \overline{\varphi_0(0)} = \overline{\alpha_0(0)} \varphi_0(0). \quad (3.9)$$

Из (3.9) имеем

$$\varphi_0(0)(1 - |\alpha_0(0)|^2) = 0. \quad (3.10)$$

Так как $\varphi_0(0) \neq 0$, то из (3.10) получим

$$|\alpha_0(0)| = 1. \quad (3.112)$$

Из (3.4), (3.6) и (3.11) имеем $|p| = 1$. Таким образом, для того, чтобы уравнение (1.1) имело нетривиальное решение, необходимо, чтобы q было натуральным числом и $|p| = 1$. Предположим, что эти условия выполняются. Тогда

$$\alpha_0(0) = p = e^{i\theta}, \quad (3.12)$$

где θ – аргумент числа p .

Умножая обе части (3.9) на $e^{-i\theta}$ и учитывая (3.12), получим

$$\varphi_0(0) e^{-i\theta/2} = e^{i\theta/2} \overline{\varphi_0(0)}. \quad (3.13)$$

Следовательно, $\varphi_0(0) e^{-i\theta/2} = c_0$, где c_0 – некоторая вещественная постоянная.

Таким образом, функцию $\varphi_0(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_0(z) = \varphi_0(0) + z \psi_0(z) = c_0 e^{i\theta/2} + z \psi_0(z), \quad (3.14)$$

где $\psi_0(z)$ аналитична в D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$. Подставляя $\varphi_0(z)$ из (3.14) в (3.8), получим

$$\psi_0(z) = b(z) \overline{\psi_0(\beta(z))} + c_0 g(z), \quad (3.15)$$

где

$$b(z) = \frac{\alpha_0(z) \beta(z)}{z}, \quad g(z) = \frac{\alpha_0(z) e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}{z}.$$

Из (3.1) и (3.12) следует, что функции $b(z)$ и $g(z)$ аналитичны в D^+ , непрерывны в $\overline{D^+}$ и $b(0) = 0$. Определим оператор K так: $K(g) \equiv b(z) \overline{g(\beta(z))}$. По Леммам 2.1 и 2.2, при любой вещественной постоянной c_0 уравнение (3.15) имеет единственное решение, определяемое рядом Неймана:

$$\psi_0(z) = c_0 (g + K(g) + K^2(g) + \dots). \quad (3.16)$$

Ряд в (3.16) абсолютно сходится в $\overline{D^+}$. Следовательно, общее решение уравнения (1.1) определяется формулами (3.3), (3.14) и (3.16), где c_0 – произвольная вещественная постоянная. Из этих формул следует, что уравнение (1.1) имеет единственное линейно независимое решение. Теорема 3.1 доказана.

2. Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (0.1) при $\beta'(0) = 0$. Решение уравнения (0.1) представим в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m-1} (c_k + i d_k) z^k + z^m \psi(z), \quad (3.17)$$

где c_j и d_j ($j = 0, 1, \dots, m-1$) – вещественные постоянные, $\psi(z)$ аналитична в D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$, а m – натуральное число, удовлетворяющее условию

$$m > q, \quad (3.18)$$

где q определяется формулой (3.2).

Неравенство (3.18) можно записать в виде

$$m + n < m \nu. \quad (3.19)$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (3.19) в (0.1), получим

$$z^{n+m} \psi(z) - \alpha(z) \beta^m(z) \overline{\psi(\overline{\beta(z)})} = F(z), \quad (3.20)$$

где

$$F(z) = f(z) - z^n \sum_{k=0}^{m-1} (c_k + i d_k) z^k + \alpha(z) \sum_{k=0}^{m-1} (c_k - i d_k) \beta^k(z). \quad (3.21)$$

Из (3.1) и (1.1) следует, что все производные левой части (3.20) до порядка $m + n - 1$ в точке $z = 0$ равны нулю. Следовательно, условие

$$F^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m + n - 1 \quad (3.22)$$

необходимо для разрешимости уравнения (3.20).

Условие (3.22) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} F^{(j)}(0) = 0, \quad \operatorname{Im} F^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m + n - 1. \quad (3.23)$$

Подставляя $F(z)$ из (3.21) в (3.23), получим систему алгебраических уравнений

$$A \alpha = b, \quad (3.24)$$

где $\alpha = (c_0, \dots, c_{m-1}, d_0, \dots, d_{m-1})$ – $2m$ -мерный вектор-столбец, b – $2(m+n)$ -мерный вектор-столбец с элементами $\operatorname{Re} f^{(k)}(0)$, $\operatorname{Im} f^{(k)}(0)$, ($k = 0, 1, \dots, m+n-1$), а A вполне определенная вещественная матрица размерности $2(m+n) \times 2m$. Элементы матрицы A не зависят от функции $f(z)$. Наряду с уравнением (3.24) рассмотрим однородное уравнение

$$B \beta = 0, \quad (3.25)$$

где B – транспонированная к матрице A , а β – искомый вещественный $2(m+n)$ -мерный вектор-столбец.

Обозначим через r ранг матрицы A . Однородное уравнение (3.24) (для $b = 0$) имеет $2(m+n) - r$ линейно независимых решений и (см. [4]) необходимым и достаточным условием разрешимости неоднородного уравнения (3.24) является следующее условие :

$$(b, \beta^k) = 0, \quad k = 1, \dots, 2(m+n) - r, \quad (3.26)$$

где β^k ($k = 1, \dots, 2(m+n) - r$) – линейно независимые решения уравнения (3.25), а (b, β^k) является скалярным произведением векторов b и β^k .

Следовательно, условия (3.26) необходимы для разрешимости уравнения (0.1). Предположим, что эти условия выполнены и $\alpha = (c_0, \dots, c_{m-1}, d_0, \dots, d_{n-1})$ является частным решением уравнения (3.24). Подставляя это решение в (3.17) находим, что $F(z)$ удовлетворяет условию (3.22). Следовательно, функция $F(z) z^{-n-m}$ – аналитическая в D^+ и непрерывная в замкнутой области $\overline{D^+}$. Обе части уравнения (3.20) разделив на z^{n+m} получим

$$\psi(z) = \alpha_0(z) \overline{\psi(\beta(z))} + F_0(z), \quad (3.27)$$

где $\alpha_0(z) = \alpha(z) \beta^m(z) z^{-n-m}$, $F_0(z) = F(z) z^{-n-m}$. Из условий (3.1) и (3.19) получаем $\alpha_0(0) = 0$. Определим оператор K_0 по формуле $K_0(\psi) = \alpha_0(z) \overline{\psi(\beta(z))}$. Как и (3.15), уравнение (3.27) имеет единственное решение, определяемое рядом Неймана

$$\psi(z) = F_0(z) + K_0(F_0) + K_0^2(F_0) + \dots \quad (3.28)$$

Подставляя $\psi(z)$ из (3.28) в (3.17) получим частное решение уравнения (0.1). Таким образом, условие (3.26) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (0.1). Так как уравнение (0.1) линейное (над полем действительных чисел), то общее решение уравнения (0.1) определяется формулой $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)$, где $\varphi_0(z)$ – частное решение неоднородного уравнения (0.1), а $\varphi_1(z)$ – общее решение однородного уравнения (0.1). Таким образом, для $f(0) = 0$ уравнение (0.1) полностью решено.

Теперь определим ранг матрицы A . Подставляя общее решение однородного уравнения (3.25) (для $b = 0$) в (3.17), аналогично покажем, что однородное уравнение (0.1) (для $f \equiv 0$) имеет $(2m - r)$ линейно независимых решений.

Отсюда и из Теоремы 3.1 следует, что если q – натуральное число и $|p| = 1$, то $r = 2m - 1$. В остальных случаях $r = 2m$.

Следовательно, если q – натуральное число и $|p| = 1$, то число линейно независимых решений уравнения (3.25) равно $2n + 1$. Во всех остальных случаях это число равно $2n$.

§4. НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Задача. Найти дважды непрерывно дифференцируемое вещественное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad z = x + iy, \quad (4.1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(z) - \alpha(z) u(\overline{\beta(z)}) = g(z), \quad |z| = 1, \quad (4.2)$$

где $\alpha(z)$, $g(z)$ – заданные вещественнозначные функции на Γ , а $\beta(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условиям $|\beta(z)| < 1$, $|z| \leq 1$, $\beta(0) = 0$.

Предполагается, что функция $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на окружности $|z| = 1$. $\beta(z)$ и $u(z)$ непрерывны в замкнутой области $|z| \leq 1$, а $\alpha(z)$ имеет вид

$$\alpha(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k z^k + \overline{c_k} \overline{z^k}), \quad (4.3)$$

где c_k ($k = 0, \dots, n$) – постоянные (c_0 – вещественная, а $c_n \neq 0$).

Известно, что любую непрерывную вещественнозначную функцию можно аппроксимировать функциями вида (4.3).

В [1] эта задача была решена методом, аналогичным методу решения сингулярных интегральных уравнений. Здесь предлагается более эффективный метод решения этой задачи. Функцию (4.3) можно записать в виде

$$\alpha(z) = \frac{Q(z)}{z^n}, \quad |z| = 1, \quad (4.4)$$

где

$$Q(z) = c_0 z^n + \sum_{k=1}^n (c_k z^{n+k} + \overline{c_k} z^{n-k}).$$

А решение уравнения Лапласа представим в виде (см. [2])

$$u(z) = b_{n-1} + \operatorname{Re}(z \varphi(z)), \quad (4.5)$$

где b_{n-1} — вещественная постоянная, а $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Подставляя (4.5) в (4.2) получим

$$\operatorname{Re}[z \varphi(z) - \alpha(z) \varphi(\overline{\beta(z)}) \overline{\beta(z)}] = f(z), \quad |z| = 1, \quad (4.6)$$

где $f(z) = g(z) - b_{n-1}(\alpha(z) - 1)$.

Так как $\alpha(z)$ — вещественнозначная функция на окружности $|z| = 1$, то

$$\operatorname{Re}(\alpha(z) \varphi(\overline{\beta(z)}) \overline{\beta(z)}) = \operatorname{Re}(\alpha(z) \overline{\varphi(\overline{\beta(z)}) \beta(z)}). \quad (4.7)$$

Из (4.4) и (4.7) следует, что граничное условие (4.6) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi(z)}{z^{n-1}} = f(z), \quad |z| = 1, \quad (4.8)$$

где

$$\Phi(z) = z^n \varphi(z) + Q_0(z) \varphi(\overline{\beta(z)}), \quad |z| < 1, \quad Q_0(z) = \frac{Q(z) \cdot \beta(z)}{z}. \quad (4.9)$$

Из условия $\beta(0) = 0$ вытекает, что функции $\Phi(z)$ и $Q_0(z)$ являются аналитическими в круге $|z| < 1$ и непрерывны в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Следовательно,

$$\Phi(z) = F_1(z) + F_2(z), \quad (4.10)$$

где $\Phi(z)$ определяется из граничного условия (4.8), причем (см. [1])

$$F_1(z) = \frac{z^{n-1}}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{(t+z)f(t)dt}{(t-z)t},$$

$$F_2(z) = i d_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} [b_k (z^k - z^{2n-2-k}) + i d_k (z^k + z^{2n-2-k})],$$

где b_k ($k = 0, \dots, n-2$) и d_k ($k = 0, \dots, n-1$) — произвольные вещественные постоянные. Таким образом, для определения функции $\varphi(z)$ получим уравнение (4.9), где функция $\Phi(z)$ определяется формулой (4.10). Уравнение (4.9) при заданной аналитической функции $\Phi(z)$ полностью исследовано в §§2, 3. Сначала рассмотрим случай, когда $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) \neq 0$. В §2 для этого случая показано, что уравнение (4.9) относительно аналитической функции $\varphi(z)$ имеет решение тогда и только тогда, когда функция $\Phi(z)$ удовлетворяет $2n$ условиям вида (см. (2.33)) :

$$L_j(\Phi) = 0, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad (4.11)$$

где L_j – некоторые линейно независимые функции. Подставляя $\Phi(z)$ из (4.10) в (4.11), получим систему алгебраических уравнений вида

$$B C = \mu, \quad (4.12)$$

где $C = (b_0, \dots, b_{n-1}, d_0, \dots, d_{n-1})$ – искомый вещественный вектор–столбец, $\mu = \mu_1, \dots, \mu_{2n}$ – $2n$ -мерный вещественный вектор–столбец, а B – квадратная матрица порядка $2n \times 2n$, элементы которой вещественные постоянные. Отметим, что матрица B и вектор μ известны, элементы матрицы B не зависят от функции $f(z)$, а элементы вектора μ представляются в виде $\mu_k = L_k(f)$, ($k = 1, \dots, 2n$), где $L_1, L_2, \dots, L_{2n}$ – некоторые линейные, ограниченные функционалы в классе аналитических функций в круге $|z| < 1$. Следовательно, задача A имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (4.12) имеет решение. Пусть C – решение уравнения (4.12). Подставляя это решение в (4.10) и решая уравнение (4.9) относительно $\varphi(z)$, получим решение задачи A с помощью формулы (4.5). Таким образом, мы доказали следующие следствия.

Следствие 4.1. Задача A имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\text{Det} B \neq 0$.

Следствие 4.2. Число линейно независимых решений однородной задачи A равно $2n - r$, где r – ранг матрицы B .

ABSTRACT. The paper studies certain functional equations with singularities and derives necessary and sufficient conditions for their solvability in a class of analytic functions. Formulae for solutions in terms of convergent series are obtained. The results are applied for effective solution of some nonlocal boundary value problems for Laplace equation.

REFERENCES

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, Гостехиздат, Москва – Ленинград, 1951.
4. А. И. Мальцев, Основы Линейной Алгебры, Гостехиздат, Москва, 1956.

22 июля 1999

Армянский государственный
инженерный университет

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье изучается задача о нахождении нулей аналитической функции и решаются некоторые трансцендентные уравнения методом последовательных приближений. Получены формулы, представляющие корни с помощью контурных интегралов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – m -связная ограниченная область с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ – замкнутые контуры Ляпунова. Предполагаем, что область, ограниченная контуром Γ_1 , содержит $m - 1$ дыр, границами которых являются контуры $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$. Пусть функция $a(z)$ аналитична в области D , непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$a(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \quad (0.1)$$

Из этого условия следует, что $a(z)$ имеет конечное число нулей в области D . Известно (см. [1]), что число n = сумме кратностей нулей функции $a(z)$ в области D определяется формулой

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a'(z)}{a(z)} dz. \quad (0.2)$$

Как показано в [2], задача нахождения нулей функции $a(z)$ сведена к решению алгебраических уравнений n -ого порядка.

Цель данной работы – описание алгоритма, дающего нули функции $a(z)$ в области D с заданной точностью и решение некоторых трансцендентальных уравнений методом последовательных приближений.

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть область D и функция $a(z)$ – как и во введении. Пусть $z_1, \dots, z_n$ – нули функции $a(z)$ в области D . Положим

$$\rho(z) = \min_{\zeta \in \Gamma} |z - \zeta|, \quad z \in D, \quad (1.1)$$

$$a_0 = \min_{z \in \Gamma} |a(z)|, \quad b_0 = \max_{z \in \Gamma} |a'(z)|. \quad (1.2)$$

Из условия (0.1) следует, что $a_0 > 0$.

Лемма 1.1. Имеет место следующая оценка :

$$\rho(z_k) \geq \frac{a_0}{b_0}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Доказательство : Так как Γ – замкнутое множество, то $|z - z_k|$ достигает минимума на контуре Γ , т.е. существует точка $\zeta_k \in \Gamma$ такая, что $|\zeta_k - z_k| = \rho(z_k)$. Отрезок, соединяющий точки z_k и ζ_k находится в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Поэтому

$$a_0 \leq |a(\zeta_k)| = |a(\zeta_k) - a(z_k)| = \left| \int_{\zeta_k}^{z_k} a'(\tau) d\tau \right| \leq b_0 |z_k - \zeta_k| = b_0 \rho(z_k).$$

Лемма 1.1 доказана.

Обозначим через $\rho_0(z)$ расстояние от точки z до множества нулей $a(z)$, т.е.

$$\rho_0(z) = \min_{j=1, \dots, n} |z - z_j|.$$

Пусть d – диаметр замкнутой области $\bar{D}$.

Лемма 1.2. Функция $\rho_0(z)$ удовлетворяет оценке

$$\rho_0(z) \leq \frac{d|a(z)|^{1/n}}{a_0^{1/n}}, \quad z \in D. \quad (1.4)$$

Доказательство : Функция

$$\beta(z) = \frac{1}{a(z)} (z - z_1) \cdots (z - z_n) \quad (1.5)$$

аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Следовательно (см. [1])

$$|\beta(z)| \leq \max_{t \in \Gamma} |\beta(t)|, \quad z \in \bar{D}.$$

Из (1.2) и (1.5) имеем

$$\max_{z \in \bar{D}} |\beta(z)| \leq \frac{d^n}{a_0}.$$

Следовательно

$$|\beta(z)| \leq \frac{d^n}{a_0}, \quad z \in \bar{D}. \quad (1.6)$$

В силу (1.5), (1.6)

$$|a(z)| \geq \frac{\rho_0^n(z) a_0}{d^n}. \quad (1.7)$$

Из (1.7) получим (1.4). Лемма 1.2 доказана.

Пусть кольцо

$$r_0 - \varepsilon_0 < |z - z_0| < r_0 + \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq r_0, \quad (1.8)$$

определенное по z_0, r_0, ε_0 , принадлежит области D .

Лемма 1.3. Предположим, что $a(z) \neq 0$ в кольце (1.8). Тогда для каждой точки z , удовлетворяющей $|z - z_0| = r_0$, имеем

$$|a(z)| \geq \frac{\varepsilon_0^n a_0}{d^n}. \quad (1.9)$$

Доказательство : Если $|z - z_0| = r_0$, то $\rho_0(z) \geq \varepsilon_0$. Отсюда и из (1.7) следует (1.9). Лемма 1.3 доказана.

Пусть окружность $|z - z_0| = r_0$ с центром z_0 принадлежит замкнутой области $\bar{D}$.

Рассмотрим на этой окружности m точек

$$\zeta_k = z_0 + r_0 \exp\left(i \frac{2\pi k}{m}\right), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.10)$$

Лемма 1.4. Если

$$m \geq 2\pi b_0 r_0 c_0^{-1}, \quad \min_{k=0,1,\dots,m-1} (|a(\zeta_k)|) \geq c_0, \quad (1.11)$$

где c_0 — некоторая положительная постоянная, то на окружности $|z - z_0| = r_0$ имеет место оценка

$$|a(z)| \geq \frac{c_0}{2}. \quad (1.12)$$

Доказательство : Пусть имеют место неравенства (1.11), и пусть τ — точка окружности $|z - z_0| = r_0$. На этой окружности существует точка ζ_m как и в (1.10) такая, что длина дуги между точками τ и ζ_m меньше, чем $\pi r_0 m^{-1}$. Следовательно,

$$|a(\zeta_m) - a(\tau)| = \left| \int_{\tau}^{\zeta_m} a'(z) dz \right| \leq b_0 \frac{\pi r_0}{m} \leq \frac{c_0}{2}, \quad (1.13)$$

где интегрирование ведется по дуге. Ясно, что

$$|a(\zeta_m)| \leq |a(\tau)| + |a(\zeta_m) - a(\tau)|. \quad (1.14)$$

Из (1.11), (1.13) и (1.14) получим

$$c_0 \leq |a(\zeta_m)| \leq |a(\tau)| + \frac{c_0}{2},$$

что равносильно неравенству (1.12). Лемма 1.4 доказана.

Для заданного $0 < \varepsilon \leq a_0/(4b_0)$, где a_0 и b_0 определяются согласно (1.2), разделим замкнутую область $\bar{D}$ на p замкнутых подобластей $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, диаметры которых меньше или равны ε . Пусть j ($1 \leq j \leq p$) – натуральное число такое, что

$$|a(\tau_j)| = \min_{k=1, \dots, p} |a(\tau_k)|, \quad (1.15)$$

где $\tau_k \in \sigma_k$, $k = 1, \dots, p$.

Лемма 1.5. Если $n \geq 1$ и $k_0 = d(b_0/a_0)^{1/n}$, то

$$\rho_0(\tau_j) \leq k_0 \varepsilon^{1/n}. \quad (1.16)$$

Доказательство : Пусть z_1 является нулем функции $a(z)$ некоторой подобласти σ_k . Согласно Лемме 1.1. $\rho(z_1)$ удовлетворяет неравенству (1.3). Поэтому круг $|z - z_1| < \frac{a_0}{b_0}$ принадлежит области D . Так как $\varepsilon \leq a_0/(4b_0)$, то интервал с концами z_1 и τ_k принадлежит диску $|z - z_1| < \frac{a_0}{b_0}$. Следовательно

$$|a(\tau_k)| = |a(\tau_k) - a(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{\tau_k} a'(z) dz \right| \leq b_0 |\tau_k - z_1| \leq b_0 \varepsilon. \quad (1.17)$$

Из (1.15) и (1.17) имеем $|a(\tau_j)| \leq b_0 \varepsilon$. Из (1.4) при $z = \tau_j$ получим (1.16). Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.5 показывает, что точка τ_j будет приближенным значением одного из нулей функции $a(z)$ с точностью $k_0 \varepsilon^{1/n}$. Следовательно, если $a(z)$ имеет только один нуль в области D , то τ_j аппроксимирует этот нуль.

Лемма 1.6. Для $a(\tau_j)$ имеет место оценка : либо $|a(\tau_j)| \leq \frac{1}{4}a_0$, либо $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$.

Доказательство : Если функция $a(z)$ имеет нуль z_0 внутри области D и $z_0 \in \sigma_k$, то

$$|a(\tau_k)| = |a(\tau_k) - a(z_0)| \leq b_0 |\tau_k - z_0| \leq b_0 \varepsilon \leq \frac{1}{4}a_0,$$

и согласно (1.15) получим $|a(\tau_j)| \leq a_0/4$. Если $a(z)$ не имеет нулей внутри D , то $|a(z)|$ достигает минимума на границе Γ . Следовательно, $|a(\tau_j)| \geq a_0$, и поэтому $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. Если $|a(\tau_j)| \leq \frac{1}{4}a_0$, то функция $a(z)$ имеет хотя бы один нуль в области D . Если же $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$, то функция $a(z)$ не имеет нулей в D .

Доказательство : Пусть $|a(\tau_j)| \leq \frac{1}{4}a_0$. Тогда $a(z)$ имеет нуль внутри области D , т.к. в противном случае $|a(\tau_j)| \geq a_0$ (см. доказательство Леммы 1.6). Пусть теперь $|a(\tau_j)| \geq \frac{3}{4}a_0$. Тогда функция $a(z)$ не имеет нулей внутри области D , т.к. в противном случае $|a(\tau_j)| \leq a_0/4$ (см. доказательство Леммы 1.6). Этим доказывается Лемма 1.7.

Лемма 1.8. Если $|z| \leq \mu < 1$ и $|z_0| \leq \mu < 1$, то

$$\frac{|z - z_0|}{|1 - \bar{z}_0 z|} \leq \frac{2\mu}{1 + \mu^2}.$$

Доказательство : следует из обобщенной Леммы Шварца (см. [4]).

§2. НАХОЖДЕНИЕ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе область D и аналитическая функция $a(z)$ те же, что и выше. Наша цель – найти нули $a(z)$ с заданной точностью : для заданного $\delta > 0$ нужно найти точки $t_1, \dots, t_n$ (необязательно различные), принадлежащие D и удовлетворяющие $|t_j - z_j| \leq \delta$, где $z_1, \dots, z_n$ – нули функции $a(z)$ в области D .

Для любого числа $0 < \delta \leq a_0/(2b_0)$, согласно Лемме 1.5 можно выбрать точку t_1 такую, что

$$\rho_0(t_1) \leq \frac{\delta}{n+1}. \quad (2.1)$$

По определению функций $\rho(z)$ и $\rho_0(z)$ (см. §1), имеем

$$\rho(t_1) = |t_1 - \zeta_0|, \quad \rho_0(t_1) = |t_1 - z_j|, \quad (2.2)$$

где $z_j \in D$ – некоторый нуль функции $a(z)$, а ζ_0 – некоторая точка на Γ . Из (2.2) имеем

$$\rho(t_1) = |(t_1 - z_j) + (z_j - \zeta_0)| \geq |z_j - \zeta_0| - |t_1 - z_j|. \quad (2.3)$$

Из (1.1) имеем $\rho(z_j) \leq |z_j - \zeta_0|$. Из (2.2) и (2.3) следует, что $\rho(t_1) \geq \rho(z_j) - \rho_0(t_1)$.

Из неравенств (1.3) и (2.1) вытекает

$$\rho(t_1) \geq \frac{a_0}{2b_0}. \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4) означает, что круг $|z - t_1| \leq \frac{a_0}{2b_0}$ принадлежит области D . Из (2.1) следует, что в замкнутом круге

$$|z - t_1| \leq \delta_0 = \frac{\delta}{n+1} \quad (2.5)$$

существует хотя бы один нуль функции $a(z)$. Обозначим через G_k кольцо

$$k\delta_0 < |z - t_1| < (k+1)\delta_0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Из неравенств (2.4) и $\delta \leq a_0/(2b_0)$ следует, что замкнутый круг (2.5) и кольца $G_1, \dots, G_n$ принадлежат области D . Так как функция $a(z)$ имеет n нулей в D , то существует хотя бы одно кольцо G_m , $1 \leq m \leq n$, где $a(z)$ не имеет нулей. По Лемме 1.3 на окружности

$$\Gamma_m = \left\{ z : |z - t_1| = \left(m + \frac{1}{2}\right) \delta_0 \right\} \quad (2.6)$$

функция $a(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|a(z)| \geq \frac{a_0 \delta_0^n}{2^n d^n}. \quad (2.7)$$

Отметим, что в (2.6) точное значение натурального числа m не известно, но мы знаем, что оно существует и удовлетворяет $1 \leq m \leq n$.

Исходя из этого укажем алгоритм нахождения всех нулей аналитической функции $a(z)$ с заданной точностью. Пусть N – натуральное число такое, что

$$N \geq \frac{2\pi b_0 \delta}{c_0}, \quad c_0 = \frac{a_0 \delta_0^n}{2^{n+1} d^n}.$$

На окружности Γ_j , $1 \leq j \leq n$ рассмотрим точки

$$\zeta_{jk} = t_1 + \left(j + \frac{1}{2}\right) \delta_0 \exp\left(i \frac{2\pi}{N} k\right), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Положим

$$c_j = \min_{k=1, \dots, N} |a(\zeta_{jk})|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть m , $1 \leq m \leq n$ – натуральное число, для которого $a(z) \neq 0$, когда $z \in G_m$.

Из неравенства (2.7) следует, что

$$c_m \geq \frac{a_0 \delta_0^n}{2^{n+1} d^n}. \quad (2.8)$$

Пусть m_0 – наибольший индекс, для которого имеет место (2.8). По Лемме 1.4 на окружности Γ_{m_0} имеет место оценка

$$|a(z)| \geq \frac{c_0}{2}. \quad (2.9)$$

Так как на Γ_{m_0} функция $a(z)$ не имеет нулей, то число n_1 нулей функции $a(z)$ в круге

$$K_{m_0} = \left\{ z : |z - t_1| < \left(m_0 + \frac{1}{2} \right) \delta_0 \right\} \quad (2.10)$$

определяется формулой (см. [1])

$$n_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m_0}} \frac{a'(z)}{a(z)} dz. \quad (2.11)$$

Так как в замкнутом круге $|z - t_1| \leq \delta_0$ функция $a(z)$ имеет хотя бы один нуль, то $n_1 \geq 1$.

Нули $z_1, \dots, z_{n_1}$ функции $a(z)$ внутри круга K_{m_0} аппроксимируем точкой t_1 . Ясно, что

$$|z_k - t_1| \leq \left(m_0 + \frac{1}{2} \right) \delta_0 < \delta, \quad k = 1, \dots, n_1.$$

Обозначим

$$G = D \setminus (K_{m_0} \cup \Gamma_{m_0}), \quad L = \partial G = \Gamma \cup \Gamma_{m_0}.$$

Согласно (1.2) и (2.9), имеем

$$\min_{z \in L} |a(z)| \geq \min \left(a_0, \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0.$$

Аналогично находятся некоторые нули функции $a(z)$ в области G с заданной точностью δ . Продолжая этот процесс, через конечное число шагов $p \leq n$ можно найти все нули функции $a(z)$ с заданной точностью δ .

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение :

$$z^2 = \sum_{k=0}^m a_k z^k, \quad |z| < 1, \quad \sum_{k=0}^m |a_k| < 1. \quad (2.12)$$

Из (2.12) имеем

$$|z^2| > \left| \sum_{k=0}^m a_k z^k \right|, \quad |z| = 1,$$

$$\min_{|z|=1} \left| z^2 - \sum_{k=0}^m a_k z^k \right| \geq 1 - \sum_{k=0}^m |a_k|.$$

Отсюда следует, что уравнение (2.12) имеет два корня.

В случае, когда уравнение (2.12) имеет хотя бы два корня, их можно найти, не используя контурные интегралы.

Пусть δ – заданное число. Вышеприведенные рассуждения показывают, что уравнение (2.12) имеет хотя бы один корень в круге

$$|z - \zeta_j| < \delta_1, \quad \delta_1 \leq \delta, \quad \delta_1 + |\zeta_j| < 1,$$

а в круге $|z - \zeta_j| = \delta_1$ имеем неравенство

$$\left| z^2 - \sum_{k=0}^m a_k z^k \right| \geq c_0,$$

где $c_0 > 0$ можно точно вычислять.

Пусть G – двусвязная область, ограниченная окружностями $|z - \zeta_j| = \delta_1$ и $|z| = 1$. Ясно, что в G уравнение (2.12) имеет не более одного решения. Предположим, что уравнение (2.12) не имеет решения в G , тогда оба решения этого уравнения принадлежат кругу $|z - \zeta_j| < \delta_1$, и точка ζ_j – требуемое приближение.

Предположим теперь, что уравнение (2.12) имеет решение в области G . Ясно, что их число равно 1. Тогда ζ_j – приближенное решение в круге $|z - \zeta_j| < \delta_1$. Приближенное решение в области G можно найти методом, описанным в Лемме 1.5.

§3. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

1. Пусть D – единичный круг $|z| < 1$ с границей Γ . Рассмотрим уравнение вида

$$z = \varphi(z), \quad z \in D, \quad (3.1)$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$|\varphi(z)| \leq \mu < 1, \quad z \in \overline{D}. \quad (3.2)$$

Согласно Теореме Руше уравнение (3.1) имеет одно решение в D . В случае, когда

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq q|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \overline{D}, \quad 0 < q < 1, \quad (3.3)$$

где q – постоянная, уравнение (3.1) можно решать методом последовательных приближений (см. [3]).

Заметим, что аналитичность функции $\varphi(z)$ и условие (3.2) не всегда обеспечивают выполнение условия (3.3). Например, для аналитической в единичном круге функции $\varphi(z) = \frac{1}{2}z^n + \frac{1}{4}$, $n \geq 2$ имеет место (3.2), а (3.3) не выполняется.

В этом параграфе показываем, что если $\varphi(z)$ аналитична в D и имеет место (3.2), то уравнение (3.1) можно решать методом последовательных приближений.

Рассмотрим последовательность точек $\zeta_n = \varphi(\zeta_{n-1})$, которая начинается с $\zeta_0 = 0$. Пусть z_0 – точное решение уравнения (3.1).

Теорема 3.1. Последовательность ζ_k сходится к z_0 , причем

$$|\zeta_k - z_0| \leq 2\nu^k, \quad \nu = \frac{2\mu}{1 + \mu^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Доказательство : Рассмотрим взаимно обратные функции

$$\alpha_0(t) = \frac{t + z_0}{1 + \bar{z}_0 t}, \quad \beta_0(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad (3.5)$$

которые конформно отображают единичный круг на себя. В частности,

$$\beta_0(\alpha_0(t)) \equiv t, \quad \alpha_0(\beta_0(t)) \equiv t, \quad |\alpha_0(z)| \leq 1, \quad |\beta_0(z)| \leq 1, \quad |z| \leq 1.$$

Так как z_0 есть решение уравнения (3.1), то можем записать

$$z_0 = \varphi(z_0), \quad |z_0| \leq \mu. \quad (3.6)$$

Функция

$$\psi_1(t) = \beta_0(\varphi(\alpha_0(t))) \quad (3.7)$$

аналитична в круге D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Из (3.5) и (3.7) следует, что $\psi_1(0) = 0$ и $\alpha_0(-z_0) = 0$. Положим

$$\psi_n(t) = \psi_1(\psi_{n-1}(t)), \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Последовательность ζ_n можно получить следующим образом :

$$\zeta_0 = \alpha_0(-z_0), \quad \zeta_n = \alpha_0(\psi_n(-z_0)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из условия (3.2) следует

$$|\varphi(\alpha_0(t))| \leq \mu, \quad |t| \leq 1. \quad (3.9)$$

Используя Лемму 1.8 при $z = \varphi(\alpha_0(t))$ и неравенства (3.6) и (3.9), получим

$$\left| \frac{\varphi(\alpha_0(t)) - z_0}{1 - \bar{z}_0 \varphi(\alpha_0(t))} \right| \leq \frac{2\mu}{1 + \mu^2}, \quad |t| \leq 1.$$

Это неравенство можно записать в виде

$$|\beta_0(\varphi(\alpha_0(t)))| \leq \frac{2\mu}{1 + \mu^2}, \quad |t| \leq 1.$$

Следовательно

$$|\psi_1(t)| \leq \nu, \quad |t| \leq 1, \quad (3.10)$$

где ν определяется формулой (3.4). Применяя теорему Шварца к функции $\psi_1(z)$, из (3.7) и (3.10) имеем

$$|\psi_1(t)| \leq \nu|t|, \quad |t| \leq 1.$$

Из (3.8) получим

$$|\psi_n(t)| \leq \nu^n, \quad |t| \leq 1. \quad (3.11)$$

Следовательно, $|\psi_n(-z_0)| \leq \nu^n$, и из (3.5) имеем

$$\zeta_n = \alpha_0(\psi_n(-z_0)) = \frac{\psi_n(-z_0) + z_0}{1 + \bar{z}_0\psi_n(-z_0)}. \quad (3.12)$$

Так как $0 < \mu < 1$, то $0 < \nu < 1$. Из (3.11) и (3.12) следует, что $\zeta_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow \infty$. Из (3.12) имеем

$$|\zeta_n - z_0| = \frac{|\psi_n(-z_0)|(1 - |z_0|^2)}{|1 + \bar{z}_0\psi_n(-z_0)|}. \quad (3.13)$$

Из (3.6), (3.11) и (3.13) вытекает (3.4). Теорема 3.1 доказана.

2. В круге $|z| < 1$ рассмотрим уравнение

$$z = \overline{\varphi(z)}, \quad z \in D, \quad (3.14)$$

где $\varphi(z)$ аналитична в D , непрерывна в замкнутом круге $\bar{D}$ и удовлетворяет условию (3.2). Здесь и ниже $\overline{\varphi(z)}$ означает функцию, комплексно сопряженную к $\varphi(z)$.

Согласно теореме Боля-Брауэра, функция $\overline{\varphi(z)}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку z_0 в $\bar{D}$ (см. [4]), т.е. $z_0 = \overline{\varphi(z_0)}$. Из (3.2) и (3.14) имеем $|z_0| = |\varphi(z_0)| \leq \mu$. Следовательно, неподвижная точка z_0 принадлежит кругу D . Рассмотрим функцию

$$\omega_1(t) = \beta_0 \left(\overline{\varphi(\alpha_0(t))} \right),$$

где α_0 и β_0 определяются формулой (3.5). Функция $\overline{\omega_1(t)}$ аналитична в D и удовлетворяет

$$\overline{\omega_1(0)} = 0, \quad \left| \overline{\omega_1(t)} \right| \leq \nu, \quad |t| \leq 1,$$

где ν определяется формулой (3.4). Согласно Лемме Шварца получим

$$|\omega_1(t)| = \left| \overline{\omega_1(t)} \right| \leq \nu|t|, \quad |t| \leq 1. \quad (3.15)$$

Положим

$$\omega_n(t) = \omega_1(\omega_{n-1}(t)), \quad n = 2, 3, \dots$$

Из (3.15) получим (ср. (3.11)) $|\omega_n(t)| \leq \nu^n$. Определим последовательность точек τ_n следующим образом :

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \overline{\varphi(\tau_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Последовательность τ_n можно записать в виде

$$\tau_0 = \alpha_0(-z_0), \quad \tau_n = \alpha_0(\omega_n(-z_0)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из следующей теоремы вытекает, что уравнение (3.14) имеет единственное решение в круге $|z| < 1$.

Теорема 3.2. Последовательность τ_k сходится к z_0 , причем $|\tau_k - z_0| \leq 2\nu^k$.
Доказательство : аналогично доказательству Теоремы 3.1.

3. Рассмотрим теперь уравнения вида

$$z = \varphi(z, \bar{z}), \quad |z| \leq 1, \quad (3.16)$$

где функция $\varphi(z, \tau)$ аналитична по комплексным переменным z и τ в круге D , непрерывна в замкнутом круге $\bar{D}$ и для некоторой постоянной μ

$$|\varphi(z, \tau)| \leq \mu < 1, \quad z, \tau \in \bar{D}. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) можно записать как систему уравнений по комплексным переменным z и τ :

$$z = \varphi(z, \tau), \quad (3.18)$$

$$\tau = \bar{z}, \quad |z| < 1. \quad (3.19)$$

Согласно (3.17) и теореме Руше, при любом τ , $|\tau| \leq 1$ уравнение (3.18) имеет единственное решение

$$z = \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t(1 - \varphi'_t(t, \tau))}{t - \varphi(t, \tau)} dt. \quad (3.20)$$

Функция $\psi(\tau)$ аналитична по комплексной переменной τ в круге $|\tau| \leq 1$. Так как $z = \psi(\tau)$ является решением уравнения (3.18), то

$$\psi(\tau) = \varphi(\psi(\tau), \tau), \quad |\tau| \leq 1.$$

Из (3.17) получим

$$|\psi(\tau)| = |\varphi(\psi(\tau), \tau)| \leq \mu.$$

Таким образом, уравнение (3.18) можно заменить уравнением (3.20). Подставляя z из (3.20) в (3.19), получим

$$\tau = \overline{\psi(\tau)}, \quad |\tau| < 1. \quad (3.21)$$

С другой стороны, уравнение (3.19) можно записать в виде $z = \bar{\tau}$. Таким образом, $z = \bar{\tau}$ является решением уравнения (3.16), где τ – решение уравнения (3.21). Согласно Теореме 3.2, уравнение (3.21) имеет единственное решение. Поэтому уравнение (3.16) также имеет единственное решение z_0 .

Применяя Теорему 3.2 к уравнению (3.21), получим следующую теорему.

Теорема 3.3. Последовательность

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \overline{\psi(\tau_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

сходится к z_0 , причем $|\tau_k - z_0| \leq 2\nu^k$, где ν определяется формулой (3.4).

Замечание 1. Утверждения Теорем 3.1 – 3.3 остаются в силе, если в качестве нулевого решения берем любую точку единичного круга.

4. Пусть теперь D – общая односвязная ограниченная область в комплексной плоскости с гладкой границей Γ . Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в D , непрерывна в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(z) \in D_0, \quad z \in \bar{D}, \quad (3.22)$$

где D_0 – некоторая замкнутая подобласть области D . Не умаляя общности предположим, что $0 \in D$. В области D рассмотрим уравнение

$$z = \varphi(z), \quad z \in D. \quad (3.23)$$

Положим

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_n = \varphi(\zeta_{n-1}), \quad n \geq 1. \quad (3.24)$$

Теорема 3.4. Уравнение (3.23) имеет единственное решение z_0 , последовательность ζ_k сходится к z_0 , и имеет место следующая оценка :

$$|\zeta_k - z_0| \leq \gamma \nu^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

где γ и ν — некоторые положительные числа, $0 < \nu < 1$.

Доказательство : Пусть функция $t = \beta_0(z)$ конформно отображает область D на единичный круг и пусть $\alpha_0(t)$ — функция, обратная к функции $\beta_0(t)$. Ясно, что функция $z = \alpha_0(t)$ конформно отображает единичный круг на область D и

$$\beta_0(\alpha_0(t)) \equiv t, \quad |t| \leq 1. \quad (3.26)$$

Положим

$$\mu = \max_{z \in D_0} |\beta_0(z)|, \quad \nu = \frac{2\mu}{1 + \mu^2}. \quad (3.27)$$

Так как $D_0 \subset D$, то имеем $0 < \mu < 1$, $0 < \nu < 1$. Подставляя $z = \alpha_0(t)$ в (3.23), получим $\alpha_0(t) = \varphi(\alpha_0(t))$. Вычисляя β_0 , получим

$$t = \varphi_0(t) = \beta_0(\varphi(\alpha_0(t))), \quad |t| < 1. \quad (3.28)$$

Из (3.22) и (3.27) имеем $|\varphi_0(t)| \leq \mu$. Таким образом, решение уравнения (3.23) определяется формулой $z = \alpha_0(t)$, где t — решение уравнения (3.28). Так как уравнение (3.28) имеет единственное решение (Теорема 3.1), то уравнение (3.23) также имеет единственное решение.

Докажем теперь, что последовательность ζ_k сходится к z_0 при $k \rightarrow \infty$ и имеет место (3.25), где ν определяется формулой (3.27). Так как $z = \alpha_0(t)$ конформно отображает единичный круг на область D и $0 \in D$, то существует точка t_0 , $|t_0| < 1$ такая, что $\alpha_0(t_0) = 0$. Определим последовательность точек $\tau_n = \varphi_0(\tau_{n-1})$, $n \geq 1$. Пусть t_0 — решение уравнения (3.28). Согласно Теореме 3.1 и Замечанию 1, имеем $\tau_n \rightarrow t_0$ и

$$|\tau_n - t_0| \leq 2\nu^n, \quad n \geq 1. \quad (3.29)$$

В силу (3.26) последовательность ζ_n , определенную формулой (3.24), можно записать в виде

$$\zeta_n = \alpha_0(\tau_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Так как $\tau_n \rightarrow t_0$ при $n \rightarrow \infty$, то имеем $\zeta_n \rightarrow \alpha(t_0)$. В силу $z = \alpha_0(t)$ заключаем, что $z_0 = \alpha_0(t_0)$ является решением уравнения (3.23). Следовательно, $\zeta_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow \infty$. Этим доказывается второе утверждение.

Для доказательства (3.25) заметим, что из (3.30) и $z_0 = \alpha(t_0)$ следует

$$|\zeta_n - z_0| = |\alpha_0(\tau_n) - \alpha_0(t_0)|. \quad (3.31)$$

Из неравенства $|\varphi_0(t)| \leq \mu$ имеем $|t_0| \leq \mu$, $|\tau_n| \leq \mu$, $n \geq 1$. Следовательно

$$|\alpha_0(\tau_n) - \alpha_0(t_0)| \leq \max_{|t| \leq \mu} |\alpha'_0(t)| \cdot |\tau_n - t_0|. \quad (3.32)$$

По теореме Коши (см. [1])

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\alpha_0(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \alpha'_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\alpha_0(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau. \quad (3.33)$$

Так как функция $z = \alpha_0(t)$ конформно отображает единичный круг на область D и $0 \in D$, то имеем $|\alpha_0(t)| \leq d_0$, где d_0 – диаметр области $\bar{D}$. Из (3.33) получим

$$\max_{|t| \leq \mu} |\alpha'_0(t)| \leq \frac{d_0}{(1 - \mu)^2}. \quad (3.34)$$

Из (3.29), (3.31), (3.32) и (3.34) получим (3.25). Этим завершается доказательство Теоремы 3.4.

Замечание. Пусть функция $\Psi(z, \tau)$ аналитична по комплексным переменным z и τ при $|z| < 1$, $|\tau| < 1$, непрерывна при $|z| \leq 1$, $|\tau| \leq 1$ и удовлетворяет условию $\Psi(0, 0) = 0$. По лемме Шварца [5]

$$|\Psi(z, \bar{z})| \leq \|\Psi\| \cdot |z|, \quad \|\Psi\| = \max_{|z| \leq 1, |\tau| \leq 1} |\Psi(z, \tau)|. \quad (3.35)$$

Используя неравенство (3.35) можно показать, что уравнение (3.16) можно решать методом последовательных приближений $\zeta_k = \varphi(\zeta_{k-1}, \bar{\zeta}_{k-1})$, $k \geq 1$, начиная с произвольной точки $z_0 \in D$. Таким образом, утверждение Теоремы 3.4 остается справедливым для уравнения (3.16).

ABSTRACT. The paper studies the problem of determination of zeros of an analytic function and solves some transcendental equations by the method of successive approximations. Formulae presenting the roots as contour integrals are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
2. Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева, "Об одном методе нахождения нулей аналитических функций", Сибирский Мат. журнал, том 36, № 5, стр. 1146 – 1156, 1995.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.
4. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
5. А. О. Бабалян, "Об одном функциональном уравнении", Годичная научная конф. Армянского государственного инженерного университета, стр. 5 – 6, 1988.

24 сентября 1999

Армянский государственный
инженерный университет

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СДВИГОМ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Е. Товмасян, В. А. Ирицян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье изучаются функциональные уравнения со сдвигами в классе аналитических функций и получены необходимые и достаточные условия для их разрешимости. Результаты применяются в изучении нелокальных граничных задач для уравнения Лапласа.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – односвязная ограниченная область комплексной плоскости с достаточно гладкой границей Γ . Пусть $O \in D$ и $\bar{D} = D \cup \Gamma$. В области D рассмотрим уравнение

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \varphi(\beta_k(z)) + f(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

где $\alpha_k(z)$, $\beta_k(z)$ и $f(z)$ – заданные аналитические функции, n – натуральное число, $z = x + iy$. Наша задача – найти аналитическую в D функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Предположим, что

$$\beta_k(z) \in D \quad \text{при} \quad z \in \bar{D}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\beta_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

При $f \equiv 0$ уравнение (1) называется однородной. Докажем, что из (2) и (3) следуют неравенства

$$|\beta'_k(0)| \leq q < 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Некоторые частные случаи уравнения (1) в круге рассмотрены в [1], глава V. Если существует конформное отображение области D на единичный круг, то заменой переменной уравнение (1) сводится к аналогичному уравнению в круге и это

уравнение можно решить методом, предложенным в [1]. Однако, в большинстве случаев конформное отображение сложно найти, и поэтому здесь предлагается другой метод. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Если

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k(0)| < 1, \quad (5)$$

то уравнение (1) имеет единственное решение, задаваемое рядом Неймана

$$\varphi(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{\infty} K^j(f), \quad (6)$$

где K^j – применение оператора

$$K(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) f(\beta_k(z)) \quad (7)$$

j раз.

Теорема 2. Если выполнены условия

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta_k'(0))^j \neq 1, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

то уравнение (1) имеет единственное решение.

Теорема 3. Пусть условие (8) нарушено для некоторых значений j , и пусть число таких случаев $\nu \geq 1$. Тогда уравнение (1) фредгольмово и число μ линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения удовлетворяет оценкам

$$\mu = 1 \quad \text{при} \quad \nu = 1 \quad \text{и} \quad 1 \leq \mu \leq \nu \quad \text{при} \quad \nu \geq 2. \quad (9)$$

Здесь линейная независимость понимается в поле комплексных чисел.

Ниже число μ линейно независимых решений однородного уравнения (1) (при $\nu \geq 2$) получено при помощи производных функций $\alpha_k(z)$ и $\beta_k(z)$ в точке $z = 0$.

Замечание 1. Из (4) следует, что условие (8) удовлетворяется для достаточно больших значений j .

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функции $\beta_1(z), \dots, \beta_n(z)$ аналитичны в односвязной области D , непрерывны в $\bar{D}$ и удовлетворяют условиям (2), (3).

Рассмотрим замкнутые области D_j и G_{jk} и числа d_j ($k = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots$), определенные при помощи рекуррентных соотношений :

$$D_0 = \bar{D}, \quad D_{j+1} = \bigcup_{k=1}^n G_{jk}, \quad d_j = \max_{z \in D_j} |z|, \quad (10)$$

где G_{jk} — образ области D_j при отображении $\xi = \beta_k(z)$.

Так как аналитические функции $\beta_1(z), \dots, \beta_n(z)$ непрерывны в $\bar{D}$ и удовлетворяют условиям (2), (3), то

$$D_j \in D, \quad G_{jk} \in D, \quad 0 \in D_j, \quad 0 \in G_{jk}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Лемма 1. Последовательность d_j стремится к нулю при $j \rightarrow +\infty$.

Доказательство : Из определения множества D_j следует, что каждая точка $z_j \in D_j$ имеет представление

$$z_j = (\beta_{k_1} \circ \beta_{k_2} \circ \dots \circ \beta_{k_j})(z_0), \quad (12)$$

где $(f \circ g)(z) = f(g(z))$, $k_1, \dots, k_j$ — натуральные числа меньшие или равные n .

$\beta_{k_1} \circ \beta_{k_2} \circ \dots \circ \beta_{k_j}$ — суперпозиция функций $\beta_{k_1}(z), \dots, \beta_{k_j}(z)$, а z_0 — точка из $\bar{D}$.

Пусть $z = \gamma(\xi)$ конформно отображает единичный круг $|\xi| < 1$ на область D и $\gamma(0) = 0$, а $\xi = \delta(z)$ — обратное отображение. Так как $z_0 \in \bar{D}$, то

$$z_0 = \gamma(\xi_0), \quad (13)$$

где ξ_0 — точка из круга $|\xi| \leq 1$.

Из (12) и (13) следует, что

$$z_j = (\beta_{k_1} \circ \beta_{k_2} \circ \dots \circ \beta_{k_j} \circ \gamma)(\xi_0). \quad (14)$$

Обозначим

$$\omega_j(\xi) = \delta(\beta_j(\gamma(\xi))), \quad j = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Функция $\omega_j(\xi)$ аналитична в круге $|\xi| < 1$, непрерывна в $|\xi| \leq 1$ и удовлетворяет условию $\omega_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Из (2) следует, что

$$|\omega_j(\xi)| \leq q, \quad j = 1, \dots, n, \quad |\xi| \leq 1, \quad (16)$$

где $0 < q < 1$.

Так как $\gamma(\delta(z)) \equiv z$, то

$$\beta_{k_j} = \gamma \circ \delta \circ \beta_{k_j}. \quad (17)$$

Подставляя β_{k_j} из (17) в (14) получим $z_j = \gamma(\xi_j)$, где $\xi_j = (\omega_{k_1} \circ \omega_{k_2} \circ \dots \circ \omega_{k_j})(\xi_0)$.

Так как $\omega_j(0) = 0$ ($j = 1, \dots, n$) и $\gamma(0) = 0$, то согласно принципу максимума модуля [2] при $|\xi| \leq 1$ имеем

$$\left| \frac{\omega_j(\xi)}{\xi} \right| \leq \max_{|t|=1} \frac{|\omega_j(t)|}{|t|}, \quad \left| \frac{\gamma(\xi)}{\xi} \right| \leq \max_{|t|=1} \frac{|\gamma(t)|}{|t|}. \quad (18)$$

Ясно, что

$$\max_{|t|=1} |\gamma(t)| = \max_{z \in \Gamma} |z| = q_0. \quad (19)$$

Из (16), (18) и (19) получим

$$|\omega_j(\xi)| \leq q |\xi|, \quad |\gamma(\xi)| \leq q_0 |\xi|. \quad (20)$$

Следовательно, используя $z_j = \gamma(\xi_j)$, получим оценки $|z_j| \leq q_0 q^j$, $|d_j| \leq q_0 q^j$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $\beta_1(z), \dots, \beta_n(z)$ удовлетворяют условиям (2), (3), то имеет место условие (4), где q как и в неравенстве (16).

Доказательство : Из (20) следует, что

$$\left| \frac{\omega_j(\xi)}{\xi} \right| \leq q \quad \text{при} \quad |\xi| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Переходя к пределу в (21) при $\xi \rightarrow 0$, получим

$$|\omega'_j(0)| \leq q. \quad (22)$$

Из (15) и (22) имеем $\omega'_j(0) = \delta(0) \beta'_j(0) \gamma'(0) = \beta'_j(0)$, $|\beta'_j(0)| < 1$. Доказательство завершено.

Пусть $c^k = (c_{k0}, c_{k1}, \dots, c_{k,m-1})$, ($k = 1, \dots, \mu$) – система линейно независимых векторов ($\mu \leq m$), и пусть

$$\psi_k(z) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{kj} z^j + z^m \Phi_k(z), \quad k = 1, \dots, \mu,$$

где $\Phi_k(z)$ – аналитические функции в D . Напомним, что $0 \in D$.

Лемма 3. Функции $\psi_1(z), \dots, \psi_\mu(z)$ линейно независимы в области D .

Доказательство : очевидно.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Доказательство Теоремы 1 : Пусть имеет место неравенство (5). Положим

$$\|\varphi\| = \max_{z \in \bar{D}} |\varphi(z)|, \quad \rho_k = \max_{z \in D_k} \sum_{j=1}^n |a_j(z)|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где D_k , ($k = 0, 1, \dots$) – замкнутые множества, построенные в §1. Из (7) следует, что

$$\max_{z \in D_j} |K(f)| \leq \rho_j \max_{z \in D_{j+1}} |f(z)|, \quad j = 0, 1, \dots$$

Следовательно

$$\max_{z \in \bar{D}} |K^j(f)| \leq \rho_0 \max_{z \in D_1} |K^{j-1}(f)| \leq \dots \leq \rho_0 \cdot \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_j \cdot \|f\|. \quad (23)$$

Из Леммы 1 и неравенства (5) получим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j = \sum_{k=1}^n |\alpha_k(0)| < 1. \quad (24)$$

Следовательно, ряд (6) сходится равномерно в $\bar{D}$ и (6) является решением уравнения (1).

Теперь рассмотрим однородное уравнение (1), т.е. $\varphi(z) = K(\varphi)$. Тогда

$$\varphi(z) = K^j(\varphi). \quad (25)$$

Из (23) и (25) следует, что

$$\|\varphi\| \leq \rho_0 \cdot \rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_j \cdot \|\varphi\|. \quad (26)$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ и используя (24), получим $\varphi(z) \equiv 0$. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 2 : Пусть выполнено условие (8). Мы ищем решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m \psi(z), \quad (27)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ – постоянные. $\psi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$, а m удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k(0)| |\beta'_k(0)|^m < 1. \quad (28)$$

Согласно Лемме 2 условие (28) выполняется для достаточно больших m . Подставляя $\varphi(z)$ из (27) в (1), получим

$$z^m \psi(z) - \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \beta_k^m(z) \psi(\beta_k(z)) = \omega(z), \quad (29)$$

где

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) (c_0 + c_1 \beta_k(z) + \dots + c_{m-1} \beta_k^{m-1}(z)) - c_0 - c_1 z - \dots - c_{m-1} z^{m-1} + f(z). \quad (30)$$

Так как в левой части (29) порядок точки $z = 0$ не меньше m , то имеем

$$\omega^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (31)$$

Полагая

$$\Phi_\nu(z) = - \sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \beta_k^\nu(z), \quad d_{j\nu} = \Phi_\nu^{(j)}(0)$$

и подставляя $\omega(z)$ из (30) в (31), получим

$$\left(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k(0)\right) c_0 = f(0), \quad (32)$$

$$\left(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k(0) [\beta_k'(0)]^j\right) c_j + \sum_{\nu=1}^{j-1} d_{j\nu} c_\nu = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (33)$$

Из (8) заключаем, что система (32), (33) относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ имеет единственное решение, т.е. правую часть (29) можно считать известной.

Разделив обе части уравнения (29) на z^m , получим

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_{km}(z) \psi(\beta_k(z)) + f_m(z), \quad (34)$$

где $\alpha_{km}(z) = \alpha_k(z) \frac{\beta_k^m(z)}{z^m}$, $f_m(z) = \frac{\omega(z)}{z^m}$.

Так как $\beta_k(z)$ ($k = 1, \dots, n$) и $\omega(z)$ удовлетворяет условиям (3) и (31), то функции $\alpha_k(z)$ и $f_m(z)$ аналитичны в D и непрерывны в $\bar{D}$, причем

$$\alpha_{km}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \alpha_{km}(z) = \alpha_k(0) (\beta_k'(0))^m. \quad (35)$$

Из (28) и (35) следует, что $\sum_{k=1}^n |\alpha_{km}(0)| < 1$.

Следовательно, (34) удовлетворяет всем условиям Теоремы 1. Поэтому уравнение (34) имеет единственное решение и оно определяется рядом Неймана.

Таким образом, условие (8) обеспечивает существование и единственность решения уравнения (1). Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Пусть условие (8) нарушается для неотрицательных целых индексов $j = j_1, \dots, j_\nu$ ($j_1 < j_2 < \dots < j_\nu$), т.е.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta'_k(0))^j = 1, \quad j = j_1, \dots, j_\nu, \quad (36)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta'_k(0))^j \neq 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad j \neq j_1, \dots, j_\nu, \quad (37)$$

В представлении (27) берем $m = j_\nu + 1$. Из (37) следует, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(0) (\beta'_k(0))^j \neq 1, \quad j = m, m+1, \dots \quad (38)$$

Пусть A – основная (треугольная) матрица системы (32), (33) при $m = j_\nu + 1$ и пусть r – ранг матрицы A . Согласно условиям (36), (37) имеем

$$r = m - 1 \quad \text{при} \quad \nu = 1, \quad (39)$$

$$m - \nu \leq r \leq m - 1 \quad \text{при} \quad \nu \geq 2. \quad (40)$$

Однородная система алгебраических уравнений (32), (33) при $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \dots, m-1$ имеет ровно $m - r$ линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородной системы (32), (33) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ удовлетворяла $m - r$ линейно независимым условиям вида

$$\sum_{j=0}^{m-1} b_{kj} f^{(j)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, m - r, \quad (41)$$

где b_{kj} – постоянные, не зависящие от $f(z)$.

Пусть выполнены условия (41). Тогда, подставляя частное решение системы (32), (33) в (29) получим уравнение вида (34). Из (35) и (38) следует, что уравнение (34) удовлетворяет всем условиям Теоремы 2. Следовательно, оно имеет единственное решение. Подставляя постоянные $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ и функцию $\psi(z)$ в представление (27), получим частное решение уравнения (1). Таким образом, условия (41) являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородного уравнения (1).

Подставляя общее решение однородной системы (32), (33) в (29), построим решение однородного уравнения (1) в виде

$$\varphi(z) = d_1 \varphi_1(z) + d_2 \varphi_2(z) + \dots + d_\mu \varphi_\mu(z), \quad \mu = m - r,$$

где $d_1, \dots, d_\mu$ – постоянные, а функции $\varphi_1(z), \dots, \varphi_\mu(z)$ удовлетворяют всем условиям Леммы 3. Следовательно, они линейно независимы и уравнение (1) имеет $\mu = m - r$ линейно независимых решений. Это означает, что уравнение (1) фредгольмово. Из (39), (40) и $\mu = m - r$ следуют соотношения (9). Теорема 3 доказана.

В ходе доказательства Теоремы 3 мы доказали следующие два утверждения :

- 1) условия разрешимости уравнения (1) и системы (32), (33) совпадают ;
- 2) числа линейно независимых решений однородного уравнения (1) и однородной системы (32), (33) совпадают.

Из Теорем 2 и 3 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Пусть в уравнения (1) имеем $n = 1$. Если выполнено условие (8), то уравнение (1) имеет единственное решение. Если же условие (8) нарушается для некоторого $j \geq 0$, то однородная уравнение (1) имеет только одно линейно независимое решение.

§3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Пусть D – односвязная ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ и $O \in D$. В области D рассмотрим следующую задачу : найти функцию $u(z)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \in D. \quad (42)$$

$$u(z) = \sum_{k=1}^n a_k u(\beta_k(z)) + g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (43)$$

где a_k – вещественные постоянные, $g(z)$ – вещественная функция, $\beta_k(z)$ – аналитическая функция в D .

Предположим, что $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ , а $\beta_k(z)$ и $u(z)$ удовлетворяют этому условию в $\bar{D}$, причем $\beta_k(z) \in D$ при $z \in \bar{D}$, $\beta_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 4. Для однозначной разрешимости задачи (42), (43) условие

$$\sum_{k=1}^n a_k (\beta'_k(0))^j \neq 1, \quad j = 0, 1, \dots \quad (44)$$

является необходимым и достаточным.

Доказательство : Представим решение уравнения (42) в виде (см. [2]) :

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \psi(z), \quad (45)$$

где $\psi(z)$ аналитична в D , непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет дополнительному условию

$$\operatorname{Im} \psi(0) = 0. \quad (46)$$

Подставляя $u(x, y)$ из (45) в (43), получим

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (47)$$

где

$$\Phi(z) = \psi(z) - \sum_{k=1}^n a_k \psi(\beta_k(z)). \quad (48)$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Из граничного условия (47) она определяется с точностью до мнимой постоянной [2] :

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + i c_0, \quad (49)$$

где $\Phi_0(z)$ – частное решение задачи (47), а c_0 – вещественная постоянная.

Подставляя $\Phi(z)$ из (49) в (48), получим

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n a_k \psi(\beta_k(z)) + \Phi_0(z) + i c_0. \quad (50)$$

Из (46) следует, что $\psi(z)$ можно представить в виде

$$\psi(z) = c + z \varphi(z), \quad (51)$$

где c – вещественная постоянная, а $\varphi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$.

Подставляя $\psi(z)$ из (51) в (50), получим

$$c + z \varphi(z) = \sum_{k=1}^n a_k c + \sum_{k=1}^n a_k \beta_k(z) \varphi(\beta_k(z)) + \Phi_0(z) + i c_0, \quad (52)$$

и подставляя $z = 0$, имеем

$$c \left(1 - \sum_{k=1}^n a_k \right) = \Phi_0(0) + i c_0. \quad (53)$$

Так как c и c_0 вещественны, то равенство (53) можно записать в виде

$$c \left(1 - \sum_{k=1}^n a_k \right) = \operatorname{Re} \Phi_0(0), \quad c_0 = -\operatorname{Im} \Phi(0). \quad (54)$$

Учитывая (53), уравнение (52) запишем в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z} \beta_k(z) \varphi(\beta_k(z)) + f(z), \quad (55)$$

где

$$f(z) = \frac{\Phi_0(z) - \Phi_0(0)}{z}.$$

Подставляя $\psi(z)$ из (51) в (45), получим

$$u(x, y) = c + \operatorname{Re}(z \varphi(z)), \quad (56)$$

где c и $\varphi(z)$ – решения уравнений (54) и (55), соответственно. Следовательно, решение задачи (42), (43) сводится к решению уравнения (55), которое исследовано в §1.

Ясно, что условием однозначной разрешимости задачи (54) является $\sum_{k=1}^n a_k \neq 1$, т.е. (44) при $j = 0$, а условием однозначной разрешимости задачи (55) является (44) при $j = 1, 2, \dots$. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим теперь число линейно независимых решений однородной задачи (42), (43) (поле вещественных чисел) и однородного уравнения (55) (поле комплексных чисел).

Если $g(z) \equiv 0$, то уравнения (54) и (55) принимают вид

$$A_0 c = 0, \quad (57)$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\beta_k(z)}{z} \varphi(\beta_k(z)), \quad (58)$$

где $A_0 = \sum_{k=1}^n a_k$.

Пусть $A_0 \neq 0$. Из (56), (57) следует, что $c = 0$ и

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(z \varphi(z)), \quad (59)$$

где $\varphi(z)$ – решение уравнения (58). Пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_\mu(z)$ – линейно независимые решения уравнения (58). Тогда общее решение уравнения (58) записывается в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\mu} (c_k + i d_k) \varphi_k(z), \quad (60)$$

где c_k и d_k – вещественные постоянные. Подставляя $\varphi(z)$ из (60) в (59) находим, что функции $\operatorname{Re}(z \varphi_k(z))$ и $\operatorname{Re}(i z \varphi_k(z))$, $k = 1, \dots, \mu$ образуют полную систему линейно независимых решений однородной задачи (42), (43). При $A_0 = 1$ аналогичная система образуется функциями 1 , $\operatorname{Re}(z \varphi_k(z))$ и $\operatorname{Re}(i z \varphi_k(z))$, $k = 1, \dots, \mu$. Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 5. Число k линейно независимых решений однородной задачи (42), (43) определяется формулой

$$k = \begin{cases} 2\mu & \text{при } A_0 \neq 1, \\ 2\mu + 1 & \text{при } A_0 = 1, \end{cases}$$

где μ – число линейно независимых решений уравнения (58).

Итак, если $A_0 \neq 1$, то задача (42), (43) имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (55) имеет решение. Если же $A_0 = 1$, то дополнительно полагаем, что $\operatorname{Re} \Phi_0(0) = 0$.

Используя Теоремы 4, 5 и Следствие 1, получим

Следствие 2. Если в (43) имеем $n = 1$ и $a_1 = 1$, то однородная задача (42), (43) имеет только одно линейно независимое решение. Если же $a_1 \neq 1$ и условие (44) нарушается для некоторого натурального числа j , то (42), (43) имеет два линейно независимых решения. В остальных случаях однородная задача (42), (43) имеет только нулевое решение.

ABSTRACT. The paper studies functional equations with shifts in a class of analytic functions and derives necessary and sufficient conditions for their solvability. The results are applied in the study of nonlocal boundary value problems for Laplace equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. World Scientific, Singapore, 1994.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы Теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.

22 июля 1999

Армянский государственный
инженерный университет

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА СО СМЕЩЕНИЯМИ

Н. Е. Товмасян, Г. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

В статье задача Римана-Гильберта со сдвигами сводится к системе сингулярных интегральных уравнений нормального вида и вычисляется соответствующий индекс. Условие разрешимости формулируется в терминах сопряженной задачи. Результаты применяются к некоторым краевым задачам для эллиптических уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D_0, D_1, \dots, D_n$ — $(m+1)$ -связные ограниченные области на плоскости с границами $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, соответственно. Предположим что

$$\Gamma_j = \bigcup_{k=0}^m \Gamma_{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

где $\Gamma_{j0}, \Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{jm}$ — простые гладкие замкнутые кривые, удовлетворяющие условию Ляпунова (см. [1]). Предположим, что $\Gamma_{j0}, \Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{jm}$ не имеют общих точек, причем Γ_{j0} содержит контуры $\Gamma_{j1}, \dots, \Gamma_{jm}$. Каждую кривую направим против часовой стрелки.

Пусть функция $\alpha_j(t)$ из класса $C^2_\beta(\Gamma_0)$ взаимно однозначно отображает Γ_0 на Γ_j , сохраняя направление обхода, $j = 1, \dots, n$. Предположим, что $\alpha_j(t)$ отображает Γ_{0k} на контур Γ_{jk} , $k = 1, \dots, m$ и удовлетворяет условию $\alpha'_j(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma_0$.

Задача Римана-Гильберта со сдвигами для нескольких неизвестных функций состоит в следующем: найти функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, аналитические в областях $D_1, \dots, D_n$ и непрерывные по Гельдеру в замкнутых областях $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$ ($\overline{D}_k = D_k \cup \Gamma_k$) соответственно, удовлетворяющие граничным условиям

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n a_{kj}(t) \varphi_j(\alpha_j(t)) = f_k(t), \quad t \in \Gamma_0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (0.2)$$

где $a_{kj}(t), f_k(t)$ — функции из класса $C_\beta(\Gamma_0)$. При $f_k(t) \equiv 0$, $k = 1, \dots, n$ задача (0.2) называется однородной. Положим $\Phi(t) = [\varphi_1(\alpha_1(t)), \dots, \varphi_n(\alpha_n(t))]$, $f(t) =$

$[f_1(t), \dots, f_n(t)]$, $A(t) = \|a_{kj}(t)\|_{k,j=1}^n$. Граничное условие (0.2) можно записать в виде $\operatorname{Re} [A(t)\Phi(t)] = f(t)$, $t \in \Gamma_0$. Будем предполагать, что $\det A(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma_0$. В случае, когда $\alpha_k(t) \equiv t$, $m = 0$ и $D_k = D_0$, $k = 1, \dots, n$ задача (0.2) исследована в [1], [2].

Настоящая статья содержит следующие результаты. В §1 задача (0.2) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений нормального вида и вычисляется ее индекс. В §2 строится однородная задача, сопряженная к задаче (0.2) и выписываются условия разрешимости задачи (0.2) в терминах сопряженной задачи. В §3 рассматриваются применения к краевым задачам для эллиптических уравнений.

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам понадобятся некоторые интегральные представления аналитических функций, которые мы получим, используя некоторые результаты из [1]. Все функции, заданные в области D или на границе Γ , предполагаются непрерывными по Гельдеру в замкнутой области $\bar{D}$ или на границе Γ , соответственно. Предположим также, что Γ — гладкая.

Пусть G_0, G_1, G_2 — односвязные ограниченные области на плоскости с границами γ_0, γ_1 и γ_2 , соответственно. Пусть G_j^- , $j = 0, 1, 2$ — дополнение замкнутой области $G_j \cup \gamma_j$ до полной комплексной плоскости. Пусть функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ аналитичны в областях G_0, G_1, G_2 , $G_0^- = G_1^-, G_2^-$, соответственно и $\psi_j(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_j(z) = 0$, $j = 0, 1, 2$.

Лемма 1.1. Функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\nu(t)}{t-z} dt + i \int_{\gamma_0} \mu_0(t) ds,$$

$$\psi_j(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\mu_j(t)}{t-z} dt, \quad j = 0, 1,$$

$$\psi_2(z) = \frac{1}{z-z_2} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t-z} dt + \int_{\gamma_1} \mu_1(t) ds + i \int_{\gamma_2} \mu_2(t) ds \right), \quad z_2 \in G_2,$$

где $\nu(t)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — вещественнозначные функции, $ds = |dt|$ — длина дуги. Функции $\mu_0(t)$ и $\nu(t)$ определяются по $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ единственным образом, а $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ определяются по $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ единственным образом.

Доказательство : Функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ допускают представления (см. [1])

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\nu(t)}{t-z} dt + iC_0, \quad \psi_0(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\mu_0(t)}{t-z} dt, \quad (1.1)$$

где $\mu_0(t)$ и $\nu(t)$ – вещественнозначные функции, а C_0 – вещественная постоянная. Функция $\nu(t)$ и постоянная C_0 определяются единственным образом, а $\mu_1(t)$ определяется с точностью до вещественного постоянного слагаемого. Поэтому при дополнительном предположении

$$\int_{\gamma_0} \mu_0(t) ds = C_0, \quad (1.2)$$

функция $\mu_0(t)$ также определяется однозначно. Из (1.1) и (1.2) следует справедливость утверждения.

Теперь представим функцию $\psi_2(z)$ в виде

$$\psi_2(z) = \frac{C}{z - z_2} + \frac{\omega_2(z)}{z - z_2}, \quad z_2 \in G_2, \quad (1.3)$$

где C – комплексная постоянная, а $\omega_2(z)$ – аналитическая функция в G_2^- , удовлетворяющая уравнению $\omega_2(\infty) = 0$. Согласно (1.1), функции $\omega_2(z)$ и $\psi_1(z)$ единственным образом можно представить в виде

$$\omega_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z} dt, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\mu_1(t)}{t - z} dt, \quad (1.4)$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, причем

$$\int_{\gamma_1} \mu_1(t) ds = \operatorname{Re} C, \quad \int_{\gamma_2} \mu_2(t) ds = \operatorname{Im} C. \quad (1.5)$$

Доказательство завершено.

Лемма 1.2. Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\mu_1(t)}{t - z} dt + \frac{i}{\pi} \int_{\gamma_2} \mu_2(t) ds, \quad (1.6)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{z - z_2} \frac{1}{\pi i} \left(\int_{\gamma_1} \frac{\mu_2(t)}{t - z} dt - \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z_2} dt \right), \quad z_2 \in G_2, \quad (1.7)$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, определяемые по $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ единственным образом. Из (1.7) $\mu_2(t)$ однозначно определяется по $\varphi_2(z)$ с точностью до вещественного постоянного слагаемого.

Доказательство : Используя (1.1), функции $\varphi_1(z)$ и $(z - z_2)\varphi_2(z)$ представим в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\mu_1(t)}{t - z} dt + iC_1, \quad (1.8)$$

$$(z - z_2)\varphi_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z} dt + iC_2, \quad (1.9)$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ – вещественнозначные функции, C_1 и C_2 – вещественные постоянные, причем эти величины определяются однозначно. Подставляя $z = z_2$ в (1.9), получим

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\mu_2(t)}{t - z_2} dt. \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) имеем (1.7). Функцию $\mu_2(t)$ в (1.7) можно заменить на $\mu_2(t) + C_0$, где C_0 – произвольная вещественная постоянная. Следовательно, можно предположить, что функция $\mu_2(t)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{\gamma_2} \mu_2(t) ds = C_1. \quad (1.11)$$

Подставляя значение C_1 из (1.11) в (1.8), получим (1.6). Единственность представлений (1.6) и (1.7) следует из единственности представлений (1.8) и (1.9).

Единственность $\mu_2(t)$ можно доказать аналогично. Лемма 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь области $D_0, D_1, \dots, D_n$, описанные во Введении.

Лемма 1.3. Если $m = 2\nu + 1$ – нечетное число, то любая аналитическая в D_j функция $\varphi_j(z)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) = & \sum_{k=0}^{\nu+1} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t - z} dt + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=\nu+2}^m \frac{1}{z - z_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t - z} dt + i \int_{\Gamma_{j1}} \mu_j(t) ds + \\ & + \sum_{k=\nu+2}^m \frac{1}{z - z_{jk}} \left[i \int_{\Gamma_{jk}} \mu_j(t) ds + \int_{\Gamma_{j,k-\nu}} \mu_j(t) ds \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\mu_j(t)$ – вещественнозначная функция, определенная на Γ_j единственным образом по $\varphi_j(z)$, а z_{jk} – фиксированная точка внутри контура Γ_{jk} .

Доказательство : Пусть D_{jk} , $k = 0, 1, \dots, m$ – односвязные ограниченные области с границами Γ_{jk} . Пусть D_{jk}^- – дополнение замкнутой области $D_{jk} \cup \Gamma_{jk}$ до полной комплексной плоскости. Представим функцию $\varphi_j(z)$ в виде

$$\varphi_j(z) = \varphi_{j0}(z) + \varphi_{j1}(z) + \dots + \varphi_{jm}(z), \quad (1.13)$$

где $\varphi_{j0}(z)$ аналитична в D_{j0} , а $\varphi_{j1}(z), \dots, \varphi_{jm}(z)$ аналитичны в $D_{j1}^-, \dots, D_{jm}^-$ соответственно и $\varphi_{jk}(\infty) = 0$, $k = 1, \dots, m$. В (1.13) функции $\varphi_{j0}(z), \dots, \varphi_{jm}(z)$ определяются через $\varphi_j(z)$ единственным образом. Применяя Лемму 1.1 к парам функций $\varphi_{j0}(z), \varphi_{j1}(z)$ и $\varphi_{jk}(z), \varphi_{j,\nu+k}(z)$, $k = 2, \dots, \nu + 1$, получим представление (1.12). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. Если $m = 2\nu$ – четное число, то любая аналитическая в D_j функция $\varphi_j(z)$ представима в виде

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t-z} dt + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=\nu+1}^m \frac{1}{z-z_{jk}} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t-z} dt +$$

$$+ iC_j + \sum_{k=\nu+1}^m \frac{1}{z-z_{jk}} \left(i \int_{\Gamma_{jk}} \mu_j(t) ds + \int_{\Gamma_{j,k-\nu}} \mu_j(t) ds \right), \quad (1.14)$$

где $\mu_j(t)$ – вещественнозначная функция, определенная на Γ_j , а C_j – вещественные постоянные, определяемые по $\varphi_j(z)$ единственным образом.

Доказательство : Предположим, что имеет место представление (1.13). Применяя (1.8) к $\varphi_{j0}(z)$ и Лемму 1.1 к паре функций $\varphi_{jk}(z), \varphi_{j,\nu+k}(z), k = 1, \dots, \nu$, получим представление (1.14). Лемма 1.4 доказана.

§2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (0.2)

Пусть $m = 2\nu + 1$ – нечетное число. Представим аналитические функции $\varphi_j(z)$ в виде (1.12) и положим

$$\Psi_{jk}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(t)}{t-z} dt, \quad z \in D_j. \quad (2.1)$$

Пусть $t_0 \in \Gamma_{0k}$. Переходя к пределу в (2.1) при $z \rightarrow \alpha_j(t_0)$ и используя формулу Сохоцкого-Племеля [1], получим

$$\Psi_{jk}(\alpha_j(t_0)) = \mu_j(\alpha_j(t_0)) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{jk}} \frac{\mu_j(\tau)}{\tau - \alpha_j(t_0)} d\tau. \quad (2.2)$$

Здесь и ниже сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. см. [1]. Заменой переменной $\tau = \alpha_j(t)$, (2.2) можно записать в виде

$$\Psi_{jk}(\alpha_j(t_0)) = \nu_j(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} \frac{\nu_j(t) \alpha'_j(t)}{\alpha_j(t) - \alpha_j(t_0)} dt, \quad t_0 \in \Gamma_{0k},$$

где $\nu_j(t) = \mu_j(\alpha_j(t))$. Последнее соотношение представим в виде

$$\Psi_{jk}(\alpha_j(t_0)) = \nu_j(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} \frac{\nu_j(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{0k}} H_j(t_0, t) \nu_j(t) dt, \quad t_0 \in \Gamma_{0k}, \quad (2.3)$$

где

$$H_j(t_0, t) = \frac{\alpha'_j(t)}{\alpha_j(t) - \alpha_j(t_0)} - \frac{1}{t-t_0}.$$

Как показано в [1]

$$H_j(t_0, t) = \frac{H_j^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\beta}, \quad 0 < \beta = \text{const} < 1, \quad (2.4)$$

где $H_j^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера относительно t и t_0 . Ядро вида $H_j(t_0, t)$ называется фредгольмовым. Положим

$$P_j(t_0) = \text{diag} \left[\frac{1}{\alpha_1(t_0) - z_{1j}}, \dots, \frac{1}{\alpha_n(t_0) - z_{nj}} \right].$$

Подставляя функцию $\varphi_j(z)$ из (1.12) в граничное условие (0.2) и используя (2.3), для $t_0 \in \Gamma_0$ получим

$$\text{Re } B(t_0)\nu(t_0) + \text{Re} \left[B(t_0) \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\nu(t)}{t - t_0} dt \right] + \int_{\Gamma_0} K_1(t_0, t)\nu(t) ds = f(t_0), \quad (2.5)$$

где $\nu(t) = [\nu_1(t), \dots, \nu_n(t)]$ — неизвестный вещественнозначный вектор-столбец,

$$B(t) = \begin{cases} A(t) & \text{при } j = 0, 1, \dots, \nu + 1, \\ A(t)P_j(t) & \text{при } j = \nu + 2, \dots, m, \end{cases} \quad t \in \Gamma_0, \quad (2.6)$$

а $K_1(t_0, t)$ — вполне определенная $n \times n$ -квадратная матрица, элементы которой представляются в виде (2.4). Это означает, что ядро $K_1(t_0, t)$ фредгольмово.

Далее, второе слагаемое в левой части (2.5) представим в виде

$$\text{Im } B(t_0) \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\nu(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} K_2(t_0, t)\nu(t) ds,$$

где $K_2(t_0, t)$ — фредгольмово ядро. Тогда характеристическое уравнение сингулярного интегрального уравнения (2.5) задается формулой

$$K^0 \nu \equiv A_1(t_0) + B_1(t_0) \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\nu(t)}{t - t_0} dt = f(t_0), \quad (2.7)$$

где $A_1(t) = \text{Re } B(t)$, $B_1(t) = i \text{Im } B(t)$. Ясно, что (2.5) можно записать в виде

$$K\nu \equiv \text{Re } B(t_0)\nu(t_0) + \int_{\Gamma_0} K(t_0, t)\nu(t) ds = f(t_0), \quad (2.8)$$

где $K(t_0, t)$ — вещественнозначная $n \times n$ -квадратная матрица. Уравнение

$$K'\delta \equiv \delta(t_0) \text{Re } B(t_0) + \int_{\Gamma_0} \delta(t_0)K(t, t_0) ds = 0,$$

где $\delta(t)$ — искомая вещественнозначная n -мерная вектор-строка, называется однородным уравнением, сопряженным к (2.8).

Пусть $a(t)$ — функция, определенная на Γ_0 такая, что $a(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma_0$.

Приращение $\arg a(t)$, деленное на 2π , когда точка t описывает один раз контур

Γ_0 в положительном направлении, называется индексом функции $a(t)$ на Γ_0 .

Обозначим через l_0 — число линейно независимых решений однородной задачи

(2.5) (при $f \equiv 0$), а через l'_0 — число линейно независимых решений сопряженного

однородного уравнения $K'\delta = 0$. Из теории сингулярных интегральных уравнений известны следующие факты [1].

1) Уравнение (2.7) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma_0} \delta_j(t) f(t) ds = 0, \quad j = 1, \dots, l'_0, \quad (2.9)$$

где $\delta_1(t), \dots, \delta_{l'_0}(t)$ — полная система линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения $K'\delta = 0$.

2) $l_0 - l'_0 = -2\kappa$, где κ — индекс $\det B(t)$ на контуре Γ_0 .

Из (2.6) следует, что $l_0 - l'_0 = -2\rho_0 - n(m-1)$, где ρ_0 — индекс $\det A(t)$ на Γ_0 .

Пусть κ_0 — число линейно независимых решений однородной задачи (0.2), а κ'_0 — число условий вида (2.9), которые необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (0.2). Из единственности представления (1.12) следует $\kappa_0 = l_0$ и $\kappa'_0 = l'_0$. Следовательно

$$\kappa_0 - \kappa'_0 = -2\rho_0 - n(m-1). \quad (2.10)$$

Пусть теперь $m = 2\nu$ четно. Используя (1.14), задачу (0.2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению нормального вида, который также содержит неизвестные вещественные постоянные $C_1, \dots, C_n$ (см. [1] и [3]).

В этом случае из единственности представления (1.14) следует (2.10). Число $\kappa_0 - \kappa'_0$ называется индексом задачи (0.2). Таким образом, не решая задачу (0.2) можно вычислять ее индекс.

Замечание. Если m четно, то используя Леммы 1.1, 1.2. задачу (0.2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению нормального вида (2.5), которое не содержит неизвестные постоянные. В этом случае имеем $\kappa_0 = l_0$ и $\kappa'_0 = l'_0$ при четном n , а $\kappa_0 = l_0 - 1$ и $\kappa'_0 = l'_0$ при нечетном n .

§3. СОПРЯЖЕННАЯ ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Здесь при решении сопряженной однородной задачи Римана-Гильберта, определяются вещественнозначные вектор-функции $\delta_1(t), \dots, \delta_{l'_0}(t)$, $t \in \Gamma$ из (2.9).

Пусть $\psi(t) = \delta_k(t)$ — вещественнозначная вектор-функция из (2.9). Записав $b_k(t)$ для k -ого столбца матрицы $A(t)$, граничное условие (0.2) примет вид

$$\operatorname{Re} [b_1(t)\varphi_1(\alpha_1(t)) + \dots + b_n(t)\varphi_n(\alpha_n(t))] = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (3.1)$$

Граничная задача (3.1) разрешима, если ее правая часть имеет вид $f_1 = \operatorname{Re} [b_k(t)\varphi_k(\alpha_k(t))]$ или $f_2 = \operatorname{Re} [b_k(t)i\varphi_k(\alpha_k(t))]$. Тогда соответствующими решениями будут функции $(0, \dots, 0, \varphi_k(\zeta), 0, \dots, 0)$ и $(0, \dots, 0, i\varphi_k(\zeta), 0, \dots, 0)$, где $\varphi_k(\zeta)$ аналитична в D_k , и условия разрешимости (2.9) выполнены. Следовательно,

$$\int_{\Gamma} \psi(t)b_k(t)\varphi_k(\alpha_k(t)) ds = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Пусть функции $t = \beta_k(\tau)$, $\tau \in \Gamma_k$ обратны к $\tau = \alpha_k(t)$, $t \in \Gamma$. В параметрических уравнениях $t = t(s)$ и $\tau = \tau_k(\sigma_k)$ контуров Γ и Γ_k соответственно, пусть s и σ_k — длины дуг. Подставляя $t = \beta_k(\tau)$ в (3.2) и учитывая, что $ds = |dt| = |\beta'_k(\tau)| \cdot |d\tau| = |\beta'_k(\tau)| d\sigma_k$, получим

$$\int_{\Gamma_k} \psi(\beta_k(\tau))b_k(\beta_k(\tau))\varphi_k(\tau)|\beta'_k(\tau)|\sigma'_k(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Так как соотношение (3.3) выполняется для любой функции $\varphi_k(\zeta)$, аналитичной в D_k , то функция

$$\omega_k(\tau) = \psi(\beta_k(\tau))b_k(\beta_k(\tau))|\beta'_k(\tau)|\sigma'_k(\tau) \quad (3.4)$$

является граничным значением некоторой аналитической в D_k функции $\omega_k(\zeta)$ (см. [1]). Используя $\tau = \alpha_k(t)$ и

$$\beta'_k(\tau) = \frac{1}{\alpha'_k(t)}, \quad \sigma'_k(\tau) = \frac{|\alpha'_k(t)|}{\alpha_k(t)t'(s)},$$

(3.4) запишется в виде

$$\psi(t)b_k(t) = \alpha'_k(t)t'(s)\omega_k(\alpha_k(t)), \quad t \in \Gamma, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Положим

$$\omega(t) = [\omega_1(\alpha_1(t)), \dots, \omega_n(\alpha_n(t))], \quad \gamma(t) = \operatorname{diag} \left(\frac{d\alpha_1(t)}{ds}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{ds} \right).$$

Ясно, что

$$\frac{d\alpha_k(t)}{ds} = \alpha'_k(\tau)t'(s).$$

Запишем (3.5) в виде

$$\psi(t) = \omega(t)\gamma(t)A^{-1}(t), \quad t \in \Gamma. \quad (3.6)$$

Так как $\psi(t)$ — вещественнозначная, то $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} [i\omega(t)\gamma(t)A^{-1}(t)] = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (3.7)$$

Таким образом, получили однородную задачу Римана-Гильберта, сопряженную к задаче (0.2) : найти аналитические в областях $D_1, \dots, D_n$ функции $\omega_1(\zeta), \dots, \omega_n(\zeta)$ соответственно, которые непрерывны по Гельдеру в $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n$ и удовлетворяют (3.7).

Покажем, что если при заданной вектор-функции $f(t)$ задача (0.2) имеет решение, то

$$\int_{\Gamma} \psi(t) f(t) ds = 0 \quad (3.8)$$

для вектор функции $\psi(t)$, допускающей представление (3.6), где $\omega(t)$ – произвольное решение задачи (3.7). Действительно, пусть $f(t) = \operatorname{Re} [A(t)\Phi(t)]$, а $\omega(t)$ – решение задачи (3.7). Так как (3.6) вещественнозначна, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \psi(t) f(t) ds &= \int_{\Gamma} \omega(t) \gamma(t) A^{-1}(t) \operatorname{Re} [A(t)\Phi(t)] ds = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \omega(t) \gamma(t) \Phi(t) ds = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} \omega_k(\alpha_k(t)) \frac{d\alpha_k(t)}{ds} \varphi_k(\alpha_k(t)) ds = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \omega_k(\tau) \varphi_k(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $f(t)$ удовлетворяет условию (3.8) для всех вектор функций $\psi(t)$, допускающих представление (3.6). Так как $\delta_1(t), \dots, \delta_r(t)$ обладает этим свойством, то соотношение (2.9) выполняется. Следовательно, задача (0.2) имеет решение. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Условие (3.8), где $\psi(t)$ определяется из (3.6), а $\omega(t)$ – решение задачи (3.7), является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (0.2).

§4. ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Пусть D – $(m+1)$ -связная ограниченная область с границей Γ . В D рассмотрим эллиптическую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_0 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (x, y) \in D, \quad (4.1)$$

где A_0 – $(n \times n)$ -квадратная матрица с постоянными элементами, а $U = (U_1, \dots, U_n)$ – искомое решение. Система (4.1) называется эллиптической, если характеристическое уравнение

$$\det(\lambda E - A_0) = 0, \quad E = \text{unit } (n \times n)\text{-matrix} \quad (4.2)$$

не имеет вещественных корней. Будем предполагать, что корни характеристического уравнения (4.2) простые и удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \lambda_j > 0, & j = 1, \dots, p, \\ \operatorname{Im} \lambda_j < 0, & j = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Граничная задача Римана-Гильберта заключается в отыскании решения $U(x, y)$ системы (4.1), непрерывного по Гельдеру в $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и удовлетворяющего граничному условию

$$\operatorname{Re} [B(t)U(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (4.3)$$

где $B(t)$ — $(n \times n)$ -квадратная матрица, а $f(t)$ — вещественнозначный вектор-столбец, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ . Пусть n -мерный вектор-столбец b_k является нетривиальным решением уравнения

$$(E\lambda_k - A_0)b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Известны следующие факты (см. [4]): $\operatorname{rank}(E\lambda_k - A_0) = n - 1$, и векторы $b_1, \dots, b_n$ линейно независимы. Общее решение системы (4.1) определяется формулой [4]

$$U(z) = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(x + \lambda_k y), \quad (4.4)$$

где $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ аналитична относительно $(x + \lambda_k y)$ при $(x, y) \in D$. Функции $\varphi_k(x + \lambda_k y)$, $k = 1, \dots, n$ определяются по $U(x, y)$ единственным образом. При $k = p+1, \dots, n$ функцию $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ можно представить в виде

$$\varphi_k(x + \lambda_k y) = \overline{\psi_k(x + \bar{\lambda}_k y)}, \quad k = p+1, \dots, n, \quad (4.5)$$

где $\psi_k(x + \bar{\lambda}_k y)$ аналитична относительно $(x + \bar{\lambda}_k y)$ при $(x, y) \in D$. Из (4.4) и (4.5) имеем

$$U(z) = \sum_{k=1}^p b_k \varphi_k(x + \lambda_k y) + \sum_{k=p+1}^n b_k \overline{\psi_k(x + \bar{\lambda}_k y)}. \quad (4.6)$$

Подставляя общее решение (4.6) в граничное условие (4.3), получим

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^p B(z)b_k \varphi_k(x + \lambda_k y) + \sum_{k=p+1}^n B(z)b_k \overline{\psi_k(x + \bar{\lambda}_k y)} \right] = f(t), \quad t = x + iy \in \Gamma. \quad (4.7)$$

Положим

$$\omega_k(z) = \begin{cases} \varphi_k(x + \lambda_k y), & k = 1, \dots, p, \\ \psi_k(x + \bar{\lambda}_k y), & k = p+1, \dots, n, \end{cases} \quad a_k(z) = \begin{cases} B(z)b_k, & k = 1, \dots, p, \\ \overline{B(z)b_k}, & k = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Ясно, что $\omega_k(\zeta)$ аналитична в D_k , где D_k – образ области D при отображении

$$\zeta = \alpha_k(z) = \begin{cases} (x + \lambda_k y), & k = 1, \dots, p, \\ (x + \bar{\lambda}_k y), & k = p + 1, \dots, n, \end{cases} \quad z \in D.$$

Граничное условие (4.7) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n a_k(t) \omega_k(\alpha_k(t)) \right] = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (4.8)$$

Пусть $A(t)$ – матрица со столбцами $a_k(t)$. Предположим, что $\det A(t) \neq 0$ для любой точки $t \in \Gamma$. Задача (4.1), (4.3) сводится к задаче (4.8) из §3. Индекс задачи (4.1), (4.3) совпадает с индексом задачи. Из результатов §1 получаем

Следствие 1. При условии $\det A(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ индекс задачи (4.1), (4.3) равен $n - 2\chi$ – т.е., где χ – индекс функции $\det A(t)$ на Γ .

2. В односвязной ограниченной области D рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (4.9)$$

где A, B, C – комплексные постоянные, $C \neq 0$. Предположим, что на границе Γ области D функция $U(z)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \left[a_{j1}(z) \frac{\partial U}{\partial x} + b_{j1}(z) \frac{\partial U}{\partial y} + c_j(z) U \right] = f_j(z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Gamma, \quad (4.10)$$

где функции a_{j1}, c_j, b_{j1}, f_j , $j = 1, 2$ определены на Γ и удовлетворяют условию Гельдера, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ предполагаются вещественнозначными. Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$. Предположим, что $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Общее решение уравнения (4.9) определяется по [4]

$$U(x, y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y), \quad (4.11)$$

где $\varphi_k(x + \lambda_k y)$, $k = 1, 2$ аналитичны относительно $(x + \lambda_k y)$ при $(x, y) \in D$. Не умаляя общности можно предположить, что D содержит начало координат и $\varphi_2(0) = 0$. Тогда функции φ_1 и φ_2 определяются по $U(x, y)$ единственным образом.

Пусть D_j , $j = 1, 2$ – образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda_j y$, где $(x, y) \in D$. Тогда

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{d(\zeta \varphi_1(\zeta))}{d\zeta} d\zeta, \quad z \in D_1, \quad \varphi_2(z) = \int_0^z \frac{d\varphi_2(\zeta)}{d\zeta} d\zeta, \quad z \in D_2.$$

Следовательно, функции φ_1 и φ_2 представляются в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \psi_1(\zeta) d\zeta, \quad z \in D_1, \quad \varphi_2(z) = \int_0^z \psi_2(\zeta) d\zeta, \quad z \in D_2,$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ аналитичны в D_1 и D_2 , соответственно. Поэтому (4.11) запишется в виде

$$U(x, y) = \frac{1}{x + \lambda_1 y} \int_0^{x + \lambda_1 y} \psi_1(\zeta) d\zeta + \int_0^{x + \lambda_2 y} \psi_2(\zeta) d\zeta. \quad (4.12)$$

Подставляя $U(x, y)$ из (4.12) в (4.10), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[A_{j1}(z) \psi_1(\alpha_1(z)) + A_{j2}(z) \psi_2(\alpha_2(z)) + B_{j1}(z) \int_0^{\alpha_1(z)} \psi_1(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + B_{j2}(z) \int_0^{\alpha_2(z)} \psi_2(\zeta) d\zeta \right] = f_j(z), \quad j = 1, 2, \quad z \in \Gamma, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$A_{j1}(z) = \frac{1}{\alpha_1(z)} [a_{j1}(z) + \lambda_1 b_{j1}(z)], \quad A_{j2}(z) = a_{j1}(z) + \lambda_2 b_{j1}(z), \quad \alpha_j(z) = x + \lambda_j y,$$

$$B_{j1}(z) = -\frac{1}{(\alpha_1(z))^2} [a_{j1}(z) + \lambda_1 b_{j1}(z)] + \frac{c_j(z)}{\alpha_1(z)}, \quad B_{j2}(z) = c_j(z), \quad j = 1, 2.$$

Так называемое условие нормальности задачи (4.9), (4.10) есть

$$A_{11}(z)A_{22}(z) - A_{12}(z)A_{21}(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \quad (4.14)$$

Задачи (4.9), (4.10) и (4.13) эквивалентны, поэтому их индексы совпадают.

Применяя результаты §1 для задачи (4.13), получим

Следствие 2. При условии (4.14) индекс задачи (4.9), (4.10) равен $2 - 2\chi$, где χ — индекс функции $A_{11}(z)A_{22}(z) - A_{12}(z)A_{21}(z)$ на Γ .

3. Пусть $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Рассмотрим граничные условия (4.10) вида

$$\operatorname{Re} [a_1(z)U(z)] = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \quad (4.15)$$

$$\operatorname{Re} \left[a_2(z) \frac{\partial U}{\partial N} \right] = f_2(z), \quad z \in \Gamma. \quad (4.16)$$

где достаточно гладкие функции $a_j, f_j, j = 1, 2$ определены на Γ , $\frac{\partial U}{\partial N}$ — производная функции $U(z)$ по направлению внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ предполагаются вещественнозначными, причем

$$a_1(z) \neq 0, \quad a_2(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma. \quad (4.17)$$

Из (4.15) имеем

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial s} (a_1(z)U(z)) \right] = \frac{\partial f_1(z)}{\partial s}, \quad z \in \Gamma, \quad (4.18)$$

где $\frac{\partial f_1}{\partial s}$ – производная функции $f_1(z)$ относительно длины дуги на Γ . Из (4.15) и (4.18) получим

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial s} (a_1(z)U(z)) + a_2(z)U(z) \right] = \frac{\partial f_1(z)}{\partial s} + f_1(z), \quad z \in \Gamma. \quad (4.19)$$

В классе непрерывно дифференцируемых функций условия (4.15) и (4.19) эквивалентны.

Отметим, что условия (4.16) и (4.19) являются частным случаем граничных условий (4.10). Легко установить, что из (4.17) следует условие нормальности задачи (4.9), (4.16), (4.19).

Применяя Следствие 2 к задаче (4.9), (4.16), (4.19), приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. При условии (4.17) индекс задачи (4.9), (4.15), (4.16) равен $4 - 2\chi_1 - 2\chi_2$, где

$$\chi_j = \frac{1}{2\pi} [\arg a_j(z)]_\Gamma, \quad j = 1, 2.$$

ABSTRACT. The paper reduces the Riemann–Hilbert problem with shifts to a system of singular integral equations of normal type and calculates the corresponding index. A solvability condition is formulated in terms of conjugate problem. The results are applied to some boundary value problems for elliptic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения. Наука, Москва, 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений и Некоторые Граничные Задачи. Гостехиздат, Москва, 1950.
3. П. А. Солдатов, “Методы теории функций в краевых задачах на плоскости. Гладкий случай”, Изв. АН СССР, серия Математика, том 55, № 5, стр. 1070 – 1100, 1991.
4. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.

21 сентября 1999

Армянский государственный
инженерный университет

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Ирицян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

§1. ЗАДАЧА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В заметке рассматривается интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x,t) t^{\alpha-1} \varphi(t) dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.1)$$

где K и f – комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции, α – комплексная постоянная, $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Мы ищем решение $\varphi(x)$ уравнения (1.1) в классе $C^\infty[0, 1]$ комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$.

Уравнения (1.1) возникают, когда решаем краевые задачи для эллиптических уравнений в случае, когда нарушается условие нормальности в одной граничной точке (см. [1]). Уравнение (1.1) при $f(x) \equiv 0$ называется однородным.

Цель данной работы – найти необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (1.1) в классе $C^\infty[0, 1]$ и указать эффективный метод решения этого уравнения.

Настоящая заметка содержит следующие две теоремы.

Теорема 1. Интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение в классе $C^\infty[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{K(0,0)}{\alpha + \lambda} \neq 1, \quad \lambda = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

Теорема 2. Если условие (1.2) нарушается для некоторого целого $\lambda = \lambda_0 \geq 0$, то однородное уравнение (1.1) имеет только одно линейно

независимое решение. Неоднородное уравнение (1.1) имеет решение в классе $C^\infty[0, 1]$ тогда и только тогда, когда существуют комплексные постоянные $a_1, \dots, a_{\lambda_0-1}$ такие, что

$$f^{(\lambda_0)}(0) + \sum_{k=1}^{\lambda_0-1} a_k f^{(k)}(0) = 0. \quad (1.3)$$

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $\varphi(x) \in C^\infty[0, 1]$ и $m \geq 1$ – натуральное число. Тогда функция $\varphi(x)$ представляется в виде

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m \varphi_0(x), \quad (2.1)$$

где $\varphi_0(x) \in C^\infty[0, 1]$ и $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ – комплексные постоянные.

Доказательство : непосредственно следует из формулы Тейлора.

Лемма 2. Если $\varphi(x)$, $x \in [0, 1]$ – непрерывное решение уравнения (1.1), то функции $x^k \varphi^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$ также непрерывны на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство : Функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x, t) t^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \psi(0) = \frac{1}{\alpha} K(0, 0) \varphi(0) \quad (2.2)$$

непрерывна на $[0, 1]$. Дифференцируя обе части уравнения (1.1) и используя (2.2) получим, что $x\varphi'(x)$ также непрерывна на $[0, 1]$. Аналогично заключаем, что $x^k \varphi^{(k)}(x)$ непрерывны на $[0, 1]$ при любых $k = 2, 3, \dots$. Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Обозначим через M_m класс функций $\varphi(x)$, представляемых в виде (2.1), где $x^k \varphi^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \dots$ непрерывны на $[0, 1]$. Мы ищем решения уравнения (1.1) в классе M_m .

Подставляя $\varphi(x)$ из (2.1) в (1.1), получим

$$x^m \varphi_0(x) - \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x, t) t^{m+\alpha-1} \varphi_0(t) dt = F(x) \equiv f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \omega_j(x), \quad (3.1)$$

где

$$\omega_j(x) = x^j - \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x K(x, t) t^{j+\alpha-1} dt, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Так как $x^k \varphi_0^{(k)}(x)$ непрерывны на $[0, 1]$, то имеем

$$F^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.2)$$

Теперь рассмотрим ряд $\sum_{n \in N_2} a_n f_n(x)$. Для $x \notin B$ и любого m , из (9) получим

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n \leq m} a_n f_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| \leq M + \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right|.$$

Очевидно, из $x \notin B$ вытекает $x \notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$ для всех k_0 . Таким образом, $B = \bigcup_m I_m$, где I_m имеют не пересекающиеся внутренности. Имеем $N_1 = \bigcup_m \{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_m\}$ и $\{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_m\} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \{n : n \in N_1; \{n\} \subset I_{k_0,k}^{(j)}; [n] = k\}$, где k_0 — минимальное число такое, что $I_m = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$. Тогда из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| &= \left| \sum_p \sum_{\substack{\{n\} \subset I_p \\ n \leq m \\ n \in N_1}} a_n f_n(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k_0,j} \sum_{k=k_0}^{\infty} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq \sum_{k_0,j} \varphi_{k_0}^{(j)}(x) \leq \varphi(x) \end{aligned}$$

вытекает, что

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq M + \varphi(x), \quad x \notin B. \quad (17)$$

Пусть теперь $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $m \leq 2^{k_0-1}$. Имеем $m \leq 2^{k_0-1}$, $n \in N_1$ и $n \leq m$, т.е. $[n] \leq k_0 - 1$. Откуда следует, что $\{n\} \subset I_{k_0}^{(j)}$ не существует. Пусть $\{n\} \subset I_{m_0} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_{k_0,k}^{(j)}$. Тогда существует $p_0 < k_0$ такое, что $\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)}$ и $I_{p_0}^{(j_0)} \cap I_{k_0}^{(j)} = \emptyset$. Следовательно, из $x \in I_{k_0}^{(j)}$ и $\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)}$ следует, что $x \in I_{p_0,k_0}^{(j)} \setminus I_{p_0,k_0-1}^{(j)} (k_0 > p_0)$ и получаем

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)} \\ n \leq m}} a_n f_n(x) \right| \leq \sum_{p=p_0}^{k_0-1} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I_{p_0}^{(j_0)} \\ [n]=p \\ n \leq m}} a_n f_n(x) \right| \leq \sum_{p=p_0}^{k_0-1} \max_m |S_{j,k_0,k,m}(x)| \leq \varphi_{p_0}^{j_0}(x)$$

для $x \in I_{k_0}^{(j)}$. Если $m \leq 2^{k_0-1}$ и $x \in I_{k_0}^{(j)}$, то функция $\sum_{n \leq m} a_n f_n(x)$ — линейная на интервалах порядка $k_0 - 1$. Один из этих интервалов не есть интервал типа $I_{k_0-1}^{(j)}$ (в противном случае не было бы интервала $I_{k_0}^{(j)}$). Для этого интервала $\mu(I \cap E_\delta) \geq \delta \mu(I)$, откуда получим $\left| \sum_{n \leq m} a_n f_n(x) \right| \leq C_{19}(M, \delta)$ для $x \in I_{k_0}^{(j)}$.

Наконец

$$\left| \sum_{\substack{n \leq m \\ n \in N_2}} a_n f_n(x) \right| \leq C_{19}(M, \delta) + \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in I_{k_0}^{(j)}. \quad (18)$$

Теорема 3. Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x^{\alpha_j}} \int_0^x K_j(x, t) t^{\alpha_j-1} \varphi(t) dt + f(x), \quad \operatorname{Re} \alpha_j > 0$$

имеет единственное решение в классе $C^\infty[0, 1]$ тогда и только тогда, когда

$$1 - \sum_{j=1}^n \frac{K_j(0, 0)}{\alpha_j + \lambda} \neq 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasian, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, Гостехиздат, Москва, 1951.

29 сентября 1999

Армянский государственный
инженерный университет

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 35, № 1, 2000

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Многие задачи устойчивости движения тела сводятся к определению начальных условий, при которых задача Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения имеет положительное решение (см. [1]). В настоящей статье этот вопрос рассматривается для уравнения

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2k \frac{dv}{dt} + (k^2 + 1)v = a, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$v(0) = v_0 \cos \beta, \quad v'(0) = -v_0(k \cos \beta + \sin \beta), \quad (1.2)$$

где k и a – положительные постоянные. Заметим, что v_0 и β имеют определенный физический смысл, см. [1]. Мы ищем положительное решение уравнения (1.1) и поэтому будем предполагать, что v_0 – положительная постоянная, а β принадлежит интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$.

Задача (1.1), (1.2) имеет общее решение вида (см. [2])

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \cos(\beta + t) + \frac{a}{k^2 + 1} [1 - e^{-kt} (\cos t + k \sin t)]. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что параметры k , a и β фиксированы и удовлетворяют условиям $k > 0$, $a > 0$ и $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Наша цель – выяснить, при каких положительных значениях параметра v_0 задача (1.3) имеет положительное решение на полуоси $t > 0$.

Положим

$$F(\psi) = e^{k\psi} (k \cos \psi + \sin \psi) - e^{k\beta} (k \cos \beta + \sin \beta). \quad (1.4)$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\beta \neq -\arctan k$. Функция (1.3) положительна на полуоси $t > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_0 < \frac{a}{\cot(\psi_0 - \beta)(k \cos \beta + \sin \beta) + \cos \beta - k \sin \beta}, \quad (1.5)$$

где ψ_0 является

1) либо единственным решением уравнения $F(\psi) = 0$ в интервале $[\pi/2, \pi - \arctan k)$, если

$$-\arctan k < \beta < \frac{\pi}{2}; \quad (1.6)$$

2) либо единственным решением уравнения $F(\psi + \pi) = 0$ в интервале $(-\arctan k, \pi/2)$, если

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < -\arctan k. \quad (1.7)$$

При $\beta = -\arctan k$ функция (1.3) положительна на полуоси $t > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_0 < \frac{a(1 + e^{-k})}{\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (1.8)$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Случай (1.6). Пусть угол β удовлетворяет неравенству (1.6). Тогда

$$k \cos \beta + \sin \beta > 0. \quad (2.1)$$

Найдем сначала точки экстремума функции (1.3). Решениями уравнения $v'(t) = 0$ являются

$$t_n = \varphi_0 + n\pi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

где

$$\varphi_0 = \operatorname{arccot} \frac{v_0(k \sin \beta - \cos \beta) + a}{v_0(k \cos \beta + \sin \beta)}. \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.3) имеем

$$\cos \varphi_0 = \frac{[v_0(k \sin \beta - \cos \beta) + a] \sin \varphi_0}{v_0(k \cos \beta + \sin \beta)}, \quad 0 < \varphi_0 < \alpha, \quad (2.4)$$

где

$$\alpha = \arctan \frac{k \cos \beta + \sin \beta}{k \sin \beta - \cos \beta}. \quad (2.5)$$

В силу (2.4), получим

$$v''(\varphi_0 + 2n\pi) > 0, \quad v''(\varphi_0 + (2n + 1)\pi) < 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Следовательно, при $t > 0$ точками минимума функции $v(t)$ являются точки t_{2n} .

Подставляя $t = t_{2n}$ в (1.3) и используя (2.4), получим

$$v(t_{2n}) = -e^{-k(\varphi_0 + 2n\pi)} [v_0^2(k^2 + 1) - 2v_0a(\cos \beta - k \sin \beta) + a^2] \times \\ \times \frac{\sin \varphi_0}{v_0(k \cos \beta + \sin \beta)(k^2 + 1)} + \frac{a}{k^2 + 1}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим функцию $g(\omega) = \omega^2(k^2 + 1) - 2\omega a(\cos \beta - k \sin \beta) + a^2$, где β удовлетворяет неравенству (1.6). Функция $g(\omega)$ принимает свое наименьшее значение в точке

$$\omega_0 = \frac{a}{k^2 + 1}(\cos \beta - k \sin \beta), \quad g(\omega_0) = \left[1 - \frac{(\cos \beta - k \sin \beta)^2}{k^2 + 1}\right] a^2. \quad (2.8)$$

С другой стороны, $\cos \beta - k \sin \beta$ как функция от β убывает в интервале (1.6).

Следовательно

$$-k < \cos \beta - k \sin \beta < \cos(-\arctan k) - k \sin(-\arctan k) = \sqrt{1 + k^2}. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) имеем $g(\omega_0) > 0$. Из (2.7) следует, что $v(t_{2n})$ принимает свое наименьшее значение $v(\varphi_0)$ в точке $n = 0$. Так как $v(0) > 0$ и $v(\infty) > 0$, то имеем $v(t) > 0$ при $t > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v(\varphi_0) = v_0 e^{-k\varphi_0} \cos(\beta + \varphi_0) + \frac{a}{k^2 + 1} [1 - e^{-k\varphi_0} (\cos \varphi_0 + k \sin \varphi_0)] > 0. \quad (2.10)$$

где φ_0 определяется формулой (2.3). Сначала для $v_0 > 0$ решим уравнение

$$f(v_0) = v_0 e^{-k\varphi_0} \cos(\beta + \varphi_0) + \frac{a}{k^2 + 1} [1 - e^{-k\varphi_0} (\cos \varphi_0 + k \sin \varphi_0)] = 0. \quad (2.11)$$

Заменяя v_0 в (2.11) на φ , согласно (2.3), получим

$$v_0 = \frac{a}{\cot \varphi (k \cos \beta + \sin \beta) + \cos \beta - k \sin \beta}, \quad 0 < \varphi < \alpha, \quad (2.12)$$

где α определяется формулой (2.5). Следовательно

$$\cot \varphi (k \cos \beta + \sin \beta) + \cos \beta - k \sin \beta > 0. \quad (2.13)$$

Легко установить, что

$$\cot \varphi (k \cos \beta + \sin \beta) + \cos \beta - k \sin \beta = \frac{1}{\sin \varphi} [k \cos(\beta + \varphi) + \sin(\beta + \varphi)]. \quad (2.14)$$

Так как $0 < \varphi < \pi$, то из (2.13) и (2.14) имеем

$$k \cos(\beta + \varphi) + \sin(\beta + \varphi) > 0. \quad (2.15)$$

Из (2.5) получим $\cot \alpha = \frac{k \sin \beta - \cos \beta}{k \cos \beta + \sin \beta}$. Следовательно

$$k \cos(\beta + \alpha) + \sin(\beta + \alpha) = 0, \quad (2.16)$$

откуда имеем

$$\alpha + \beta = -\arctan k + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

Из (1.6) и (2.5) следует, что $-\arctan k < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$. Следовательно, равенство (2.17) имеет место при $n = 1$. Таким образом, неравенство $0 < \varphi < \alpha$ можно записать в следующем виде:

$$0 < \varphi < -\beta - \arctan k + \pi. \quad (2.18)$$

Подставляя φ_0 из (2.12) в (2.11) и используя (2.3), получим

$$\frac{e^{-k\varphi} \cos(\beta + \varphi)}{\cot \varphi (k \cos \beta + \sin \beta) + \cos \beta - k \sin \beta} + \frac{1}{k^2 + 1} [1 - e^{-k\varphi} (\cos \varphi + k \sin \varphi)] = 0.$$

Используя (2.13) – (2.15), это уравнение запишем в виде

$$\Phi(\varphi) = -\sin \beta - k \cos \beta + e^{k\varphi} [k \cos(\varphi + \beta) + \sin(\varphi + \beta)] = 0, \quad (2.19)$$

или заменой переменных $\psi = \varphi + \beta$

$$F(\psi) = e^{k\psi} (k \cos \psi + \sin \psi) - e^{k\beta} (k \cos \beta + \sin \beta) = 0. \quad (2.20)$$

Из неравенства (2.18) следует, что достаточно найти решение уравнения (2.20) в интервале

$$\beta < \psi < -\arctan k + \pi. \quad (2.21)$$

Наконец уточним знак функции $F(\psi)$ при $\psi = \pi/2$ и $\psi = -\arctan k + \pi$. Имеем $F'(\psi) = e^{k\psi} \cos \psi (k^2 + 1)$. Следовательно, $F(\psi)$ возрастает в промежутке $[\beta, \pi/2]$ и убывает в промежутке $(\pi/2, -\arctan k + \pi)$. Так как $F(\beta) = 0$, то имеем $F(\pi/2) > 0$. Используя неравенство $k \cos \beta + \sin \beta > 0$, получим $F(\pi - \arctan k) = -e^{k\beta} (k \cos \beta + \sin \beta) < 0$. Таким образом, функция $F(\psi)$ монотонно убывает в промежутке $(\pi/2, \pi - \arctan k)$, и принимает разные знаки на концах этого отрезка. Следовательно, уравнение (2.20) имеет одно решение ψ_0 в промежутке

(2.21). Причем $F(\psi) > 0$ при $\psi \in (\beta, \psi_0)$ и $F(\psi) < 0$ при $\psi \in (\psi_0, \pi - \arctan k)$. Очевидно, что уравнение (2.19) имеет одно решение $\mu_0 = \psi_0 - \beta$ в промежутке (2.18), и

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &> 0 \quad \text{при } \varphi \in (0, \mu_0), \\ \Phi(\varphi) &< 0 \quad \text{при } \varphi \in (\mu_0, \pi - \arctan k - \beta). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Используя (2.12) и (2.22) заключаем, что на полуоси $v_0 > 0$ уравнение (2.11) имеет одно положительное решение $x_0 = a [\cot \mu_0 (k \cos \beta + \sin \beta) + \cos \beta - k \sin \beta]^{-1}$, причем $f(v_0) > 0$ при $0 < v_0 < x_0$ и $f(v_0) < 0$, при $x_0 < v_0 < \infty$, где $f(v)$ определяется формулой (2.11). Следовательно, решением неравенства (2.10) является $v_0 < x_0$. Доказательство для случая (1.6) завершено.

Случай (1.7). Пусть теперь $-\frac{\pi}{2} < \beta < -\arctan k$. Легко видеть, что функция $F(\psi + \pi)$ монотонно возрастает в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$, убывает в $(\pi/2, \pi)$ и удовлетворяет условиям $F(\pi - \arctan k) = e^{k\beta} (k \cos \beta + \sin \beta) < 0$ и

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) > F(2\pi + \beta) = (1 - e^{2k\pi})e^{k\beta} (k \cos \beta + \sin \beta) > 0.$$

Следовательно, уравнение $F(\psi + \pi) = 0$ имеет единственное решение в промежутке $(-\arctan k, \pi/2)$. Доказательство аналогично доказательству предыдущего случая.

Случай (1.8). Пусть $\beta = -\arctan k$, и пусть μ - наименьшее значение $v(t)$, определенное формулой (1.3) в точках минимума. Имеем $\mu = v_0 / \sqrt{k^2 + 1}$ при $v_0 \leq a / \sqrt{k^2 + 1}$,

$$\mu = e^{-k} \left(\frac{a}{\sqrt{k^2 + 1}} - \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + 1}} \right) + \frac{a}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{при } v_0 > \frac{a}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Следовательно, $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда v_0 удовлетворяет (1.8).

Доказательство Теоремы 1 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, "Краевые задачи для некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений и их применения", Известия АН Армении, Математика, том 32, № 6, стр. 59 - 70, 1997.
2. Н. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, Наука, Москва, 1970.

17 сентября 1999

Армянский государственный инженерный университет
Педагогический институт, г. Мелитополь, Украина

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 35

НОМЕР 1

2000

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Сборник статей

	Страницы
Предисловие редактора.....	6
Решение алгебраических уравнений с помощью контурных интегралов Н. Е. Товмасян	7
Некоторые сингулярные функциональные уравнения в классе аналитических функций Н. Е. Товмасян, В. С. Захарян	19
Об одном методе решения трансцендентных уравнений Н. Е. Товмасян, В. С. Захарян	35
Некоторые функциональные уравнения со сдвигом в классе аналитических функций Н. Е. Товмасян, В. А. Ирицян	49
Задача Римана-Гильберта со смещениями Н. Е. Товмасян, Г. А. Мартirosян	60
Краткие Сообщения	
Решение интегральных уравнений в классе бесконечно интегрируемых функций В. А. Ирицян	73
О положительных решениях задачи Коши Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева	77