

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Առաքելյան

Գ.Գ. Գևորգյան

Վ.Ս. Զաքարյան

Ա.Ա. Թալալյան

Ն.Ե. Թովմասյան

Վ.Ա. Սարտիրոսյան

Ս.Ն. Սերգելյան

Բ.Ս. Նահապետյան

Ա.Բ. Ներսիսյան

Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա.Գ. Զամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Ս.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян

Г.Г. Геворкян

В.С. Закарян

А.Г. Камалян

В.А. Мартиросян

С.Н. Мергелян

Б.С. Нагапетян

А.Б. Нерсисян

А.А. Тагалян

Н.Е. Товмасян

Р.Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь

М.А. Оганесян

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. О. Бабаян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 5, 1999

В статье изучается однозначная разрешимость задачи Дирихле для некоторого класса правильно эллиптических уравнений четвертого порядка. Найдены как необходимые и достаточные условия, так и достаточные условия, при которых соответствующая задача однозначно разрешима.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости с границей $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. В области D рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^4 A_k \frac{\partial^4 U}{\partial x^k \partial y^{4-k}} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1.1)$$

где A_k – произвольные постоянные, $A_0 \neq 0$. Мы ищем решение U в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций в D , которые вместе с первыми производными удовлетворяет условию Гельдера в $D \cup \Gamma$. На границе Γ функция $U(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям Дирихле

$$\begin{aligned} U|_{\Gamma} &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{\Gamma} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где f и g – некоторые функции, определенные на Γ , которые вместе с $\frac{df}{ds}$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ , а $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{d}{ds}$ – производные по радиусу и по длине дуги Γ соответственно. Предположим, что уравнение (1.1) правильно эллиптическое, т.е. корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ характеристического уравнения

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0 \quad (1.3)$$

удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_4 < 0. \quad (1.4)$$

Задача (1.1), (1.2) – фредгольмова, см. [1]. В настоящей статье мы получаем необходимые и достаточные условия, при которых задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Наш основной результат относится к случаю $\lambda_1 = i$. Случай $\lambda_1 \neq i$ коротко обсуждается в §5.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перепишем уравнение (1.1) и граничное условие (1.2) в комплексной форме, полагая

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Уравнение (1.1) преобразуется следующим образом :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) U = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\mu_2 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i}, \quad \mu_3 = -\frac{\lambda_3 + i}{\lambda_3 - i}, \quad \mu_4 = -\frac{\lambda_4 + i}{\lambda_4 - i}.$$

Отметим, что из условий (1.4) следуют неравенства $|\mu_k| < 1$, $k = 2, 3, 4$. Из граничных условий (1.2) получим

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \Big|_{\Gamma} = F_1(x, y) \equiv \frac{x - iy}{2} \left(g(x, y) - i \frac{df}{ds}(x, y) \right), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{\Gamma} = F_2(x, y) \equiv \frac{x + iy}{2} \left(g(x, y) + i \frac{df}{ds}(x, y) \right), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2.3)$$

$$U(1, 0) = f(1, 0). \quad (2.4)$$

В следующей теореме положим $\delta = \mu_2 \mu_3$ и $\gamma = \mu_2 \mu_4$.

Теорема 1. Задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия :

I) $\mu_2 = 0$,

II) $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 = \mu_4$ и

$$a_k = 1 + (k - 1)\delta^k - k\delta^{k-1} \neq 0, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (2.5)$$

III) $\mu_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq \mu_4$ и

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 3, 4, \dots \quad (2.6)$$

Замечание 1. Из условия $|\mu_k| < 1$ следует $|\delta| < 1$ и $|\gamma| < 1$. Следовательно, при любых δ и γ условия (2.5) и (2.6) выполняются при достаточно больших k .

Следствие 1. Если выполняется одно из условий

1. $\mu_3 = 0$,
2. $|\mu_2| < 1/2$,
3. $\mu_3 = \mu_4$ и $|\mu_3| < 1/2$,
4. $\mu_3 = \mu_4$ и $\mu_2\mu_3 > 0$,
5. $\mu_3 \neq \mu_4$, $\mu_2\mu_4 > 0$ и $\mu_2\mu_3 > 0$,

то задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Если $\mu_3 \neq 0$ или $|\mu_2| > 1/2$, то существуют триады μ_2, μ_3, μ_4 , при которых задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой.

Следствие 2. Пусть при $\mu_k = \mu_k^0$, $k = 2, 3, 4$ задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Тогда в любой окрестности точки $(\mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0) \in \mathbb{C}^3$ существует точка $(\mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ такая, что при $\mu_k = \mu_k^*$, $k = 2, 3, 4$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

При доказательстве перечисленных утверждений используются представления аналитических функций в окрестности единичной окружности. Пусть μ и ν — комплексные числа такие, что $|\mu| < 1$ и $|\nu| < 1$. Обозначим через D_1 и D_2 образы единичного круга D при отображениях $\zeta = z + \mu\bar{z}$ и $\zeta = \bar{z} + \nu z$ соответственно. Пусть функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ аналитичны и непрерывны до границ в D_1 и D_2 соответственно. Известно (см. [1]), что при $|z| = 1$ функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ допускают представления

$$\varphi(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad \psi(\bar{z} + \nu z) = \rho(\bar{z}) + \rho(\nu z), \quad |z| = 1, \quad (2.7)$$

где $\omega(z)$ и $\rho(z)$ — аналитические функции в единичном круге. В области D при $|z| \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(z + \mu\bar{z}) &= \omega(1/2(z + \mu\bar{z} + \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})) + \omega(1/2(z + \mu\bar{z} - \sqrt{(z + \mu\bar{z})^2 - 4\mu})), \\ \psi(\bar{z} + \nu z) &= \rho(1/2(\bar{z} + \nu z + \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})) + \rho(1/2(\bar{z} + \nu z - \sqrt{(\bar{z} + \nu z)^2 - 4\nu})). \end{aligned}$$

Здесь выбрана ветвь функции $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, непрерывная вне отрезка $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяющая условию $\frac{1}{\zeta}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \rightarrow 1$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Если функции $\varphi'(\zeta)$ и $\psi'(\zeta)$ непрерывны до границы областей D_1 и D_2 соответственно, то

$$\varphi'(z + \mu\bar{z}) = X(z) + X(\mu\bar{z}), \quad \psi'(\bar{z} + \nu z) = Z(\bar{z}) + Z(\nu z), \quad |z| = 1, \quad (2.8)$$

где $X(z)$ и $Z(z)$ — аналитические функции в D .

Лемма 1. Пусть функции φ и ψ аналитичны и непрерывны вместе с производными первого порядка в замыкании областей D_1 и D_2 соответственно. Если они удовлетворяют условиям (2.7) и (2.8), то в единичном круге D имеем

$$\omega'(z) = \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X(z) + X(0) + \frac{\mu}{z^2} X(0) + \frac{\mu}{z} X'(0), \quad |z| < 1, \quad (2.9)$$

$$\rho'(z) = \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) Z(z) + Z(0) + \frac{\mu}{z^2} Z(0) + \frac{\mu}{z} Z'(0), \quad |z| < 1. \quad (2.10)$$

Доказательство : Докажем (2.9). Для функции φ соотношения (2.7) и (2.8) можно представить в виде

$$\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \omega(z) + \omega\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad \varphi'\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = X(z) + X\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad |z| = 1. \quad (2.11)$$

Так как $z + \frac{\mu}{z} \in D_1$ при $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$, равенства (2.11) выполняются также в кольце $\sqrt{|\mu|} < |z| < 1$. Следовательно, дифференцируя первое равенство в (2.11) по z , получим

$$\left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) \varphi'\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \omega'(z) - \frac{\mu}{z^2} \omega'\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad \sqrt{|\mu|} < |z| < 1.$$

Подставляя φ' из второго равенства в (2.11) в последнее соотношение, получим

$$\left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X_1(z) + \frac{\mu}{z} X'(0) + \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X_1\left(\frac{\mu}{z}\right) - \frac{\mu}{z} X'(0) = \omega_1(z) - \frac{\mu}{z^2} \omega_1\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad (2.12)$$

где $X_1(z) = X(z) - X(0)$, $\omega_1(z) = \omega'(z) - 2X(0)$.

Приравнявая слагаемые в (2.12), аналитические при $|z| < 1$ и при $|z| > 1$, получим

$$\omega_1(z) = \left(1 - \frac{\mu}{z^2}\right) X_1(z) + \frac{\mu}{z} X'(0).$$

Переходя к функциям $\omega'(z)$ и $X(z)$, завершаем доказательство (2.9). Аналогично доказывается равенство (2.10). Лемма 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

I. Сначала предположим, что $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Общее решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \bar{z}\Psi_2(z) + \Psi_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \Psi_4(\bar{z} + \mu_4 z), \quad (3.1)$$

где $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ — аналитические функции в области D , а функции $\Psi_3(z)$ и $\Psi_4(z)$ аналитичны в образах области D при отображениях $\zeta = \bar{z} + \mu_3 z$ и $\zeta = \bar{z} + \mu_4 z$, соответственно. Подставляя (3.1) в граничные условия (2.2) и (2.3), получим

$$\Psi_1'(z) + \bar{z}\Psi_2'(z) + \mu_3\Psi_3'(\bar{z} + \mu_3 z) + \mu_4\Psi_4'(\bar{z} + \mu_4 z) = F_1(x, y), \quad (3.2)$$

$$\Psi_2(z) + \Psi'_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \Psi'_4(\bar{z} + \mu_4 z) = F_2(x, y), \quad z = x + iy, \quad |z| = 1. \quad (3.3)$$

Представим функции Ψ'_3 и Ψ'_4 в виде

$$\Psi'_3(\bar{z} + \mu_3 z) = \omega_3(\bar{z}) + \omega_3(\mu_3 z), \quad \Psi'_4(\bar{z} + \mu_4 z) = \omega_4(\bar{z}) + \omega_4(\mu_4 z), \quad |z| = 1, \quad (3.4)$$

где $\omega_3(z)$ и $\omega_4(z)$ суть аналитические функции в D . Так как функции P_1 и F_2 удовлетворяют условию Гельдера на Γ , то они разлагаются в равномерно сходящийся ряд Фурье [2]. Таким образом, при $|z| = 1$

$$F_1(x, y) = G_1(z) + G_2(\bar{z}), \quad F_2(x, y) = H_1(z) + H_2(\bar{z}), \quad (3.5)$$

где функции

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad G_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k, \quad H_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad H_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} z^k$$

аналитичны в D и удовлетворяют условиям

$$G_2(0) = c_0 = H_2(0) = d_0 = 0, \quad G'_2(0) = c_{-1} = d_1 = H'_1(0). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.2) и (3.3), получим

$$\Psi'_1(z) + \frac{1}{z} \Psi'_2(z) + \mu_3 \omega_3(1/z) + \mu_3 \omega_3(\mu_3 z) + \mu_4 \omega_4(1/z) + \mu_4 \omega_4(\mu_4 z) = G_1(z) + G_2(1/z),$$

$$\Psi_2(z) + \omega_3(1/z) + \omega_3(\mu_3 z) + \omega_4(1/z) + \omega_4(\mu_4 z) = H_1(z) + H_2(1/z), \quad |z| = 1.$$

Выделяя слагаемые, допускающие аналитическое продолжение в D и вне единичного круга и используя теорему Лиувилля, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \Psi'_2(0) + \mu_3 \omega_3(1/z) + \mu_4 \omega_4(1/z) &= G_2(1/z) + c_1, \quad |z| > 1, \\ \omega_3(1/z) + \omega_4(1/z) &= H_2(1/z) + c_2, \quad |z| > 1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\Psi'_1(z) + \frac{1}{z} (\Psi'_2(z) - \Psi'_2(0)) + \mu_3 \omega_3(\mu_3 z) + \mu_4 \omega_4(\mu_4 z) = G_1(z) - c_1, \quad |z| < 1,$$

$$\Psi_2(z) + \omega_3(\mu_3 z) + \omega_4(\mu_4 z) = H_1(z) - c_2, \quad |z| < 1,$$

где постоянные c_1 и c_2 будут определены ниже. С учетом (3.6) и (3.7) решение задачи (1.1), (2.2), (2.3) находится с точностью до постоянного, а затем определяется из (2.4) единственным образом. Таким образом, при предположении $\mu_2 = 0$, $\mu_3 \neq \mu_4$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

Если $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = \mu_4$, то общее решение задачи (1.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \bar{z} \Psi_2(z) + \Psi_3(\bar{z} + \mu_3 z) + z \Psi_4(\bar{z} + \mu_3 z),$$

и однозначная разрешимость следует из аналогичных рассуждений.

II. Теперь предположим, что $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_3 = \mu_4$. В этом случае общее решение задачи (1.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \Psi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \Psi_3(\bar{z} + \mu_3 z) + z \Psi_4(\bar{z} + \mu_3 z), \quad (3.8)$$

где $\Psi_1(z)$ аналитична в D , $\Psi_2(z)$ аналитична в D_1 , а $\Psi_3(z)$ и $\Psi_4(z)$ аналитичны в D_2 (D_1 и D_2 — образы области D при отображениях $\zeta = z + \mu_2 \bar{z}$ и $\zeta = \bar{z} + \mu_3 z$ соответственно). Не умаляя общности, предположим, что $\Psi_4(0) = 0$. Подставляя (3.8) в (2.2) и (2.3), получим систему

$$\begin{cases} \Psi_1'(z) + \Psi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) + \mu_3 \Psi_3'(\bar{z} + \mu_3 z) + \\ + z \mu_4 \Psi_4'(\bar{z} + \mu_3 z) + \Psi_4(\bar{z} + \mu_3 z) = F_1(x, y), \\ \mu_2 \Psi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) + \Psi_3'(\bar{z} + \mu_3 z) + z \Psi_4'(\bar{z} + \mu_3 z) = F_2(x, y), \end{cases} \quad z = x + iy, \quad |z| = 1. \quad (3.9)$$

Представим функции Ψ_2' , Ψ_3' , Ψ_4 и Ψ_4' на Γ с помощью аналитических функций $\omega_k(z)$, $k = 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} \Psi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) &= \omega_2(z) + \omega_2(\mu_2 \bar{z}), & \Psi_3'(\bar{z} + \mu_3 z) &= \omega_3(\bar{z}) + \omega_3(\mu_3 z), \\ \Psi_4'(\bar{z} + \mu_3 z) &= \omega_4(\bar{z}) + \omega_4(\mu_3 z), & \Psi_4(\bar{z} + \mu_3 z) &= \omega_5(\bar{z}) + \omega_5(\mu_3 z). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из равенства (2.10) следует

$$\omega_5'(z) = \left(1 - \frac{\mu_3}{z^2}\right) \omega_4(z) + \omega_4(0) + \frac{\mu_3}{z^2} \omega_4(0) + \frac{\mu_3}{z^2} \omega_4'(0), \quad |z| < 1. \quad (3.11)$$

Из условия $\Psi_4(0) = 0$ следует, что $\omega_5(0) = 0$. Подставляя (3.5) и (3.10) в (3.9), получим

$$\begin{aligned} &\Psi_1'(z) + \omega_2(z) + \omega_2(\mu_2/z) + \mu_3 \omega_3(1/z) + \mu_3 \omega_3(\mu_3 z) + \\ &+ z \mu_3 \omega_4(1/z) + z \mu_3 \omega_4(\mu_3 z) + \omega_5(1/z) + \omega_5(\mu_3 z) = G_1(z) + G_2(1/z), \quad |z| = 1, \\ &\mu_2 \omega_2(z) + \mu_2 \omega_2(\mu_2/z) + \omega_3(1/z) + \omega_3(\mu_3 z) + z \omega_4(1/z) + z \omega_4(\mu_3 z) = H_1(z) + H_2(1/z). \end{aligned}$$

Выделяя слагаемые, допускающие аналитическое продолжение как в область D , так и вне ее и используя теорему Лиувилля, получим

$$\Psi_1'(z) + \omega_2(z) + \mu_3 \omega_3(\mu_3 z) + z \mu_3 \omega_4(0) + z \mu_3 \omega_4(\mu_3 z) + \omega_5(\mu_3 z) = G_1(z), \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \omega_2(\mu_2/z) + \mu_3 \omega_3(1/z) + z \mu_3 [\omega_4(1/z) - \omega_4(0)] + \omega_5(1/z) = G_2(1/z), \\ \mu_2 \omega_2(\mu_2/z) + \omega_3(1/z) + z [\omega_4(1/z) - \omega_4(0)] = H_2(1/z), \\ \mu_2 \omega_2(z) + \omega_3(\mu_3 z) + z \omega_4(0) + z \omega_4(\mu_3 z) = H_1(z). \end{cases} \quad (3.13)$$

Для того, чтобы решить систему (3.13), разложим аналитические функции $\omega_k(z)$, $k = 2, 3, 4, 5$ в ряды по степеням z . Из (3.11) и $\omega_5(0) = 0$ получим

$$\omega_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{i,k} z^k, \quad i = 2, 3, 4,$$

$$\omega_5(z) = (2A_{4,0} - \mu_3 A_{4,1})z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} (A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}) z^k. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.5) и (3.14) в (3.13), приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях z и используя (3.6), получим

$$A_{2,0} + \mu_3 A_{3,0} + \mu_3 A_{4,1} = 0, \quad \mu_2 A_{2,0} + A_{3,0} + A_{4,1} = 0, \quad \mu_2 A_{2,0} + A_{3,0} = c_1, \quad (3.15)$$

$$\mu_2 A_{2,1} + \mu_3 A_{3,1} + 2A_{4,0} = d_1, \quad \mu_2^2 A_{2,1} + A_{3,1} + A_{4,2} = d_{-1}, \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \mu_2^k A_{2,k} + \mu_3 A_{3,k} + \mu_3 A_{4,k+1} + \frac{1}{k} (A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}) = c_{-k}, \\ \mu_2^{k+1} A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k+1} = d_{-k}, \\ \mu_3 A_{2,k} + \mu_3^k A_{3,k} + \mu_3^{k-1} A_{4,k-1} = d_k, \end{cases} \quad k \geq 2. \quad (3.17)$$

Коэффициенты $A_{2,0}$, $A_{3,0}$ и $A_{4,1}$ можно однозначно определить из (3.15). Решая систему (3.17), получим

$$\frac{a_k}{k(1-\delta^k)} (A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}) = c_{-k} - d_{-k} \frac{\mu_3(1-\delta^{k-1})}{1-\delta^k} - d_k \frac{\mu_2^{k-1}(1-\delta)}{1-\delta^k}, \quad (3.18)$$

где a_k определяются из (2.5). Если $a_k \neq 0$ при $k \geq 2$, то коэффициенты $A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1}$ определяются однозначно из (3.18).

Рассмотрим однородную задачу (3.15) – (3.17). При выполнении условий (2.5) из (3.18) получим

$$A_{4,k-1} - \mu_3 A_{4,k+1} = 0, \quad k \geq 2. \quad (3.19)$$

Отсюда и из (3.15) следует, что $A_{4,2k+1} = 0$ при $k \geq 0$. Если $A_{4,2} = c \neq 0$, то из (3.19) получим $A_{4,2k} = c\mu_3^{-k}$ при $k \geq 1$. Это невозможно, так как ряд $\omega_4(z)$ сходится при $|z| < 1$. Таким образом, $A_{4,2k} = 0$ при $k \geq 1$, и следовательно из (3.17) имеем $A_{2,k} = A_{3,k} = 0$ при $k \geq 2$. Решая однородные уравнения (3.15) – (3.17), получаем

$$A_{2,0} = A_{3,0} = A_{4,1} = 0, \quad A_{2,k} = A_{3,k} = A_{4,k} = 0, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$A_{4,0} = c, \quad A_{3,1} = \frac{2c\mu_2}{1-\delta}, \quad A_{2,1} = -\frac{2c}{\mu_2(1-\delta)}.$$

Используя полученные значения $A_{j,k}$ и однородное условие (2.4), в силу (3.12) и (3.14) заключаем, что при $a_k \neq 0$, $k = 3, 4, \dots$ однородная задача (1.1), (1.2) (при $f \equiv g \equiv 0$) не имеет нетривиальных решений. Следовательно, неоднородная задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

Предположим теперь, что $a_k = 0$ при $k = k_1, \dots, k_s$. Тогда однородная задача (1.1), (1.2) имеет s линейно независимых решений $U_{k_1}, \dots, U_{k_s}$, каждое из которых является многочленом степени $k_j + 1$, $j = 1, \dots, s$, и однозначная разрешимость неоднородной задачи (1.1), (1.2) не имеет места.

Замечание 2. Заметим, что из (3.18) следуют необходимые условия для разрешимости неоднородной задачи (1.1), (1.2) :

$$c_{-k} - d_{-k} \frac{\mu_3(1 - \delta^{k-1})}{1 - \delta^k} - d_k \frac{\mu_2^{k-1}(1 - \delta)}{1 - \delta^k} = 0, \quad k = k_1, \dots, k_s.$$

Эти условия линейно независимы и являются также достаточными для разрешимости задачи (1.1), (1.2) (в этом случае однородная задача (1.1), (1.2) имеет точно s линейно независимых решений).

III. Теперь рассмотрим случай, когда $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$U = \Psi_1(z) + \Psi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \Psi_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \Psi_4(\bar{z} + \mu_4 z),$$

где $\Psi_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$ аналитичны в соответствующих областях. Граничные условия (2.2) и (2.3) примут вид

$$\begin{aligned} \Psi'_1(z) + \Psi'_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \mu_3 \Psi'_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \mu_4 \Psi'_4(\bar{z} + \mu_4 z) &= F_1(x, y), \\ \mu_2 \Psi'_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \Psi'_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \Psi'_4(\bar{z} + \mu_4 z) &= F_2(x, y), \quad z = x + iy, \quad |z| = 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При $z \in \Gamma$ функции Ψ'_k , $k = 2, 3, 4$ допускают представление

$$\begin{aligned} \Psi'_2(z + \mu_2 \bar{z}) &= \omega_2(z) + \omega_2(\mu_2 \bar{z}), \quad \Psi'_3(\bar{z} + \mu_3 z) = \omega_3(\bar{z}) + \omega_3(\mu_3 z), \\ \Psi'_4(\bar{z} + \mu_4 z) &= \omega_4(\bar{z}) + \omega_4(\mu_4 z), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $\omega_k(z)$ и $\Psi'_1(z)$ аналитичны в D с разложениями Тейлора

$$\Psi'_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{1,k} z^k, \quad \omega_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} z^k, \quad j = 2, 3, 4. \quad (3.22)$$

Здесь $A_{j,k}$ — комплексные постоянные, подлежащие определению. Подставляя (3.21) и (3.22) в (3.20) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$, получим следующую линейную систему относительно $A_{j,k}$:

$$\begin{cases} A_{1,0} + 2A_{2,0} + 2\mu_3 A_{3,0} + 2\mu_4 A_{4,0} = c_0, \\ 2\mu_2 A_{2,0} + 2A_{3,0} + 2A_{4,0} = d_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$A_{1,k} = c_k - A_{2,k} - \mu_3^{k+1} A_{3,k} - \mu_4^{k+1} A_{4,k}, \quad k \geq 1, \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \mu_2 A_{2,k} + \mu_3^k A_{3,k} + \mu_4^k A_{4,k} = d_k, \\ \mu_2^k A_{2,k} + \mu_3 A_{3,k} + \mu_4 A_{4,k} = c_{-k}, \\ \mu_2^{k+1} A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k} = d_{-k}, \end{cases} \quad k \geq 1. \quad (3.25)$$

Отметим, что по (3.6) первые два уравнения в (3.25) совпадают при $k = 1$. Следовательно, эта система, так же как и система (3.23) всегда разрешима. Эти системы однозначно неразрешимы, однако их решения дают только нетривиальное решение задачи (1.1), (1.2). Следовательно, для определения условий однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2), достаточно рассмотреть (3.25) при $k \geq 2$. Детерминант этой системы равен Δ_k , $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_3^k & \mu_4^k \\ \mu_2^k & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (\mu_2 \mu_3)^k & (\mu_2 \mu_4)^k \\ 1 & \mu_2 \mu_3 & \mu_2 \mu_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_k.$$

Как детерминант Вандермонда, $\Delta_2 \neq 0$. Следовательно, при выполнении (2.6), для произвольных c_k, d_k можно однозначно определить $A_{j,k}$, $j = 2, 3, 4$ из (3.25). Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2).

Для доказательства необходимости этих условий заметим, что если $\Delta_k = 0$, то соответствующая однородная система (3.25) (при $c_k \equiv d_k \equiv 0$) имеет нетривиальное решение $A_{j,k}$, $j = 2, 3, 4$, порождающее одно линейно независимое решение $U_k(x, y)$ однородной задачи (1.1), (1.2). Заметим, что $U_k(x, y)$ является многочленом по x и y порядка $k + 1$. (Например, если корни характеристического уравнения (1.3) удовлетворяют условию $\mu_2(\mu_3 + \mu_4) = -1$, то $\Delta_3 = 0$ и функция $U_3(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ является нетривиальным решением соответствующей однородной задачи (1.1), (1.2)).

Таким образом, если $\Delta_k = 0$ при $k = k_1, \dots, k_n$, то однородная задача (1.1), (1.2) имеет n линейно независимых решений. Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Замечание 3. Аналогично Замечанию 2, если $\Delta_k = 0$ при $k = k_1, \dots, k_n$, то для разрешимости неоднородной задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно выполнение следующих условий :

$$\mu_2 c_{-k} \frac{\delta^k - \gamma^k}{\delta - \gamma} + d_{-k} \frac{\delta \gamma^k - \gamma \delta^k}{\delta - \gamma} = d_k \mu_2^k, \quad k = k_1, \dots, k_n,$$

где c_k, d_k — коэффициенты Фурье функций F_1 и F_2 .

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СЛЕДСТВИЙ

Доказательство Следствия 1. Предположим, что $\mu_2 \neq 0$.

1. Пусть $\mu_3 = 0$. Если $\mu_4 = \mu_3 = 0$, то $\delta = \mu_2\mu_3 = 0$, и следовательно из (2.5) вытекает, что $a_k = 1$ при $k \geq 3$. Поэтому однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2) опять следует из Теоремы 1. Пусть теперь $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_4 \neq \mu_3$. Имеем $\delta = \mu_2\mu_3 = 0$ и $\gamma = \mu_2\mu_4 \neq 0$. Следовательно, (2.6) можно записать в виде

$$\Delta_k = \gamma^k - \gamma = \gamma(\gamma^{k-1} - 1), \quad k = 3, 4, \dots$$

Учитывая неравенство $|\gamma| < 1$ можем заключить, что $\Delta_k \neq 0$ при $k \geq 3$, т.е. задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Таким образом, первое утверждение Следствия 1 доказано.

2. Для доказательства второго и третьего утверждений Следствия 1 отметим, что если $\mu_2 \neq 0$ и $\mu_4 \neq \mu_3$, то детерминант

$$\Delta_k = (\delta - \gamma)[1 - (\delta^{k-1} + \delta^{k-2}\gamma + \dots + \gamma^{k-1}) + \delta\gamma(\delta^{k-2} + \delta^{k-3}\gamma + \dots + \gamma^{k-2})], \quad k = 3, 4, \dots$$

отличен от нуля тогда и только тогда, когда

$$P_k(\delta, \gamma) = 1 - (\delta^{k-1} + \delta^{k-2}\gamma + \dots + \gamma^{k-1}) + \delta\gamma(\delta^{k-2} + \delta^{k-3}\gamma + \dots + \gamma^{k-2}) \neq 0. \quad (4.1)$$

Если $|\mu_2| < 1/2$, то из $|\mu_k| < 1$ имеем $x = \max(|\delta|, |\gamma|) < 1/2$. При $k \geq 3$ имеем

$$|P_k(\delta, \gamma)| \geq h(k, x) \equiv 1 - kx^{k-1} - (k-1)x^k. \quad (4.2)$$

Далее

$$h(3, x) = 1 - 3x^2 - 2x^3 = (x+1)^2(1-2x) > 0 \quad \text{при } x < \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

При $k \geq 3$ имеем

$$\frac{\partial h(k, x)}{\partial k} = x^{k-1} \left[(x(k-1) + k) \ln \frac{1}{x} - (1+x) \right] > x^{k-1} (3 \ln 2 - 3/2) > 0, \quad x < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $k \geq 3$ и $x \in (0, 1/2)$, функция $h(k, x)$ возрастает по k . Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$|P_k(\delta, \gamma)| \geq h(k, x) \geq h(3, x) > 0, \quad x \in (0, 1/2). \quad (4.4)$$

Таким образом, условия (2.6) выполняются и следовательно задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Пусть теперь $\mu_3 = \mu_4$. Из (2.5) и (4.1) получим $a_k = P_k(\delta, \delta)$. Следовательно, если $|\mu_2| < 1/2$ или $|\mu_3| < 1/2$, то имеем $|\delta| < 1/2$, и из (4.4) вытекает

$$|a_k| = |P_k(\delta, \delta)| > h(3, |\delta|) > 0, \quad k \geq 3,$$

т.е. задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

3. Для доказательства утверждений 4 и 5 Следствия 1 заметим, что в силу (2.5) и (2.6) имеем

$$a_k = (\delta - 1)^2 [1 + 2\delta + \dots + (k-1)\delta^{k-2}], \quad k = 3, 4, \dots, \quad (4.5)$$

$$\Delta_k = (\delta - 1)(\gamma - 1)(\delta - \gamma) \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} (\delta^j + \delta^{j-1}\gamma + \dots + \delta\gamma^{j-1} + \gamma^j) \right]. \quad (4.6)$$

Следовательно, если $\mu_4 = \mu_3$ и $\delta = \mu_2\mu_3 > 0$, то согласно (4.5) получаем $a_k > (\delta - 1)^2 \neq 0$ при $k \geq 3$. Если $\mu_4 \neq \mu_3$, то $\delta \neq \gamma$, и согласно (4.6) получим $\Delta_k \neq 0$ при $\delta, \gamma > 0$ и $k \geq 3$. Этим доказывается однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2).

4. Пусть $|\mu_2| > 1/2$. Если $\mu_4 = \mu_3 = -1/2\mu_2$, то $\delta = \mu_2\mu_3 = -1/2$ и $|\mu_3| < 1$. Из (2.5) имеем $a_3 = 0$, и следовательно задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Вернемся к случаю $\mu_3 \neq \mu_4$. Сначала рассмотрим $P_{2k+1}(\delta, \gamma)$ при отрицательных значениях δ и γ . Отметим, что функция

$$X(\delta) \equiv P_{2k+1}(\delta, \delta) = 1 + 2k\delta^{2k+1} - (2k+1)\delta^{2k}$$

имеет единственный корень δ_0 на отрезке $[-1, 0]$. Действительно, имеем

$$P_{2k+1}(0, 0) = 1, \quad P_{2k+1}(-1, -1) = -4k < 0,$$

$$\frac{d}{d\delta} P_{2k+1}(\delta, \delta) = 2k(2k+1)\delta^{2k-1}(\delta - 1) > 0, \quad \delta \in [-1, 0].$$

Если $\delta_1 \in (-1, \delta_0) \cup (\delta_0, 0)$, то

$$P_{2k+1}(\delta_1, 0) = 1 - \delta_1^{2k} > 0, \quad P_{2k+1}(\delta_1, -1) = -2(|\delta_1|^{2k} + |\delta_1|^{2k-1} + \dots + |\delta_1|) < 0. \quad (4.7)$$

Следовательно, по теореме Коши существует точка $\gamma \in (-1, 0)$ такая, что $P_{2k+1}(\delta_1, \gamma_1) = 0$. Так как $\delta_1 \neq \delta_0$, то имеем $\delta_1 \neq \gamma_1$. Отметим также, что $\gamma_1 \rightarrow \delta_0$, если $\delta_1 \rightarrow \delta_0$, $\gamma_1 \rightarrow -1$, если $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\gamma_1 \rightarrow 0$, если $\delta_1 \rightarrow -1$.

Пусть $\mu_3 \neq 0$. Если $\delta_1 \rightarrow -|\mu_3|$, то $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1^*$ и $|\gamma_1^*| < 1$, так как $0 < |\mu_3| < 1$. Таким образом, если $\delta_1 \rightarrow -|\mu_3|$, то предел отношения δ_1/γ_1 существует и больше $|\mu_3|$. Следовательно можно выбрать δ_1 , удовлетворяющее неравенствам $|\delta_1| < |\mu_3| < |\delta_1|/|\gamma_1|$. Учитывая $\gamma_1 \neq \delta_1$, получим $|\mu_2| = |\delta_1\mu_3^{-1}| < 1$, $|\mu_4| = |\gamma_1\mu_3\delta_1^{-1}| < 1$. $\mu_3 \neq \mu_4$. Тогда, при таких μ_2 и μ_4 задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Следствие 1 доказано.

Доказательство Следствия 2. Предположим, что при $\mu_k = \mu_k^0$, $k = 2, 3, 4$ задача (1.1), (1.2) не является однозначно разрешимой. Положим $\delta_0 = \mu_2^0 \mu_3^0$, $\gamma_0 = \mu_2^0 \mu_4^0$, $r = |\gamma_0 - \delta_0|$, $\alpha = \max(|\delta_0|, |\gamma_0|)$. Из доказанных выше утверждений следует, что $r > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Поэтому для любой точки (δ, γ) из окрестности

$$U = \{(\delta, \gamma) \in \mathbb{C}^2 : |\delta - \delta_0| < \epsilon, |\gamma - \gamma_0| < \epsilon\}, \quad 0 < \epsilon < \min\left(\frac{r}{3}, \frac{1-\alpha}{2}\right) \quad (4.8)$$

имеем $|\delta - \gamma| < r/3$. При любых $(\delta, \gamma) \in U$

$$\Delta_k(\delta, \gamma) \neq 0 \quad \text{при } k \geq N, \quad (4.9)$$

где N достаточно велико. Положим

$$\varphi(\delta, \gamma) = \prod_{k=2}^{N-1} \Delta_k(\delta, \gamma).$$

Легко проверить, что $\varphi(\delta, \gamma)$ — отличный от нуля многочлен от комплексных переменных δ, γ , обращающийся в нуль в точке (δ_0, γ_0) . Следовательно, в любой окрестности точки (δ_0, γ_0) (в частности в окрестности U) существует точка (δ^*, γ^*) такая, что $\varphi(\delta^*, \gamma^*) \neq 0$. Отсюда, вместе с соотношением (4.9) вытекает $\Delta_k(\delta^*, \gamma^*) \neq 0$, $k = 2, 3, 4$. Выбирая μ_k^* , $k = 2, 3, 4$ так, чтобы $\delta^* = \mu_2^* \mu_3^*$, $\gamma^* = \mu_2^* \mu_4^*$ и учитывая, что число ϵ в (4.8) может быть выбрано сколь угодно малым, завершаем доказательство Следствия 2.

§5. СЛУЧАЙ $\lambda_1 \neq i$

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) в случае $\lambda_k \neq i$, $k = 1, 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$.

Уравнение (2.1) в этом случае примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} - \mu_4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) U = 0,$$

где $|\mu_k| < 1$, $k = 1, 2, 3, 4$, и $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_3 \neq \mu_4$, $\mu_1 \mu_2 \neq 0$. Общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$U = \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \varphi_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \varphi_4(\bar{z} + \mu_4 z), \quad |z| < 1, \quad (5.1)$$

где $\varphi_k(\zeta)$ — аналитические функции в D , $z = x + iy \in D$. Подставляя (5.1) в граничные условия (2.2) и (2.3), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) + \mu_3 \varphi_3'(\bar{z} + \mu_3 z) + \mu_4 \varphi_4'(\bar{z} + \mu_4 z) &= F_1(x, y), \\ \mu_1 \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + \mu_2 \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) + \varphi_3'(\bar{z} + \mu_3 z) + \varphi_4'(\bar{z} + \mu_4 z) &= F_2(x, y). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Представим функции φ'_k в виде

$$\varphi'_k(z + \mu_k \bar{z}) = \omega_k(z) + \omega_k(\mu_k \bar{z}), \quad k = 1, 2,$$

$$\varphi'_k(\bar{z} + \mu_k z) = \omega_k(\bar{z}) + \omega_k(\mu_k z), \quad k = 3, 4, \quad |z| = 1,$$

где $\omega_k(z)$ – аналитические функции в D . Разлагая ω_k в ряд Тейлора $\omega_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} z^k$, $j = 1, 2, 3, 4$, и подставляя в (5.2), получим следующую линейную систему для коэффициентов $A_{j,k}$:

$$\begin{cases} A_{1,k} + A_{2,k} + \mu_3^{k+1} A_{3,k} + \mu_4^{k+1} A_{4,k} = c_k, \\ \mu_1 A_{1,k} + \mu_2 A_{2,k} + \mu_3^k A_{3,k} + \mu_4^k A_{4,k} = d_k, \\ \mu_1^k A_{1,k} + \mu_2^k A_{2,k} + \mu_3 A_{3,k} + \mu_4 A_{4,k} = c_{-k}, \\ \mu_1^{k+1} A_{1,k} + \mu_2^{k+1} A_{2,k} + A_{3,k} + A_{4,k} = d_{-k}, \end{cases} \quad k \geq 0. \quad (5.3)$$

Учитывая (3.6), заключаем, что при $k = 0, 1$ система (5.3) всегда разрешима.

Повторяя рассуждения доказательства Теоремы 1 заключаем, что условия

$$\Omega_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu_3^{k+1} & \mu_4^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3^k & \mu_4^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad k \geq 3 \quad (5.4)$$

необходимы и достаточны для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Отметим, что $\Omega_2 \neq 0$ при всех μ_k таких, что $\mu_1 \neq \mu_2$ и $\mu_3 \neq \mu_4$. Предположим, что $|\mu_1| < |\mu_2|$. Имеем $|\beta| \geq 1$, где $\beta = \mu_2 \mu_1^{-1}$. Детерминанты Ω_k можно записать в виде

$$\Omega_k = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{k+1} \begin{vmatrix} \beta^{k+1} & 1 & \delta^{k+1} & \gamma^{k+1} \\ \beta^k & 1 & \delta^k & \gamma^k \\ \beta & 1 & \delta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{k+1} g_k(\beta, \gamma, \delta), \quad k \geq 3.$$

Так как по предположению $\mu_1 \neq 0$, то условия (5.4) выполняются тогда и только тогда, когда

$$g_k(\beta, \gamma, \delta) \neq 0, \quad k \geq 3. \quad (5.5)$$

Из (5.5) можно получить достаточные условия для однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2), аналогичные пункту 2 Следствия 1. Пусть

$$X = \max(|\delta|, |\gamma|) < \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.6)$$

Из (2.6) и (5.5) следует, что

$$g_k(\beta, \gamma, \delta) = \beta^{k+1} \Delta_k - \beta^k \Delta_{k+1} + \beta v_k - \delta \gamma v_{k-1}, \quad k \geq 3, \quad (5.7)$$



где

$$v_k = \begin{vmatrix} 1 & \delta^{k+1} & \gamma^{k+1} \\ 1 & \delta^k & \gamma^k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad k \geq 3.$$

Из (4.4) и (5.6) имеем $|\Delta_k| = |\delta - \gamma| \cdot |P_k(\delta, \gamma)| > |\delta - \gamma|h(3, \varepsilon) > |\delta - \gamma|2\varepsilon$.

Следовательно, согласно (5.7) имеем

$$|g_k(\beta, \gamma, \delta)| > |\beta|^{k+1} |\Delta_k| \left(1 - \frac{|\Delta_{k+1}|}{|\delta - \gamma|2\varepsilon|\beta|} - \frac{|v_k|}{|\delta - \gamma|2\varepsilon|\beta|^k} - \frac{|\delta| \cdot |\gamma| \cdot |v_{k-1}|}{|\delta - \gamma|2\varepsilon|\beta|^{k+1}} \right).$$

Таким образом, $|g_k(\beta, \gamma, \delta)| > 0$ при $k \geq 3$ и $|\beta| > N_\varepsilon$, где

$$N_\varepsilon = \frac{3K}{|\delta - \gamma|2\varepsilon}, \quad K = \max(|\Delta_k|, |v_k|).$$

Итак, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что имеют место неравенства $|\mu_2\mu_3| < 1/2 - \varepsilon$, $|\mu_2\mu_4| < 1/2 - \varepsilon$, $|\mu_2| > N_\varepsilon|\mu_1|$, то задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима.

Автор благодарен проф. Н. Е. Товмасьяну за постановку задачи и ценные замечания.

ABSTRACT. The paper studies the unique solvability of Dirichlet problem for some class of fourth order properly elliptic equations. Necessary and sufficient conditions as well as some sufficient conditions rendering the corresponding problem uniquely solvable are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmashian, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific Publ., Singapore, 1998.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, Москва, 1989.

24 апреля 1999

Армянский государственный
инженерный университет

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПИРАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Т. Л. Гарибян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 5, 1999

В статье изучается локализация особенностей степенных рядов вне их круга сходимости. Получены достаточные условия на лакуны коэффициентов степенных рядов, обеспечивающие наличие особенности в заданном спиральном угле.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Важный раздел вейерштрассовой теории аналитических функций, который привлекал внимание многих исследователей (см. [1], [2]), содержит результаты о локализации особенностей степенных рядов. В частности, описание локализации особенностей на окружности сходимости степенного ряда представлен в сравнительно недавних работах Н. У. Аракеляна и В. А. Мартirosяна [3], [4].

В связи с этим напомним знаменитую теорему Фабри и ее частные случаи [5]. Что касается вопросов локализации особенностей на внешности круга сходимости степенного ряда, мы можем упомянуть только статью А. Явряна [6], в которой изучалась локализация особенностей на прямолинейных углах (радиальные особенности).

Цель настоящей работы заключается в изучении локализации особенностей степенных рядов на спиральных углах (спиральные особенности). Введем несколько необходимых обозначений.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1 \quad (1)$$

с радиусом сходимости единица. Будем обозначать $Q = \{m \in \mathcal{N} : f_m \neq 0\} = \{m_i\}_1^{\infty}$, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Для последовательности

$\{n_k\}_1^\infty \subset Q$ и чисел $\mu > 1$, $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ положим

$$W(\mu, \gamma) = \liminf_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t)}{(t+a)^2 + b^2} dt, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{\mu(\mu \cos 2\gamma + \cos \gamma)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1}, \quad b = \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1},$$

и $w_k(t)$ — число членов конечного множества $Q \cap [n_k, tn_k]$, $t > 1$. Спиральный угол, зависящий от $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in (0, 2\pi)$ определим следующим образом: $\Delta_\beta^\alpha = \{z : |\arg z - \alpha \log |z|| < \beta\}$. Основными результатами статьи являются приводимые ниже две теоремы.

Теорема 1. Пусть для степенного ряда (1) последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$, $n_k \uparrow \infty$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{n_k \rightarrow \infty} |f_{n_k}|^{1/n_k} = \rho > 0. \quad (3)$$

Если существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\begin{aligned} \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) \right] - W(\mu, \gamma) \right\} > \\ > \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + \log(2 \cos \gamma) + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) + \\ + |\cot \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot \gamma| \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $W(\mu, \gamma)$ задается по (2), ряд (1) имеет конечную особую точку внутри спирального угла $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$, где $\alpha = -\tan \gamma$.

Для последовательности Q , чисел $n \in \mathcal{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\mu > 1$ положим

$$S_Q^\gamma(n, \mu) = \sum_{m \in [n, 2\mu n \cos \gamma] \cap Q} \frac{1}{m}.$$

Если $[n, 2\mu n \cos \gamma] \cap Q = \emptyset$, то предполагаем, что $S_Q^\gamma(n, \mu) = 0$. Введем обозначение

$$W^*(\mu, \gamma) = \liminf_{n_k \rightarrow \infty, n_k \in Q} S_Q^\gamma(n_k, \mu). \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть для степенного ряда (1) последовательность $\{n_k\}_1^\infty \subset \mathcal{N}$, $n_k \uparrow \infty$ удовлетворяет условию (3). Если существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\begin{aligned} \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} \left\{ \lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) \right] - W^*(\mu, \gamma) \right\} > \\ > \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + 1 + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $W^*(\mu, \gamma)$ задается по (5), причем $|\gamma| < \pi/6$, ряд (1) имеет конечную особую точку внутри спирального угла $\Delta_{\pi\lambda}^\alpha$, где $\alpha = -\tan \gamma$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Через ∂E и $\bar{E}$ обозначим границу и замыкание множества $E \subset \mathbb{C}$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $g_\mu(\zeta, \zeta_0)$ – функция Грина круга $D_\mu = \{\zeta : |\zeta - \mu| < \mu\}$, $\mu > \frac{1}{2 \cos \gamma}$ с полюсом в точке $\zeta_0 = te^{-i\gamma}$, где $t \in (0, 2\mu \cos \gamma)$, пусть l – внутренняя нормаль к ∂D_μ . Тогда имеет место следующая формула :

$$\int_{\partial D_\mu} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \frac{\partial g_\mu(\zeta, \zeta_0)}{\partial \bar{\zeta}} |d\zeta| = 2 \int_0^{2\mu \cos \gamma} g_\mu(te^{-i\gamma}, \zeta_0) dt.$$

В случае $\gamma = 0$ Лемма 1 доказана в [3]. Общий случай доказывается аналогично.

Доказательство Теоремы 1 : Предположим, что утверждение Теоремы 1 неверно. Тогда степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n z^n$ допускает аналитическое продолжение в спиральный угол $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta_{2\sigma}^\alpha}$, где $\sigma = \pi(1-\lambda)$. Следовательно, согласно необходимой части Теоремы 1.1 Н. У. Аракеяна (см. [7]), существует целая функция φ экспоненциального типа в правой полуплоскости и внутреннего экспоненциального типа σ такая, что

$$\varphi(ne^{-i\gamma}) = (-1)^n f_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$h_\varphi(\theta) \leq \sigma |\sin(\theta + \gamma)|, \quad |\theta|, |\gamma| < \frac{\pi}{2}, \quad \tan \gamma = -\alpha,$$

где $h_\varphi(\theta)$ – индикатрисса функции φ . Из стандартных свойств функции φ следует, что в произвольном угле $\overline{\Delta_{2\beta}}$, $\beta \in (0, \pi/2)$, где $\Delta_\beta = \Delta_\beta^0$, имеем (см. [8], стр. 97)

$$\log |\varphi(\zeta)| \leq \sigma |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| + \varepsilon_\beta(|\zeta|)|\zeta| + c, \quad (8)$$

где $\varepsilon_\beta(r) \downarrow 0$ при $r \uparrow \infty$, а $c \geq 0$ – некоторая постоянная. В правой полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$ имеем

$$\log |\varphi(\zeta)| \leq c(|\zeta| + 1). \quad (9)$$

Для функции Грина g_μ имеем

$$g_\mu(\zeta, \zeta_0) = \log \left| \frac{\mu^2 - (\bar{\zeta} - \mu)(\zeta_0 - \mu)}{\mu(\zeta - \zeta_0)} \right|. \quad (10)$$

Применим теперь формулу Пуассона-Иенсена к функции $\phi_k(\zeta) = \varphi(n_k \zeta)$ и кругу D_μ в точке $\zeta = \zeta_0 = e^{-i\gamma}$. С учетом (7) получим

$$\log |f_{n_k}| + \Sigma \leq \frac{1}{2\pi} J, \quad (11)$$

где

$$\Sigma = \sum_{\tau} g_{\mu}(\tau, \zeta_0), \quad J = \int_{\partial D_{\mu}} \log |\phi_n(\zeta)| \frac{\partial g_{\mu}(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} |d\zeta|,$$

сумма берется по всем нулям (с учетом кратности) функции $\phi_k(\zeta)$, лежащим на луче $\arg \zeta = -\gamma$, $|\zeta| > 1$ круга D_{μ} .

Оценим сперва интеграл J сверху. Запишем J в виде суммы интегралов J_1 и J_2 по кривым $l_1 = \partial D_{\mu} \cap (\mathbb{C} \setminus \Delta_{2\beta})$ и $l_2 = \partial D_{\mu} \cap \Delta_{2\beta}$, соответственно. Так как $|\zeta| \leq 2\mu \cos \beta$ при $\zeta \in l_1$, то из (9) получим

$$J_1 \leq c(2\mu n_k \cos \beta + 1). \quad (12)$$

Из (8) имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{\sigma n_k}{2\pi} \int_{l_1} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \frac{\partial g_{\mu}(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} |d\zeta| + 2\mu n_k \varepsilon_{\beta} (2\mu n_k \cos \beta) + c \leq \\ &\leq \frac{\sigma n_k}{2\pi} J_0 + 2\mu n_k \varepsilon_{\beta} (2\mu n_k \cos \beta) + c, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$J_0 = \int_{\partial D_{\mu}} |\operatorname{Im}(\zeta e^{i\gamma})| \frac{\partial g_{\mu}(\zeta, \zeta_0)}{\partial l} |d\zeta|. \quad (14)$$

Применяя Лемму 1 и формулу (10), простыми вычислениями найдем

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{2(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \\ &+ \frac{2\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left[\arctan \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctan \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая (12) – (14), получим оценку

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{\sigma n_k}{\pi} \left\{ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \times \right. \\ &\times \left[\arctan \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctan \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right] \Big\} + \\ &+ 2\mu n_k \varepsilon_{\beta} (2\mu n_k \cos \beta) + c(2\mu n_k \cos \beta + 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь оценим снизу сумму Σ в левой части (11). Пусть $m(t)$ – количество нулей (с учетом их кратности) функции $\phi_k(\zeta)$ на отрезке $[e^{-i\gamma}, te^{-i\gamma}]$, где $t \in [1, 2\mu \cos \gamma]$.

Можем записать сумму Σ интегралом Стильеса

$$\Sigma = \sum_{\tau} g_{\mu}(\tau, \zeta_0) = \int_1^{2\mu \cos \gamma} g_{\mu}(te^{-i\gamma}, \zeta_0) dm(t). \quad (16)$$

Используя формулу (10) нетрудно проверить, что функция

$$g_\mu(te^{-i\gamma}, \zeta_0) = \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \frac{1}{b} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{t+a}{b} \right)$$

убывает на промежутке $(1, 2\mu \cos \gamma]$ и

$$g_\mu(te^{-i\gamma}, \zeta_0) \geq \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \frac{1}{b} \left(\arctan \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \arctan \frac{t+a}{b} \right).$$

Учитывая (16) получим

$$\begin{aligned} \Sigma &\geq -\frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \frac{1}{b} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \arctan \frac{t+a}{b} dm(t) + \\ &+ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \frac{1}{b} \arctan \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} m(2\mu \cos \gamma) = \\ &= \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{m(t) dt}{(t+a)^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно Лемме 3 из [3] имеем

$$m(t) \geq (t-1)n_k - w_k(t) - 2. \quad (18)$$

Поэтому из (17) следует оценка

$$\begin{aligned} \Sigma &\geq \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{(t-1)n_k - w_k(t) - 2}{(t+a)^2 + b^2} dt = \\ &= \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left[\frac{n_k}{2} \log \frac{(2\mu \cos \gamma + a)^2 + b^2}{(1+a)^2 + b^2} - \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} - \right. \\ &\quad \left. - n_k \left(\frac{1+a}{b} + \frac{2}{bn_k} \right) \left(\arctan \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \arctan \frac{1+a}{b} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Умножая (11) на $(2n_k)^{-1}$ и используя (15) – (17) и (19), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2n_k} \log |f_{n_k}| + \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \left[\frac{1}{2} \log \frac{(2\mu \cos \gamma + a)^2 + b^2}{(1+a)^2 + b^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t) dt}{(t+a)^2 + b^2} - \frac{1+a}{b} \left(\arctan \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \arctan \frac{1+a}{b} \right) \right] \leq \\ &\leq (1-\lambda) \left\{ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\arctan \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctan \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right] \right\} + c\mu \cos \beta + o(1), \end{aligned}$$

при $n_k \rightarrow \infty$. Перейдя в обеих частях к нижнему пределу при $n_k \rightarrow \infty$, а затем устремляя β к $\pi/2$, используя (3) получим

$$\lambda \left\{ \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \frac{\mu |\sin \gamma|}{\mu \cos \gamma - 1} \left[\arctan \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \arctan \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma|(2\mu \cos \gamma - 1)} \Big] - W(\mu, \gamma) \Big\} \leq \frac{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1}{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)} \log \frac{1}{\rho} + \\
& + \frac{1}{2} \log \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)^2[(1+a)^2 + b^2]}{(2\mu \cos \gamma + a)^2 + b^2} - \frac{\mu |\sin \gamma|}{\mu \cos \gamma - 1} \times \\
& \times \left[\arctan \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \arctan \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma|(2\mu \cos \gamma - 1)} \right] + \\
& + \frac{1+a}{b} \left(\arctan \frac{2\mu \cos \gamma + a}{b} - \arctan \frac{1+a}{b} \right),
\end{aligned}$$

или

$$\lambda \left[\log(2\mu \cos \gamma) + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) - W(\mu, \gamma) \right] \leq \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} +$$

$$+ \log(2 \cos \gamma) + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) + |\cot \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot \gamma| \right) + o(1)$$

при $\mu \rightarrow \infty$. Если перейти к верхнему пределу в обеих частях при $\mu \rightarrow \infty$, то получим противоречие с (4). Теорема 1 доказана.

Замечание. Из условия $|\gamma| < \pi/4$ следует, что $a > 0$ для $\mu > \mu_0 = \cos \gamma / \cos 2\gamma$. Поэтому интегрируя по частям получим

$$W(\mu, \gamma) \leq \liminf_{\substack{n_k \rightarrow \infty \\ n_k \in \mathbb{Q}}} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t)}{n_k t^2} dt \leq W^*(\mu, \gamma), \quad \mu > \mu_0. \quad (20)$$

В самом деле, при ограничении $|\gamma| < \pi/4$ Теорема 1 справедлива с заменой величины $W(\mu, \gamma)$ на $W^*(\mu, \gamma)$.

Доказательство Теоремы 2 : Предположим, что утверждение Теоремы 2 неверно. Рассуждая как и при доказательстве Теоремы 1, получим уравнение (11) и оценку (15) для интеграла J . Для того, чтобы оценить снизу сумму в левой части (11) будем действовать несколько иначе. Из формулы (10) легко следует, что в случае $|\gamma| < \pi/6$ функция $g_\mu(te^{-i\gamma}, \zeta_0) - \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{t(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)}$ убывает на промежутке $t \in (1, 2\mu \cos \gamma]$ для достаточно больших μ . Следовательно

$$g_\mu(te^{-i\gamma}, \zeta_0) \geq \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right), \quad t \in (1, 2\mu \cos \gamma].$$

Учитывая (16) получим $\Sigma \geq \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{m(t)}{t^2} dt$. Отсюда и из (18) следует

$$\Sigma \geq \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left[n_k \log(2\mu \cos \gamma) - \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t)}{t^2} dt - \right.$$

$$-(n_k + 2) \left(1 - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right) \Bigg].$$

Умножая (11) на $(2n_k)^{-1}$ и учитывая (17), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n_k} \log |f_{n_k}| + \frac{(\mu \cos \gamma - 1)^2}{\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1} \left[\log(2\mu \cos \gamma) - \frac{1}{n_k} \int_1^{2\mu \cos \gamma} \frac{w_k(t)}{t^2} dt - \right. \\ & \left. - \left(1 + \frac{2}{n_k} \right) \left(1 - \frac{1}{2\mu \cos \gamma} \right) \right] \leq (1 - \lambda) \left\{ \frac{(2\mu \cos \gamma - 1)(\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \times \right. \\ & \times \log(2\mu \cos \gamma - 1) + \frac{\mu |\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)}{2(\mu^2 - 2\mu \cos \gamma + 1)} \times \left[\arctan \frac{\mu - \cos \gamma}{|\sin \gamma|} - \right. \\ & \left. \left. - \arctan \frac{\mu \cos 2\gamma - \cos \gamma}{|\sin \gamma| (2\mu \cos \gamma - 1)} \right] \right\} + c\mu \cos \beta + o(1) \quad \text{при } n_k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Перейдем в обеих частях к нижнему пределу при $n_k \rightarrow \infty$, а затем устремим β к $\pi/2$. С учетом (3) и (20) получим

$$\begin{aligned} & \lambda \left\{ \log(2\mu \cos \gamma) + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) - \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)}{2\mu \cos \gamma - 1} W^*(\mu, \gamma) \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{2 \cos^2 \gamma} \log \frac{1}{\rho} + \frac{2(\mu \cos \gamma - 1)}{2\mu \cos \gamma - 1} + |\tan \gamma| \left(\frac{\pi}{2} - \arctan |\cot 2\gamma| \right) + o(1), \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Переходя в обеих частях к верхнему пределу при $\mu \rightarrow \infty$, получим противоречие с (6). Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. А. Мартиросяну за постановку задачи и поддержку.

ABSTRACT. The paper considers singularities of power series beyond the circle of convergence. Sufficient conditions on the lacunae of coefficients are found, that guarantee the existence of singular points in a given logarithmic angular domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Bieberbach. Analytische Fortsetzung, Springer, Berlin, 1955.
2. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, Степенные Ряды : Аналитическое Продолжение и Локализация Особенностей, Изд. ЕГУ, 1991.
3. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 22, № 1, стр. 3 - 21, 1987.
4. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости II", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 23, № 3, стр. 123 - 137, 1988.
5. E. Fabry, "Sur les points singuliers d'une serie de Taylor", Jour. de Math. pures et appl.(5), vol. 4, pp. 317 - 358, 1898.
6. А. В. Яврян. "О распределении радиальных особенностей степенного ряда", том 32, № 5, стр. 62 - 75, 1997.
7. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. сборник, том 124, № 1, стр. 24 - 44. 1984.
8. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.

О ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОМ УРАВНЕНИИ

Л. П. Тепоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 5, 1999

В статье рассматривается дифференциально-операторное уравнение $(-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t)$, где m – натуральное число, $t \in (0, b)$, $b < \infty$, $\alpha \geq 0$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,-\alpha}((0, b), \mathcal{H}) \equiv H$ и P – оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и обладает полной системой собственных функций, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$. Приведены условия, обеспечивающие существование и единственность обобщенного решения. Доказываются некоторые теоремы вложения в весовых пространствах Соболева.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧА

Основным объектом настоящей статьи является дифференциально-операторное уравнение

$$A u \equiv (-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t), \quad (1)$$

где m – натуральное число, $t \in (0, b)$, $b < \infty$, $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,-\alpha}((0, b), \mathcal{H}) \equiv H$ и P – оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$.

Нас будет интересовать характер граничных условий при $t = 0, b$, обеспечивающих существование и единственность решения уравнения (1) при любых $f \in H$. В работах [1], [3], [4] эта задача рассматривалась при $0 \leq \alpha \leq 2m$.

Наш подход, близкий к [1], основан на исследовании одномерной версии уравнения (1), когда P является оператором умножения на число p . Описывается спектр одномерного оператора и доказываются теоремы вложения в весовых пространствах Соболева.

§2. ПРОСТРАНСТВО W_α^m

Для простоты, в этом параграфе предположим, что функция $u(t)$ вещественна. Пусть $\dot{C}^m$ – множество m раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, b]$, удовлетворяющих условиям

$$u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = u^{(k)}(t)\Big|_{t=b} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Обозначим через $\dot{W}^m$ пополнение $\dot{C}^m$ по норме, порождаемой скалярным произведением

$$\{u, v\} = (u^{(m)}, v^{(m)}),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(0, b)$.

Обозначим через W_α^m пополнение $\dot{W}^m$ по норме

$$|u, W_\alpha^m|^2 = \int_0^b t^\alpha |u^{(m)}|^2 dt. \quad (3)$$

Скалярное произведение в W_α^m обозначим через

$$\{u, v\}_\alpha = (t^\alpha u^{(m)}, v^{(m)}).$$

Очевидно, что вложение $\dot{W}^m \subset W_\alpha^m$ – собственное и что пространство $\dot{W}^m$ совпадает с классом $(m-2)$ раз непрерывно дифференцируемых функций $u(t)$, для которых $u^{(m-1)}(t)$ абсолютно непрерывна и выполняются условия (2). Легко убедиться, что нормы пространств $\dot{W}^m$ и W_α^m эквивалентны на отрезке $[\eta, b]$, $\eta > 0$. Следовательно, достаточно изучить свойства функций из W_α^m при малых значениях t . Для доказательства нижеследующего предложения см. [4].

Предложение 1. Для каждого $u \in W_\alpha^m$ справедливы следующие оценки:

$$|u^{(k)}(t)|^2 \leq C_k t^{2m-2k-1-\alpha} |u, W_\alpha^m|^2, \quad (4)$$

где $\alpha \neq 2n+1$, $n = 0, 1, \dots, m-1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. При $\alpha = 2n+1$, $n = 0, 1, \dots, m-1$ в (4) множитель $t^{2m-2k-1-\alpha}$ надо заменить на $t^{2m-2k-2n-2} |\ln t|$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Из неравенства (4) вытекает, что при $\alpha < 1$ (слабое вырождение) условия (2) “удерживаются”, а при $\alpha \geq 1$ (сильное вырождение) “удерживаются” не все граничные условия. Например, при $1 \leq \alpha < 3$, $u^{(m-1)}(t)|_{t=0}$ может обращаться в бесконечность, а при $\alpha \geq 2m-1$ все $u^{(k)}(t)|_{t=0}$ могут обращаться в бесконечность при $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Предложение 2. При любых $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$ имеет место вложение

$$W_\alpha^m \subset L_{2, \alpha-2m}. \quad (5)$$

Доказательство : Так как $\dot{C}^m$ плотно в W_α^m , то достаточно доказать (5) в случае, когда $u \in \dot{C}^m$. Пусть $m = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b t^{\alpha-2} u^2(t) dt \right|^2 &= \left| \frac{1}{\alpha-1} \int_0^b u^2(t) dt^{\alpha-1} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{2}{\alpha-1} \int_0^b t^{\alpha/2-1} u'(t) t^{\alpha/2} u(t) dt \right|^2 \leq \frac{4}{(\alpha-1)^2} \int_0^b t^\alpha (u'(t))^2 dt \int_0^b t^{\alpha-2} u^2(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\int_0^b t^{\alpha-2} u^2(t) dt \leq \frac{4}{(\alpha-1)^2} \int_0^b t^\alpha (u'(t))^2 dt.$$

Повторяя указанное действие m раз, получим

$$\int_0^b t^{\alpha-2m} u^2(t) dt \leq \frac{4^m}{(\alpha-1)^2 (\alpha-3)^2 \dots (\alpha-(2m-1))^2} \int_0^b t^\alpha (u^{(m)})^2 dt. \quad (6)$$

Предложение 2 доказано.

Замечание 1. Вложение (5) нарушается при $\alpha = 1, 3, \dots, 2m-1$.

Докажем это утверждение при $\alpha = 1$ и $m = 1$. Рассмотрим функцию $u(t) = |\ln t|^\beta$, $t \in (0, a)$, $a < \min(1, b)$. В $L_{2, -1}(0, a)$ норма этой функции конечна при $\beta < -1/2$, а в $W_1^1(0, a)$ — конечна при $\beta < 1/2$. Следовательно, при $-1/2 \leq \beta < 1/2$ вложение (5) нарушается.

Замечание 2. Вложение (5) не является компактным.

Для простоты докажем это утверждение при $m = 1$ и $\alpha = 2$. Рассмотрим ограниченную в $W_2^1(0, a)$ последовательность $u_n(t) = n^{-1/2} t^{-1/2} |\ln t|^{-1/2-1/2n}$, где $a < \min(1, b)$. Легко проверить, что подпоследовательность последовательности $u_n(t)$ не сходится в метрике $L_2(0, a)$.

Замечание 3. При $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$ в пространстве W_α^m можно определить норму

$$\|u\|_\alpha^2 = \int_0^b \left| t^{\alpha/2} u^{(m)} \right|^2 dt, \quad (7)$$

эквивалентную норме (3).

Доказательство эквивалентности норм (3) и (7) следует из рассуждений, аналогичных рассуждениям неравенства (6) из Предложения 2 (см. [5]). Следовательно,

можем записать $W_\alpha^m = t^{-\alpha/2} \dot{W}^m$, т.е. если $u \in \dot{W}^m$, то $v = t^{-\alpha/2} u \in W_\alpha^m$. Отметим, что при $\alpha = 1, 3, \dots, 2m-1$ нормы (3) и (7) неэквивалентны. Обозначим через $\bar{W}_\alpha^m$ пополнение $\dot{W}^m$ по норме (7). Из неравенства (4) следует вложение $\bar{W}_\alpha^m \subset W_\alpha^m$.

Обозначим через $L_{2,\alpha} = L_{2,\alpha}(0, b)$ весовое пространство

$$L_{2,\alpha} = \{u(t) : |u, L_{2,\alpha}|^2 = \int_0^b t^\alpha |u(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Предложение 3. При любых $\alpha \geq 0$ вложение

$$W_\alpha^m \subset L_{2,\alpha} \quad (8)$$

компактно.

Доказательство : Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$. Из (4) вытекает, что $|u(t)|^2 \leq C_k t^{2m-1-\alpha} |u, W_\alpha^m|^2$. Отсюда получим

$$|u, L_{2,\alpha}| \leq c_1 |u, W_\alpha^m|. \quad (9)$$

Для доказательства компактности вложения (8) используем неравенство (4) при $k = 1$ для записи

$$\begin{aligned} |u(t+h) - u(t), L_{2,\alpha}|^2 &= \int_0^b t^\alpha |u(t+h) - u(t)|^2 dt = \int_0^b t^\alpha \left| \int_t^{t+h} u'(\tau) d\tau \right|^2 dt \leq \\ &\leq c_1 |u, W_\alpha^m|^2 \int_0^b t^\alpha \left| \int_t^{t+h} \tau^{(2m-3-\alpha)/2} d\tau \right|^2 dt = \\ &= c_2 |u, W_\alpha^m|^2 |h|^2 \int_0^b t^\alpha \xi^{2m-3-\alpha} dt \leq c |h|^2 |u, W_\alpha^m|^2, \end{aligned}$$

где $\xi \in [t, t+h]$. Следовательно

$$|u(t+h) - u(t), L_{2,\alpha}| \leq c |h| |u, W_\alpha^m|. \quad (10)$$

Результат теперь следует из критерия предкомпактности в $L_{2,\alpha}$ (см. [1], [3]). При $\alpha = 1, 3, \dots, 2m-1$ доказательство аналогично.

§3. ОДНОМЕРНАЯ ВЕРСИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

Рассмотрим одномерную версию уравнения (1) :

$$\Lambda u \equiv (-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + p t^{\alpha-2m} u = f(t), \quad (11)$$

где $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$, $f(t) \in L_{2,-\alpha}$, а p — постоянное число.

Определение 1. Функция $u \in W_\alpha^m$ называется обобщенным решением уравнения (11), если для любого $v \in W_\alpha^m$ выполняется равенство

$$\{u, v\}_\alpha + p(t^{\alpha-2m} u, v) = (f, v). \quad (12)$$

Положим $d = 4^{-m} (\alpha - 1)^2 (\alpha - 3)^2 \cdots (\alpha - (2m - 3))^2$.

Теорема 1. Пусть $p > -d$, $\alpha \geq 0$ и $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m - 1$. Тогда для любого $f \in L_{2,-\alpha}$ существует обобщенное решение уравнения (11) и оно единственно.

Доказательство : Единственность обобщенного решения уравнения (11) следует из (6) и (12), если положить $f = 0$ и $v = u$. Для доказательства существования рассмотрим функционал $l_f(v) \equiv (f, v)$, $f \in L_{2,-\alpha}$ над пространством W_α^m . Используя (9) можем записать

$$\begin{aligned} |l_f(v)|^2 &= \left| \int_0^b f(t) \overline{u(t)} dt \right|^2 = \left| \int_0^b t^{-\alpha/2} f(t) t^{\alpha/2} \overline{v(t)} dt \right|^2 \leq \\ &\leq \int_0^b t^{-\alpha} |f(t)|^2 dt \int_0^b t^\alpha |v(t)|^2 dt \leq c |f, L_{2,-\alpha}|^2 |v, W_\alpha^m|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $l_f(u)$ является линейным ограниченным функционалом над пространством W_α^m . Результат теперь следует из леммы Рисса о представлении таких функционалов (см. [1]). Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Отметим, что обобщенное решение $u(t)$ уравнения (11) принадлежит $W_2^{2m}(\delta, b - \delta)$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, в каждом интервале $(\delta, b - \delta)$ обобщенное решение $u(t)$ совпадает с обычным решением уравнения (11).

Элемент $f \in L_{2,-\alpha}$ представим в виде

$$f(t) = t^\alpha g(t). \quad (13)$$

Очевидно, что $g \in L_{2,\alpha}$ и $|f, L_{2,-\alpha}| = |g, L_{2,\alpha}|$. Теперь, исходя из Определения 1, определим оператор $B : W_\alpha^m \subset L_{2,\alpha} \rightarrow L_{2,\alpha}$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t) \in W_\alpha^m$ принадлежит области $D(B)$ оператора B , если имеет место равенство (12) при некотором $f \in L_{2,-\alpha}$. В этом случае мы будем писать $Bu = g$, где функция g определяется согласно (13). Из Определения 2 следует, что оператор B действует по формуле $Bu \equiv t^{-\alpha} \{(-1)^m D_1^m(t^\alpha D_1^m u) + p t^{\alpha-2m} u\}$ и для любых $u \in D(B)$, $v \in W_\alpha^m$ и $f \in L_{2,-\alpha}$ имеет место равенство $(Bu, v)_\alpha = (f, v)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_{2,\alpha}$.

Теорема 2. При условиях Теоремы 1 B является положительным самосопряженным оператором в $L_{2,\alpha}$. При этом, $B^{-1} : L_{2,\alpha} \rightarrow L_{2,\alpha}$ — компактный оператор.

Доказательство : Симметричность и положительность оператора B следует из Определения 2. Самосопряженность симметрического оператора B следует из того, что согласно Теореме 1, при любых $f \in L_{2,-\alpha}$ уравнение (1) разрешимо, т.е. для любых $g \in L_{2,\alpha}$ вида (13) уравнение $B u = g$ разрешимо. Используя (6), (12), полагая $v = u$ и вложение $L_{2,\alpha-2m} \subset L_{2,\alpha}$ получаем

$$\begin{aligned} (d+p) c |u, L_{2,\alpha}|^2 &\leq (d+p) |u, L_{2,\alpha-2m}|^2 \leq |u, W_\alpha^m|^2 + p |u, L_{2,\alpha-2m}|^2 \leq \\ &\leq |f, L_{2,-\alpha}| |u, L_{2,\alpha}| = |g, L_{2,\alpha}| |u, L_{2,\alpha}|. \end{aligned}$$

Следовательно $|B^{-1}g, L_{2,\alpha}| \leq c_1 |g, L_{2,\alpha}|$. Отсюда следует, что B^{-1} ограничен. Для доказательства компактности B^{-1} осталось заметить, что согласно Предложению 2, вложение $D(B) \subset W_\alpha^m \subset L_{2,\alpha}$ является компактным. Теорема 2 доказана.

По стандартным свойствам спектров самосопряженных компактных операторов получаем следующее следствие.

Следствие. Оператор B имеет чисто точечный спектр, и система соответствующих собственных функций плотна в $L_{2,\alpha}$.

Отметим, что если λ — собственное значение оператора B и $u(t)$ — соответствующая собственная функция, то согласно Определению 2 имеем

$$(-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + p t^{\alpha-2m} u = \lambda t^\alpha u.$$

§4. ОПЕРАТОРНАЯ ВЕРСИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

В этом параграфе рассмотрим операторную версию уравнения (1) :

$$A u \equiv (-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t), \quad f \in H. \quad (14)$$

Напомним, что если система $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ является базисом Рисса в $\mathcal{H}$, то любой элемент $x \in \mathcal{H}$ можно единственным образом представить в виде $x = \sum_{k=1}^\infty x_k \varphi_k$, и имеет место неравенство

$$c_1 \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \leq \|x\| \leq c_1 \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2, \quad (15)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathcal{H}$.

Поскольку оператор P в (14) обладает полной системой собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, образующих базис Рисса в $\mathcal{H}$, мы имеем

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k, \quad P \varphi_k = p_k \varphi_k, \quad k \in N. \quad (16)$$

Тогда операторное уравнение (14) расщепляется на бесконечную цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_k u_k \equiv (-1)^m D_t^m (t^\alpha D_t^m u_k) + t^{\alpha-2m} p_k u_k = f_k(t), \quad k \in N. \quad (17)$$

Из условия $f \in H$ следует, что $f_k \in L_{2,-\alpha}$ при $k \in N$. Для одномерного уравнения (17) можно определить обобщенные решения u_k , $k \in N$ (ср. с Определением 1).

Определение 3. Обобщенным решением уравнения (14) назовем функцию $u \in W_\alpha^m((0, b), \mathcal{H}) \subset L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})$, определяемую равенством

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k,$$

где $u_k(t)$ – обобщенные решения одномерного уравнения (17).

Следующая теорема вытекает из общих результатов А. А. Дезяна [2].

Теорема 3. Операторное уравнение (14) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда одномерное уравнение (17) однозначно разрешимо и равномерно по $k \in N$ выполняется неравенство

$$|u_k, L_{2,\alpha}| \leq c \|f_k, L_{2,-\alpha}|. \quad (18)$$

Из Теоремы 1 следует, что достаточными условиями для выполнения неравенств (18) являются

$$p_k > -d + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad k \in N. \quad (19)$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполняется условие (19) и $\alpha \neq 1, 3, \dots, 2m-1$. Тогда для каждого $f \in H$ обобщенное решение операторного уравнения (14) существует и единственно.

Отметим, что если u является обобщенным решением уравнения (14), то согласно неравенствам (15) и (18) имеем

$$\begin{aligned} |u, L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})|^2 &= \int_0^b t^\alpha \|u(t)\|^2 dt \leq c_1 \int_0^b t^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t)|^2 dt \leq \\ &\leq c_2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_k, L_{2,-\alpha}|^2 \leq c |f, H|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично равенству (13) положим $f = t^\alpha g$. Очевидно, что тогда $g \in L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})$ и $|f, \mathcal{H}| = |g, L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})|$. Неравенство (20) запишем в виде

$$|u, L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})| \leq c |g, L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})|. \quad (21)$$

Аналогично одномерному случаю обобщенное решение уравнение (14) порождает оператор

$$B : W_\alpha^m((0, b), \mathcal{H}) \subset L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H}) \rightarrow L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H}).$$

Из неравенства (21) следует, что $B^{-1} : L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H}) \rightarrow W_\alpha^m((0, b), \mathcal{H}) \subset L_{2,\alpha}((0, b), \mathcal{H})$ является ограниченным оператором. Следовательно, имеем $0 \in \rho(B)$, где $\rho(B)$ – резольвентное множество оператора B .

ABSTRACT. The paper considers differential-operator equation $(-1)^m \times \times D_t^m(t^\alpha D_t^m u) + t^{\alpha-2m} P u = f(t)$, where m is a natural number, $t \in (0, b)$, $b < \infty$, $\alpha \geq 0$, $D_t \equiv d/dt$, $f \in L_{2,-\alpha}((0, b), \mathcal{H}) \equiv H$ and P is an operator acting in Hilbert space $\mathcal{H}$ and possessing a complete system of eigenfunctions that form a Riesz basis in $\mathcal{H}$. Conditions under which a generalized solution exists and is unique are derived. Some embedding theorems for weighted Sobolev spaces are proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Дезин, "Вырождающиеся операторные уравнения", Мат. сборник, том 43, № 3, стр. 287 — 298, 1982.
2. А. А. Дезин, Общие Вопросы Теории Граничных Задач Москва, 1980.
3. Л. П. Тепоян, "Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения", Дифф. Уравнения, том 23, № 8, стр. 1366 — 1376, 1987.
4. Л. П. Тепоян, "Об одном дифференциально-операторном уравнении высокого порядка", Труды конференции, Ереван, стр. 212 — 217, 1993.
5. R. Duduchava, D. Elliott and W. Wendland, "The Spline Collocation Method for Mellin Convolution Equations", Preprint, 1996.
6. Л. Д. Кудрявцев, "О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом", Диффер. Уравнения, том 19, № 10, стр. 1723 — 1740, 1983.
7. Л. Д. Кудрявцев, "Об эквивалентных нормах в весовых пространствах", Труды Мат. Инст. АН СССР, том 170, стр. 161 — 190, 1984.

8 июля 1999

Ереванский государственный университет

СЛОЖНОСТЬ ВЫВОДОВ В ОДНОЙ СИСТЕМЕ КЛАССИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

А. А. Чубарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 5, 1999

На основе метода Кальмара выводимости тавтологий в классическом исчислении высказываний мы строим полную аксиоматическую систему S со следующими свойствами: 1) каждую тавтологию φ можно вывести в S не более, чем за $c_1 2^m l$ шагов, где $m = |M\varphi|$, $M\varphi$ – характеристическое множество подформул φ , l – длина φ , а c_1 – некоторая постоянная; 2) существует класс тавтологий такой, что количество шагов выводов в S больше, чем $c_2 2^m$, где c_2 – некоторая постоянная.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В недавних обзорных работах [1] – [3], относящихся к сложности выводов в различных модификациях классического исчисления высказываний, указывалось на экспоненциальные нижние оценки сложностей выводов, полученные лишь в системах с резолюциями, а в системах Фреге наилучшие нижние оценки разве лишь квадратические.

В настоящей статье для произвольной тавтологии φ определяется некоторое характеристическое подмножество $M\varphi$ подформул. На основе метода Кальмара [4] установления выводимости произвольной тавтологии в классическом исчислении высказываний, мы определяем систему аксиом S типа Фреге со следующими свойствами (через $TAUT$ обозначим множество всех тавтологий):

- а) система аксиом S полна;
- б) каждую $\varphi \in TAUT$ можно вывести в S не более, чем за $c_1 2^m l$ шагов, где $m = |M\varphi|$, l не превышает длины φ , а c_1 – константа;
- в) существует $\varphi \in TAUT$ с минимальным количеством шагов выводов в S , превышающих $c_2 2^m$, где c_2 – константа.

Перечисленные свойства позволяют указать $\varphi \in TAUT$ длину n и верхнюю

(нижнюю) оценку числа шагов выводов n^{p+1} (n^p), где $1 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \log_n 2 \rfloor$ для достаточно большого n . $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть.

В заключительной части работы обсуждаются соотношения между сложностями выводов в $\mathcal{C}$ - и Фреге системах.

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ

Согласно общепринятому понятию, пропозициональная формула является словом, составленным по следующим правилам

- 1) пропозициональные переменные x_i , $i \geq 1$;
- 2) логические связки $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$;
- 3) скобки $(,)$.

В дальнейшем под символом $*$ мы будем понимать $\vee, \wedge, \rightarrow$ или $\neg$. Символ $\approx$ означает графическое равенство слов.

Известно, что каждой формуле φ можно сопоставить некоторое дерево с корнем: каждой подформуле ставится по одно-однозначному соответствию некая вершина; если подформула имеет вид $\alpha * \beta$, то вершины, которым приписаны формулы $\alpha * \beta$, соединяются ребрами с вершинами α и β ; если подформула имеет вид $\neg\alpha$, то вершина $\neg\alpha$ связана с α . Корнем считается вершина, которой приписана формула φ . Дерево с корнем, соответствующее формуле φ , назовем φ -деревом, а корень φ -корнем. Естественно, что каждой подформуле α в φ соответствует α -дерево с α -корнем в φ -дереве. Каждой висячей вершине φ -дерева соответствует некоторая элементарная подформула формулы φ .

Единичный m -мерный булев куб обозначается через E^m . Для каждого множества $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и для любого $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in E^m$ введем обозначение $X^\sigma = \{x_1^{\sigma_1}, \dots, x_m^{\sigma_m}\}$, где

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x & \text{для } \sigma_i = 1, \\ \neg x & \text{для } \sigma_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

Мы назовем $\varphi \in \text{TAUT}$ минимальной тавтологией, если φ не получается подстановкой из более короткой тавтологии. Пусть φ — минимальная тавтология, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ — множество различных переменных формулы φ , α — подформула формулы φ . Пусть далее $X_p = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\} \subset X$ и $\sigma = (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}) \in E^p$.

Определение 1. Множество формул X_p^σ назовем α -определяющим, если приписывая значения σ_{i_j} каждой вершине x_{i_j} , $1 \leq j \leq p$ мы индуцируем значение каждой вершины любого изолированного поддерева α -дерева, которое содержит α -корень и только те висячие вершины, маркированные переменными x_{i_j} .

Определение 2. α -определяющее множество X_p^σ назовем тупиковым, если ни одно собственное подмножество не является α -определяющим. α -определяющее множество X_p^σ называется $\alpha - \varepsilon$ -определяющим, если $\alpha(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r}) = \varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Определение 3. Множество переменных X_p назовем важным для формулы φ , если для любого $\sigma \in E^p$ множество X_p^σ является φ -определяющим.

Вообще говоря, важное множество переменных можно выбрать различными способами, причем число его переменных может быть гораздо меньше числа различных переменных формулы φ .

Пример 1. Для формулы

$$\varphi_k \supset x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow \dots \rightarrow (x_k \rightarrow (\bar{x}_k \rightarrow x_1) \dots)), \quad k \geq 2$$

каждое непустое подмножество множества $\{x_1, x_k\}$ является важным.

Определение 4. Минимальное по мощности важное множество переменных минимальной тавтологии φ назовем характеристическим множеством для φ и будем обозначать через $M\varphi$.

Отметим, что если $M\varphi = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$, то переименованием переменных можно добиться, чтобы $M\varphi = \{x_1, \dots, x_m\}$. Из Определения 4 следует, что если $M\varphi = \{x_1, \dots, x_m\}$, то для произвольного $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in E^m$ формулу φ можно вывести из посылок $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_m^{\sigma_m}$, пошаговым построением подформул (или их отрицаний) соответствующего поддерева, содержащего φ -корень. Итак, метод Кальмара [4] можно применить не ко всем вершинам формулы φ , а для переменных характеристического множества минимальной тавтологии φ . Тогда φ выводится пошаговым исключением формул с помощью 2^m различных посылок (согласно теореме о полноте классического исчисления высказываний [4]). Однако, для вывода минимальной тавтологии φ , не обязательно использовать все 2^m φ -множества.

Пусть для минимальной тавтологии φ , $M\varphi = \{x_1, \dots, x_m\}$, и пусть для некоторого $\sigma = (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r}) \in E^r$, $r \leq m$ множество $X_r^\sigma = \{x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}\}$ имеет минимальную мощность среди всех тупиковых φ -определяющих подмножеств множества $M^\sigma \varphi$ для всех $\sigma \in E^m$. Очевидно, что φ можно вывести, исключая предпосылки из X_r^σ и φ -определяющих множеств, получающиеся из $X_r^{\sigma'}$, $\sigma' \in E^r \setminus \{\sigma\}$ добавлением максимум всех остальных $m - r$ переменных степени σ'' для всех $\sigma'' \in E^{m-r}$, т.е. не более чем $1 + (2^r - 1)2^{m-r}$ наборов посылок.

Определение 5. Множество переменных минимальной тавтологии φ , которые имеют минимальную мощность среди тупиковых φ -определяющих подмножеств множества $M^\sigma \varphi$, $\sigma \in E^n$ называется ядром насыщения характеристического множества $M\varphi$ и будет обозначаться через $kM\varphi$. Если $M\varphi = kM\varphi$, то характеристическое множество $M\varphi$ называется насыщенным.

Пример 2. Для $\varphi_m \supset \bigvee_{\sigma \in E^m} (\bigwedge_{i=1}^m x_i^{\sigma_i})$, $m \geq 1$ имеем $M\varphi_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ и оно является насыщенным.

Пример 3. Для

$$\varphi_l \equiv (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \left((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow \dots \rightarrow \left((x_{l-1} \rightarrow x_l) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_l) \right) \dots \right), \quad l \geq 3$$

имеем $M\varphi_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $kM\varphi_1 = \{x_1\}$ или $kM\varphi_1 = \{x_1\}$, т.е. $M\varphi_1$ не является насыщенным. φ_1 -определяющие множества, которые используются в методе Кальмара для вывода φ имеют вид

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 x_1^0 & & & & & & & & & & & x_l^1 \\
 x_1^1 & x_2^0 & & & & & & & & & x_{l-1}^1 & x_l^0 \\
 x_1^1 & x_2^1 & x_3^0 & & & & & & & x_{l-2}^1 & x_{l-1}^0 & x_l^0 \\
 & & & & & \text{или} & & & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_{l-1}^1 & x_l^0 & x_1^1 & x_2^0 & \dots & x_{l-2}^0 & x_{l-1}^0 & x_l^0 \\
 x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_{l-1}^1 & x_l^1 & x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_{l-2}^0 & x_{l-1}^0 & x_l^0
 \end{array}$$

Пример 4.

$$\varphi_{k,m} = \bigvee_{\sigma \in E^k} \bigwedge_{j=1}^m \left(\bigvee_{i=1}^k x_{ij}^{\sigma_j} \right), \quad k \geq 1, \quad 1 \leq m \leq 2^k - 1. \quad (1.1)$$

Формула $\varphi_{k,m}$ утверждает, что в каждой 0-1-матрице порядка $k \times m$, где $m \leq 2^k - 1$, строки можно выбрать так, чтобы записав 0 вместо 1, а 1 вместо 0, получаем матрицу, в каждом столбце которой было бы по крайней мере одна 1. Множество $M\varphi_{k,m}$ для $m = 2^k - 1$ содержит все km переменные, но не для $m < 2^k - 1$. Оно не является насыщенным, но каждое $\varphi_{k,m}$ -определяющее множество содержит по крайней мере m формул (по одному из каждого дизъюнкта некоторой конъюнкции). Следовательно $|kM\varphi_{k,m}| = m$.

Если $\varphi \in TAUT$ не минимальна, то выбирается некоторая минимальная тавтология ψ такая, что φ получается из ψ подстановкой. Если $M\psi = \{x_1, \dots, x_m\}$ и φ получается из ψ некоторой заменой переменных $x_1, \dots, x_m$ соответственно формулами $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, то множество $M\varphi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ называется характеристическим множеством формулы φ .

При различных выборах формул ψ , $M\varphi$ могут быть разными (даже по мощности). Ниже мы будем использовать этот факт при выборе ψ и следовательно $M\varphi$. Если $M\varphi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ для любого $\varphi \in TAUT$, то метод Кальмара приложим и для множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Эти замечания позволяют нам применять метод Кальмара, используя :

- 1) не все переменные формулы φ ,
- 2) не все наборы посылок,
- 3) некоторые подформулы или их отрицания вместо переменных или их отрицаний.

Ниже определяется некоторая специальная аксиоматическая система S , в которой получаются относительно близкие верхние и нижние оценки числа шагов выводов тавтологий. Ниже мы также будем использовать несколько понятий, см. [6]. Главный логический знак формулы φ (если он существует) будем обозначать через $R(\varphi)$. Сама формула φ нумеруется последовательностью (1). Если некоторая подформула $\alpha \Rightarrow \alpha' * \alpha''$ ($\alpha \Rightarrow \neg \alpha$) занумерована последовательностью $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E^n$, то α' нумеруется последовательностью $(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0)$, а α'' последовательностью $(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 1)$ (α' нумеруется последовательностью $(\sigma_1, \dots, \sigma_n, 1)$). Число логических вхождений в φ , кроме отрицаний над переменными, называется логической длиной (или просто длиной) формулы φ и будем обозначать через $l\varphi$. Для каждой формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, если $K \Rightarrow \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \alpha_m^{\sigma_m}$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in E^m$, то множество $\{\alpha_1^{\sigma_1}, \dots, \alpha_m^{\sigma_m}\}$ будем обозначать через K^σ , а множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ через $\tilde{K}$.

Ниже будем использовать общепринятое понятие вывода в системах Фреге. Вывод формулы в некотором исчислении назовем кратчайшим, если он имеет минимальное число формул среди всех выводов формулы φ . Число формул в кратчайшем выводе формулы φ в системе S будем обозначать через T_φ^S .

Вывод называется тупиковым, если после вычеркивания из него любой формулы, кроме последней, он не является выводом. Очевидно, что кратчайший вывод необходимо тупиковый.

§2. СИСТЕМА КЛАССИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ S

Аксиомами системы S являются формулы, задаваемые следующими схемами :

$$I \quad \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \dots \wedge (\alpha_{m-1} \wedge \alpha_m) \dots) \rightarrow \alpha_i, \quad m \geq 1, 1 \leq i \leq m,$$

- II
1. $(K \rightarrow \alpha) \rightarrow ((K \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((K \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))),$
 2. $(K \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (K \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)),$
 3. $(K \rightarrow \beta) \rightarrow (K \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)),$
 4. $(K \rightarrow \alpha) \rightarrow ((K \rightarrow \beta) \rightarrow (K \rightarrow \alpha \wedge \beta)),$
 5. $(K \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)),$
 6. $(K \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)),$
 7. $(K \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((K \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (K \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta))),$
 8. $(K \rightarrow \alpha) \rightarrow (K \rightarrow \alpha \vee \beta),$
 9. $(K \rightarrow \beta) \rightarrow (K \rightarrow \alpha \vee \beta),$
 10. $(K \rightarrow \alpha) \rightarrow (K \rightarrow \neg\neg\alpha),$

- III
1. $(\delta \wedge K \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\bar{\delta} \wedge K \rightarrow \varphi) \rightarrow (K \rightarrow \varphi)),$
 2. $(\gamma \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\bar{\gamma} \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi),$

где

1) $\alpha, \beta, \alpha_i, 1 \leq i \leq m$ некоторые формулы. $\alpha_m \notin TAUT$ и $\bar{\alpha}_m \notin TAUT$,

2) $K \Rightarrow \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_r, r \geq 1$ для любых формул $\beta_i, 1 \leq i \leq r, \beta_r \notin TAUT$,
причем $\bar{\beta}_r \notin TAUT$,

3) для каждой подформулы вида $K \rightarrow \psi$, в аксиомах группы II, множество K^σ является $\psi - 1$ -определяющим,

4) в аксиомах 1. группы III $\delta \notin \bar{K}, \{\delta\} \cup \bar{K} \subset M\varphi$, и множество K^σ не является φ -определяющим,

5) в аксиомах 2. группы III формула φ не имеет вид $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ для некоторой $\varphi_2 \in TAUT$,

6) в аксиомах 2. группы III, если все формулы $M\varphi$ формулы φ суть тавтологии, то $\gamma \Rightarrow \tau_1$, в противном случае γ принадлежит $M\varphi, \gamma \notin TAUT$ и $\bar{\gamma} \notin TAUT$.

Правилами вывода являются *modus ponens* : $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ (где A называется малой, а $A \rightarrow B$ большой посылкой), а также

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}, \quad \frac{A}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \rightarrow B}, \quad \frac{\bar{A}}{A \rightarrow B}.$$

Ниже, если не оговорено иное, все выводы рассматриваются в системе C .

Теорема 1. Система C полна.

Доказательство : Пусть $\varphi \in TAUT, M\varphi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Если существует целое $i, 1 \leq i \leq m$ такое, что $\alpha_i \notin TAUT$, то "аксиоматическое моделирование" выводимости тавтологии методом Кальмара прилагается к $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m, \alpha_i$

по схеме, описанной в [5]. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in TAUT$, то аналогичная схема прилагается к $\alpha_1, \dots, \alpha_m, x_1$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для каждого $\varphi \in TAUT$ имеем $T_\varphi^c \leq c_1 2^m l$, где $m = |M\varphi|$, $l = l_\varphi$, а c_1 — постоянная.

Доказательство : аналогично доказательству Теоремы 2 в [5].

Определение 6. Формула φ называется правильной, если

- а) φ — минимальная тавтология,
- б) для каждой аксиомы A системы S имеем $\varphi \neq A_{(1)}$, $\varphi \neq A_{(11)}$, а для аксиом 1., 4., 7. группы II, или для аксиомы 1. группы III имеем $\varphi \neq A_{(111)}$,
- с) φ не имеет ни вида $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, ни вида $\varphi_1 \vee \varphi_2$, где $\varphi_1 \in TAUT$ или $\varphi_2 \in TAUT$, или вида $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, где $\neg\varphi_1 \in TAUT$ и $\varphi_2 \in TAUT$.

Очевидно, что для правильной тавтологии φ по крайней мере одна из формул множества $M\varphi$ не является тавтологией, также как отрицание этой формулы не является тавтологией.

Теорема 3. Для любой правильной тавтологии φ имеем $T_\varphi^c > c_2 2^r$, где $r = |kM\varphi|$, а c_2 — некоторая постоянная.

Доказательство : следует из нижеследующих лемм.

Лемма 1. Каждая аксиома группы I может служить только малой посылкой *modus ponens*.

Доказательство : Из ограничения 1) следует, что $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m \notin TAUT$.

Лемма 2. Если формулы φ_i , $0 \leq i \leq k$ и

$$\psi_j \equiv \varphi_j \rightarrow (\varphi_{j-1} \rightarrow \dots \rightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_0) \dots), \quad 1 \leq j \leq k$$

выводятся по $\varphi \in TAUT$, и ψ_k — аксиома, то $k \leq 2$.

Доказательство : Предположим противное : $k \geq 3$. Формулы φ_i , $0 \leq i \leq k$ и ψ_j , $1 \leq j \leq k$ выводятся по $\varphi \in TAUT$, а ψ_k — аксиома. По Лемме 1 она не может быть аксиомой группы I. Она не может быть и аксиомой группы II или аксиомой 1. группы III потому, что по ограничению 2), φ_{k-1} (φ_{k-2} соответственно) не может быть конъюнкцией. Она не может быть и аксиомой 2. группы III (что следует из ограничения 5)). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. В тупиковом выводе произвольной правильной формулы φ , содержащей вывод $\gamma \rightarrow \varphi$ и $\bar{\gamma} \rightarrow \varphi$ для некоторого $\gamma \in M\varphi$, которая не является тавтологией и $\bar{\gamma} \notin TAUT$.

Доказательство : Рассмотрим всевозможные концевочные фрагменты вывода правильной формулы φ . Так как φ – правильна, то по ограничению b) она не может быть аксиомой, а φ должна быть выведена только по *modus ponens* из некоторых формул ψ_1 и $\psi_1 \rightarrow \varphi$ (что следует из ограничения с)). Из ограничения b) формула $\psi_1 \rightarrow \varphi$ не может быть аксиомой, и не может быть выведена по правилу $\frac{\varphi}{\psi_1 \rightarrow \varphi}$ (противоречит тупиковости), или по правилу $\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1 \rightarrow \varphi}$ (ввиду выводимости ψ_1) и следовательно, должна быть выведена из некоторых выводимых формул ψ_2 и $\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \varphi)$ по *modus ponens*. Из Леммы 2 следует, что формула $\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \varphi)$ является аксиомой. Она не может быть

- аксиомой группы I (по Лемме 1),
- аксиомой группы II (по ограничениям 2) и b)),
- аксиомой 1 группа III (по ограничению b)).

Следовательно, $\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \varphi)$ должна быть аксиомой 2 группы III. Поэтому $\psi_2 \vDash \gamma \rightarrow \varphi$, $\psi_1 \vDash \bar{\gamma} \rightarrow \varphi$, для некоторого $\gamma \in M\varphi$, где $\gamma \notin TAUT$ и $\bar{\gamma} \notin TAUT$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть формула $K \rightarrow \varphi$ выведена в некотором тупиковом выводе правильной формулы φ . Если K – конъюнкция формул таких, что $\tilde{K} \subset M\varphi$, но K^σ не является φ -определяющим, то необходимо вывести и $\delta \wedge K \rightarrow \varphi$ и $\bar{\delta} \wedge K \rightarrow \varphi$, где $\delta \in M\varphi \setminus \tilde{K}$.

Доказательство : Рассмотрим всевозможные концевочные фрагменты подвывода $K \rightarrow \varphi$. Так как φ является правильной формулой, то по ограничению b), формула $K \rightarrow \varphi$ не может быть аксиомой. $K \rightarrow \varphi$ не может быть выведен по правилу $\frac{\varphi}{K \rightarrow \varphi}$ (ввиду тупиковости вывода) или по правилу $\frac{\bar{K}}{K \rightarrow \varphi}$ (из ограничения 2) следует, что K не является выводимой). Следовательно, $K \rightarrow \varphi$ должен быть выведен из некоторых выводимых формул ψ_1 и $\psi_1 \rightarrow (K \rightarrow \varphi)$ по *modus ponens*. Формула $\psi_1 \rightarrow (K \rightarrow \varphi)$ не может быть

- аксиомой группы I (по Лемме 1),
- одной из аксиом 1., 4., 7. группы II (по ограничению 3)),
- одной из оставшихся аксиом группы II или аксиомой группы III (если A

является одной из упомянутых аксиом, то $R(A_{(1110)}) \vDash \rightarrow$, но $R(K) \vDash \wedge$).

Формула $\psi_1 \rightarrow (K \rightarrow \varphi)$ может быть выведена по правилу $\frac{K \rightarrow \varphi}{\psi_1 \rightarrow (K \rightarrow \varphi)}$ (ввиду тупиковости вывода), или по правилу $\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1 \rightarrow (K \rightarrow \varphi)}$ (ввиду выводимости ψ_1). Следовательно, она должна быть выведена из некоторых выводимых формул ψ_2

и

$$\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow (K \rightarrow \varphi)) \quad (2.1)$$

по modus ponens. По Лемме 2 формула (2.1) является аксиомой. Она не может быть аксиомой группы I или II (в силу рассуждений, аналогичных приведенным выше), или аксиомой 2 группы III (по ограничению 5)). Следовательно, формула (2.1) может быть только аксиомой 1 группы III. Поэтому $\psi_2 \Rightarrow \delta \wedge K \rightarrow \varphi$, $\psi_1 \Rightarrow \bar{\delta} \wedge K \rightarrow \varphi$, для некоторого $\delta \in M\varphi \setminus \bar{K}$. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. Пусть φ – правильная формула и $kM\varphi = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$. Тогда для любого $\sigma \in E^r$ по крайней мере формулы

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\sigma_{i_r}} \rightarrow \varphi, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in E^r,$$

должны быть выведены в кратчайшем выводе формулы φ .

Доказательство : следует из Леммы 4 и ограничений 3) и 4).

Отметим, что если φ представима в виде $\varphi \Rightarrow \varphi_1 * \dots * \varphi_t$, где $\varphi_i \in TAUT$ и $|M\varphi_i| = m_i$, $i = 1, \dots, t$, то $T\varphi$ имеет порядок $O\left(\sum_{i=1}^t 2^{m_i} l\varphi\right)$. Эта оценка может быть существенно лучше известных верхних оценок.

§3. ИЕРАРХИЯ ФОРМУЛ ПО СЛОЖНОСТИ ВЫВОДОВ В СИСТЕМЕ С

Результаты Теорем 2 и 3 позволяют указать на некоторую иерархию по сложности выводов формул в С. Обозначим через Φ_n^p классы последовательностей $\varphi_n^p \in TAUT$ таких, что $\log_2 l\varphi_n^p = O(n)$ и $O(n^p) \leq \log_2 T_{\varphi_n^p}^C \leq O(n^{p+1})$.

Теорема 4. Для любого p , $1 \leq p \leq [n \log_n 2]$ и достаточно больших n , классы Φ_n^p не пусты.

Доказательство : Рассмотрим формулы (1.1) Примера 4. Имеем $|M\varphi_{n,m}| \leq mn$, $|kM\varphi_{n,m}| = m$ и $l\varphi_{n,m} = 2^n(m(n-1) + m - 1) + 2^n - 1 = 2^n mn - 1$,

$$c_2 2^m \leq T_{\varphi_{n,m}}^C \leq c_1 2^{nm} 2^n mn = c_1 2^{n(m+1)} mn,$$

где c_1, c_2 – постоянные. Для $m = n^p$ получаем

$$\log_2 l\varphi_{n,n^p} = O(\log_2(n^p 2^n n)) = O(n + (p+1) \log_2 n) = O(n),$$

$$\log_2 T_{\varphi_{n,n^p}}^C \leq O(\log_2(n^p 2^{n(n^p+1)} n)) = O(n^{p+1} + n + (p+1) \log_2 n) = O(n^{p+1}),$$

$$\log_2 T_{\varphi_{n,n^p}}^C \geq O(\log_2 2^{n^p}) = O(n^p),$$

Следовательно, $\varphi_{n,n^p} \in \Phi_n^p$. Теорема 4 доказана.

§4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СИСТЕМ ФРЕГЕ

Обозначим через C' систему, получающуюся из C снятием ограничения 5). Пусть $\mathcal{F}$ – система Фреге с логическими символами $\vee, \wedge, \rightarrow$ и $\neg$.

Теорема 5. а) Если для тавтологии φ имеем $T_{\varphi}^{\mathcal{F}} \leq n$, то $T_{\varphi}^{C'} \leq c_3 n$, где c_3 – константа.

б) Если $T_{\varphi}^C \leq n$, то $T_{\varphi}^{\mathcal{F}} \leq c_4 n$, где c_4 – константа, зависящая только от мощности множества $M\varphi$.

Доказательство : а) следует из существования константы, ограниченной мощностью множества M_A для любой аксиомы Фреге A . Доказательство пункта б) очевидно.

Следствие 2. С точностью до линейного слагаемого, верхние оценки числа шагов выводов в системе C выполняются для любой системы Фреге с теми же логическими символами.

Автор выражает благодарность участникам семинара под руководством И. Д. Заславского за ряд полезных советов.

ABSTRACT. Basing on Kalmar's proof of the deductibility of tautologies inside classical propositional logic, we construct a complete axiom system C with properties : 1) every tautology φ can be deduced inside C in less than $c_1 2^m l$ steps, where $m = |M\varphi|$, $M\varphi$ is the characteristic set of subformulas of φ , l is the length of φ and c_1 is a constant ; 2) there exists a class of tautologies, such that the number of deduction steps in C is at least $c_2 2^m$, where c_2 is a constant.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Urquhart, "The complexity of propositional proofs", Bull. of Symbolic Logic, vol. 1, no. 4, pp. 425 – 467, 1995.
2. S. Buss, Propositional Proofs Complexity, an Introduction. Handbook of Proof Theory, North Holland, 1997.
3. P. Pudlak, "The lengths of proofs", Handbook of Proof Theory, North Holland, pp. 547 – 637, 1998.
4. Э. Мендельсон. Введение в Математическую Логику. Наука. Москва, 1971.
5. А. А. Чубарян, "О некоторой нормальной форме и сложностных характеристиках выводов в классическом исчислении высказываний", Изв. АН. Арм. ССР, серия Математика, том 10, № 5, стр. 398 – 409, 1975.
6. А. С. Аникеев, "О некоторой классификации выводимых пропорциональных формул", Матем. Заметки. том 2. № 2, стр. 165 – 174, 1972.

3 июля 1999

Ереванский государственный университет

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕКТНЫХ ПО ПЕТРОВСКОМУ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. Л. Шахбагян, Л. Г. Тоноян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

В статье исследуется задача управления системой, описываемой уравнениями четвертого порядка с коэффициентами, зависящими как от пространственных, так и временной переменных. Для некоторого класса уравнений, корректных по Петровскому, доказано существование точного управления, принадлежащего пространству L_2 .

0'. В работе продолжаются исследования, начатые в [1], [2], посвященные проблеме управления системами, описываемыми различными классами уравнений в частных производных высокого порядка, корректных по Петровскому с коэффициентами, зависящими лишь от пространственных переменных.

Рассмотрим теперь задачу управления для некоторого класса уравнений четвертого порядка с коэффициентами, зависящими также от временной переменной.

1'. Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, и пусть $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ – открытый цилиндр, лежащий в прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}^1; t > 0\}$ и $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. В цилиндре Q_T рассмотрим уравнение вида

$$u_{ttt} + \Delta^2 u + L u = 0, \quad (1.1)$$

где

$$L u = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + (b(x, t) u)_t + c(x, t) u, \quad (1.2)$$

$u_x = \partial u / \partial x$, Δ^2 – n -мерный полигармонический оператор.

Для формулировки краевой задачи мы используем следующие обозначения. Для любой точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$m(x) = x - x^0, \quad m_k(x) = x_k - x_k^0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичная внешняя нормаль к поверхности Γ , $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$. Положим

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma, \sum_{k=1}^n m_k \nu_k \geq 0\} \quad \text{и} \quad \Gamma_-(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0). \quad (1.4)$$

Для уравнения (1.1) рассмотрим следующую краевую задачу :

$$u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 \quad \text{на } \Omega \quad (1.5)$$

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = \begin{cases} V, & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_-(x^0) \times (0, T), \end{cases} \quad (1.6)$$

где функция V – управление.

Точным управлением для смешанной задачи (1.1), (1.5), (1.6) является функция $V(x, t)$ такая, что при некотором $0 < T < \infty$ решение $u = u(x, t; V)$ и ее производная $u_t(x, t; V)$ обращаются в нуль при $t = T$, т.е.

$$u(x, T, V) = u_t(x, T, V) = 0. \quad (1.7)$$

2°. Точное управление можно найти одновременным рассмотрением основной и дуальной задач. Таким образом, рассмотрим следующие две задачи :

$$w_{tt} + \Delta^2 w + L w = 0, \quad (2.1)$$

$$w(0) = w^0, \quad w_t(0) = w^1, \quad (2.2)$$

$$w|_{\Sigma} = \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.3)$$

и соответственно

$$z_{tt} + \Delta^2 z + L^* z = 0, \quad (2.4)$$

$$z(T) = z_t(T) = 0, \quad (2.5)$$

$$z|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = \begin{cases} \Delta w, & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_-(x^0) \times (0, T), \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$L^* z = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, t) z_{x_i})_{x_j} - b(x, t) z_t + c(x, t) z. \quad (2.7)$$

Предложение 2.1. Пусть функции $w(x, t)$ и $z(x, t)$ – решения задач (2.1) — (2.3) и (2.4) — (2.6), соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$\int_{\Omega} [(z'(0) - z(0) b(x, 0)) w^0 - z(0) w^1] dx = \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt. \quad (2.8)$$

Доказательство : Умножив тождество (2.1) на $z(x, t)$, а (2.4) на $w(x, t)$, составляя симметрическую разность и интегрируя по Q_T , получим

$$\iint_{Q_T} (z w_{tt} - w z_{tt}) dx dt + \iint_{Q_T} (z \Delta^2 w - w \Delta^2 z) dx dt = \iint_{Q_T} (w L^* z - z L w) dx dt. \quad (2.9)$$

Преобразуем обе части последнего соотношения, используя (2.2) и (2.5) :

$$\iint_{Q_T} (z w_{tt} - w z_{tt}) dx dt = \int_{\Omega} (z_t(0) w^0 - z(0) w^1) dx. \quad (2.10)$$

Далее, аналогично [1] имеем

$$\iint_{Q_T} (z \Delta^2 w - w \Delta^2 z) dx dt = \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt. \quad (2.11)$$

Преобразуем $\sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} z(a_{ij}(x, t) w_{x_i})_{x_j} dx dt = - \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} a_{ij}(x, t) w_{x_i} z_{x_j} dx dt$. В силу (2.2) и (2.5) получим

$$\sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} [z(a_{ij}(x, t) w_{x_i})_{x_j} - w(a_{ij}(x, t) z_{x_i})_{x_j}] dx dt = 0. \quad (2.12)$$

Рассмотрим наконец $\iint_{Q_T} z(b(x, t) w)_t dx dt = - \iint_{Q_T} b w z_t dx dt + \int_{\Omega} z b w dx \Big|_0^T$. С учетом (2.5) имеем

$$\iint_{Q_T} [z(x, t) (b w)_t + b w z_t(x, t)] dx dt = - \int_{\Omega} z(x, 0) b(x, 0) w^0 dx. \quad (2.13)$$

Заметим, что из (2.9) — (2.13) следует (2.8). Доказательство завершено.

3*. Определим оператор

$$\Lambda\{w^0, w^1\} = \{z'_t(x, 0) - z(x, 0) b(x, 0), -z(x, 0)\}, \quad (3.1)$$

действующий на множестве начальных данных $\{w^0, w^1\}$ задачи (2.1) — (2.3). В (3.1), $z(x, t)$ — решение задачи (2.4) — (2.6).

Как установлено в [2], из обратимости оператора Λ следует существование решения основной задачи (1.1), (1.5) — (1.7). Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. В силу (3.1) и Предложения 2.1 имеем

$$\langle \Lambda\{w^0, w^1\}, \{w^0, w^1\} \rangle = \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt. \quad (3.2)$$

Для обратимости оператора Λ покажем, что $(\int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt)^{1/2}$ определяет норму на множестве начальных данных задачи (2.1)–(2.3).

4. Для формулировки условий, налагаемых на коэффициенты оператора L , введем "интеграл энергии".

Пусть $w(x, t)$ — решение задачи (2.1) — (2.3). Умножив тождество (2.1) на w_t и проинтегрировав обе части по Q_T , получим

$$\iint_{Q_T} w_t (w_{tt} + \Delta^2 w + L w) dx dt = 0. \quad (4.1)$$

Преобразуем в отдельности слагаемые. Очевидно

$$\iint_{Q_T} w_t w_{tt} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx \Big|_0^T. \quad (4.2)$$

В силу краевых условий (2.3) получим

$$\iint_{Q_T} w_t \Delta^2 w dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx \Big|_0^T. \quad (4.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} w_t (a_{ij}(x, t) w_{x_i})_{x_j} dx dt = \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} (w_t)_{x_j} a_{ij}(x, t) w_{x_i} dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} (a_{ij}(x, t) w_{x_i} w_{x_j}) dx dt - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} w_{x_i} w_{x_j} dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) w_{x_i} w_{x_j} dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} w_{x_i} w_{x_j} dx dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Наконец

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} w_t (b w)_t dx dt &= \iint_{Q_T} b |w_t|^2 dx dt + \iint_{Q_T} \frac{\partial b}{\partial t} w w_t dx dt = \\ &= \iint_{Q_T} b |w_t|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} w^2 dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \iint_{Q_T} w^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} dx dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\iint_{Q_T} c w w_t dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, t) w^2 dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \frac{\partial c}{\partial t} w^2 dx dt. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.2) — (4.6) в (4.1), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[w_t^2 + |\Delta w|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) w_{x_i} w_{x_j} + (b_t + c) w^2 \right] dx \Big|_0^T = \\ & = \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} w_{x_i} w_{x_j} - 2b w_t^2 + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + \frac{\partial c}{\partial t} \right) w^2 \right] dx dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

“Интеграл энергии” определим следующим образом :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[w_i^2 + |\Delta w|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} + \left(\frac{\partial b}{\partial t} + c \right) w^2 \right] dx. \quad (4.8)$$

Теперь в точности опишем класс рассматриваемых операторов.

а) Коэффициенты $a_{ij}(x, t)$ оператора L принадлежат пространству $C^2(\bar{Q}_T)$, матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ – симметрическая и

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial t} \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \sum_{i,j,k=1}^n m_k(x) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \xi_i \xi_j \leq 0. \quad (4.9)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(x, t) \in Q_T$.

б) Функции $b(x, t)$ и $c(x, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{k=1}^n m_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (b_i + c) + (n/2 - 1) b_i \leq 0, \quad b_i(x, t) + c(x, t) \geq 0, \quad (4.10)$$

$(b_i(x, t) + c(x, t))_i \geq 0$, $b(x, t) \leq 0$ для любого $(x, t) \in Q_T$.

с) Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $t \in [0, T]$

$$E(0) \leq E(t) \leq C E(0). \quad (4.11)$$

5*. Введем функциональные пространства, в которых мы будем исследовать задачу точного управления. Обозначим через $H^2(\Omega)$ пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Подпространство $\dot{H}^2(\Omega)$ пространства $H^2(\Omega)$ является замыканием в норме (5.1) множества финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций. Нам также понадобится норма, эквивалентная (5.1) :

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Введем, наконец, пространство

$$F = \dot{H}^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \quad (5.3)$$

с нормой

$$\|(u, v)\|_F = (\|u\|_2^2 + \|v\|_0^2)^{1/2}, \quad (5.4)$$

где $\|\cdot\|_0$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

6*. Сформулируем основной результат этой статьи.

Теорема 6.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) — с) и $T > 0$ достаточно велико. Тогда при любых начальных данных $\{u^0, u^1\} \in F$ существует точное управление $V \in L_2(\Gamma(x^0) \times (0, T))$, приводящая систему (1.1), (1.5), (1.6) с начальными данными u^0, u^1 в состояние покоя за время T .

Доказательство опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 6.1. Пусть выполнены условия а) и с), и пусть $w(x, t)$ — решение задачи (2.1)–(2.3) с начальными данными $\{u^0, u^1\} \in F$. Тогда существует постоянная $c > 0$, не зависящая от T такая, что

$$\int_{\Sigma} |\Delta w|^2 d\Sigma \leq c(1+T) E(0). \quad (6.1)$$

Доказательство : Пусть функции $h_k \in C^2(\bar{\Omega})$ удовлетворяют условиям

$$h_k(x)|_{\Gamma} = \nu_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.2)$$

Умножим тождество (2.1) на $h_k w_{x_k}$, просуммируем обе части по $k = 1, 2, \dots, n$ и проинтегрируем по цилиндру Q_T . Получим

$$\sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w_{tt} h_k w_{x_k} dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^2 w h_k w_{x_k} dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L w h_k w_{x_k} dx dt = 0. \quad (6.3)$$

Интегралы в (6.3) преобразуем по отдельности также как и в [1]. Имеем

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w_{tt} h_k(x) w_{x_k} dx dt = X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} w_t^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx dt, \quad (6.4)$$

где

$$X = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} w_t h_k(x) w_{x_k} dx \Big|_0^T. \quad (6.5)$$

Далее (ср. [1])

$$I_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^2 w h_k w_{x_k} dx dt = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta(h_k w_{x_k}) \Delta w dx dt - \int_{\Sigma} |\Delta w|^2 d\Sigma. \quad (6.6)$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} I_2' &= \sum_{k=1}^{\bar{n}} \iint_{Q_T} \Delta(h_k w_{x_k}) \Delta w \, dx \, dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{n}} \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta w)^2 \, dx \, dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2 \\ \alpha \neq 0}} \alpha_{\alpha,\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k(x) D^\beta(w_{x_k}) \Delta w \, dx \, dt = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta w|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta w|^2 \, d\Sigma + I_2'', \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$I_2 = I_2'' - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |\Delta w|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta w|^2 \, d\Sigma. \quad (6.7)$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} I_3 &= - \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) w_{x_k} (a_{ij}(x,t) w_{x_i})_{x_j} \, dx \, dt = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} (h_k(x) w_{x_k})_{x_j} a_{ij}(x,t) w_{x_i} \, dx \, dt = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) w_{x_k x_j} a_{ij}(x,t) w_{x_i} \, dx \, dt + \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} a_{ij}(x,t) w_{x_k} w_{x_i} \, dx \, dt = I_3' + I_3''. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Рассмотрим, наконец

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) w_{x_k} ((bw)_t + cw) \, dx \, dt = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) w_{x_k} b(x,t) w_t \, dx \, dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) w_{x_k} (b_t + c) w \, dx \, dt = I_4' + I_4''. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Подставляя (6.4), (6.7)–(6.9) в (6.3), получим

$$X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{n}} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (w_t^2 - |\Delta w|^2) \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |\Delta w|^2 \, d\Sigma + I_2'' + I_3' + I_3'' + I_4' + I_4'' = 0. \quad (6.10)$$

Докажем теперь неравенство (6.1). В силу (4.7) — (4.10) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (w_t^2 - |\Delta w|^2) \, dx \, dt \right| \leq c_1 \int_0^T E(t) \, dt \leq c_2 T E(0) \quad (6.11)$$

(здесь и ниже c_i , $i = 1, 2, \dots$ суть постоянные). Далее

$$\begin{aligned}
 |I_2''| &= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=2 \\ \alpha \neq 0}} \alpha_{\alpha,\beta} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k D^\beta w_{x_k} \cdot \Delta w \, dx \, dt \right| \leq \\
 &\leq c_3 \sum_{k=1}^n \sum_{|\beta| \leq 1} \iint_{Q_T} |D^\beta w_{x_k}| |\Delta w| \, dx \, dt \leq c_4 \sum_{|\beta| \leq 2} \iint_{Q_T} |D^\beta w| |\Delta w| \, dx \, dt \leq \\
 &\leq c_5 \iint_{Q_T} |\Delta w|^2 \, dx \, dt \leq c_6 \int_0^T E(t) \, dt \leq c_7 T E(0).
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Интегралы I_2' и I_2'' оцениваются аналогично :

$$|I_2'| \leq c_8 T E(0), \quad |I_2''| \leq c_9 T E(0). \tag{6.13}$$

Оценим, наконец, I_4' и I_4'' .

$$\begin{aligned}
 |I_4'| &= \left| \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) w_{x_k} b(x, t) w_t \, dx \, dt \right| \leq c_{10} \iint_{Q_T} (w_t^2 + \sum_{k=1}^n w_{x_k}^2) \, dx \, dt \leq \\
 &\leq c_{11} \iint_{Q_T} (w_t^2 + |\Delta w|^2) \, dx \, dt \leq c_{12} T E(0),
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
 |I_4''| &= \left| \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) (b_t + c) w_{x_k} w \, dx \, dt \right| \leq c_{13} \iint_{Q_T} (w^2 + \sum_{k=1}^n w_{x_k}^2) \, dx \, dt \leq \\
 &\leq c_{14} \iint_{Q_T} |\Delta w|^2 \, dx \, dt \leq c_{15} T E(0).
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Оценка для X получена в [1] :

$$|X| \leq c_{16} E(0). \tag{6.16}$$

Используя (6.10) — (6.16) приходим к окончательной оценке $\int_{\Sigma} |\Delta w|^2 \, d\Sigma \leq c_{17} (1 + T) \cdot E(0)$. Лемма доказана.

Следствие 8.2. Пусть $w(x, t)$ — решение задачи (2.1) — (2.3). Тогда имеет место оценка

$$E(0) \leq c \| \{w^0, w^1\} \|_F^2, \tag{6.17}$$

где $c > 0$ — постоянная.

Доказательство : Из (4.8), с учетом (4.10), (4.11), имеем

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C E(0) \leq c_1 \int_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + \sum_{k=1}^n |w_{x_k}|^2) dx \leq \\ &\leq c_2 \int_{\Omega} (|w^1|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w^0|^2) dx \leq c_2 \|\{w^0, w^1\}\|_F^2, \end{aligned}$$

и оценка (6.17) доказана.

Лемма 6.2. При выполнении условий а) — д), существуют постоянные $c > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что для решения $w(x, t)$ задачи (2.1) — (2.3) имеем оценку

$$\int_{\Gamma(s^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt \geq c (T - T_0) E(0). \quad (6.18)$$

Доказательство : Пусть $w(x, t)$ — решение задачи (2.1)–(2.3). Умножая обе части тождества (2.1) на $m_k w_{x_k}$, суммируя по $k = 1, 2, \dots, n$ и интегрируя по Q_T , получим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w_{x_k} w_{tt} dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \Delta^2 w m_k w_{x_k} dx dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L w m_k w_{x_k} dx dt = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Как показано в [1],

$$J_1 = \tilde{X} + \frac{n}{2} \iint_{Q_T} w_t^2 dx dt, \quad (6.20)$$

где

$$\tilde{X} = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} m_k(x) w_t w_{x_k} dx \Big|_0^T. \quad (6.21)$$

Далее (см. [1])

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k w_{x_k} \Delta^2 w dx dt = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \iint_{Q_T} |\Delta w|^2 dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k\right) |\Delta w|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Подставляя (6.20) и (6.22) в (6.19), получим

$$\tilde{X} + \frac{n}{2} \iint_{Q_T} w_t^2 dx dt + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \iint_{Q_T} |\Delta w|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k\right) |\Delta w|^2 d\Sigma + J_3 = 0. \quad (6.23)$$

Наконец

$$J_3 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w_{x_k} L w dx dt = - \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w_{x_k} (a_{ij}(x,t) w_{x_i})_{x_j} dx dt + \\ + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w_{x_k} ((bw)_t + cw) dx dt = J'_3 + J''_3. \quad (6.24)$$

Имеем

$$J'_3 = \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} (m_k w_{x_k})_{x_j} a_{ij}(x,t) w_{x_i} dx dt = \sum_{i,j=1}^n \iint_{Q_T} a_{ij}(x,t) w_{x_i} w_{x_j} dx dt + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[m_k(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) w_{x_i} w_{x_j} \right] dx dt - \\ - \frac{n}{2} \iint_{Q_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) w_{x_i} w_{x_j} dx dt - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} w_{x_i} w_{x_j} dx dt. \quad (6.25)$$

Как следует из (2.3), на поверхности Σ интегралы обращаются в нуль. Из (2.3) следует, что

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x_k} [m_k(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) w_{x_i} w_{x_j}] dx dt = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Sigma} m_k(x) \nu_k a_{ij}(x,t) w_{x_i} w_{x_j} d\Sigma = 0.$$

Преобразуем

$$J''_3 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w_{x_k} b w_t dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) w_{x_k} (b_t + c) w dx dt = \\ = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} b(x,t) m_k(x) w_{x_k} w_t dx dt - \frac{n}{2} \iint_{Q_T} (b_t + c) w^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (b_t + c) w^2 dx dt. \quad (6.26)$$

Подставляя в (6.23) выражения для J'_3 и J''_3 , получим

$$\tilde{X} + \iint_{Q_T} [w_t^2 + |\Delta w|^2 + (b_t + c) w^2] dx dt - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} w_{x_i} w_{x_j} dx dt + \\ + \frac{n-2}{2} Y - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |\Delta w|^2 d\Sigma + \sum_k \iint_{Q_T} b(x,t) m_k w_{x_k} w_t dx dt - \\ - \frac{1}{2} \iint_{Q_T} \left[\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial}{\partial x_k} (b_t + c) - \left(1 - \frac{n}{2} \right) b_t \right] w^2 dx dt = 0, \quad (6.27)$$

где

$$Y = \iint_{Q_T} \left[w_t^2 - |\Delta w|^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) w_{x_i} w_{x_j} - \left(\frac{1}{2} b_t + c \right) w^2 \right] dx dt. \quad (6.28)$$

Покажем, что

$$Y = \int_{\Omega} \left(w_t + \frac{1}{2} b w \right) w dx \Big|_0^T. \quad (6.29)$$

С этой целью умножим тождество (2.1) на $w(x, t)$ и проинтегрируем его по Q_T .

Получим

$$\iint_{Q_T} [w_{tt} + \Delta^2 w + L w] w dx dt = 0. \quad (6.30)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w w_t dx \Big|_0^T - \iint_{Q_T} \left[w_t^2 - |\Delta w|^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) w_{x_i} w_{x_j} \right] dx dt + \\ & + \iint_{Q_T} (b w)_t w dx dt + \iint_{Q_T} c(x, t) w^2 dx dt = 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Далее $\iint_{Q_T} b w w_t dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} b(x, t) w^2 dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \iint_{Q_T} b_t w^2 dx dt$. Подставляя в

(6.31), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(w_t + \frac{1}{2} b w \right) w dx \Big|_0^T + \iint_{Q_T} \left(\frac{1}{2} b_t + c \right) w^2 dx dt - \\ & - \iint_{Q_T} \left(w_t^2 - |\Delta w|^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) w_{x_i} w_{x_j} \right) dx dt = 0, \end{aligned}$$

откуда следует (6.29).

Перейдем к доказательству оценки (6.18). В силу (4.9) и условия а) пункта 4*,
имеем

$$\int_0^T E(t) dt \leq c_1 \iint_{Q_T} [w_t^2 + |\Delta w|^2 + (b_t + c) w^2] dx dt \quad (6.32)$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$. Также имеем

$$\left| \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} b(x, t) m_k(x) w_t w_{x_k} dx dt \right| \leq c_2 \iint_{Q_T} (w_t^2 + |\nabla w|^2) dx dt \leq c_3 \int_0^T E(t) dt, \quad (6.33)$$

где ∇ — градиент функции u по x .

Учитывая (6.32), (6.33), (4.9) и условия а) и б) пункта 4°, из (6.27) получим неравенство $\bar{X} + c_4 \int_0^T E(t) dt + \frac{n-2}{2} Y - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |\Delta w|^2 d\Sigma \leq 0$, где полагаем $c_4 = c_1^{-1} - c_3 > 0$.

Следовательно, с учетом (1.4) получим

$$c_4 T E(0) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |\Delta w|^2 d\Gamma dt \leq -\bar{X} - \frac{n-2}{2} Y. \quad (6.34)$$

В силу условий (2.3) и (4.11), из (6.21) имеем $|\sum_{k=1}^n \int_{\Omega} m_k(x) w_t w_{x_k} dx| \leq c_5 \int_{\Omega} (w_t^2 + |\nabla w|^2) dx \leq c_6 \int_{\Omega} (w_t^2 + |\Delta w|^2) dx \leq c_7 E(t) \leq c_8 E(0)$. Следовательно

$$|\bar{X}| \leq 2 c_8 E(0) = c_9 E(0). \quad (6.35)$$

Аналогично, $\left| \int_{\Omega} \left(w_t + \frac{1}{2} b(x, t) w \right) w dx \right| \leq c_{10} \int_{\Omega} (w_t^2 + |w|^2) dx \leq c_{11} E(t) \leq c_{12} E(0)$ и в силу (6.29) имеем

$$|Y| \leq c_{13} E(0). \quad (6.36)$$

Возвращаясь к неравенству (6.34) и используя (6.35) и (6.36), находим

$$\int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt \geq c (T - T_0) E(0),$$

где $T_0 = c_4^{-1} \left(c_9 + \frac{n-2}{2} c_{13} \right)$, $c^{-1} = \frac{1}{2 c_4} \sup_{x \in \Gamma} \sum_{k=1}^n m_k \nu_k > 0$. Доказательство Леммы 6.2 завершено.

Лемма 6.3. Пусть оператор L удовлетворяет условиям а) и б) пункта 4°. Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$c_2 \|\{w^0, w^1\}\|_F^2 \leq E(0) \leq c_1 \|\{w^0, w^1\}\|_F^2,$$

где $w^0 \in H^2(\Omega)$, $w^1 \in L_2(\Omega)$ — начальные данные задачи (2.1) — (2.3).

Доказательство : Используя (4.9) и (4.10), получим

$$E(0) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|w^1|^2 + |\Delta w^0|^2) dx \geq c (\|w^1\|_0^2 + \|w^0\|_2^2) = c \|\{w^0, w^1\}\|_F^2$$

с некоторой постоянной $c > 0$. Оценка сверху доказывается аналогично. Лемма доказана.

Из Лемм 4.1 — 4.3 получаем следующий результат.

Теорема 6.4. Пусть выполнены условия а) — с) и $T > 0$ достаточно велико. Тогда интеграл

$$\left(\int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |\Delta w|^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}$$

задает норму на множестве начальных данных $w^0(x)$ и $w^1(x)$ задачи (2.1) — (2.3), эквивалентную норме пространства Соболева на прямом произведении $F = \dot{H}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 4.3 в [1].

Теорема 6.5. Пусть выполнены условия Теоремы 6.4, и пусть $T > 0$ достаточно велико. Тогда оператор Λ , определяемый выражением (3.1) осуществляет изоморфизм между пространствами F и $F' = H^{-2}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, где $H^{-2}(\Omega)$ — пространство, сопряженное к $\dot{H}^2(\Omega)$.

Доказательство повторяет схему, проведенную в Теореме 4.4 работы [1], и поэтому мы его опускаем.

7*. Теперь приведем доказательство Теоремы 6.1.

Доказательство: По начальным данным $\{w^0, w^1\} \in F$ определяется единственное решение $w(x, t)$ задачи (2.1) — (2.3). Из Теоремы 6.4 следует существование граничных значений $\Delta w|_{\Sigma} \in L_2(\Sigma)$. Подставляя их в (2.6) и решая задачу (2.4) — (2.6) находим $z(x, t)$. Теперь нетрудно убедиться в том, что функция $u = z(x, t)$ является решением задачи (1.1), (1.5) — (1.7). Теорема доказана.

ABSTRACT. The paper investigates the control problem for systems described by partial differential equations of the fourth order with coefficients depending both on space and time variables. For a class of equations that are correct in Petrowsky sense the existence of exact control belonging to the space L_2 is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбагян, М. Эль-Санди, "Задача управления для эволюционных уравнений высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 2, стр. 57 – 75, 1994.
2. Р. Л. Шахбагян, "Задача управления для уравнений, корректных по Петровскому". Изв. НАН Армении, Математика, том 32, № 5, стр. 45 – 61, 1997.

ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕНОСОВ АЛГЕБР НА КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

С. А. Григорян, Т. Н. Панкратева, Т. В. Тонев

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

§1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебра $C(G)$ непрерывных функций на связанной компактной абелевой группе G является коммутативной банаховой алгеброй относительно равномерной нормы на G (т.е. $\|f\| = \sup_G |f(g)|$).

Подалгебра $A \subset C(G)$ разделяет точки группы G , если для каждой пары $g \neq h$, $g, h \in G$ существует функция $f \in A$ такая, что $f(g) \neq f(h)$. Будем говорить, что алгебра $A \subset C(G)$ равномерна на G , если A содержит постоянные, разделяющие точки группы G и замкнута относительно равномерной нормы на G . Пусть $S \subset \hat{G}$ – подполугруппа дуальной группы $\hat{G} = \{\chi \in C(G) : \chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{T}), |\chi| \equiv 1\}$, содержащая нейтральный элемент $\chi_0 \equiv 1$. Конечные линейные комбинации характеров $\chi \in S$ называются S -многочленами (или обобщенными тригонометрическими многочленами или обобщенными многочленами) на группе G . Рассмотрим замкнутую подалгебру A_S алгебры $C(G)$, которая порождена алгебраической полугруппой S . Функции из A_S называются S -аналитическими на G (или обобщенными аналитическими функциями). Они являются равномерными пределами S -многочленов на G . Каждая алгебра S -аналитических функций инвариантна относительно сдвигов элементов группы G .

Напомним, что равномерная алгебра A на группе G G -инвариантна (инвариантна относительно сдвигов), если для заданных функций $f \in A$ и $g \in G$, функция $f_g(h) = f(g h)$ принадлежит алгебре A . Каждая G -инвариантная равномерная алгебра на G порождается единственным образом определяемой подпо-

подгруппой $S \subset \widehat{G}$ (см. [1]). Элементы группы G будем обозначать через $g, h, \dots$, элементы дуальной группы $\widehat{G}$ через $a, b, \dots$, а если нужно подчеркнуть, что они являются функциями, то через $\chi_a, \chi_b, \dots$. Мы будем использовать мультипликативные обозначения для групповой операции в G и аддитивные обозначения для групповой операции в $\widehat{G}$. Предположим, что

(а) $S + (-S) = \widehat{G}$, т.е., что S порождает группу G , и

(б) $S \cap (-S) = \{0\}$, т.е. S не содержит нетривиальных подгрупп.

Отметим, что если имеет место (а), то S разделяет точки группы G ; если имеет место (б), то алгебра A_S антисимметрична. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – открытый единичный круг, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Дисковая алгебра $A(\mathbb{D})$ является классическим примером инвариантной относительно сдвигов алгебры типа A_S . Ее можно рассматривать как алгебру $A_{\mathbb{Z}_+} \mathbb{Z}_+$ -аналитических функций на $G = \mathbb{T}$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$. Здесь $\widehat{G} = \widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$. Пусть σ – нормированная мера Хаара на G . Каждой функции $f \in L^1(G, d\sigma)$ соответствует формальный ряд Фурье, т.е.

$$f \cong \sum_{a \in \widehat{G}} c_a(f) \chi_a,$$

где $c_a(f) = \int_G f \bar{\chi}^a d\sigma$ суть коэффициенты Фурье функции f . Множество $\text{sp}(f)$ всех $a \in \widehat{G}$, для которых $c_a(f) \neq 0$, называется спектром функции f . Всякую функцию $f \in C(G)$ можно аппроксимировать равномерно на G обобщенными многочленами $\sum_{j=1}^m d_j \chi_{a_j}$, с $a_j \in \text{sp}(f)$. Пусть S – подполугруппа группы $\widehat{G}$ и пусть M_S – максимальное идеальное пространство, инвариантное относительно сдвигов алгебры A_S . Преобразования Гельфанда $\widehat{f}$ элементов $f \in A_S$ являются непрерывными функциями на M_S , а $\widehat{A}_S = \{\widehat{f} : f \in A_S\}$ есть равномерная алгебра непрерывных функций на M_S .

В настоящей статье изучаются автоморфизмы инвариантных относительно сдвигов алгебр A_S . Напомним, что автоморфизмы дисковой алгебры $A(\mathbb{T})$ являются преобразованиями Мебиуса

$$\tau(z) = C \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad |C| = 1.$$

Если начало координат 0 является фиксированной точкой преобразования Мебиуса τ , то $\tau(z) = C z$, $|C| = 1$. В работе [1] было доказано, что любой автоморфизм φ большой G -дисковой алгебры A_S , $S \cup (-S) = \widehat{G}$ является внутренним, т.е.

существует $\tau \in \text{Hom}(S, S)$ и $g_0 \in G$ такие, что $\varphi(\chi) = \chi(g_0) \tau(\chi)$ для каждого $\chi \in S$. Инвариантная относительно сдвигов алгебра на G характеризуется тем, что все ее автоморфизмы – внутренние.

§2. ИДЕМПОТЕНТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Пусть $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ – множество всех непрерывных гомоморфизмов φ полугруппы S в замкнутый единичный диск $\overline{\mathbb{D}}$ в комплексной плоскости, т.е. $\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b)$, $|\varphi(a)| \leq 1$ для любых $a, b \in S$. В работе [1] показано, что максимальное идеальное пространство M_S алгебры A_S гомеоморфно множеству $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$, а граница Шилова ∂A_S гомеоморфна группе G . Соответствующий гомеоморфизм определяется так: для заданного $m \in M_S$, ассоциированный гомоморфизм $\varphi_m : S \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ определяется по формуле $\varphi_m(a) = m(\chi_a)$. Действительно, $\varphi_m(a+b) = m(\chi_{a+b}) = m(\chi_a \chi_b) = \varphi_m(a)\varphi_m(b)$, т.е. $\varphi_m \in \text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$. В этой статье мы будем всегда отождествлять M_S с $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$.

Каждый гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ допускает полярное разложение $\varphi = |\varphi| \cdot g$ относительно $|\varphi| \in \text{Hom}(S, [0, 1])$ и $g \in \text{Hom}(S, \mathbb{T})$. Здесь $|\varphi|(a) = |\varphi(a)|$ и $g(\chi_a) = \chi_a(g)$. В общем случае, полярное разложение не единственно. Однако, если $|\varphi| \neq 0$ на S , то оно единственно, так как имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. Полярное разложение $\varphi = |\varphi| \cdot g$ определяется единственным образом тогда и только тогда, когда $|\varphi(\chi_a)| > 0$ для каждого $a \in S$.

Доказательство: Пусть $\varphi = |\varphi| \cdot g_1 = |\varphi| \cdot g_2$. Если $|\varphi(\chi_a)| > 0$ для каждого $a \in S$, то $\chi_a(g_1) = g_1(\chi_a) = g_2(\chi_a) = \chi_a(g_2)$ для каждого $\chi_a \in \hat{G}$. Следовательно, $g_1 = g_2$. Предположим, что $\varphi(\chi_a) = 0$ для некоторого $a \in S$ и пусть $\varphi = |\varphi| g$, где $g(a) = \chi_a(g)$, $a \in S$. Так как S порождает $\hat{G}$, то можно единственным образом продолжить g до характера $\tilde{g}$ на $\hat{G}$. Рассмотрим полугруппу $S_\varphi = \{a \in S : \varphi(a) \neq 0\}$. Ясно, что g определяется единственным образом на S_φ , по $g(a) = \varphi(a)/|\varphi(a)|$, $a \in S_\varphi$. Обозначим через $G_\varphi \subset \hat{G}$ полугруппу $S_\varphi + (-S_\varphi)$, порожденную полугруппой S_φ . Так как $a \notin G_\varphi$, то $G_\varphi \neq \hat{G}$. Продолжение $\tilde{g}_1$ любого $g_1 \in \text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ с $\varphi = |\varphi| g_1$ совпадает с $\tilde{g}$ на G_φ , т.е. $\tilde{g}_1 \tilde{g}^{-1} \equiv 1$ на G_φ . Множество всех характеров h на $\hat{G}$ с $h \equiv 1$ на G_φ является группой, изоморфной фактор группе $\hat{G}/G_\varphi$ и поэтому содержит больше одного элемента. Следовательно, φ допускает полярное представление $\varphi = |\varphi| g$ с более чем одним

g. Доказательство завершено.

Множество $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ является полугруппой относительно поточечной операции $(\varphi \cdot \psi)(a) = \varphi(a)\psi(a)$. Следовательно, максимальное идеальное пространство M_S является полугруппой относительно операции, унаследованной из $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$. Отметим, что полугруппа $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ имеет нулевой элемент.

Элемент $\iota \in \text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ является идемпотентным гомоморфизмом подполугруппы S , если $\iota^2 = \iota$. Обозначим через I_S множество всех идемпотентов в $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$, которые не равны нулю тождественно на S . Отсюда следует, что I_S является подполугруппой полугруппы $\text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}}) = M_S$. Ясно, что идемпотентный гомоморфизм может принимать только значения 0 или 1. Обозначим через $Z(\iota)$ нулевое множество $\{a \in S : \iota(a) = 0\}$, а через $E(\iota)$ – опорное множество $\{a \in S : \iota(a) = 1\}$ элемента $\iota \in I_S$. Нетрудно доказывается нижеследующая лемма.

Лемма 1. (i) $E(\iota)$ – полугруппа в S ,

(ii) $Z(\iota)$ – полугрупповой идеал в S , (iii) $Z(\iota) \cup E(\iota) = S$.

Введем на множестве I_S идемпотентных гомоморфизмов подполугруппы S следующий частичный порядок: $\iota_1 < \iota_2$ тогда и только тогда, когда $\iota_1 \iota_2 = \iota_1$. Эквивалентно, $\iota_1 < \iota_2$ тогда и только тогда, когда $Z(\iota_1) \supset Z(\iota_2)$. На S имеются два тривиальных идемпотентных гомоморфизма: единичный $\epsilon \equiv 1$, и определенный по формуле

$$\omega(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a = 0 \\ 0 & \text{для } a \in S \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Ясно, эти два идемпотентных гомоморфизма ϵ и ω на S суть минимальные и максимальные элементы I_S соответственно.

Определение 1. Пусть S – подполугруппа в $\widehat{G}$. Сильная $\mathbb{N}$ -оболочка $[S]_s$ подполугруппы S есть множество

$$[S]_s = \{a \in \widehat{G} : \text{существует } n_a \in \mathbb{N} \text{ такое, что } n_a a \in S\}.$$

S называется строго $\mathbb{N}$ -совершенной, если $[S]_s = S$.

Легко проверить, что $[S]_s$ является полугруппой в $\widehat{G}$. Имеем $S \subset [S]_s$, и следовательно, $A_S \subset A_{[S]_s}$.

Лемма 2. Каждый идемпотентный гомоморфизм подполугруппы S может быть единственным образом продолжен до идемпотентного гомоморфизма сильной $\mathbb{N}$ -оболочки $[S]_s$.

Доказательство : Для заданного $\iota \in \mathcal{I}_S$, определим $\tilde{\iota}$ по формуле

$$\tilde{\iota}(a) = \begin{cases} 1 & \text{для } a \in [E(\iota)], \\ 0 & \text{для } a \in [Z(\iota)], \end{cases}$$

Предложение 2. Для каждого идемпотентного гомоморфизма $\iota \in \mathcal{I}_S$ имеется представляющая мера, концентрированная на фактор-группе абелевой группы G .

Доказательство : Пусть G_ι – подгруппа группы $\hat{G}$, порожденная полугруппой $E(\iota)$. Рассмотрим фактор-группу $\bar{G}_\iota = \hat{G}/G_\iota$ и определим полугруппу $\tilde{S} = \{\tilde{h} \in \bar{G}_\iota : \text{существует } h_1 \in \tilde{h} \text{ такой, что } h_1 \in S\}$. Идемпотента $\iota \in \text{Hom}(S, \overline{\mathbb{D}})$ порождает гомоморфизм $\tilde{\iota} \in \text{Hom}(\tilde{S}, \overline{\mathbb{D}})$ следующим образом : $\tilde{\iota}(\tilde{h}) = \iota(\gamma_1)$ для каждого $\tilde{h} \in \tilde{S}$, где γ_1 может быть любым элементом в $\tilde{h}$. Ясно, что $\tilde{\iota}$ является минимальным идемпотентным гомоморфизмом $\tilde{\omega}$ на $\tilde{S}$, т.е.

$$\tilde{\iota}(\chi + G_\iota) = \begin{cases} 1 & \text{для } \chi = 0 \\ 0 & \text{для каждого } \chi \in S. \end{cases}$$

Алгебра $A_{\tilde{S}}$ инвариантна относительно переносов на $H_\iota = G / \bigcap_{\chi \in S} \text{Ker}(\chi)$, где $\chi \in S$ и $\text{Ker}(\chi) = \{g \in G : \chi(g) = 1\}$. Имеем $\tilde{\chi}(\tilde{\iota}) = 1$ для $\tilde{\chi} \equiv 1$ и $\tilde{\chi}(\tilde{\iota}) = 0$ для $\tilde{\chi} \not\equiv 1$. Следовательно, $f(\tilde{\iota}) = \int_{H_\iota} f d\sigma_\iota$, где $f \in C(H_\iota)$ и $d\sigma_\iota$ – нормированная мера Хаара на группе H_ι .

§3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

Пусть $\Pi = \{z : \text{Im } z > 0\}$ – открытая верхняя полуплоскость. Обозначим через $A(\Pi)$ алгебру всех непрерывных функций на $\bar{\Pi} = \{z : \text{Im } z \geq 0\}$, ограниченных и аналитических в Π , и почти периодических на каждой горизонтальной прямой в $\bar{\Pi}$.

Определение 2. Алгебра B является почти периодической на G , если существует гомоморфный гомеоморфизм $j : \mathbb{R} \rightarrow G$, область изменения которого плотна в G и такой, что $f \circ j \in A(\Pi)$ для каждой функции $f \in B$.

Предложение 3. G -инвариантная алгебра $B \subset C(G)$ является почти периодической тогда и только тогда, когда она является подалгеброй большой G -дисковой алгебры A_G на G .

Пример 1. Бидисковая алгебра $A(\mathbb{T}^2)$ на торе $\mathbb{T}^2$ является почти периодической, так как она является подалгеброй большой дисковой алгебры A_α .

Отметим, что каждая почти периодическая алгебра на G изометрически изоморфна алгебре типа A_S для некоторой подполугруппы $S \subset \hat{G} \subset \mathbb{R}$, содержащей

нулевой элемент группы $\hat{G}$. Алгебра A_S – почти периодическая на G тогда и только тогда, когда имеется взаимно однозначное отображение i группы $\hat{G}$ в $\mathbb{R}$ такое, что $i(S) \subset \mathbb{R}_+$.

Теорема. Пусть A_S – почти периодическая алгебра на G . Если не существует нетривиального идемпотентного гомоморфизма на S , то или $S \cong \mathbb{Z}_+$ или каждый автоморфизм алгебры A_S – внутренний.

Доказательство : Пусть $m \in Z(\hat{\chi}) \subset M_S$. Пусть ω – минимальный идемпотентный гомоморфизм на S , т.е. $\omega(0) = 1$ и $\omega(a) = 0$ для $a \in S \setminus \{0\}$. Отметим, что $m|_S \in \text{Hom}(S, \mathbb{D})$ и множество $Z(m|_S) = \{\chi_a \in S : m(\chi_a) = 0\}$ является полугрупповым идеалом в S . Определим функцию γ на S по формуле $\gamma(a) = 0$ для $\chi_a \in Z(m|_S)$, и $\gamma(a) = 1$ для $\chi_a \in S \setminus Z(m|_S)$. Так как γ – идемпотентный гомоморфизм на S и $\gamma \neq \varepsilon$, то имеем $\gamma = \omega$ и, следовательно, $Z(m|_S) = Z(\gamma) = S \setminus \{0\}$. Отсюда следует, что $m(\chi_a) = \hat{\chi}_a(\omega)$. Поэтому $m = \omega$ и получаем $Z(\hat{\chi}) = \{\omega\}$.

Предположим, что $S \not\cong \mathbb{Z}_+$. Гомоморфное вложение $j : \mathbb{R} \rightarrow G$ продолжается до вложения $\bar{P}$ в M_S по формуле $\bar{j}(x + iy) = e^{-y} \cdot j(x) \in M_S$. Положим $\chi \in S$. Так как $|\chi| \equiv 1$ на $G = \partial A_S$, то имеем $|\chi \circ j| \equiv 1$ на $\mathbb{R}$. Далее, $\bar{\chi}(z) = \hat{\chi}(\bar{j}^{-1}(z)) \neq 0$ на $\bar{P}$, так как $\hat{\chi}$ равна нулю только в точке 0. Согласно теореме Безиковича [2], $\bar{\chi}(z) = C e^{i\tau z}$ на $\bar{P}$ с $\tau \geq 0$ и $C \in \mathbb{C}$, $|C| = 1$. Имеем $C = 1$, потому что $\chi(e) = 1$. Каждая $f \in A_S$ является ограниченной аналитической функцией на $\bar{P}$, следовательно, она может быть продолжена на $\bar{P}$. Пусть φ – автоморфизм алгебры A_S . Покажем, что функция $(\varphi(\chi) \circ j)(x)$ также продолжается до функции типа $C e^{i\tau x}$ на $\bar{P}$. Действительно, так как $\hat{\chi}$ равна нулю только в точке 0, то $\widehat{\varphi(\chi)}$. Следовательно, ограниченная аналитическая функция $\widehat{\varphi(\chi)}(z)$ не имеет нулей в $\bar{P}$. Кроме того, $|\varphi(\chi) \circ j| \equiv 1$ на $\mathbb{R}$, так как $|\chi| \equiv 1$ на $G = \partial A_S$. По теореме Безиковича [2], $\widehat{\varphi(\chi)}(z) = C e^{i\tau z}$, где $\tau \geq 0$, $C \in \mathbb{C}$, $|C| = 1$. Легко видеть, что отображение $\tau : S \rightarrow S$, определенное по формуле $\tau = \tau(r)$ является гомоморфизмом из S в S .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens and I. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, pp. 379 — 393, 1956.
2. A. Besicovitch, Almost Periodic Functions, Cambridge University Press, vol 32.
3. T. Tonev, Big Planes, Boundaries and Function Algebras, North Holland, 1992.

13 июня 1999

Институт математики
Академия наук Армении,
Казанский энергетический институт,
E-mail : sugrigor@kcn.ru

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

В. А. Мирзоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1998

Настоящая заметка завершает цикл работ автора [1-4], посвященных проблеме взаимосвязей между подмногообразиями с параллельными и полупараллельными структурами. Мы рассматриваем подмногообразия с полупараллельными ковариантными производными произвольного тензорного поля, определяемого фундаментальными формами α_s ($s \geq 2$) с использованием тензорных операций.

Напомним основные определения и результаты из [1-4]. Пусть M — подмногообразие пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ и пусть ∇ и $\nabla^\perp$ обозначают риманову и нормальную связности на M . Пусть $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ — связность Ван дер Вардена-Бортолотти. Для касательных к M векторных полей X и Y оператор кривизны $\bar{R}(X, Y)$ связности $\bar{\nabla}$ определяется по формуле $\bar{R}(X, Y) = [\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y] - \bar{\nabla}_{[X, Y]}$. Эти операторы действуют как дифференцирования тензорной алгебры на M . Тензорное поле K называется параллельным, если $\bar{\nabla}_X K = 0$ для любого X . Тензорное поле K называется полупараллельным, если $\bar{R}(X, Y) \cdot K = 0$ для любых X и Y .

Параллельные и полупараллельные фундаментальные формы α_s определяются по рекуррентной формуле $\alpha_{s+1} = \bar{\nabla} \alpha_s$. Подмногообразия с параллельными фундаментальными формами α_s называются s -параллельными, а подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами α_s называются s -полупараллельными. Для $s = 2$ подмногообразия называются параллельными (или симметричными) и полупараллельными (или полусимметричными) соответственно (см. [5] — [8]).

Определение 1. Общая точка x двух m -мерных подмногообразий M и $\bar{M}$ в $M_n(c)$ называется точкой касания s -го ($s \geq 2$) порядка, если

- 1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\bar{M})$ совпадают.
- 2) фундаментальные формы α_r и $\bar{\alpha}_r$, $r = 2, \dots, s$ подмногообразий M и $\bar{M}$ совпадают, т.е. $\alpha_r(X_1, \dots, X_r) = \bar{\alpha}_r(X_1, \dots, X_r)$ для любых векторов $X_1, \dots, X_r \in T_x(M)$.

Если условие 2) выполняется при любом $s \geq 2$, то x называется точкой полного касания.

При $s = 2$ это определение эквивалентно классическому определению точки касания второго порядка (см. [5]).

Определение 2. m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ называется огибающим s -го ($s \geq 2$) порядка некоторого семейства m -мерных подмногообразий $\{G\}$,

если в каждой точке $x \in M$, подмногообразие M имеет касание s -го порядка с некоторым подмногообразием из $\{G\}$, зависящим от x . Если в каждой точке $x \in M$ многообразие M имеет полное касание с каким-либо подмногообразием из $\{G\}$, то M называется огибающим полного порядка семейства $\{G\}$.

Известно (см. [9 — 11]), что стандартные погружения симметрических R -пространств исчерпываются параллельными подмногообразиями. Следующая теорема дает характеристику полупараллельных подмногообразий.

Теорема Лумисте, [5]. m -мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ полупараллельно тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства m -мерных параллельных подмногообразий. Следующие теоремы являются прямыми обобщениями теоремы Лумисте в направлении усиления законов огибания.

Теорема 1 ([1]). В $M_n(c)$ m -мерное подмногообразие M класса C^∞ является огибающим s -го ($s \geq 2$) порядка для семейства m -мерных s -параллельных подмногообразий $\{G\}$ тогда и только тогда, когда M имеет полупараллельные фундаментальные формы α_{s-1} и α , при $s \geq 3$ и полупараллельную фундаментальную форму α_2 при $s = 2$.

Теорема 2 ([1]). Пусть m -мерное подмногообразие M класса C^∞ в $M_n(c)$ имеет симметрические фундаментальные формы $\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}$ ($s \geq 4$). Тогда его фундаментальная форма α , будет симметричной в том и только в том случае, когда M является огибающим $(s-2)$ -го порядка семейства m -мерных $(s-2)$ -параллельных подмногообразий, у каждого из которых все фундаментальные формы до $(s-2)$ -го порядка включительно также являются симметрическими.

Пусть $F(M)$ обозначает класс тензорных полей на подмногообразии M в $M_n(c)$, определяемых только второй фундаментальной формой α_2 и ее ковариантными производными произвольного порядка с использованием тензорных операций. В частности, классу $F(M)$ принадлежат тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\bar{\nabla}$ соответственно, тензор Риччи R_1 , вектор средней кривизны H и их ковариантные производные любого порядка.

Пусть M и $\bar{M}$ — два m -мерных подмногообразия в $M_n(c)$. Обозначим через $T \in F(M)$ и $\bar{T} \in F(\bar{M})$ соответствующие тензорные поля, т.е., такие тензорные поля, которые выражаются через вторые фундаментальные формы α_2 и $\bar{\alpha}_2$ соответственно, и их ковариантные производные с помощью одних и тех же тензорных операций. Ковариантные производные $\bar{\nabla}_{X_1} \dots \bar{\nabla}_{X_r} T$ тензорного поля T на подмногообразии M будем обозначать через $\bar{\nabla}^r T$ (при $s = 0$ полагаем $\bar{\nabla}^0 T = T$).

Определение 3. Пусть m -мерные подмногообразия M и $\bar{M}$ в $M_n(c)$ имеют общую точку x и пусть $T \in F(M)$ и $\bar{T} \in F(\bar{M})$. Точка x называется точкой T (эквивалентно $\bar{T}$)-касания s -го ($s \geq 0$) порядка для M и $\bar{M}$, если

- 1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\bar{M})$ совпадают,
- 2) ковариантные производные $\bar{\nabla}^r T$ и $\bar{\nabla}^r \bar{T}$ совпадают в точке x при $r = 0, 1, \dots, s$ (для $s = 0$ мы говорим о точке “ T -касания”).

Очевидно, что каждая точка полного касания является точкой T -касания s -го порядка для любого $s \geq 0$.

Определение 4. m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ называется T -огибающим ($T \in F(M)$) s -го ($s \geq 0$) порядка для некоторого семейства m -мерных

подмногообразий $\{G\}$, если в каждой точке $x \in M$ подмногообразие M имеет T -касание s -го порядка с некоторым подмногообразием из $\{G\}$ (при $s = 0$ мы говорим о " T -огигающем подмногообразии").

Подмногообразие M с параллельной ковариантной производной $\bar{\nabla}' T$ называется $\bar{\nabla}' T$ -параллельным, а подмногообразие M с полупараллельной ковариантной производной $\bar{\nabla}' T$ называется $\bar{\nabla}' T$ -полупараллельным. При $s = 0$ мы говорим о T -параллельном и T -полупараллельном подмногообразии, соответственно.

Теорема 3 ([4]). Пусть m -мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ является R , $R^\perp$ и T -огигающим некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ m -мерного $\tilde{T}$ -параллельных подмногообразий, где $T \in F(M)$ определяется через вторую фундаментальную форму α_2 с использованием тензорных операций алгебраического характера. Тогда M является T -полупараллельным подмногообразием.

Теорема 4 ([4]). Пусть T как и в Теореме 3. Каждое m -мерное T -полупараллельное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ класса C^∞ является огигающим s -го ($s \geq 2$) порядка для некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ m -мерных $\tilde{T}$ -параллельных подмногообразий.

Следующие теоремы обобщают вышеприведенные результаты и распространяют их ковариантные производные $\bar{\nabla}' T$ произвольного тензорного поля $T \in F(M)$ на подмногообразии $M \subset M_n(c)$.

Теорема 5. Пусть m -мерное подмногообразие M класса C^∞ в $M_n(c)$ является R и $R^\perp$ -огигающим порядка $r = 0$ и T -огигающим порядка $s \geq 0$ ($T \in F(M)$) для некоторого семейства m -мерных $\bar{\nabla}' \tilde{T}$ -параллельных подмногообразий $\{\tilde{M}\}$. Тогда M является $\bar{\nabla}'^{s-1} \tilde{T}$ - и $\bar{\nabla}' \tilde{T}$ -полупараллельным при $s \geq 1$ и T -полупараллельным при $s = 0$.

Теорема 6. Пусть m -мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ класса C^∞ является $\bar{\nabla}'^{s-1} T$ и $\bar{\nabla}' T$ -полупараллельным, где $s \geq 0$ и $T \in F(M)$. Тогда M является огигающим полного порядка для некоторого семейства m -мерных $\bar{\nabla}' \tilde{T}$ -параллельных подмногообразий $\{\tilde{M}\}$.

Теорема 7. Пусть $M \subset M_n(c)$ является m -мерным подмногообразием класса C^∞ . Предположим, что на M ковариантные производные $\bar{\nabla}_{X_1} \dots \bar{\nabla}_{X_r} T$ ($r = 2, \dots, s+1$, $s \geq 2$) тензорного поля $T \in F(M)$ симметричны относительно векторных полей $X_1, \dots, X_r$, касательных к M . Тогда ковариантные производные $\bar{\nabla}_{X_1} \dots \bar{\nabla}_{X_{s+2}} T$ симметричны относительно $X_1, \dots, X_{s+2}$ тогда и только тогда, когда M является R , $R^\perp$ и $\bar{\nabla}' T$ -огигающим для некоторого семейства $\{\tilde{M}\}$ m -мерных $\bar{\nabla}' \tilde{T}$ -параллельных подмногообразий, для которых ковариантные производные $\bar{\nabla}_{\tilde{X}_1} \dots \bar{\nabla}_{\tilde{X}_{r'}} \tilde{T}$ симметричны по произвольным аргументам $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{r'}$, $r' = 2, \dots, s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Мирзоян, " S -полупараллельные подмногообразия в пространствах постоянной кривизны как огигающие s -параллельных подмногообразий", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 31, № 5, стр. 44 — 56, 1996.
2. В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с симметрическими фундаментальными формами высшего порядка как огигающие", Изв. вузов, Математика, № 9,

- стр. 35 — 40, 1997.
3. В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами высшего порядка как огибающие", Изв. вузов, Математика, № 8, стр. 79 — 80, 1998.
 4. В. А. Мирзоян, "Об обобщениях теоремы Лумисте о полупараллельных подмногообразиях", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 33, № 1, стр. 48 — 58, 1998.
 5. Ü. Lumiste, "Semi-symmetric submanifold as the second order envelope of symmetric submanifolds", Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., vol. 39, pp. 1 — 8, 1990.
 6. Ю. Г. Лумисте, "Полусимметрические подмногообразия", Итоги Науки и Техники, Проблемы Геометрии, том 23, стр. 3 — 28, 1991.
 7. Ü. Lumiste, "Semi-parallel time-like surfaces in Lorentzian spacetime form", Diff. Geom. Applic., vol. 7, pp. 59 — 74, 1997.
 8. Ü. Lumiste, "Isometric semi-parallel immersion of two-dimensional Riemannian manifolds into pseudo-euclidean spaces", New developments in differential geometry. Proc. Conf. Diff. Geom., July 27—30, 1996. Budapest : Kluwer Acad. Publ., pp. 243 — 264, 1999.
 9. D. Ferus, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", Math. Ann., vol. 247, pp. 81 — 93, 1980.
 10. M. Takeuchi, "Parallel submanifolds of space form. Manifolds and Lie groups", Papers in honor of Yōzo Matsushima. Basel : Birkhäuser., pp. 429 — 447, 1981.
 11. E. Backes, H. Reckzege, "On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature", Math. Ann., vol. 263, pp. 419 — 433, 1983.

3 сентября 1999

Государственный Инженерный
Университет Армении

КОРРЕКТНОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Р. З. Мхртчян, Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 5, 1999

В настоящей статье рассматривается уравнение

$$A y \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0, \quad (1)$$

а его коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a_k(x) \in C^{(n)}[0, +\infty) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a_k(x) = A_k < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Задача заключается в нахождении числа краевых условий при $x = 0$, обеспечивающих существование и единственность решения уравнения (1) в классе функций, ограниченных на полуоси $[0, +\infty)$ и принадлежащих пространству $C^{(n)}[0, +\infty)$. Задача Коши для регулярной системы дифференциальных уравнений в полуплоскости сводится к задаче типа Коши для уравнений вида (1) в классе функций, ограниченных на полуоси $x > 0$. Для систем уравнений вида (1) с постоянными коэффициентами эта задача рассматривалась в [1]. Норма в $C^{(n)}[0, +\infty)$ определяется следующим образом :

$$\|\varphi\|_{C^{(n)}[0, +\infty)} = \sum_{k=0}^n \sup_{[0, +\infty)} |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Полагая

$$B y \equiv y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$B y = K y, \quad (3)$$

где

$$K y = (B - A) y, \quad A y = B y - K y. \quad (3')$$

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения дифференциального оператора B . Предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leq \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_l < 0 < \operatorname{Re} \lambda_{l+1} \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_n, \quad l \geq 1. \quad (4)$$

Для уравнения (1) зададим начальные условия $y^{(k_j)}(0) = \alpha_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, l$, где числа k_j будут определены ниже.

Оператор K , определенный по (3'), отображает пространство $C^{(n)}[N, +\infty)$ в пространство $C[N, +\infty)$. Выбирая число N достаточно большим и используя (2), норму оператора K можно сделать сколь угодно малой, т.е.

$$\|K y\|_{C[N, +\infty)} \leq \varepsilon(N) \|y\|_{C^{(n)}[N, +\infty)}, \quad (5)$$

где $\varepsilon(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$B y = f(x), \quad y \in C^{(n)}[N, +\infty), \quad f(x) \in C[N, +\infty)$$

и запишем его в виде

$$\prod_{k=1}^l \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k E \right) \prod_{k=l+1}^n \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k E \right) y = f(x).$$

Частное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \lambda_k y = f(x), \quad x \in [N, +\infty), \quad \operatorname{Re} \lambda_k > 0, \quad k \geq l+1, \quad (6)$$

можно записать в виде (см. [2])

$$y_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{(x-\tau)\lambda_k} f(\tau) d\tau \equiv L_k(f). \quad (7)$$

Так как $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ и $x - \tau < 0$, то имеем

$$\begin{aligned} |L_k(f)| &\leq \int_x^{+\infty} e^{(x-\tau)\operatorname{Re} \lambda_k} |f(\tau)| d\tau \leq \sup_{(x, +\infty)} |f(\tau)| \int_x^{+\infty} e^{(x-\tau)\operatorname{Re} \lambda_k} d\tau = \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_k} \sup_{(x, +\infty)} |f(\tau)| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_k} \sup_{[0, +\infty)} |f(\tau)|. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\sup_{[N, +\infty)} |L_k(f)| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_k} \|f\|_{C[N, +\infty)}.$$

Таким образом, оператор L_k , определяемый по (7), ограничен. Общее решение уравнения (6) можно записать в виде (см. [2])

$$y(x) = y_0(x) + C e^{\lambda_k x} = L_k(f) + C e^{\lambda_k x}.$$

Для того, чтобы это решение было ограниченным необходимо и достаточно, чтобы $C = 0$. Следовательно, уравнение (6) имеет только одно ограниченное решение вида $y = L_k(f)$.

Рассмотрим теперь уравнение (6) в предположении, что $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, l$. Общим решением уравнения (6) в этом случае является

$$y = \int_0^x e^{\lambda_k(x-\tau)} f(\tau) d\tau + C e^{\lambda_k x} \equiv M_k(f(x)) + C e^{\lambda_k x}, \quad (8)$$

где

$$M_k(f) = \int_0^x e^{\lambda_k(x-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (8')$$

Имеем следующую оценку :

$$\sup_{[N, +\infty)} |M_k(f)| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re} \lambda_k|} \sup_{[N, +\infty)} |f(\tau)| = \frac{1}{|\operatorname{Re} \lambda_k|} \|f\|_{C[N, +\infty)}.$$

Полагая

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k E \right) y = V$$

при $x \in [N, +\infty)$ уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dV}{dx} - \lambda_n V = K y, \quad x \in [N, +\infty).$$

Согласно (7) имеем $V = L_n(K y)$. Следовательно

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k E \right) y = L_n(K y).$$

Повторяя этот процесс $(n - l)$ раз, получим

$$\prod_{k=1}^l \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k E \right) y = L_{l+1} \dots L_n(K y).$$

Положим

$$\prod_{k=1}^{l-1} \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k E \right) y = W.$$

Для простоты предположим, что корни $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ характеристического уравнения оператора B простые. Следовательно

$$\frac{dW}{dx} - \lambda_l W = L_{l+1} \cdots L_n(Ky).$$

Поэтому, в силу (8) имеем $W = M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky) + C_l e^{\lambda_l x}$. Аналогично можно показать, что

$$y = M_1 \cdots M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky) + g(x) = \mathbb{K}_n y + g(x), \quad (9)$$

где

$$g(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_l e^{\lambda_l x}, \quad \mathbb{K}_n y = M_1 \cdots M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky)$$

и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Заметим, что (1) эквивалентно уравнению (9).

Покажем теперь, что для достаточно больших N норма оператора $\mathbb{K}$ в пространстве $C^{(n)}[N, +\infty)$ меньше единицы. В силу (8') имеем

$$(\mathbb{K}_n y)' = M_2 \cdots M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky) + \lambda_1 \mathbb{K}_n(y). \quad (10)$$

Пологая $\mathbb{K}_{n-1} y = M_2 \cdots M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky)$, равенство (10) запишется в виде

$$(\mathbb{K}_n y)' = \mathbb{K}_{n-1} y + \lambda_1 \mathbb{K}_n y. \quad (11)$$

Дифференцируя (11), получим

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}_n y)'' &= (\mathbb{K}_{n-1} y)' + \lambda_1 (\mathbb{K}_n y)' = \mathbb{K}_{n-2} y + \lambda_2 \mathbb{K}_{n-1} y + \\ &+ \lambda_1 (\mathbb{K}_{n-1} y + \lambda_1 \mathbb{K}_n y) = \mathbb{K}_{n-2} y + (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbb{K}_{n-1} y + \lambda_1^2 \mathbb{K}_n y, \end{aligned}$$

где $\mathbb{K}_{n-2} y = M_3 \cdots M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky)$.

Аналогично имеем

$$(\mathbb{K}_n y)^{(p)} = \mathbb{K}_{n-p} y + a_{p1} \mathbb{K}_{n-p+1} y + \dots + a_{pp} \mathbb{K}_n y,$$

где

$$\mathbb{K}_{n-p} y = \begin{cases} M_{p+1} \cdots M_l \cdot L_{l+1} \cdots L_n(Ky) & \text{если } p \leq l-1 \\ L_{p+1} \cdots L_n(Ky) & \text{если } p \geq l. \end{cases}$$

Отметим, что коэффициенты a_j , $j = 1, 2, \dots, p$ зависят от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Операторы $\mathbb{K}_{n-p}$, $p = 0, 1, \dots, n-1$ являются композицией интегральных операторов. Следовательно, если норма оператора K в пространстве $C[N, +\infty)$ достаточно мала, то такими же будут нормы операторов $\mathbb{K}_{n-p}$, $p = 0, 1, \dots, n-1$ в этом пространстве. Используя (5) получим

$$\|(\mathbb{K}_n y)^{(p)}\|_{C[N, +\infty)} \leq b_p \|K y\|_{C[N, +\infty)} \leq b_p \varepsilon(N) \|y\|_{C^{(n)}[N, +\infty)}, \quad p = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

Из (12) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}_n y\|_{C^{(n)}[N, +\infty)} &= \sum_{p=0}^n \sup_{[N, +\infty)} |(\mathbb{K}_n y)^{(p)}| \leq \sum_{p=0}^n b_p \varepsilon(N) \|y\|_{C^{(n)}[N, +\infty)} = \\ &= \delta(N) \|y\|_{C^{(n)}[N, +\infty)}, \end{aligned}$$

где $\delta(N) = \sum_{p=0}^n b_p \varepsilon(N)$ стремится к нулю при $N \rightarrow +\infty$. Выбирая N_0 достаточно большим, получим оценку

$$\|\mathbb{K}_n y\|_{C^{(n)}[N, +\infty)} < \delta(N_0) \|y\|_{C^{(n)}[N_0, +\infty)},$$

где $\delta(N_0) < 1$.

Таким образом, операторное уравнение (9) имеет единственное решение в пространстве $C^{(n)}[N_0, +\infty)$ (см. [3]). Так как функция $g(x)$ зависит от l независимых постоянных, то уравнение (9) (а также и уравнения (1) и (3)) имеет l линейно независимых решений в пространстве $C^{(n)}[N_0, +\infty)$. Если $g_1(x), \dots, g_l(x)$ — линейно независимые функции, то функции $y_1 = \mathbb{K}_n y_1 + g_1, \dots, y_l = \mathbb{K}_n y_l + g_l$ тоже линейно независимы.

Пусть $\tilde{y}_k(x)$ — решение уравнения (1) на интервале $[0, N_0]$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{y}_k(N_0) = y_k(N_0), \quad \tilde{y}'_k(N_0) = y'_k(N_0), \dots, \tilde{y}_k^{(n-1)}(N_0) = y_k^{(n-1)}(N_0), \quad k = 1, \dots, l. \quad (13)$$

Положим

$$\omega_k(x) = \begin{cases} \tilde{y}_k(x) & \text{при } x \in [0, N_0] \\ y_k(x) & \text{при } x \in [N_0, +\infty), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Легко видеть, что $\omega_1(x), \dots, \omega_l(x)$ — линейно независимые решения уравнения (1) на полуоси $[0, +\infty)$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если $\omega_1(x), \dots, \omega_l(x)$, $l \leq n$ – линейно независимые решения уравнения (1) на отрезке $[0, N_0]$, то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \omega_1(0) & \dots & \omega_l(0) \\ \omega_1'(0) & \dots & \omega_l'(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{(n-1)}(0) & \dots & \omega_l^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = l. \quad (14)$$

Доказательство : следует из того, что детерминант Вронского уравнения (1) отличен от нуля. Действительно, так как столбцы матрицы (14) являются столбцами детерминанта Вронского линейно независимых решений уравнения (1), то они линейно независимы. Следовательно, существует хотя бы один минор порядка l , отличный от нуля. Тогда

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(p_1)}(0) & \dots & \omega_l^{(p_1)}(0) \\ \omega_1^{(p_2)}(0) & \dots & \omega_l^{(p_2)}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{(p_l)}(0) & \dots & \omega_l^{(p_l)}(0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (15)$$

Лемма доказана.

С помощью функций $\omega_1(x), \dots, \omega_l(x)$ построим решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(p_i)}(0) = \alpha_{p_i}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (16)$$

Для этого рассмотрим линейные комбинации

$$y = C_1 \omega_1(x) + \dots + C_l \omega_l(x), \quad (17)$$

где $C_1, \dots, C_l$ – постоянные, выбранные таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (16). Рассмотрим систему уравнений

$$C_1 \omega_1^{(p_k)}(0) + \dots + C_l \omega_l^{(p_k)}(0) = \alpha_{p_k}, \quad k = 1, \dots, l. \quad (18)$$

Детерминант системы (18) совпадает с (15). Так как последний отличен от нуля, то система (18) имеет единственное решение $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_l$. Следовательно, функция $y = \sum_{k=1}^l \bar{C}_k \omega_k(x)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (16). Из теоремы существования и единственности задачи Коши для уравнения (1) следует, что каждое решение уравнения (1), ограниченное в пространстве $C^{(n)}[0, +\infty)$, можно представить в виде (17). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2) и (4). Тогда существуют целые числа p_i , $0 \leq p_i \leq n-1$, $i = 1, 2, \dots, l$ такие, что задача (1), (16) имеет единственное решение в классе $C^{(n)}[0, +\infty)$ функций, ограниченных на полуоси $[0, \infty)$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с граничными условиями

$$B Z(0) = d, \quad (19)$$

где B – прямоугольная матрица порядка $(l \times n)$ с постоянным элементом, $d = (d_1, \dots, d_l)$ – l -мерный вектор-столбец с постоянными элементами и $Z(0) = (y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$ – n -мерный вектор-столбец. Последнее позволяет указать на необходимое и достаточное условие на члены матрицы B , при котором задача (1), (19) имеет единственное решение в классе $C^{(n)}[0, +\infty)$. Подставляя общее решение (17) в граничное условие (19), получим систему алгебраических уравнений

$$B W C = d \quad (20)$$

для коэффициентов $C = (C_1, \dots, C_n)$, где W – постоянная матрица размерности $(n \times l)$, столбцами которой являются векторы $(\omega_k(0), \omega'_k(0), \dots, \omega_k^{(n-1)}(0))$, $k = 1, 2, \dots, l$.

Система (20) имеет единственное решение относительно C тогда и только тогда, когда

$$\det B W \neq 0. \quad (21)$$

Следовательно мы установили следующий результат.

Теорема 2. Задача (1), (19) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда имеет место условие (21).

Замечание. Так как $\text{rank } W = l$, то всегда существует матрица B , удовлетворяющая условию (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, "Boundary value problems for partial differential equations and applications in electrodynamics", World Scientific, Singapore, pp. 212 — 217, 1994.
2. И. Г. Петровский, Лекции по Теории Обыкновенных Дифференциальных Уравнений, М., Наука, 1964.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы Функционального Анализа, М., Наука, 1965.

МЕТРИЧЕСКАЯ РАСХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Р. И. Овсепян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 5, 1999

§1. ВВЕДЕНИЕ

Через f будем обозначать 2π -периодические непрерывные функции, а через $\sigma(f)$ – их ряды Фурье

$$\sigma(f) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \quad (1)$$

В 1873 году Любуа Реймон построил пример функции f , ряд Фурье которой $\sigma(f)$ расходится в точке. Г. Шварц (1880), Лебег (1911) и Фейер (1911) построили более простые примеры функций, обладающих этим свойством. В 1904 году Фейер доказал, что ряд $\sigma(f)$ всегда суммируется методом Чезаро в равномерной метрике. Он также заметил, что если коэффициенты Фурье имеют порядок $o(1/n)$, то $\sigma(f)$ сходится равномерно. В 1926 году Пэли установил равномерную сходимость ряда $\sigma(f)$ при условии, что коэффициенты Фурье положительны (см. [1] или [2]). В 1933 году Сас (см. [3]) усилил это утверждение, показав, что для равномерной сходимости ряда (1) достаточно выполнение условий

$$A_n \geq -\frac{K}{n}, \quad B_n \geq -\frac{K}{n}, \quad n \geq 1, \quad (2)$$

где K – положительная постоянная.

Для любой последовательности $\beta_n > 0$, $\beta \uparrow \infty$ Харди и Литлвуд в 1934 году построили расходящийся в нуле ряд (1) с коэффициентами порядка $O(\beta_n/n)$ (см. [4] или [5]).

Отметим, что для каждой $\beta_n > 0$, $\beta \uparrow \infty$ существует $\alpha_n > 0$, $\alpha \uparrow \infty$ такая, что

$\frac{\alpha_n}{n} \downarrow 0$, $\alpha_n \leq \beta_n$, $n \geq 1$ (достаточно взять

$$\alpha_i = \begin{cases} \beta_k \prod_{j=1}^k (1 + n_j^{-1}) & \text{для } i \in (n_k, n_{k+1}], \\ \beta_1 & \text{для } i \leq n_1, \end{cases} \quad n_k \uparrow \infty.$$

а выбирая n_k подходящим образом обеспечить условия $\alpha_n \leq \beta_n$ и $\alpha_n \uparrow \infty$).

Таким образом, можно считать, что в примере Харди и Литлвуда, мажорантой коэффициентов ряда (1) является последовательность $a_n \equiv \frac{\alpha_n}{n}$ со свойствами

$$a_n \downarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \infty. \quad (3)$$

Отметим, что условие $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \infty$ является существенным для конструкции Харди-Литлвуда.

Может ли подобная расхожимость иметь место для рядов Фурье, если их коэффициенты A_n, B_n , обладающие мажорантой $\{a_n\}$, удовлетворяют менее строгим условиям? Ниже мы даем положительные ответы для двух интерпретаций расхожимости.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для любой последовательности a_n , удовлетворяющей условиям

$$a_n \downarrow 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} na_n = \infty, \quad (4)$$

существует непрерывная функция f такая, что ее ряд Фурье (1) расходится в нуле и

$$|A_n| \leq a_n, \quad |B_n| \leq a_n. \quad (5)$$

Отсюда и из теоремы Саса получаем следующий результат.

Следствие. Условие $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} na_n < \infty$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (1) с коэффициентами A_n, B_n , удовлетворяющими условиям $A_n \leq a_n$, $B_n \leq a_n$, $a_n \downarrow 0$.

Отметим, что для монотонно убывающей последовательности a_n второе условие в (4) равносильно следующему :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ka_k = \infty.$$

Последнее условие эквивалентно существованию последовательности $n_k \uparrow \infty$ такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty$.

Теорема 2. Для любой последовательности a_n , удовлетворяющей условиям

$$a_n \downarrow 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 = \infty, \quad (6)$$

существует функция $F \in L^1(0, 2\pi)$ с L^1 -расходящимся рядом Фурье, коэффициенты которого ограничены мажорантой $\{a_n\}$.

Читатель может сравнить эти результаты со стандартным $O(1/\ln n)$ критерием для коэффициентов L^1 -расходимости рядов Фурье (см [5], стр. 206).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Лемма. Для последовательности $a_n \downarrow 0$ равенство (4) равносильно следующему : для любого $\gamma > 1$ существует целое число m такое, что

$$a_{\gamma m} \geq \frac{1}{m}. \quad (7)$$

Доказательство : Для доказательства необходимости предположим обратное : существует γ такое, что для каждого $m \geq 1$ выполнено неравенство $a_{\gamma m} < 1/m$. Отметим, что из $\gamma m \leq n < \gamma(m+1)$ следует $n a_n < \gamma(m+1) a_{\gamma m} < \gamma(m+1) \frac{1}{m}$, в противоречии с (4).

Из неравенства $\gamma(m-1) \leq n < \gamma m$ вытекает $n a_n \geq \gamma(m-1) a_{\gamma m} \geq \gamma(m-1) \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$, следовательно достаточность доказана.

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $P_n(x) \equiv \sum_{k=1}^n \cos kx$ и

$$Q_n(x) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} = 2 \sin 2nx \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Предположим, что m выбрано в соответствии с Леммой при $\gamma = 4n$. Остается показать, что если n_i растет достаточно быстро, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i \ln n_i} P_{m_i}(x) Q_{n_i}(m_i x) \quad (8)$$

определяет искомую функцию. Сначала заметим, что спектр полинома в (8) сосредоточен на отрезке $[(n_i - 1)m_i, (3n_i + 1)m_i]$. Следовательно, за счет быстрого роста n_i можно обеспечить непересекаемость этих полиномов. Полиномы из (8) равномерно ограничены порядком $O(1/\ln n_i)$. Поэтому можно считать, что (8) определяет ряд Фурье непрерывной функции f . Заметим, что коэффициенты Фурье этой функции удовлетворяют (5), так как коэффициенты Фурье полинома из (8) ограничены величиной $(m_i \ln n_i)^{-1}$, а в силу Леммы $a_{4n_i m_i} \geq 1/m_i$.

Заметим, что в точке $x = 0$ мажоранта частных сумм полинома $Q_n(x)$ (и, следовательно, полинома $Q_n(mx)$) достигает максимальной величины порядка $\ln n$ (см., например, [5], стр. 472). Следовательно, максимальное колебание при $x = 0$ полиномов из (8) достигает порядка 1, что обеспечивает расходимость в нуле. Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Ядро Фейера

$$K_m(x) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{m+1-i}{m+1} \cos ix$$

обладает следующими известными свойствами :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} K_m(x) &\geq \frac{\cos 1}{2} \quad \text{для} \quad |x| \leq \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{m} K_m(x) &\leq \frac{8}{m^2 x^2} \quad \text{для} \quad 0 \leq |x| \leq \pi. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{m} \sum_l K_m \left(x - 16l \frac{1}{m} \right) \cos N_l x, \quad (10)$$

где числа N_l подобраны так, чтобы $N_l - m = 2(l-1)m + 1$, $1 \leq \frac{16l}{m} \leq 2\pi$. При фиксированных l и m пересечение

$$\left[\frac{16l-1}{m}, \frac{16l+1}{m} \right] \cap \left\{ x : |\cos N_l x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

дает некоторое количество отрезков $\Delta(j, l, m)$ длины $\pi/(2N_l)$ с общей мерой большей, чем $1/(4m)$. Из (9) следует, что на каждом $\Delta(j, l, m)$ модуль выражения (10) превышает некоторую абсолютную постоянную $\alpha > 0$, например (см. [6]),

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\cos 1}{2} - 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(16k)^2} \right].$$

Таким образом, выражение (10) ограничено от нуля постоянной α на некотором множестве $E_m = \bigcup_{j,l} \Delta(j, l, m)$ с мерой $\mu(E_m)$, превышающей $2\pi/100$. Из (6) и Леммы следует, что для $\gamma = 17\pi$ существует число p такое, что $\sqrt{p} a_{\gamma p} \geq 1$. Полагая $m = [\sqrt{p}]$, где $[p]$ целая часть p , получим

$$a_{17\pi m^2} > \frac{1}{m+1}. \quad (11)$$

При больших n ясно, что m тоже велико. Пусть $\{T_n(x)\}$ – последовательность тригонометрических полиномов со следующими свойствами :

- а) $T_{n_i}(x)$ – полиномы порядка n_i и не содержат постоянную,
 б) $T_{n_i}(x)$ нормированы в L^1 для всех n_i ,
 в) $v_i \rightarrow \infty$, где v_i – максимальное колебание L^1 -норм частных сумм полинома T_{n_i} ,

см. [2], стр. 599. Будем считать, что для каждого n_i последовательность m_i выбирается согласно (11). Покажем теперь, что для достаточно быстро растущей последовательности n_i выражение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i v_i} \left[\sum_l K_{m_i} \left(x - 16l \frac{1}{m_i} \right) \cos N_l x \right] T_{n_i}(16m_i^2 x) \quad (12)$$

дает искомый ряд Фурье функции $F \in L^1(0, 2\pi)$. Сначала заметим, что спектры полиномов внешней суммы принадлежат отрезку $[15m_i^2, 17n_i m_i^2]$. Следовательно, для n_i, m_i , удовлетворяющих $15m_{i+1}^2 > 17n_i m_i^2$, эти полиномы можно сделать непересекающимися. Учитывая, что коэффициенты Фурье полиномов $K_m(x)$ и $T_n(x)$ ограничены единицей, согласно (11) заключаем, что (5) выполняется для коэффициентов тригонометрического ряда (12). Так как L^1 -норма полинома внешней суммы из (12) не превосходит $1/v_i$, то при условии $\sum v_i^{-1} < \infty$ получим ряд Фурье.

Теперь отметим, что при фиксированном i длина каждого интервала $\Delta(j, l, m_i)$ больше, чем πm_i^{-2} . Отсюда следует, что на каждом $\Delta(j, l, m_i)$ максимальное колебание частных сумм полинома внешней суммы (12) превышает число $\alpha \mu(\Delta(j, l, m_i))$. Следовательно, на множестве $E_{m_i} = \bigcup_{j,l} \Delta(j, l, m_i)$ (и, следовательно, на всем интервале $(0, 2\pi)$) это колебание превышает $\alpha\pi/50$, а это означает L^1 -расходимость ряда Фурье (15). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Paley, "Two theorems concerning Fourier series", Jour. London Math. Soc., vol. 1, pp. 19 – 25, 1926.
2. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, 1961.
3. О. Szasz, "Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen", Acta Math., vol. 61, no. 1–2, pp. 185 – 201, 1933.
4. G. H. Hardy, I. E. Littlewood, "Some new convergence criteria for Fourier series", Annali di Pisa, vol 3, pp. 43 – 62, 1934.
5. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды I, Мир, Москва, 1965.
6. С. Ш. Галстян, Р. И. Овсепян, "Тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами", Матем. Сборник, том 187, № 11, стр. 3 – 26, 1996.

17 апреля 1999

Институт математики
 Национальная Академия Наук Армении
 E-mail : sart@instmath.sci.am

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34

НОМЕР 5

1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка А. О. Бабаян	5
Локализация спиральных особенностей степенных рядов Т. Л. Гарибян	19
О вырождающемся дифференциально-операторном уравнении Л. П. Тепоян	26
Сложность выводов в одной системе классического исчисления высказываний А. А. Чубарян	34
Задача управления для корректных по Петровскому уравнений с переменными коэффициентами Р. Л. Шахбагян, Л. Г. Тоноян	44
Краткие сообщения	
Внутренние автоморфизмы инвариантных относительно переносов алгебр на компактных группах С. А. Григорян, Т. Н. Паюкратева, Т. В. Тонев	57
Подмногообразия с параллельными и полупараллельными структурами В. А. Мирзоян	63
Корректность граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой Р. З. Мкртчян, Н. Е. Товмасын	67
Метрическая расходимость тригонометрических рядов Фурье Р. И. Овсепян	74