ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Առաքելյան
Գ.Գ. Գևորգյան
Վ.Ս. Զաքարյան
Ա.Ա. Թալալյան
Ն.Ե. Թովմասյան
Վ.Ա. Մարտիրոսյան
Ս.Ն. Մերգելյան
Բ.Ս. Նահապետյան
Ա.Բ. Ներսիսյան
Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Ս.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար Մ.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян
Г.Г. Геворкян
В.С. Закарян
А.Г. Камалян
В.А. Мартиросян
С.Н. Мергелян
Б.С. Нагапетян
А.Б. Нерсесян
А.А. Талалян
Н.Е. Товмасян
Р.Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь М.А. Оганесян

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ : ОБЗОР

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 6, 1999

Статья содержит обзор результатов исследований по комбинаторной интегральной геометрии, проведённых вслед за публикацией в 1982 книги Р. В. Амбарцумяна под тем же названием. Комбинаторный подход, предложенный в книге, привел к существенным продвижениям в таких областях, как задача Викселла для рандомизированных выпуклых шейпов, тождества типа Плейеля для выпуклых областей, проблемы, касающиеся случайных процессов прямых, валюации в пространствах интегральной геометрии, а также четвертая проблема Гильберта в различных постановках. Каждой из этих тем в этой статье посвящен отдельный параграф, сообщающий о результатах и раскрывающий их комбинаторные корни. Приводятся также комментарии и замечания о связи с другими направлениями, такими как томография, cos-преобразование и другие.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Вслед за публикацией в 1982 году в издательстве Дж. Вайли монографии Р. В. Амбарцумяна "Комбинаторная Интегральная Геометрия" [1] появились отклики, обсуждающие перспективы дальнейшего развития и применений новых комбинаторных принципов, предложенных в монографии. Редактором [1] отмечалось, что комбинаторная интегральная геометрия "составляет совершенно новую область, обозначившую свежие подходы к геометрическим вероятностям и интегральной геометрии, предлагающую новые интересные геометрические задачи, и одновременно выдвигающую много разнообразных идей." Там же выражалась уверенность, что аппарат комбинаторной интегральной геометрии окажется полезным "всем исследователям." Редактор книги (А. Баддли), в длинном Приложении к монографии [1], указал на красивые и глубокие взаимосвязи между комбинаторными разложениями, приведенными в монографии и знаменитой формулой

Эйлера для многогранников в $\mathbb{R}^d$.

Р. Александер в своей рецензии [2] писал, что монография "создала базовый лагерь в малоизученной области геометрии, откуда много интересных задач видятся в новой перспективе. Можно ожидать бума соответствующих исследований ...". Оглядываясь назад на почти двадцать лет, можно сказать, что ожидания интенсивного развития предмета усилиями "всех исследователей" в этой области не оправдались. Систематические усилия на развитие предмета делались только в Ереване, маленькой группой, руководимой самим Р. В. Амбарцумяном. Однако, исследования этой группы указывают на то, что прогнозы относительно значительного математического потенциала предмета комбинаторной интегральной геометрии по всей вероятности были верными.

Целью настоящего обзора является описание результатов работы ереванской группы, что достаточно для представления современного статуса предмета. После публикации монографии [1], большинство исследователей по Комбинаторной интегральной геометрии публиковались в журнале Известия Академии Наук Армении, серия Математика (ИАНАМ). В настоящее время ИАНАМ опубликовал три "специализированных выпуска", посвященных этой области исследований. Все три выпуска (№ 4 журнала ИАНАМ за 1994, 1996 и 1998 годы) носят одно и то же название "Аналитические Результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии" и представляют тематически единую коллекцию статей. Хотя некоторые публикации (такие как [15] и [23]), примыкающие к направлению трех специализированных выпусков, были опубликованы в других журналах, они также попадают в рамки настоящего обзора.

Отправным пунктом как для монографии [1], так и для последующих работ, является следующая теорема комбинаторной интегральной геометрии на плоскости. Она относится к вычислению значений инвариантной относительно евклидовых движений меры μ в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости, нормированной условием, что ее значение на множестве прямых, пересекающих прямолинейный отрезок, равно удвоенной длине этого отрезка.

Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\}$ на плоскости. Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j, через $|\rho_{ij}|$ его длину, и $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbf{G}: g$ разделяет концы отрезка $\rho_{ij}\}$ (бюфоново множество). Пусть $Br\{P_i\}$ обозначает бюфоново кольцо, т.е. минимальное (конечное) кольцо подмножеств пространства $\mathbf{G}$, содержащее все множества вида $[\rho_{ij}]$. Две точки P_i и P_j называются

соседними, если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре P_i, P_j соседей соответствует прямая g_{ij} = прямая, проходящая через точки P_i и P_j.

Любая достаточно малая окрестность $\mathbf{G}_{ij}$ прямой g_{ij} делится на четыре непересекрывающихся подмножества :

$$1 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости }\},$$

$$2 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости }\},$$

$$3 = \{g \in \mathbf{G} : \text{точка } P_i \text{ лежит в правой , а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости }\},$$

$$4 = \{g \in \mathbf{G} : \text{точка } P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости }\}.$$

Правая и левая полуплоскости для $g \in \mathbf{G}_{ij}$ в данном случае определяются так. Каждой прямой g_{ij} мы приписываем направление, скажем от P_i к P_j, если $i < j$, и по непрерывности, единственным образом определяем направления прямых g из $\mathbf{G}_{ij}$. Как обычно, $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0 – в противном случае. Если окрестность $\mathbf{G}_{ij}$ достаточно мала, то индикаторы $I_{C\cap 1}(g)$, $I_{C\cap 2}(g)$, $I_{C\cap 3}(g)$ и $I_{C\cap 4}(g)$ остаются постоянными для любой $g \in \mathbf{G}_{ij}$ и эти постоянные значения мы будем обозначать так :

$$I_C(\overset{+}{i},\overset{+}{j}) = I_{C\cap 1}(g), \qquad I_C(\overset{-}{i},\overset{-}{j}) = I_{C\cap 2}(g),$$

$$I_C(\overset{+}{i},\overset{-}{j}) = I_{C\cap 3}(g), \qquad I_C(\overset{-}{i},\overset{+}{j}) = I_{C\cap 4}(g).$$

Теорема 1, [1], [16]. Для каждой $C \in Br\{P_i\}$ значение $\mu(C)$ можно представить как линейную комбинацию расстояний между соседними точками P_i и P_j с целочисленными коэффициентами :

$$\mu(C) = \sum_{i<j} c_{ij}(C)\,|\rho_{ij}|, \tag{0.1}$$

где сумма $\sum_{i<j}$ распространяется на все пары соседних точек множества $\{P_i\}$. Коэффициенты c_{ij} можно найти по так называемой "четырех индикаторной" формуле :

$$c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i},\overset{-}{j}) + I_C(\overset{-}{i},\overset{+}{j}) - I_C(\overset{-}{i},\overset{-}{j}) - I_C(\overset{+}{i},\overset{+}{j}). \tag{0.2}$$

Этот основной результат привел к развитию таких предметов как

1. Тождества типа Плейеля для выпуклых областей ;

2. Задача Викселла для рандомизированных выпуклых шейпов;

3. Случайные геометрические процессы на плоскости;

4. Валюации в пространствах интегральной геометрии;

5. Четвертая проблема Гильберта в параметрической постановке;

6. Четвертая проблема Гильберта для прегеодезических.

Каждый из нижеследующих параграфов представляет одну из этих тем. Параграф начинается с общего представления данной тематики, затем формулируются детально один или два результата. В основном, доказательства опускаются, так как читатель может найти их в оригинальных публикациях. Однако, имеются исключения : вывод тождеств типа Плейеля в §1, использующие разложения для δ-мер, а также "томографическое" Следствие 1, а также Следствия 2 и 3 в §4, раскрывающие важную роль сферического преобразования Радона в комбинаторике плоскостей и прямых в трехмерном пространстве. Эти результаты новые и публикуются впервые.

Чтобы отличать чисто комбинаторные утверждения, многие из которых можно найти уже в [1], от их аналитических результатов более позднего периода, мы представляем первые как "Теоремы", а последние как "Предложения". Новые наблюдения естественно попадают в категорию "Следствий". Два случая, которые не подпадают под эту приблизительную классификацию, представлены в виде "Лемм". Многие громоздкие вычисления не попадают в поле зрения читателя, и поэтому обзор остается "веселой игрой с фигурами и интегралами" (В. Бляшке).

§1. ТОЖДЕСТВА ТИПА ПЛЕЙЕЛЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

В [1], [11] тождества типа Плейеля выводились интегрированием тождества (0.1) относительно меры, заданной в пространстве множеств $\{P_i\}$. В действительности, $\{P_i\}$ рассматривается как состоящая из двух частей : переменная часть $\{Q'_j\}$, и постоянная часть $\{Q_j\}$, так что $\{P_i\} = \{Q'_j\} \cup \{Q_j\}$. Для заданной ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$ на плоскости множество $\{Q'_j\}$ определяется как множество всех концов n хорд области $\mathbf{D}$, порожденных прямыми $g_1, \dots, g_n \in [\mathbf{D}]$, где $[\mathbf{D}] = \{g \in \mathbf{G} : \text{прямая } g \text{ пересекает область } \mathbf{D}\}$.

Требуемая мера в пространстве $\{Q'_j\}$ соответствует n-кратному произведению мер $\mu \times \dots \times \mu$. Множество $\{Q_j\}$, которое остается фиксированным, служит для наложения ограничений на область интегрирования. Как показано в [1], Глава

7, этот метод распространяется на выпуклые тела в $\mathbb{R}^3$, в то время как подход А. Плейеля [3], [4] так же как некоторые другие ныне используемые подходы (подобно примененному в [5]) менее удобны в многомерном случае.

Для доказательства тождества Плейеля в его первоначальной форме [3], [4], методом интегрирования, описанным выше, достаточно множество $\{Q_i\}$ взять пустым. Для ограниченной выпуклой области D на плоскости и непрерывно–дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x \geq 0$ и удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, первоначальное тождество Плейеля имеет вид

$$\int_{[\mathbf{D}]} f(\chi)\, dg = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbf{D}\times\partial\mathbf{D}} f'(\chi)\, \cos\psi_1\, \cos\psi_2\, dl_1 dl_2, \tag{1.1}$$

где $\partial\mathbf{D} \times \partial\mathbf{D}$ – произведение границы D на себя. Далее, dg обозначает интегрирование относительно меры μ в пространстве $\mathbf{G}$ (см. (0.1)), а dl_i, $i = 1, 2$ обозначает меру длины, определенную на $\partial\mathbf{D}$. Через χ будем обозначать длину хорды $\mathbf{D} \cap g$ индуцированной прямой g, а через ψ_1 и ψ_2 – два угла пересечений прямой g с границей области D, оба взятых в одной полуплоскости, ограниченной прямой g, внутри области D. Во втором интеграле эти величины становятся функциями l_1, l_2 с помощью отображения $(l_1, l_2) \to$ прямая g через точки l_1, l_2. Используя соотношение

$$dg = \frac{\sin\psi_1\, \sin\psi_2}{\chi}\, dl_1\, dl_2, \tag{1.2}$$

второй интеграл в (1.1) можно переписать в виде интеграла по мере dg, взятому по множеству $[\mathbf{D}]$. Это возможно, если $\partial\mathbf{D}$ не содержит прямолинейных отрезков. Если последнее условие не имеет места, то возникают дополнительные слагаемые, соответствующие подмножествам из $\partial\mathbf{D} \times \partial\mathbf{D}$, которые являются квадратами отрезков. На последних множествах имеем $\cos\psi_1\, \cos\psi_2 = 1$, что дает возможность интегрировать. В частности, если D является многоугольником и $F(x) = \int_0^x f(u)\, du$, то (1.1) принимает вид

$$\int_{[\mathbf{D}]} F'(\chi)\, dg = \int_{[\mathbf{D}]} F''(\chi)\, \chi\, \cot\psi_1\, \cot\psi_2\, dg + \sum_i F(a_i), \tag{1.3}$$

где a_i обозначают длины сторон многоугольника D. Тождество (1.3) имеет место для любой дважды дифференцируемой функции $F(x)$ удовлетворяющей условию $F(0) = 0$. Слагаемые $F(a_i)$ в (1.3) играют роль в стереологии случайных процессов многоугольников (см. §2 и Предложение 2 в §3).

Вернемся к тождествам типа Плейеля, обобщающим (1.3). По сравнению с [1, §8.2] или [11], мы представляем их в слегка измененной форме.

Пусть конечное множество точек $\{Q_i\}$ принадлежит замыканию ограниченного строго выпуклого D. Для любой дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$ и любого подмножества A из минимальной (конечной) алгебры, содержащей [D] и $Br\{Q_i\}$, тождество типа Плейеля имеет вид

$$\int_A [f(\chi) - f'(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2]\, dg =$$

$$= \sum_{i<j} c_{ij}(A)\,|\rho_{ij}|f(\chi_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_{Q_j}\int_{\partial \mathbf{D}} f'(\chi_{jl})[I_A(\vec{j},l) - I_A(\bar{j},l)]\,\rho_{jl}\,d\chi_{jl}. \qquad (1.4)$$

В первой строке (1.4), обозначения те же, что и в (1.3). Некоторые обозначения во второй строке были определены в (0.1)–(0.2). Нуждаются в объяснении : $\chi_{ij} =$ длина хорды области D, которая содержит точки Q_i и Q_j ; $\chi_{jl} =$ длина хорды области D, содержащая Q_j и точку $l \in \partial\mathbf{D}$; $\rho_{jl} =$ расстояние от точки Q_j до $l \in \partial\mathbf{D}$; $I_A(\vec{j},l)$ и $I_A(\bar{j},l)$ определяются как в (0.2), относительно направления от Q_j к l : верхний плюс соответствует нахождению Q_j в правой, а минус – в левой полуплоскости относительно "пошевеленной" прямой Q_j, l. Наконец, $d\chi_{jl}$ означает интегрирование по Стилтьесу по часовой стрелке для $l \in \partial\mathbf{D}$.

Если на границе области D имеются прямолинейные отрезки, то в (1.4) возникают дополнительные слагаемые. В [1] и [11] тождество (1.4) выписывается для следующего множества $A = A_0$. Предположим, что внутри D многоугольные области, закрашены черным, а их дополнения в области D закрашены в белый. По определению, $A_0 \subset [\mathbf{D}]$ состоит из тех прямых, которые не пересекают черные области. Множество A_0 можно представить как объединение двух подмножеств. $[\mathbf{D}] \setminus A_1$ и A_2, причем $A_1, A_2 \in Br\{Q_i\}$ где $\{Q_i\}$ – множество вершин черных многоугольных областей. Следовательно, (1.4) применимо. Предельная форма этого тождества, для черных множеств, обладающих гладкой границей как показано в [1], §8.4, приводит к элегантному результату для случайных черно–белых раскрасок плоскости, см. Предложение 3 в §3. Для множества $\{Q_i\} \subset \partial\mathbf{D}$, тождество (1.4) приводит к более простому тождеству

$$\int_A [f(\chi) - f'(\chi)\chi \cot\psi_1 \cot\psi_2]\, dg =$$

$$= \sum_{i<j} c_{ij}(A)\,\chi_{ij} f(\chi_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_{Q_j}\int_{\partial \mathbf{D}} f'(\chi_{jl})[I_A(\vec{j},l) - I_A(\bar{j},l)]\,\chi_{jl}\,d\chi_{jl}. \qquad (1.5)$$

На интервалах, где $[I_A(j^+,l) - I_A(j^-,l)]$ является постоянной и мы можем интегрировать. Получаем следующее соотношение

$$\int_{\partial D} f'(\chi_{jl})[I_A(j^+,l) - I_A(j^-,l)]\,\chi_{jl}\,d\chi_{jl} =$$

$$= -\sum_k c_{jk}(A)\int_0^{\chi_{jk}} f'(u)\,u\,du = -\sum_k c_{jk}(A)\left[\chi_{jk}\,f(\chi_{jk}) - \int_0^{\chi_{jk}} f(u)\,du\right].$$

Итак, (1.5) принимает вид

$$\int_A [\,f(\chi) - f'(\chi)\,\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,]\,dg = \sum_{i<j} c_{ij}(A)\int_0^{\chi_{ij}} f(u)\,du. \qquad (1.6)$$

Напомним, что (1.6) имеет место для $\{Q_i\} \subset \partial D$, и поэтому мы можем говорить о вписанном многоугольнике D_1, для которого Q_i являются вершинами. В частном случае $A = [D_1]$, (1.6) принимает вид

$$\int_{[D_1]} [\,f(\chi) - f'(\chi)\,\chi\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,]\,dg = \sum_i \int_0^{a_i} f(u)\,du, \qquad (1.7)$$

где суммирование производится по **сторонам** a_i многоугольника D_1. Подчеркнем, что в (1.7), через χ обозначена хорда области D, а не D_1. Отметим, что (1.3) является предельным случаем тождества (1.7) (рассматриваем область D, аппроксимирующую D_1).

Рассмотрим теперь частный случай тождества (1.6), когда область D берется строго выпуклой, а множество $\{Q_i\}$, состоящее из двух точек $Q_1, Q_2 \in \partial D$. Точки Q_1, Q_2 определяют хорду области D, которую обозначим через χ_0. Пусть $A =$ множество прямых, разделяющих Q_1 от Q_2 и $f(x) = x^{n-1}$. Так как $c_{ij}(A) = 2$, мы получаем тождество

$$\chi_0^n = \frac{n}{2}\int_{[\chi_0]} \chi^{n-1}\,dg - \frac{1}{2}\,n\,(n-1)\int_{[\chi_0]} \chi^{n-1}\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg. \qquad (1.8)$$

В оставшейся части параграфа мы покажем, что из (1.8) следует изопериметрический результат для параметра, который представляет интерес в томографии. Но прежде получим независимый краткий вывод тождества (1.8) основанный на применении Теоремы 1 к произвольным мерам, заданным в G. Напомним (см. [1]), что коэффициенты этих более общих разложений не зависят от выбора меры в пространстве G.

Пусть D – **строго выпуклая** ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно–гладкой границей ∂D. Рассмотрим последовательность $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ хорд области D и

множество $A = \bigcap_1^n [\chi_i] \subset [\mathbf{D}]$. Предположим, что никакие три конца хорд χ_i не лежат на одной прямой. Применяя Теорему 1 для δ-мер, получаем

$$2\delta_0(A) = 2\sum_{i=1}^{n} I_{n-1}(\chi_i)\,\delta_0([\chi_i]) + \sum_{\bullet} I_{n-2}(l_r, l_k)[I_d(l_r, l_k) - I_s(l_r, l_k)]\,\delta_0(A), \quad (1.9)$$

где δ_0 – дельта-мера в пространстве $\mathbf{G}$, сосредоточенная на некоторой прямой $g_0 \in [\mathbf{D}]$. В (1.9) используем следующие обозначения :

$$I_{n-1}(\chi_i) = \begin{cases} 1 & \text{если } \chi_i \text{ пересекается всеми } (n-1) \text{ оставшимися хордами} \\ & \text{из множества } \chi_1, \ldots, \chi_n \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

сумма $\sum_{\bullet}$ распространена на множество

$$\{\{l_r, l_k\}: \quad l_r, l_k \text{ суть концы некоторых хорд } \chi_p \text{ и } \chi_q,\ p \neq q,\ p, q \in \{1, \ldots, n\}\},$$

$I_d(l_r, l_k) = 1$, $I_s(l_r, l_k) = 0$, если χ_p, χ_q лежат в различных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через точки l_r, l_k, и $I_d(l_r, l_k) = 0$, $I_s(l_r, l_k) = 1$ в противном случае ;

$$I_{n-2}(l_r, l_k) = \begin{cases} 1 & \text{если хорда } l_r, l_k \text{ пересекается всеми хордами} \\ & \text{из } \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \backslash \{\chi_p, \chi_q\} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы должны проинтегрировать (1.9) относительно меры $dg_1 \ldots dg_n$, предполагая, что $\chi_i = g_i \cap \mathbf{D}$, $i = 1, \ldots, n$. Для удобства, теперь хорды $\chi_1, \ldots, \chi_n$ будем считать **направленными**. Это позволяет нам говорить о **начальной и концевой** точке хорды χ_i : для каждой χ_i область изменения концевой точки l_i есть вся граница $\partial\mathbf{D}$, а область изменения угла φ_i между $\partial\mathbf{D}$ в точке l_i и χ_i есть интервал $(0, \pi)$. Через dl_i обозначим меру в пространстве положений концевой точки хорды χ_i, соответствующую длине вдоль $\partial\mathbf{D}$, а через $d\varphi_i$, обычную инвариантную относительно вращений меру в пространстве направлений хорды χ_i. Имеем

$$dg_i = \sin\varphi_i\, dl_i\, d\varphi_i, \quad (1.10)$$

причём для произвольной хорды χ и $i = 1, \ldots, n$

$$\int I_{[\chi]}(g_i)\, dg_i = 4|\chi|,$$

где $I_{[\chi]}(g)$ – индикатор множества $[\chi]$.

Почленное интегрирование тождества (1.9) происходит следующим образом. Во-первых

$$2\int\dots\int\delta_0(A)\,dg_1\dots dg_n = 2\prod_1^n\int I_{[\chi_0]}(g_i)\,dg_i = 2\,(4|\chi_0|)^n, \qquad (1.11)$$

где $\chi_0 = g_0 \cap \mathrm{D}$. Используя симметрию, получаем

$$2\int\dots\int\sum_{i=1}^n I_{n-1}(\chi_i)\,\delta_0([\chi_i])\,dg_1\dots dg_n = 2n\int_{[\chi_0]}dg_1\int\dots\int I_{n-1}(\chi_1)\,dg_2\dots dg_n =$$

$$= 4n\int_{[\chi_0]}(4|\chi|)^{n-1}\,dg. \qquad (1.12)$$

Отметим, что мы заменили коэффициент 2 на 4, потому что dg означает интегрирование в пространстве ненаправленных хорд. Вновь по симметрии

$$\int\dots\int\sum_{\cdot} I_{n-2}(l_r,l_k)[I_d(l_r,l_k)-I_s(l_r,l_k)]\,\delta_0(A)\,dg_1\dots dg_n =$$

$$= 2n(n-1)\int\dots\int I_{n-2}(l_1,l_2)[I_d(l_1,l_3)-I_s(l_1,l_2)]\,\delta_0(A)\,dg_1\dots dg_n =$$

$$= -8n(n-1)\left[\int_{\beta_1}\int_{\beta_2}+\int_{\beta_2}\int_{\beta_1}\right](4\rho_{12})^{n-2}\,\cos\psi_1\,\cos\psi_2\,dl_1\,dl_2 =$$

$$= -4n(n-1)\int_{[\chi_0]}(4|\chi|)^{n-1}\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\,dg, \qquad (1.13)$$

где ρ_{12} обозначает расстояние между l_1 и l_2, а β_1, β_2 – части границы $\partial\mathrm{D}$, разделяемые концами хорды χ_0. Здесь мы использовали (1.10) для dg_1 и dg_2, а также верное для любых фиксированных $l_1, l_2 \in \partial\mathrm{D}$ равенство

$$\int_0^\pi\int_0^\pi[I_d(l_1,l_2)-I_s(l_1,l_2)]\,\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2\,d\varphi_1\,d\varphi_2 = -4\cos\psi_1\,\cos\psi_2.$$

Последнее равенство в (1.13) вытекает из (1.2). Комбинируя (1.11) – (1.13) и (1.9), после сокращения на общий множитель 4^n получаем тождество (1.8).

Вернемся к вопросу изометрии. Для $n = 2$, (1.8) принимает вид

$$\int_{[\chi_0]}\chi\,dg = \int_{\beta_1}\int_{\beta_2}\cos\psi_1\,\cos\psi_2\,dl_1dl_2 + \chi_0^2, \qquad (1.14)$$

где β_1 и β_2 суть две дуги на границе $\partial\mathrm{D}$, разделенные концами хорды χ_0.

С другой стороны, из (1.2) получаем

$$\int_{[\chi_0]}\chi\,dg = \int_{\beta_1}\int_{\beta_2}\sin\psi_1\,\sin\psi_2\,dl_1\,dl_2. \qquad (1.15)$$

Выберем точку гладкости $P \in \partial\mathrm{D}$ и пусть χ_0 меняется таким образом, чтобы дуга β_1 стягивалась бы к точке P. Тогда β_2 растет до полной границы $\partial\mathrm{D}$

(исключая точку P). Деля оба соотношения (1.14) и (1.15) на χ_0 и вычисляя пределы, получаем тождества

$$\int_{[P]} \chi \sin\psi_1 \, d\psi_1 = \int_{[P]} \cos\psi_1 \, \cos\psi_2 \, dl_2, \tag{1.16}$$

$$\int_{[P]} \chi \sin\psi_1 \, d\psi_1 = \int_{[P]} \sin\psi_1 \, \sin\psi_2 \, dl_2. \tag{1.17}$$

Здесь область интегрирования $[P]$ – пучок прямых через точку P. Параметризуем прямую $g \in [P]$ либо 1) углом $\psi_1 \in (0, \pi)$ между g и направлением, касательным к ∂D в точке P, либо 2) точкой $l_2 \neq P$, в которой g пересекает ∂D. Тогда $d\psi_1$ и dl_2 определяют меры на $[P]$. Ясно, что ψ_2 измеряется в точке l_2, а χ является длиной хорды, исходящей из P в направлении ψ_1. Используя (1.16) и (1.17), находим

$$2\int_{[P]} \chi \sin\psi_1 \, d\psi_1 = \int_{[P]} \cos(\psi_1 - \psi_2) \, dl_2 = H - 2\int_{[P]} \sin^2 \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \, dl_2. \tag{1.18}$$

Интеграл

$$T(P) = \frac{1}{2} \int_{[P]} \chi \sin\psi_1 \, d\psi_1, \tag{1.19}$$

определенный для любой точки $P \in \partial$D имеет "томографическую" интерпретацию : длины χ, измеряемые из точки $P \in \partial$D в любых возможных направлениях, усредняются на интервале $(0, \pi)$ с плотностью $\frac{1}{2}\sin\psi_1$. В стандартных томографических терминах, $T(P)$ является взвешенным интегралом рентгенограммы (X-гау) снятой из точки $P \in \partial$D. Укажем несколько свойств параметра $T(P)$. В более слабой форме, (1.18) можно записать как неравенство

$$T(P) \leq \frac{H}{4}, \tag{1.20}$$

которое сводится к равенству, когда D является окружностью (в этом случае $\psi_1 \equiv \psi_2$ и последний интеграл в (1.18) равен нулю). В действительности, выписав простое дифференциальное уравнение, можно показать, что если условие $\psi_1 \equiv \psi_2$ удовлетворяется для одной точки $P \in \partial$D, то D уже является окружностью. Это означает, что по крайней мере в классе областей с гладкой границей D, в неравенстве (1.20) мы имеем равенство тогда и только тогда, когда D является окружностью. (Из неравенств, которые следуют, можно заключить, что имеет значение только гладкость границы ∂D в точке P). Согласно неравенству Шварца

$$\left[\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi\right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_{[P]} \chi^2 \, d\psi.$$

Очевидно, что из равенства

$$\int_{[P]} \chi^2 \, d\psi = 2\,||\mathrm{D}||, \quad \text{удвоенная площадь области } \mathrm{D} \tag{1.21}$$

следует, что $4T^2(P) \leq \pi\,||\mathrm{D}||$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\chi = C\sin\psi$, т.е. когда D является кругом диаметра C.

Отметим, что из (1.21) следует, что $||\mathrm{D}||$ также представляет собой интегральный томографический параметр, вычисленный по томограмме $\chi(\psi)$, снятой из точки $P \in \partial\mathrm{D}$. Итак, мы приходим к следующему заключению о возможности томографической проверки гипотезы, что D - круговой диск, основываясь на двух интегральных параметрах, зависящих от томограммы, снятой из некоторой точки $P \in \partial\mathrm{D}$.

Следствие 1. Пусть D – плоская выпуклая область и $P \in \partial\mathrm{D}$ – точка, где $\partial\mathrm{D}$ является гладкой. Если $4T^2(P) = \pi\,||\mathrm{D}||$, то D – круговой диск.

Также имеет место тождество

$$\int_{\partial\mathbf{D}} T(l)\,dl = \int |\chi|\,dg = \pi\,||\mathrm{D}||.$$

Первое равенство следует из (1.10), а второе является известным фактом интегральной геометрии [6]. Отметим, что интегрируя (1.20) по границе $\partial\mathrm{D}$, получим

$$\pi\,||\mathrm{D}|| \leq \frac{H^2}{4},$$

т.е. классическое изопериметрическое неравенство. Следовательно, (1.20) можно назвать "дезинтегрированным изопериметрическим неравенством".

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА В ЗАДАЧЕ ВИКСЕЛЛА

Задача Викселла – одна из старейших в стереологии. На плоскости имеется совокупность дисков случайных радиусов, центры которых образуют трансляционно инвариантный точечный процесс. Пересечения "тестовой прямой" с этими дисками образует одномерный случайный процесс отрезков. Задача Викселла : по заданному вероятностному распределению длины типичного отрезка пересечения определить вероятностное распределение длины радиуса типичного круга. В такой постановке задача решается сведением к интегральному уравнению Абеля. Если области суть гомотетические копии некоторой области, отличной от круга, глобальную изотропию можно сохранить применением к областям независимых

равномерных вращений. Однако, в этой постановке удовлетворительное решение отсутствует.

Статья [7] предлагает рассмотреть задачу Викселла в некоторой модифицированной постановке, в которой области случайных размеров изотропно разбросанные на плоскости, обладают также **случайным шейпом**. Опираясь на тождество Плейеля (1.3), в [7], эта идея проводится для **случайных выпуклых равносторонних N-угольных шейпов**. Постановку задачи в работе [7] дадим после необходимых определений :

Равносторонний N-угольный шейп (будем обозначать через $\mathbf{s}$) = равносторонний N-угольник со стороной единичной длины. С центром тяжести O в начале координат, и, скажем, ориентированным так, что ближайшая к O вершина попадает на положительную координатную полуось $X > 0$. Для того, чтобы описать случайный шейп $\mathbf{s}$ необходимо определить вероятностное распределение $\mathbf{S}$ в соответствующем пространстве. Отметим, что шейп $\mathbf{s}$ можно описать $N-3$ угловыми параметрами. Следовательно, для $N > 3$, примеры $\mathbf{S}$ можно построить, используя совместную плотность распределения угловых параметров.

Пусть $\{\mathbf{s}_i\}$ – последовательность независимых случайных плоских выпуклых шейпов, полученных из некоторого вероятностного распределения $\mathbf{S}$, сосредоточенного на равносторонних N-угольных шейпах. Вторым источником случайности служит **случайный маркированный точечный процесс** $\{M_i, h_i\}$ на группе $\mathbb{M}$ всех евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$ с марками в интервале $(0, \infty)$. Вероятностное распределение $\mathbf{P}$ маркированного точечного процесса $\{M_i, h_i\}$ берется инвариантным относительно евклидовых движений, а точечный процесс $\{M_i\}$ предполагается процессом конечной интенсивности. Тогда (см. [6]) определено вероятностное распределение $\mathbf{V}$ **типичной марки** h. Простейший пример процесса $\{M_i, h_i\}$, удовлетворяющего упомянутым условиям : $\{M_i\}$ = пуассоновский точечный процесс, управляемый мерой, пропорциональной мере Хаара на группе $\mathbb{M}$, $\{h_i\}$ = последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностным распределением $\mathbf{V}$.

Рассмотрим случайный набор областей $\{M_i h_i \mathbf{s}_i\}$, где область $h\mathbf{s}$ получена из $\mathbf{s}$ гомотетией с коэффициентом $h > 0$, а $Mh\mathbf{s}$ – получена из области $h\mathbf{s}$ применением евклидового движения M.

Пусть g_0 – некоторая прямая на плоскости $\mathbb{R}^2$ (тестовая прямая). Она пересекает некоторые области из случайного счетного подмножества $\{M_i h_i \mathbf{s}_i\}$. Непустые

пересечения $I_i = M_i h_i s_i \cap g_0$ образуют случайное множество интервалов на g_0, которые обозначим через $\{I_i\}$. Распределение множества $\{I_i\}$ инвариантно относительно сдвигов, отображающих g_0 в себя. Если интенсивность случайного множества $\{I_i\}$ конечна, то можно говорить [6] о распределении W *длины типичного интервала* в случайном наборе $\{I_i\}$. В приведенном выше примере центры интервалов из $\{I_i\}$ образуют пуассоновский точечный процесс, а их длины образуют последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое вероятностное распределение W.

Задача стереологии : по заданному W найти V.

Стандартными методами (см. [6]), можно показать, что распределение W можно получить, используя следующую стохастическую конструкцию :

Шаг 1 : Выбираем случайный шейп s из вероятностного распределения S.

Шаг 2 : Независимо выбираем значение h из вероятностного распределения $(H)^{-1}h\,\mathrm{V}(dh)$, где $H = \int h\,\mathrm{V}(dh) < \infty$ и строим многоугольник hs.

Шаг 3 : Выбираем случайную прямую g с равномерным вероятностным распределением на $[h\mathrm{s}]$.

Напомним, что для заданных s и h равномерное вероятностное распределение на $[h\mathrm{s}]$ пропорционально сужению меры dg на множество $[h\mathrm{s}]$, с соответствующей нормировкой. $I_{[h\mathrm{s}]}(g)$ обозначает индикаторную функцию множества $[h\mathrm{s}]$. Так как для каждого $h > 0$

$$\int I_{[h\mathrm{s}]}(g)dg = Nh,$$

то нормирующим множителем является $(Nh)^{-1}$.

Результатом стохастической конструкции является случайная фигура $(h\mathrm{s}, g)$, состоящая из области hs и прямой $g \in [h\mathrm{s}]$. Ясно, что вероятностное распределение $(h\mathrm{s}, g)$ имеет вид

$$(NH)^{-1}\mathrm{V}(dh)\,\mathrm{S}(d\mathrm{s})\,I_{[h\mathrm{s}]}(g)\,dg. \tag{2.1}$$

Величины χ = длина $h\mathrm{s} \cap g$, $\cot\psi_1$ и $\cot\psi_2$, определенные в (1.3), при заданном $(h\mathrm{s}, g)$ становятся случайными. Их совместное распределение индуцировано из (2.1). Доказательство следующей леммы может быть легко получено, используя теорию распределения типичной марки [6].

Лемма 1. Вероятностное распределение случайной переменной χ совпадает с W.

Задавая шейп s и величину h, запишем тождество (1.3) для области hs и проинтегрируем его относительно вероятностного распределения $\mathbf{V} \times \mathbf{S}$. Так как для каждой функции f, определенной на $(0, \infty)$

$$(HN)^{-1} \int\int\int f(\chi)\, \mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(ds)\, dg = \int W(x)\, f(x)\, dx$$

$$\int\int f(h)\, \mathbf{V}(dh)\mathbf{S}(ds) = \int V(x)\, f(x)\, dx,$$

где $W(x)$ и $V(x)$ плотности вероятностных распределений $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$, получаем

$$\begin{aligned} \int W(x)\, F'(x)\, dx &= H^{-1} \int V(x)\, F(x)\, dx + \\ &+ (HN)^{-1} \int V(h)\, dh \int \mathbf{S}(ds) \int_{[hs]} F''(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отметим, что существование $W(x)$ следует из существования $V(x)$.

Мы будем рассматривать (2.2) для функции $F(x) = \delta(x - y)$, где $\delta(x - y)$ есть дельта функция Дирака в точке $y > 0$. Функционалы $\delta(x - y)$, $\delta'(x - y)$ хорошо известны : для каждой $u(x) \in C^{(2)}$ имеем

$$\int u(x)\, \delta(x - y)\, dx = u(y) \quad \text{и} \quad \int u(x)\, \delta'(x - y)\, dx = -u'(y). \tag{2.3}$$

Однако, подстановка $\delta''(x - y)$ вместо F'' в кратный интеграл в (2.2) требует обоснования. Для прояснения ситуации, в [7] возвращаемся к стандартному определению δ-функции и рассмотрим семейство функций $F(x) = F_\varepsilon(x)$, для которых $\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(x) = \delta(x - y)$ в смысле слабой сходимости (такое семейство назовем $\delta(x - y)$-**семейством**). Необходимо найти условия на распределение $\mathbf{S}$, которые гарантировали бы, что для любой вероятностной плотности $V(h)$ на $(0, \infty)$ с конечным средним H имеет место следующее соотношение :

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \int V(h)\, dh \int \mathbf{S}(ds) \int_{[hs]} F''_\varepsilon(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg = \\ &= \int V(h)\, dh \lim_{\varepsilon \to 0} \int \mathbf{S}(ds) \int_{[hs]} F''_\varepsilon(\chi)\, \chi \cot\psi_1 \cot\psi_2\, dg = \int V(h)\, K(h, y) dh. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из (2.2), (2.3) следует, что таким способом определенное $K(h, y)$ является ядром в интегральном уравнении

$$-W'(y) = H^{-1} V(y) + (HN)^{-1} \int V(h)\, K(h, y)\, dh. \tag{2.5}$$

Основной результат [7] получен при следующих предположениях относительно вероятностного распределения $\mathbf{S}$.

I : с вероятностью S = 1 длина каждой хорды многоугольника s, содержащей вершину, превосходит 1.

II : случайный внутренний угол многоугольника s в каждой вершине V_k тупоугольный и с вероятностью S = 1 превосходит $\pi/2 + \nu$ для некоторого постоянного $\nu > 0$.

III : Существует постоянная $c > 0$ такая, что с вероятностью S = 1, в s = $(s, 1)$ для каждого α_{ij} (= угол между сторонами a_i и a_j) имеем $\sin \alpha_{ij} > c$.

Предложение 1, [7]. Пусть S – вероятностное распределение в пространстве равносторонних N-угольных шейпов, обладающих плотностью в соответствующем параметрическом пространстве, $V(h)$ и $W(y)$ – плотности вероятностных распределений V и W, $H = \int h\,V(h)\,dh < \infty$. Если S обладает свойствами I, II, III, то любая непрерывная $H^{-1}V(h)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.5), причём последнее оказывается уравнением типа Вольтерра с ограниченным ядром.

В [7] был найден конкретный алгоритм для вычисления $K(h, y)$. Примеры вероятностных распределений S, удовлетворяющих условиям I, II, III существуют, начиная с $N = 5$.

Возможно, тождества Плейеля для черно–белых раскрасок помогут получить в задаче Викселла устойчивые алгоритмы для случайных выпуклых шейпов, отличных от многоугольных. Другая нерешенная задача – применение аналогичного подхода в трехмерном пространстве. Некоторые тождества типа Плейеля в трехмерном пространстве можно найти в [1].

§3. СЛУЧАЙНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ НА ПЛОСКОСТИ

Другим направлением применения тождеств типа Плейеля являются случайные геометрические процессы. Первая попытка в этом направлении была сделана в [5], где тождество (1.3) было использовано при изучении случайных многоугольных мозаик. Аналогичный подход был применен в [1] к общим случайным процессам многоугольников (=случайные множества многоугольников). Эти ранние попытки использовали метод построения стохастических аналогов тождеств типа Плейеля. Аналогичный метод был также применен при изучении случайных раскрасок плоскости (см. [1]).

Пусть для заданного инвариантного относительно евклидовых движений плоского процесса многоугольников можно говорить о вероятностном распределении длины $|a|$ **типичной стороны многоугольника**, и $\mathbf{E}_1$ обозначает математическое ожидание относительно этого распределения. (О понятии типичного элемента в геометрическом процессе см. [6].) Предположим, что на плоскости задана **тестовая прямая** g_0. На прямой g_0 индуцируется последовательность $\{I_i\}$ интервалов пересечений с многоугольниками заданного процесса многоугольников. С каждым интервалом I_i связаны два угла $\psi_1^{(i)}$, $\psi_2^{(i)}$, под которыми g_0 пересекается сторонами соответствующего многоугольника. Предполагая, что для последовательности $\{I_i, \psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}\}$ определено вероятностное распределение **типичной тройки** $(|I|, \psi_1, \psi_2)$, через $\mathbf{E}_2$ будем обозначать математическое ожидание относительно этого распределения.

При некоторых достаточно общих условиях, очерченных в [1], имеет место следующий **стохастический вариант** тождества (1.3) :

$$(\mathbf{E}_1|a|)^{-1}\mathbf{E}_1 F(|a|) = \mathbf{E}_2\left[F'(|I|) - F''(|I|)\,|I|\,\cot\psi_1\,\cot\psi_2\right],$$

которое, в частности, приводит к следующему утверждению.

Предложение 2, [1]. Если в случайной типичной триаде $(|I|, \psi_1, \psi_2)$ величины $|I|$ и углы ψ_1 и ψ_2 независимы, то необходимо

$$V(x) = 1 - l\frac{d}{dx}W(x),$$

где $V(x)$ и $W(x)$ – функции распределения случайных величин $|a|$ и $|I|$ соответственно, и $l = E_1|a|$. Если дополнительно предположить, что

a) $|I|$ и $|a|$ имеют одинаковое распределение или

b) $|I|$ распределено экспоненциально,

то случайная величина $|a|$ необходимо имеет экспоненциальное распределение со средним $\mathbf{E}_1|a| = \mathbf{E}_2|I|$.

Тождество (1.4), записанное для $A = A_0$, определенного в §1, имеет стохастический вариант для случайных однородных и изотропных случайных черно-белых раскрасок плоскости. В [1], глава 10 можно найти это уравнение, при условии, что случайное черное множество является счетным объединением строго выпуклых областей (так называемая булева модель, пуассоновость процесса областей не предполагается). Это уравнение относится к случайной последовательности чередующихся черно-белых интервалов, индуцированных на тестовой прямой g_0, точнее к случайным величинам

$|I|$ = длина типичного белого интервала на g_0 и

ψ_1, ψ_2 = два угла, под которыми кривая, разделяющая цвета, пересекает тестовую прямую g_0 на концах типичного белого интервала.

Предложение 3, [1]. Если длины черных и белых интервалов на тестовой прямой независимы, то из независимости случайных величин в типичной триаде $(|I|, \psi_1, \psi_2)$ следует экспоненциальность распределения длины типичного белого интервала.

Аналогичные задачи рассматривались в [6], глава 10, другим методом. Последний метод состоит из следующих трех шагов :

1. Тождество (0.1) записывается для подходящего множества C, которое зависит от реализации геометрического процесса в прямоугольнике. Высота прямоугольника рассматривается как малый параметр.

2. Это тождество усредняется относительно распределения рассматриваемого геометрического процесса.

3. Полученный результат разлагается по малому параметру.

Этот подход использовался в [9] и [10], где изучались общие (не обязательно пуассоновские) случайные процессы прямых на плоскостя $\mathbb{R}^2$, которые являются главным предметом в стохастической геометрии (см. [8]).

Метод "инвариантного вложения" (термин пришел из математической физики), предложенный в [9], открывает путь для замены условия $\mathbb{M}_2$-инвариантности геометрических процессов (типичного для [1] и [6]), на более слабое условие их $\mathbf{T}_2$-инвариантности. ($\mathbf{T}_2$ – группа параллельных переносов плоскости, $\mathbf{T}_2$-инвариантные геометрические процессы иначе называются однородными.)

В статье [10] рассматриваются случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости класса Ti2.

Определение. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу Ti2, если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно $\mathbf{T}_2$, и его первая и вторая моментные меры имеют вид $f\,dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2\,dg_1\,dg_2$ соответственно, с непрерывными (и трансляционно-инвариантными) плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

Примером процесса прямых класса Ti2 является пуассоновский процесс прямых, управляемый первой моментной мерой $f(g)\,dg$, причем плотность $f(g)$ зависит только от направления φ прямой g, т.е. $f(g) = f(\varphi)$.

Результаты [10] относятся к маркированному точечному процессу $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$ индуцированному на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α : $\{x_i\}_\alpha = \{g_i\} \bigcap g(\alpha)$ есть точечный процесс пересечений, а марки Ψ_i суть углы, под которыми прямые из реализации пересекают тестовую прямую $g(\alpha)$ в точках $\{x_i\}_\alpha$. Основным результатом является вывод дифференциального уравнения для так называемых конечномерных вероятностных распределений точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ при дополнительных условиях :

a) Для любого направления α, последовательность $\{\cot \Psi_i\}_\alpha$ некоррелирована с точечным процессом $\{x_i\}_\alpha$.

b) Последовательность $\{\cot \Psi_i\}_\alpha$ есть последовательность некоррелированных случайных величин.

Пусть $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ система непересекающихся интервалов на тестовой прямой $g(\alpha)$ и $\bar{k} = (k_1, ..., k_n)$ – последовательность неотрицательных целых чисел. Обозначим

$p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) =$ совместная вероятность иметь k_j точек из $\{x_i\}_\alpha$ на каждом интервале γ_j, $j = 1, ..., n$.

В T_3-инвариантном случае $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$, где $\bar{t} = (t_1, ..., t_n)$ есть последовательность длин интервалов γ_i, $\bar{u} = (u_1, ..., u_{n-1})$ – последовательность длины пробелов между γ_i. Распределение случайного точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [6]).

Работа [10] начинается с обобщенных формул Пальма. Вместе с инвариантным вложением, которое в этом случае сводится к "геометрическому" дифференцированию по α, это составляет анализ первого порядка. При дополнительном условии a) из этого анализа следует, что

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha)\bar{t}, \lambda(\alpha)\bar{u}), \tag{3.1}$$

где $q_{\bar{k}}$ – некоторые функции $2n-1$ переменных, $\lambda(\alpha)$ – интенсивность точечного процесса пересечений $\{x_i\}_\alpha$.

Анализ второго порядка начинается с усреднения относительно $P \in Ti2$ тождества (0.1), записанного для некоторого множества $C = A \cap B$, зависящего от системы случайных хорд прямоугольника $(0, l) \times T$, где $l > 0$ рассматривается как малый параметр, а $T \subset g(\alpha)$ – минимальный отрезок, содержащий все $\gamma_1, ..., \gamma_n$. При этом

$A = \{g \in G : g$ пересекает стороны $(0, l) \times T$, перпендикулярные к $g(\alpha)\}$,

$B = \{g \in \mathbf{G} : g$ пересекается k_1 случайными хордами из $(0,l) \times \gamma_1\}$.

"Случайные хорды" в определении множества B порождаются прямыми из реализации процесса прямых.

Далее выделяются члены в усредненном тождестве (0.1), имеющие порядок l^2. При дополнительных предположениях a), b), в результате анализа второго порядка получается дифференциальное соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial \alpha^2} = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}} + \tag{3.2}$$

$$+ \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \, \partial t_j} t_i t_j + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \, \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \, \partial u_j} u_i u_j \right],$$

где Δ_i обозначает первую разность по k_i. Это соотношение связывает вероятности $p_{\bar{k}} = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$ с условными вероятностями $\pi_{\bar{k}} = \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$ тех же событий, при условии, что **одна из прямых из** $\{g_i\}$ **совпадает с тестовой прямой** $g(\alpha)$. Вероятности $\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$ описывают точечный процесс пересечений на типичной прямой из $\{g_i\}$, имеющей направление α.

Отметим, что (3.2) является далеко идущим уточнением дифференциального соотношения в Предложении 2. Оно записано на языке вероятностей подсчета точек из $\{x_i\}_\alpha$ в некоторых интервалах на тестовой прямой, в отличие от языка интервалов между точками в $\{x_i\}_\alpha$, использованного в Предложении 2.

Соотношение (3.2) превращается в дифференциальное уравнение при дополнительном условии (названном в [10] условием "достаточного перемешивания")

$$\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha). \tag{3.3}$$

Это уравнение решается при начальных условиях

$$p_{\bar{0}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 1 \quad \text{и} \quad p_{\bar{k}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 0, \quad \text{если} \quad \bar{k} \not\equiv \bar{0}.$$

В работе [10] задача сводится к легко разрешимому уравнению Эйлера для однородных функций порядка 0. Сформулируем этот результат.

Предложение 4, [10]. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ **из класса Ti2 маркированный точечный процесс** $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$ **удовлетворяет**

условию a). Если дополнительно предположить, что для некоторого направления α выполнены условия b) и (3.3), то для этого направления α точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский, т.е.

$$p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[\lambda(\alpha)\, t_i]^{k_i}}{k_i!}\, e^{-\lambda(\alpha)\, t_i}.$$

Читатель отметит аналогию между результатом пуассоновости Предложения 4 и результатом экспоненциальности a) в Предложении 2. Отметим также, что если имеет место соотношение (3.2), то пуассоновость процесса $\{x_i\}_\alpha$ влечет пуассоновость процесса пересечений на типичной прямой направления α из случайного набора $\{g_i\}$. Другими словами, вероятности $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$ должны быть пуассоновскими. Это соответствует пункту b) Предложения 2.

§4. ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Валюация =конечно-аддитивная функция множеств. Конструкция обсуждаемых в этом параграфе валюаций вытекает из Теоремы 1 (см. Введение) и ее вариантов для пространств плоскостей и прямых в $\mathbb{R}^3$ рассмотренных в [1].

1. Валюации на $U_{\mathbf{G}}$.

Пусть $F(P_1, P_2)$ – симметричная функция, определенная на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, непрерывна и линейно–аддитивна, т.е. если P_1, P_2, P_3 находятся на одной прямой, P_2 между P_1 и P_3, то $F(P_1, P_2) + F(P_2, P_3) = F(P_1, P_3)$. Рассмотрим функционал $\Phi(B; \{P_i\})$, определенный на $Br\{P_i\}$ для заданного конечного множества точек $\{P_i\}$, получаемый подстановкой в формулу (0.1) значений $\frac{1}{2} F(P_1, P_2)$ вместо $\mu([P_i, P_j])$, т.е.

$$\Phi(B; \{P_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} c_{ij}(B) F(P_i, P_j). \tag{4.1}$$

Два множества в $\mathbf{G}$ полагаем эквивалентными, если они совпадают с точностью до конечного числа пучков $[P] = \{g \in \mathbf{G} : P \in g\}$, $P \in \mathbb{R}^2$. Для любого $A \in Br\{P_i\}$ и множества $\{Q_i\}$ всегда существует множество $A^* \in Br(\{P_i\} \cup \{Q_i\})$ такое, что A и A^* эквивалентны. Легко показать, что

$$\Phi(A, \{P_i\}) = \Phi(A^*, \{P_i\} \cup \{Q_i\}).$$

Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс $U_{\mathbf{G}} = \cup Br\{P_i\}$ (объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\}$), является кольцом подмножеств в $\mathbf{G}$. На $U_{\mathbf{G}}$ определим функционал

$$\Phi(A) = \Phi(A, \{P_i\}).$$

Предыдущее соотношение означает, что это определение корректно.

Для проверки утверждения, что Φ является валюацией на $U_{\mathbf{G}}$, достаточно установить аддитивность. Для любого конечного числа множеств $A_s \in U\mathbf{G}$, существует подмножество точек $\{P_i\}$ такое, что $A_s \in Br\{P_i\}$ для всех s и требуемое свойство следует из аддитивности коэффициентов $c_{ij}(A)$ в A. Если мы дополнительно предположим, что F является **псевдометрикой** (т.е. $F \geq 0$, F удовлетворяет неравенству треугольника, $F(P,P) = 0$), то функционал Φ неотрицателен.

Доказательство этого утверждения получается использованием модели пространства $\mathbf{G}$, полученной с помощью стереографической проекции

$$\mathbb{R}^2 \longmapsto \text{открытая полусфера}$$

(при которой каждая прямая g отображается на геодезическую) и последующим использованием полярного отображения, при котором каждая геодезическая представляется своим полюсом.

Суперпозиция этих двух отображений переводит $\mathbf{G}$ в полусферу, на которой диаметрально противоположные точки экватора отождествлены и выброшена точка N (топологически открытый лист Мебиуса). В этой модели пучкам прямых в $\mathbf{G}$ соответствуют большие круги, и любой сферический треугольник, не содержащий выброшенную точку N, соответствует множеству прямых $\Delta = [P_1, P_2] \cap [P_1, P_3]$ для некоторой тройки точек P_1, P_2, P_3 в $\mathbb{R}^2$. Непосредственно вычисляя коэффициенты в (4.1) получаем

$$\Phi(\Delta) = F(P_1, P_2) + F(P_1, P_3) - F(P_2, P_3), \tag{4.2}$$

и эта величина неотрицательна, если F является псевдометрикой. При вышеопределенном отображении каждая $A \in U_{\mathbf{G}}$ представляется объединением геодезически выпуклых многоугольников на сфере, которые не содержат точки N. Так как каждое такое множество можно разложить на конечное объединение треугольников $A = \cup\Delta_i$ с $int\Delta_i \cap int\Delta_j = \emptyset$, из аддитивности F следует, что $\Phi(B) \geq 0$ для любого $B \in U_{\mathbf{G}}$. Как показано в [16], из неотрицательности Φ следуют свойства непрерывности Φ, которые гарантируют, что эта валюация оказывается мерой в пространстве $\mathbf{G}$. Этим путем мы получаем доказательство Теоремы 2, которая является "валюационным вариантом" результатов А. В. Погорелова [12], Р. Александера [13] и Р. В. Амбарцумяна [14], относящихся к четвертой проблеме Гильберта в $\mathbb{R}^2$. Последняя проблема состоит в описании

метрик или псевдометрик, для которых обычные евклидовы прямые являются геодезическими (эквивалентно, в описании линейно-аддитивных псевдометрик).

Теорема 2. Следующие два утверждения эквивалентны :

1) F **есть линейно-аддитивная непрерывная псевдометрика в** $\mathbb{R}^2$,

2) **валюация** Φ, **соответствующая** $F(P_1, P_2)$, **продолжается до неотрицательной меры в** $\mathbf{G}$. **Последняя равна нулю на каждом пучке прямых.**

Для анализа удобно (как в нижеследующих §5 и §6), заменить свойство псевдометрики для функции $F(P_1, P_2)$ некоторым **локальным** условием. Такое условие можно получить используя **флаговые функции** (впервые в интегральной геометрии эти функции были использованы в [17]). Некоторые подходы к этой задаче даны в работах [15], [16], [18]. Здесь мы очертим подход [15]. Задача разбивается на две части :

когда валюация Φ продолжается до знакопеременной меры на $\mathbf{G}$? и

когда эта мера оказывается неотрицательной ?

Флаг на плоскости $\mathbb{R}^2$ есть пара $(P, \varphi) = (x, y, \varphi)$, состоящая из точки $P = (x, y)$ и направления $\varphi \in [0, \pi)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $\rho(P, \varphi) = \rho(x, y, \varphi)$ – непрерывная функция, определенная в пространстве флагов (ниже ρ будем называть **флаговой или финслеровой плотностью**). Рассмотрим непрерывную и линейно-аддитивную функцию

$$F(P_1, P_2) = \int_{P_1 P_2} \rho(P, \varphi)\, dl, \tag{4.3}$$

где интегрирование ведется относительно точек P, принадлежащих прямолинейному отрезку P_1, P_2, dl есть элемент длины на этом отрезке. Угловой параметр φ в аргументе функции ρ совпадает с направлением отрезка P_1, P_2.

Будем говорить, что последовательность троек $P_1(n), P_2(n), P_3(n)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ образует **узкий треугольник**, если точки $P_1(n)$, $P_2(n)$ и $P_3(n)$ стремятся к трем различным предельным точкам P_1, P_2, P_3, соответственно, лежащим на одной прямой, причем P_2 лежит между P_1 и P_3. Если существует знакопеременная мера σ в пространстве $\mathbf{G}$ с непрерывной плотностью такая, что

$$F(P_1, P_2) = \sigma([P_1, P_2]), \tag{4.4}$$

то для любого ограниченного узкого треугольника при $n \to \infty$ необходимо имеем

$$F(P_1(n), P_2(n)) + F(P_2(n), P_3(n)) - F(P_1(n), P_3(n)) = o(d(n)), \tag{4.5}$$

где $d(n)$ – длина перпендикуляра из $P_2(n)$ на прямую $P_1(n)$, $P_3(n)$.

Дуализм между пространствами **G** и полусферой позволяет отождествлять $U_{\mathbf{G}}$ с классом сферических многоугольников, а также Ф с так называемым функционалом Эйлера, определенным на сферических многоугольниках. (Название последнего функционала подчеркивает его тесную связь с известной формулой Эйлера сферического избытка для площади сферических треугольников). В действительности, для того, чтобы получить более наглядную геометрию, в [15] исследование проводится на плоскости, после применения еще одной стереографии. Возвращение к пространству **G** дает решение первой половины проблемы :

Предложение 5, [15]. Пусть F – функция, определенная по формуле (4.3) с помощью флаговой плотности $\rho(P,\varphi)$, которая имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно. Свойство (4.5) необходимо и достаточно для того, чтобы соответствующая валюация Ф продолжалась до знакопеременной меры σ в пространстве G с непрерывной плотностью $f(g)$, т.е. $\sigma(dg) = f(g)\,dg$.

Условие (4.5) можно записать в терминах флаговой плотности ρ. Оказывается, что (4.5) эквивалентна следующему дифференциальному уравнению :

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\varphi P\, \partial\varphi}, \qquad \rho = \rho(x, y, \varphi), \tag{4.6}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ – дифференцирование по φ против часовой стрелки. Остальные операции в этом уравнении определяются после того, как на прямой L, содержащей точку $P = (x, y)$ и имеющей направление φ, мы выбираем одно из двух возможных направлений в качестве положительного. Далее $\dfrac{\partial}{\partial_\varphi P}$ обозначает дифференцирование по P в этом положительном направлении, а $\dfrac{\partial}{\partial_n P}$ – дифференцирование по P по нормали к прямой L, направленной в левую полуплоскость относительно прямой L. Результат не зависит от выбора положительного направления на прямой L.

Вопрос неотрицательности меры σ, порожденной флаговой плотностью $\rho(P,\varphi)$, решается критерием **выпуклости**. Его мы приводим с кратким доказательством. В обычных декартовых координатах x, y, уравнение (4.6) принимает вид

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial\varphi}\cos\varphi - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial\varphi}\sin\varphi = 0. \tag{4.7}$$

Дифференцируя по φ и полагая для краткости $\rho' = \dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial_\varphi P}[\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)] = 0. \tag{4.8}$$

Вначале рассмотрим случай, когда $\rho(P,\varphi)$ не зависит от P, т.е. $\rho(P,\varphi) = \rho(\varphi)$. Напомним (см. [6], стр. 31), что условие выпуклости

$$\rho(\varphi) + \rho''(\varphi) \geq 0 \tag{4.9}$$

гарантирует, чтобы функция $\rho(\varphi)$ была бы опорной функцией некоторой ограниченной центрально-симметричной выпуклой области $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ и наоборот. Величина $\dfrac{1}{2}[\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]$ совпадает с плотностью $f(\varphi) \geq 0$ некоторой трансляционно инвариантной меры в пространстве $\mathbf{G}$, определенной по D. Отсюда следует, что для любого отрезка P_1, P_2

$$\int_{[P_1,P_2]} [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]\, dg = 2\,\rho(\alpha)\,|P_1, P_2|,$$

где α – направление отрезка P_1, P_2. Таким образом, используя вид инвариантной меры (см. [6]) $dg = |\sin(\varphi - \alpha)|\, d\varphi\, dl$ в пространстве $\mathbf{G}$ в координатах

l = точка, в которой прямая g пересекает отрезок P_1, P_2,

φ = направление g,

приходим к замечательному интегральному тождеству

$$\int_0^\pi [\rho(\varphi) + \rho''(\varphi)]\, |\sin(\varphi - \alpha)|\, d\varphi = 2\,\rho(\alpha).$$

Будем говорить, что гладкая функция $\rho(P,\varphi)$ **выпукла**, если при фиксированном P она выпукла по переменной φ. Из (4.8) следует, что $\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)$ остается константой на прямых g, содержащих точку P и имеющих направление φ. Другими словами, $\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)$ является функцией, зависящей только от $g \in \mathbf{G}$. Пусть m обозначает знакопеременную меру в пространстве $\mathbf{G}$, для которой $\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)$ является плотностью. Интегрированием предыдущего тождества получаем

$$m([P_1,P_2]) = \int_{[P_1,P_2]} [\rho(P,\varphi) + \rho''(P,\varphi)]\, dg = 2 \int_{P_1,P_2} \rho(P,\alpha)\, dl.$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Предложение 6. Для любой гладкой выпуклой функции $\rho(P,\varphi)$ удовлетворяющей условию (4.6), валюация Φ, соответствующая функции $F(P_1,P_2) = \int_{P_1,P_2} \rho(P,\alpha)\,dl$, продолжается до неотрицательной меры в пространстве G, причем $\rho(P,\varphi)+\rho''(P,\varphi)$ является плотностью этой меры относительно dg.

2. Валюации на $U_{\mathbb{E}}$.

Начнем с необходимых определений и кратко напомним основные результаты монографии [1], относящиеся к пространству $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано конечное множество точек $\{P_i\}$, содержащее не менее двух точек. Две плоскости, не содержащие точек P_i, будем называть **эквивалентными**, если они индуцируют одно и то же разбиение множества $\{P_i\}$. Множество эквивалентных плоскостей называется **атомом**, если его замыкание компактно. Каждому конечному множеству $\{P_i\}$ соответствует **кольцо** $r\{P_i\}$, определяемое как минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{E}$, содержащее все атомы.

Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс

$$U_{\mathbb{E}} = \bigcup r\{P_i\},$$

где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, содержащим более одной точки, является кольцом в $\mathbb{E}$. Два множества $A \in r\{P_i\}$ и $B \in r\{Q_i\}$ эквивалентны, если симметрическая разность $A\Delta B$ принадлежит объединению конечного числа **пучков** (**пучок** – множество $[P]$ плоскостей, проходящих через точку $P \in \mathbb{R}^3$).

Флагом f в $\mathbb{R}^3$ называется триада, состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ, проходящей через P и определяемой ее пространственным направлением Ω, и плоскостью e, проходящей через γ и определяемой углом поворота ϕ вокруг оси γ. Будем писать

$$f = (P,\gamma,e) = (P,\Omega,\phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

где $\mathcal{E}_2$ – **проективная** (или эллиптическая) плоскость, $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$ – окружность, представляющая пространство направлений, ортогональных к прямой γ. Пространство $\mathcal{F}$ флагов в $\mathbb{R}^3$ представляет собой произведение $\mathbb{R}^3 \times \nabla$, где ∇ – пространство **свободных флагов**. Имеем $f = (P,\Lambda)$, где $P \in \mathbb{R}^3$, $\Lambda = (\Omega,\phi)$ – свободный флаг флага f. Часто используются параметры, дуальные к Ω, ϕ, т.е.

$\Lambda = (\omega, \varphi)$, где $\omega \in \mathcal{E}_2$ – направление нормали к плоскости флага f;

$\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ – направление в плоскости флага f, совпадающее с Ω.

Рассмотрим семейство флагов, зависящих от прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f\colon\ P \in \gamma,\ \Omega \text{ совпадает с направлением } \gamma,\ \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)\}.$$

Простейшие множества из $\mathcal{F}_\gamma$, называемые **клиньями**, имеют вид произведения $w = \nu \times \lambda$, где $\nu \subset \gamma$ – замкнутый интервал, а $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ – замкнутая дуга (длины, не превышающей π).

Пусть $e(\gamma, \phi)$ – плоскость, проходящая через прямую $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, повернутая вокруг γ на угол $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$. Прямая $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и замкнутая дуга $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ определяют множество

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3.$$

Теперь мы можем дать следующее эквивалентное определение клина : **клин есть** пара $w = (\nu, V)$. Топология в **пространстве клиньев** индуцируется стандартной топологией в пространстве пар замкнутых множеств в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим непрерывные функции $F(w)$, определенные в пространстве клиньев. Функция $F(w)$ называется **аддитивной**, если из $w = w_1 \cup w_2$ и $int\, w_1 \cap int\, w_2 = \emptyset$ следует $F(w) = F(w_1) + F(w_2)$. Дадим пример непрерывной, аддитивной функции клина. Знакопеременная мера m в пространстве $\mathbb{E}$ называется **беспучковой**, если значение меры m на любом пучке $[P]$ равно нулю, т.е. $m([P]) = 0$ для любой точки $P \in \mathbb{R}^3$. Пусть m – знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$. Для клина $w = (\nu, V)$ определим $|V \cap e|$ как угол (радианная мера множества направлений в e) плоской области $V \cap e$. Интеграл

$$F(w) = \int_{[\nu]} |V \cap e|\ m(de) \tag{4.10}$$

по множеству $[\nu]$ плоскостей, пересекающих ν, всегда является непрерывной и аддитивной функцией клина.

Нижеследующая теорема была доказана в [19] для неотрицательных мер, интегрированием разложения (0.1). Распространение на знакопеременные меры является ее простым следствием. Для заданного конечного множества точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, определим множество клиньев $W\{P_i\}$ **связанных** с $\{P_i\}$: клин $w = (\nu, V)$ принадлежит множеству $W\{P_i\}$ тогда и только тогда, когда концы ν принадлежат $\{P_i\}$, а каждая из двух плоскостей, ограничивающих V, содержит точки из множества $\{P_i\}$, а во внутренности множества V нет точек из $\{P_i\}$.

Теорема 3, [19]. Пусть m – беспучковая знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$, $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ – произвольное конечное множество точек. Для любого $A \in \tau\{P_i\}$, значение меры $m(A)$ может быть представлен в виде

$$m(A) = \sum c_s(A)\, F(w_s), \tag{4.11}$$

где сумма распространяется на множество клиньев $w_s \in W\{P_i\}$, F – функция клина (4.10), а коэффициенты $c_s(A)$ – целые числа, не зависящие от выбора m.

Комбинаторный алгоритм вычисления целочисленных коэффициентов $c_s(A)$ в (4.11) является вариантом формулы (0.2) (см. [1] или [19]).

Пример. Пусть τ – ограниченный, выпуклый многоугольник с вершинами $v_1, \ldots, v_n$, лежащий в плоскости $e \subset \mathbb{R}^3$. Пусть Q – точка, лежащая вне e. Пару (Q, τ) будем называть пирамидой K с вершиной Q и основанием τ. Запишем формулу (4.11) для пирамидального множества

$$A = Q|v_1, \ldots, v_n = Q|\tau = \{e \in \mathbb{E}\colon e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\}.$$

Клинья из $W(K)$, связанные с $\{P_i\} = \{Q, v_1, \ldots, v_n\}$, имеют вид $w_s =$ (ребро пирамиды K, V). Ребра типа Qv_i назовем **боковыми**, а типа v_iv_j **базовыми**. Клин $w_s \in W(K)$ называется **опорным**, если $V \cap \operatorname{int} K = \emptyset$, и **покрывающим**, если $\operatorname{int} K \subset V$. Будем писать $w_s \in \mathrm{sl}$, если w_s является опорным клином на боковом ребре, и $w_s \in \mathrm{cb}$, если w_s – покрывающий клин на базовом ребре. Используя (4.11), получаем

$$m(Q|v_1, \ldots, v_n) = \sum_{w_s \in \mathrm{sl}} F(w_s) - \sum_{w_s \in \mathrm{cb}} F(w_s). \tag{4.12}$$

Пусть $F(w)$ – непрерывная функция, определенная в пространстве клиньев. Для множества $\{P_i\}$ и для любого $A \in \tau\{P_i\}$ положим

$$\Psi(A) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A)\, F(w_s), \tag{4.13}$$

где коэффициенты $c_s(A)$, как и в Теореме 3. Выражение $\Psi(Q|\tau)$, задаваемое правой частью формулы (4.12), будем называть **пирамидальным эксцессом.**

Теорема 4, [20]. Если функция клина $F(w)$ аддитивна и непрерывна, то $\Psi(A)$, задаваемая по формуле (4.13), не зависит от выбора кольца, содержащего A и представляет собой валюацию на $U_{\mathbb{E}}$.

Любая непрерывная **флаговая плотность** $\rho(f)$, определенная в пространстве $\mathcal{F}$ флагов, порождает функцию клина по формуле

$$F(w) = \int_w \rho(f)\, dl\, d\phi. \tag{4.14}$$

Здесь $dl\, d\phi$ – единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathcal{F}_\gamma$, инвариантная относительно евклидовых движений, причем dl – элемент длины на γ, а $d\phi$ – элемент равномерной угловой меры.

В работах [20] и [21] рассматривалась следующая задача : когда флаговая плотность $\rho(f)$ порождает по формулам (4.14) – (4.13) знакопеременную меру в пространстве $\mathbb{E}$? Другими словами, когда соответствующая валюация $\Psi(A)$ становится знакопеременной мерой ?

Определение. Последовательность пирамид (Q_i, τ), имеющих общее основание τ, называется **асимптотически плоской**, если расстояние $h_i = |Q_i Q_0|$ между вершинами и точкой $Q_0 \in \operatorname{int} \tau$ стремится к нулю.

Для заданной последовательности асимптотически плоских пирамид рассмотрим соответствующую последовательность множеств $Q_i|\tau$.

Предложение 7, [20]. Пусть Ψ – валюация на $U_{\mathbb{E}}$, порожденная флаговой плотностью $\rho \in C^{(3)}$ по формулам (4.14), (4.13). Если для каждой асимптотически плоской последовательности пирамид (Q_i, τ), пирамидальный эксцесс (4.12) удовлетворяет условию $\Psi(Q_i|\tau) = o(h_i^2)$, то существует единственная локально конечная знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$, сужение которой на $U_{\mathbb{E}}$ совпадает с Ψ (т.е. Ψ – локально конечная знакопеременная мера в $\mathbb{E}$).

В статьях [20] и [21] этот результат использовался при выводе локальных условий для порождения знакопеременных мер. В результате получена система дифференциальных соотношений для $\rho \in C^{(3)}$. В этом классе эти соотношения как необходимы, так и достаточны. В случае, когда $\rho(P, \Lambda) = \rho(\Lambda)$ не зависит от точки P, мы формулируем следствие (в этом случае соответствующая знакопеременная мера трансляционно инвариантна).

Предложение 8, [20], [21]. Пусть $\rho(\Lambda) \in C^{(3)}$ – флаговая плотность, зависящая только от свободных флагов. Соответствующая валюация Ψ продолжается до локально конечной, знакопеременной меры на $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = (\omega, \varphi)$ представляется в виде

$$\rho(\Lambda) = \rho(\omega, \varphi) = A(\omega) \sin 2\varphi + B(\omega) \cos 2\varphi + C(\omega),$$

где функции A, B, C зависят только от ω и принадлежат классу $C^{(3)}$.

Замечание. Имеется в виду, что для каждого большого круга выбраны как нулевое направление $\varphi = 0$, так и ориентация. Однако, класс функций $\rho(\Lambda)$ описанный в Предложении 8, не зависит от этого выбора. Нижеследующее следствие из Предложения 8 отсутствует в работах [20] и [21]. Оно связывает теорию валюаций на $U_{\mathbb{E}}$ с классической задачей Функа восстановления функции, определенной на $\mathcal{E}_2$ по ее 1-мерным интегралам по большим кругам (решение см. в [12], иначе эта проблема известна, как задача обращения сферического преобразования Радона).

Флаговую функцию $\rho(\Lambda)$, зависящую только от свободных флагов Λ, назовем **простой**, если $\rho(\Lambda) = \rho(\omega, \varphi)$ не зависит от φ, т.е. $\rho(\Lambda) = \rho(\omega)$. Согласно Предложению 8, любая простая флаговая плотность из класса $C^{(3)}$ порождает знакопеременную меру m с помощью Ψ (случай $A(\omega) = B(\omega) = 0$). Подставляя простую $\rho(\Lambda)$ в (4.14) получаем следующую функцию клина

$$F(w) = |\nu| \int_{\lambda} \rho(\omega)\, d\phi. \tag{4.15}$$

Здесь $\lambda \subset \mathcal{E}_2$ является дугой из $c(\nu) =$ большой круг, ортогональный к ν. Как следует из конструкции валюации Ψ, с точностью до постоянного множителя имеем

$$m([\nu]) = \Psi([\nu]) = |\nu| \int_{c(\nu)} \rho(\omega)\, d\phi.$$

Функция $r(\Omega) = |\nu|^{-1} m([\nu])$, зависящая только от направления Ω отрезка ν, часто называется **розой пересечений** знакопеременной меры m. Из предыдущего уравнения вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для любой функции $\rho(\Omega) \in C^{(3)}$, определенной на $\mathcal{E}_2$, единственное решение $h(\omega)$ уравнения Функа

$$r(\Omega) = \int_{c(\Omega)} \rho(\omega)\, d\phi \tag{4.16}$$

порождает с помощью формул (4.15) и (4.13) валюацию, продолжимую до трансляционно инвариантной знакопеременной меры m на $\mathbb{E}$, для которой $r(\Omega)$ есть роза пересечений.

Итак, для заданной розы направлений $r(\Omega)$, задача вычисления меры $m(A)$ для множеств $A \in U_{\mathbb{E}}$ сводится к решению уравнения Функа (4.16) и вычислению одномерных интегралов (4.15).

Известно, что "роза пересечений" $r(\Omega)$ и плотность $h(\omega)$ знакопеременной меры связаны так называемым cos-преобразованием

$$r(\Omega) = \int |\cos(\widehat{\Omega\,\omega})| h(\omega)\, d\omega. \tag{4.17}$$

В [17] дано выражение дифференциального оператора, который $\rho(\Lambda)$ переводит в соответствующую плотность $h(\omega)$. В случае, когда $\rho(\Lambda) = \rho(\omega)$, этот оператор сводится к хорошо известному выражению $2\rho(\omega) + \Delta_2\rho(\omega)$, где Δ_2 – оператор Лапласа.

Из Следствия 2 вытекает, что cos-преобразование можно обратить, применяя дифференциальный оператор к решению уравнения Функа (4.16). Этим путем мы вновь получаем алгоритм, описанный в книге В. Бляшке "Круг и Шар", доказательство которого основано на фактах из дифференциальной геометрии выпуклых тел. Однако, для того, чтобы вычислить значение $m(A)$ для произвольного $A \in U_{\mathbb{E}}$ не обязательно вычислять $h(\omega) = 2\rho(\omega) + \Delta_2\rho(\omega)$, а затем выполнять трехмерное интегрирование. Следствие 2 указывает, что все что нужно это одномерное интегрирование плотности $\rho(\omega)$ согласно формуле (4.15).

3. Валюации на $U_{\mathbb{\Gamma}}$.

Построение кольца подмножеств $U_{\mathbb{\Gamma}}$ в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ прямых в $\mathbb{R}^3$ и валюации Θ, определенной на этом кольце, было предложено в [1, Заключение]. В настоящее время имеются две статьи [16] и [22], изучающие порождение знакопеременных мер с помощью валюации Θ, и здесь мы представляем основные результаты этих работ. Для определения $U_{\mathbb{\Gamma}}$ и Θ нам понадобятся следующие обозначения :

γ = прямая в $\mathbb{R}^3$ (элемент пространства $\mathbb{\Gamma}$) ;

τ = пластинка = ограниченное выпуклое подмножество на плоскости из $\mathbb{R}^3$;

$\partial\tau$ = граница пластинки τ ;

$[\tau] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ не пересекает $\partial\tau$, но пересекает внутренность $\tau\}$;

$[\partial\tau] = \partial[\tau] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ hits $\partial\tau\}$.

Любая конечная совокупность $\{\tau_i\}$ пластинок в $\mathbb{R}^3$ порождает отношение эквивалентности в $\mathbb{\Gamma}$: прямые $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{\Gamma}$, не пересекающие $\partial\tau_i$, назовем эквивалентными, если они пересекают одни и те же пластинки. Множество эквивалентных прямых назовем атомом, если его замыкание компактно.

Для заданной совокупности $\{\tau_i\}$, через $\tau\{\tau_i\}$ обозначим минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{\Gamma}$, содержащее все атомы. Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс $U_{\mathbb{\Gamma}} = \cup\, \tau\{\tau_i\}$ (объединение берется по

всем конечным подмножествам $\{\tau_i\} \subset \mathbb{R}^3$) является кольцом подмножеств в $\mathbb{\Gamma}$. Два множества $A_1, A_2 \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ назовем эквивалентными, если их симметрическая разность принадлежит $\cup_i[\partial\tau_i]$ для некоторой конечной системы пластинок $\{\tau_i\}$). Пусть функция $F(P_1, P_2)$ определенная на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, будет непрерывной, симметричной и аддитивной вдоль прямых γ. Как очерчено в 1. этого параграфа, для каждой $e \in \mathbb{E}$ строится кольцо U_e подмножеств $\mathbf{G}_e$ = пространство прямых на плоскости e в $\mathbb{R}^3$. Сужение $F(P_1, P_2)$ на пары $P_1, P_2 \in e$ определяет валюацию $\Phi_e(A)$ на U_e. Как и в [16], для любого $B \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ положим

$$\Theta_F(B) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{E}} \Phi_e(B \cap e)de, \tag{4.18}$$

где de – мера в $\mathbb{E}$ (пространство плоскостей), инвариантная относительно евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$. Это определение корректно, так как для почти всех плоскостей e, множество $B \cap e$ принадлежит кольцу U_e. Подстановка точных выражений для $\Phi_e(B \cap e)$ в (4.18) сводит $\Theta_F(B)$ к сумме двойных интегралов по произведениям множеств $\partial\tau_i \times \partial\tau_j$. Эта формула эффективна при получении условий продолжимости $\Theta_F(B)$ до знакопеременной меры.

Предложение 9, [16]. $\Theta(B)$ **является валюацией на** $U_{\mathbb{\Gamma}}$. **Если для каждой плоскости** $e \in \mathbb{E}$ **валюация** Φ_e **продолжается до знакопеременной меры на** $\mathbf{G}_e$ **с непрерывной плотностью** $h_e(g)$, **то** Θ_F **продолжается до знакопеременной меры на** $\mathbb{\Gamma}$ **с плотностью** $h(g)$.

Это предложение следует из соотношения

$$h_e(g)\, de\, d_e g = h_\phi(\gamma)\, d\gamma\, d\phi,$$

где $d\gamma$ – мера на $\mathbb{\Gamma}$, инвариантная относительно евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$, а $d_e g$ – мера в $\mathbf{G}_e$, инвариантная относительно евклидовых движений плоскости e. Функция $h_\phi(\gamma)$ нуждается в определении. Для пары (e, g), где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in \mathbf{G}_e$ рассмотрим дуальное представление $(e, g) = (\gamma, \phi)$: прямая $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ совпадает с $g \in \mathbf{G}_e$, а ϕ – угол вращения плоскости e вокруг γ. Полагаем $h_\phi(\gamma) = h_e(g)$ коль скоро $(e, g) = (\gamma, \phi)$. Искомая плотность имеет вид $h(\gamma) = \int h_\phi(\gamma)d\phi$.

Работа [22] содержит обращение Предложения 9, полученное при дополнительном предположении, что F представляется интегралом от флаговой плотности :

$$F(P_1, P_2) = \int_{P_1 P_2} \rho(P, \Omega)\, dl, \tag{4.19}$$

где интегрирование берется по отрезку $P_1P_2 \subset \mathbb{R}^3$, Ω – пространственное направление отрезка P_1P_2, а dl – мера Лебега на этом отрезке. В действительности, из (4.19) следует, что $\rho(P,\Omega) = \dfrac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_\Omega P_2}$. В общем определении флага $f = (P,\Omega,\phi)$, т.е. флаговая плотность в (4.19) не зависит от угла вращения ϕ. Ниже $c(\omega)$ обозначает большой круг, ортогональный к ω.

Предложение 10, [22]. Валюация Θ_F, порожденная флаговой плотностью $\rho(P,\Omega) \in C^{(3)}$ по формулам (4.19), (4.18), продолжается до знакопеременной меры μ в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда для любой точки P и пространственного направления ω сужение плотности $\rho(P,\Omega)$ на $\Omega \in c(\omega)$ удовлетворяет уравнению (4.6).

Обычное условие выпуклости по переменной Ω требует выполнения (4.9) для любой $c(\omega)$. Если это имеет место для любой $P \in \mathbb{R}^3$, мы называем $\rho(P,\Omega)$ выпуклой. Из выпуклости плотности $\rho(P,\Omega)$ следует неотрицательность меры μ. Отсюда следует результат, касающийся четвертой проблемы Гильберта для прямых в $\mathbb{R}^3$:

Предложение 11, [22]. Для того, чтобы функция $F(P_1,P_2)$ порожденная по формуле (4.14) выпуклой функцией $\rho(P,\Omega) \in C^{(3)}$, являлась бы метрикой в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовы прямые суть геодезические, необходимо и достаточно, чтобы сужение плотности $\rho(P,\Omega)$ на $\Omega \in c(\omega)$ для любых P и ω удовлетворяло бы условию (4.6).

В заключении параграфа приведем одно следствие для трансляционно инвариантного случая, т.е. когда флаговая плотность $\rho(P,\Omega)$ не зависит от P. В этом случае имеем

$$F(P_1,P_2) = |P_1P_2|\,\rho(\Omega). \tag{4.20}$$

Очевидно, что любая функция $\rho(\Omega) \in C^{(3)}$, зависящая только от пространственного направления Ω, удовлетворяет условию (4.6) на каждом большом круге. Мера μ, которая согласно Предложению 10 существует, должна быть трансляционно инвариантна. Для пластинки $\tau \subset e$ из (4.18) и (4.20) находим

$$\mu([\tau]) = \Theta_F([\tau]) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{E}} \Phi_e([\tau]\cap e)\,de = \int \chi(g)\rho(\Omega)\,d_e g,$$

где g – прямая в плоскости e, $\chi(g) = |\tau \cap g|$, Ω – направление (в плоскости e) прямой g. Очевидно имеем

$$\int \chi(g)\rho(\Omega)\,d_e g = ||\tau|| \int_{c(\omega)} \rho(\Omega)\,d\varphi,$$

где $||\tau||$ – площадь пластинки τ, а ω – направление нормали к τ. Функция $r_1(\omega) = ||\tau||^{-1}\mu([\tau])$, зависящая только от направления нормали ω к τ, часто называется **розой пересечений** знакопеременной меры μ. Из предыдущего замечания получаем следующее утверждение (сравни с Следствием 2).

Следствие 3. Для любой функции $r_1(\omega) \in C^{(3)}$, определенной на $\mathcal{E}_2$, единственное решение $\rho_1(\Omega)$ уравнения Функа

$$r_1(\omega) = \int_{c(\omega)} \rho_1(\Omega)\, d\phi \tag{4.21}$$

порождает с помощью формул (4.19) и (4.18) валюацию, продолжимую до трансляционно инвариантной знакопеременной меры μ на $\mathbb{\Gamma}$, для которой $r_1(\Omega)$ является розой пересечений.

Для заданной розы направлений $r_1(\omega)$, задача вычисления $m(A)$ на множествах $A \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ сводится к решению уравнения Функа (4.21) и к двумерному интегрированию согласно точным формулам для $\Theta_F(B)$, полученным в [16].

Статья [22] содержит вычисление плотности знакопеременной меры μ, упомянутой в Предложении 10, в терминах флаговой плотности $\rho(P, \Omega)$. Естественно, что в трансляционно инвариантном случае эта плотность равна $2\rho(\Omega) + \Delta_2\rho(\Omega)$.

§5. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

В этом параграфе представлены результаты работы [23], и мы следуем терминологии этой статьи. Четвертая проблема Гильберта может быть сформулирована следующим образом : описать все псевдометрики на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых обычные евклидовы прямые суть геодезические. Такие псевдометрики будем называть **Гильбертовыми.**

Для метрик или псевдометрик, которые вычисляются с помощью интеграла вида (4.3), функция $\rho(P, \varphi)$ обычно называется **финслеровой плотностью.** Поэтому в случае, когда метрика гильбертова, мы будем говорить о **плотности Гильберта–Финслера.** Из результатов §4, относящихся к пространству **G.** следует

Предложение 12, [23]. Если гладкая выпуклая функция $\rho(P, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (4.6), то она является плотностью Гильберта–Финслера. Обратно, любая гладкая плотность Гильберта–Финслера $\rho(P, \varphi)$ выпукла и удовлетворяет уравнению (4.6).

Пусть имеется выпуклая $\rho(P,\varphi)$. Для точки $P=(x,y)$ определим $D(x,y)$ как центрально-симметрическую выпуклую область, опорная функция которой есть $\rho(P,\varphi)$. Для гладкого финслерова случая четвертая проблема Гильберта формулируется следующим образом : **какие функции $D(x,y)$ порождают метрики ?** Отметим, что если $D(x,y)\equiv D$ – постоянная, то ответ известен : любая ограниченная, центрально–симметричная выпуклая D порождает метрику, причем этим путем строится класс трансляционно инвариантных метрик или метрик Минковского.

Пусть задано семейство $D=D(u_1,...,u_k)$ ограниченных центрально–симметричных выпуклых областей с центром в O, зависящих от конечного числа одномерных непрерывных параметров u_1, u_2, ..., u_k. Опорная функция $H(\varphi)$ области D зависит от тех же параметров, т.е.

$$H(\varphi)=H(\varphi,u_1,u_2,...,u_k). \tag{5.1}$$

Пример 1. D – отрезок прямой длины l и ориентации α. Имеем

$$H(\varphi,l,\alpha)=\frac{1}{2}l\,|\cos(\varphi-\alpha)|. \tag{5.2}$$

Заметим, что эта опорная функция не гладкая и в случае постоянных l и α она порождает псевдометрику (а не метрику) Минковского.

Пример 2. D — эллипс с полуосями $a>b$ и ориентация полуоси a есть $\alpha\in\mathcal{E}_1$. Это означает, что

$$H(\varphi,a,b,\alpha)=\sqrt{a^2\cos^2(\varphi+\alpha)+b^2\sin^2(\varphi+\alpha)}. \tag{5.3}$$

В правой части записано выражение опорной функции эллипса с параметрами a, b, α. Заметим, что

$$\rho(\varphi,x,y)\,dl=dl\cdot\sqrt{a^2(x,y)\cos^2(\varphi+\alpha(x,y))+b^2(x,y)\sin^2(\varphi+\alpha(x,y))} \tag{5.4}$$

есть элемент общей римановой метрики. В этом выражении dl – элемент евклидовой длины, $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $\alpha(x,y)$ – некоторые функции, определенные на плоскости.

Функцию $H(\varphi,u_1,u_2,...,u_k)$ будем называть гладкой, если она три раза непрерывно дифференцируема по всем аргументам. Любая последовательность функций $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ... $u_k(x,y)$ преобразует семейство (5.1) в выпуклую функцию

$$\rho(\varphi,x,y)=H(\varphi,u_1(x,y),u_2(x,y),...,u_k(x,y)). \tag{5.5}$$

Семейство опорных функций (5.1), зависящих от параметров u_1, u_2, ..., u_k, мы будем называть семейством Минковского, если среди достаточно гладких функций $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ..., $u_k(x,y)$, только постоянные $u_i(x,y) = c_i$, $i = 1,...,k$ порождают метрики Гильберта-Финслера.

Возникает следующая задача : **для каких последовательностей** $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, ..., $u_k(x,y)$ **семейство опорных функций (5.1) порождает плотности Гильберта-Финслера согласно (5.5) ?** В частности : **когда гладкое семейство опорных функций (5.1) порождает метрику Минковского ?**

Несколько слов о методе, использованном в [23]. Подставляя (5.1) в (4.7) получаем

$$-\sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial u_i}\sin\varphi + \frac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\cos\varphi\right]\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial u_i}\cos\varphi - \frac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\sin\varphi\right]\frac{\partial u_i}{\partial y} = 0. \tag{5.6}$$

Выберем $2k$ значений φ_1, ...,φ_{2k}, и обозначим через $\Delta(\varphi_1,...,\varphi_{2k})$ детерминант с элементами q_{ji} :

$$q_{ji} = \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial u_i}\sin\varphi_j - \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\cos\varphi_j, & \text{для} \quad 1 \le i \le k \\ \dfrac{\partial H}{\partial u_i}\cos\varphi_j - \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_i\,\partial\varphi}\sin\varphi_j, & \text{для} \quad k+1 \le i \le 2k. \end{cases}$$

Если для любой последовательности параметров u_1, ..., u_k существуют углы φ_1, ...,φ_{2k} такие, что $\Delta(\varphi_1,...,\varphi_{2k}) \neq 0$, то

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0, \quad i = 1,...,k,$$

т.е все функции $u_i(x,y)$ константы и мы имеем случай Минковского.

С другой стороны, тождество

$$\Delta(\varphi_1,...,\varphi_{2k}) = \det||q_{ij}|| \equiv 0 \tag{5.7}$$

есть необходимое условие того, что данное семейство не является семейством Минковского. Очевидно, что уравнение (5.7) является условием линейной зависимости функций в квадратных скобках в (5.6).

При отсутствии необходимых свойств гладкости опорной функции (как в случае Примера 1), в [23] используется анализ Фурье для (5.6).

Предложение 13, [23]. Любое семейство гладких опорных функций $H(\varphi,u)$ **зависящих от одного одномерного непрерывного параметра** u **необходимо представляет собой семейство Минковского.**

Условие гладкости существенно : однопараметрическое семейство Примера 1 при фиксированной ориентации α не является семейством Минковского.

Для двухпараметрического семейства Примера 1 полное решение дается в терминах операторов $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ дифференцирования в направлении α отрезка или в перпендикулярном к α направлении n_α (t обозначает **касательное**, а n **нормальное направление относительно отрезка**) :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial n} = \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} - \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y}.$$

Предложение 14, [23]. Определенная внутри выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция (5.2) с гладкими $l(x,y)$ и $\alpha(x,y)$ есть плотность Гильберта–Финслера тогда и только тогда, когда внутри D функции l и α удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial l}{\partial n} = -l \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \tag{5.8}$$

Функция (5.2) с ненулевой функцией длины $l(x,y)$ есть плотность Гильберта–Финслера на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда функция ориентации $\alpha(x,y)$ постоянна. На подмножествах $\mathbb{R}^2$ существуют плотности Гильберта–Финслера вида (5.2) с непостоянной функцией $\alpha(x,y)$.

В случае риманова семейства Примера 2, условие (5.7) всегда выполняется. В [23] получены следующие результаты :

Предложение 15, [23]. Если плоская риманова метрика (5.4) гильбертова, то функция ориентации $\alpha(x,y)$ необходимо гармоническая. По заданной $\alpha(x,y)$, функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ определяются единственным образом .

Пример метрики Римана–Гильберта на всей плоскости, но не метрики Минковского, дает образ обычной метрики на полусфере при стандартной стереографической проекции (другие метрики из того же класса были построены в [24]). Кроме гармоничности, имеются (см. [24]) и другие условия на функцию $\alpha(x,y)$. Теорема Лиувилля о гармонических на всей плоскости функциях применима, если функция ориентации $\alpha(x,y)$ имеет табу–направление α_0, т.е. если $\{(x,y)\colon \alpha(x,y) = \alpha_0\} = \emptyset$.

Предложение 16, [23]. Пусть плоская риманова метрика (5.4) определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и является гильбертовой. Если существует

табу-направление, то функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $a(x,y)$ суть константы (т.е имеем метрику Минковского).

Классическая модель Келли-Клейна плоскости Лобачевского доставляет пример метрики Римана–Гильберта в круге, для которой геодезическими являются хорды круга. В этой модели метрика не является метрикой Минковского. Приведём более сильную версию этого утверждения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – центрально–симметричная выпуклая область, на границе которой в каждой точке существует гладкая кривизна. Для точки (x,y) внутри D определим

$$\rho(\varphi, x, y) = [d_1(\varphi)]^{-1} + [d_2(\varphi)]^{-1}, \tag{5.9}$$

где d_i, $i = 1,2$ суть длины двух отрезков, на которые хорда области D, содержащая точку (x,y) и имеющая направление φ, разбивается точкой (x,y).

Предложение 17, [23]. *Для любой центрально–симметричной выпуклой области D, на границе которой в каждой точке существует гладкая кривизна, функция (5.9) является метрикой Гильберта-Финслера. Если D - круг, то из (5.9) следует классическая модель Келли-Клейна.*

§6. ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

В пространстве кривых Теорема 1 использовалась уже в [1], где комбинаторный подход применялся к геодезическим на поверхностях в $\mathbb{R}^3$. В работе [25] этот подход комбинируется с методом флаговых (финслеровых) плотностей.

Пусть D – двумерное многообразие с границей ∂D, диффеоморфное замкнутому плоскому диску, и пусть $\tilde{\mathrm{G}}$ – семейство кривых на D, удовлетворяющих следующим аксиомам :

1) Каждая кривая $g \in \tilde{\mathrm{G}}$ диффеоморфна замкнутому прямолинейному отрезку. Внутренность g принадлежит $int\, D$ и оба конца кривой g лежат на границе ∂D.

2) Для любых двух различных точек в D существует **единственная** кривая $g \in \tilde{\mathrm{G}}$, содержащая эти две точки; это свойство остается в силе, если одна или обе точки принадлежат границе ∂D.

3) В каждой точке $P \in D$ существует только одна кривая $g \in \tilde{\mathrm{G}}$, содержащая точку P и имеющая в точке P данное направление касательной.

Если условия 1), 2) и 3) выполнены, мы называем $\tilde{\mathrm{G}}$ семейством **прегеодезических**. Вторая часть условия 2) постулирует существование взаимно–однозначного

концевого отображения, которое переводит каждую прегеодезическую g в неупорядоченную пару его концов. Это отображение определяет топологию на $\tilde{\mathrm{G}}$, которая не зависит от конкретной реализации $\tilde{\mathrm{G}}$. Не удивительно, что комбинаторные утверждения, которые получены для пространства $\tilde{\mathrm{G}}$ евклидовых прямых на евклидовой плоскости, имеют место и в новой ситуации.

Следует ли из свойств 1), 2), 3) существование метрики, определенной в D, для которой прегеодезические суть геодезические? Каким образом для семейства $\tilde{\mathrm{G}}$ прегеодезических можно описать все гильбертовы метрики (т.е. метрики, для которых прегеодезические из $\tilde{\mathrm{G}}$ являются геодезическими)? Какими индикатрисами (изотропными, римановыми и т.д.) могут обладать гильбертовы метрики? Последние два вопроса поставлены в стиле классической **4-ой проблемы Гильберта**.

Основные понятия, рассмотренные в §4 для пространства $\mathbf{G}$ (такие как кольцо $U_{\mathbf{G}}$ и валюация Ф), сохраняются в пространстве $\tilde{\mathrm{G}}$. Для доказательства этого утверждения в работе [25] рассматривалась **универсальная модель** для $\tilde{\mathrm{G}}$.

Проколотая ∂D представляется интервалом $(0,1)$. В квадрате $(0,1)\times(0,1)$ возьмём треугольник, лежащий ниже диагонали. Удалим из треугольника гипотенузу и три вершины. Оставшееся плоское множество обозначим через Δ : каждая кривая $g\in\tilde{\mathrm{G}}$ представляет собой точку в Δ и наоборот. Чтобы сделать Δ топологически эквивалентным $\tilde{\mathrm{G}}$ отождествим точки катетов Δ по способу Мебиуса : $(x,0)\sim(1,x)$.

Заметим, что удаление гипотенузы делает Δ **некомпактным**. Замечательно, что в [25] делается попытка дать названия подмножествам из $\tilde{\mathrm{G}}$. Кроме обычных **пучков** $[P]=\{g\in\tilde{\mathrm{G}}\colon\ g$ содержит точку $P\in D\}$, представленных кривыми в Δ и **бюффоновых множеств** $[P_1,P_2]=\{g\in\tilde{\mathrm{G}}\colon\ g$ разделяет $P_1\in D$ от $P_2\in D\}$, мы также находим **множества Паша** $=\{g\in\tilde{\mathrm{G}}: g$ отделяет $P_1\in D$ от $P_2\in D$ и $P_3\in D\}$ и **множества Крофтона** (они зависят от четырех точек в D).

Определение **бюффонова кольца** $Br\{P_i\}$ зависящего от конечного множества точек $\{P_i\}\subset int\,D$, повторяет определение, данное во Введении. Оно остается в силе, так как каждая g делит D на две непересекающие компоненты. На Δ атомы соответствуют относительно компактным компонентам, на которые образы пучков $[P_i]$ разбивают Δ, а объединения этих компонент соответствуют элементам кольца $Br\{P_i\}$. Аналогично, большая часть утверждений в чисто комбинаторной части работы [25] имеют их аналоги в $U_{\mathbf{G}}$ (см. §4).

Теорема 5, [25]. Пусть $\{P_i\} \subset D$ – конечное множество точек, а m – локально конечная знакопеременная мера на $\bar{\mathrm{G}}$, для которой

$$m([P_i]) = 0 \quad \text{для любой } P_i \text{ из заданного множества.}$$

Для всякого $B \in Br\{P_i\}$ имеет место разложение по бюффоновым множествам

$$2m(B) = \sum c_{ij}(B)\, m([P_i, P_j]), \tag{6.1}$$

где сумма берется по всем 2-подмножествам из $\{P_i\}$. Коэффициенты $c_{ij}(B)$ не зависят от знакопеременной меры m и вычисляются по алгоритму Теоремы 1.

Два множества $B_1, B_2 \subset \bar{\mathrm{G}}$ полагаем эквивалентными, если их симметрическая разность является подмножеством конечного числа пучков. Если игнорировать разницу между эквивалентными множествами, то класс $U = \bigcup Br\{P_i\}$, где объединение берется по всем возможным конечным множествам $\{P_i\}$, становится кольцом подмножеств пространства $\bar{\mathrm{G}}$.

Пусть $F(s) = F(P_1, P_2) = F(P_2, P_1)$ – **функция отрезка**, определенная на $\mathrm{S} =$ пространство отрезков s кривых из $g \in \bar{\mathrm{G}}$. В формуле (6.1) заменим величины $m([P_i, P_j])$ на $F(P_i, P_j)$ и рассмотрим функционалы $\varphi(B; \{P_i\})\colon Br\{P_i\} \to \mathbb{R}$. Функция $F(s)$, определенная на S, называется аддитивной, если $F(s_1) + F(s_2) = F(s_1 \cup s_2)$ для любых $s_1, s_2 \in \mathrm{S}$, лежащих на кривой γ, имеющих общий конец и $\operatorname{int} S_1 \bigcap \operatorname{int} S_2 = \emptyset$.

Теорема 6, [25]. Пусть $F(s) = F(P_1, P_2)$ – аддитивная функция, определенная на S и непрерывная в топологии пространства $D \times D$. Тогда функционалы $\varphi(B; \{P_i\})$, соответствующие F, не зависят от выбора $\{P_i\} \subset D$. Следовательно, $E_F(B) = 2\,\varphi(B, \{P_i\})$ является отображением $E_F\colon U \to \mathbb{R}$. Функция множеств E_F является валюацией на U. И обратно, любая непрерывная валюация V на U необходимо имеет вид $V = E_F$, где $F(s) = \frac{1}{2}V([s])$.

В [25], E_F называлась **эйлеровой валюацией** соответствующей функции F.

Теорема 7, [25]. Формула

$$F(P_1, P_2) = m([P_1, P_2]) \tag{6.2}$$

отображает беспучковую неотрицательную меру m, определенную на $\bar{\mathrm{G}}$, в псевдометрику $F(P_1, P_2)$ на D, для которой кривые из $\bar{\mathrm{G}}$ являются

геодезическими. И обратно, пусть $F(P_1, P_2)$ – непрерывная псевдометрика на D, для которой $\tilde{\mathrm{G}}$ является семейством геодезических. Тогда валюация E_F продолжается до неотрицательной меры m на борелевских подмножествах пространства $\tilde{\mathrm{G}}$. Для этой меры имеет место (6.1).

Очевидно, чтобы говорить о флаговых плотностях требуется некоторая стандартная метрика $F_0(P_1, P_2)$ на D. С этого момента существование F_0 постулируется, и [25] рассматривает E_F, соответствующие

$$F(P_1, P_2) = F(s) = \int_s \rho(P, \varphi)\, dt, \tag{6.3}$$

где $\rho(P, \varphi)$ – флаговая плотность. $\varphi =$ направление касательной к s в точке $P \in s$, dt – мера длины на $s \in \mathrm{S}$, соответствующая F_0, P_1, P_2 – концы отрезка s.

Определение. Аддитивная на S функция $F(s)$ называется сильно аддитивной, если

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)\right] = 0$$

для троек x_1, P, x_2 лежащих на одной кривой $g \in \tilde{\mathrm{G}}$, $x_1, x_2 \in \partial D$, $P \in int\, D$.

Из аддитивности $F(s)$ следует, что $F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2) = 0$ при x_1, P, x_2, лежащих на одной кривой g. Для смещенных x_1 последнее равенство уже не выполняется. Следовательно, сильная аддитивность не следует из аддитивности F. Это условие есть вариант условия (4.5).

Предложение 18, [25]. В классе гладких аддитивных функций F, определенных на S, следующие два утверждения эквивалентны :

a) F сильно аддитивна и

b) E_F продолжима до знакопеременной меры на борелевских множествах пространства $\tilde{\mathrm{G}}$.

В предположении, что прегеодезические кривые являются геодезическими для F_0 (т.е. F_0 есть гильбертова метрика для $\tilde{\mathrm{G}}$), в [25] выведено дифференциальное уравнение для $\rho(P, \varphi)$, заменяющее условие сильной аддитивности. Это уравнение сводится к уравнению (4.6), если $D \subset \mathbb{R}^2$, $\tilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}$ и $F_0 =$ – евклидова метрика. Оно затем использовано для получения версии условия (4.6) для полусферы и гиперболической плоскости, в обоих случаях с обычной F_0 и $\tilde{\mathrm{G}} =$ обычные геодезические.

Для общего D, $\tilde{\mathrm{G}}$ и гильбертовой F_0 статья [25] содержит результат для флаговых плотностей $\rho(P, \varphi) = \rho(P)$, не зависящих от φ (**изотропный** случай).

Предложение 19, [25]. Валюация E_F, построенная по изотропной флаговой плотности $\rho(P)$, продолжается до знакопеременной меры на $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда $\rho(P) = const$. В этом случае F пропорциональна стандартной метрике F_0, и поэтому E_F является неотрицательной мерой.

Наконец, [25] рассматривает порождение знакопеременных мер валзацией E_F для негильбертовой F_0 при следующих условиях : область D принадлежит евклидовой плоскости ; функция $k(P,g)$, определяемая как кривизна кривой $g \in \tilde{G}$ в точке $P \in g$, является достаточно гладкой (условие "регулярности"); стандартная метрика F_0 евклидова, а флаговая плотность $\rho = \rho(P)$ - круговая. Для регулярных семейств $\tilde{G}$ прегеодезических кривых в D, принадлежащих евклидовой плоскости, условие сильной аддитивности сводится к условию

$$\frac{\partial \rho(P)}{\partial n} = k(P,g)\rho(P), \tag{6.4}$$

где $n = n(g,P)$ - направление из точки P к центру круга, соприкасающегося с g в точке P.

Пусть $K(P,\alpha)$, $\alpha \in (0,2\pi)$ - **знакопеременная версия** функции кривизны $k(P,g)$. Имеем $K(P,\alpha) = \pm k(P,g)$, где g - прегеодезическая, содержащая точку P и нормальная к направлению α в точке P. Знак плюс, если α совпадает с направлением из точки P к центру круга соприкасающегося с g в точке P, и минус - в противном случае.

Для кусочно-дифференцируемого пути Θ, соединяющего две точки $Q_1, Q_2 \in D$, **положительным направлением** будем считать направление вдоль Θ из точки Q_1 к точке Q_2, l - координата, равная длине дуги на Θ, а dl - обычная мера длины на Θ, $\frac{\partial}{\partial l}$ - дифференцирование в положительном направлении на Θ. Пусть $K(l)$ - сужение функции $K(P,\alpha)$ на кривую Θ : l определяет положение точки $P \in \Theta$, α - положительное направление Θ в l.

В этих обозначениях формула (6.4) на Θ принимает вид

$$(\rho(l))^{-1}\frac{d\rho(l)}{dl} = K(l). \tag{6.5}$$

Интегрируя (6.5) от Q_1 до Q_2, получаем

$$\rho(Q_2) = \rho(Q_1)\exp\left(\int_\Theta K(l)\,dl\right). \tag{6.6}$$

Из этого результата вытекает следующее **внутреннее описание** прегеодезических семейств, которые допускают геодезическую интерпретацию для поточечно изотропных (круговых) метрик.

Предложение 20, [25]. Для любого регулярного семейства $\tilde{G}$ прегеодезических кривых в области $D \subset \mathbb{R}^2$, следующие три утверждения эквивалентны :

1) Кривые из $\tilde{G}$ являются геодезическими для метрики, имеющей круговую индикатрису в каждой точке $P \in D$;

2) Интеграл $\int_\Theta K(l)dl$ не зависит от пути Θ коль скоро концы Θ фиксированы, т.е. $\int_\Theta K(l)dl = 0$, если интегрирование ведется по замкнутой кривой Θ;

3) Существуют две функции, определенные на D : функция амплитуды $A(P)$ со значениями в $(0, \infty)$ и функция фазы $\phi(P)$ со значениями в $(0, 2\pi)$, через которые выражается функция кривизны $K(P, \alpha)$:

$$K(P, \alpha) = A(P)\cos(\alpha - \phi(P)). \tag{6.7}$$

Функции $A(P)$, $\phi(P)$ удовлетворяют уравнению с производными по направлениям

$$\frac{\partial A(P)}{\partial_n P} + A(P)\frac{\partial \phi(P)}{\partial_\phi P} = 0, \tag{6.8}$$

где направление $n = n(P)$ – одно из двух направлений, нормальных к направлению $\phi(P)$.

Отметим, что импликация 1) $\rightarrow$ 2) следует прямо из (6.6). Импликации 2) $\rightarrow$ 3) и 3) $\rightarrow$ 1) следуют из результатов Г. С. Сукиасяна [26]. В [26] даны необходимые и достаточные условия продолжения конечно-аддитивных функционалов, определенных на выпуклых многоугольниках на плоскости, до знакопеременных мер. Достаточно применить этот результат к функционалу $\int_\Theta K(l)dl$ для выпуклых многоугольных путей Θ. Согласно (6.6) этот функционал – тождественный нуль. Следовательно, мы получаем уравнение (6.7) как условие возможности продолжения до знакопеременной меры, причем (6.8) совпадает с условием, что знакопеременная мера имеет плотность тождественно равную нулю.

Нетрудно проверить уравнения (6.7) и (6.8) для двух классических случаев семейств $\tilde{G}$: полукруги в модели Пуанкаре гиперболической плоскости и круговые дуги в модели Келли– Клейна в гиперболической плоскости. В первом случае D – верхняя полуплоскость, во втором D – единичный диск. В обоих случаях известно, что гиперболическая метрика поточечно круговая финслерова, и можно применить 1) из Предложения 20. В заключение приведем следующий результат.

Предложение 21, [25]. Для всякого регулярного семейства $\bar{G}$ прегеодезических кривых в области D, лежащей на евклидовой плоскости, функции кривизны $K(P,\alpha)$ которых удовлетворяют эквивалентным свойствам 2) или 3), существует ровно одна (с точностью до постоянного множителя) гладкая гильбертова метрика с круговой индикатрисой. Для последней $\rho(P)$ задается согласно (6.6), где $\rho(Q_1)$ играет роль постоянного множителя. Значение $\rho(Q_2)$, полученное таким способом, не зависит от выбора пути Θ, соединяющего Q_1 с Q_2.

ABSTRACT. The paper summarizes and reviews results of the research in combinatorial integral geometry that followed publication in 1982 of the book under the same title by R. V. Ambartzumian. The nomenclature of topics, that have been influenced by the combinatorial approach propounded by the book now includes Wicksell problem for randomized shapes, Pleijel–type identities for convex domains, problems concerning random line processes, valuations in integral geometry space, and Hilbert's fourth problem in different settings. The paper devotes a section to report on each of these themes and exposes their common combinatorial roots. Some comments and observations point at connections with other topics, such as tomography, cos-transform and others.

ЛИТЕРАТУРА

Сокращение ИАНАМ используется для журнала
Известия Академии Наук Армении, серия Математика

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
2. R. Alexander, A book review, Bulletin (New Series) of the AMS, Volume 10, Number 2, pp.318 — 321, April 1984.
3. A. Pleijel, Zwei kurze Beweise der isoperimetrischen Ungleichung, Archiv der Math., 7, pp. 317 — 319, 1956.
4. A. Pleijel, Zwei kennzeichende Kreiseigenschaften, Archiv der Math., 7, pp. 420 — 424, 1956.
5. R. V. Ambartzumian, "Convex polygons and random tessellations". In : "Stochastic Geometry", Editors : E. F. Harding and D. G. Kendall, John Wiley, 1974.
6. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
7. Р. В. Амбарцумян, "Интегральное уравнение Вольтерра в стереологии многоугольников", ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 18 — 34, 1998.
8. E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), Stochastic Geometry, J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974.
9. R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in stochastic geometry", Dokl. Akad. Nauk Armenii, vol. 98, no. 3, pp. 185 — 196, 1998. Перепечатано в ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 5 – 17, 1998.
10. Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости", ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 35 — 65, 1998.

11. Р. В. Амбарцумян, "Случайные раскраски плоскости", стр. 23 – 56. В сборнике статей : "Комбинаторные Принципы в Стохастической Геометрии", Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
12. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.
13. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
14. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo–metrics on the plane," Z. Wahrschein–lichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
15. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals" Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606-626, 1995.
16. Р. В. Амбарцумян, "Заметки о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", ИАНАМ, том 27, № 5, стр. 1– 21, 1992.
17. R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, Metrics and zonoids", Acta Applicandae Mathem., vol. 9, pp. 3 — 27, 1987.
18. В. К. Оганян, А. Абдалла,"Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых на плоскости", ИАНАМ, том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1993.
19. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb., vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.
20. Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей. I", ИАНАМ, том 29, № 4, стр. 3 – 51, 1994.
21. В. К. Оганян и А. Н. Давтян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", ИАНАМ, том 31, № 4, стр. 44 – 73, 1996.
22. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", ИАНАМ, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
23. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
24. В. К. Оганян, "О римановых метриках на плоскости, для которых прямые являются геодезическими", ИАНАМ, том 32, № 2, стр. 77 — 85, 1997.
25. Р. В. Амбарцумян. "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях". ИАНАМ, том 31, № 4, стр. 5 — 52, 1996.
26. Г. С. Сукиасян, "Конечно–аддитивные функционалы на плоскости", ИАНАМ, том 29, № 4, стр. 75 — 89, 1994.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Ниже приводится список публикаций, не цитируемых в этой обзорной статье, однако по тематике близкой к ней.

27. R. V. Ambartzumian, "Probability distributions in the geometry of clusters", Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, vol. 6, pp. 235 — 241, 1971.
28. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon–Sylvester problem and stereology", Transactions ICM, vol. 2, Vancouver (Canada), 1974.
29. R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry." Adv. Appl. Prob., vol. 9, pp. 792 – 823, 1977.
30. R. V. Ambartzumian, "On some topological invariants in integral geometry", Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Gebiete, vol. 44, 1978.
31. R. V. Ambartzumian, "A Synopsis of Combinatorial integral geometry", Advances in Math., vol. 37, no. 1, 1980.
32. Р. В. Амбарцумян, "О комбинаторных основаниях интегральной геометрии", ИАНАМ, том 16, № 4, стр. 285 – 292, 1981.
33. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$", ИАНАМ, том 28, № 2, стр. 51 — 59, 1993.
34. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические

эйлеровы функционалы", ИАНАМ, том 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
35. A. Baddeley, "Dissecting the needle problem", pp. 107 – 122, В сборнике статей : "Комбинаторные Принципы в Стохастической Геомстрии", Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
36. A. Baddeley, "Combinatorial foundations of stochastic geometry", Proc. London Math. Soc., XLII, pp. 151–177.
37. Г. Ю. Панина, "Выпуклые тела и трансляционно–инвариантные меры", Записки Научных Сем. ЛОМИ, том 157, 1986.
38. G. Yu. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 – 277, 1992.
39. Г. Ю. Панина, "Комбинаторные формулы, дуальные к формуле Амбарцумяна", ИАНАМ, том 28, № 6, стр. 69 – 77, 1993.
40. F. Piefke, "Masze für gerichtete Geraden und nicht–symmetrische Pseudometriken in der Ebene", Monatshefte Math. 86, pp. 143–154, 1978.
41. F.Piefke, "Masze für gerichtete Geraden und nicht- symmetrische Pseudometriken in der Ebene. II", Monatshefte Math. 89, pp. 45–56, 1980.
42. Г. С. Сукиасян, "О случайных сечениях многогранников", Докл. АН СССР, том 263, № 4, стр. 809 – 812. 1982.

8 марта 1999

Институт математики
НАН Армении
E–mail : rhambart@aua.am

ФУНКЦИИ ОТРЕЗКА В $\mathbb{R}^3$ И ПОРОЖДЕНИЕ МЕР

А. Н. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 6, 1999

Статья изучает линейно–аддитивные функции $L(\nu)$, определенные на отрезках $\nu \subset \mathbb{R}^3$. Такие сегментные функции представляют интерес при изучении мер m в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$, так как m порождает сегментную функцию $L(\nu)$ по формуле $L(\nu) = m(\text{множество плоскостей, пересекающих } \nu)$. С другой стороны, сегментные функции $L(\nu)$ появляются при комбинаторном построении валюаций Ψ_L в пространстве $\mathbb{F}$ прямых в $\mathbb{R}^3$. В статье доказано, что при некоторых предположениях гладкости, валюация Ψ_L продолжается до знакопеременной меры в $\mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда сегментная функция $L(\nu)$ порождается знакопеременной мерой m в $\mathbb{E}$. Как следствие этого результата получена характеризация линейно–аддитивных метрик в терминах знакопеременных мер в $\mathbb{E}$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Классическую четвертую проблему Гильберта на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно сформулировать следующим образом : описать все плоские метрики, для которых геодезическими являются обычные евклидовы прямые или, эквивалентно, описать все плоские линейно–аддитивные метрики. К настоящему времени эта проблема имеет три решения (см. [1], [12] и [2]). Методы, использованные в [1], [12] и [2], различны, но все три автора описывают метрики в терминах мер в пространстве $\mathbf{G}$ прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$. В [4] Р. В. Амбарцумян указал на связь между четвертой проблемой Гильберта на плоскости и проблемой продолжения комбинаторных валюаций до мер в пространстве $\mathbf{G}$. Этот подход является основным и в работах [5] — [8]. В пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ проблема продолжения валюаций до мер рассматривалась в [9], [10]. Также имеется более ранний результат Погорелова [12], согласно которому знакопеременные меры, а не меры в пространстве $\mathbb{E}$, должны быть использованы при описании линейно–аддитивных метрик в $\mathbb{R}^3$.

Сегментная функция $L(\nu)$ – функция, определенная в пространстве отрезков ν в $\mathbb{R}^3$. Эквивалентно, $L(\nu)$ – симметричная функция $L(\nu) = L(P_1, P_2)$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$. Сегментная функция L линейно–аддитивна, если для любых трех коллинеарных точек P_1, P_2 и P_3 в $\mathbb{R}^3$ с P_2 между P_1 и P_3

$$L(P_1, P_3) = L(P_1, P_2) + L(P_2, P_3).$$

Пусть $\mathcal{L}$ – класс непрерывных, линейно–аддитивных сегментных функций в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ – класс линейно–аддитивных метрик в $\mathbb{R}^3$, а $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ – класс функций L, представимых в виде

$$L(P_1, P_2) = m([P_1, P_2]), \tag{1.1}$$

где $[P_1, P_2]$ – множество плоскостей, пересекающих прямолинейный отрезок (P_1, P_2), а m – **беспучковая знакопеременная мера в** $\mathbb{E}$ (см. §4). Результат Погорелова гласит, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$, т.е. любая линейно–аддитивная метрика в $\mathbb{R}^3$ допускает представление в виде (1.1).

В недавней работе [11] дано описание класса $\mathcal{H}$ в рамках подхода о продолжении меры, начиная с комбинаторной валюации Ψ_L в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ прямых в $\mathbb{R}^3$, которая была определена в [3], Глава 10. Пусть $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ – класс, определенный условием, что для любой $L \in \mathcal{L}_0$, соответствующая комбинаторная валюация Ψ_L, определенная в пространстве $\mathbb{\Gamma}$, продолжается до **знакопеременной меры** в $\mathbb{\Gamma}$, и пусть $\mathcal{L}_0^+ \subset \mathcal{L}$ соответствует случаям, в которых валюация порождает неотрицательную меру в $\mathbb{\Gamma}$. В [11] дана характеризация класса $\mathcal{L}_0$ в терминах **флаговой плотности** функции L и показано, что $\mathcal{H} = \mathcal{L}_0^+$. Настоящая статья использует эту характеризацию, чтобы описать класс $\mathcal{M}$. Оказывается, что при некоторых условиях гладкости, валюация Ψ_L продолжается до знакопеременной меры в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда сегментная функция $L(\nu)$ порождается знакопеременной мерой m в $\mathbb{E}$. Как следствие этого результата получена характеризация линейно–аддитивных метрик в терминах знакопеременных мер в $\mathbb{E}$.

Статья имеет следующую структуру : §2 содержит необходимые интегрально–геометрические обозначения и определения. §3 знакомит с основным результатом работы [11], о порождении мер в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ с помощью комбинаторных валюаций Ψ_L (необходимое и достаточное условия на флаговую плотность функции L, при которых соответствующая валюация является знакопеременной мерой на

II`). Необходимые результаты по аналогичным вопросам для пространства $\mathbb{E}$, полученные в [9] и [10], описаны в параграфе 4. Опираясь на ранние работы, в параграфе 5 доказывается основной результат : $\mathcal{M} = \mathcal{L}_0$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этом параграфе приводятся необходимые обозначения и определения :

$\mathbb{E}$ = пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $e \in \mathbb{E}$;

$\mathbb{\Gamma}$ = пространство прямых в $\mathbb{R}^3$, $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$;

S^2 = пространство направлений (единичная сфера) в $\mathbb{R}^3$;

$\mathcal{E}_2$ = пространство пространственных направлений, т.е. проективная плоскость ;

$\mathcal{E}_1$ = пространство плоских направлений (грубо говоря, полуокружность) ;

δ = **пластина** , т.е. ограниченное выпуклое подмножество на плоскости в $\mathbb{R}^3$;

$\partial\delta$ = граница пластины δ ;

$[\delta] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ пересекает внутренность пластины $\delta\}$;

$\nu = (P_1, P_2)$ = прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$, концы которого суть $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$;

$[\nu] = [P_1, P_2] = \{e \in \mathbb{E} : e$ пересекает отрезок $\nu\}$;

$\mathcal{F}$ = пространство флагов в $\mathbb{R}^3$.

Флаг f в $\mathbb{R}^3$ есть триада (P, γ, e), состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ, проходящей через точку P, и плоскости e (плоскость флага f), проходящей через γ. Альтернативно, $f = (P, \Omega, \phi)$ с $P \in \mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathcal{E}_2$, $\phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$, где Ω – пространственное направление прямой γ, ϕ – угол вращения плоскости e вокруг γ и $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$ представляет пространство плоских направлений, ортогональных к γ.

Флаг f представляется парой $f = (P, \Lambda)$, где $P \in \mathbb{R}^3$ и $\Lambda = (\Omega, \phi)$ – **свободный флаг флага** f. Итак, пространство $\mathcal{F}$ является произведением $\mathbb{R}^3 \times \nabla$, где ∇ – пространство свободных флагов. Ясно, что свободные флаги можно представить в следующем дуальном виде $\Lambda = (\omega, \varphi)$ с помощью параметров ω и φ, где $\omega \in \mathcal{E}_2$ – направление, нормальное к плоскости флага f, и $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ – плоское направление в плоскости флага f, который соответствует направлению Ω. Следовательно, флаг $f \in \mathcal{F}$ можно представить в виде $f = (P, \omega, \varphi) = (P, e, g)$, где e – плоскость, содержащая P и нормальное направление которой есть ω, а g – прямая в e, содержащая точку P, плоское направление которой в плоскости e есть φ.

Неполный флаг в $\mathbb{R}^3$ есть пара $(P, \gamma) = (P, \Omega)$, состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$ и прямой γ, проходящей через P и определяемой своим пространственным

направлением Ω. Пространство неполных флагов обозначается через $\mathcal{F}_0$.

Клин есть пара $w = (\nu, V)$, где $\nu \subset \gamma$ – прямолинейный отрезок, а V – замкнутая дуга в $\mathcal{E}_1(\nu) = \mathcal{E}_1(\gamma)$. Каждому клину w соответствует множество флагов

$$[w] = \{f = (P, \gamma, e) : \ P \in \nu, \ \Omega \text{ совпадает с направлением отрезка } \nu, \ \phi \in V\},$$

а также две бесконечные двугранные области, ограниченные двумя плоскостями, проходящими через ν, ориентации которых соответствуют концам дуги V.

Пусть $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – трижды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам флаговая функция. Обозначим через $\lambda = \lambda(\eta, \sigma)$ положительный поворот сферы S^2 (эквивалентно пространства ∇) вокруг оси $\eta \in S^2$ на угол σ; положительное направление поворота вокруг $\eta \in S^2$ определяется по правилу буравчика. Для заданного свободного флага Λ будем писать $\lambda\Lambda$ для свободного флага, полученного из Λ вращением λ. Положим

$$\frac{\partial \rho(f)}{\partial_\eta \Lambda} = \left.\frac{\partial \rho(P, \lambda\Lambda)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0}.$$

Обозначим через $\dfrac{\partial \rho(f)}{\partial_\eta P}$ производную функции ρ по P в направлении η.

§3. ПОРОЖДЕНИЕ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{\Gamma}$

В этом параграфе мы приводим результаты работы [11]. Для конечного множества пластин $\{\delta_i\}$ рассмотрим кольцо Сильвестра

$Sr\{\delta_i\} =$ минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{\Gamma}$ содержащее все множества $[\delta_i]$,

и определим кольцо $U_{\mathbb{\Gamma}}$ следующим образом : $U_{\mathbb{\Gamma}} = \bigcup Sr\{\delta_i\}$, где объединение берется по всевозможным конечным множествам пластин $\{\delta_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Пусть ρ_0 – флаговая функция, определенная в пространстве $\mathcal{F}_0$. Она порождает сегментную функцию

$$L(\nu) = \int_\nu \rho_0(P, \Omega)\, dl, \tag{3.1}$$

где интегрирование по мере длины на ν, а путем интегрирования является отрезок ν, т.е. $P \in \nu$, в аргументе ρ_0 параметр Ω совпадает с направлением отрезка ν. Для заданного клина $w = (\nu, V)$ определим следующую функцию :

$$W_0(w) = \frac{L(\nu)}{2}\,(\sin|V| - |V|\cos|V|), \tag{3.2}$$

где функция L определяется по формуле (3.1), а $|V|$ – величина угла дуги V. Напомним, что функция клина W_0 впервые была рассмотрена в [3], глава 10 для

случая $L(\nu)$ = евклидовой длине отрезка ν. Мы будем говорить, что функция клина W_0 соответствует ρ_0 (или L).

Для определения валюации Ψ_L на $U_{\mathbb{\Gamma}}$ будем использовать следующие геометрические построения (см. [3], глава 10). Для каждого $B \in U_{\mathbb{\Gamma}}$, множество $\{\delta_i\}$ можно найти так, чтобы $B \in Sr\{\delta_i\}$. С каждой парой пластин δ_1 и δ_2, расположенных в общей позиции в $\mathbb{R}^3$ и с прямолинейным отрезком ν, соединяющем точки l_1 и l_2, $(l_1, l_2) \in \partial\delta_1 \times \partial\delta_2$, свяжем два клина $w^+ = (\nu, V^+)$ и $w^- = (\nu, V^-)$, где дуги V^+ и V^- соответствуют плоским углам между плоскостями $e_1(l_1, l_2)$ и $e_2(l_1, l_2)$. По определению, $e_s(l_1, l_2)$ содержит прямую (l_1, l_2) и прямую, касательную к $\partial\delta_s$ в точке l_s, $s = 1, 2$. Обозначим через ψ_i угол между прямой, проходящей через точки l_1, l_2 и прямой, касательной к $\partial\delta_i$ в точке l_i. Положим

$$\Psi_L(B) = \\ = \sum_{i \le j} \frac{1}{\pi} \int_{\partial\delta_i} \int_{\partial\delta_j} \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \left[c_B^+(l_1, l_2)\, W_0(w^+) + c_B^-(l_1, l_2)\, W_0(w^-)\right] \mathrm{d}l_1\, \mathrm{d}l_2, \tag{3.3}$$

где интегрирование проводится по мере длины на $\partial\delta_i$, целочисленные коэффициенты $c_B^{\pm}$ не зависят от ρ_0. Алгоритм вычисления коэффициентов $c_B^{\pm}$ можно найти в [4]. Возможность продолжения Ψ_L до знакопеременной меры на $\mathbb{\Gamma}$ изучалась в [11] и было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть валюация Ψ_L определена на кольце $U_{\mathbb{\Gamma}}$ с помощью флаговой функции $\rho_0(P, \Omega) \in C^{[3]}$ по формулам (3.1), (3.2) и (3.3). Валюация Ψ_L является знакопеременной мерой μ в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда для любого направления n, перпендикулярного к Ω, флаговая функция $\rho_0(P, \Omega)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению :

$$\frac{\partial\rho_0(P, \Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2\rho_0(P, \Omega)}{\partial_\Omega P\, \partial_n \Omega}. \tag{3.4}$$

Если условие (3.4) выполняется, то функция

$$H(\gamma) = \frac{1}{4}\left[2\rho_0 + \Delta_2\rho_0\right],$$

где Δ_2 – лапласиан на сфере S^2, зависящий только от $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, т.е. постоянный на парах (P, Ω) с $P \in \gamma$ и направлением Ω, совпадающим с направлением прямой γ. Плотность соответствующей знакопеременной меры μ совпадает с $H(\gamma)$.

Другая теорема, доказанная в [11], относится к случаю неотрицательной меры μ.

Теорема 2. Валюация Ψ_L является неотрицательной мерой μ в $\mathbb{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда сегментная функция L является метрикой в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовы прямые суть геодезические, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{L}_0^+$.

§4. ПОРОЖДЕНИЕ МЕР В $\mathbb{E}$

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано конечное множество точек $\{P_i\}$, содержащее по крайней мере две точки. Определим кольцо Сильвестра в $\mathbb{E}$ следующим образом :

$Sr\{P_i\}$ = минимальное кольцо подмножеств из $\mathbb{E}$, содержащее все $[P_i, P_j]$.

Кольцо $U_{\mathbb{E}}$ подмножеств пространства $\mathbb{E}$ определяется так : $U_{\mathbb{E}} = \bigcup Sr\{P_i\}$, где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Каждой непрерывной функции ρ, определенной в пространстве флагов $\mathcal{F}$, соответствует функция клина W :

$$W(\nu, V) = \int_\nu \int_V \rho(P, \Omega, \phi)\, \mathrm{d}l\, \mathrm{d}\phi, \tag{4.1}$$

где $\mathrm{d}l$ обозначает меру длины на ν, а $\mathrm{d}\phi$ – равномерную угловую меру на $\mathcal{E}_1(\Omega)$.

Для любого $A \in U_{\mathbb{E}}$ множество $\{P_i\}$ можно подобрать так, что $A \in Sr\{P_i\}$ (множество $\{P_i\}$ с этим свойством не единственно). Положим

$$\Phi(A) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A)\, W(w_s), \tag{4.2}$$

где суммирование ведется по множествам $\mathrm{W}\{P_i\}$ клиньев, ассоциированных с $\{P_i\}$, целочисленные коэффициенты $c_s(A)$ не зависят от выбора ρ. Полное описание множества $\mathrm{W}\{P_i\}$ и алгоритм вычисления коэффициентов c_s можно найти в [9] и [10].

В [9] показано, что (4.2) определяет аддитивный функционал на кольце $U_{\mathbb{E}}$; в частности, значение $\Phi(A)$ не зависит как от выбора множества $\{P_i\}$, так и от $A \in Sr\{P_i\}$.

Знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$ называется **беспучковой**, если мера m равна нулю на пучках $[P]$ плоскостей, проходящих через точку $P \in \mathbb{R}^3$, т.е. $m([P]) = 0$ для любой $P \in \mathbb{R}^3$.

Замечание 1. В [13] конкретное ядро $K(f, e)$ было определено по формуле

$$\rho(f) = \int K(f, e)\, m(\mathrm{d}e),$$

которая отображает меру m в флаговую функцию ρ такую, что значения меры m на $U_{\mathbb{E}}$ совпадают со значениями функционала Φ, построенного по флаговой плотности ρ при помощи формул (4.1) и (4.2).

Задача продолжения функционала Φ до знакопеременной меры в $\mathbb{E}$ исследовалась в [9] и [10]. В [10] было доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть Φ – валюация на $U_{\mathbb{E}}$, порожденная флаговой функцией $\rho \in C^{(3)}$ с помощью формул (4.1) и (4.2). Валюация Φ порождает беспучковую, локально–конечную знакопеременную меру m в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, когда ρ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$2\frac{\partial\rho(f)}{\partial_\omega P}+\frac{\partial^2\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_N\Lambda}+\frac{\partial^2\rho(f)}{\partial_N P\,\partial_\Omega\Lambda}-\frac{\partial^3\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_\Omega\Lambda\,\partial_\omega\Lambda}=0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2\rho(f)}{(\partial_\Omega P)^2}+\frac{\partial^2\rho(f)}{(\partial_N P)^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4\rho(f)}{(\partial_\Omega P)^2\,(\partial_\omega\Lambda)^2}-\frac{\partial^3\rho(f)}{\partial_\Omega P\,\partial_N P\,\partial_\omega\Lambda}=0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^3\rho(f)}{(\partial_\omega\Lambda)^3}+4\frac{\partial\rho(f)}{\partial_\omega\Lambda}=0, \tag{4.5}$$

где $f=(P,\omega,\varphi)=(P,\Omega,\phi)$, а N – направление, ортогональное к Ω и ω. В действительности, эти уравнения записаны для направленных версий направлений Ω, ω и N, и выполнены когда они составляют правую систему.

§5. МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $\mathbb{\Gamma}$ И $\mathbb{E}$

В этом параграфе исследуется связь между порождением сегментных функций L знакопеременными мерами в $\mathbb{E}$ и порождением знакопеременной меры с помощью валюации Ψ_L. Обозначим сужение $\mathcal{M}$ или $\mathcal{L}_0$ на сегментные функции, порожденные флаговыми функциями $\rho(f)$, $f\in\mathcal{F}_0$ из стандартного класса гладкости $C^{(3)}$ через $\mathcal{M}\cap C^{(3)}$ или $\mathcal{L}_0\cap C^{(3)}$, соответственно.

Теорема 4. $\mathcal{M}\cap C^{(3)}=\mathcal{L}_0\cap C^{(3)}$.

Доказательство : Пусть $L\in\mathcal{M}$, т.е. существует беспучковая, знакопеременная мера m в $\mathbb{E}$ такая, что

$$L(P_1,P_2)=m([P_1P_2]) \tag{5.1}$$

для каждого прямолинейного отрезка (P_1,P_2). Ниже покажем, что соответствующая валюация Ψ_L, определенная по (3.3), является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Gamma}$.

По Теореме 3 и Замечанию 1, существует флаговая функция ρ, удовлетворяющая уравнениям (4.3) — (4.5), и значения валюации Φ, построенной по ρ при помощи (4.1) и (4.2), совпадает с значением меры m на $U_{\mathbb{E}}$.

Для множества $[P_1, P_2] = [\nu]$ множество $\mathrm{W}\{P_i\}$ состоит из единственного клина $w_1 = (\nu, \pi)$ и $c_1([\nu]) = 1$ (см. [9]). Следовательно

$$L(\nu) = \int_{\nu} \rho_0(P, \Omega)\, \mathrm{d}l, \tag{5.2}$$

где

$$\rho_0(P, \Omega) = \int \rho(P, \Omega, \phi)\, \mathrm{d}\phi. \tag{5.3}$$

Пусть $\rho_0(P, \Omega) \in C^{(3)}$. Для доказательства того, что валюация Ψ_L является знакоперемснной мерой на $\mathbb{\Pi}$, достаточно показать, что ρ_0, определенная по (5.3), удовлетворяет уравнению (3.4). По Теореме 3 имеем

$$2\frac{\partial \rho(f)}{\partial_\omega P} + \frac{\partial^2 \rho(f)}{\partial_\Pi P\, \partial_N \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(f)}{\partial_N P\, \partial_\Pi \Lambda} - \frac{\partial^3 \rho(f)}{\partial_\Pi P\, \partial_\Pi \Lambda\, \partial_\omega \Lambda} = 0. \tag{5.4}$$

Здесь $\Lambda = (\Omega, N)$, где $\Omega \in S^2$ – одно из двух направлений, соответствующих прямой свободного флага Λ, $N \in S^2$ – одно из двух направлений, которые перпендикулярны к Ω и лежат в плоскости флага. В плоскости, ортогональной к Ω, определим два координатных направления X и Y. Аргумент ϕ отождествляется с углом между N и направлением X. В этой параметризации имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial_\omega P} = -\frac{\partial \rho}{\partial_X P}\sin\phi + \frac{\partial \rho}{\partial_Y P}\cos\phi, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial_N P} = \frac{\partial \rho}{\partial_X P}\cos\phi + \frac{\partial \rho}{\partial_Y P}\sin\phi,$$

$$\frac{\partial \rho 1}{\partial_\omega \Lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial_X \Omega}\cos\phi + \frac{\partial \rho}{\partial_Y \Omega}\sin\phi, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial_N \Lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial_X \Omega}\sin\phi - \frac{\partial \rho}{\partial_Y \Omega}\cos\phi,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial_\Pi \Lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial \phi},$$

где символы типа $\dfrac{\partial}{\partial_X \Omega}$ определены, так как X ортогонально к Ω : они определяют обычные производные по направлению на сфере S^2. Подставляя эти значения в (5.4), получаем

$$-2\sin\phi\frac{\partial \rho}{\partial_X P} + 2\cos\phi\frac{\partial \rho}{\partial_Y P} + 2\sin\phi\frac{\partial^2 \rho}{\partial_\Pi P\, \partial_X \Omega} - 2\cos\phi\frac{\partial^2 \rho}{\partial_\Pi P\, \partial_Y \Omega} +$$

$$+\cos\phi\frac{\partial^2 \rho}{\partial\phi\partial_X P} + \sin\phi\frac{\partial^2 \rho}{\partial\phi\partial_Y P} - \cos\phi\frac{\partial^3 \rho}{\partial\phi\partial_\Pi P\, \partial_X \Omega} - \sin\phi\frac{\partial^3 \rho}{\partial\phi\partial_\Pi P\, \partial_Y \Omega} = 0.$$

Умножая это уравнение на $\sin\phi$ или $\cos\phi$ и интегрируя относительно ϕ, получаем

$$\int\left(\frac{\partial \rho}{\partial_X P} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\Pi P\, \partial_X \Omega}\right)\mathrm{d}\phi = 0, \qquad \int\left(\frac{\partial \rho}{\partial_Y P} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\Pi P\, \partial_Y \Omega}\right)\mathrm{d}\phi = 0.$$

Так как X и Y являются перпендикулярными направлениями, то из последних двух уравнений следует, что для любого направления n, перпендикулярного к Ω, имеем

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial_\Omega P \, \partial_n \Omega},$$

(см. (5.3)). Из Теоремы 1 вытекает, что для сегментной функции L валюация Ψ_L является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Pi}$, т.е. $\mathcal{M} \cap C^{(3)} \subset \mathcal{L}_0 \cap C^{(3)}$. Для доказательства обратного включения $\mathcal{L}_0 \cap C^{(3)} \subset \mathcal{M} \cap C^{(3)}$, для $\rho_0(P, \Omega) \in C^{(3)}$ определим сегментную функцию L по формуле

$$L(\nu) = \int_\nu \rho_0(P, \Omega)\, \mathrm{d}l, \tag{5.5}$$

для которой Ψ_L является знакопеременной мерой на $\mathbb{\Pi}$. Рассмотрим (единственное) решение z_P уравнения

$$\rho_0(P, \Omega) = \int_{S^2} z_P(\xi)\, |\cos(\Omega, \xi)|\, \mathrm{d}\xi, \tag{5.6}$$

где $d\xi$ обозначает площадь на S^2. По стандартной формуле из сферической геометрии для любого направления n, перпендикулярного к Ω, имеем

$$\frac{\partial \cos(\Omega, \xi)}{\partial_n \Omega} = \cos(\xi, n).$$

Так как функция z_P четна и на окружности, перпендикулярной к Ω, имеем $\cos(\Omega, \xi) = 0$, то

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial_n \Omega} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} z_P(\xi)\, \cos(\xi, n)\, \mathrm{d}\xi.$$

Дифференцируя по P, получим

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial_\Omega P \, \partial_n \Omega} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_\Omega P}\, \cos(\xi, n)\, \mathrm{d}\xi,$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial_n P} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_n P}\, \cos(\Omega, \xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial_\Omega P \, \partial_n \Omega} - \frac{\partial \rho_0}{\partial_n P} = 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_\Omega P}\, \cos(\xi, n) - \frac{\partial z_P(\xi)}{\partial_n P}\, \cos(\xi, \Omega)\, \mathrm{d}\xi =$$

$$= 2 \int_{\cos(\Omega, \xi) > 0} \nabla z \cdot (\xi \times \Omega \times n)\, \mathrm{d}\xi, \tag{5.7}$$

где ∇ – градиентный оператор, а $\times$ означает векторное произведение. Так как $L \in \mathcal{L}_0$ порождает знакопеременную меру в $\mathbb{\Gamma}$ и $\Omega \times n = n_1$ перпендикулярна к Ω, то

$$\int_{\cos(\Omega,\xi)>0} \nabla z \cdot (\xi \times n_1)\, d\xi = 0$$

для всех Ω и n_1, перпендикулярных к Ω. Для любого направления n_1, перпендикулярного к Ω, имеем

$$\int_{\cos(\Omega,\xi)>0} \nabla z \cdot (\xi \times n_1)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\cos(\Omega,\xi)>0} n_1 \cdot (\nabla z \times \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0,$$

и поэтому для любого Ω

$$\int_{\cos(\Omega,\xi)>0} (\nabla z \times \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0. \tag{5.8}$$

Это уравнение изучалось в [12] и мы следуем анализу, проведенному там. Запишем уравнение (5.8) для двух направлений Ω_1 и Ω_2, а затем вычтем их. Так как функция $(\nabla z \times \xi)$ нечетна, то получаем

$$\int_{C(\Omega_1,\Omega_2)} (\nabla z \times \xi)\, \mathrm{d}\xi = 0,$$

где $C(\Omega_1, \Omega_2)$ – область, ограниченная большими полукругами, ортогональными к Ω_1 и Ω_2.

Отсюда получаем (см. [12]), что $\nabla z \times \xi = 0$ и для любого ω, перпендикулярного к ξ, имеем $\nabla z \cdot \omega = 0$. Следовательно, $\dfrac{\partial z_P(\xi)}{\partial_\perp P} = 0$, и поэтому $z_P(\xi) = z(e)$ есть функция, определенная в пространстве $\mathbb{E}$. Таким образом, сегментную функцию L можно записать в виде

$$L(\nu) = \int_\nu \int_{S^2} z_P(\xi) |\cos(\Omega\,\xi)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}l = \int_{[\nu]} z(e)\, \mathrm{d}e = m([\nu]),$$

откуда следует, что $\mathcal{L}_0 \cap C^{(3)} \subset \mathcal{M} \cap C^{(3)}$. Предположим, что мера m в пространстве $\mathbb{E}$ имеет плотность $z(e)$ относительно меры, инвариантной относительно евклидовых движений, т.е. $m(\mathrm{d}e) = z(e)\mathrm{d}e$. Обозначим через $p(\gamma)$ веер плоскостей, содержащих прямую $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$. Пусть ϕ – угол поворота вокруг γ, который определяет плоскость из $p(\gamma)$. Обозначим через $Z_\gamma(\phi)$ сужение функции $z(e)$ на веер $p(\gamma)$.

Следствие 1. Плотность H знакопеременной меры в пространстве $\mathbb{\Gamma}$, порожденной по Ψ_L, с $L(\nu)$ по формуле (5.1), вычисляется так

$$H(\gamma) = \int_{p(\gamma)} Z_\gamma(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

Следствие 2. Из Теорем 2 и 4 вытекает результат Погорелова $\mathcal{H} \cap C^{(3)} \subset \mathcal{M} \cap C^{(3)}$.

Автор благодарит профессоров Р. Амбарцумяна и Д. Штойяна за многочисленные полезные обсуждения и замечания.

ABSTRACT. The paper studies linearly–additive functions $L(\nu)$ defined on linear segments $\nu \subset \mathbb{R}^3$. Such segment functions are of interest in the study of measures m in the space $\mathbb{E}$ of planes in $\mathbb{R}^3$, since each m generates a segment function $L(\nu)$ by $L(\nu) = m(\text{the set of planes that hit } \nu)$. On the other hand, the segment functions $L(\nu)$ appear in the combinatorial construction of valuations Ψ_L in the space $\mathbb{\Gamma}$ of lines in $\mathbb{R}^3$. The paper proves that under certain smoothness assumptions a valuation Ψ_L extends to signed measure in $\mathbb{\Gamma}$ if and only if the segment function $L(\nu)$ is generated by a signed measure m in $\mathbb{E}$. As a corollary of this result, a characterization of linearly–additive metrics in terms of signed measures on $\mathbb{E}$ is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Alexander, "Planes for which the lines are shortest paths between points. Ill. J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
2. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo–metrics on the plane", Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb., vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1 — 21, 1992.
5. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, pp. 41 — 65, 1998.
6. R. V. Ambartzumian with an Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob., vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
7. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений порожденные случайными процессами прямых на плоскости", Известия НАН Армении. Математика, том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1992.
8. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 5 — 52, 1996.
9. Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Известия НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 3 – 51, 1994.
10. В. К. Оганян и А. Н. Давтян, "Конечно–аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 44 – 73, 1996.
11. А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 66 – 87, 1998.
12. А. В. Погорелов, Четвертая Проблема Гильберта, Наука, Москва, 1974.
13. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

3 апреля 1999

Горная академия, институт стохастики
Фрайберг, Германия
E-mail : davtian@merkur.hrz.tu-freiberg.de

АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ВЛОЖЕНИЯ

В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 6, 1999

Статья изучает однородные процессы прямых второго порядка на плоскости, а именно, маркированные точечные процессы пересечений, индуцированные на тестовой прямой. Марками служат углы, под которыми происходят пересечения с тестовой прямой. Тематика этой статьи совпадает с тематикой статьи Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости", Известия НАН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 31 — 58, 1998. В более ранней статье имелась методологическая неоднородность : она использовала метод инвариантного вложения для анализа первого порядка и разложения из Комбинаторной интегральной геометрии для анализа второго порядка. Настоящая статья устраняет эту неоднородность, применяя метод инвариантного вложения и в анализе второго порядка. Используя метод инвариантного вложения получены два дифференциальных соотношения между совместными вероятностями числа пересечений на системе непересекающихся интервалов на тестовой прямой и вероятностями Пальма первого и второго порядка тех же событий. Анализом этих соотношений получены условия пуассоновости n–мерных распределений для любого $n \geq 1$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение случайных точечных процессов, индуцированных на тестовых прямых случайными геометрическими процессами на плоскости $\mathbb{R}^2$, одна из основных проблем стохастической геометрии (см. [1], глава 10; [2], глава 10; [4] — [6]). В этих работах важным инструментом исследования являются формулы комбинаторной интегральной геометрии, впервые примененные в контексте стохастической геометрии в [1]. Однако, эти исследования ограничивались в основном случайными геометрическими процессами, инвариантными относительно группы $\mathbb{M}_2$ евклидовых движений плоскости.

Применение аппарата инвариантного вложения, предложенного в [7], открывает путь для замены сильного условия $\mathbb{M}_2$-инвариантности геометрических процессов на более слабое условие его $\mathbf{T}_2$-инвариантности ($\mathbf{T}_2$ — группа параллельных переносов плоскости. $\mathbf{T}_2$–инвариантные геометрические процессы иначе называются однородными).

Однако, результаты работы [7] касаются только одномерных распределений числа пересечений в интервале на тестовой прямой. Попытка изучать многомерные распределения числа пересечений на нескольких интервалах была сделана в [8] (см. также [6]). Однако, в работе [8] имелась методологическая неоднородность : метод инвариантного вложения в [8] использовался только при анализе первого порядка, а для анализа второго порядка применялись разложения из комбинаторной интегральной геометрии. Настоящая статья устраняет эту неоднородность, распространяя метод инвариантного вложения и в анализе второго порядка многомерных распределений. Здесь предмет исследований тот же, что и в [8] : $\mathbf{T}_2$–инвариантные случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости и маркированный точечный процесс $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$, индуцированный на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α. Точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ – множество точек пересечений $\{g_i\} \bigcap g(\alpha)$, а марки $\{\Psi_i\}$ суть углы, под которыми прямые из реализации пересекают тестовую прямую $g(\alpha)$ в точках $\{x_i\}_\alpha$.

Для системы $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ непересекающихся интервалов в $g(\alpha)$ и последовательности $\overline{k} = (k_1, ..., k_n)$ неотрицательных целых чисел определим многомерные вероятности

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha) = \text{ совместная вероятность иметь } k_j \text{ точек из } \{x_i\}_\alpha \text{ на } \gamma_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Так как вероятностное распределение случайного точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [9]), изучение n-мерных вероятностных распределений $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$ приводит к утверждениям единственности, касающихся вероятностных распределений точечных процессов $\{x_i\}_\alpha$.

В [8] для $\mathbf{T}_2$-инвариантного случайного процесса прямых, обладающих первой и второй моментными мерами, были получены два дифференциальных соотношения (первого и второго порядков) для $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$. Так как эти два подхода приводят к одному и тому же уравнению, то основные результаты [8] теперь получают независимое подтверждение.

Статья организована следующим образом. §1 содержит необходимые предпосылки из теории трансляционно–инвариантных случайных процессов прямых (см. также [1], [2], [10]). В §2 мы развиваем важную тему – обобщенные формулы Пальма. Отметим, что систематическое использование формул Пальма в стохастической геометрии начато в [2]. В §3 метод инвариантного вложения применяются в так называемом анализе первого порядка. Анализ второго порядка методом инвариантного вложения проводится в §4. Как и в [8], мы используем следующие три предположения :

a) для каждого направления α последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{x_i\}_\alpha$,

b) последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ есть последовательность некоррелированных случайных величин,

c) $\{g_i\}$ удовлетворяет так называемому условию "достаточного перемешивания", а именно, точечные процессы, индуцированные на тестовой прямой направления α и на "типичной" прямой из $\{g_i\}$ с тем же направлением, имеют одно и то же распределение.

Для удобства читателя мы приводим много фактов из [8] в виде кратких доказательств или замечаний. Мы также стараемся, насколько возможно, следовать обозначениям работы [8].

§1. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ

Случайный процесс прямых определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbf{G}$ на плоскости (стандартная литература по точечным процессам —[2], [9]). Прямую $g \in \mathbf{G}$ можно задавать полярными координатами (φ, p) основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g (φ — точка на единичной окружности $\mathbf{S}_1$, $p \in [0, +\infty)$). Естественная топология в $\mathbf{G}$ есть топология листа Мебиуса.

Обозначим через dg единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых, инвариантную относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^2$ (см. [2] и [15]). Определение процесса прямых следующее. Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство реализаций процессов прямых

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{m} \subset \mathbf{G}: \quad \mathbf{m} \text{ не имеет точек сгущения в пространстве } \mathbf{G}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную σ–алгебру подмножеств $\mathcal{M}$, относительно которой функции $N(\mathbf{m}, B) = \mathrm{card}(\mathbf{m} \cap B)$ измеримы для всех борелевских

$B \subset \mathbf{G}$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ — вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$. Любое измеримое отображение $\mathfrak{m}(\omega)\colon \Omega \longmapsto \mathcal{M}$ называется случайным точечным процессом в $\mathbf{G}$. Вместо $\mathfrak{m}$ мы часто используем символ $\{g_i\}$, подчеркивая тот факт, что процесс прямых есть счетное случайное множество прямых. Через $\mathbf{P}$ обозначим вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$). Группа $\mathbf{T}_2$ параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ индуцирует группу преобразований множества реализаций $\mathcal{M}$ (группа параллельных переносов множества $\mathcal{M}$). $\{g_i\}$ называется однородным, если его распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно этой группы ($\mathbf{T}_2$–инвариантно).

Примером $\mathbf{T}_2$–инвариантного случайного процесса прямых является пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $f(\varphi) \cdot dg$, где $f(\varphi)$ – функция, определенная на окружности $\mathbf{S}_1$. Ниже нам понадобятся понятия первой и второй моментных мер процесса прямых.

Будем говорить, что $\{g_i\}$ — случайный процесс прямых второго порядка, если существуют первая и вторая моментные меры ($m_1(\cdot)$ и $m_2(\cdot)$) :

$$m_1(B) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} N(\mathfrak{m}, B) < \infty, \quad m_2(B_1 \times B_2) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[N(\mathfrak{m}, B_1) \cdot N(\mathfrak{m}, B_2)\right] < \infty,$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$ — математическое ожидание относительно $\mathbf{P}$, $\mathcal{B}_0(\mathbf{G})$ — кольцо всех ограниченных борелевских подмножеств, а $B, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbf{G})$.

Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ, если $\gamma \cap g$ есть точка *внутренности* отрезка γ. Задавая "тестовый отрезок" γ, рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для заданных n тестовых отрезков $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и неотрицательных целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ будем обозначать

$$\binom{\gamma_1 \quad \ldots \quad \gamma_n}{k_1 \quad \ldots \quad k_n} = \bigcap_{i=1}^{n} \binom{\gamma_i}{k_i} = \binom{\overline{\gamma}}{k}. \tag{1.1}$$

Определение 1. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу Ti2, если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно группы $\mathbf{T}_2$ и первые и вторые моментные меры $\{g_i\}$ имеют форму $f\,dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2\,dg_1\,dg_2$ соответственно, с непрерывными (трансляционно–инвариантными) плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

Приведем некоторые свойства процессов из класса Ti2, которые нам понадобятся в параграфах 3 и 4. Их строгие доказательства легко получаются методом, описанным в [2].

1. Для случайного процесса прямых из класса Ti2 с вероятностью 1 в реализации нет параллельных прямых.

2. Отрезки, принадлежащие $g(\alpha)$, будем называть горизонтальными, а отрезки, ортогональные к $g(\alpha)$ — вертикальными. Горизонтальные отрезки обозначаем через h, а вертикальные – через v. Если $|h| = l \to 0$, то имеем

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha)\, l + o(l), \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} h \\ 2 \end{pmatrix} = O(l^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = o(l^2), \text{ если } \quad k > 2, \tag{1.2}$$

где $\lambda(\alpha)$ — **интенсивность** точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$. Аналогичные утверждения справедливы для вертикальных отрезков v, при $|v| \to 0$.

3. Предполагая, что интервалы h_i или v_i стягиваются при $l \to 0$ к некоторым фиксированным точкам $y_i \in g(\alpha)$, $i = 1, 2$ рассмотрим последовательность событий $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Для пары вертикальных отрезков v_1, v_2 имеем $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \bigcup B$, где $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ происходит, когда одна и та же прямая из $\{g_i\}$ пересекает отрезки v_1 и v_2, а B — дополнение события A в $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. B обозначает событие, когда отрезки v_1 и v_2 пересекаются двумя разными прямыми из $\{g_i\}$. Существуют следующие пределы :

$$\lim_{l\to 0} l^{-2}\mathbf{P}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = c_{y_1,y_2,hh}, \quad \lim_{l\to 0} l^{-2}\mathbf{P}(A) = c_A \quad \text{и} \quad \lim_{l\to 0} l^{-2}\mathbf{P}(B) = c_{y_1,y_2,vv}. \tag{1.3}$$

Заметим, что существуют версии формул (1.3) для окон не обязательно одинаковых длин. В этом случае l^2 заменяется произведением длин окон. Окна v_1, v_2 могут находиться или в одной или в разных полуплоскостях относительно $g(\alpha)$.

4. Распределения типа Пальма $\Pi_{y,h}$, $\Pi_{y,v}$ $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ и $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ определены. Грубо говоря, каждое из этих распределений типа Пальма есть предел условного вероятностного распределения процесса $\{g_i\}$, при условиях $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или B. Наши обозначения указывают на зависимость вероятностей Пальма от позиция предельных точек (в смысле 3.). Можем говорить о процессе прямых, который соответствует каждому из вышеупомянутых распределений Пальма.

Оба **первого порядка** вероятностных распределения $\Pi_{y,h}$ и $\Pi_{y,v}$ определены на $\mathcal{M} \times (0, \pi)$, т.е. сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой, проходящей через точку $y \in g(\alpha)$. Рассмотрим их значения на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1$, где $\Theta_1 \subset (0, \pi)$ обозначает событие $\Psi \in \Theta_1$. Через Ψ обозначим угол между $g(\alpha)$ и случайной прямой, проходящей через точку y.

Оба **второго порядка** вероятностных распределения $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ и $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие

через точки $y_1, y_2 \in g(\alpha)$. Параметризируем последние две прямые углами Ψ_1 и Ψ_2. Таким образом, $\Pi_{y_1,y_2,\curlywedge\curlywedge}$ и $\Pi_{y_1,y_2,\vee\vee}$ суть вероятностные меры на пространстве $\mathcal{M} \times (0,\pi) \times (0,\pi)$. В частности, $\Pi_{y_1,y_2,\curlywedge\curlywedge}$ и $\Pi_{y_1,y_2,\vee\vee}$ определены на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1 \times \Theta_2$, где $\Theta_1, \Theta_2 \subset (0,\pi)$.

Существует еще одно распределение Пальма, которое будем обозначать через Π_g. Можно дать нестрогое определение распределения Π_g, как условное вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$, при условии, что одна прямая из $\{g_i\}$ совпадает с неслучайной прямой g. Одно из точных определений распределения Пальма Π_g для $\{g_i\} \in$ Ti2 состоит в следующем :

$$\Pi_g\left(\begin{matrix}\overline{\gamma}\\ k\end{matrix}\right) = \lim_{l\to 0}[\mathbf{P}(A)]^{-1}\mathbf{P}\left(\left(\begin{matrix}\overline{\gamma}\\ k\end{matrix}\right)\cap A\right) = c_A^{-1}\lim_{l\to 0} l^{-2}\,\mathbf{P}\left(\left(\begin{matrix}\overline{\gamma}\\ k\end{matrix}\right)\cap A\right). \qquad (1.4)$$

Будем писать E_Z для *математического ожидания* относительно вероятностной меры Π_Z.

Лемма 1 (см. [8]). Пусть $F(\mathrm{m}, \Psi_1)$ — ограниченная функция, определенная на $\mathrm{M} \times (0,\pi)$. Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то для каждого направления α и точки $y \in g(\alpha)$ имеем

$$\lambda(\alpha)\, E_{y,\curlywedge} F(\mathrm{m}, \Psi_1) \cdot |\cot \Psi_1| = \lambda(\alpha + \pi/2)\, E_{y,\vee} F(\Psi_1, \mathrm{m}).$$

Лемма 2 (см. [8]). Пусть $F(\mathrm{m}, \Psi_1, \Psi_2)$ — ограниченная функция, определенная на $\mathrm{M} \times (0,\pi) \times (0,\pi)$. Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то для каждого направления α и точек $y_1, y_2 \in g(\alpha)$

$$c_{y_1,y_2,\curlywedge\curlywedge}\, E_{y_1,y_2,\curlywedge\curlywedge} F(\mathrm{m}, \Psi_1, \Psi_2)|\cot \Psi_1 \cot \Psi_2| = c_{y_1,y_2,\vee\vee}\, E_{y_1,y_2,\vee\vee} F(\mathrm{m}, \Psi_1, \Psi_2).$$

§2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ПАЛЬМА

Если случайный процесс прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2, то соответствующий процесс пересечений $\{x_i\}_\alpha$ на тестовой прямой $g(\alpha)$ инвариантен относительно сдвигов вдоль $g(\alpha)$ и имеет конечную интенсивность $\lambda(\alpha)$. Для отрезка $\gamma \subset g(\alpha)$ длины t имеем классическую формулу Пальма (см. [4])

$$\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t} = \lambda(\alpha)\left[\Pi_{y,\curlywedge}\left(\begin{matrix}\gamma\\ k-1\end{matrix}\right) - \Pi_{y,\curlywedge}\left(\begin{matrix}\gamma\\ k\end{matrix}\right)\right], \quad \text{где} \quad p_k(t,\alpha) = P\left(\begin{matrix}\gamma\\ k\end{matrix}\right). \qquad (2.1)$$

Эта формула справедлива для обоих концов y отрезка γ.

Здесь и ниже $\Pi_{y,\curlywedge}\left(\begin{matrix}\gamma\\ -1\end{matrix}\right) = 0$. Не оговаривая особо, в дальнейшем мы будем следовать аналогичной практике относительно отрицательных чисел пересечений.

Ниже нам понадобятся некоторые обобщения формулы Пальма для вероятностей $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$ с несколькими интервалами γ_i, разделенными непустыми пробелами. Для T_2-инвариантного процесса прямых вероятность $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$ на самом деле есть функция от $2n$ переменных

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha) = p_{k_1,\ldots,k_n}(t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_{n-1}, \alpha) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha),$$

где $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ – последовательность длин отрезков γ_i, а $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ – последовательность длин пробелов между γ_i (см. Рис. 1).

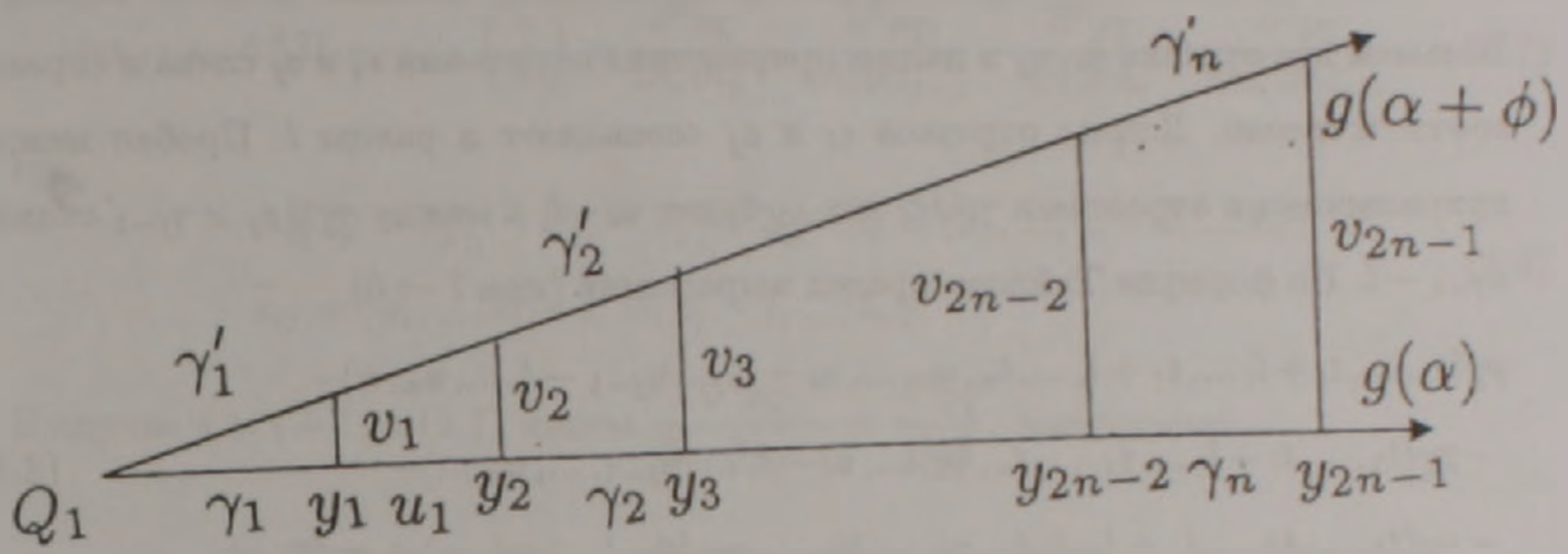

Рис. 1.

Возьмем один из отрезков γ_i и в его правом конце дадим приращение на отрезок ϵ_i длины $|\epsilon_i|$. Пробел между приращенным отрезком и γ_{i+1} становится $u_i - \epsilon_i|$. По формуле Тейлора

$$\lim_{|\epsilon_i|\to 0} \frac{p_{\overline{k}}(t_1, \ldots, t_i + |\epsilon_i|, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_i - |\epsilon_i|, \ldots, u_n, \alpha) - p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{|\epsilon_i|} = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, из формулы полной вероятности получаем

$$P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_i \bigcap \binom{\gamma_i \cup \epsilon_i}{k_i}\right) =$$
$$= P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \binom{\epsilon_i}{0}\right) + P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_i \bigcap \binom{\gamma_i \quad \epsilon_i}{k_i - 1 \quad 1}\right) + o(|\epsilon_i|),$$

$$P\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) = P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \binom{\epsilon_i}{0}\right) + P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \binom{\epsilon_i}{1}\right) + o(|\epsilon_i|),$$

где

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_i = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \ldots & \gamma_n \\ k_1 & \ldots & k_{i-1} & k_{i+1} & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти формулы в (2.2), получим

$$\lambda(\alpha)\Delta_i \Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}, \tag{2.3}$$

где $_iR$ обозначает правый конец отрезка γ_i. Здесь и ниже

$$\Delta_i Y_{\overline{k}} = Y_{(k_1,\dots k_i-1,\dots,k_n)} - Y_{(k_1,\dots k_i,\dots,k_n)}. \tag{2.4}$$

Если дадим приращение отрезка γ_i слева, то получим следующую версию формулы (2.3) :

$$\lambda(\alpha)\,\Delta_i \Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}}, \tag{2.5}$$

где $_iL$ — левый конец отрезка γ_i.

Ниже нам понадобятся формулы для распределений Пальма второго порядка. Возьмем два отрезка γ_i, γ_j и дадим приращения отрезками ϵ_i и ϵ_j слева и справа, соответственно. Длины отрезков ϵ_i и ϵ_j совпадают и равны l. Пробел между приращенными отрезками $\gamma_i \cup \epsilon_i$ и γ_{i+1} будет $u_i - l$, а между $\gamma_j \cup \epsilon_j$ и γ_{j-1} станет $u_{j-1} - l$. По формуле Тейлора предел выражения (при $l \to 0$)

$$\begin{aligned} &p_{\overline{k}}(t_1,\dots,t_i+l,\dots,t_j+l,\dots,t_n,u_1,\dots,u_i-l,\dots,u_{j-1}-l,\dots,u_n,\alpha)- \\ &-p_{\overline{k}}(t_1,\dots,t_i+l,\dots,t_j,\dots,t_n,u_1,\dots,u_i-l,\dots,u_{j-1},\dots,u_n,\alpha)- \\ &-p_{\overline{k}}(t_1,\dots,t_i,\dots,t_j+l,\dots,t_n,u_1,\dots,u_i,\dots,u_{j-1}-l,\dots,u_n,\alpha)+p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha), \end{aligned} \tag{2.6}$$

умноженный на l^{-2}, имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}}.$$

С другой стороны, можно разлагать вероятности в (2.6), применяя формулу полной вероятности. Используя обозначение

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_i = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_{i-1} & k_{i+1} & \dots & k_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij} = \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_i\right)_j,$$

где $\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)$ – как и в (1.1)

$$P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij} \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \epsilon_i & \gamma_j \cup \epsilon_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \sum_{0 \le s_1+s_2 \le 2} P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij} \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \epsilon_i & \epsilon_j \\ k_i - s_1 & k_j - s_2 & s_1 & s_2 \end{pmatrix}\right) + o(l^2).$$

Аналогично, имеем

$$P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij} \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \epsilon_i & \gamma_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij} \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \epsilon_i & \epsilon_j \\ k_i - 1 & k_j & 1 & s \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ \sum_{s=0,1,2} P\begin{pmatrix} \overline{\gamma} & \epsilon_i & \epsilon_j \\ k & 0 & s \end{pmatrix} + P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij} \bigcap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \epsilon_i & \epsilon_j \\ k_i - 2 & k_j & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) + o(l^2)$$

$$P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\cup\varepsilon_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right)=\sum_{s=0,1}P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i & k_j-1 & s & 1\end{pmatrix}\right)+$$

$$+\sum_{s=0,1,2}P\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ \overline{k} & s & 0\end{pmatrix}+P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i & k_j-2 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)+o(l^2).$$

Наконец

$$P\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\sum_{0\le s_1+s_2\le 2}P\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ \overline{k} & s_1 & s_2\end{pmatrix}+o(l^2).$$

Используя 3. и 4. из §1, получаем

$$c_{iR,jL,hh}\,\Delta_{ij}^2\Pi_{iR,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_{j-1}}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\partial u_i}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{j-1}},\qquad(2.7)$$

где

$$\Delta_{ij}^2 Y_{\overline{k}}=Y_{\overline{k}_{ij}}-Y_{\overline{k}_i}-Y_{\overline{k}_j}+Y_{\overline{k}}\quad \overline{k}_i=(k_1,\ldots,k_i-1,\ldots,k_n),$$
$$\overline{k}_{ij}=(k_1,\ldots,k_i-1,\ldots,k_j-1,\ldots,k_n).\qquad(2.8)$$

В случае $j=i+1$, в (2.7) имеем $\dfrac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{j-1}}=\dfrac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i^2}$. Аналогично

$$c_{iL,jR,hh}\,\Delta_{ij}^2\Pi_{iL,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\partial u_{i-1}}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}\,\partial u_j}.\qquad(2.9)$$

В случае $i=1$ или $j=n$ полагаем $\dfrac{\partial}{\partial u_0}\equiv 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial u_n}\equiv 0$. В частности, для $i=1$ и $j=n$ имеем

$$c_{1L,nR,hh}\,\Delta_{1n}^2\,\Pi_{1L,nR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_1\partial t_n}.\qquad(2.10)$$

Распределения Пальма $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ определены также и для $y_1=y_2=y$. Ниже будем использовать обозначение $\Pi_{y,h}^{(2)}=\Pi_{y,y,hh}$. Грубо говоря, $\Pi_{y,h}^{(2)}$ определяется условием, что обе прямые из $\{g_i\}$ содержат точку $y\in g(\alpha)$. Используя формулу Тейлора и действуя как и выше, получим

$$c_{iR,h}^{(2)}\,\Delta_{ii}^2\Pi_{iR,h}^{(2)}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}-2\,\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_i}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i^2},\qquad(2.11)$$

где $c_{iR,h}^{(2)}$ — постоянная, iR — правый конец отрезка γ_i, а Δ_{ii}^2 — обычная вторая разность по i. Аналогичная формула существует и для $\Pi_{iL,h}^{(2)}$.

§3. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для заданной системы непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\subset g(\alpha)$ рассмотрим треугольник, показанный на Рис. 1.

На прямой $g(\alpha+\phi)$ рассмотрим n отрезков $\gamma_1',\ldots,\gamma_n'$, чьи перпендикулярные проекции на $g(\alpha)$ суть начальные отрезки $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$. Длины γ_i' пусть будут

t'_i, а пробелы между γ'_i и γ'_{i+1} обозначим через u'_i. Так как при $\phi \to 0$ имеем $t'_i - t_i = o(\phi)$ и $u'_j - u_j = o(\phi)$ $(i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, ..., n-1)$, то

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{p_{\overline{k}}(\overline{t'}, \overline{u'}, \alpha + \phi) - p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\phi} = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha}. \tag{3.1}$$

Вычислим те же пределы, используя разложения

$$\left(\frac{\overline{\gamma}'}{k}\right) = \bigcup_{s_1, ..., s_{2n-1} > 0} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}'}{k}\right) \bigcap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix}\right), \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) = \bigcup_{s_1, ..., s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix}\right), \tag{3.3}$$

приходим к следующей лемме.

Лемма 3.

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} = \lim_{\phi \to 0} \phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}'}{k}\right) \bigcap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix}\right) - P\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]. \tag{3.4}$$

Показательство : следует из (1.1) и (1.2). Очевидно, имеем разложение

$$\begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \bigcap \Theta_a \bigcup \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \bigcap \Theta_o, \tag{3.5}$$

где $\Theta_a = \{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ (острые углы) и $\Theta_o = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$ (тупые углы). Используя (3.4), (3.5) и

$$P\begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha + \pi/2)\, y_i\, \phi + o(\phi), \qquad i = 1, ..., 2n-1, \tag{3.6}$$

где y_i — координата основания v_i на $g(\alpha)$ (см. Рис. 1), получим

$$\begin{aligned}[\lambda(\alpha + \pi/2)]^{-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} y_{iL} \left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right) \bigcap \Theta_a\right) + \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \Theta_o\right) - \right. \\ \left. - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \Theta_a\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right) \bigcap \Theta_o\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} y_{iR} \left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \Theta_a\right) + \right. \\ \left. + \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right) \bigcap \Theta_o\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right) \bigcap \Theta_a\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \Theta_o\right)\right].\end{aligned} \tag{3.7}$$

В (3.7) сумма распространяется на отрезки $\gamma_1, ..., \gamma_n$; как и выше iL — левый, а iR — правый концы отрезка γ_i. Наконец, $\overline{k}_i = (k_1, ..., k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, ..., k_n)$. Следующий шаг состоит в вычислении (3.7) при Условии а) (см. Введение). Заменим вертикальные окна горизонтальными. Очевидно

$$\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \Theta_o\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \bigcap \Theta_a\right) = E_{iL,v}\left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)[I_{\Theta_o}(\Psi) - I_{\Theta_a}(\Psi)]\right),$$

где I — индикаторная функция соответствующего события. Применяя Лемму 1 для $F(\mathbf{m}, \Psi) = I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)[I_{\Theta_o}(\Psi) - I_{\Theta_a}(\Psi)]$ и соотношение $[I_{\Theta_o}(\Psi) - I_{\Theta_a}(\Psi)] \cdot |\cot\Psi| = \cot\Psi$, получим (сравни с [8])

$$\lambda(\alpha + \pi/2)\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_a\right)\right] =$$

$$= -\lambda(\alpha)\, E_{iL,h}\left[I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\cot\Psi\right].$$

При Условии а) оно равно

$$-\lambda(\alpha)\cdot E_{iL,h}\left[I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\cot\Psi\right] = -\lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot E_a\cot\Psi.$$

Стационарность дает нам возможность использования упрощенной записи $E_{iL,h}\cot\Psi = E_a\cot\Psi$. Аналогично, при Условии а)

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_a\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_o\right)\right] =$$

$$= \lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\cdot E_a\cot\Psi,$$

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_a\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap\Theta_o\right)\right] =$$

$$= \lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot E_a\cot\Psi,$$

$$\lambda(\alpha+\pi/2)\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_o\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap\Theta_a\right)\right] =$$

$$= -\lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\cdot E_a\cot\Psi.$$

Подставляя эти формулы в (3.7), получим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial\alpha} = \lambda(\alpha)\sum_{i=2}^{n}\left\{y_{iL}\left[\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right) - \Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + y_{iR}\left[\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) - \Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\right]\right\} E_a\cot\Psi.$$

Из (2.1), (2.3) и (2.5) получим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial\alpha} = \left\{\sum_{i=2}^{n} y_{iL}\left[\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}}\right] - \sum_{i=1}^{n-1} y_{iR}\left[\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}\right] - y_{nR}\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_n}\right\} E_a\cot\Psi. \tag{3.8}$$

Ниже мы используем выражение (доказательство можно найти в [7], [8])

$$E_a\cot\Psi = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}. \tag{3.9}$$

Так как $y_{iR} - y_{iL} = t_i$ и $y_{(i+1)R} - y_{iR} = u_i$, то (3.8) можно записать в виде однородного уравнения в частных производных

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = 0. \tag{3.10}$$

Первые интегралы уравнения (3.10) (см. [12]) суть

$$\lambda(\alpha)\, t_i = c_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad \lambda(\alpha)\, u_j = b_j, \quad j = 1, ..., n-1.$$

Предложение 1 (см. [8]). Для любого случайного процесса прямых $\{g_i\} \in$ Ti2, удовлетворяющего дополнительному условию а)

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha)\,\bar{t}, \lambda(\alpha)\,\bar{u}), \tag{3.11}$$

где $q_{\bar{k}}$ суть некоторые функции от $2n-1$ переменных, а $\lambda(\alpha)$ – интенсивность процесса $\{x_i\}_\alpha$.

§4. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ В АНАЛИЗЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим прямоугольник R, основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, ..., \gamma_n$ (см. (1.1)). Пусть T – длина горизонтального основания прямоугольника R, $T = \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} u_i$. Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, чье основание есть γ_i, вертикальные стороны прямоугольников D_1, ..., D_n обозначим через $v_1, ..., v_{2n}$, $|v_1| = ... = |v_{2n}| = l$, а сторону прямоугольника D_i, параллельную γ_i, будем обозначать через γ_i'. Прямую, содержащую отрезки γ_1', ..., γ_n', обозначим через $g'(\alpha)$ (см. Рис. 2). Обозначим через d_i, $i = 1, 2$ диагонали прямоугольника R. Пусть $\bar{d}_i = (d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$, где $d_{ij} = d_i \bigcap D_j$, $j = 1, ..., n$, $i = 1, 2$. Пробелы на диагонали d_i будем обозначать через $\bar{\delta}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{i(n-1)})$.

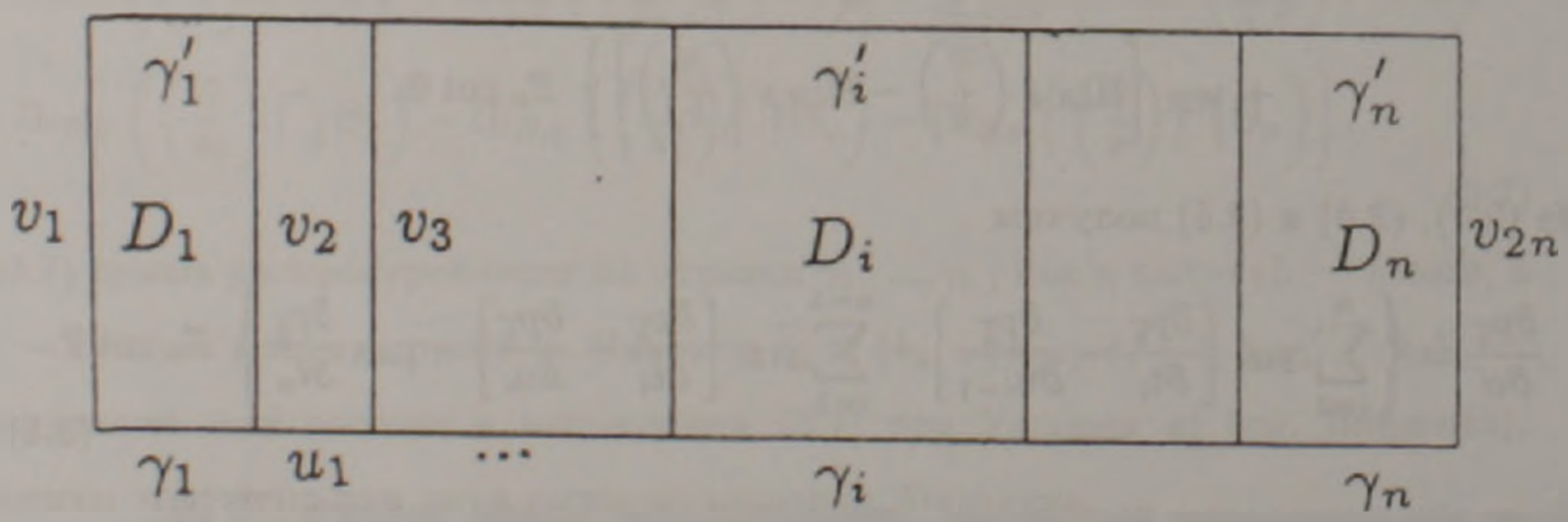

Рис. 2.

Используя T_3-инвариантность, получаем

$$\mathbf{P}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\overline{\gamma}'}{k}\right) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha), \qquad \overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n').$$

Используя формулу Тейлора, предел

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{\phi \to 0} \frac{p_{\overline{k}}(\overline{d}_1, \overline{\delta}_1, \alpha + \phi) + p_{\overline{k}}(\overline{d}_2, \overline{\delta}_2, \alpha - \phi) - 2\, p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\phi^2} \tag{4.1}$$

равен

$$\mathcal{L}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2}, \tag{4.2}$$

где ϕ – угол между $g(\alpha)$ и диагональю d_1.

Мы хотим вычислить тот же предел, используя разложения

$$\left(\frac{\overline{d}_i}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \ldots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \overline{d}_i & v_1 & v_2 & \ldots & v_{2n} \\ \overline{k} & s_1 & s_2 & \ldots & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \ldots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & v_1 & v_2 & \ldots & v_{2n} \\ \overline{k} & s_1 & s_2 & \ldots & s_{2n} \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\overline{\gamma}'}{\overline{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \ldots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \overline{\gamma}' & v_1 & v_2 & \ldots & v_{2n} \\ \overline{k} & s_1 & s_2 & \ldots & s_{2n} \end{pmatrix}.$$

Ниже мы будем использовать следующие обозначения :

$\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ k & \overline{0} \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все другие вертикальные окна (т.е. окна из $\overline{v_q}$) не имеют пересечений ;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно v_q пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\overline{v_q}$, и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон ;

$\begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v \neq v_q$ из множества окон $v_1, \ldots v_{2n}$, которое пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Замечание. В этих формулах индекс q относится к концам интервалов $\gamma_1, \ldots \gamma_n$.

Множество значений q отождествляется с множеством $\{{}_iL, {}_iR\}_{i=1}^n$.

Следующая лемма вытекает из свойств (1.2).

Лемма 4, [8]. Для любого $P \in Ti2$, вероятность противоположного к

$$Z = \bigcup_{q=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 1 & \overline{0} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 2 & \overline{0} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup \begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

имеет порядок $o(l^2)$.

Так как $\mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{d_i} & v_1 & \dots & v_{2n}\\ \overline{k} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & v_1 & \dots & v_{2n}\\ \overline{k} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, то из Леммы 4 получаем

$$\mathcal{L}_2 = \lim_{\phi\to 0}\frac{1}{\phi^2}\left\{\sum_{q=1}^{2n}\left(\kappa_{q,1} + \kappa_{q,A} + \kappa_{q,2} + \sum_{b\neq q}\kappa_{q,b}\right)\right\}, \tag{4.3}$$

где использованы следующие обозначения :

$$\kappa_{q,m} = \sum_{i=1,2}\mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{d_i} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & m & \overline{0}\end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & m & \overline{0}\end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{\gamma'} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & m & \overline{0}\end{pmatrix}, \quad m = 1, 2,$$

$$\kappa_{q,A} = \sum_{i=1,2}\mathbf{P}\left(\frac{\overline{d_i}}{\overline{k}}\right)\bigcap\begin{pmatrix}v_q\\ 1\end{pmatrix}_A - \mathbf{P}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\begin{pmatrix}v_q\\ 1\end{pmatrix}_A - \mathbf{P}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)\bigcap\begin{pmatrix}v_q\\ 1\end{pmatrix}_A,$$

$$\kappa_{q,b} = \sum_{i=1,2}\mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{d_i} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b}\\ \overline{k} & 1 & 1 & \overline{0}\end{pmatrix} - \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b}\\ \overline{k} & 1 & 1 & \overline{0}\end{pmatrix} -$$

$$- \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{\gamma'} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b}\\ \overline{k} & 1 & 1 & \overline{0}\end{pmatrix}.$$

Мы по отдельности анализируем слагаемые $\kappa_{q,1}$, $\kappa_{q,2}$, $\kappa_{q,A}$ и $\kappa_{q,b}$. Анализ слагаемого $\kappa_{q,1}$ включает "геометрическое вычитание", необходимое для выделения главного члена, порядок которого – $O(l^2)$. Для слагаемых $\kappa_{q,2}$, $\kappa_{q,A}$ и $\kappa_{q,b}$ нет необходимости проводить аналогичную работу, и поэтому анализ сводится к чистой комбинаторике.

Анализ $\kappa_{q,1}$. Разделим v_q на три подинтервала $v_{q,1}$, $v_{q,2}$ и $v_{q,3}$ (см. Рис. 3). По аддитивности $\kappa_{q,1} = \kappa_{q,1}(1) + \kappa_{q,1}(2) + \kappa_{q,1}(3)$, где соответствующие $\kappa_{q,1}(j)$, $j = 1, 2, 3$ получаются из $\kappa_{q,1}$ подстановкой $v_{q,j}$ вместо v_q. Из определения события $\begin{pmatrix}v_{q,3} & \overline{v_q}\\ 1 & \overline{0}\end{pmatrix}$ вытекает, что

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{d_1} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & 1 & \overline{0}\end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{\gamma} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & 1 & \overline{0}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{d_2} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & 1 & \overline{0}\end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}\overline{\gamma'} & v_q & \overline{v_q}\\ \overline{k} & 1 & \overline{0}\end{pmatrix},$$

$$\kappa_{q,1}(3) = 0. \tag{4.4}$$

Прямую из $m \in \begin{pmatrix}v_{q,1} & \overline{v_q}\\ 1 & \overline{0}\end{pmatrix}$, пересекающую $v_{q,1}$, будем задавать координатами (x, ψ), $x \in v_{q,1}$, ψ – угол между $v_{q,1}$ и этой прямой. Мы используем аналогичные координаты для прямой из $m \in \begin{pmatrix}v_{q,2} & \overline{v_q}\\ 1 & \overline{0}\end{pmatrix}$, пересекающей $v_{q,2}$. Имеем

$$\kappa_{q,1} = \kappa_{q,1}(1) + \kappa_{q,1}(2) = \tag{4.5}$$

$$= \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)} \Pi_{x,\psi}\left[\sum_{i=1,2}\begin{pmatrix}\overline{d_i} & \overline{v_q}\\ \overline{k} & \overline{0}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\overline{\gamma} & \overline{v_q}\\ \overline{k} & \overline{0}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\overline{\gamma'} & \overline{v_q}\\ \overline{k} & \overline{0}\end{pmatrix}\right] f(\psi)\,\sin\psi\,d\psi +$$

$$+ \int_{v_{q,2}} dx \int_{\Psi(x)} \Pi_{x,\psi}\left[\sum_{i=1,2}\begin{pmatrix}\overline{d_i} & \overline{v_q}\\ \overline{k} & \overline{0}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\overline{\gamma} & \overline{v_q}\\ \overline{k} & \overline{0}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\overline{\gamma'} & \overline{v_q}\\ \overline{k} & \overline{0}\end{pmatrix}\right] f(\psi)\,\sin\psi\,d\psi,$$

где $\Pi_{x,\psi}$ – распределение Пальма Π_g для $g = (x, \psi)$. Множество направлений $\Psi(x)$ зависит от x и соответствует условию $\{g_{x,\psi}$ не пересекает окна $\overline{v_q}\}$. Используя трансляционную инвариантность, перепишем (4.5) в виде (точка Q' указана на Рис. 3)

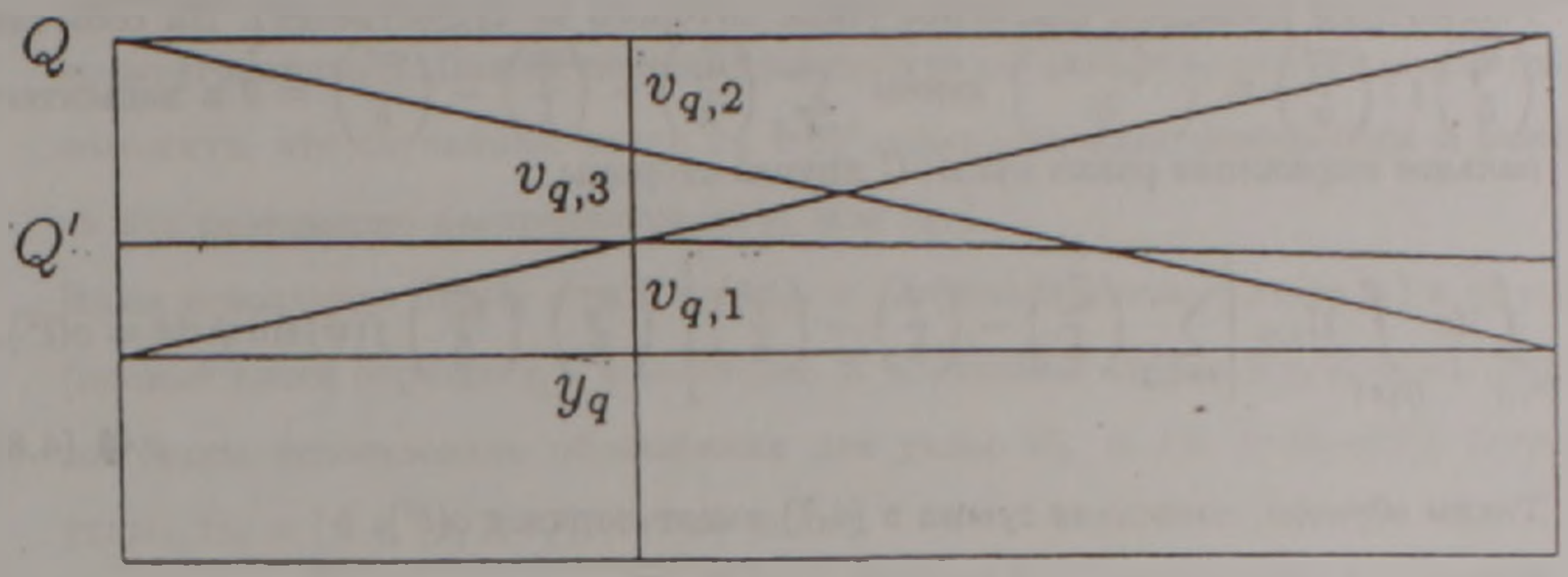

Рис. 3. Прямоугольник R' получается из R с помощью сдвига вниз. В R' верхняя горизонтальная сторона содержит верхний конец $v_{q,1}$.

$$\kappa_{q,1} = \int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi(x)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \left(\begin{matrix} \overline{d_i} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma'} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + \int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi'(x)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \left(\begin{matrix} \overline{d_i} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \right. \tag{4.6}$$

$$\left. - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma} & \overline{v'_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma'} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + o(l^2),$$

где $\Psi'(x) = \Psi(x')$ с $x' = x + |Q'Q|$. Интервалы v'_q суть образы v_q при том же сдвиге. Теперь мы можем переписать (4.6) в виде

$$\int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi(x) \cap \Psi'(x)^c} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \left(\begin{matrix} \overline{d_i} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma'} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi + \int\limits_{v_{q,1}} dx \int\limits_{\Psi'(x) \cap \Psi(x)^c} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \left(\begin{matrix} \overline{d_i} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma} & \overline{v'_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \overline{\gamma'} & \overline{v_q} \\ \overline{k} & \overline{0} \end{matrix} \right) \right] f(\psi) \sin\psi \, d\psi \pm$$

$$\pm \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x) \bigcap \Psi'(x)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \left(\frac{\overline{d}_i}{k} \right) - \left(\frac{\overline{\gamma}}{k} \right) - \left(\frac{\overline{\gamma}'}{k} \right) \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\overline{v_q}}{0} \right) - \left(\frac{\overline{v_q}'}{0} \right) \right] f(\psi) \sin \psi \, d\psi + o(l^2). \tag{4.7}$$

Рассмотрим последнее слагаемое (знак которого не существенен). На событии $\left(\frac{\overline{v'_q}}{0} \right) \bigcap \left(\frac{\overline{v_q}}{0} \right) = \left(\frac{\overline{v'_q \cup v_q}}{0} \right)$ имеем $\sum_{i=1,2} \left(\frac{\overline{d}_i}{k} \right) - \left(\frac{\overline{\gamma}}{k} \right) - \left(\frac{\overline{\gamma}'}{k} \right) = 0$ и подынтегральное выражение равно нулю. С другой стороны

$$\int_{v_{q,1}} dx \int_{(0,\pi)} \Pi_{x,\psi} \left[\sum_{i=1,2} \left(\frac{\overline{d}_i}{k} \right) - \left(\frac{\overline{\gamma}}{k} \right) - \left(\frac{\overline{\gamma}'}{k} \right) \right] \left(\frac{\overline{v_q}}{0} \right) \left(\frac{\overline{v_q}'}{0} \right) f(\psi) \sin \psi \, d\psi = o(l^2). \tag{4.8}$$

Таким образом, последняя сумма в (4.7) имеет порядок $o(l^2)$.

Вернемся к первым двум интегралам в (4.7). Так как каждое множество интегрирования стягивается к точке $(0, \alpha)$ на $x, \psi-$ плоскости, которая соответствует горизонтальной прямой $g(\alpha)$, для каждого интеграла главный член пропорционален $l^2 \, \Delta_i \Pi_{g(\alpha)} \left(\frac{\overline{\gamma}}{k} \right) = l^2 \, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$.

Важно отметить, что коэффициент пропорциональности зависит только от расположения отрезков на Рис. 2 и не зависит от выбора вероятностного распределения $P \in Ti2$. Таким образом, пришли к следующему результату.

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q1}$ **имеет порядок** l^2**. А именно**

$$\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q1} = -2 \, f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} C'_i \, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) \, l^2 + o(l^2), \tag{4.9}$$

где C'_i **константы, зависящие только от взаимного расположения точек** $y_1, \ldots, y_{2n}$**.** **и** $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \Pi_g \left(\frac{\overline{\gamma}}{k} \right)$.

Анализ $\kappa_{q,A}$. Очевидно, что $\kappa_{q,A} = O(l^2)$ (см. §1) и предельное положение прямой из $\{g_i\}$, пересекающей v_q, есть тестовая прямая $g(\alpha)$. Следовательно, $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,A}$ имеет вид (4.9) с некоторыми новыми коэффициентами C''_i. Из этого результата и из (4.9) следует

Величина $\sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA})$ **имеет порядок** l^2**. А именно**

$$\sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA}) = -2 \, f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} C_i \, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) \, l^2 + o(l^2), \tag{4.10}$$

где C_i – константы, зависящие только от взаимного расположения точек $y_1, \ldots, y_{2n}$ и $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \Pi_A\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)$. Точные значения постоянных C_i будут вычислены в конце этого параграфа.

Анализ $\kappa_{q,b}$. Анализ разбивается на случаи, зависящие от положений точек пересечения $x_q \in v_q$ и $x_b \in v_b$ относительно подразбиений v_q и v_b диагоналями прямоугольника R. Для вычисления соответствующих вероятностей можно предположить, что случайные точки x_q и x_b асимптотически независимы и каждая из них равномерно распределена на v_q или v_b.

Ниже используем $S(q,b) = +1$, если $y_q = iL$ (левый конец отрезка γ_i) и $y_b = jR$ (правый конец отрезка γ_j), и наоборот. В противном случае $S(q,b) = -1$. Также мы будем использовать обозначения для углов $\Theta_a = \{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ (острые углы), $\Theta_o = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$ (тупые углы).

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb}$ имеет порядок l^2. А именно

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb} = \\
&= \sum_{q<b} (y_q - y_b)^2 c_{q,b,vv} S(q,b) \left[\Delta_{ij}^2 \Pi_{q,b,vv}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times \left(\Theta_a \times \Theta_a \bigcup \Theta_o \times \Theta_o\right)\right) - \right. \\
&\left. - \Delta_{bq}^2 \Pi_{i,j,vv}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times \left(\Theta_o \times \Theta_a \bigcup \Theta_a \times \Theta_o\right)\right)\right] - \\
&- \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q,b)\, c_{q,b,vv}\, \Delta_{ij}^2 \Omega(q,b) l^2 + o(l^2),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

где $\Omega(q,b) = \Pi_{q,b,vv}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times (\Theta_a \times \Theta_a \bigcup \Theta_o \times \Theta_o)\right) -$

$-\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) \times (\Theta_o \times \Theta_a \bigcup \Theta_a \times \Theta_o)\right)$.

Анализ $\kappa_{q,2}$. Случайные точки $x_1, x_2 \in v_q$, в которых происходит пересечение, асимптотически независимы, и каждая из них равномерно распределена на v_q. Рассуждая как и в предыдущем случае, получаем

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2}$ имеет порядок l^2. А именно

$$\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2} = \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q)\, c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q,q)\, l^2 + o(l^2). \tag{4.12}$$

Анализ соотношения (4.3) завершен, и мы в состоянии привести результат приравнивания коэффициентов при слагаемых порядка l^2. Из (4.2), (4.10) – (4.12)

получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)}{\partial t_i}t_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)}{\partial u_i}u_i+\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)}{\partial\alpha^2}=$$

$$=-2f(\alpha)\sum_{i=1}^{n}C_i\,\Delta_i\pi_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)+ \tag{4.13}$$

$$+\sum_{i<j}(y_i-y_j)^2\,c_{i,j,vv}\,S(i,j)\,\Delta^2_{rq}\Omega(i,j)+\Xi,$$

где

$$\Xi=-\sum_{q=2}^{2n-1}y_q(T-y_q)\sum_{b\neq q}S(q,b)\,c_{q,b,vv}\,\Delta^2_{ij}\,\Omega(q,b)+\sum_{q=2}^{2n-1}y_q(T-y_q)\,c_{q,q,vv}\,\Delta^2_{ii}\Omega(q,q). \tag{4.14}$$

Остается вычислить значения постоянных C_i. Умножим (4.13) на k_i и просуммируем по $\bar{k}$.

Так как $\sum_{\bar{k}}k_i\,p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)=\lambda(\alpha)\,t_i$ и все члены, содержащие вторую разность, обращаются в нуль, получаем $\lambda(\alpha)\,t_i+\lambda''(\alpha)\,t_i=-2\,f(\alpha)\,C_i$. Используя $\lambda''(\alpha)+\lambda(\alpha)=2\,f(\alpha)$ (см. [2]), получим $C_i=-t_i$.

§5. УСЛОВИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Начнем с условий факторизации a) и b), указанных во введении. Используя Лемму 2 для

$$F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2)=I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)\cdot[I(\Theta_a\times\Theta_a)+I(\Theta_o\times\Theta_o)-I(\Theta_a\times\Theta_o)-I(\Theta_o\times\Theta_a)],$$

произведения $c_{i,j,vv}\,\Omega(i,j)$ в (4.7), (4.8) можно записать в терминах горизонтальных окон. Получим

$$c_{i,j,vv}\,\Omega(i,j)=c_{i,j,hh}\,E_{i,j,hh}\left(I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)[I(\Theta_a\times\Theta_a)+I(\Theta_o\times\Theta_o)-\right.$$
$$\left.-I(\Theta_a\times\Theta_o)-I(\Theta_o\times\Theta_a)]\,|\cot\Psi_1\cdot\cot\Psi_2|\right). \tag{5.1}$$

Вместе с элементарным тождеством $\cot\Psi_1\cdot\cot\Psi_2=[I(\Theta_a\times\Theta_a)+I(\Theta_o\times\Theta_o)-I(\Theta_a\times\Theta_o)-I(\Theta_o\times\Theta_a)]\,|\cot\Psi_1\cdot\cot\Psi_2|$, из (5.1) следует

$$c_{i,j,vv}\,\Omega(i,j)=c_{i,j,hh}\,E_{i,j,hh}\left(I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)\cot\Psi_1\,\cot\Psi_2\right). \tag{5.2}$$

При выполнении Условий a) и b), и используя (3.9), получаем

$$E_{i,j,hh}\left(I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)\cot\Psi_1\,\cot\Psi_2\right)=\Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)\,E_{i,j,hh}(\cot\Psi_1\,\cot\Psi_2)=$$
$$=\frac{\lambda'(\alpha)^2}{\lambda(\alpha)^2}\,\Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right). \tag{5.4}$$

Докажем, что при выполнении Условий a) и b) выражение $\Xi = 0$. Действительно, используя обобщенные формулы Пальма, получаем

$$\Xi = -\sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q) \sum_{b\neq q} S(q,b) \left[\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\, \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\, \partial u_s} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j\, \partial u_r} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_s\, \partial u_r}\right] +$$

$$+ \sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q) \left[\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\, \partial u_i} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\, \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i\, \partial u_{i-1}}\right],$$

где в двойных суммах индекс $s = i$, если $q = iR$ и $s = i-1$, если $q = iL$ (см. §2). Аналогично, индекс $r = j$, если $q = jR$ и $r = j-1$, если $q = jL$ (см. Замечание). Для любого $i \neq j$ наличие множителя $S(q,b)$ обращает в нуль члены, соответствующие $b = jL$ и $b = jR$. Также и в двойной сумме, если $i = j$, то y_q и y_b суть концы одного и того же интервала γ_i, поэтому $S(q,b) = S(b,q) = +1$. Так как частные производные в первой и во второй строчках выражения Ξ встречаются с разными знаками, то получаем $\Xi = 0$.

Остается преобразовать слагаемое (см. (4.7))

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i<j} (y_i - y_j)^2\, c_{i,j,\dots}\, S(i,j)\, \Delta_{rq}^2 \Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) =$$

$$= \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i,\gamma_j \\ i<j}} \left[(y_{iL} - y_{jR})^2\, c_{iL,jR,hh}\, \Delta_{ij}^2 \Pi_{iL,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) +\right.$$

$$\left. + (y_{iR} - y_{jL})^2\, c_{iR,jL,hh}\, \Delta_{ij}^2 \Pi_{iR,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\right] -$$

$$- \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i,\gamma_j \\ i<j}} \left[(y_{iR} - y_{jR})^2\, c_{iR,jR,hh}\, \Delta_{ij}^2 \Pi_{iR,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) +\right.$$

$$\left. + (y_{iL} - y_{jL})^2\, c_{iL,jL,hh}\, \Delta_{ij}^2 \Pi_{iL,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\right] +$$

$$+ \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i=1}^{n} t_i^2\, c_{iL,iR,hh}\, \Delta_{ii}^2 \Pi_{iL,iR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right).$$

Используя (2.7), (2.9) — (2.11) и

$$-(y_{iL} - y_{jL})^2 - (y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iR} - y_{jL})^2 + (y_{iL} - y_{jR})^2 = 2t_i t_j,$$

$$-(y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iL} - y_{jR})^2 - (y_{iL} - y_{(j+1)L})^2 + (y_{iR} - y_{(j+1)L})^2 = -2t_i u_j,$$

$$-(y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iR} - y_{(j+1)L})^2 + (y_{(i+1)L} - y_{jR})^2 - (y_{(i+1)L} - y_{(j+1)L})^2 = 2u_i u_j.$$

вышеупомянутое слагаемое можно переписать в виде

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2}t_i^2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2}u_j^2+2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}t_i\,t_j+\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}t_i\,u_j+2\sum_{i<j}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}u_i\,u_j\right]. \tag{5.5}$$

Таким образом, при выполнении Условий a), b) формула (4.7) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)}{\partial t_i}t_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)}{\partial u_i}u_i+\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)}{\partial\alpha^2}=$$
$$=2\,f(\alpha)\sum_{i=1}^{n}t_i\,\Delta_i\pi_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)+\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2}t_i^2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2}u_j^2+\right. \tag{5.6}$$
$$\left.+2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}t_i\,t_j+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}t_i\,u_j+2\sum_{i\neq j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}u_i\,u_j\right].$$

Теперь рассмотрим условие "достаточного перемешивания" c) (см. Введение). Аналитически оно имеет вид

$$\pi_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)=p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha). \tag{5.7}$$

Очевидно, что используя условие (5.7), можно соотношение (5.6) свести к дифференциальному уравнению. Решая это уравнение вместе с начальными условиями

$$p_{\bar{0}}(\bar{0},\bar{u},\alpha)=1 \quad \text{и} \quad p_{\bar{k}}(\bar{0},\bar{u},\alpha)=0, \quad \text{при} \quad \bar{k}\not\equiv\bar{0}$$

приходим к следующей теореме (см. [8]).

Теорема. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2 маркированный точечный процесс $\{x_i,\Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет Условию a). Если для некоторого направления α выполнены Условия b) и c), то для того же значения α точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский, т. е. $p_{\bar{k}}(\bar{t},\bar{u},\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\frac{[\lambda(\alpha)\,t_i]^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda(\alpha)\,t_i}$.

ABSTRACT. The present paper studies second order homogeneous line processes in the plane, especially the marked point processes of intersections that they induce on test lines, the marks being the angles at which the intersections with a test line occur. Its scope is essentially the same as that of the earlier paper by R. V. Ambartzumian and V. K. Oganian "Palm distributions in the analysis of homogenous random line processes

in the plane", Journal of Contemporary Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences), vol. 33, no. 4, pp. 31 — 58, 1998. The earlier paper had the disadvantage of being methodologically inhomogeneous : it used Invariant Imbedding for the first order analysis and Combinatorial integral geometry decompositions for the second order analysis. The present paper removes this disadvantage by extending Invariant Imbedding approach to the second order analysis, thus yielding necessary methodological integrity. Applying "Invariant Imbedding" we obtain two relations expressing the derivatives of the joint probabilities for numbers of intersections that occur in a system of disjoint intervals on a test line in terms of the first and the second order Palm probabilities of the same events. From these relations, conditions of Poissonity of n–dimensional distributions for any $n \geq 1$ are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
3. R. V. Ambartzumian, W. Weil (editors), Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, 1984.
4. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane", in [5], pp. 124 - 132, 1984.
5. V. K. Oganian, " Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", Acta Appl. Math., Holland, vol. 9, no. 1 — 2, pp. 71 — 81, 1987.
6. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1993.
7. R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in stochastic geometry", Докл. АН Армении, том 98, № 3, стр. 185 — 196, 1998. Перепечатано в Известия АН Армения, Математика, том 33, № 4, стр. 5 - 17, 1998.
8. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости", Известия АН Армении, Математика, том 33, № 4, стр. 31 — 58, 1998.
9. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, Безгранично делимые точечные процессы, Москва, Наука, 1982.
10. D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, John Wiley, Chichester, 1987.
11. E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), Stochastic Geometry, J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974.
12. В. В. Степанов, Дифференциальные Уравнения, Москва, Физ. Мат. ГИЗ., 1950.
13. R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, in [3], pp. 14 - 33, 1984.
14. O. Kallenberg, Random Measures, Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983.
15. Л. А. Сантало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, Москва, Наука, 1983.

12 декабря 1998

Ереванский государственный университет
E-mail : victo@aua.am

КОМБИНАТОРИКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Г. Ю. Панина

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 6, 1999

В статье рассматриваются, с комбинаторной точки зрения, свойства преобразования Радона относительно эйлеровой характеристяки. Две проблемы, касающиеся обращения преобразования Радона в пространствах многогранных функций, оказываются близко связанными с формулами Р. В. Амбарцумяна в комбинаторной интегральной геометрии.

§1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении многогранных функций, связанных с конечными множествами точек, оставались вне наших интересов результаты работы [2] об алгебре многогранников, а также некоторые результаты комбинаторной интегральной геометрии [1], [3], [4]. Одна из проблем представляет эти две теории в общей комбинаторной структуре.

Пусть $\mathbb{RP}^n$ – n-мерное проективное пространство, и E_n – множество проективных гиперплоскостей в $\mathbb{RP}^n$. Для конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{RP}^n$ обозначим через $\mathbb{P}(\mathcal{P})$ множество многогранников $K \subset \mathbb{RP}^n$ с вершинами в $\mathcal{P}$. С множеством $\mathcal{P}$ мы связываем два конечно-мерных пространства функций :

1) Пространство $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ многогранных функций : $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ = пространство функций $f : \mathbb{RP}^n \longmapsto \mathbb{R}$, которые линейно порождаются по характеристическим (индикаторным) функциям I_K, где K изменяется на $\mathbb{P}(\mathcal{P})$.

2) Пространство $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ бюфоновых функций. Две гиперплоскости $e_1, e_2 \in E_n$ называются **эквивалентными относительно** $\mathcal{P}$ (и обозначаются $e_1 \sim e_2$), если для любого многогранника $K \in \mathbb{P}(\mathcal{P})$ имеем $K \cap e_1 = \emptyset \Longleftrightarrow K \cap e_2 = \emptyset$. Положим $\mathcal{B}(\mathcal{P}) = \{f : E_n \longmapsto \mathbb{R} \mid e_1 \sim e_2 \Longrightarrow f(e_1) = f(e_2)\}$.

В [5] было введено понятие преобразования Радона относительно эйлеровой характеристики. Будем обозначать это преобразование звездой *. Используя

преобразование *, в этой статье мы доказываем две комбинаторные теоремы, которые унифицируют упомянутые две теории.

В Теореме 4.1 выводится тождество $(*)^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{P})) = \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и дается необходимый и достаточный критерий для функций f, принадлежащих пространству $\mathcal{M}(\mathcal{P})$. Теорема 3.1 рассматривает пространство $\mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$, игнорирующее граничные значения бюфоновых функций и пространство $\mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$, игнорирующее точечные значения многогранных функций в $\mathcal{P}$. Эта теорема указывает на тесную связь между преобразованием, обратным к индуцированному преобразованию

$$* : \mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P}) \tag{0.1}$$

и комбинаторными формулами Амбарцумяна (см. [1], [3], [4]).

С помощью стандартного вложения $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{RP}^n$ легко можно переформулировать результаты для многогранных функций в $\mathbb{R}^n$ (легче, чем в $\mathbb{RP}^n$).

§1. НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Многогранные функции. Буквой $\mathcal{P}$ будем обозначать конечные подмножества точек n-мерного проективного пространства $\mathbb{RP}^n$. С каждым подмножеством $\mathcal{P}$ связаны конечномерные пространства действительных функций.

проективный многогранник (или просто многогранник) определяется как замкнутое подмножество в $\mathbb{RP}^n$, ограниченное конечным множеством гиперплоскостей. Многогранник может иметь размерность, меньшую чем n (точка также является многогранником) или совпадать с пространством $\mathbb{RP}^n$. Для многогранника K, пусть I_K – его индикаторная функция, т.е.

$$I_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in K, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Через $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ будем обозначать пространство линейных комбинаций $\sum a_i I_{K_i}$, где K_i – множество многогранников с вершинами в $\mathcal{P}$, а $\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$ – подпространство пространства $\mathcal{M}(\mathcal{P})$, порожденное функциями $I_{\{P\}}$, где $P \in \mathcal{P}$. Другими словами, носитель функции из $\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$ лежит в $\mathcal{P}$.

Нам понадобятся и пространства $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{P}} \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{M}_0 = \bigcup_{\mathcal{P}} \mathcal{M}_0(\mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ меняется на всех конечных подмножеств пространства $\mathbb{RP}^n$. Функции из $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ называются **многогранными относительно** $\mathcal{P}$, а функции из $\mathcal{M}$ называются просто **многогранными**.

2. бюфоновы функции. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ – пространство действительных функций f, определенных на E_n таких, что из эквивалентности $e_1 \sim e_2$ относительно $\mathcal{P}$

следует $f(e_1) = f(e_2)$. Другими словами, пространство $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ порождается индикаторными функциями I_A, где A изменяется на множестве всех эквивалентных классах относительно $\mathcal{P}$. Определим также $\mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{P}} \mathcal{B}(\mathcal{P})$, где $\mathcal{P}$ изменяется на множестве всех конечных подмножествах пространства $\mathbb{RP}^n$. Функции из $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ называются **бюфоновыми относительно** $\mathcal{P}$, а функции из $\mathcal{B}$ называются просто **бюфоновыми**.

Класс эквивалентности A (относительно $\mathcal{P}$) называется **атомом**, если для каждого $e \in A$ имеем $e \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Множество всех атомов обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Положим $\mathcal{B}_0(\mathcal{P}) = \{f \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \mid e \cap \mathcal{P} = \emptyset \Longrightarrow f(e) = 0\}$.

Мы будем рассматривать $\mathcal{B}_0 = \bigcup_{\mathcal{P}} \mathcal{B}_0(\mathcal{P})$ и факторпространство $\mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. Грубо говоря, последнее состоит из бюфоновых функций, игнорирующих граничные значения.

3. Комбинаторные формулы Амбарцумяна. Пусть $e_0 \in E_n$, $e_0 \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Используя стереографию, мы можем отождествить действительное пространство $\mathbb{R}^n$ с пространством $\mathbb{RP}^n \setminus e_0$, и поэтому e_0 является **гиперплоскостью в бесконечности**. Пусть

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) = \{F \in \mathcal{M}(\mathcal{P}) \mid F \text{ обращается в нуль в некоторой окрестности } e_0\}.$$

Аналогично определяем $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}) \mid e_0 \notin A\}$ и

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) = \{f \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \mid f \text{ обращается в нуль в некоторой окрестности } e_0\}.$$

С каждым $\mathcal{P}$ мы связываем множество k-мерных симплексов $D_k(\mathcal{P})$. k-симплекс определяется как выпуклая оболочка (в $\mathbb{R}^n$) $k+1$ точек из $\mathcal{P}$. Для симплекса $\Delta \in D_k(\mathcal{P})$ полагаем $[\Delta] = \{e \in E_n \mid e \cap \Delta \neq \emptyset\}$. Множество $\mathcal{P}$ называется **регулярным**, если никакие $n+1$ точек из $\mathcal{P}$ не лежат в одной гиперплоскости.

Теорема 1.1. ([3], [4]) **Пусть конечное множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ является регулярным и функция f принадлежит $\mathcal{B}_R(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$.**

1. Если n – четное число, то существуют коэффициенты $r_f(\Delta)$, не зависящие от $e \in E_n$ такие, что

$$f(e) = \frac{1}{2} \sum_{k=1,\ k \text{ нечетно}}^{n-1} \sum_{D_k(\mathcal{P})} r_f(\Delta) I_{[\Delta]}(e).$$

2. Если n – нечетное число, то для любой точки $P \in \mathcal{P}$ существуют коэффициенты $r_f(\Delta)$ и $c_f(\Delta)$, не зависящие от $e \in E_n$ такие, что

$$f(e) = \frac{1}{2} \sum_{k=1,\ k \text{ нечетно}}^{n-2} \sum_{D_k(\mathcal{P}\setminus\{P\})} r_f(\Delta) I_{[\Delta]}(e) + \frac{1}{2} \sum_{k=1,\ k \text{ четно}}^{n} \sum_{P \in \Delta \in D_k(\mathcal{P})} c_f(\Delta) I_{[\Delta]}(e).$$

В обеих случаях коэффициенты вычисляются по алгоритмам из [3], [4].

4. Эйлерова характеристика и преобразование Радона. Напомним используемые свойства эйлеровой характеристики. Эйлерова характеристика $\chi(K)$ определяется для всех (не обязательно выпуклых) многогранников в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{RP}^n$. Она конечно-аддитивна, т.е. для любых непересекающихся $K_1, \dots, K_m$ имеем $\chi(K_1 \cup \dots \cup K_m) = \chi(K_1) + \dots + \chi(K_m)$.

Если K_1 гомеоморфно K_2, то $\chi(K_1) = \chi(K_2)$. Для выпуклых, компактных непустых многогранников и многогранников $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфных им, имеем $\chi(K) = 1$. Для n-мерного проективного пространства $\mathbb{RP}^n$

$$\chi(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть многогранная функция $F \in \mathcal{M}$, определенная в $\mathbb{RP}^n$, принимает значения $F_1, \dots, F_k$ на непересекающихся множествах $A_1, \dots, A_k$. Тогда (см. [5])

$$\int_{\mathbb{RP}^n} F(x)\, d\chi(x) = \sum_{i=1}^{k} F_i\, \chi(A_i)$$

называется интегралом функции $F(x)$ по эйлеровой характеристике. Аналогично, интеграл $\int_{E_n} f(e)\, d\chi(e)$ можно определить для любого $f \in \mathcal{B}$. Это понятие уже использовалось при решении многих задач.

Преобразование Радона многогранной функции $F \in \mathcal{M}$ есть функция F^*, определенная на E_n по формуле

$$F^*(e) = \int_e F(x)\, d\chi(x). \tag{1.1}$$

Преобразование Радона многогранной функции из $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ очевидно принадлежит $\mathcal{B}(\mathcal{P})$. Следовательно, мы имеем отображения $* : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B}$ и $* : \mathcal{M}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P})$.

§2. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА $* : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B}$

В [5] получены формулы для обращения преобразования Радона (1.1) и доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. 1) Если n нечетно, то для любой $f \in \mathcal{B}$ существует единственная функция $F \in \mathcal{M}$ такая, что $F^* = f$ и $F = f^*$, т.е.

$$F(x) = \int_{[x]} f(e)\, d\chi(e),$$

где $[x] \subset E_n$ – пучок гиперплоскостей содержащих точку $x \in \mathbb{RP}^n$.

2) Если n четно, то функция $f \in \mathcal{B}$ представляется в виде $f = F^*$ с $F \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{E_n} f(e)\, d\chi(e) = 0. \tag{2.1}$$

В этом случае $F = -f^* + C = -\int_{[x]} f(e)\, d\chi(e) + C$, где C – константа.

Доказательство легко следует из равенств, которые также будут использоваться ниже. Для любого n имеем

$$f^{**}(e) = \int_e \int_{[z]} f(y)\, d\chi(y)\, d\chi(z) = \int_{[z]} \int_e f(y)\, d\chi(z)\, d\chi(y) =$$

$$= f(e)\chi(\{z : z \in e\}) + \int_{e \neq y} f(y)\chi(\{z :\ z \in e,\ z \in y\})\, d\chi(y).$$

Для четного n условие (2.1) необходимо для существования F, и последнее выражение принимает вид $0 + \int_{e \neq y} f(y)\, d\chi(y) = -f(e)$. Если n нечетно, имеем $f^{**}(e) = f(e)$.

§3. ОБРАЩЕНИЕ В ФАКТОРПРОСТРАНСТВЕ

Отображение (0.1) определено, так как преобразование Радона многогранной функции из $\mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$, с точностью до граничных значений, является бюфоновой функцией. Формулы Амбарцумяна в [1], [3], [4] можно интерпретировать как решение соответствующей обратной задачи.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$ существует функция $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$ такая, что равенство $F^* = f$ имеет место в $\mathcal{B}(\mathcal{P})/\mathcal{B}_0(\mathcal{P})$.

Доказательство : Теорема 1.1 дает точный вид функции F, удовлетворяющей требуемому равенству. Именно, если n четно, то

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{n-1} \sum_{D_k(\mathcal{P})} r_f(\Delta) I_\Delta(x),$$

а если n нечетно, то

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{n-2} \sum_{D_k(\mathcal{P}\setminus\{P\})} r_f(\Delta) I_\Delta(x) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ нечетно}}}^{n} \sum_{P \in \Delta \in D_k(\mathcal{P})} c_f(\Delta) I_\Delta(x).$$

§4. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА $\bullet : \mathcal{M}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P})$

Лемма 4.1. Пусть $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ для некоторого конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{RP}^n$. Если n четно, то предполагается, что

$$\int_{E_n} f(x)\, d\chi(x) = 0. \tag{4.1}$$

Если для некоторого $P \in \mathcal{P}$ носитель функции f лежит в множестве $[P] = \{e \in E_n : P \in e\}$, то $f^\bullet \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$.

Доказательство : В случае $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение имеет место для всех $\mathbb{RP}^m$, где $m < n$. Рассмотрим экватор, соответствующий полюсу P, который мы отождествляем с $\mathbb{RP}^{n-1}$. Обозначим через Pr перпендикулярно–проективное отображение $Pr : \mathbb{RP}^n \longmapsto \mathbb{RP}^{n-1}$ на экватор. По Теореме 2.1 функция $f^\bullet$ порождается некоторой многогранной функцией G, определенной на $\mathbb{RP}^{n-1}$: если $x \neq P$, то $f^\bullet(x) = G(Pr(x))$. Не умаляя общности предположим, что

$$f^\bullet(P) = \int_{\mathbb{RP}^{n-1}} G(x)\, d\chi(x).$$

По предположению индукции, имеем $G \in \mathcal{M}(Pr(\mathcal{P} \setminus \{P\}))$, поэтому $f^\bullet \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Лемма 4.1 доказана.

Теперь представим f в виде

$$f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_k} f_{i_1,\dots,i_k}, \quad f_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{B}(\mathcal{P}), \tag{4.2}$$

где носитель функции $f_{i_1,\dots,i_k}$ лежит в множестве $[P_{i_1}] \cap \dots \cap [P_{i_k}]$.

Лемма 4.2. В четномерном случае существуют числа $a(i_1, \dots, i_k)$ и гиперплоскости $e(i_1, \dots, i_k)$ такие, что

$$\int_{E_n} [f_{i_1,\dots,i_k}(e) + a(i_1, \dots, i_k) I_{e(i_1,\dots,i_k)}(e)]\, d\chi(e) = 0, \tag{4.3}$$

$$\left[\sum_{i_1,\dots,i_k} a(i_1, \dots, i_k) I_{e(i_1,\dots,i_k)}\right]^\bullet \in \mathcal{M}(\mathcal{P}). \tag{4.4}$$

Доказательство : Если для гиперплоскостей e_1 и e_2 функции I_{e_1} и I_{e_2} принадлежат $\mathcal{B}(\mathcal{P})$, то функция $I_{e_1} - I_{e_2}$ удовлетворяет условию (4.3) и мы имеем $(I_{e_1} - I_{e_2})^\bullet \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Предположим, что $e(i_1, \dots, i_k)$ содержит точки $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ и $I_{e(i_1,\dots,i_k)} \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. Положим $a(i_1, \dots, i_k) = -\int_{E_n} f_{i_1,\dots,i_k}(e)\, d\chi(e)$. Используя (4.1), получаем $\sum_{i_1,\dots,i_k} a(i_1, \dots, i_k) = 0$. Лемма 4.2 доказана.

Теорема 4.1. 1) Пусть $f \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ для некоторого конечного множества точек $\mathcal{P} \subset \mathbb{RP}^n$ (не обязательно регулярного). Если n нечетно, то f является преобразованием Радона относительно χ некоторой функции $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Если n четно, то аналогичное заключение имеет место при дополнительном предположении (4.1).

2) Многогранная функция $F \in \mathcal{M}$ принадлежит $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ тогда только тогда, когда $F^* \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$.

Доказательство : 1) В случае $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение имеет место для всех $\mathbb{RP}^m$, где $m < n$. Из Теоремы 3.1 следует, что существует функция $\overline{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ такая, что $\overline{F}^* - f \in \mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. Следовательно, достаточно доказать 1) для случая $f \in \mathcal{B}_0(\mathcal{P})$. Представим f в виде суммы (4.2). Если n нечетно, утверждение непосредственно следует из Леммы 4.1 для функций $f_{i_1,\dots,i_k}$. В четномерном случае, по предположению индукции имеем $\left[f_{i_1,\dots,i_k} + a(i_1,\dots,i_k)I_{c(i_1,\dots,i_k)}\right]^* \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Согласно Лемме 4.2 имеем (4.4), и , следовательно, $f^* \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$.

2) Рассмотрим функцию $f = F^* \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. По первой части Теоремы 4.1, $f = G^*$ для некоторого $G \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Из Теоремы 2.1 следует, что G и F отличаются самое большее на постоянную. Следовательно, получаем $F \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Доказательство завершено.

ABSTRACT. The paper considers the properties of Radon transform with respect to Euler characteristic from a combinatorial viewpoint. Two problems of that Radon transform inversion in the spaces of polytopal functions turn out to be closely connected with R. V. Ambartzumian's formulae in Combinatorial integral geometry.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, J.Wiley, Chichester, 1982.
2. P. McMullen, "The polytope algebra", Adv. in Math., vol. 78, pp. 76 – 130, 1989.
3. G. Yu. Panina, "Many-dimensional combinatorial Ambartzumian's formulae", Math. Nachr., vol. 159, pp. 271 – 277, 1992.
4. Г. Ю. Панина, "Многогранные функции и равноразложимость в проективном пространстве", Зап. Науч. Семин. ПОМИ. Геометрия и Топология, том 252, № 3, стр. 213 – 223, 1998.
5. O. Ya. Viro, "Some integral calculus based on Euler characteristic", Topology and Geometry – Rokhlin Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 1346, pp. 127 – 138, 1988.

2 июня 1999

Институт информатики и автоматизации
Российской Академии Наук, Санкт-Петербург
E-mail : panina@iias.spb.su

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34 НОМЕР 6 1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тематическая серия № 1

Страницы

Предисловие редактора серии 6

Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии: Обзор
Р. В. Амбарцумян 7

Функции отрезка в $\mathbb{R}^3$ и порождение мер
А. Н. Давтян 52

Анализ однородных случайных процессов прямых на плоскости методом инвариантного вложения
В. К. Оганян 63

Комбинаторика преобразования Радона эйлеровой характеристикой
Г. Ю. Панина 84

Содержание тома 34 91

ИНТЕГРАЛЬНАЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тематическая серия, № 1

Редактор серии Р. В. Амбарцумян

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Этим выпуском журнал "Известия Академии Наук Армении", серия Математика начинает тематическую серию, посвященную тематически близким предметам ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ (в смысле Бляшке–Сантало–Хадвигера) и СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. Статьи в этой области, имеющие прикладную или статистическую природу, публикуются в ряде периодических изданий. Однако работы в той же области, содержащие математический анализ, несмотря на интенсивное развитие и большой интерес, не имеют признанного места публикации. Выпуском настоящей тематической серии делается попытка изменить эту ситуацию.

Выбор предмета этой серии ни в коей мере не является произвольным. Имеющийся список публикаций "Известий Академии Наук Армении" по Интегральной и Стохастической Геометрии довольно значителен. В частности, наш журнал опубликовал три специальных выпуска (4-ые номера за 1994, 1996 и 1998 годы) под общим названием "Аналитические Результаты Комбинаторной Интегральной Геометрии". Эти три выпуска заслужили самых высоких оценок (так, профессор Дитер Баум из Трирского Университета писал : "Букет блестящих, впечатляющих аналитических результатов ... очень важные, успешные и глубокие математические исследования"). Эти выпуски составляют хорошую начальную основу для тематической серии.

Будущие выпуски тематической серии не будут иметь строгого графика. Их публикация будет зависеть от наличия и готовности материала. Предусматривается строгая процедура рецензирования. Мы планируем опубликовать несколько дополнительных сборников статей, представляющих лучшие исследования по Интегральной и Стохастической Геометрии, ранее опубликованных в нашем журнале.

Редакционная коллегия надеется на положительный резонанс интернационального математического сообщества, включая представление статей к публикации, участие в процессе рецензирования и т.д.. Журнал готов к любому сотрудничеству, направленному на улучшение качества тематической серии.

Рубен В. Амбарцумян — Ереван, ноябрь 1999

Главный редактор

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34 НОМЕРА 1 — 6 1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

НОМЕР

Грубая дифференцируемость гауссовских случайных полей на плоскости
Р. В. Амбарцумян 1

Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии: Обзор
Р. В. Амбарцумян 6

О разрешимости одного интегрального уравнения типа Вольтерра на полуоси
Л. Г. Арабаджян 2

Теорема о трех сферах для гармонических функций
Н. У. Аракелян, Н. Г. Матевосян 3

Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка
А. О. Бабаян 5

Обобщенная квазианалитичность бесконечно дифференцируемых функций
Г. В. Бадалян 4

Локализация спиральных особенностей степенных рядов
Т. Л. Гарибян 5

О безусловной и абсолютной сходимости почти всюду рядов по общей системе Франклина
Г. Г. Геворкян, Г. Л. Микаелян 3

Асимптотическое поведение ошибки прогноза для стационарных случайных последовательностей
М. С. Гиновян 1

Непараметрическое оценивание спектра однородных гауссовских полей
М. С. Гиновян 2

Локально асимптотически нормальные семейства гауссовских распределений
М. С. Гиновян 4

О сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам в метрике L^p, $p > 2$
М. Г. Григорян 1

Примарные идеалы алгебр обобщенных аналитических функций
С. А. Григорян 3

Внутренние автоморфизмы инвариантных относительно переносов алгебр на компактных группах
С. А. Григорян, Т. Н. Панкратева, Т. В. Тонев 5

Функции отрезка в $\mathbb{R}^3$ и порождение мер
А. Н. Давтян 6

Об одной проблеме моментов Хаусдорфа
А. М. Джрбашян 4

Об универсальных рядах по системе Уолша в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$
С. А. Episkoposян 2

Обобщение теоремы Харди-Литтлвуда и оценки для систем Рисса в $\mathbb{R}^{n+1}_+$
М. А. Закарян 1

О коммутативности в банаховой алгебре
И. М. Караханян, М. И. Караханян 4

Аппроксимация решений полуэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$
Г. А. Карапетян, Г. В. Даллакян 4

Задача о собственных значениях для самосопряженных полуэллиптических операторов
Г. А. Карапетян, В. Т. Сардарян, А. П. Крмзян 2

Об оценках производных многочленов многих переменных
Г. Г. Казарян 3

Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов
Ф. Э. Мелик-Адамян 2

Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов с распадающимися граничными условиями
Ф. Э. Мелик-Адамян 3

Подмногообразия с параллельными и полупараллельными структурами
В. А. Мирзоян 5

Корректность граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой
Р. З. Мкртчян, Н. Е. Товмасян 5

Обращение некоторых операторов типа потенциала с особенностями ядер на сфере
В. А. Ногин, А. Н. Карапетянц 1

Метрическая расходимость тригонометрических рядов Фурье
Р. И. Овсепян 5

Анализ однородных случайных процессов прямых на плоскости методом инвариантного вложения
В. К. Оганян 6

Комбинаторика преобразования Радона Эйлеровой характеристикой
Г. Ю. Панина 6

Асимптотические представления и адиабатические инварианты
Е. А. Тароян 4

О вырождающемся дифференциально-операторном уравнении
Л. П. Тепоян 5

Сложность выводов в одной системе классического исчисления высказываний
А. А. Чубарян 5

Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и вложения пространств
Р. Ф. Шамоян 4

Единственность слабых решений эволюционных уравнений
Р. Л. Шахбагян 3

Задача управления для корректных по Петровскому уравнений с переменными коэффициентами
Р. Л. Шахбагян, Л. Г. Тоноян 5