

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0000-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Դ. Առաքելյան

Գ.Գ. Գևորգյան

Վ.Ս. Զաքարյան

Ա.Ա. Թալալյան

Ն.Ե. Թովմասյան

Վ.Ա. Սարտիրոսյան

Ս.Ն. Սերգելյան

Բ.Ս. Նահապետյան

Ա.Բ. Ներսիսյան

Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Ս.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р. В. Амбарцумян

Н. У. Аракелян

Г. Г. Геворкян

В. С. Закарян

А. Г. Камалян

В. А. Мартиросян

С. Н. Мергелян

Б. С. Нагапетян

А. Б. Нерсисян

А. А. Тагілян

Н. Е. Товмасян

Р. Л. Шахбагян (з.м. главного редактора)

Ответственный секретарь

М. А. Оганесян

ОБОБЩЕННАЯ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

В работе проводится сравнительный анализ трех классов бесконечно дифференцируемых функций и исследуется задача обобщенной квазианалитичности для одного из этих классов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с определений трех классов бесконечно дифференцируемых функций.

Определение 1. Пусть $M = \{M_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел и $\rho > 1$. Функция $\varphi \in C^1(0, \infty)$ принадлежит классу $C(M, L_\rho, (0, \infty))$, если существуют последовательные дробные производные по Вейлю

$$L_\rho^0 \varphi(x) = \varphi(x), \quad L_\rho^1 \varphi(x) = \frac{d}{dx} J \varphi(x), \quad L_\rho^n \varphi(x) = \frac{d}{dx} J L_\rho^{n-1} \varphi(x), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где $J \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt$, $\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющие условиям

$$|J L_\rho^n \varphi(x)| \leq c h^n M_n, \quad x \in (0, \infty), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} J L_\rho^n \varphi(x) = J L_\rho^n \varphi(0+), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J L_\rho^n \varphi(x) = 0, \quad (3)$$

$$L_\rho^n \varphi(x) = O(x^\Delta), \quad x \rightarrow \infty, \quad L_\rho^n \varphi(x) = O(x^{-\delta}), \quad x \rightarrow 0, \quad 0 \leq \Delta < 1, \quad 0 \leq \delta \leq \alpha, \quad (4)$$

где $c, h > 0$ зависят от φ .

Ставится задача нахождения условия пустоты класса функций $C(M, L_\rho, (0, \infty))$ при дополнительном условии (см. [1]) $J \varphi(0+) = J L_\rho^\lambda \varphi(0+) = 0$, $\lambda \in \{\lambda_n\} \subset \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Аналогичные задачи решены для следующих двух классов функций.

Определение 2. [2] Функция $\varphi(u)$ принадлежит классу $C_\delta(M, \alpha)$, $\alpha > 0$, $1 < \delta < 2$, $M_n \geq M_{n-1}$ при $n > n_0 > 0$, если она аналитична в угле $U(\alpha) =$

$\{u : |\arg u| < \frac{\pi}{2}\alpha\}$, а в замкнутом угле $\bar{U}(\alpha) = \{|\arg u| \leq \frac{\pi}{2}\alpha\}$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi^{(n)}(u)| \leq ch^n(1 + |u|^\delta)M_n, \quad \delta \in (1, 2), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где постоянные $c, h > 0$ зависят только от ψ .

Определение 3. [3] Функция $\psi(u)$ принадлежит классу $JC(\mathcal{M}, \alpha)$, $\alpha > 0$, если она аналитична и ограничена в угле $U(\alpha)$, и для любого луча $l(\theta) = \{u : 0 < |u| < \infty, \arg u = \theta\}$ принадлежащего замкнутому углу $\bar{U}(\alpha)$, имеем

$$\int_{l(\theta)} |\psi^{(n)}(u)| du \leq ch^n M_n, \quad \psi^{(n)}(u) = O(1), \quad u \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где постоянные $c, h > 0$ зависят только от ψ .

§1. СРАВНЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} P_n(u, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Gamma(\xi + n)u^{-\xi-n}t^{(\xi+n)/\rho}}{\Gamma(1 + (\xi + n)/\rho)Q(\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{\Gamma(\xi)u^{-\xi}t^{\xi/\rho}}{\Gamma(1 + \xi/\rho)Q(\xi - n)} d\xi, \quad \rho > 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $-n < \sigma < 1$, $0 < \sigma' < n + 1$, $u, t \in (0, \infty)$ и

$$Q(\xi) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{a_\nu}\right), \quad 1 = a_1 < a_2 < \dots, \quad \sum \frac{1}{a_\nu} < \infty. \quad (8)$$

Теорема 1. Для функции (7) справедливы следующие утверждения :

- 1) при $0 < \sigma' < n + 1$ функция $P_n(u, t)$ не зависит от σ' ;
- 2) функция $P_n(u, t)$ аналитична относительно u в угле $U(1 - 1/\rho)$, и интегралы (7) существуют в $\bar{U}(1 - 1/\rho)$;
- 3) при $u \in \bar{U}(1 - 1/\rho)$, $u \neq 0$

$$P_n(u, t) = O(u^{-\sigma'}), \quad u \rightarrow \infty, \quad P_n(u, t) = O(1), \quad u \rightarrow 0,$$

$$P_n(u, t) = O(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad P_n(u, t) = o(1), \quad t \rightarrow 0. \quad (9)$$

Доказательство : При $\xi = \sigma' + i\eta$ имеем

$$\frac{1}{|Q(\xi - n)|} \left| \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(1 + \xi/\rho)} \right| = \frac{\rho}{|\xi Q(\xi - n)|} \left| \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi/\rho)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{c^{\sigma'}}{\sigma'} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\sigma'}{\rho\nu}\right) e^{-\sigma'/(\rho\nu)}}{\left(1 + \frac{\sigma'}{\nu}\right) e^{-\sigma'/\nu}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{y^2}{(\rho\nu + \sigma')^2}}{1 + \frac{y^2}{(\nu + \sigma')^2}} \right)^{1/2} \frac{1}{|Q(\sigma' + iy - n)|}.$$

Используя хорошо известные свойства эйлеровской гамма-функции в комплексной плоскости, легко проверить, что

$$\frac{1}{|Q(\xi - n)|} \left| \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(1 + \xi/\rho)} \right| \leq c_1(\sigma', \mu) \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi|y|}{2\rho} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2}|y| \right)} \frac{1}{(1 + y^2)^\mu}, \quad (10)$$

где μ достаточно велико. Отметим, что оценки этого типа могут быть получены не только для $0 < \sigma' < n + 1$, но и для каждого $\sigma' < 0$, удовлетворяющего $\sigma' \neq -k$, $k = 0, 1, \dots$.

Полученная оценка позволяет перемещать прямую интегрирования в (7) в пределах $0 < \sigma' < n + 1$, если подынтегральная функция в (7) не имеет особых точек в полосе $0 < \operatorname{Re} \xi < n + 1$, т.е. $P_n(u, t)$ не зависит от σ' .

Далее, оценка (10) показывает, что функция $P_n(u, t) [\mu] - 1$ раз дифференцируема в $\bar{U}(1 - 1/\rho)$. Следовательно, в силу произвольности $\mu > 0$, функция $P_n(u, t)$ аналитична в $U(1 - 1/\rho)$ и бесконечно дифференцируема в $\bar{U}(1 - 1/\rho)$.

Если мы сдвинем прямую интегрирования (7) влево, перешагнув через особые точки подынтегральной функции, то результат остается в силе, если выделить вычеты подынтегральной функции относительно соответствующих особых точек. Первое и четвертое соотношения в (9) относятся к случаю $0 < \sigma' < n + 1$, а второе и третье относятся к переносу прямой интегрирования в (7) в позицию между $\xi = 0$ и $\xi = -1$. В последнем случае

$$P(0, t) = \operatorname{Res}_{\xi=0} \frac{\Gamma(\xi) u^{-\xi} t^{\xi/\rho}}{\Gamma(1 + \xi/\rho)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} u^{-\xi} t^{\xi/\rho} \frac{\Gamma(\xi + 1)}{\Gamma(1 + \xi/\rho)} = 1.$$

Этим завершается доказательство Теоремы 1.

Теорема 2. Для каждого $0 \neq \varphi \in C(M, L_\rho, (0, \infty))$ функция

$$0 \neq \psi(u) = \int_0^\infty P(u, t) L_\rho^1 \varphi(t) dt, \quad P(u, t) = P_0(u, t) \quad (11)$$

принадлежит классу $C_\delta(M', \alpha)$, где $\delta \in (1, 2)$, $M' = \{M'_n = M_{n+1}\}$ и

$$\psi(0) = -J\varphi(0), \quad \psi^{(n)}(0) = -J L_\rho^n \varphi(0) \frac{1}{Q(-n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Доказательство : Рассмотрим преобразование

$$J_n(u) = \int_0^\infty P_n(u, t) L_\rho^{n+1} \varphi(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Существование интегралов в (13) следует из суммируемости функции $L_\rho^n \varphi(x)$ на $(0, \infty)$, условий (2) и следующего представления :

$$P_n(u, t) = \sum_{\nu=0}^k c_\nu t^{-\nu/\rho} + O(t^{-k/\rho}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $k > 0$ – произвольное целое число. Интегрируя по частям в (13), получим

$$J_n(u) = P_n(u, t) J L_\rho^n \varphi(t) \Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \tilde{P}_n(u, t) J L_\rho^n \varphi(t) dt, \quad (13')$$

где

$$\tilde{P}_n(u, t) = \frac{\partial P_n(u, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi + n) \frac{\xi+n}{\rho} u^{-\xi-n} t^{(\xi+n)/\rho-1}}{\Gamma(1 + (\xi + n)/\rho) Q(\xi)} d\xi. \quad (14)$$

Так как подынтегральная функция (14) не имеет особенностей в полосе $-(n+1) < \operatorname{Re} \xi = \sigma < 1$, то в случае $1 < l < 1 + 1/\rho$ получим

$$\tilde{P}_n(u, t) = O(t^{-l}), \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (14')$$

Функция $J L_\rho^n \varphi(x)$ равномерно ограничена и удовлетворяет условию (3). Поэтому, в силу Теоремы 1 первый член в правой части (13') обращается в нуль. Следовательно

$$\begin{aligned} J_n(u) &= - \int_0^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(u, t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (\tau - t)^{\alpha-1} L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau dt = \\ &= - \int_0^{\infty} L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\tau} \frac{\tilde{P}_n(u, t)}{\Gamma(\alpha)} (\tau - t)^{\alpha-1} dt. \end{aligned} \quad (13'')$$

Для того, чтобы обосновать изменение порядка интегрирования в (13''), рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & \text{для } t > 0, \\ 0, & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Для каждого $A > 0$ имеем $-J_n(u) = \int_0^A \tilde{P}_n(u, t) dt \int_0^{\infty} g(\tau - t) L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau + Y(u)$, где $Y(u) = \int_A^{\infty} \tilde{P}_n(u, t) dt \int_0^{\infty} g(\tau - t) L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau$. В силу (2), (4) и (14'), при $A \rightarrow \infty$ имеем $Y(u) =$

$$= \int_A^{\infty} \tilde{P}_n(u, t) dt \int_t^{\infty} (\tau - t)^{\alpha-1} L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau = \Gamma(\alpha) \int_A^{\infty} \tilde{P}_n(u, t) J L_\rho^n \varphi(t) dt = o(1).$$

Следовательно

$$J_n(u) = \int_0^A \tilde{P}_n(u, t) dt \int_0^B g(\tau - t) L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^A \tilde{P}_n(u, t) dt \int_B^\infty g(\tau - t) L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau + o(1), \quad \text{при } A \rightarrow \infty, \quad B = A + 1.$$

Для $t \in (0, A)$ и $B < \xi < \infty$ получаем

$$M_1(B, t) = \int_B^\infty g(\tau - t) L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau = \int_B^\infty (\tau - t)^{\alpha-1} L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau =$$

$$= (B-t)^{\alpha-1} \int_B^\xi L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau = (B-t)^{\alpha-1} [J L_\rho^{n-1} \varphi(\xi) - J L_\rho^{n-1} \varphi(B)] = o(1), \quad A \rightarrow \infty.$$

Из (14') находим

$$J_n(u) = \int_0^A \tilde{P}_n(u, t) dt \int_0^B g(\tau - t) L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau + o(1), \quad A \rightarrow \infty, \quad B = A + 1.$$

Применение теоремы Фубини дает

$$J_n(u) = \int_0^B L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau \int_0^B \tilde{P}_n(u, t) g(\tau - t) dt - M_2(A, B) + o(1), \quad A \rightarrow \infty,$$

где $M_2(A, B) = \int_0^B L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau \int_A^B \tilde{P}_n(u, t) g(\tau - t) dt$. Так как $g(\tau - t) = 0$ при $\tau < A$ и $t \in [A, B]$, то имеем $M_2(A, B) = \int_A^B L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau \int_A^B \tilde{P}_n(u, t) g(\tau - t) dt$. С другой стороны

$$L_\rho^n \varphi(\tau) = O(B^\Delta), \quad \tilde{P}_n(u, t) = O(A^{-1-\sigma'}), \quad \int_A^B |g(\tau - t)| dt < c, \quad 0 < \sigma' < \rho^{-1},$$

т.е. $M_2(A, B) = o(1)$, при $A \rightarrow \infty$. Следовательно

$$J_n(u) = \int_0^B L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau \int_0^\tau \tilde{P}_n(u, t) \frac{(\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt + o(1), \quad B \rightarrow \infty,$$

откуда следует (13''). Возвращаясь к доказательству Теоремы 2, вычислим интеграл

$$A_n(\tau) = \int_0^\tau \tilde{P}_n(u, t) \frac{(\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt.$$

Имеем

$$A_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi + n) u^{-\xi-n}}{\Gamma((\xi + n)/\rho) Q(\xi)} B_n(\tau, \xi) d\xi, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} B_n(\tau, \xi) &= \int_0^\tau \frac{t^{(\xi+n)/\rho-1} (\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{\tau^{(\xi+n-1)/\rho}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{(\xi+n)/\rho-1} (1-x)^{\alpha-1} dx = \\ &= \tau^{(\xi+n-1)/\rho} \frac{\Gamma((\xi + n)/\rho)}{\Gamma(1 + (\xi + n - 1)/\rho)}, \end{aligned} \quad (16)$$

поскольку $\alpha + 1/\rho = 1$ и $\operatorname{Re}(\xi + n) > 0$. Согласно (15), (16) и (13''), при $-n < \sigma < 1$ получим

$$J_n(u) = - \int_0^\infty L_\rho^n \varphi(\tau) d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi + n) u^{-\xi-n}}{\Gamma(1 + (\xi + n - 1)/\rho) Q(\xi)} t^{(\xi+n-1)/\rho} d\xi. \quad (17)$$

С другой стороны, в силу (13) при $-n + 1 < \sigma < 1$ имеем

$$J_{n-1}(u) = \int_0^\infty L_\rho^n \varphi(t) dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi + n - 1) u^{-\xi-n+1}}{\Gamma(1 + (\xi + n - 1)/\rho) Q(\xi)} t^{(\xi+n-1)/\rho} d\xi.$$

Следовательно

$$J'_{n-1}(u) = - \int_0^\infty L_\rho^n \varphi(t) dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi + n) u^{-\xi-n}}{\Gamma(1 + (\xi + n - 1)/\rho) Q(\xi)} t^{(\xi+n-1)/\rho} d\xi. \quad (18)$$

Сравнение (17) и (18) показывает, что $J'_{n-1}(u) = J_n(u)$. Поэтому

$$J_0^{(n)}(u) = J_n(u), \quad n = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Из (11) и $P(0, t) = 1$ следует, что

$$\psi(0) = J_0(0) = \int_0^\infty L_\rho^1 \varphi(t) dt = J\varphi(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} = -J\varphi(0+).$$

Из (19) и (11) имеем

$$\psi^{(n)}(u) = J_n(u) = \int_0^\infty P_n(u, t) L_\rho^{n+1} \varphi(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Используя

$$P_n(0, t) = \operatorname{Res}_{\xi=0} \frac{\Gamma(\xi) u^{-\xi} t^{\xi/\rho}}{\Gamma(1 + \xi/\rho) Q(\xi - n)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} u^{-\xi} t^{\xi/\rho} \frac{\xi \Gamma(\xi)}{\Gamma(1 + \xi/\rho) Q(\xi - n)} = \frac{1}{Q(-n)},$$

из (20) получаем

$$\psi^{(n)}(0) = -J L_\rho^n \varphi(0+) \frac{1}{Q(-n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Для завершения доказательства Теоремы 2 осталось показать, что функция $\psi(u)$, определенная по (11), принадлежит классу $C_b(M, \alpha)$. Для этого нам нужны оценки, аналогичные оценке (5). Интегрирование по частям в (20) дает

$$\psi^{(n)}(u) = - \int_0^\infty J L_\rho^n \varphi(t) dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi) u^{-\xi}}{\Gamma(1 + \xi/\rho) Q(\xi - n)} \frac{\xi}{\rho} t^{\xi/\rho-1} d\xi.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_0^u \psi^{(n)}(u') du' &= \psi^{(n-1)}(u) - \psi^{(n-1)}(0) = \\ &= - \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi) t^{\xi/\rho-1}}{\Gamma(\xi/\rho) Q(\xi-n)(1-\xi)} x^{1-\xi} \Big|_{x=0}^u d\xi J L_\rho^n \varphi(t) dt, \quad -1 < \sigma < 1. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\psi^{(n-1)}(u) = \psi^{(n-1)}(0) + \int_0^\infty P_n^*(u, t) J L_\rho^n \varphi(t) dt, \quad (22)$$

где

$$P_n^*(u, t) = \int_0^\infty \tilde{P}_n(u', t) du' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\xi) u^{1-\xi} t^{\xi/\rho-1}}{\Gamma(\xi/\rho) Q(\xi-n)(1-\xi)} d\xi, \quad -1 < \sigma < 1.$$

Функция в последнем интеграле не имеет особых точек в полосе $-1 < \sigma < 1$, и оценка подынтегрального выражения, полученная из (10), позволяет перемещать прямую интегрирования в этой полосе. Таким образом, для $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ функция $P_n^*(u, t)$ имеет порядок роста $t^{-1+\delta/\rho}$ и $t^{-1-\delta/\rho}$, соответственно, где $0 < \delta < 1$. Действительно, если $\sigma = \operatorname{Re} \xi = \pm \delta$, то

$$|u^{1-\xi} t^{\xi/\rho-1}| \leq |u|^{\mp \delta+1} e^{|y| \cdot |\arg u|} t^{\pm \delta-1}, \quad u \in \overline{U}(\alpha), \quad \xi = \sigma + iy.$$

В силу (21) и (22) получаем

$$|\psi^{(n-1)}(u)| \leq |J L_\rho^{n-1} \varphi(0+)| \frac{1}{Q(-n+1)} + \max_{t \in (0, \infty)} |J L_\rho^n \varphi(t)| \int_0^\infty |P_n^*(u, t)| dt.$$

Используя (10) для оценки подынтегрального выражения при $-1 < \sigma < 1$ и $0 < \delta < 1$, находим

$$|\psi^{(n-1)}(u)| \leq c_0 c_\alpha^n (|u| + 1)^{\delta+1} \left(M_{n-1} + M_n \int_0^1 t^{-1+\delta/\rho} dt + M_n \int_1^\infty t^{-1-\delta/\rho} dt \right),$$

т.е. $\psi \in C_{\delta+1}(M', \alpha)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для каждого $0 \neq \psi \in JC(M, \alpha)$, где $\alpha \in (0, 1)$, $M = \{M_n\}$, $M_n \geq M_{n-1}$ существует функция $0 \neq \varphi \in C(M'', L_\rho(0, \infty))$, где $\rho = \frac{1}{1-\alpha}$, $M'' = \{M_n'' = M_{n+2}\}$ такая, что

$$\psi(0)\kappa = J\varphi(0+), \quad \psi^{(n)}(0)\kappa^{n+1} = J L_\rho^n \varphi(0+), \quad \kappa = e^{i\pi\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Доказательство : Пусть $f_n(z)$ – аналитическое продолжение функции (см. (6))

$$f_{n,\theta}(z) = \int_{l(\theta)} \exp(-z^{1/\rho} u) \psi^{(n)}(u) du, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha\right], \quad n = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Функции $f_n(z)$ аналитичны в $U(1) = \{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2}\}$ и в $\bar{U}(1)$ удовлетворяют неравенствам

$$|f_n(z)| \leq cc_1^n M_n, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Вначале рассмотрим функцию $F_\theta(z) = f_{n,\theta}(z)$. Очевидно, что интеграл в (24) существует при $\arg(z^{1/\rho}u) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, т.е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{\rho} \arg z + \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Отрезок $[-\frac{\pi}{2}\alpha, \frac{\pi}{2}\alpha]$ разделим на конечное число подотрезков

$$-\frac{\pi}{2}\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_s = \frac{\pi}{2}\alpha,$$

так, что $F_{\theta_k}(z)$ и $F_{\theta_{k+1}}(z)$ имеют общую подобласть аналитичности. Легко видеть, что $F_{\theta_{k+1}}(z)$ является аналитическим продолжением функции $F_{\theta_k}(z)$. Действительно, пусть $C(R) = I(\theta_k, R) \cup C'(R) \cup I(\theta_{k+1}, R)$, где $I(\theta_k, R) = \{u = re^{i\theta_k} : 0 < r < R\}$, $C'(R) = C(\{u = Re^{i\theta} : \theta_k < \theta < \theta_{k+1}\})$. Очевидно, что

$$Y(z) = \int_{C(R)} \exp(-z^{1/\rho}u) \psi^{(n)}(u) du = 0.$$

Полагая $R \rightarrow \infty$, получим $F_{\theta_k}(z) = F_{\theta_{k+1}}(z)$, поскольку интеграл по $C'(R)$ сходится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, для $-\frac{\pi}{2} - \theta_k \leq \frac{1}{\rho} \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \theta_k$ существует функция $f_n(z) = f_{n,\theta}(z)$, удовлетворяющая (25) в $\operatorname{Re} z \geq 0$ и аналитичная в области, ограниченной прямыми

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\rho} \arg z + \theta_0 = \frac{1}{\rho} \arg z - \frac{\pi}{2}\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\rho} \arg z + \theta_s = \frac{1}{\rho} \arg z + \frac{\pi}{2}\alpha,$$

т.е. в области $U(1)$.

Теперь покажем, что $f_n(z)$ порождают искомую функцию $\varphi \in C(M'', L_\rho, (0, \infty))$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть функции $f_n(z)$, определенные по формуле (24), аналитичны в $U(1)$. Тогда справедливы следующие утверждения :

$$|f_n(z)| \leq cc_1^n M_n, \quad z \in \bar{U}(1), \quad (26)$$

$$f_n(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{f_{n+1}(z)}{z^{1/\rho}}, \quad a_n = \psi^{(n)}(0), \quad (27)$$

$$|f_n(z)| \leq cc_0^n M_{n+1} |z|^{-1/\rho}, \quad z \in \bar{U}(1), \quad |z| > \delta > 0. \quad (28)$$

Доказательство : Из (24) имеем

$$|f_{n,\theta}(z)| \leq \int_0^\infty |\psi^{(n)}(re^{i\theta})| d\theta \leq cc_1^n M_n.$$

Поэтому

$$\left| \frac{1}{\rho} \arg z + \theta \right| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{\pi}{2} - \theta \leq \arg z^{1/\rho} \leq \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Следовательно, функция $f_n(z)$ удовлетворяет (26) в области $\bar{U}(1)$. Интегрируя по частям в (24), получаем

$$f_{n,\theta}(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{1}{z^{1/\rho}} \int_{l(\theta)} \exp(-z^{1/\rho} u) \psi^{(n+1)}(u) du, \quad |\arg(z^{1/\rho} e^{i\theta})| \leq \frac{\pi}{2},$$

откуда следует (27).

Так как согласно предположению $M_{n+1} \geq M_n$, то неравенство (28) следует из (27). Лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству Теоремы 3. Для того, чтобы доказать равенства (23), рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{xz} f(z) dz, \quad x \in (0, \infty). \quad (29)$$

Имеем $J\varphi(x) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_x^A (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) dz \int_x^A e^{zt} \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) dz \int_x^\infty e^{zt} \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Для того, чтобы убедиться в законности изменения порядков интегрирования и предельного перехода, заметим, что согласно (27) имеем

$$f_0(z) = \frac{a_0}{z^{1/\rho}} + \frac{f_1(z)}{z^{1/\rho}} = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{a_\nu}{z^{(\nu+1)/\rho}} + \frac{f_k(z)}{z^{k/\rho}}. \quad (31)$$

Интеграл в (29) можно разбить на сумму трех интегралов по $l_{-1} = (-i\infty, -i)$, $l_0 = (-i, i)$ и $l_1 = (i, i\infty)$. Отметим, что для $a_\nu e^{zt} z^{-(\nu+1)/\rho}$ прямые интегрирования l_{-1} и l_1 можно заменить на лучи, исходящие из точек $-i$ и i под углами $\pm \frac{\pi}{2}\beta$, $1 < \beta < 2$. Полученные интегралы сходятся абсолютно и равномерно при $t > x > 0$.

Интегралы по $l_{\pm 1}$, содержащие $f_k(z) e^{zt} z^{-k/\rho}$, сходятся абсолютно и равномерно при $k/\rho > 1$. Интеграл по l_0 остается без изменения. Это доказывает (30). Из (30), для $z = iy$, $y \neq 0$, $x \in (0, \infty)$ и $\kappa = e^{i\pi\alpha}$ получим (см. [5], стр. 117, 290)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty e^{zt} (t-x)^{\alpha-1} dt = \frac{e^{iyx}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{iyt} t^{\alpha-1} dt = e^{iyx} \frac{\kappa}{(iy)^\alpha} = \frac{\kappa e^{zx}}{z^\alpha} \Big|_{z=iy}. \quad (32)$$

Из соотношений (30) и (32) следует

$$J\varphi(x) = \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) \frac{e^{zx}}{z^\alpha} dz = \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z) \frac{e^{zx}}{z^\alpha} dz, \quad \sigma > 0. \quad (33)$$

Тогда используя (31) и (32), соотношение (33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} J\varphi(x) &= \kappa a_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z} dz + \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z} f_1(z) dz = \\ &= \kappa a_0 + \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z} f_1(z) dz, \quad \sigma, x > 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Так как $f_1(z) = O(z^{-1/\rho})$ для $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z > 0$, то переходя к пределу в (34) при $x \rightarrow 0+$, получаем $J\varphi(0+) = a_0 \kappa = \psi(0) \kappa$ (последний интеграл в (34) обращается в нуль при $x \rightarrow 0+$). Следовательно, из (34) имеем

$$L_\rho^1 \varphi(x) = \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ze^{zx}}{z} f_1(z) dz = \kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx} f_1(z) dz. \quad (35)$$

Применив к (35) дробное интегрирование по Вейлю с последующим дифференцированием, получим

$$JL_\rho^1 \varphi(x) = \kappa^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_1(z) dz = \kappa^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_1(z) dz, \quad \sigma > 0.$$

Так как $f_1(z) = \frac{a_1}{z^{1/\rho}} + \frac{f_2(z)}{z^{1/\rho}}$, $a_1 = \psi'(0)$, то

$$JL_\rho^1 \varphi(x) = \kappa^2 a_1 + \kappa^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z} f_2(z) dz, \quad \sigma, x > 0. \quad (36)$$

Отсюда получаем $JL_\rho^1 \varphi(0) = a_1 \kappa^2 = \psi'(0) \kappa^2$ и

$$L_\rho^2 \varphi(x) = \kappa^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx} f_2(z) dz.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$JL_\rho^n \varphi(x) = \kappa^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z) dz = \kappa^{n+1} a_n + \kappa^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z} f_{n+1}(z) dz, \quad (37)$$

где

$$L_\rho^n \varphi(x) = \kappa^n \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx} f_n(z) dz, \quad \sigma, x > 0,$$

и $JL_\rho^n \varphi(0+) = a_n \kappa^{n+1}$, $a_n = \psi^{(n)}(0)$.

Теперь покажем, что $\varphi \in C(M'', L_{\rho,1}(0, \infty))$. Начнем с оценки $|JL_\rho^n \varphi(x)|$. Для $0 < x \leq 1$ нужная оценка (2) получается из (27) и (37). Для $x > 1$ имеем

$$JL_\rho^n \varphi(x) = \kappa^{n+1} [Y_n^-(x) + Y_n^+(x)], \quad (38)$$

где $Y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^i \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z) dz$,

$$Y_n^-(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-i} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z) dz, \quad Y_n^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_i^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^\alpha} f_n(z) dz.$$

Из (26) получаем

$$|Y_n(x)| \leq \frac{cc_1^n M_n}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{|y|^\alpha} \leq c' c_1^n M_n.$$

Для оценки $|Y_n^-(x) + Y_n^+(x)|$ мы опять воспользуемся равенством (27):

$$f_n(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{a_{n+1}}{z^{2/\rho}} + \frac{f_{n+2}(z)}{z^{2/\rho}}. \quad (39)$$

Имеем

$$Y_n^-(x) + Y_n^+(x) = a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+ \cup l^-} \frac{e^{zx}}{z} dz + a_{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+ \cup l^-} \frac{e^{zx}}{z^{1+1/\rho}} dz + Q_{n+1}(x),$$

где $l^+ = (i, i\infty)$, $l^- = (-i\infty, -i)$ и

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+ \cup l^-} \frac{e^{zx}}{z^{1+1/\rho}} f_{n+1}(z) dz.$$

Поэтому

$$Y_n^-(x) + Y_n^+(x) = \frac{a_n}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{iyx} - e^{-iyx}}{y} dy + P_{n+1}(x) + Q_{n+1}(x), \quad (40)$$

где

$$P_n(x) = \frac{a_n}{2\pi i} \int_i^{i\infty} \frac{e^{zx} - e^{-zx} e^{-i\pi/\rho}}{z^{1+1/\rho}} dz.$$

Функции P_n и Q_n удовлетворяют неравенствам

$$|P_n(x)| \leq \frac{|a_n|}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^{1+1/\rho}} \leq cc_1^n M_n,$$

$$|Q_n(x)| \leq \max_{z \in l^+ \cup l^-} |f_{n+1}(z)| \frac{1}{\pi} \int_{l^+ \cup l^-} \left| \frac{dz}{z^{1+1/\rho}} \right| \leq cc_1^{n+1} M_{n+1}.$$

Заместив наконец, что

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_1^\infty \frac{e^{iyx} - e^{-iyx}}{y} dy \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_1^\infty \frac{\sin xy}{y} dy \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_x^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq c_2,$$

получаем

$$|Y_n^-(x) + Y_n^+(x)| \leq c'_0 c_1^{n+2} (M_n + M_{n+1} + M_{n+2}). \quad (41)$$

Комбинируя (38) и (41), находим $|JL_\rho^n \varphi(x)| \leq c_0 c_1^{n+2} M_{n+2}$. Теперь покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} JL_\rho^n \varphi(x) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (42)$$

Из (37) находим

$$J L_{\rho}^n \varphi(x) = \kappa^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zx}}{z^{\alpha}} f_n(z) dz, \quad |f_n(z)| \leq c c_1^n M_n, \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$$

Так как функция $(iy)^{-\alpha} f_n(iy)$, $0 < \alpha < 1$ абсолютно интегрируема на $[-A, A]$, то применима известная лемма Римана. Поэтому для каждого $A \in (0, \infty)$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-iA}^{iA} \frac{e^{zx}}{z^{\alpha}} f_n(z) dz = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{e^{ixy}}{(iy)^{\alpha}} f_n(iy) dy = 0.$$

Для оценки интегралов

$$J_{\pm 1} = \int_{l^{\pm}(A)} \frac{e^{zx}}{z^{\alpha}} f_n(z) dz, \quad l^{+}(A) = (iA, i\infty), \quad l^{-}(A) = (-i\infty, -iA),$$

будем использовать равенство, которое вытекает из соотношения (27) :

$$f_n(z) = \frac{a_n}{z^{1/\rho}} + \frac{a_{n+1}}{z^{2/\rho}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{z^{k/\rho}} + \frac{f_{n+k}(z)}{z^{k/\rho}}. \quad (43)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ и $A > A_0(\varepsilon) > 0$ имеем

$$\left| \int_{l^{\pm}(A)} \frac{e^{zx}}{z^{\alpha+\nu/\rho}} dz \right| < \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad \int_{l^{\pm}(A)} \left| \frac{e^{zx}}{z^{\alpha+\nu/\rho}} f_{n+k}(z) dz \right| < \varepsilon, \quad k \geq 2. \quad (44)$$

Отсюда и из (40) и (41) получаем (42).

Теперь проверим условия (3) для класса функций $C(M'', L_{\rho}, (0, \infty))$. Для достаточно малых значений x из (37), используя (43) при $k/\rho > 1$ и формулу Ханкеля, получаем

$$L_{\rho}^n \varphi(x) = \sum_{\nu=1}^k \frac{a_{n+\nu}}{\Gamma(\nu/\rho)} x^{\nu/\rho-1} + \kappa^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{zx}}{z^{k/\rho}} f_{n+k}(z) dz, \quad \sigma > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Поэтому $L_{\rho}^n \varphi(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \rightarrow 0+$, $0 < \alpha < 1$.

Для достаточно больших значений x используем второе равенство в (37), где интеграл берется по $(-\infty, \infty)$. Этот интеграл представляется в виде суммы трех интегралов J_{-1} , J_0 и J_{+1} по промежуткам $(-\infty, -iA)$, $(-iA, iA)$ и (iA, ∞) , $A > 0$, соответственно. Преобразуем интегралы J_{-1} и J_{+1} согласно (43) при $\frac{k-1}{\rho} \leq 1 < \frac{k}{\rho}$, а интеграл J_0 оставляем без изменения. В результате получаем сумму интегралов вида (44) (без z^{α} в знаменателях), каждый из которых стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ и $A > A_0 > 0$. Следовательно, $L_{\rho}^n \varphi(x) = O(1)$ при $x \rightarrow \infty$. Теорема 3 доказана.

§2. ОБОБЩЕННАЯ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ ДЛЯ КЛАССА $C(M, L_\rho, (0, \infty))$

Цель этого параграфа – получить необходимые и достаточные условия единственности для класса функций $C(M, L_\rho, (0, \infty))$ при дополнительном предположении

$$J\varphi(0+) = JL_\rho^\lambda \varphi(0+) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_\nu\} \subset \mathcal{N}, \quad \varphi \in C(M, L_\rho, (0, \infty)).$$

Определение 4. Последовательность $\{\mu_\nu\} \subset \mathcal{N}$ удовлетворяет условию $A(\mu)$, если имеет место асимптотическое соотношение

$$\psi(r) \equiv 2 \sum_{\mu_\nu \leq r} \frac{1}{\mu_\nu} = \mu \ln r + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Определение 5. Последовательность $\{\mu_\nu\} \subset \mathcal{N}$ удовлетворяет условию $B(\mu)$, если имеет место асимптотическое соотношение

$$\ln \Lambda(y, \{\mu_\nu\}) = \frac{\pi}{4} \mu |y| + O(\ln |y|), \quad y \rightarrow \infty,$$

где

$$\Lambda(y, \{\mu_\nu\}) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{\mu_\nu^2}\right)^{1/2}, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Определение 6. Последовательность $\{\mu_\nu\} \subset \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $AB(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, если она удовлетворяет условиям $A(\beta/\kappa)$ и $B(\beta/\kappa)$, и для $1 < \beta < 2$ существует подпоследовательность $\{\mu_\nu\} \subset \{\lambda_\nu\}$, удовлетворяющая условиям $A(2 - \beta)$ и $B(2 - \beta)$ (см. [3], Теорема 2.1).

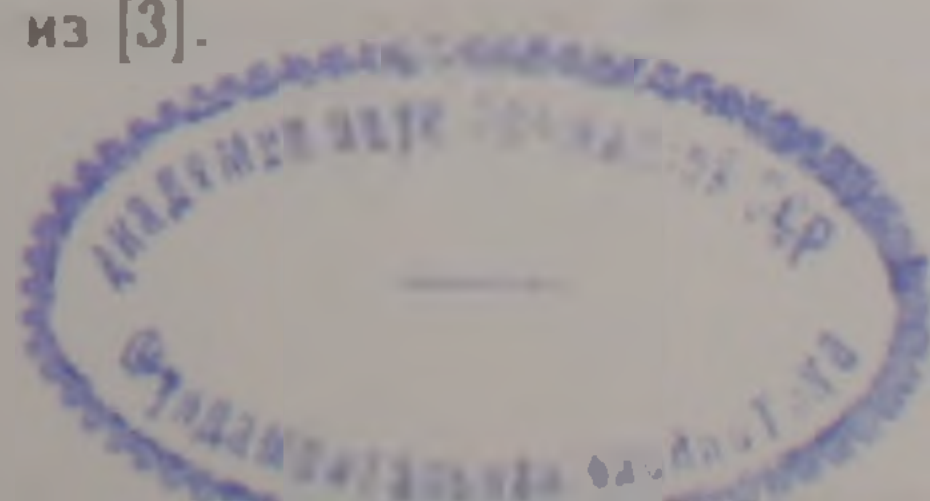
Рассуждая как и при доказательстве основного результата работы [2], с δ вместо $n\theta$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $AB(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, $\beta = \alpha + 1$. Для того, чтобы лишь тождественно равная нулю функция удовлетворяла бы условиям $\psi \in C_\delta(M, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$ достаточно выполнения следующего условия :

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2} \ln M(r) dr = \infty, \tag{45}$$

где $M(r) = \sup_{x \geq 0} \frac{1}{m(x)} r^{\beta(1 - \frac{1}{\kappa})x}$, $m(x) = M_n$ для $x \in [n, n+1)$.

Следующий результат является следствием Теоремы 2.3 из [3].



Теорема 5. Пусть последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $AB(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, $\beta = \alpha + 1$. Тогда (45) является необходимым условием для того, чтобы единственной функцией, удовлетворяющей условиям $\psi \in JC(\mathcal{M}, \alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, была бы тождественный нуль.

Используя Теоремы 2 – 5, получаем следующий результат.

Теорема 6. Если последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет условию $A(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, и выполнено условие (45), то единственной функцией $\psi \in C(\mathcal{M}, L_\rho, (0, \infty))$, удовлетворяющей условию

$$J\varphi(0+) = JL_\rho^\lambda \varphi(0+) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_\nu\} \subset \mathcal{N}, \quad (46)$$

есть тождественный нуль. Обратно, если единственной функцией из класса $C(\mathcal{M}, L_\rho, (0, \infty))$, удовлетворяющей (46), является тождественный нуль, то имеет место условие (45).

Доказательство : Достаточность. Согласно Теореме 4, из условий $\psi \in C_\delta(\mathcal{M}', \alpha)$, $\mathcal{M}' = \{M'_n = M_{n+1}\}$, $\psi(0) = \psi^{(\lambda_\nu)}(0) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$, где последовательность $\{\mu_\nu\} = \mathcal{N} \setminus \{\lambda_\nu\}$ удовлетворяет $A(\beta/\kappa)$, $\kappa > 1$, $\beta/\kappa < 2$, $\beta = \alpha + 1$, и (45) следует, что $\psi \equiv 0$. Из Теоремы 2, только тождественно равная нулю функция $\psi \in C(\mathcal{M}, L_\rho, (0, \infty))$ удовлетворяет (46). Действительно, из (45) получаем

$$\psi(u) = \int_0^\infty P(u, t) L_\rho^\lambda \varphi(t) dt \equiv 0, \quad \psi \in C_\delta(\mathcal{M}', \alpha).$$

С другой стороны (см. [4]), последнее преобразование однозначно обратимо. Поэтому $L_\rho^\lambda \varphi(t) = \frac{d}{dt} J\varphi(t) \equiv 0$, $t \in (0, \infty)$. Следовательно, $J\varphi(t) \equiv \text{const}$. Так как $J\varphi(0+) = 0$, то получаем $J\varphi(t) \equiv 0$. Покажем, что $\varphi(t) \equiv 0$. Для этого продолжим функции $g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ и $\varphi(t)$ для $t < 0$, полагая $g(t) = \varphi(t) = 0$. Имеем $\int_x^\infty g(t-x)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^\infty g(t-x)\varphi(t) dt = 0$, $x > 0$. Подставляя $t = -t'$ и $x = -x'$ в последний интеграл, получим

$$\int_{-\infty}^\infty g_1(x' - t)\varphi(-t) dt \equiv 0. \quad (47)$$

Образ $g_1(t)$ относительно двустороннего преобразования Лапласа не обращается в нуль тождественно. Следовательно, согласно (47), образ $\varphi(-t)$ относительно этого преобразования тождественно обращается в нуль в общей области определения. Поэтому $\varphi(-t) \equiv 0$ для $t < 0$. Отсюда получаем $\varphi(t) \equiv 0$ для $t > 0$.

Необходимость. По Теореме 5 условия (45) и $AB(\beta/\kappa)$ являются необходимыми условиями для того, чтобы единственной функцией $\psi \in JC(M^*, \alpha)$, $M^* = \{M_{n-2}\}$, удовлетворяющей условиям $\psi(0) = \psi^{(\lambda_n)}(0) = 0$, была бы функция тождественно равная нулю. По Теореме 3, условия (45) необходимы для того, чтобы единственной функцией $\varphi \in C(M, L_p, (0, \infty))$, удовлетворяющей условию (46) с той же самой последовательностью $\{\lambda_n\}$, была бы функция, тождественно равная нулю. Из условия (45) следует существование функции $0 \neq \psi \in JC(M^*, \alpha)$. Согласно Теореме 3, функция $0 \neq \varphi \in C(M, L_p, (0, \infty))$ также удовлетворяет условию (46). Теорема 6 доказана.

ABSTRACT. The paper carries out comparative analysis of three classes of infinitely differentiable functions and studies the question of generalized quasianalyticity for one of these classes.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Бадалян, "О критерии единственности бесконечно дифференцируемых функций, определяемых моментами их последовательных производных", ДАН СССР, том 259, № 2, стр. 269 – 270, 1981.
2. Г. В. Бадалян, "Теорема об обобщенной квазианалитичности с учетом поведения функций классов в бесконечности", Сбор. мат. науч. сессий к 60-летию Ереванского госуниверс., стр. 22 – 30, 1981.
3. Г. В. Бадалян, "Обобщенная квазианалитичность и критерий единственности для некоторых классов аналитических функций", Изв. АН СССР. Матем., том 38, № 2, 1974.
4. И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер, Преобразования Типа Свертки, Москва, 1958.
- Б. Б. С. Волковысский, Г. Л. Луц, И. Г. Араманович, Сборник Задач по Теории Функций Комплексного Переменного, Физматгиз, Москва, 1960.

9 декабря 1997

Ереванский государственный университет

ЛОКАЛЬНО АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ГАУССОВСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 4, 1999

Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение наблюдения $X_T = \{X(1), \dots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$ с нулевым средним и спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. В статье получены достаточные условия в терминах спектральной плотности, при которых семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ с параметрическим множеством $\Theta \subset L_p[-\pi, \pi]$ ($p \geq 2$) удовлетворяет условию локальной асимптотической нормальности в смысле И. А. Ибрагимова и Р.З. Хасьминского (1991).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие локальной асимптотической нормальности (ЛАН) семейств распределений (см., например, [7], [9], [10], [13], [14]) играет важную роль в асимптотической теории оценивания. Ле Кам, Гаек, Ибрагимов, Хасьминский и другие показали (см., например, [9]), что многие важные свойства статистических оценок (характеризация предельных распределений, нижние границы точности оценивания, асимптотическая эффективность и т.д.) вытекают из условия ЛАН. Важность условия ЛАН для задач непараметрической теории оценивания подчеркивали Левит ([12], [13]), Миллар [14], Ибрагимов и Хасьминский [10] и другие. Условие ЛАН для семейств распределений, порожденных стационарным гауссовским процессом со спектральной плотностью, зависящей от конечномерного параметра, было изучено Дэвисом [1], Джапаридзе [2] и Гиновяном [3]. В [10] Ибрагимов и Хасьминский предложили новое определение концепции ЛАН для семейств распределений в случае, когда параметрическое множество является подмножеством бесконечномерного нормированного пространства.

В настоящей статье получены некоторые достаточные условия в терминах

спектральной плотности рассматриваемого стационарного гауссовского процесса, при которых семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в смысле Ибрагимова и Хасьминского [10], с бесконечномерным параметрическим множеством Θ .

Пусть наблюдается конечная реализация $X_T = \{X(1), \dots, X(T)\}$ вещественнозначного стационарного гауссовского процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$ с нулевым средним и спектральной плотностью $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Предположим, что $\theta(\lambda)$ принадлежит заданному классу $\Theta \subset L_p = L_p[-\pi, \pi]$ ($p \geq 2$) спектральных плотностей, обладающих некоторыми условиями гладкости. Распределение процесса $X(t)$ полностью определяется спектральной плотностью и мы рассматриваем $\theta(\lambda)$ как бесконечномерный "параметр", от которого зависит распределение процесса $X(t)$. Пусть $\mathbb{P}_{T,\theta}$ – вероятностное распределение гауссовского вектора $X_T = \{X(1), \dots, X(T)\}$ со спектральной плотностью $\theta(\lambda)$. Следуя И. А. Ибрагимову и Р.З. Хасьминскому (см. [10]), введем следующее определение ЛАН.

Определение 1. Семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ называется локально асимптотически нормальным в $\theta_0 \in \Theta$ в направлении L_2 с нормирующими множителями $A_T = A_T(\theta_0)$, если существует линейное многообразие $H_0 \subset L_2$, с замыканием $\overline{H_0} = L_2$ и семейство $\{A_T\}$ линейных операторов $A_T : L_2 \rightarrow L_2$, удовлетворяющих условиям :

- 1) для любого $h \in H_0$, $\|A_T h\|_2 \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$;
- 2) для любого $h \in H_0$ найдется натуральное число $T(h)$ такое, что $\theta_0 + A_T h \in \Theta$ для всех $T > T(h)$;
- 3) для любого $h \in H_0$ и $T > T(h)$ имеет место представление

$$\ln \frac{d\mathbb{P}_{T,\theta_0 + A_T(h)}}{d\mathbb{P}_{T,\theta_0}}(X_T) = \Delta_T(h, \theta_0) - \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + \phi(T, h, \theta_0), \quad (1)$$

где $\Delta_T(h) = \Delta_T(h, \theta_0)$ – случайная линейная функция на H_0 (т.е. $\Delta_T(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 \Delta_T(h_1) + \alpha_2 \Delta_T(h_2)$ для любых постоянных α_1, α_2 и любых $h_1, h_2 \in H_0$) асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) $N(0, \|h\|_2^2)$ – нормально распределена для любой $h \in H_0$, и $\phi(T, h, \theta_0) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ по $\mathbb{P}_{T,\theta_0}$ -вероятности.

Заметим, что свойство ЛАН полностью определяется точкой θ_0 , пространством L_2 и семейством операторов $\{A_T\}$. Выбор пространства $H_0 = H_0(\theta_0)$ в некоторой степени произволен. Важно только, чтобы его замыкание совпало с L_2 , т.е. $\overline{H_0} = L_2$.

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Прежде всего приведем несколько обозначений и определений.

Определение 2. Будем говорить, что неотрицательная 2π -периодическая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (или имеет нули типа Маккенхаупта), если (см. [8])

$$\sup \frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda) d\lambda \int_J \frac{1}{f(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad (2)$$

где супремум берется по интервалам $J \subset [-\pi, \pi]$ и $|J|$ — длина интервала J .

Определение 3. Для заданного числа $\gamma > 0$ положим $\gamma = r + \alpha$, где $0 < \alpha < 1$, а $r \in \mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел. Функция $\psi(\lambda) \in L_p$ ($p > 1$) принадлежит классу Гельдера $H_p(\gamma)$, если $\psi(\lambda)$ имеет r -ую производную $\psi^{(r)}(\lambda) \in L_p$ удовлетворяющую условию $\|\psi^{(r)}(\cdot + u) - \psi^{(r)}(\cdot)\|_p \leq C|u|^\alpha$, где $C > 0$ — постоянная.

Класс спектральных плотностей, принадлежащих $H_p(\beta)$, обозначим через $\Sigma_p(\beta)$.

Определение 4. Будем говорить, что пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$, если $f(\lambda) \in \Sigma_p(\beta_1)$ для $\beta_1 > 0$, $p > 1$ и $g(\lambda) \in H_q(\beta_2)$ для $\beta_2 > 0$, $q > 1$ с $1/p + 1/q = 1$ и выполняется одно из условий а) — д) :

- а) $\beta_1 > 1/p$, $\beta_2 > 1/q$,
- б) $\beta_1 \leq 1/p$, $\beta_2 \leq 1/q$ и $\beta_1 + \beta_2 > 1/2$,
- в) $\beta_1 > 1/p$, $1/q - 1/2 < \beta_2 \leq 1/q$,
- д) $\beta_2 > 1/q$, $1/p - 1/2 < \beta_1 \leq 1/p$.

Мы предполагаем, что параметрическое множество Θ является подмножеством пространства L_p ($p \geq 2$), состоящего из спектральных плотностей, удовлетворяющих условию Маккенхаупта (2) и принадлежащих классу Гельдера $H_p(\gamma)$.

Определим $H_0 = H_0(\theta)$ как линейное многообразие, состоящее из ограниченных на $[-\pi, \pi]$ функций $h(\lambda)$ таких, что пара $(\theta, h\theta^{-1})$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$.

Легко проверить, что так определенное многообразие H_0 удовлетворяет условию $\overline{H_0} = L_2$. Определим также $A_T : L_2 \rightarrow L_2$ по формуле $A_T(h) = [T^{-1/2} \theta] \cdot h$, т.е. A_T является оператором умножения на функцию $T^{-1/2} \theta(\lambda)$.

Теорема 1. Пусть Θ , H_0 и A_T определяются как и выше. Тогда семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T, \theta}, \theta \in \Theta\}$ удовлетворяет условию ЛАН в любой точке $\theta \in \Theta$ в направлении L_2 с нормирующими множителями

A_T и

$$\Delta_T(h, \theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_T(\lambda) - \theta(\lambda)}{\theta(\lambda)} h(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X(t) e^{-i\lambda t} \right|^2 \quad (4)$$

– периодограмма процесса $X(t)$.

При более сильном предположении, что параметрический класс Θ состоит из строго положительных и непрерывных спектральных плотностей, тот же результат был анонсирован в работе Ибрагимова и Хасьминского [10].

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ – вещественнозначный стационарный гауссовский процесс $X(t)$ с нулевым средним и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Обозначим через $B_T(f)$ ковариационную матрицу процесса $X(t)$, т.е.

$$B_T(f) = \|r(u-v)\|_{u,v=\overline{1,T}}, \quad (5)$$

где

$$r(u-v) = \mathbb{E} X(u) X(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda(u-v)} f(\lambda) d\lambda \quad (6)$$

– ковариационная функция процесса $X(t)$. Для $h(\lambda) \in H_0$ положим

$$f_T(\lambda) = f_{T,h}(\lambda) = f(\lambda) \left(1 + T^{-1/2} h(\lambda) \right). \quad (7)$$

Для гауссовских процессов логарифм отношения правдоподобия

$$L_T(X_T, f, f_T) = \log \frac{d\P_{T,f_T}}{d\P_{T,f}}(X_T), \quad \text{где } X_T = \{X(1), \dots, X(T)\},$$

допускает следующее представление (см. [11], §3.2) :

$$\begin{aligned} L_T(X_T, f, f_T) &= \frac{1}{2} [\log \det B_T(f) - \log \det B_T(f_T)] + \\ &+ \frac{1}{2} [X_T' B_T^{-1}(f) X_T - X_T' B_T^{-1}(f_T) X_T]. \end{aligned} \quad (8)$$

Нам будет удобнее иметь дело со спектральными представлениями случайных функций $L_T(X_T, f, f_T)$ и $\Delta_T(h, f)$, определенных по (8) и (3). Обозначим через $L_2(f)$ весовое пространство

$$L_2(f) = \left\{ \varphi(\lambda); \quad \|\varphi\|_f = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

и пусть $H_T(f)$ – пространство тригонометрических многочленов степени не выше T , рассматриваемое как подпространство пространства $L_2(f)$. Обозначим через $P_T(f)$ ортогональный проектор в $L_2(f)$ на подпространство $H_T(f)$. Отметим, что $P_T(f)$ является интегральным оператором в $L_2(f)$ с ядром $G_T(f; \lambda, \mu)$:

$$G_T(f; \lambda, \mu) = \sum_{k=1}^T \varphi_k(f; \zeta) \overline{\varphi_k(f; z)}, \quad z = e^{i\lambda}, \quad \zeta = e^{i\mu}, \quad (9)$$

где $\{\varphi_k(f; z), k = 1, 2, \dots\}$ – система ортогональных многочленов, связанных со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Таким образом, $(\varphi_k(f; e^{i\lambda}), \varphi_j(f; e^{i\lambda}))_f = \delta_{kj}$, где $(\cdot, \cdot)_f$ – скалярное произведение в $L_2(f)$, а $\delta_{kj} = 1$ для $k = j$ и $\delta_{kj} = 0$ – в противном случае (см. [6], [11]). Легко проверить, что $G_T(f; \lambda, \mu)$ является воспроизводящим ядром пространства $H_T(f)$, т.е. $G_T(f; \lambda, \cdot) \in H_T(f)$ и для каждого $\varphi(\lambda) \in H_T(f)$

$$(\varphi(\mu), G_T(f; \lambda, \mu))_f = \varphi(\lambda). \quad (10)$$

Используя (5), (6) и (9), легко проверить, что $L_T(X_T, f, f_T)$, задаваемое формулой (8), допускает спектральное представление

$$L_T(X_T, f, f_T) = \frac{1}{2} [\log \det B_T(f) - \log \det B_T(f_T)] + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [G_T(f, \lambda, \mu) - G_T(f_T, \lambda, \mu)] Z^f(d\lambda) Z^f(d\mu), \quad (11)$$

где $Z(d\lambda)$ – ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении процесса $X(t)$ (см. [11], §1.6) :

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda).$$

Очевидно

$$\mathbb{E}_f [Z^f(d\lambda) Z^f(d\mu)] = \begin{cases} f(\lambda) d\lambda, & \text{если } \lambda = \mu, \\ 0, & \text{если } \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (12)$$

Аналогично, для случайной функции $\Delta_T(h, f)$, задаваемой формулой (3), имеем следующее спектральное представление :

$$\Delta_T(h, f) = \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_T(\lambda, t) G_T(t, \mu) \frac{h(t)}{f(t)} dt Z^f(d\lambda) Z^f(d\mu) - \\ - \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda) d\lambda, \quad (13)$$

где

$$G_T(\lambda, t) = G_T(1; \lambda, t) = e^{iT(\lambda-t)/2} \cdot \frac{\sin(T(\lambda-t)/2)}{\sin((\lambda-t)/2)}. \quad (14)$$

Лемма 1. Пусть пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$.

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 g(t) f(\lambda) d\lambda dt = T \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda + o(T^{1/2}) \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Доказательство : Используя Теорему 6 из [5] получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 g(t) f(\lambda) d\lambda dt - T \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda = \\ & = \begin{cases} O(T^{1-(\beta_1+\beta_2)}) & \text{для } \beta_1 + \beta_2 < 1, \\ O(\log T) & \text{для } \beta_1 + \beta_2 = 1, \\ O(1) & \text{для } \beta_1 + \beta_2 > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

где β_1 и β_2 – числа, участвующие в Определении 4.

Из условия $(\mathcal{H})$ вытекает, что $\beta_1 + \beta_2 > 1/2$. Поэтому (15) следует из (16).

Лемма 2 (см. [4]). Пусть пара функций $(f(\lambda), g(\lambda))$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$. Тогда случайная величина

$$\eta_T = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda) g(\lambda) d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}_f [I_T(\lambda)] g(\lambda) d\lambda \right],$$

где $I_T(\lambda)$ – периодограмма, задаваемая по (4), имеет асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda. \quad (17)$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [15], стр. 254 – 255.

Лемма 3. Следующие условия эквивалентны :

а) спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (2);

б) существует положительная постоянная C , удовлетворяющая условию

$$\sup_T \|P_T(1)\|_f \leq C < \infty, \quad (18)$$

где $P_T(1)$ – ортогональный проектор в $L_2 = L_2(1)$ на подпространство $H_T(1)$, а $\|P_T(1)\|_f$ – операторная норма ортогонального проектора $P_T(1)$ в пространстве $L_2(f)$.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Прежде всего заметим, что для всех $h \in H_0$ и достаточно больших T имеем

$$\theta_0 + A_T(h) = \theta_0 + [T^{-1/2} f] \cdot h \in \Theta.$$

Согласно неравенству Гельдера, из условий теоремы следует, что $f(\lambda) h(\lambda) \in L_2$.

Поэтому, для всех $h \in H_0$ получаем

$$\|A_T(h)\|_2 = T^{-1/2} \|f h\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

Следовательно, нам достаточно доказать справедливость следующих двух утверждений (см. Определение 1) :

а) для любого $h \in H_0$ случайная величина $\phi(T, h, f)$ задаваемая формулой

$$\phi(T, f, h) \stackrel{\text{def}}{=} L_T(X_T, f, f_T) - \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_T(\lambda) - f(\lambda)}{f(\lambda)} h(\lambda) d\lambda + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\lambda) d\lambda, \quad (19)$$

стремится к 0 при $T \rightarrow \infty$ по $\mathbb{P}_{T,f}$ -вероятности ;

б) для любого $h \in H_0$ случайная величина $\Delta_T(h, \theta)$, определенная по формуле (3), имеет асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = \|h\|_2^2$.

В силу неравенства Чебышева для доказательства а) достаточно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\phi(T, h, f)$ стремятся к 0 при $T \rightarrow \infty$, т.е.

$$\mathbb{E}_f [\phi(T, f, h)] \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty \quad (20)$$

$$\mathbb{D}_f [\phi(T, f, h)] \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Из (10) и (14) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_T(\lambda, t) G_T(t, \mu) dt = G_T(\lambda, \mu).$$

Следовательно, используя (3), (12) и (13), из (19) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_f [\phi(T, f, h)] &= \left\{ \mathbb{E}_f [L_T(X_T, f, f_T)] + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\lambda) d\lambda \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda) d\lambda - \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, t)|^2 \frac{h(t)}{f(t)} f(\lambda) d\lambda dt \right\} \stackrel{\text{def}}{=} S_T^{(1)} + S_T^{(2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассуждая как и при доказательстве Леммы 2 из [3] можно показать, что $S_T^{(1)} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Далее, полагая $\frac{h(t)}{f(t)} = g(t)$ и применяя Лемму 1, получаем $S_T^{(2)} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Отсюда и из (22) следует (20). Для доказательства (21) заметим, что из (12) и (19) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_f[\phi(T, f, h)] &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(f; \lambda, \mu) - G_T(f_T; \lambda, \mu) - \\ &\quad - \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_T(\lambda, t) G_T(t, \mu) \frac{h(t)}{f(t)} dt|^2 f(\lambda) f(\mu) d\lambda d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \left\| P_T(f) - P_T(f_T) \frac{f}{f_T} P_T(f) - T^{-1/2} P_T(1) \frac{h}{f} P_T(1) f \right\|_f^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где $P_T(f)$ – интегральный оператор в $L_2(f)$ с ядром $G_T(f; \lambda, \mu)$, определенным по формуле (9), $G_T(\lambda, \mu) = G_T(1; \lambda, \mu)$, g обозначает оператор умножения на функцию $g(\lambda)$, а $\|A\|_f$ – норма Гильберта-Шмидта оператора A в пространстве $L_2(f)$. Используя рассуждения доказательства Теоремы 3 из [3], можно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| P_T(f) h P_T(f) - P_T(1) \frac{h}{f} P_T(1) f \right\|_f^2 = 0. \quad (24)$$

Следовательно, для доказательства (21) достаточно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|A_T(f)\|_f^2 = 0, \quad (25)$$

где

$$A_T(f) \stackrel{\text{def}}{=} P_T(f) - P_T(f_T) \frac{f}{f_T} P_T(f) - T^{-1/2} P_T(f) h P_T(f). \quad (26)$$

Из равенства

$$P_T(f) - P_T(f_T) \frac{f}{f_T} P_T(f) = P_T(f_T) \frac{T^{-1/2} h}{1 + T^{-1/2} h} P_T(f) \quad (27)$$

и из (26) находим

$$\begin{aligned} \|A_T(f)\|_f^2 &= \left\| P_T(f_T) \frac{T^{-1/2} h}{1 + T^{-1/2} h} P_T(f) - T^{-1/2} P_T(f) h P_T(f) \right\|_f^2 \leq \\ &\leq \frac{C}{T} \left\| P_T(f_T) \frac{1}{1 + T^{-1/2} h} - P_T(f) \right\|_f^2 = \\ &= \frac{C}{T} \left\| \left(P_T(f_T) - P_T(1) \frac{1}{f_T} P_T(1) f_T \right) \frac{1}{1 + T^{-1/2} h} + \right. \\ &\quad \left. + \left(P_T(1) \frac{1}{f} P_T(1) f - P_T(f) \right) + \left(P_T(1) \frac{1}{f_T} P_T(1) f - P_T(1) \frac{1}{f} P_T(1) f \right) \right\|_f^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{T} \left\| P_T(f_T) - P_T(1) \frac{1}{f_T} P_T(1) f_T \right\|_f^2 + \frac{C}{T} \left\| P_T(f) - P_T(1) \frac{1}{f} P_T(1) f \right\|_f^2 + \\ &+ \frac{C}{T} \left\| P_T(1) \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_T} \right) P_T(1) \right\|_f^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя аргументы доказательства Теоремы 3 из [3], можно показать, что при условии (H) первое и второе слагаемые в последнем выражении (28) имеют порядок $o(T^{1/2})$ при $T \rightarrow \infty$. Следовательно, для завершения доказательства (25) нам остается показать, что

$$\frac{1}{T} \left\| P_T(1) \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_T} \right) P_T(1) f \right\|_f^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Используя (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left\| P_T(1) \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_T} \right) P_T(1) f \right\|_f^2 &= \frac{1}{T} \left\| P_T(1) \frac{T^{-1/2} h}{1 + T^{-1/2} h} \frac{1}{f} P_T(1) f \right\|_f^2 \leq \\ &\leq \frac{C}{T} \cdot \sup_T \|P_T(1)\|_f^2 \cdot \sup_T \|P_T(1)\|_{1/f}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что вместе с $f(\lambda)$ функция $1/f(\lambda)$ также удовлетворяет условию Маккенхаупта (2). Поэтому используя Лемму 3 получаем

$$\sup_T \|P_T(1)\|_f < \infty \quad \text{и} \quad \sup_T \|P_T(1)\|_{1/f} < \infty.$$

Следовательно, последнее выражение в (30) стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Таким образом, (29) доказано. Комбинируя (26), (28) и (29) получаем (25). Наконец, применяя неравенство Чебышева и учитывая (20) и (21), мы завершаем доказательство утверждения а).

Для доказательства утверждения б) положим $g(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{\theta(\lambda)}$ и представим случайную величину $\Delta_T(h, \theta)$, определенную по формуле, (3) в виде

$$\Delta_T(h, \theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [I_T(\lambda) - \theta(\lambda)] g(\lambda) d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \eta_T(h, \theta) + M_T, \quad (31)$$

где

$$\eta_T(h, \theta) = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} I_T(\lambda) g(\lambda) d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}_f[I_T(\lambda)] g(\lambda) d\lambda \right], \quad (32)$$

$$M_T = \frac{T^{1/2}}{4\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}_f[I_T(\lambda)] g(\lambda) d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda \right]. \quad (33)$$

Принимая во внимание (4), (12) и (14), из (33) получаем

$$M_T = \frac{T^{-1/2}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_T(\lambda, \mu)|^2 g(\lambda) f(\mu) d\lambda d\mu - T^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) g(\lambda) d\lambda.$$

Используя Лемму 1 находим, что $M_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Следовательно, при $T \rightarrow \infty$ случайные величины $\Delta_T(h, \theta)$ и $\eta_T(h, \theta)$ имеют одинаковые асимптотические распределения. Используя Лемму 2 получаем, что случайная величина $\Delta_T(h, \theta)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\lambda) d\lambda.$$

Этим завершается доказательство утверждения б). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Рассуждая как и в доказательстве Теоремы 1, можно показать, что семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ локально асимптотически нормально также и в направлении весового пространства $L_2(f^2; [-\pi, \pi])$ (см. [10], [14]).

Замечание 2. Во многих задачах статистического оценивания важную роль играет равномерная версия ЛАН (см., например, [9]). Используя идею доказательства Теоремы 1, можно показать, что семейство распределений $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ равномерно асимптотически нормально в каждом компакте $K \subset \Theta$ с нормирующими множителями $A_T(h) = [T^{-1/2}\theta] \cdot h$, причем $\Delta(h, \theta)$ определяется по формуле (3).

ABSTRACT. Let $\mathbb{P}_{T,\theta}$ be the probability distribution of an observation $X_T = \{X(1), \dots, X(T)\}$ of a real-valued stationary Gaussian process $X(t)$ with zero mean and spectral density $\theta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. The paper derives sufficient conditions in terms of spectral density under which the family of distributions $\{\mathbb{P}_{T,\theta}, \theta \in \Theta\}$ with a parametric set $\Theta \subset L_p[-\pi, \pi]$ ($p \geq 2$) satisfies the local asymptotic normality condition in the sense of I. A. Ibragimov and R. Z. Khas'minskii (1991).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. R. Davies, "Asymptotic inference in stationary time-series", Adv. Appl. Probab., vol. 5, pp. 469 — 497, 1973.
2. K. O. Dzhaparidze, Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series, Springer-Verlag, New York, 1986.
3. М. С. Гиновян, "Локальная асимптотическая нормальность семейства гауссовских распределений", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 136, стр. 13 — 27, 1984.
4. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary

- process," *Probability Theory and Related Fields*, vol. 100, pp. 395 — 406, 1994.
5. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", *Изв. АН Армении, Математика*, том 30, № 1, стр. 3 — 20, 1995.
 6. U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1958.
 7. R. Z. Has'minskii and I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of spectral density function", *Probab. Theory Relat. Fields*, vol. 73, pp. 447 — 461, 1986.
 8. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", *Trans. of the AMS*, vol. 176, pp. 227 — 251, 1973.
 9. I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minskii, *Statistical Estimation : Asymptotic Theory*, Berlin- Heidelberg-New York, Springer, 1981.
 10. I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minskii, "Asymptotically normal families of distributions and efficient estimation", *The Annals of Statistics*, vol. 19, no. 4, pp. 1681 — 1724, 1991.
 11. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские Стохастические Процессы*, Москва, Наука, 1970.
 12. В. Я. Levit, "On optimality of some statistical estimates", *Proc. Prague Symp. Asymptotic. Statistics*, Vol. II, pp. 215 — 238, 1974.
 13. Б. Я. Левит, "Бесконечномерные информационные неравенства", *Теория вероятн. и ее примен.*, том. 23, вып. 2, стр. 371 — 377, 1978.
 14. P. W. Millar, "Non-Parametric Applications of an Infinite Dimensional Convolution Theorem", *Z. Wahrshchein. and verw. Geb.*, vol. 68, pp. 545 — 556, 1985.
 15. Н. К. Никольский, *Лекции об Операторе Сдвига*, Москва, Наука, 1980.

2 апреля 1999

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$

Г. А. Карапетян, Г. В. Даллакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

Теоремы аппроксимации решений линейных эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ решениями граничных задач в шаре “большого” радиуса представляют значительный интерес. Настоящая работа посвящена изучению аналогичных свойств для полуэллиптических уравнений. Доказывается, что решение полуэллиптического уравнения в $\mathbb{R}^n$ можно получить как предел при $R \rightarrow \infty$ решения u_R граничной задачи в некоторых ограниченных областях.

§1. УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор вида

$$P(D) = \sum_{(\mu, \alpha) \leq 2} \gamma_\alpha D^\alpha, \quad (1.1)$$

где $\mu = \left(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$ и пусть $P^0(D) = \sum_{(\mu, \alpha) = 2} \gamma_\alpha D^\alpha$ – главная часть оператора (1.1).

Определение. Оператор (1.1) называется полуэллиптическим (см. [2]), если существует постоянная $\chi > 0$ такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|P^0(\xi)| \geq \chi(|\xi_1|^{2/\mu_1} + \dots + |\xi_n|^{2/\mu_n}). \quad (1.2)$$

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $H^{\bar{m}}(\Omega)$ ($l \in \mathbb{N}$, $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$) анизотропное соболевское пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\bar{m}, l, \Omega} = \|u\|_{l, \Omega} = \|u\|_{\Omega} + \sum_{i=1}^n \|D_i^{l m_i} u\|_{\Omega}, \quad (1.3)$$

где $\|\cdot\|_{\Omega}$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.3) обозначим через $\dot{H}^{\overline{m}}(\Omega)$. Положим

$$m_0 = \max_{1 \leq j \leq n} m_j, \quad \mu_0 = 1/m_0, \quad |\mu| = \sum_{j=1}^n \mu_j, \quad |x|_\mu = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{2/\mu_j} \right)^{1/2},$$

$$B_{R,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x|_\mu < R\}, \quad S_{R,\mu} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x|_\mu = R\}, \quad (\mu - \text{сфера}).$$

Пусть $P(D)$ – полуэллиптический оператор вида (1.1), который удовлетворяет условию

$$P(\xi) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

Известно [3], что такой оператор имеет бесконечно дифференцируемое в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и экспоненциально убывающее на бесконечности фундаментальное решение $E(x)$, производные которого также экспоненциально убывают на бесконечности, т.е. $|D^\alpha E(x)| \leq c(\alpha) e^{-\gamma|x|}$ при $|x| > 1$, где γ – некоторое положительное число.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество и $x_0 \in K$. Тогда для любых мультииндексов α и β справедливо соотношение

$$|D_x^\alpha D_{x_0}^\beta E(x_0 - x)| \leq c(\alpha, \beta, K) e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$P(D)u = f. \quad (1.6)$$

Лемма 1.1. Пусть оператор (1.1) удовлетворяет условиям (1.2), (1.4) и $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда уравнение (1.6) имеет одно и только одно решение $u(x)$ в классе $\dot{H}^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$. Если $f(x)$ имеет ограниченный носитель, то это решение имеет вид $u(x) = E(x) * f(x)$ и

$$|D^\alpha u(x)| \leq c(\alpha, f) e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Доказательство : Достаточно установить оценку (1.7) (см. доказательство Теоремы 1.1 из [4]). Пусть $G = \text{supp } f$ ограничен. Так как E – фундаментальное решение, то в силу (1.5) имеем

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha E(x-y) f(y) dy \right| = \left| \int_G D^\alpha E(x-y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_G |D^\alpha E(x-y)| |f(y)| dy \leq c(\alpha, f) e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Положим $L_{2,a}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n); f(x) = 0 \text{ для } |x|_\mu > a, a > 0\}$.

Рассмотрим краевую задачу

$$P(D) u_R(x) = f(x), \quad x \in B_{R,\mu}, \quad (1.8)$$

$$u_R \in \dot{H}^{\bar{m}}(B_{R,\mu}). \quad (1.9)$$

Известно [5], что если $f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ и $P(D)$ является полуэллиптическим оператором вида (1.1), то для $R \geq \alpha$ задача (1.8), (1.9) имеет единственное решение $u_R \in \dot{H}^{\bar{m}}(B_{R,\mu}) \cap H^{2\bar{m}}(B_{R,\mu})$.

Теорема 1.1. Пусть оператор (1.1) удовлетворяет условиям Леммы 1.1, и пусть u и u_R суть решения, соответственно, уравнения (1.6) и задачи (1.8), (1.9), $f \in L_{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Если $\mu_0 > \mu_i/2$ ($i = 1, \dots, n$), то для любого компактного $K \subset \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ и для достаточно больших R имеет место оценка

$$\max_{x \in K} |D^\tau [u(x) - u_R(x)]| \leq c(K, \tau) e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}} R^M \|f\|_{L_{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.10)$$

где $M = \max\{2 + |\mu|/2 - \mu_0, |\mu| - \mu_0\}$.

Доказательство : Пусть D^q – одночлен, входящий в оператор $P(D)$, $M(x)$ и $N(x)$ – достаточно гладкие функции. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} & \int_{B_{R,\mu}} [M(x) D^q N(x) - N(x) \overline{D^q M(x)}] dx = \\ & = \frac{1}{i} \int_{S_{R,\mu}} \sum_{p_1=1}^{q_1} (-1)^{p_1-1} [D_1^{p_1-q_1} D_2^{q_2} \dots D_n^{q_n} N(x)] [D_1^{p_1-1} \overline{M(x)}] dx_2 \dots dx_n + \\ & \quad + \frac{1}{i} \int_{S_{R,\mu}} \sum_{p_2=1}^{q_2} (-1)^{q_1+p_2-1} [D_2^{q_2-p_2} \dots D_n^{q_n} N(x)] \times \\ & \quad \times [D_1^{q_1} D_2^{p_2-1} \overline{M(x)}] dx_1 dx_3 \dots dx_n + \dots + \frac{1}{i} \int_{S_{R,\mu}} \sum_{p_n=1}^{q_n} (-1)^{q_1+q_2+\dots+q_{n-1}+p_n-1} \times \\ & \quad \times [D_n^{q_n-p_n} N(x)] [D_1^{q_1} \dots D_{n-1}^{q_{n-1}-1} D_n^{p_n-1} \overline{M(x)}] dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Умножая обе части (1.11) на γ_q и суммируя полученные равенства по q такому, что $(\mu, q) \leq 2$, получаем формулу Грина

$$\int_{B_{R,\mu}} [M(x) P(D) N(x) - N(x) P^*(D) \overline{M(x)}] dx = \int_{S_{R,\mu}} \Phi[M, N] dS, \quad (1.12)$$

где $\Phi[M, N]$ – некоторая билинейная кососимметрическая форма, зависящая от $M(x)$, $N(x)$ и их производных до μ -го порядка не выше, чем $2 - \mu_0$:

$$\Phi[M, N] = \sum_{(\mu, \alpha) + (\mu, \beta) \leq 2 - \mu_0} g_{\alpha, \beta} [D^\alpha M(x)] [D^\beta N(x)],$$

где $g_{\alpha, \beta}$ суть бесконечно дифференцируемые ограниченные функции.

Пусть $\vartheta_R = u - u_R$. Функция ϑ_R является решением задачи

$$P(D) \vartheta_R = 0 \quad \text{в} \quad B_{R, \mu}, \quad \vartheta_R - u \in \dot{H}^{\overline{\mu}}(B_{R, \mu}).$$

В дальнейшем будет показано, что при $(\mu, \alpha) \leq 2 - \mu_0$ следы функций $D^\alpha \vartheta_R$ на μ -сфере $S_{R, \mu}$ существуют и принадлежат $L_2(S_{R, \mu})$. Рассмотрим фундаментальное решение $E(x - x_0)$ оператора $P(D)$, где x_0 – внутренняя точка области $B_{R, \mu}$. Так как $E(x - x_0)$ может иметь разрыв в точке $x = x_0$, непосредственно нельзя применить формулу (1.12) в области $B_{R, \mu}$ к функциям ϑ_R и $E(x - x_0)$. Поэтому вырежем из области $B_{R, \mu}$ μ -шар $B_{\varepsilon, \mu}(x_0) \subset B_{R, \mu}$ (радиуса ε и центром в точке x_0) и применим (1.12) к оставшейся области. Если $E(x)$ является фундаментальным решением оператора $P(D)$, то $\overline{E(-x)}$ является фундаментальным решением оператора $P^*(D) = \overline{P(-D)}$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{R, \mu} \setminus B_{\varepsilon, \mu}(x_0)} [E(x_0 - x) P(D) \vartheta_R(x) - \vartheta_R(x) P(D)^* E(x_0 - x)] dx = \\ &= \int_{S_{R, \mu}} \Phi[\vartheta_R(x), E(x_0 - x)] dS + \int_{S_{\varepsilon, \mu}(x_0)} \Phi[\vartheta_R(x), E(x_0 - x)] dS. \end{aligned}$$

Известно (см. [6]), что в окрестности точки x_0

$$D_x^\beta E(x_0 - x) = O\left(\frac{1}{|x_0 - x|^{|\mu| - 2 + (\mu, \beta)}}\right).$$

Поэтому, в силу теоремы о среднем значении, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{S_{\varepsilon, \mu}(x_0)} g_{\alpha, \beta} D^\alpha \vartheta_R(x) D_x^\beta E(x_0 - x) dS = \\ &= (D^\alpha \vartheta_R)(x^*) \int_{S_{\varepsilon, \mu}(x_0)} g_{\alpha, \beta} D_x^\beta E(x_0 - x) dS = \\ &= c_0 g_{\alpha, \beta} (D^\alpha \vartheta_R)(x^*) \frac{\varepsilon^{|\mu| - \mu_0}}{\varepsilon^{|\mu| - 2 + (\mu, \beta)}} + c_0 g_{\alpha, \beta} (D^\alpha \vartheta_R)(x^*) \varepsilon^{|\mu| - \mu_0} \sigma(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $x^* \in S_{\varepsilon, \mu}(x_0)$ и $\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\varepsilon, \mu}(x_0)} \Phi[\vartheta_R(x), E(x_0 - x)] dS = \vartheta_R(x_0).$$

Таким образом, получаем интегральное представление для функции ϑ_R :

$$\vartheta_R(x_0) = \sum_{(\mu, \alpha) + (\mu, \beta) \leq 2 - \mu_0} \int_{S_{R, \mu}} g_{\alpha, \beta} D^\alpha \vartheta_R(x) D_x^\beta E(x_0 - x) dS.$$

Пусть $x_0 \in K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Тогда при достаточно больших значениях R функция ϑ_R является бесконечно дифференцируемой и имеет место оценка

$$\begin{aligned} |D^\tau \vartheta_R(x_0)| &\leq c' \sum_{(\mu, \alpha) + (\mu, \beta) \leq 2 - \mu_0} \int_{S_{R, \mu}} |D^\alpha u(x)| |D_{x_0}^\tau D_x^\beta E(x_0 - x)| dS + \\ &+ c' \sum_{(\mu, \alpha) + (\mu, \beta) \leq 2 - \mu_0} \int_{S_{R, \mu}} |D^\alpha u_R(x)| |D_{x_0}^\tau D_x^\beta E(x_0 - x)| dS \leq \quad (1.13) \\ &\leq c \sum_{(\mu, \alpha) + (\mu, \beta) \leq 2 - \mu_0} [(\|D^\alpha u\|_{L_2(S_{R, \mu})} + \\ &+ \|D^\alpha u_R\|_{L_2(S_{R, \mu})}) \|D_{x_0}^\tau D_x^\beta E(x_0 - x)\|_{L_2(S_{R, \mu})}]. \end{aligned}$$

В силу (1.5) и (1.7), для любого $(\mu, \alpha) \leq 2 - \mu_0$ имеем

$$\|D_{x_0}^\tau D_x^\beta E(x_0 - x)\|_{L_2(S_{R, \mu})} \leq c_1(\tau, K) e^{-\tau_1 R^{\mu_0}} R^{(|\mu| - \mu_0)/2}, \quad (1.14)$$

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(S_{R, \mu})} \leq c_2 e^{-\tau_1 R^{\mu_0}} R^{(|\mu| - \mu_0)/2} \|f\|_{L_{2, \alpha}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.15)$$

Остается оценить нормы $\|D^\alpha u_R\|_{L_2(S_{R, \mu})}$ при α , удовлетворяющем условию $(\mu, \alpha) \leq 2 - \mu_0$. Так как область $B_{1, \mu}$ удовлетворяет условию $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ — рога (см. [7]), то функция $\bar{u}_R \in H^{2\bar{m}}(B_{1, \mu})$, определенная в $B_{1, \mu}$, может быть продолжена на все $\mathbb{R}^n$ (см. [7], §9.8) со свойством

$$\|\bar{u}_R\|_{H^{2\bar{m}}(\mathbb{R}^n)} \leq c_3 \|\bar{u}_R\|_{2, B_{1, \mu}} \quad (1.16)$$

(здесь $\bar{u}_R$ обозначает продолженную функцию). Положим $\mu' = \max_{1 \leq j \leq n} \mu_j$. Используя известные теоремы вложения (см. [7]), нетрудно убедиться, что для всех α таких, что $(\mu, \alpha) \leq 2 - \mu_0$, имеет место вложение $D^\alpha H^{2\bar{m}}(\mathbb{R}^n) \subset W_2^{\mu_0/\mu'}(\mathbb{R}^n)$, где W_2^s ($s > 0$) — изотропное дробное пространство Соболева с нормой

$$\|\mathfrak{F}\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |F(\mathfrak{F})|^2 d\xi \right\}^{1/2},$$

выраженной в терминах преобразования Фурье функции $\mathfrak{F}$.

Теперь, если $\mu_0 > \mu_i/2$, ($i = 1, \dots, n$), то $\mu_0/\mu' > 1/2$ и след функции $D^\alpha \bar{u}_R$ на μ -сфере $S_{1, \mu}$ существует и принадлежит $L_2(S_{1, \mu})$. В этом случае имеем

$\|D^\alpha \bar{u}_R\|_{L_2(S_{1,\mu})} \leq c_3 \|\bar{u}_R\|_{H^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)}$. Следовательно, из (1.16), (1.7), (1.9) и [8] получаем

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \bar{u}_R\|_{L_2(S_{R,\mu})} &\leq c_4 \|\bar{u}_R\|_{2,B_{1,\mu}} R^{(|\mu|-\mu_0)/2} = c_4 \|u_R\|_{2,B_{R,\mu}} R^{2-\mu_0/2} \leq \\ &\leq c_5 R^{2-\mu_0/2} \|f\|_{L_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Наконец, из (1.13), (1.14), (1.15), (1.17) получим (1.10). При дополнительных условиях на функцию f получаются более точные оценки для функции $u - u_R$.

Теорема 1.2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $(\mu, \tau) \leq 2$ и $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию

$$D^\nu f(x) = O(g(|x|_\mu)) \quad (1.18)$$

при $|x|_\mu \geq R_1$, $(\mu, \nu) \leq \mu_0$, где $g(R)$ — монотонно убывающая положительная функция, удовлетворяющая условию $\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|_\mu) dx < \infty$. Тогда в условиях Теоремы 1.1 и для достаточно больших R имеет место оценка

$$\sup_K |D^\tau u - D^\tau u_R| \leq c(K) R^M \left[g(R/2) + e^{-\gamma_1 R^{\mu_0/2}} \right],$$

где $M = \max\{2 + |\mu|/2 - \mu_0, |\mu| - \mu_0\}$.

Доказательство : Достаточно оценить функции $D^\alpha u$; $(\mu, \alpha) \leq 2$ (см. доказательство Теоремы 1.1). Пусть $\psi \in C_0^\infty$, $\psi = 1$ для $|x|_\mu \leq R_1$ и $\psi = 0$ для $|x|_\mu \geq R_1 + 1$. Решение u имеет вид $u = u_1 + u_2 = E * \psi f + E * (1 - \psi) f$.

Из Леммы 1.1 имеем $|D^\alpha u_1| \leq c e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0/2}}$, $|x|_\mu \rightarrow \infty$. Однако $D^\alpha u_2 = \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta E(x-y) D^\nu [(1 - \psi(y)) f(y)] dy$, где $(\mu, \beta) < 2$, $\beta + \nu = \alpha$. Следовательно, из (1.5) и (1.18) имеем

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_2| &\leq c \int_{|x-y|_\mu \leq \frac{|x|_\mu}{2}} |D^\beta E(x-y)| g(y) dy + \\ &+ c \int_{|x-y|_\mu > \frac{|x|_\mu}{2}} |D^\beta E(x-y)| g(y) dy \leq c \left[g(|x|_\mu/2) + e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0/2}} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 1.3. В условиях Теоремы 1.1 для любого $\mu_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$) и достаточно большого R

$$\|u - u_R\|_{1,B_{R,\mu}} \leq c e^{-\gamma_1 R^{\mu_0/2}} R^{1+(|\mu|-\mu_0)/2} \|f\|_{L_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.19)$$

Доказательство : Область $B_{R,\mu}$ удовлетворяет условиям С. В. Успенского [9], [10].

Следствие. Пусть выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда $\lim_{R \rightarrow \infty} \|u - u_R\|_{1, B_{R, \mu}} = 0$.

§2 УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение вида

$$A(x, D, \lambda) u = \sum_{\substack{(\mu, \alpha) \leq 1 \\ (\mu, \beta) \leq 1}} D^\beta (a_\alpha(x) D^\alpha u) \equiv P(D) u + \lambda Q(x, D) u = f, \quad (2.1)$$

где $P(D)$ – оператор из §1, $Q(x, D)$ – дифференциальный оператор μ -порядка не выше 2 с гладкими коэффициентами, которые равняются нулю при $|x|_\mu > a$, λ – комплексный параметр, $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Ясно, что если $|\lambda|$ достаточно мало, то оператор $A(x, D, \lambda)$ – полуэллиптический (определение см. в [2]). Обозначим через Δ множество всех значений λ , при которых оператор $A(x, D, \lambda)$ полуэллиптивен. Очевидно, что Δ является открытым множеством. Связное подмножество множества Δ , которое содержит точку $\lambda = 0$, обозначим через Δ_0 . Если μ -порядок оператора $Q(x, D)$ меньше двух, то Δ_0 совпадает со всей комплексной плоскостью.

Наша цель – исследовать однозначную разрешимость уравнения (2.1) в пространстве $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$. Допустим, что $u \in H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения (2.1), $\lambda \in \Delta$, $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Применив к обеим частям уравнения (2.1) интегральный оператор с ядром $E(x - y)$, где E – фундаментальное решение оператора $P(D)$, уравнение (2.1) сводится к интегральному. Каждое из слагаемых в (2.1) локально принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$. Так как функция $E(x - y)$ имеет слабую особенность (см. [6]), то

$$\begin{aligned} & \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) P(D) u(y) dy + \lambda \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) Q(y, D) u(y) dy = \\ & = \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как $g = P(0) u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то в силу Леммы 1.2, уравнение $P(0) u = g$ имеет в классе $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$ единственное решение, которое можно получить с помощью свертки функций $E(x)$ и $g(x)$. Следовательно, получаем

$$u(x) + \lambda \int_{|y|_\mu < 2a} E(x - y) Q(y, D) u(y) dy = \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) f(y) dy. \quad (2.3)$$

Функции $D_y^\alpha E(x - y)$ при $(\mu, \alpha) < 2$ имеют интегрируемую особенность. Следовательно, второе слагаемое в левой части равенства (2.3) можно проинтегрировать по частям, перебрасывая все производные с $u(y)$ на $E(x - y)$. Пользуясь техникой дифференцирования интеграла со слабой особенностью (см. [11]), можно перебросить и "последние" производные с $u(y)$ на $E(x - y)$. Учитывая также, что коэффициенты оператора $Q(x, D)$ финитны, из (2.3) получаем

$$u(x) + \lambda \int_{|y|_\mu < 2a} [\overline{Q^\bullet(y, D_y)} E(x - y)] u(y) dy = \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) f(y) dy, \quad (2.4)$$

где интеграл слева будет сингулярным. Нетрудно проверить, что сингулярная часть ядра интеграла $\int_{|y|_\mu < 2a} [\overline{Q^\bullet(y, D_y)} E(x - y)] u(y) dy$ (если существует) равна $K(x, y) = \overline{Q_0^\bullet(x, D_y)} E_\mu(x - y)$. Здесь $\overline{Q_0^\bullet(x, D_y)}$ — те члены оператора, которые содержат одночлены оператора $\overline{Q^\bullet(x, D_y)}$, имеющие μ -порядок равный двум, а $E_\mu(x - y)$ является тем фундаментальным решением μ -однородного полуэллиптического оператора $P^0(D_x)$, производные μ -порядка 2 которого представляют собой μ -однородную функцию порядка $-|\mu|$. Такое фундаментальное решение построено, например, в [11] (см. также [12]). Очевидно, если $|x|_\mu \leq 2a$, $(\mu, \alpha) \leq 2$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется следующее неравенство $|D^\alpha[E(x) - E_\mu(x)]| < c|x|_\mu^{-|\mu|+\varepsilon}$. Оставшаяся часть ядра $K_1(x, y)$ интегрального оператора имеет вид

$$K_1(x, y) = [\overline{Q_0^\bullet(y, D_y)} - \overline{Q_0^\bullet(x, D_y)}] E(x - y) + \overline{Q_0^\bullet(y, D_y)} [E_\mu(x - y) - E(x - y)] + [\overline{Q^\bullet(y, D_y)} - \overline{Q_0^\bullet(y, D_y)}] E_\mu(x - y).$$

Заметим, что при $|y|_\mu < 2a$, $|x|_\mu < 3a$ имеем

$$|K_1(x, y)| \leq c|x - y|_\mu^{-|\mu|+\varepsilon} \quad (2.5)$$

(см. [11]), а для $|y|_\mu < 2a$, $|x|_\mu > 3a$ из (1.5) получаем

$$|K_1(x, y)| \leq c e^{-\gamma_1|x|_\mu^{|\mu|}}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, равную единице при $|x|_\mu < 2a$ и $e^{-|x|_\mu}$ при $|x|_\mu > 3a$. Умножим уравнение (2.4) на $\psi(x)$ и обозначим $u(x)\psi(x)$ через $v(x)$. Учитывая, что при $|y|_\mu < 2a$ имеем $u(y) = v(y)$, получаем

$$\begin{aligned} v(x) + \lambda \psi(x) \int_{|y|_\mu < 2a} [\overline{Q_0^\bullet(x, D_y)} E_\mu(x - y)] v(y) dy + \\ + \lambda \int_{|y|_\mu < 2a} \psi(x) K_1(x, y) v(y) dy = \psi(x) \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В силу оценок (2.5) и (2.6) оператор $T_1(\nu) = \int_{|y|_\mu < 2a} \psi(x) K_1(x, y) \nu(y) dy$ является непрерывным и компактным в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Так как коэффициенты оператора $Q(x, D)$ обращаются в нуль при $|x|_\mu > a$, то функцию $\psi(x)$ во втором слагаемом в левой части (2.7) можно отбросить. Имеем $\overline{Q_0^*(x, D_y)} = Q_0(x, D_y)$, т.е. (2.7) можно переписать в виде

$$\nu(x) + \lambda \int_{|y|_\mu < 2a} [Q_0(x, D_y) E_\mu(x - y)] \nu(y) dy + \lambda T_1 \nu = \psi(x) \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) f(y) dy. \quad (2.8)$$

Так как производные от $E_\mu(x)$ μ -порядка 2 являются μ -однородными функциями порядка $-|\mu|$ (см. [12]), то при $|y|_\mu > 2a$, $|x|_\mu < a$ имеем $|Q_0(x, D_y) E_\mu(x - y)| < c|y|_\mu^{-|\mu|}$. Поэтому оператор $T_2 \nu = \int_{|y|_\mu > 2a} [Q_0(x, D_y) E_\mu(x - y)] \nu(y) dy$ также является непрерывным и компактным в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Итак, если $T = T_1 + T_2$, то уравнение (2.8) имеет вид

$$\nu(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} [Q^*(x, D_y) E_\mu(x - y)] \nu(y) dy + \lambda T \nu = \psi(x) \int_{|y|_\mu < a} E(x - y) f(y) dy. \quad (2.9)$$

Окончательно приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. Если $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, а $u \in H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения (2.1), то функция $\nu(x) = u(x)\psi(x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению (2.9).

Справедливо также и обратное утверждение.

Лемма 2.2. Если функция $\nu \in L_2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению (2.9), то функция $u(x) = \nu(x)/\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и принадлежит классу $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$.

В силу Лемм 2.1, 2.2 и результатов работы [13] приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. При всех $\lambda \in \Delta$ индекс оператора $A(x, D, \lambda)$ равен нулю. При всех $\lambda \in \Delta_0$, за исключением счетного множества $\Delta_1 \subset \Delta_0$, уравнение (2.1) имеет единственное решение в классе $H^{2\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.1. В работе [14] построен пример, показывающий, что множество Δ_1 может быть не пустым.

§3. ТЕОРЕМЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$A(x, D) u = f, \quad (3.1)$$

где $A(x, D) \equiv A(x, D, \lambda_0)$ – оператор вида (2.1), $Q = Q(x, D)$ – дифференциальный оператор с финитными гладкими коэффициентами, $\lambda_0 \in \Delta_0 \setminus \Delta_1$ – фиксированное число. Как обычно, функция $W(x, x_0)$ является фундаментальным решением $A(x, D)$ в точке x_0 , если $A(x, D) W(x, x_0) = \delta(x - x_0)$. Нас будут интересовать фундаментальные решения, которые убывают при $|x|_\mu \rightarrow \infty$, причем только для точек x_0 из максимальной открытой области Y , в которой коэффициенты оператора $Q(x, D)$ равны нулю. В этом случае, очевидно $W(x, x_0) = E(x - x_0) + \nu(x, x_0)$, где E – экспоненциально убывающее на бесконечности фундаментальное решение оператора $P = P(D)$, а ν – убывающее решение (при $|x|_\mu \rightarrow \infty$) уравнения

$$P(D)\nu + \lambda_0 Q(x, D)\nu = -\lambda_0 Q(x, D)E(x - x_0). \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. Пусть $x_0 \in Y$. Тогда уравнение (3.2) имеет единственное решение $\nu \in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство : Рассмотрим уравнение

$$(P + \lambda_0 Q)u = f, \quad (3.3)$$

где $f = -\lambda_0 Q(x, D)E(x - x_0)$ – финитная гладкая функция (так как $x_0 \in Y$).

Решение уравнения (3.3) будем искать в виде $u = P^{-1}\omega = E*\omega$. Легко проверить, что функция u является решением уравнения (3.3) тогда и только тогда, когда $\omega \in L_2(\mathbb{R}^n)$ является решением уравнения

$$\omega + \lambda_0 Q P^{-1}\omega = f. \quad (3.4)$$

Существование и единственность решения $\omega \in L_2(\mathbb{R}^n)$ уравнения (3.4) следует из результатов §2. Поэтому используя Лемму 2.1 получаем утверждение Леммы 3.1.

Замечание 3.1. Из доказательства Леммы 3.1 следует, что при $|x|_\mu \rightarrow \infty$ для решения $\nu = \nu(x, x_0)$ уравнения (3.2) имеет место оценка

$$\|\nu\|_{H^{2m}(\mathbb{R}^n)} \leq c e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}. \quad (3.5)$$

Действительно, согласно неравенству (1.15), при $|x_0|_\mu \rightarrow \infty$ имеем $\|Q(x, D)E(x - x_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq c e^{-\gamma_1 |x_0|_\mu^{\mu_0}}$. Поскольку для оператора $I + \lambda_0 Q P^{-1}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$

существует непрерывный обратный и P^{-1} непрерывно отображает $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$, то (3.5) следует из формулы

$$\nu(x, x_0) = P^{-1}(I + \lambda_0 Q P^{-1})^{-1} [-\lambda_0 Q(x, D) E(x - x_0)].$$

Замечание 3.2. Из Леммы 1.1 следует, что $x_0 \in K$, где $K \subset Y$ – компакт и справедлива оценка

$$|D_x^\alpha D_{x_0}^\beta \nu(x, x_0)| \leq c(K, \alpha, \beta) e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}}, \quad |x|_\mu \rightarrow \infty.$$

Пусть $A(x, D)$ формально сопряжен и имеет вещественные коэффициенты, т.е.

$$\overline{A(x, D) u} = A(x, D) \bar{u}. \quad (3.6)$$

Тогда справедливы формулы Грина (см. [15])

$$\int_{B_{R,\mu}} [u A(x, D) \nu - \nu A(x, D) u] dx = \sum_{j=0}^{m_0-1} \int_{S_{R,\mu}} [F_j u \Phi_j \nu - \Phi_j u F_j \nu] dS,$$

$$u_0(x) = \sum_{j=0}^{m_0-1} \int_{S_{R,\mu}} F_j u \Phi_j W(x, x_0) dS - \sum_{j=0}^{m_0-1} \int_{S_{R,\mu}} \Phi_j u F_j W(x, x_0) dS.$$

Первая формула справедлива для любых гладких функций u и ν , а вторая верна, если $A(x, D) u = 0$, $|x|_\mu < R$, $x_0 \in Y$.

Здесь F_j и Φ_j суть операторы μ -порядка $\mu_0 j$ и $2 - \mu_0 - \mu_0 j$, соответственно. Вообще говоря, они определяются неоднозначно. Для пары операторов F_j и Φ_j , удовлетворяющих условиям $\overline{F_j u} = F_j \bar{u}$, $\overline{\Phi_j u} = \Phi_j \bar{u}$, ($j = 0, \dots, m_0 - 1$), рассмотрим задачу

$$A(x, D) u_R(x) = f(x), \quad x \in B_{R,\mu}, \quad (3.7)$$

$$\Phi_j u_R - b_j F_j u_R = 0, \quad |x|_\mu = R, \quad j = 0, \dots, m_0 - 1, \quad (3.8)$$

где b_j – постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Re} b_j = 0, \quad \operatorname{Im} b_j > 0, \quad j = 0, \dots, m_0 - 1, \quad \text{или}$$

$$\operatorname{Re} b_j = 0, \quad \operatorname{Im} b_j < 0, \quad j = 0, \dots, m_0 - 1, \quad (3.9)$$

и граничные условия (3.9) коэрцитивны.

Теорема 3.1. Пусть $A(x, D)$ формально самосопряжен и удовлетворяет условию (3.6), и $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда уравнение (3.1) имеет в пространстве $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ единственное решение. При достаточно больших R задача (3.7), (3.8) также имеет единственное решение. При этом, если $\mu_0 > \mu_i/2$ ($i = 1, \dots, n$), то для любого компакта K

$$\sup_{x \in K} |D^\tau [u(x) - u_R(x)]| \leq c(\tau, K) e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}} R^{2+|\mu|/2-\mu_0}.$$

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия Теоремы 3.1 и

$$D^\nu f(x) = O(h(|x|_\mu)) \quad \text{для} \quad |x|_\mu \geq R_1, \quad (\mu, \nu) \leq \mu_0,$$

где $h(R)$ – монотонно убывающая положительная функция, удовлетворяющая условию $\int h(|x|_\mu) dx < \infty$. Тогда для любого τ , $|x|_\mu < R - 1$ и $R \rightarrow \infty$ имеем

$$|D^\tau [u(x) - u_R(x)]| \leq c(\tau) R^M [h(R/2) + e^{-\gamma_1 R^{\mu_0}/2}] [e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}} + e^{-\gamma_1 (R-|x|_\mu)^{\mu_0}}],$$

где $M = \max\{2 + |\mu|/2 - \mu_0, |\mu| - \mu_0\}$.

Доказательства Теорем 3.1 и 3.2 не отличаются от доказательств Теорем 3 и 4 в [1].

ABSTRACT. Theorems of approximation of solutions of linear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ by the solutions of boundary – value problems in a sphere of “large” radius are well known. The present paper studies similar properties for the semi-elliptic equations. It is proved that for semi-elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ the solution can be obtained as a limit as $R \rightarrow \infty$ of the solution u_R of a boundary value problem in certain bounded domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Шимон, “Аппроксимация решений эллиптического уравнения решениями граничных задач в шаре большого радиуса”, Вестник МГУ, Москва, № 3, стр. 12 — 21, 1973.
2. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.
3. В. П. Паламодов, “Об условиях на бесконечности, обеспечивающих корректную разрешимость некоторого класса уравнений вида $P(i\partial/\partial x)u = f$ ”, ДАН СССР, том 129, № 4, стр. 740 — 744, 1959.
4. Г. А. Карапетян, “Регулярные уравнения с параметром”, Изв. АН Армении, сер. Математика, том 25, № 2, стр. 193 — 202, 1990.
5. С. М. Никольский, “Первая красная задача для одного общего уравнения”, ДАН СССР, том 144, № 4, стр. 767 — 769, 1962.
6. В. В. Грушин, “Связь между локальными и глобальными свойствами решений

- гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами", Матем. Сборник, том 66 (108), № 4, стр. 525 — 550, 1965.
7. О. Б. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, том 1, 2, Москва, Наука, 1975.
 8. Г. Г. Казарян, "Оценка в L_p смешанных производных через дифференциальные многочлены", Труды МИАН им. Стеклова, том 105, стр. 66 — 76, 1969.
 9. С. В. Успенский, "О теоремах вложения функций в областях, I", Сиб. Матем. Журнал, том 8, № 3, стр. 650 — 663, 1966.
 10. С. В. Успенский, "О следах функций класса $W_p^{1, \dots, 1}$ Соболева на гладких поверхностях", Сиб. Матем. Журнал, том 13, № 2, стр. 429 — 451, 1972.
 11. П. С. Аветисян, "Оценки ядра резольвенты семиэллиптического оператора", Кандидатская Диссертация, Ереван, ЕГУ, 1992.
 12. Г. А. Карапетян, "Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве", Труды МИАН им. Стеклова, том 170, стр. 119 — 138, 1984.
 13. С. Г. Михлин, Многомерные Сингулярные Интегралы и Интегральные Уравнения, Физматгиз, 1962.
 14. Б. Р. Вайнберг, "Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными", УМН, том 21, № 3(125), стр. 115 — 196, 1962.
 15. П. П. Мосолов, "Об одной красной задаче для симметрических операторов", Вестник МГУ, Москва, № 1, стр. 64 — 69, 1966.

10 июля 1999

Ереванский государственный университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Е. А. Тароян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 4, 1999

Асимптотические представления решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем используется для построения адиабатических инвариантов и для оценки их изменений. Эти результаты применяются для изучения системы Дирака, системы слабо связанных линейных осцилляторов, а также для улучшения некоторых известных оценок.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В этом параграфе получено асимптотическое представление для решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.1)$$

где $x(t)$ – n -мерная вектор-функция, а $A(t)$ – $n \times n$ -матрица-функция определенная на действительной оси. Затем мы используем эти результаты для получения асимптотических представлений для решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Эти асимптотические представления используются для оценки изменения адиабатического инварианта таких систем.

Пусть $\|\cdot\|_M$ и $\|\cdot\|_V$ суть евклидова норма матрицы и вектора, соответственно.

Теорема 1. Если в (1.1) $A(t) \in C(R)$ и существует обратимая $n \times n$ -матрица-функция $\Phi(t) \in C^1(R)$ такая, что

$$\Psi \equiv \Phi^{-1} \left(A\Phi - \frac{d\Phi}{dt} \right) \in L_1(R), \quad (1.2)$$

то любое решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x = \Phi(c + \epsilon), \quad (1.3)$$

где c — произвольный постоянный n -вектор, а n -вектор-функция $\epsilon(t)$ удовлетворяет условию

$$\|\epsilon\|_V \leq \|c\|_V \left(\exp \int_t^\infty \|\Psi\|_M ds - 1 \right) \quad \text{для всех } t \in R. \quad (1.4)$$

Доказательство : Пусть $x = x(t)$ — произвольное решение уравнения (1.1).

Легко видеть, что подстановка

$$x = \Phi y \quad (1.5)$$

приводит (1.1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Psi y, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.6)$$

где Ψ определена в (1.2). Интегрируя (1.6) получаем

$$y = c - \int_t^\infty \Psi y ds, \quad (1.7)$$

где c — постоянный n -вектор. Из (1.7) находим

$$\|y\|_V \leq \|c\|_V + \int_t^\infty \|\Psi\|_M \|y\|_V ds. \quad (1.8)$$

Тогда из леммы Гроунола [1] получаем следующую оценку :

$$\|y\|_V \leq \|c\|_V \exp \int_t^\infty \|\Psi\|_M ds. \quad (1.9)$$

Наконец, полагая

$$\epsilon = y - c = - \int_t^\infty \Psi y ds, \quad (1.10)$$

и используя (1.5), (1.7) и (1.9), приходим к представлению (1.3), где

$$\begin{aligned} \|\epsilon\|_V &\leq \int_t^\infty \|\Psi\|_M \|y\|_V ds \leq \|c\|_V \int_t^\infty \|\Psi\|_M \left(\exp \int_s^\infty \|\Psi\|_M d\tau \right) ds \leq \\ &\leq \|c\|_V \left(\exp \int_t^\infty \|\Psi\|_M ds - 1 \right). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В оценке (1.4) можно заменить $\exp \int_t^\infty \|\Psi\|_M ds$ на $\exp \left| \int_{t_0}^t \|\Psi\|_M ds \right|$,

где t_0 — произвольное число или $\pm\infty$.

Пример 1. Предположим, что система (1.1) является L -диагональной, т.е. матрица-функция $A(t) \in C(R)$ имеет вид $A(t) = \text{diag}(r_1(t), \dots, r_n(t)) + B(t)$, где $\text{Re}(r_j - r_k) \in L_1(R)$, $\|B\|_M \in L_1(R)$, $j, k = 1, \dots, n$. Тогда в Теореме 1 можно выбрать

$$\Phi = \text{diag} \left(\exp \int_0^t r_1 ds, \dots, \exp \int_0^t r_n ds \right),$$

так, что

$$\Psi = \left(b_{jk} \exp \int_0^t (r_k - r_j) ds \right)_{j,k=1}^n, \quad \text{где } B = (b_{jk})_{j,k=1}^n,$$

и Теорема 1 сводится к версии известной теоремы Левинсона для L -диагональных систем с более точной оценкой для вектор-функции ϵ (см., например, [1] и замечание, что в теореме Левинсона условие $\text{Re}(r_j - r_k) \in L_1(R)$, $j, k = 1, \dots, n$ можно заменить на условие, что $\text{Re}(r_j - r_k)$ не меняет знака на R .)

Как следствие Теоремы 1 можно получить аналогичный результат для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка. Рассмотрим уравнение

$$Lq = q^{(n)} + a_1(t)q^{(n-1)} + \dots + a_n(t)q = 0, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.11)$$

Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – система функций, непрерывных на R , а $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$ – их вронскиан. Положим

$$\Phi = \left(\varphi_k^{(j-1)} \right)_{j,k=1}^n \quad \text{и} \quad \Phi^{-1} = \left(\frac{(-1)^{j+k} \Phi_{kj}}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} \right)_{j,k=1}^n, \quad (1.12)$$

где Φ_{kj} – минимальный элемент $\varphi_j^{(k-1)}$ в матрице-функции $\Phi(t)$, и преобразуем уравнение (1.11) к системе вида (1.1) с

$$x = \text{column}(q, \dots, q^{(n-1)}) \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для матрицы-функции Ψ , определенной в (1.2), имеем

$$\Psi = \Phi^{-1} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^{(1)} & \dots & \varphi_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)} - L\varphi_1 & \dots & \varphi_n^{(n)} - L\varphi_n \end{pmatrix} - \frac{d\Phi}{dt} \right] = -\Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ L\varphi_1 & \dots & L\varphi_n \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание (1.12), находим элементы матрицы Ψ :

$$\psi_{jk} = \frac{(-1)^{n+j-1} \Phi_{nj} L\varphi_k}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Следствие 1. Если коэффициенты $a_1(t), \dots, a_n(t)$ уравнения (1.11) непрерывны на $\mathbb{R}$ и существует обратимая матрица-функция $\Phi = \left(\varphi_k^{(j-1)} \right)_{j,k=1}^n \in C(R)$ такая, что

$$\frac{\Phi_{nj} L \varphi_k}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} \in L_1(R), \quad j, k = 1, \dots, n,$$

то любое решение уравнения (1.11) вместе с его производными допускает представление

$$q^{(k-1)} = \sum_{j=1}^n \varphi_j^{(k-1)} (c_j + \varepsilon_j), \quad k = 1, \dots, n,$$

где функции $\varepsilon_j(t)$ удовлетворяют условию

$$|\varepsilon_j| \leq \left| \sum_{k=1}^n c_k \right| \left(\exp \int_1^\infty \left| \frac{\sum_{i,k=1}^n \Phi_{ni} L \varphi_k}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} ds - 1 \right| \right), \quad t \in R, \quad j = 1, \dots, n,$$

с произвольными постоянными c_j , $j = 1, \dots, n$.

Аналог этого результата с интересными применениями впервые получены в [2].

§2. СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \lambda)x, \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.1)$$

где $A(t, \lambda)$ — $n \times n$ -матрица-функция, определенная на $\mathbb{R}$, а λ — положительный параметр. Введем следующее условие на матрицу-функцию $A(t, \lambda)$ (a_i — абсолютные постоянные) :

А. Существует обратимая $n \times n$ -матрица-функция $\Phi(\cdot, \lambda) \in C^1(R)$ такая, что $\|\Phi(0, \lambda)\|_m \leq a_1$, а элементы ψ_{jk} матрицы-функции Ψ , определенные в (1.2), имеют вид

$$\psi_{jk} = u_{jk} \exp \left(\lambda \int_{t_0}^t v_{jk} ds \right), \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

где функции $u_{jk}(t, \lambda)$ и $v_{jk}(t, \lambda)$, $j, k = 1, \dots, n$ удовлетворяют условиям

$$u_{jk}(\cdot, \lambda) \in C^m(R), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u_{jk}^{(s)}(t, \lambda)| dt \leq a_2, \quad s = 0, \dots, m,$$

$|v_{jk}(t, \lambda)| \geq a_3 > 0$, $v_{jk}(\cdot, \lambda) \in C^m(R)$, $|v_{jk}^{(s)}(\cdot, \lambda)| \leq a_4$, $\operatorname{Re} v_{jk} = 0$, $s = 1, \dots, m$

для некоторого натурального m .

Легко проверить, что из A следуют условия Теоремы 1, и поэтому любое решение системы (2.1) допускает представление (1.3), (1.4). Однако условие A позволяет получить более точное асимптотическое представление решений, соответствующее ограниченному при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ данным Коши.

Теорема 2. Пусть в (2.1) имеем $A(\cdot, \lambda) \in C(R)$, и пусть условие A выполняется для всех $t \in R$, $\lambda \geq \lambda_0$ и некотором натуральном m . Тогда любое решение $x = x(t, \lambda)$ уравнения (2.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши имеет вид

$$x = \Phi \left(c + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\lambda^k} \right), \quad (2.3)$$

где $c(\lambda)$ – произвольный n -вектор такой, что $\|c(\lambda)\|_v \leq a$, а вектор-функции $\alpha_k(t, \lambda)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_k(\cdot, \lambda) \in C^m(R), \quad \|\alpha_k(t, \lambda)\|_v \leq a_m \quad \text{для всех } t \in R, \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\alpha_k(t, \lambda)\|_v dt \leq a_m \quad \text{для любого } \lambda \geq \lambda_0, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (2.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_m(t, \lambda) = 0 \quad \text{и существует} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_m(t, \lambda) \quad \text{для любого } \lambda \geq \lambda_0. \quad (2.6)$$

Доказательство : Пусть A выполнено. Вначале докажем, что если решение уравнения (2.1) имеет вид (1.3), (1.4), где $\|c\|_v$ ограничены при $\lambda \geq \lambda_0$, то ε можно записать в виде $\varepsilon = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda^k}$ причем $\alpha_k(t, \lambda)$, $k = 1, \dots, m$ удовлетворяют условиям (2.4) – (2.6). Действительно, для $\varepsilon(t, \lambda)$ имеем (1.10), причем y удовлетворяет (1.6). Подставляя (2.2) в (1.10) получаем

$$\varepsilon_j = - \int_t^\infty \sum_{k=1}^n \psi_{jk} y_k ds = - \sum_{k=1}^n \int_t^\infty u_{jk} y_k \exp \left(\lambda \int_{t_0}^s v_{jk} d\tau \right) ds, \quad (2.7)$$

где ε_j , $j = 1, \dots, n$ суть компоненты вектор-функции ε . Интегрируя (2.7) по частям получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_j = & -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{u_{jk} y_k}{v_{jk}} \exp \left(\lambda \int_{t_0}^s v_{jk} d\tau \right) \Big|_t^\infty + \\ & + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \int_t^\infty \exp \left(\lambda \int_{t_0}^s v_{jk} d\tau \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{u_{jk} y_k}{v_{jk}} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Принимая во внимание (1.6), (1.8) и обозначая первое слагаемое в правой части (2.8) через α_1/λ , где $\alpha_1 = \text{column}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1})$, получаем, что $\alpha_1(\cdot, \lambda) \in C(R)$ и условия (2.4), (2.5) выполняются. Повторяя эту процедуру m раз, получаем доказательство теоремы для решений уравнения (2.1), имеющих вид (1.3), (1.4), где $\|c\|_V$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Теперь предположим, что $x = x(t, \lambda)$ – решение (2.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши. Достаточно показать, что в его представлении (1.3), (1.4) $\|c\|_V$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Согласно Замечанию 1 это решение имеет вид

$$x = \Phi(c + \varepsilon) = \Phi(c_0 + \varepsilon_0), \quad (2.9)$$

где ε удовлетворяет (1.4), а ε_0 – (1.4) с верхним пределом интегрирования $= 0$ (вместо ∞). Так как $\varepsilon_0(0, \lambda) = 0$ получаем

$$c_0 = \Phi^{-1}(0, \lambda)x(0, \lambda). \quad (2.10)$$

Из (2.10) и условия A следует, что $\|c_0\|_V$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Следовательно, и $\|\varepsilon_0\|_V$ также ограничена. Из (2.9) следует, что

$$c = c_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon = c_0 + \varepsilon_0(\infty, \lambda), \quad (2.11)$$

и поэтому $\|c\|_V$ ограничена при $\lambda \geq \lambda_0$. Теорема 2 доказана.

Интересно построить матрицу-функцию $\Phi(t, \lambda)$ при более сильных ограничениях на $A(t, \lambda)$. Например, рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t)x, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.12)$$

Известно из линейной алгебры, что если собственные значения v_k , $k = 1, \dots, n$ матрицы A различны, то существует обратимая матрица T , преобразующая A к диагональному виду, т.е.

$$T^{-1}AT = \text{diag}(v_1, \dots, v_n) = V, \quad (2.13)$$

где столбцы e_i , $i = 1, \dots, n$ матрицы $T = (e_1, \dots, e_n)$ суть линейно независимые собственные вектора матрицы A .

Следствие 2. Пусть для матрицы-функции $A(t) \in C(R)$ существуют пределы $A(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} A(t)$, и собственные значения $v_k(t) \in C^m(R)$ удовлетворяют условию

$$\text{Im}(v_j - v_k) \neq 0, \quad \text{Re}(v_j - v_k) = 0, \quad j \neq k, \quad |v_k^{(s)}| \leq a \quad (2.14)$$

для всех $-\infty \leq t \leq \infty$, $j, k = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, m$, и пусть существует обратимая матрица-функция $T(t)$, преобразующая $A(t)$ к диагональному виду так, что

$$T(t) \in C^m(R), \quad \|T^{(j)}(t)\|_{\infty} \in L_1(R), \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.15)$$

Тогда любое решение $x = x(t, \lambda)$ уравнения (2.12) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши, удовлетворяет условиям (2.3) – (2.6), причем

$$\Phi = T \operatorname{diag} \left(\exp \int_{t_0}^t (\lambda v_1 - u_1) ds, \dots, \exp \int_{t_0}^t (\lambda v_n - u_n) ds \right), \quad (2.16)$$

где $u_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ суть диагональные элементы матрицы $T^{-1}dT/dt$.

Доказательство : Достаточно показать, что из условий Следствия 2 вытекает A , где Φ – как в (2.16). Обозначим через R диагональную матрицу-функцию в (2.16). Подставляя (2.16) в выражение (1.2) получаем

$$\Psi = R^{-1}T^{-1} \left(\lambda ATR - \frac{dT}{dt}R - T \frac{dR}{dt} \right) = R^{-1} \left(\lambda VR - T^{-1} \frac{dT}{dt}R - \frac{dR}{dt} \right), \quad (2.17)$$

где $V(t)$ – диагональная матрица-функция, определенная в (2.13). Подставляя R в (2.17) легко видеть, что диагональные элементы для Ψ равны нулю. Далее, из (2.15) следует, что непрерывная матрица-функция $T(t)$, преобразующая $A(t)$ в диагональный вид, имеет пределы при $\pm\infty$, и поэтому (2.13) выполняется в $\pm\infty$, т.е. $\det T(t) \neq 0$ для всех $-\infty \leq t \leq \infty$. Следовательно, $T^{-1}dT/dt \in L_1(R)$, и легко видеть, что условие A выполняется для Φ , имеющей вид (2.16) (разности $v_j - v_k$ играют роль элементов v_{jk} в (2.2)). Следствие 2 доказано.

Определение 1. Матрица-функция $f(t) \in C(R)$ называется слабой (см. [3]), если

$$\frac{d^s f}{dt^s} \in L_1(R) \quad \text{для всех } s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

В [3] доказано, что если $A(t)$ – матрица-функция, удовлетворяющая $d^s A/dt^s \in L_1(R)$ для всех $s = 1, 2, \dots$ и ее собственные значения $r_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ различны и чисто мнимые для всех $-\infty \leq t \leq \infty$, то $dr_k(t)/dt$, $k = 1, \dots, n$ суть слабые и существует обратимая матрица-функция $T(t)$, преобразующая $A(t)$ к диагональному виду такая, что $dT(t)/dt$ является слабой. Очевидно, если $dA(t)/dt$ – слабая, то $A(t)$ имеет пределы в $\pm\infty$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $dA(t)/dt$ – слабая матрица-функция с различными и чисто мнимыми собственными значениями для всех $-\infty \leq t \leq \infty$. Тогда утверждение Следствия 2 имеет место для любого решения уравнения (2.12) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши и для любого натурального m .

Полученные результаты применяются ниже при изучении адиабатических инвариантов для систем дифференциальных уравнений.

Определение 2. Пусть $A(t, \lambda)$ в (2.1) является $2n \times 2n$ -матриц-функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющей условию A для некоторого натурального m , и пусть

$$\Phi^{-1} = (\varphi_{j,k}^{-1})_{j,k=1}^{2n}, \quad \overline{\varphi_{2i-1,k}^{-1}} = \varphi_{2i,k}^{-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Тогда скалярные произведения

$$J_i(t, x, \lambda) = \langle S^i x, x \rangle, \quad \text{где} \quad S^i = (\varphi_{2i-1,j}^{-1} \varphi_{2i,k}^{-1} + \varphi_{2i,j}^{-1} \varphi_{2i-1,k}^{-1})_{j,k=1}^{2n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

называются адиабатическими инвариантами уравнения (2.1) (см. также [4]).

Из определения следует, что $S^i = S^i(t, \lambda)$ суть действительные симметричные $2n \times 2n$ -матрицы-функции.

Теорема 3. Если $J_i(t, x, \lambda)$, $i = 1, \dots, n$ суть адиабатические инварианты уравнения (2.1), то

$$J_i(t_1, x, \lambda) - J_i(t_2, x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \text{для любых } \infty < t_1, t_2 < \infty, \quad (2.20)$$

$$J_i(\infty, x, \lambda) - J_i(-\infty, x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^m}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (2.21)$$

где $x = x(t, \lambda)$ – произвольное решение уравнения (2.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши.

Доказательство : Из (2.19) для $i = 1, \dots, n$ имеем

$$J_i(t, x, \lambda) = \sum_{j,k=1}^{2n} (\varphi_{2i-1,j}^{-1} \varphi_{2i,k}^{-1} + \varphi_{2i,j}^{-1} \varphi_{2i-1,k}^{-1}) x_j x_k = 2 \sum_{j=1}^{2n} \varphi_{2i-1,j}^{-1} x_j \sum_{k=1}^{2n} \varphi_{2i-1,k}^{-1} x_k. \quad (2.22)$$

Пусть $x = x(t, \lambda)$ – решение уравнения (2.1) с ограниченными данными Коши.

Тогда из (2.3) и (2.22) получаем

$$J_i(t, x, \lambda) = 2 \left(c_{2i-1} + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{2i-1,k}}{\lambda^k} \right) \left(c_{2i} + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{2i,k}}{\lambda^k} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

Наконец, из свойств (2.4) – (2.6) вектор-функций $\alpha_k = \text{column}(\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{2n,k})$ вытекают оценки (2.20) и (2.21). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Адиабатические инварианты аппроксимируют первые интегралы системы в том смысле, что если аппроксимирующая резольвентная матрица Φ становится точной резольвентной матрицей, то α_k , $k = 1, \dots, m$ равны нулю и как следует из (2.23), адиабатические инварианты становятся первыми интегралами системы.

§3. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим следующую систему типа Дирака :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} x = \lambda x, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.1)$$

где $p = p(t)$ и $q = q(t)$, $t \in R$ суть действительные, ограниченные, m -раз непрерывно дифференцируемые функции, и λ — достаточно большой положительный параметр. Перепишем (3.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \lambda)x, \quad \text{где} \quad A(t, \lambda) = \begin{pmatrix} q & -\lambda - p \\ \lambda - p & -q \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Корни характеристического уравнения $\det(A - \mu I) = 0$ имеют вид :

$$\mu_{1,2} = \pm i \sqrt{\lambda^2 - p^2 - q^2} = \pm i\alpha. \quad (3.3)$$

Эта матрица-функция преобразует $A(t, \lambda)$ к диагональному виду (см. (2.13)), а ее обратная матрица-функция имеет вид

$$T = \frac{1}{p + \lambda} \begin{pmatrix} p + \lambda & p + \lambda \\ q - i\alpha & q + i\alpha \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2i\alpha} \begin{pmatrix} q + i\alpha & -p - \lambda \\ -q + i\alpha & p + \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Диагональные элементы для τ_1, τ_2 из $T^{-1}dT/dt$ имеют вид

$$\tau_1 = \frac{p + \lambda}{2\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{iq}{p + \lambda} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\alpha}{p + \lambda} \right), \quad \tau_2 = \overline{\tau_1}. \quad (3.5)$$

Выберем

$$\Phi(t, \lambda) = T \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \bar{r} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{\frac{p + \lambda}{\alpha}} \exp \left\{ i \int_0^t \left[\alpha - \frac{p + \lambda}{2\alpha} \frac{d}{ds} \left(\frac{q}{p + \lambda} \right) \right] ds \right\}, \quad (3.6)$$

а $T(t, \lambda)$ определена по (3.4). Положим $d^s p/dt^s, d^s q/dt^s \in L_1(R)$ для $s = 1, \dots, m$. Тогда $\Phi(t, \lambda)$ будет удовлетворять условию А и условиям Определения

2. Матрица-функция $S = S^1$, определенная по (2.19), принимает вид

$$S = (\varphi_{1j}^{-1} \varphi_{2k}^{-1} + \varphi_{2j}^{-1} \varphi_{1k}^{-1})_{j,k=1}^2 = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} \lambda - p & -q \\ -q & \lambda + p \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $p = p(t)$ и $q = q(t)$, $t \in R$ суть действительные функции, удовлетворяющие условию

$$p(t), q(t) \in C^m(R) \quad \text{и} \quad \frac{d^s p}{dt^s}, \frac{d^s q}{dt^s} \in L_1(R), \quad s = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Тогда

(i) имеет место утверждение Теоремы 2 для любого решения $x = x(t, \lambda)$ уравнения (3.1) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши, а $\Phi(t, \lambda)$ имеет вид (3.6),

(ii) существует адиабатический инвариант уравнения (3.1)

$$J = \langle Sx, x \rangle = \frac{(\lambda - p)x_1^2 - 2qx_1x_2 + (\lambda + p)x_2^2}{2\sqrt{\lambda^2 - p^2 - q^2}}, \quad (3.9)$$

удовлетворяющий оценкам (2.20), (2.21),

(iii) если dp/dt и dq/dt суть слабые, то утверждения (i), (ii) имеют место для каждого $m = 1, 2, \dots$

2. Рассмотрим систему слабо связанных линейных осцилляторов, определяемых следующим уравнением второго порядка :

$$\ddot{x} + S\left(\frac{t}{\lambda}\right) x = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.10)$$

где $S(t)$ - действительная симметричная $n \times n$ -матрица-функция, а λ - достаточно большой положительный параметр. Преобразуем ее в систему первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = A\left(\frac{t}{\lambda}\right) y, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.11)$$

где

$$y = \text{column}(x, \dot{x}), \quad A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -S & 0_n \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Можно определить адиабатический инвариант уравнения (3.10) как адиабатический инвариант соответствующей системы первого порядка (3.12).

Предложение 2. Пусть действительная симметричная матрица-функция $S(t)$ имеет пределы $S(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} S(t)$ и положительные собственные значения $\omega_k^2(t) \in C^m(R)$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющие при $j, k = 1, \dots, n$ условию

$$\omega_j^2 - \omega_k^2 \neq 0, \quad j \neq k, \quad |\omega_k^{(s)}| \leq a \quad \text{для любых} \quad -\infty \leq t \leq \infty, \quad s = 1, \dots, m, \quad (3.13)$$

и пусть существует действительная ортогональная матрица-функция $F(t)$, преобразующая $A(t)$ к диагональному виду и удовлетворяющая (2.15). Тогда

(i) любое решение $y = y(t, \lambda)$ уравнения (3.11) с ограниченными при $\lambda \geq \lambda_0$ данными Коши удовлетворяет (2.3) – (2.6) с

$$\Phi(t, \lambda) = T \left(\frac{t}{\lambda} \right) \text{diag}(r_1(t, \lambda), \overline{r_1(t, \lambda)}, \dots, r_n(t, \lambda), \overline{r_n(t, \lambda)}), \quad (3.14)$$

где $r_k = \omega_k^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{\lambda} \right) \exp i \int_0^t \omega_k \left(\frac{s}{\lambda} \right) ds$, $k = 1, \dots, n$,

$$T = \begin{pmatrix} f_1 & f_1 & \dots & f_n & f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ i\omega_1 f_1 & -i\omega_1 f_1 & \dots & i\omega_n f_n & -i\omega_n f_n \end{pmatrix}, \quad (f_1, \dots, f_n) = F, \quad (3.15)$$

(ii) существуют адиабатические инварианты уравнения (3.10)

$$J_k = \frac{\langle f_k, \dot{x} \rangle^2 + \omega_k^2 \langle f_k, x \rangle^2}{2\omega_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

удовлетворяющие оценкам (2.20), (2.21),

(iii) если dA/dt – слабая, то утверждения (i), (ii) имеют место для каждого $m = 1, 2, \dots$.

Доказательство : Введем величину $\tau = t/\lambda$ и перепишем (3.11) в виде $\frac{dy}{d\tau} = \lambda A(\tau)y$, $-\infty < t < \infty$. Корни характеристического уравнения $\det(\lambda A - \mu I_{2n}) = \det(\mu^2 I_n + \lambda^2 S) = 0$ имеют вид $\mu_{2k-1} = i\lambda\omega_k$, $\mu_{2k} = -i\lambda\omega_k$, $k = 1, \dots, n$. Собственные векторы l_k , соответствующие μ_k , удовлетворяют условию $(\lambda A - \mu_k I_{2n})l_k = 0$, $k = 1, \dots, 2n$ или

$$\begin{cases} \mu_k l_{1k} + \lambda l_{n+1k} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \mu_k l_{nk} + \lambda l_{2nk} = 0, \\ \lambda \sum_{j=1}^n b_{1j} l_{jk} - \mu_k l_{n+1k} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \lambda \sum_{j=1}^n b_{nj} l_{jk} - \mu_k l_{2nk} = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $(\lambda^2 S + \lambda^2 I_n) \text{column}(l_{1k}, \dots, l_{nk}) = 0$. Поэтому мы можем определить l_k по формуле

$$l_{2k-1} = \text{column}(f_{1\ 2k-1}, \dots, f_{n\ 2k-1}, i\omega_k f_{1\ 2k-1}, \dots, i\omega_k f_{n\ 2k-1}), \quad l_{2k} = \overline{l_{2k-1}}.$$

Следовательно, матрица-функция $T(\tau)$, преобразующая $A(\tau)$ к диагональному виду, имеет вид (3.15). Так как $F(\tau)$ является действительной и ортогональной, то

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1^T & f_1^T / (i\omega_1) \\ f_1^T & f_1^T / (-i\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_n^T & f_n^T / (i\omega_n) \\ f_n^T & f_n^T / (-i\omega_n) \end{pmatrix}$$

$$\tau_k = f_k^T \frac{df_k}{d\tau} + \frac{1}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{1}{2\omega_k} \frac{d\omega_k}{d\tau},$$

где τ_k , $k = 1, \dots, 2n$ суть диагональные элементы матрицы $T^{-1}dT/dt$. Теперь можно убедиться, что условия Следствия 2 и Определения 1 выполнены. Используя (2.22) и (2.23), получаем (3.16). Утверждения (i), (ii) доказаны. Утверждение (iii) следует из (i), (ii) и Следствия 3 (см. также [3]).

ABSTRACT. Asymptotic representations for solutions of a class of ordinary linear differential equations and systems are used to construct adiabatic invariants and to estimate their changes. The results are applied to the study of Dyrac system, the system of weakly connected linear oscillators, as well as to improve some well-known estimates.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Демидович, Лекции по Математической Теории Устойчивости, Наука, Москва, 1967.
2. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, сер. Математика, том 31, № 1, стр. 9 – 28, 1996.
3. A. Leung, K. Meyer, "Adiabatic invariants for linear Hamiltonian systems", Jour. of Differ. Equations, vol. 17, no. 1, pp. 32–43, 1975.
4. A. Boutet de Monvel-Berthier, G. Nenciu, "On the theory of adiabatic invariants for linear Hamiltonian systems", Comp. Rend. de L'acad. des Sci., Math., vol. 310, ser. 1, no. 12, pp. 807–812, 1990.

2 декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА И ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

Р. Ф. Шамоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 4, 1999

В статье изучаются задачи, касающиеся пространств $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ аналитических функций в единичном полидиске U^n , обобщающие хорошо известные классы Харди, Соболева и Джрбашяна. Описаны мультипликаторы степенных рядов из $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ в классы ВМОА, Липшица и Бесова. Получены также необходимые и достаточные условия в терминах символа φ , сохраняющего оператор Теплица T_{φ} ограниченным оператором, отображающим гладкий аналог пространства $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ в некоторое подпространство класса $H(U^n)$ голоморфных функций в U^n . Доказана теорема вложения для классов $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$ есть единичный полидиск в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, I – отрезок $[0, 1]$ и T^n – остов полидиска U^n . Обозначим через $H(U^n)$ класс всех голоморфных функций в U^n , а через $m_n(\xi)$ – n -мерную меру Лебега в T^n и $dR = dR_1 \cdots dR_n$. Пространство $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ аналитических функций в полидиске U^n при $0 < p, q, \alpha < \infty$ определяется следующим образом:

$$F_{\alpha}^{p,q}(U^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \|f\|_{F_{\alpha}^{p,q}}^q = \int_{T^n} \left(\int_I |f(R\xi)|^p (1-R)^{\alpha p-1} dR \right)^{q/p} dm_n(\xi) < \infty \right\}. \quad (1)$$

Легко видеть, что при $p = q$ пространство $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ совпадает с хорошо известным пространством М. М. Джрбашяна $L_{\alpha}^q(U^n)$ в полидиске (см. [1], [2]), а в силу результатов [3], при $n = 1$, $p = 2$ пространство $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ совпадает с пространством Харди-Соболева $H_{\alpha}^q(U)$.

Некоторые свойства пространств $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ и их гладкие аналоги изучены в [4] – [7]. В работе [6] было получено полное описание функционалов для

пространств $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$, а также характеристик мультипликаторов степенных рядов из $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в пространство Харди $H^s(U^n)$ при $0 < p, q \leq 1, 0 < \max(p, q) \leq s$ и из $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в $F_{\beta}^{t,s}(U^n)$ при $0 < s \leq t < \infty, 0 < \max(p, q) \leq s \leq 1$.

В настоящей статье мы продолжаем изучение пространств $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$, $0 < p, q < \infty$. В дальнейшем изложении мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

$$rz = (r_1 z_1, \dots, r_n z_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma^n;$$

$$|1 - z|^{\gamma} = \prod_{k=1}^n |1 - z_k|^{\gamma}, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad z_k \neq 1, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$M_p(f, r) = \left(\int_{T^n} |f(r\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

В пространстве $H(\mathbf{U}^n)$ рассмотрим оператор дробного дифференцирования D^{α} : для $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k \in H(\mathbf{U}^n)$ и $\alpha > -1$

$$(D^{\alpha} f)(z) = \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k, \quad \Gamma(k + \alpha + 1) = \prod_{j=1}^n \Gamma(k_j + \alpha + 1).$$

Легко видеть, что $(D^{\alpha} f)(z) \in H(\mathbf{U}^n)$, если $f \in H(\mathbf{U}^n)$.

Статья имеет следующую структуру: §1 содержит полное описание мультипликаторов степенных рядов из $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в классы ВМОА, Липшица и Бесова в полидиске. В §2 вводятся гладкие аналоги пространств $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ и изучаются операторы Теплица T_{φ} , действующие на этих пространствах. В §3 доказывается теорема вложения для классов $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$. Задачи, рассматриваемые в §§1 и 2, исследовались в [8] – [12] для пространств Харди $H(\mathbf{U}^n)$.

§1. МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ИЗ КЛАССОВ $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$

Определение 1.1. Пусть X и Y – подпространства $H(\mathbf{U}^n)$. Последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n}$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, называется мультипликатором из X в Y , если для любой функции $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k \in X$ функция $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k c_k z^k$ принадлежит Y . Множество таких последовательностей обозначим через $M_T(X, Y)$. Опираясь на результаты [6], дадим полное описание мультипликаторов из $F_{\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в классы ВМОА, Липшица $\Lambda_{\alpha}^{\beta_1, \dots, \beta_n}$ и Бесова B_{β}^p , определенные в полидиске. Введем следующие

классы голоморфных функций в U^n :

$$BMOA(U^n) = \{f \in H(U^n) :$$

$$\|f\|_{BMOA} = \sup_{z \in U^n} \left(\int_{T^n} |f(\xi) - f(z)|^s \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}\xi|^2} dm_n(\xi) \right)^{1/s} < \infty \}, \quad 1 \leq s < \infty;$$

$$\Lambda_A^{\beta_1, \dots, \beta_n}(U^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \|f\|_{\Lambda_A^{\beta}} = \sup_{z \in U^n} \left| \frac{\partial^{|m|} g(z)}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \right| (1 - |z_1|)^{m_1 - \beta_1} \dots (1 - |z_n|)^{m_n - \beta_n} < \infty \right\},$$

$$m_i \in \mathbb{Z}_+, \quad m_i > \beta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad |m| = m_1 + \dots + m_n;$$

$$B_s^{\beta}(U^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \|f\|_{B_s^{\beta}} = \int_{U^n} |D^m f(w)|^s (1 - |w|)^{s(m - \beta) - 1} dm_{2n}(w) < \infty \right\},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, \quad m > \beta, \quad 0 < s < \infty.$$

В силу теоремы Харди-Литтлвуда и условия Гарсия (см. [13] – [15]), при $n = 1$ введенные пространства $BMOA(U^n)$ и $\Lambda_A^{\beta_1, \dots, \beta_n}$ совпадают с пространством $BMOA(U)$ и классом Липшица-Зигмунда $\Lambda_A^{\beta}(U)$, соответственно. Следующая лемма из [6] будет часто использоваться в этой статье.

Лемма 1.1. Если $0 < \max(p, q) \leq s < \infty$, $0 < \alpha < \infty$, то

$$\left(\int_{U^n} |f(w)|^s (1 - |w|)^{s(\alpha + \frac{1}{q}) - 2} dm_{2n}(w) \right)^{1/s} \leq C \|f\|_{F_{\alpha}^{p,q}}, \quad f \in F_{\alpha}^{p,q}(U^n).$$

Здесь и ниже буква C с индексами или без будет обозначать положительные постоянные.

Теорема 1.1. Пусть $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k \in H(U^n)$, $0 < p, q \leq 1$. Следующие утверждения равносильны :

$$1) \quad \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \in M_T(F_{\alpha}^{p,q}(U^n), BMOA(U^n)),$$

$$2) \quad \sup_{z \in U^n} \left(\sup_{R \in I^n} \int_{T^n} |D^m g_R(\xi) - D^m g_R(z)|^s \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{z}\xi|^2} dm_n(\xi) \right)^{1/s} \times \\ \times (1 - R)^{m - \alpha - \frac{1}{q} + 1} < \infty,$$

где $1 \leq s < \infty$, $g_R(z) = g(Rz)$, $m \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, $m > \alpha + \frac{1}{q} - 1$.

Следующие утверждения также равносильны :

$$3) \quad \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \in M_T(F_{\alpha}^{p,q}(U^n), \Lambda_A^{\beta}(U^n)),$$

$$4) \quad \sup_{R \in I^n} \sup_{z \in U^n} |D^m g_R^{[k]}(z)| (1 - |z_1|)^{k_1 - \beta_1} \dots (1 - |z_n|)^{k_n - \beta_n} (1 - R)^{m - \alpha - \frac{1}{q} + 1} < \infty,$$

где

$$g_R^{[k]}(z) = \frac{\partial^{[k]} g(Rz)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}, \quad k_j, m \in \mathbb{N}, \quad m > \alpha + \frac{1}{q} - 1, \quad k_j > \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство : Положим

$$f_R(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 - R_k z_k)^{m+1}}, \quad R_k \in I, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующее неравенство :

$$\int_I (1-v)^s |1-wv|^t dv \leq \frac{C'}{|1-w|^{t-(s+1)}}, \quad t > s+1 > 0, \quad w \in U^n,$$

из которого получаем ($z = |z|\xi$)

$$\|f_R\|_{F_\alpha^{p,q}} = \left(\int_{T^n} \left(\int_{I^n} \frac{(1-|z|)^{\alpha p-1}}{|1-Rz|^{(m+1)p}} d|z| \right)^{q/p} dm_n(\xi) \right)^{1/q} \leq \frac{C_1}{(1-R)^{(m+1-\alpha)-1/q}}.$$

Следовательно, если $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \in M_T(F_\alpha^{p,q}(U^n), BMOA)$, то применяя теорему о замкнутом графе, находим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)} c_k R^k z^k \right\|_{BMOA} \leq \\ & \leq C_2 \left\| \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(k+1)} R^k z^k \right\|_{F_\alpha^{p,q}(U^n)} = \\ & = C_2 \|f_R\|_{F_\alpha^{p,q}} \leq \frac{C_3}{(1-R)^{(m+1-\alpha)-1/q}}, \\ & \|D^m g_R\|_{BMOA} \leq \frac{C_3}{(1-R)^{(m+1-\alpha)-1/q}}, \quad m > \alpha + \frac{1}{q} - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $1) \Rightarrow 2)$. Для доказательства $2) \Rightarrow 1)$ заметим, что для

функций $h(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k a_k z^k$ и $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$ имеем

$$h(R^2 \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(tR) g(R\xi \bar{t}) dm_n(t).$$

Достаточно доказать, что следующее условие удовлетворяется :

$$\sup_{z \in U^n} \left(\int_{T^n} |h(R^2 \xi) - h(R^2 z)|^s \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2} dm_n(\xi) \right)^{1/s} < \infty, \quad 1 \leq s < \infty, \quad R \in I. \quad (2)$$

Имеем

$$h_{R^2}(\xi) = h(R^2 \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\bar{t}R) g(R\xi t) dm_n(t). \quad (3)$$

Далее, для функций $\tilde{f}(w) = \sum_{|k| \geq 0} b_k w^k \in H(U^n)$ и $\tilde{g}(w) = \sum_{|k| \geq 0} g_k w^k \in H(U^n)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \tilde{f}(rt) \tilde{g}(r\bar{t}) dm_n(t) = \\ & = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n r_1^{-2m} \dots r_n^{-2m} \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} \int_{T^n} D^m \tilde{g}(R\xi) \tilde{f}(R\bar{\xi}) \times \\ & \times \prod_{l=1}^n (r_l^2 - R_l^2)^{m-1} R dR dm_n(\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Действительно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \tilde{f}(rt) \tilde{g}(r\bar{t}) dm_n(t) = \sum_{|k| \geq 0} b_k g_k r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n}, \\ & J = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n r_1^{-2m} \dots r_n^{-2m} \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} \int_{T^n} D^m \tilde{g}(R\xi) \tilde{f}(R\bar{\xi}) \prod_{l=1}^n (r_l^2 - R_l^2)^{m-1} \times \\ & \times R dR dm_n(\xi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^n (2\pi)^n r_1^{-2m} \dots r_n^{-2m} \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} \sum_{|k| \geq 0} b_k g_k \times \\ & \times \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(k_j + m + 1)}{\Gamma(k_j + 1)(\Gamma(m + 1))^n} R_1^{2k_1} \dots R_n^{2k_n} \prod_{l=1}^n (r_l^2 - R_l^2)^{m-1} R dR = \\ & = (2m)^n \sum_{|k| \geq 0} b_k g_k \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(k_j + m + 1)}{\Gamma(k_j + 1)(\Gamma(m + 1))^n} r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n} \int_{I^n} \prod_{l=1}^n (1 - t_l^2)^{m-1} t_l^{2k_l+1} dt_l. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу равенства

$$\int_0^1 (1 - t_l^2)^{m-1} t_l^{2k_l+1} dt_l = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m) \Gamma(k_l + 1)}{\Gamma(m + k_l + 1)}$$

для $l = 1, \dots, n$ получим $J = \sum_{|k| \geq 0} b_k g_k r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n}$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{T^n} \tilde{f}_\xi(Rt) \tilde{g}_{r\xi}(R\bar{t}) dm_n(t) \right| \leq \\ & \leq \frac{c(m, n)}{R^{2mn}} \int_{U^n} |D^m \tilde{g}_{r\xi}(w)| \cdot |\tilde{f}_\xi(\bar{w})| (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w), \quad \xi, \xi \in T^n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{f}_\xi(w) = \tilde{f}(\xi w)$ и $\tilde{g}_{r\xi}(w) = \tilde{g}(r\xi w)$. В силу (3) и (4)

$$\begin{aligned} & |h_{R^2}(\xi) - h_{R^2}(z)| = \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{T^n} (g_\xi - g_z)(Rt) f(\bar{t}R) dm_n(t) \right| \leq \\ & \leq \frac{c(m, n)}{R^{2mn}} \int_{U^n} |D^m g(\xi w) - D^m g(zw)| \cdot |f(\bar{w})| (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что

$$\sup_{z \in U^n} |\varphi(z)| = \sup_{z \in U^n} |\varphi(e^{it} z)|, \quad e^{it} = (e^{it_1}, \dots, e^{it_n}), \quad \varphi \in H(U^n).$$

Поэтому условие (1) равносильно следующему :

$$\sup_{R \in I^n} (1-R)^{m-\alpha+1-1/q} \left(\sup_{z \in U^n} \int_{T^n} |D^m g_R(e^{it}\xi) - D^m g_R(e^{it}z)|^s \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2} dm_n(\xi) \right)^{1/s} < \infty. \quad (7)$$

Учитывая (6), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{T^n} \left[|h(R^2\xi) - h(R^2z)| \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2} \right)^{1/s} \right]^s dm_n(\xi) \right)^{1/s} \leq \\ & \leq \frac{c(m,n)}{R^{2mn}} \left[\int_{T^n} \left(\int_{U^n} |D^m g(\xi w) - D^m g(zw)| \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2} \right)^{1/s} |f(\bar{w})| (1-|w|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^s dm_n(\xi) \right]^{1/s}. \end{aligned}$$

Применение неравенства Минковского дает $\|h_{R^2}\|_{BMOA} \leq$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{c(m,n)}{R^{2mn}} \int_{U^n} \left(\sup_{z \in U^n} \int_{T^n} |D^m g(\xi w) - D^m g(zw)|^s \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2} dm_n(\xi) \right)^{1/s} \times \\ & \times |f(\bar{w})| (1-|w|)^{m-1} dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Из (7) получаем

$$\|h_{R^2}\|_{BMOA} \leq \frac{C_1(m,n)}{R^{2mn}} \int_{U^n} |f(w)| (1-|w|)^{\alpha-2+1/q} dm_{2n}(w).$$

Наконец, применяя Лемму 1.1 с $s=1$, получим

$$\|h\|_{BMOA} \leq C_2(m,n) \|f\|_{F_{p,q}^{\alpha,\beta}(U^n)}, \quad 0 < p, q \leq 1, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Этим доказывается импликация $2) \Rightarrow 1)$. Доказательство импликации $3) \Rightarrow 4)$ аналогично доказательству первой части теоремы. Поэтому докажем только импликацию $4) \Rightarrow 3)$. Из (2) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} |h_{r^2}^{[k]}(z)| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{T^n} f(rt) g_{r\bar{t}}^{[k]}(z) dm_n(t) \right| \leq \\ &\leq \frac{C(m,n)}{r^{2mn}} \int_{U^n} |D^m g_w^{[k]}(z)| \cdot |f(\bar{w})| (1-|w|)^{m-1} dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\sup_{z \in U^n} |h^{[k]}(z)| (1-|z_1|)^{k_1-\beta_1} \dots (1-|z_n|)^{k_n-\beta_n} \leq$$

$$\leq C(m, n) \int_{U^n} \left(\sup_{z \in U^n} |D^m g_R^{(k)}(z)| (1 - |z_1|)^{k_1 - \beta_1} \dots (1 - |z_n|)^{k_n - \beta_n} \right) \times \\ \times |f(\bar{w})| (1 - R)^{m-1} dm_{2n}(w) \leq \\ \leq C_1(m, n) \int_{U^n} |f(w)| (1 - |w|)^{\alpha - 2 + 1/q} dm_{2n}(w), \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad k_j > \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из (7) получим $\|h\|_{\Lambda_{\alpha}^{\bar{p}}(U^n)} \leq C_2(m, n) \|f\|_{F_{\alpha}^{p, q}(U^n)}$. Этим доказывается импликация 4) $\Rightarrow$ 3). Теорема 1.1 доказана.

Следующая теорема дает полную характеристику мультипликаторов степенных рядов из $F_{\alpha}^{p, q}(U^n)$ в классы Бесова $B_{\alpha}^{\theta}(U^n)$ для случая $0 < \max(p, q) \leq s \leq 1$, $s(\alpha + 1/q) < 2$. Нам понадобится следующая лемма, которая вытекает из результатов работы [2].

Лемма 1.2. Пусть $g, f \in H(U^n)$, $0 < p \leq 1$, $r \in I^n$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left(\int_{U^n} |f_{\eta}(w)| \cdot |D^m g_r(w)| (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^p \leq \\ \leq C \int_{U^n} |f_{\eta}(w)|^p |D^m g_r(w)|^p (1 - |w|)^{pm+p-2} dm_{2n}(w).$$

Доказательство : Обозначим через $U_{j,k}$ и $U_{j,k}^*$ двоичные разбиения полидиска U^n (см. [2], [16]). Так как функция $|f_{\eta}(w) D^m \bar{g}_r(w)|$ n -субгармонична (см. [16]), то имеем

$$\max_{w \in U_{j,k}} |f_{\eta}(w)|^p |D^m \bar{g}_r(w)|^p \leq \frac{C}{m_{2n}(U_{j,k}^*)} \int_{U_{j,k}^*} |f_{\eta}(w)|^p |D^m \bar{g}_r(w)|^p dm_{2n}(w).$$

Легко проверить, что $C_4 2^{-2|k|} \leq m_{2n}(U_{j,k}^*) \leq C_5 2^{-2|k|}$, $C_4' 2^{-2|k|} \leq 1 - |w| \leq C_5' 2^{-2|k|}$, $w \in U_{j,k}$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Следовательно, учитывая, что разбиение $U_{j,k}^*$ конечной кратности (см. [16]), получаем

$$\left(\int_{U^n} |f_{\eta}(w)| \cdot |D^m g_r(\bar{w})| (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^p \leq \\ \leq \sum_{j,k} \max_{w \in U_{j,k}} |f_{\eta}(w)|^p |D^m \bar{g}_r(w)|^p \left(\int_{U_{j,k}^*} (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^p \leq \\ \leq C_6 \sum_{j,k} \left(\int_{U_{j,k}^*} |f_{\eta}(w)|^p |D^m \bar{g}_r(w)|^p dm_{2n}(w) \right) 2^{2|k|} \times \\ \times \left(\int_{U_{j,k}^*} (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^p \leq \\ \leq C_7 \sum_{j,k} \int_{U_{j,k}^*} |f_{\eta}(w)|^p |D^m \bar{g}_r(w)|^p dm_{2n}(w) 2^{2|k|} 2^{-2|k|p} 2^{-|k|(m-1)p} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C_8 \sum_{j,k} \int_{U_{j,k}^*} |f_\eta(w)|^p |D^m g_r(w)|^p (1 - |w|)^{p(m-1)+2p-2} dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C_9 \int_{U^n} |f_\eta(w)|^p |D^m g_r(w)|^p (1 - |w|)^{p(m+1)-2} dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Лемма 1.2 доказана.

Теорема 1.2. Если $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k \in H(U^n)$, $0 < \max(p, q) \leq s \leq 1$, $s(\alpha + 1/q) < 2$, то следующие утверждения равносильны :

$$\begin{aligned} 1) \quad &\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \in M_T(F_{\alpha}^{p,q}(U^n), B_s^{\beta}(U^n)), \\ 2) \quad &\sup_{r \in I^n} M_s(D^m D^k g, r) (1 - r)^{m-\beta+k-\alpha+1-\frac{1}{q}} < \infty, \end{aligned} \quad (8)$$

где $m, k \in \mathbb{N}$, $m > \beta$, $k \geq \frac{2}{s} - 1$.

Доказательство : Из неравенства (см. [18])

$$M_s(D^m D^k g) \leq C(1 - r)^{m-\beta} \|D^m D^k g\|_{B_s^{\beta}},$$

и Теоремы 1.1 следует импликация $1) \Rightarrow 2)$. Для доказательства $2) \Rightarrow 1)$

заметим, что для функций $h(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k a_k z^k$ и $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$ имеем

$$D^m h(\rho r z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} D^m g(\rho r \bar{t}) f(r \zeta t) dm_n(t), \quad z = r \zeta.$$

Из (4) следует, что $|D^m h(\rho r z)| \leq$

$$\leq \frac{C(m, n)}{\rho^{2mn}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_{T^n} |f_\eta(R\xi)| \cdot |D^m D^k g_r(R\bar{\xi})| (1 - R)^{k-1} R dR dm_n(\xi),$$

где $\eta_j = \zeta_j r_j / \rho$, $r_j, \rho \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, n$. Устремляя $\rho \rightarrow 1$, из Леммы 1.2 и неравенства $(1 - R)^\gamma \leq (1 - Rr)^\gamma$, $\gamma \geq 0$, $r, R \in (0, 1)$, при $k \geq \frac{2}{s} - 1$ получаем

$$\begin{aligned} &|D^m h(r^2 \zeta)|^s \leq \\ &\leq C_1(m, n) \int_{I^n} \int_{T^n} |f(R\zeta r \xi)|^s |D^m D^k g(r R \bar{\xi})|^s (1 - Rr)^{sk+s-2} R dR dm_n(\xi). \end{aligned}$$

Проинтегрировав обе части по T^n и применив теорему Фубини, из (8) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{T^n} |D^m h(r^2 \zeta)|^s dm_n(\zeta) \leq C_1(m, n) \int_{I^n} \int_{T^n} |f(Rr \xi)|^s dm_n(\xi) \times \\ &\times \int_{T^n} |D^m D^k g(r R \zeta)|^s dm_n(\zeta) (1 - Rr)^{sk+s-2} R dR \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_1(m, n) \sup_{R \in I^n} \left\{ \int_{T^n} |D^m D^k g(r R \zeta)| dm_n(\zeta) (1 - Rr)^{sm+sk+s-1-\beta-s\alpha-s/q} \right\} \times$$

$$\times \int_{I^n} \int_{T^n} |f(Rr\xi)|^p dm_n(\xi) (1-Rr)^{\alpha+\beta-m-2+1/q} R dR.$$

Далее, из неравенства

$$\int_0^1 (1-Rr)^{-\lambda} (1-r)^\gamma dr \leq C(1-R)^{-\lambda+\gamma+1}, \quad \lambda > \gamma+1,$$

вытекает

$$\begin{aligned} \|h\|_{B_\beta^p}^p &= \int_{I^n} \int_{T^n} |D^m h(r\xi)|^p (1-r)^{s(m-\beta)-1} r dr dm_n(\xi) \leq \\ &\leq C_2(m, n) \int_{I^n} \int_{T^n} \int_{I^n} |f(Rr\xi)|^p dm_n(\xi) (1-r)^{s(m-\beta)-1} (1-Rr)^{\alpha-s(m-\beta)-2+1/q} dR dr \leq \\ &\leq C_3(m, n) \int_{U^n} |f(w)|^p (1-|w|)^{s(\alpha+1/q)-2} dm_{2n}(w), \quad w = R\xi. \end{aligned}$$

Теперь, используя Лемму 1.1, получим $\|h\|_{B_\beta^p} \leq C_4(m, n) \|f\|_{F_{\alpha, \beta}^{p, q}(U^n)}$, откуда следует $2) \Rightarrow 1)$. Теорема 1.2 доказана.

§2. ГЛАДКИЕ АНАЛОГИ ПРОСТРАНСТВА $F_{\alpha, \beta}^{p, q}(U^n)$ И ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

Гладкий аналог пространства $F_{\alpha, \beta}^{p, q}(U^n)$ определим для $0 < p, q, \alpha, k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ следующим образом :

$$F_{k, \alpha}^{p, q}(U^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \|f\|_{F_{k, \alpha}^{p, q}} = \|D^k f\|_{F_{\alpha, \beta}^{p, q}} < \infty \right\}.$$

Рассмотрим оператор Теплица $T_{\bar{\varphi}}$ с индексом $\bar{\varphi}$ (см. [17])

$$(T_{\bar{\varphi}} f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t)}{1-z\bar{t}} dm_n(t), \quad \varphi \in L^1(T^n).$$

В этом параграфе выводятся необходимые и достаточные условия в терминах символа φ , при которых $T_{\bar{\varphi}}$ является ограниченным оператором из $F_{k, \alpha}^{p, q}(U^n)$ в X , где X — некоторое подпространство $H(U^n)$. Пусть $A_{m, \alpha}^s$ — подпространство $H(U^n)$, определяемое при $0 < s, \alpha < \infty$ формулой

$$\begin{aligned} A_{m, \alpha}^s(U^n) &= \left\{ f \in H(U^n) : \|f\|_{A_{m, \alpha}^s} = \right. \\ &= \left. \left(\int_{U^n} |D^m f|^s (1-|w|)^{\alpha-1} dm_{2n}(w) \right)^{1/s} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. Пусть $0 < \max(p, q) \leq s$, $1 < s < \infty$, $k > \alpha + \frac{1}{q} - 1$, $\gamma = (k-1)s - (m-1)(s-1) > \frac{s}{q} - 2$ и $0 < \alpha \leq \frac{\gamma+2}{s}$. Тогда оператор Теплица

$T_{\bar{\varphi}}$, действующий из $F_{k,\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в $A_{m,m}^s(\mathbf{U}^n)$, ограничен тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$.

Доказательство : Необходимость. Пусть $T_{\bar{\varphi}}$ — ограниченный оператор из $F_{k,\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)$ в $A_{m,m}^s(\mathbf{U}^n)$. Рассмотрим функцию

$$f_r(z) = \frac{(1-r)^{k+1-\alpha-1/q}}{1-rz}, \quad 1-rz = \prod_{i=1}^n (1-r_i z_i), \quad r \in I^n, \quad z \in \mathbf{U}^n.$$

Легко проверить, что для $k > \alpha + \frac{1}{q} - 1$

$$\|f_r\|_{F_{k,\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)} \leq C, \quad \|T_{\bar{\varphi}}(f_r)\|_{A_{m,m}^s} = |\varphi(r)| \cdot \|f_r\|_{F_{k,\alpha}^{p,q}(\mathbf{U}^n)}.$$

Следовательно, $|\varphi(r)| \leq C'$ при $r \in I^n$. Необходимость оценки $|\varphi(z)| \leq C''$ при $z \in \mathbf{U}^n$ следует из свойств функции $f_r(e^{i\theta} z)$.

Достаточность. Пусть $\varphi \in H^\infty(\mathbf{U}^n)$ и $F(w) = (T_{\bar{\varphi}} f)(w)$. Из соображений двойственности

$$\begin{aligned} \|F_R\|_{A_{m,m}^s} &= \left(\int_{\mathbf{U}^n} |D^m F_R(w)|^s (1-|w|^2)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^{1/s} = \\ &= \left| \int_{\mathbf{U}^n} D^m F_R(w) \overline{G_R(w)} (1-|w|^2)^{m-1} dm_{2n}(w) \right|, \end{aligned}$$

где $F_R(w) = F(Rw)$, а $G_R(w)$ принадлежит пространству $L_{m-1}^{s'}$ измеримых на $\mathbf{U}^n$ функций f , удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbf{U}^n} |f(z)|^{s'} (1-|z|^2)^{m-1} dm_{2n}(z) < \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1.$$

Имеем

$$\|F_R\|_{A_{m,m}^s} = C(n) \left| \int_{\mathbf{U}^n} \int_{T^n} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t) \overline{G_R(w)} (1-|w|^2)^{m-1}}{(1-\bar{t}Rw)^{m+1}} dm_{2n}(w) dm_n(t) \right|.$$

Определим следующее отображение :

$$S(G_R) = \phi(\bar{t}R) = \int_{\mathbf{U}^n} \frac{\overline{G_R(w)} (1-|w|^2)^{m-1}}{(1-\bar{t}Rw)^{m+1}} dm_{2n}(w),$$

представляющее проекцию Бергмана из $L_{m-1}^{s'}(\mathbf{U}^n)$ на $A_{m-1}^{s'}(\mathbf{U}^n) = L_{m-1}^{s'}(\mathbf{U}^n) \cap H(\mathbf{U}^n)$. Следовательно, применяя теорему Фубини, получим

$$\|F_R\|_{A_{m,m}^s} = C(n) \left| \int_{T^n} \phi(\bar{t}R) f(t) \overline{\varphi(t)} dm_n(t) \right|, \quad \phi(w) \in A_{m-1}^{s'}(\mathbf{U}^n).$$

Таким образом

$$\|F\|_{A_{m,n}^*} = \lim_{R \rightarrow 1} \|F_R\|_{A_{m,n}^*} = C(n) \left| \lim_{R \rightarrow 1} \int_{T^n} \phi(\bar{t}R) f(Rt) \bar{\varphi}(\bar{t}R) dm_n(t) \right|.$$

Учитывая (4), имеем

$$\begin{aligned} \|F\|_{A_{m,n}^*} &\leq C \int_{U^n} |D^k f(w)| (1 - |w|)^{k-1} |\bar{\varphi}(w)| \cdot |\phi(w)| dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C \|\varphi\|_\infty \int_{U^n} |D^k f(w)| (1 - |w|)^{k-1} |\phi(w)| dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Применяя Лемму 1.1 и неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \|F\|_{A_{m,n}^*} &\leq C \|\varphi\|_\infty \left(\int_{U^n} |D^k f(w)|^s (1 - |w|)^{\gamma} dm_{2n}(w) \right)^{1/s} \times \\ &\times \left(\int_{U^n} |\phi(w)|^{s'} (1 - |w|)^{m-1} dm_{2n}(w) \right)^{1/s'} \leq C \|\varphi\|_\infty \|\phi\|_{A_{m,0}^{s',0}} \|f\|_{F_{k,\alpha}^{p,q}(U^n)} < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 2.1 доказана.

Пусть H_m^s — пространство Харди-Соболева в полидиске, определенное по формуле

$$H_m^s(U^n) = \{f \in H(U^n) : \|D^m f\|_{H^s} < \infty\}, \quad 0 < s < \infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.2. Пусть

$$0 < \max(p, q) \leq 1, \quad 1 < s < \infty, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad k - m > \frac{1}{q} - \frac{1}{s}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{s} - \frac{1}{q} + 1.$$

Тогда оператор Теплица $T_{\bar{\varphi}}$, действующий из $F_{k,\alpha}^{p,q}(U^n)$ в $H_m^s(U^n)$, ограничен тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^\infty(U^n)$.

Доказательство : Необходимость можно доказать методом примененным в доказательстве Теоремы 2.1 для функции

$$f_r(z) = \frac{(1-r)^{m+1-1/s}}{1-rz}, \quad r \in I^n, \quad z \in U^n.$$

Для доказательства достаточности, положим $G(z) = (T_{\bar{\varphi}} f)(z)$. Вновь по дуальности при $\phi \in L^{s'}(T^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \|D^m G_R\|_{H^s} &= \left(\int_{T^n} |D^m G(Re^{i\varphi})|^s dm_n(\varphi) \right)^{1/s} = \\ &= \left| \int_{T^n} D^m G(Re^{i\varphi}) \overline{\phi(Re^{i\varphi})} dm_n(\varphi) \right|, \end{aligned}$$

где $G_R(z) = G(Rz)$, $R \in (0, 1)$. Далее, имеем

$$D^m G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{\overline{\varphi(t)} f(t)}{(1 - z\bar{t})^{m+1}} dm_n(t), \quad z = Re^{i\psi}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|D^m G\|_{H^*} &= \lim_{R \rightarrow 1} \|D^m G_R\|_{H^*} = \\ &= C(n) \left| \lim_{R \rightarrow 1} \int_{T^n} \int_{T^n} \frac{\overline{\phi(Re^{i\psi})}}{(1 - \bar{t}Re^{i\psi})^{m+1}} \overline{\varphi(t)} f(t) dm_n(t) dm_n(\psi) \right| = \\ &= C(n) \left| \lim_{R \rightarrow 1} \int_{T^n} D^m \left(\int_{T^n} \frac{\overline{\phi(Re^{i\psi})}}{1 - \bar{t}Re^{i\psi}} dm_n(\psi) \right) \overline{\varphi(t)} f(t) dm_n(t) \right|. \end{aligned}$$

Так как оператор

$$S(\phi)(\bar{t}R) = h(\bar{t}R) = \int_{T^n} \frac{\overline{\phi(Re^{i\psi})}}{1 - \bar{t}Re^{i\psi}} dm_n(\psi)$$

является проектором Рисса на ϕ , то имеем $h(\bar{t}R) \in H^{s'}(T^n)$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Таким образом

$$\begin{aligned} \|D^m G\|_{H^*} &= C(n) \left| \lim_{R \rightarrow 1} \int_{T^n} f(Rt) \overline{\varphi(\bar{t}R)} D^m h(\bar{t}R) dm_n(t) \right| \leq \\ &\leq C_1(n) \int_{U^n} |D^k f(w)| (1 - |w|)^{k-1} |\overline{\varphi(w)}| \cdot |D^m h(w)| dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C_1(n) \|\varphi\|_\infty \int_{U^n} |D^k f(w)| (1 - |w|)^{k-1} |D^m h(w)| dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Согласно неравенству Гельдера имеем

$$\|D^m G\|_{H^*} \leq C_1(n) \|\varphi\|_\infty \int_{I^n} M_s(D^k f, t) M_{s'}(D^m h, t) (1 - t)^{k-1} dt.$$

Известно (см. [18]), что $M_s(D^m h, t) \leq C(1 - t)^{-m} M_s(h, t)$. Откуда следует, что

$$\|D^m G\|_{H^*} \leq C_2 \|\varphi\|_\infty \|h\|_{H^*} \int_{I^n} M_s(D^k f, t) (1 - t)^{k-m-1} dt, \quad k > m, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Заметим далее, что (см. Лемму 1.1)

$$\begin{aligned} &\int_{I^n} M_s(G, r) (1 - r)^\alpha dr \leq \\ &\leq C' \int_{U^n} |G(w)| (1 - |w|)^{\alpha-1+1/s} dm_{2n}(w), \quad G \in H(U^n), \quad \alpha > -1, \quad s \geq 1, \\ &\int_{U^n} |G(w)| (1 - |w|)^{\alpha-1+1/s} dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C'' \left[\int_{T^n} \left(\int_{I^n} |G(w)|^p (1 - R)^{t p - 1} dR \right)^{q/p} dm_n(\zeta) \right]^{1/q}, \\ &w = R\zeta, \quad -\frac{1}{s} < \alpha < \infty, \quad t = \frac{1}{s} - \frac{1}{q} + \alpha + 1 > 0. \end{aligned}$$

Комбинируя последние два неравенства получим

$$\|D^m G\|_{H^*} \leq C_3 \|\varphi\|_\infty \|h\|_{H^*} \|f\|_{F_{s,2}^{k,2}(U^n)} < \infty.$$

Теорема 2.2 доказана.

§3. ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ $F_{\sigma}^{p,q}(\mathbb{U}^n)$

В этом параграфе доказывается теорема вложения для пространств $F_{\sigma}^{p,q}(\mathbb{U}^n)$. Аналогичный результат для пространств Харди и Неванлинны был получен в [8].

Лемма 3.1. Пусть $f \in H(\mathbb{U}^n)$, $0 < p \leq q < \infty$ и $-1 < \beta < \infty$. Тогда

$$\int_{I^n} M_q^p(f, r)(1-r)^{\beta} dr \leq C \int_{\mathbb{U}^n} |f(w)|^p (1-|w|)^{\beta-1+p/q} dm_{2n}(w).$$

Доказательство : Обозначим через $U_{j,k}$ и $U_{j,k}^*$ двоичные разбиения полидиска $\mathbb{U}^n$ (см. [16]). Поскольку

$$\left(\sum_{|k| \geq 0} |a_k| \right)^{\gamma} \leq \sum_{|k| \geq 0} |a_k|^{\gamma}, \quad a_k = a_{k_1, \dots, k_n}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (9)$$

то

$$\begin{aligned} J' &= \int_{I^n} \left(\int_{T^n} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{p/q} (1-R)^{\beta} dR = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n} \int_{I_{k_1, \dots, k_n}} \left(\sum_j \int_{I_{j,k}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{p/q} (1-R)^{\beta} dR \leq \\ &\leq C \sum_{k_1, \dots, k_n} \int_{I_{k_1, \dots, k_n}} \sum_j \left(\int_{I_{j,k}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{p/q} 2^{-|k|\beta} dR, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$I_{j,k} = \{\xi \in T^n : r\xi \in U_{j,k}\}, \quad I_{k_1, \dots, k_n} = [1-2^{-k_1}, 1-2^{-k_1-1}] \times \dots \times [1-2^{-k_n}, 1-2^{-k_n-1}]. \quad (11)$$

Так как

$$\left(\int_{I_{j,k}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{p/q} \leq C_1 \max_{\xi \in I_{j,k}} |f(R\xi)|^p 2^{-|k|p/q},$$

то

$$J' \leq C' \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_j 2^{-|k|(p/q+\beta)} \int_{I_{k_1, \dots, k_n}} \max_{\xi \in I_{j,k}} |f(R\xi)|^p dR.$$

Интегрируя по $I_{k_1, \dots, k_n}$ обе части неравенства

$$|f(R\xi)|^p \leq C_2 2^{2|k|} \int_{U_{j,k}} |f(w)|^p dm_{2n}(w), \quad w = R\xi \in U_{j,k} \quad (12)$$

(см. [16]), получим

$$\int_{I_{k_1, \dots, k_n}} \max_{\xi \in I_{j,k}} |f(R\xi)|^p dR \leq C 2^{|k|} \int_{\mathbb{U}^n} |f(w)|^p dm_{2n}(w).$$

Принимая во внимание, что разбиение $U_{j,k}^*$ имеет конечную кратность (см. [16]) и используя неравенство $C'2^{-|k|} \leq 1 - R \leq C''2^{-|k|}$, $R \in I_{k_1, \dots, k_n}$, получаем

$$\begin{aligned} J' &\leq C_3 \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_j 2^{-|k|(p/q+\beta-1)} \int_{U_{j,k}} |f(w)|^p dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C_4 \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_j \int_{U_{j,k}} |f(w)|^p (1 - |w|)^{p/q+\beta-1} dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C_5 \int_{U^n} |f(w)|^p (1 - |w|)^{p/q+\beta-1} dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. Пусть пространство $F_{\beta}^{p,q}(U^n)$ определяется формулой (1) с $\beta = p\alpha - 1$. Тогда

- 1) $F_{\beta_0}^{p,q} \subset \bigcap_{\beta > \beta_0} F_{\beta}^{p,q}$ при $0 < p < q < \infty$,
- 2) $F_{\beta}^{p_0,q} \subset \bigcap_{p_0 > p} F_{\beta}^{p,q}$ при $0 < p < p_0 < q < \infty$, $-1 < \beta < \infty$,
- 3) $\bigcup_{p_0 < p} F_{\beta}^{p,q} \subset F_{\beta}^{p_0,q}$ при $0 < p \leq q < \infty$, $-1 < \beta < \infty$,
 $\frac{2}{p} < \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q}$.

Доказательство : Не умаляя общности можно предположить, что $\beta_0 = 0$.

Вложение $F_0^{p,q} \subseteq \bigcap_{\beta > 0} F_{\beta}^{p,q}$ очевидно. Покажем, что оно является строгим вложением. Разделим параллелепипед $I_{k_1, \dots, k_n}$ (см. (11)) на N^n равных частей так, чтобы интегральные суммы

$$S(\gamma) = \frac{2^{-|k|}}{N^n} \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N |f(R_{k_1 j_1} \xi_1, \dots, R_{k_n j_n} \xi_n)|^{\gamma}, \quad \gamma = p, q$$

аппроксимировали интегралы $\int_{I_{k_1, \dots, k_n}} |f(R\xi)|^{\gamma} dR$. Из (9) и (10), при $1 < p < q < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^p (1 - R)^{\beta} dR \right)^{q/p} dm_n(\xi) \leq \\ &\leq C \int_{T^n} \left(\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} 2^{-|k|\beta/p} (S(p))^{1/p} \right)^q dm_n(\xi). \end{aligned}$$

В силу неравенства

$$\left(\sum_{j=1}^M \frac{a_j^p}{M} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^M \frac{a_j^q}{M} \right)^{1/q}, \quad a_j > 0, \quad 0 < p \leq q < \infty,$$

получаем

$$J \leq C_1 \int_{T^n} \left[\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} 2^{-|k|\beta/p} 2^{-|k|/p} (2^{|k|} S(q))^{1/q} \right]^q dm_n(\xi), \quad |k| = k_1 + \dots + k_n.$$

Так как $C'(1-R) \leq 2^{-|k|} \leq C''(1-R)$ для $R \in I_{k_1, \dots, k_n}$, то из неравенства Гельдера находим

$$\begin{aligned} J &\leq C_2 \int_{T^n} \left(\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} 2^{-|k| \beta q/p} \right)^{q/p} \left(\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} 2^{-|k|(q/p-1)S(q)} \right) dm_n(\xi) \leq \\ &\leq C_3 \int_{T^n} \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} 2^{-|k|(q/p-1)} dm_n(\xi) \int_{I_{k_1, \dots, k_n}} |f(R\xi)|^q dR \leq \\ &\leq C_4 \int_{U^n} |f(R\xi)|^q (1-R)^{q/p-1} R dR dm_n(\xi). \end{aligned}$$

Из Леммы 1.1 следует, что $F_0^{p,q} \subseteq A_{q/p-1}^q$. Пусть теперь $F_0^{p,q} \supseteq A_{q/p-1}^q$. Так как $q > p$, то

$$\int_{U^n} |f(w)|^q (1-|w|)^{\frac{q}{p}-1} dm_{2n}(w) \geq C_5 \int_{U^n} |f(w)|^p dm_{2n}(w).$$

Следовательно, при $s = \frac{q}{p} - 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} \sum_{j_1, \dots, j_n} \left[2^{|k|p(s+2)/q} m_{2n}(U_{jk}) \right]^{q/(q-p)} = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} \left(2^{|k|} 2^{|k|ps/(q-p)} 2^{-2|k|} \right) = \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

С другой стороны, из известного результата Олейник [19] получаем, что из включения $A_s^q \subset L^p(U^n, \mu)$, $q > p$ следует сходимость сумм в левой части (13). Из этого противоречия получаем $F_0^{p,q} \subset A_{q/p-1}^q \subseteq \bigcap_{\theta > 0} F_\theta^{p,q}$. Следовательно, при $1 < p < q < \infty$ доказано строгое включение. Пусть теперь $0 < p \leq 1 < q < \infty$. Имеем

$$J \leq C \int_{T^n} \left[\sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} \left(\max_{R \in I_{k_1, \dots, k_n}} |f(R\xi)|^p 2^{-|k|} \right) 2^{-|k|\beta} \right]^{q/p} dm_n(\xi),$$

поэтому из неравенства Гельдера получаем

$$J \leq C_1 \sum_{|k| \geq 0} \int_{T^n} \max_{R \in I_{k_1, \dots, k_n}} |f(R\xi)|^q 2^{-|k|q/p} dm_n(\xi).$$

Интегрируя по I_{jk} (см. (11)) обе части (12) и используя неравенство $C'm_n(I_{jk}) \leq 2^{-|k|} \leq C''m_n(I_{jk})$, находим

$$\int_{I_{jk}} \max_{R \in I_{k_1, \dots, k_n}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \leq C_2 2^{|k|} \int_{U_{jk}^n} |f(w)|^q dm_{2n}(w).$$

Так как разбиение U_{jk}^* имеет конечную кратность, то

$$\begin{aligned} J &\leq C_1 \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} 2^{-|k|q/p} \sum_j \int_{I_{jk}} \max_{R \in I_{k_1, \dots, k_n}} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \leq \\ &\leq C_4 \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} \sum_{j_1, \dots, j_n} 2^{-|k|(q/p-1)} \int_{U_{jk}^*} |f(w)|^q dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C_5 \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_{j_1, \dots, j_n} \int_{U_{jk}} |f(w)|^q (1 - |w|)^{q/p-1} dm_{2n}(w) \leq \\ &\leq C_6 \int_{U^n} |f(w)|^q (1 - |w|)^{q/p-1} dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Аргументы, аналогичные использованным при $1 < p < q < \infty$, завершают доказательство 1).

Для доказательства 2), заметим, что вложение $F_{\beta}^{p_0, q} \subseteq \bigcap_{p_0 > p} F_{\beta}^{p, q}$ может быть получено из неравенства Гельдера

$$J \leq C \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^{p_0} (1 - R)^{p_0 \beta / p} dR \right)^{q/p_0} dm_n(\xi) \leq C \|f\|_{F_{\beta}^{p, q}}^q. \quad (14)$$

Вновь из (14) имеем $\bigcap_{p < p_0} F_{\beta p_0/p}^{p_0, q} \subseteq \bigcap_{p < p_0} F_{\beta}^{p, q}$. Согласно утверждению 1)

$$\bigcap_{p < p_0} F_{\beta p_0/p}^{p_0, q} = \bigcap_{\beta < \alpha} F_{\alpha}^{p_0, q} \supset F_{\beta}^{p_0, q}.$$

Следовательно, $F_{\beta}^{p_0, q} \subseteq \bigcap_{p < p_0} F_{\beta}^{p, q}$, т.е. 2) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 3). Используя неравенство Гельдера (14), получим

$$\|f\|_{F_{\beta}^{p_0, q}}^q \leq C \|f\|_{F_{\beta}^{p, q}}^q. \quad (15)$$

Следовательно, $\bigcup_{p_0 < p} F_{\beta}^{p, q} \subseteq F_{\beta}^{p_0, q}$. Теперь покажем, что это включение строгое.

Из (15) получаем $\bigcup_{p_0 < p} F_{\beta p/p_0}^{p, q} \subseteq F_{\beta}^{p_0, q}$. Предположим, что $\bigcup_{p_0 < p} F_{\beta p/p_0}^{p, q} \supseteq F_{\beta}^{p_0, q}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^p (1 - R)^{p \beta / p_0} dR \right)^{q/p} dm_n(\xi) &\leq \\ &\leq C \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^{p_0} (1 - R)^{\beta} dR \right)^{q/p_0} dm_n(\xi). \end{aligned}$$

Так как $p \leq q$, то из неравенства Минковского получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{U^n} |f(w)|^p (1 - |w|)^{p \beta / p_0} dm_{2n}(w) \right)^{p_0/q} &\leq \\ &\leq C_1 \int_{I^n} \left(\int_{T^n} |f(R\xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{p_0/q} (1 - R)^{\beta} dR. \end{aligned}$$

Используя Лемму 3.1, находим

$$\left(\int_{U^n} |f(w)|^p (1 - |w|)^{p\beta/p_0} dm_{2n}(w) \right)^{1/p} \leq \\ \leq C_2 \left(\int_{U^n} |f(w)|^{p_0} (1 - |w|)^{\beta-1+p_0/q} dm_{2n}(w) \right)^{q/(p_0 p)}.$$

Следовательно

$$\sup_{k_1, \dots, k_n} 2^{(k_1 + \dots + k_n) \left[p \left(\frac{1}{q} + \frac{\beta+1}{p_0} \right) - 2 - \frac{\beta}{p_0} \right]} = \sup_{k_1, \dots, k_n} 2^{|k| \left(\frac{p}{q} + \frac{\beta}{p_0} - 2 \right)} = \infty.$$

С другой стороны, из результата Олейник [19], из вложения $A_{\beta}^{p_0} \subset L^p(U^n, \mu)$, $p > p_0$ следует, что тот же самый супремум конечен. Из этого противоречия получаем

$$\bigcup_{p_0 < p} F_{\beta}^{p,q} \subseteq \bigcup_{p_0 < p} F_{p\beta/p_0}^{p,q} \subset F_{\beta}^{p_0,q}.$$

Теорема 3.1 доказана.

Замечание. Легко проверить, что из равенства $F_{2\alpha-1}^{2,q}(U) = H_{\alpha}^q(U)$, $0 < \alpha, q < \infty$ и результатов [21] следует

$$\bigcup_{q_0 < q} F_{\beta}^{2,q} \subset F_{\beta}^{2,q_0}, \quad F_{\beta}^{2,q_0} \subset \bigcap_{q < q_0} F_{\beta}^{2,q}, \quad -1 < \beta < \infty.$$

ABSTRACT. The paper considers some problems concerning the spaces $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ of analytic functions in unit polydisk U^n , generalizing the well-known classes of Hardy, Sobolev and Djrbashian. Multipliers of power series from $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ into the classes BMOA, Lipschitz and Besov are described, as well as necessary and sufficient conditions in terms of the symbol φ , rendering the Toeplitz operator T_{φ} a bounded operator from the smooth analog of the space $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ into some subspace of the class $H(U^n)$ of holomorphic functions in U^n . An embedding theorem for classes $F_{\alpha}^{p,q}(U^n)$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сооб. Инст. Матем. и Механики АН Арм.ССР, том 2, стр. 3 – 55, 1948.
2. A. Djrbashian, F. Shamoyan, "Topics in the theory of A_{α}^p spaces", Teubner-Texte zur Math., vol. 105, Leipzig, 1988.
3. C. Fefferman, E. Stein, " H^p spaces of several variables", Acta Math., vol. 129, pp. 137 – 173, 1972.
4. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, "Hankel operators and similarity to a contraction", Intern. Math. Res. Notices, vol. 6, pp. 263 – 275, 1996.
5. В. С. Гулиев, П. И. Лизоркин, "Классы голоморфных и гармонических функций в поликруге в связи с их граничными значениями", Труды Мат. Инст РАН,

- том 204, стр. 137 – 159, 1993.
6. Р. Ф. Шамоян, “Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса аналитических функций в поликруге”, Изв. Вузов, серия Математика, (в печати).
 7. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.
 8. С. В. Шведенко, “Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре”, Итоги Науки и Техники, серия Матем. Анализ, том 23, 1985.
 9. Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы степенных рядов и K -функционалы в пространствах Харди H^p в поликруге при $p \in (0, 1]$ ”, Тезисы междун. конф. “Функцион. Анализ, Прибл., Нелинейный Анализ”, Москва, 1995.
 10. M. Nawrocki, “Multipliers, linear functionals and the Frechet envelope of the Smirnov class $N_+(U^n)$ ”, Trans. of the AMS, vol. 322, no. 2, pp. 493 – 506, 1990.
 11. А. Б. Александров, “Теория функций в единичном шаре”, Итоги Науки и Техники, том. 8, 1985.
 12. Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, “Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций”, ДАН Арм.ССР, том 91, № 4, 1990.
 13. P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, NY, 1970.
 14. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, Orlando, 1981.
 15. P. S. Chee, “BMOA and vanishing Carleson measures”, Complex Var. Theory and Appl., vol. 25, pp. 311 – 322, 1994.
 16. Ф. А. Шамоян, “Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций”, Сиб. Матем. Журнал, том 30, № 2, стр. 196 – 215, 1990.
 17. В. В. Пеллер, С. В. Хрущев, “Операторы Ханкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы”, УМН, том 37, № 1, стр. 53 – 124, 1982.
 18. М. И. Гварадзе, “Множители одного класса аналитических функций, определенных на полидиске”, Труды Тбил. Инст. Матем., стр. 15 – 21, 1980.
 19. В. Л. Олейник, “Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций”, Зап. Научн. Семина. ЛОМИ, том 74, стр. 120 – 137, 1974.
 20. В. Л. Олейник, “Одна теорема вложения для классов аналитических функций” Проблемы Мат. Физики, том 11, стр. 164 – 167, 1986.
 21. Y. Matsugu, “The strict inclusion relation between the spaces $H_p(U)$ on the open unit disc U in C ”, Jour. Fac. Sci. Shinshu Univ., vol. 18, no. 1, pp. 1 – 10, 1993.

29 марта 1999

Московский государственный
педагогический университет, Россия

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ХАУСДОРФА

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 4, 1999

В данной статье решена проблема моментов типа Хаусдорфа, подобная проблеме, предложенной М. М. Джрбашяном в [1], [2].

Теорема 1. Пусть $\omega_i(x)$, $i = 1, 2$ – две неотрицательные функции класса $L_1\left(\frac{dx}{1+x}\right)$, определенные на $(0, +\infty)$. Если выполнены следующие условия :

(i) $\omega_1(x+\Delta)\omega_2(x-\Delta) \leq \omega_1(x-\Delta)\omega_2(x+\Delta)$ для любых $x, \Delta > 0$ таких, что $0 < x-\Delta < x < x+\Delta < +\infty$;

(ii) $\min_{x \in [a, b]} \omega_2(x) \geq \rho > 0$ для некоторого сегмента $[a, b] \subset (0, +\infty)$,
то уравнение

$$\frac{\int_0^{+\infty} \frac{\omega_1(x)}{s+x} dx}{\int_0^{+\infty} \frac{\omega_2(x)}{s+x} dx} = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t), \quad s \in (0, +\infty)$$

обладает неубывающим решением $\alpha(x)$, удовлетворяющим условиям

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(x) \leq \frac{\int_0^{+\infty} e^{-xt} \omega_1(t) dt}{\int_0^{+\infty} e^{-xt} \omega_2(t) dt}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей теореме из [3], [4].

Теорема 2. 1°. Пусть Ω_1 и Ω_2 – положительные, непрерывные и монотонные функции на $(0, +\infty)$, в частности, пусть Ω_2 – невозрастающая. Пусть выполнены следующие условия :

- (а) отношение $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ не убывает на $(0, +\infty)$;
- (б) логарифм хотя бы одной из функций Ω_1 или Ω_2 выпуклый в $(0, +\infty)$;
- (с) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon x} \Omega_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon x} \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)} = 0;$$

- (d) $\Omega_{1,2} \in L^1(0, R)$ при любом $R > 0$.

Тогда существует неубывающая функция $\alpha(x)$ такая, что

$$\frac{\int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_1(x) dx}{\int_0^{+\infty} e^{-sx} \Omega_2(x) dx} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} d\alpha(x), \quad s \in (0, +\infty),$$

и

$$\Omega_1(x) = \int_0^x \Omega_2(x-t) d\alpha(t), \quad x \in (0, +\infty),$$

со свойствами

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(x) \leq \frac{\Omega_1(x)}{\Omega_2(x)}, \quad 0 < x < +\infty.$$

2°. Если вместо (с) и (d) выполнены следующие более ограничительные условия :

$$\Omega_i(+\infty) = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} |\Omega_i(x) - 1| dx < +\infty, \quad i = 1, 2,$$

то необходимо $\alpha(+\infty) = 1$.

Доказательство Теоремы 1 : Используем Теорему 2 и тот факт, что логарифм преобразования Лапласа неотрицательной функции является выпуклой функцией (см. [5], стр. 259 – 260). Очевидно, достаточно проверить, что интегралы $J_{\omega_i}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \omega_i(x) dx$, $i = 1, 2$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \left[\frac{J_{\omega_1}(t)}{J_{\omega_2}(t)} \right]' &= \operatorname{sign} \left\{ - \int_0^t \omega_1(x) \omega_2(t-x) x dx + \int_0^t \omega_1(x) \omega_2(t-x) (t-x) dx \right\} = \\ &= \operatorname{sign} \left\{ \int_0^{t/2} \left[\omega_1 \left(\frac{t}{2} - \sigma \right) \omega_2 \left(\frac{t}{2} + \sigma \right) - \omega_1 \left(\frac{t}{2} + \sigma \right) \omega_2 \left(\frac{t}{2} - \sigma \right) \right] \sigma d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Далее, при любом $R > 0$

$$\int_0^R dt \int_0^{+\infty} e^{-tx} |\omega_i(x)| dx \leq C_1 \int_0^1 |\omega_i(x)| dx + C_2 \int_1^{+\infty} |\omega_i(x)| \frac{dx}{x} \leq$$

$$\leq C_3 \int_0^{+\infty} |\omega_i(x)| \frac{dx}{1+x} < +\infty,$$

где C_1, C_2, C_3 – некоторые положительные постоянные. Теперь осталось заметить, что ввиду (ii) имеем $J_{\omega_2}(t) > \frac{\varepsilon}{t}(e^{-a} - e^{-b})$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon t} J_{\omega_2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{J_{\omega_1}(t)}{J_{\omega_2}(t)} = 0,$$

так как $J_{\omega_1}(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций", Заметки Науч. Сем. ЛОМИ, № 81, стр. 238 – 241, 1978.
2. М. М. Djrbashian, "Some open problems in the theory of representations of analytic functions", Lecture Notes in Math., vol. 1043, pp. 522 – 526, 1984.
3. А. М. Джрбашян, "О вложении классов $N\{\omega\}$ типа Неванлинны", Изв. РАН, том 63, № 4, 1999.
4. А. М. Djrbashian, "On a problem of M. М. Djrbashian", Bull. of Ir. Math. Soc. (to appear).
5. D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton Univ. Press, 1946.

3 декабря 1998

Институт математики
Национальная Академия Наук Армении

О КОММУТАТИВНОСТИ В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ

И. М. Караханян, М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 34, № 4, 1999

Пусть в комплексной банаховой алгебре A с единицей 1 $\|1\| = 1$, $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ для всех элементов $a, b \in A$. Напомним [6, 7], что линейный функционал $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ называется состоянием, если $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$. Множество состояний образуют слабо-звездочно компактное подмножество в сопряженном к A пространстве, которое мы обозначим через $P(A)$. Множество $V(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in P(A)\}$ называется (алгебраическим) числовым образом элемента a в A . В частности, если A — подалгебра в операторной алгебре $BL(H)$ всех ограниченных линейных операторов, определенных в комплексном гильбертовом пространстве H , то числовой образ $V(T)$ любого оператора $T \in A$ совпадает (см. [8]) с замыканием обычного числового образа оператора T . Заметим, что элемент $h \in A$ называется эрмитовым, если $V(h) \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел. Это условие равносильно тому, что $\|\exp(it h)\| = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Множество $H(A)$ всех эрмитовых элементов является замкнутым $\mathbb{R}$ -линейным подпространством в A . Элемент $h \in A$ называется квазиэрмитовым (см. [5]), если $\|\exp(it h)\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \rightarrow \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Из этого условия следует $sp(h) \subset \mathbb{R}$, где $sp(h)$ — спектр h -элемента. Числовой образ $V(h)$ может выступать за числовую ось. Однако, для любого элемента $a \in A$ имеет место вложение $sp(a) \subset V(a)$. Элемент $a = h + ik$, где $h, k \in H(A)$ называется эрмитово-разложимым, а $a^+ = h - ik$ — эрмитово-сопряженным к элементу a . В случае, если $[h, k] = hk - kh = 0$, то элемент a называется эрмитово-нормальным элементом, а когда h, k — квазиэрмитовы и $[h, k] = 0$, то элемент $a = h + ik$ называется квазинормальным.

Пусть J – замкнутый двусторонний идеал в алгебре A . Тогда фактор-алгебра A/J является банаховой алгеброй относительно фактор-нормы $||| \bullet |||$ и имеем $\bar{a} = a + J = \pi_J(a) \in A/J$, где $\pi_J : A \rightarrow A/J$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом J .

Пусть $\{a_n\}_0^\infty, \{b_n\}_0^\infty$ – две последовательности элементов в банаховой алгебре A такие, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{1/n} = \rho_a < \infty, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|^{1/n} = \rho_b < \infty$. Тогда для любого элемента $c \in A$ функция $f(\lambda) = A(\lambda)cB(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{c_n \lambda^n}{n!}$, где $A(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{a_n \lambda^n}{n!}$, $B(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{b_n \lambda^n}{n!}$ является A -значной целой функцией экспоненциального типа $\sigma_f \leq \rho_a + \rho_b$, где $c_n = \sum_{p=0}^n C_n^p a_p c b_{n-p}$. Для $a, b, c \in A$ будем писать $ca = bc(\text{mod } J)$, если $ca - bc \in J$. В частности, условие $ca = ac(\text{mod } J)$ означает, что элементы a и c коммутируют по модулю идеала J .

Теорема 1. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A . Тогда элементы $c_n = \sum_{p=0}^n C_n^p a_p c b_{n-p} \in J$ для всех $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |||\tilde{f}(\lambda)||| < \infty$, где $\{a_n\}_0^\infty, \{b_n\}_0^\infty \in A$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{1/n} < \infty, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|^{1/n} < \infty$.

Доказательство : Пусть $\pi_J : A \rightarrow A/J$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом J . Так как $c_n \in J$, то $\bar{c}_n = 0$. Отсюда имеем $\tilde{f}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{\bar{c}_n \lambda^n}{n!} = \bar{c}_0$, т.е. $|||\tilde{f}(\lambda)||| = |||\bar{c}_0|||$ и поэтому $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |||\tilde{f}(\lambda)||| < \infty$. Обратно, предположим, что $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |||\tilde{f}(\lambda)||| < \infty$. Тогда для A/J -значной целой функции $\tilde{f}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{\bar{c}_n \lambda^n}{n!}$, и в силу теоремы Лиувилля имеем $\tilde{f}(\lambda) \equiv \bar{c}_0$. Следовательно, для всех $n \geq 1$ имеем $\bar{c}_n = 0$, откуда получаем $c_n \in J$. Теорема 1 доказана. Следующая теорема относится к случаю $a_n = a^n$ и $b_n = b^n$, где $a, b \in A$.

Теорема 2. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A и $a, b, c \in A$. Тогда для того, чтобы $ca = bc(\text{mod } J)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |||\exp(\lambda \bar{b}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{a})||| < \infty.$$

Доказательство : Пусть $\pi_J : A \rightarrow A/J$ как и выше есть канонический гомоморфизм, порожденный идеалом J . Так как $ca - bc \in J$, то для любого натурального n имеем $\bar{c} \bar{a}^n = \bar{b}^n \bar{c}$, и поэтому $\bar{c} \exp(\lambda \bar{a}) = \exp(\lambda \bar{b}) \bar{c}$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\bar{c} = \exp(\lambda \bar{b}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{a})$, и поэтому $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |||\exp(\lambda \bar{b}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{a})||| < \infty$.

Обратно, пусть $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} ||| \exp(\lambda \bar{b}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{a}) ||| < \infty$. Тогда для A/J -значной целой функции в силу теоремы Лиувилля имеем $f(\lambda) = \exp(\lambda \bar{b}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{a}) \equiv \bar{c}$. Тогда для любого натурального n имеем $\bar{c} \bar{a}^n = \bar{b}^n \bar{c}$, и следовательно, $ca = bc \pmod{J}$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Пусть $M, N, T \in BL(X)$, где X – комплексное банахово (в частности, гильбертово) пространство и $J \subset BL(X)$ – замкнутый двусторонний идеал. Для выполнения равенства $MT = TN \pmod{J}$ необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} ||| \exp(\lambda \bar{M}) \bar{T} \exp(-\lambda \bar{N}) ||| < \infty$.

Комбинируя Теорему 2 с обобщенной теоремой фон Неймана–Фугледе–Путмана (см. [3, 4]), получаем следующий результат.

Следствие 2. Пусть $a, b \in A$ – квазинормальные элементы и $c \in A$. Если $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} ||| \exp(\lambda \bar{b}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{a}) ||| < \infty$, то $a^+c = cb^+ \pmod{J}$ (см. [9]).

Следствие 3. Если A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a, b \in A$, то условие $ab = ba \pmod{J}$ эквивалентно $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} ||| \exp(\lambda \bar{b}) \bar{a} \exp(-\lambda \bar{b}) ||| < \infty$.

В случае $J = \{0\}$, Следствия 2, 3 дают усиления результатов из [1] и [2].

Следствие 4. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и J – замкнутый двусторонний идеал в A . Для того, чтобы A/J была бы коммутативной необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{(a,b) \in A \times A} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} ||| \exp(\lambda \bar{b}) \bar{a} \exp(-\lambda \bar{b}) ||| < \infty$.

Если семейство элементов $\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset A$ есть система образующих алгебры A , то будем писать $A = A[\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}]$. В этом случае Следствие 4 можно сформулировать в таком виде :

Следствие 5. Пусть $A = A[\{a_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}]$ – комплексная банахова алгебра с единицей, и J – замкнутый двусторонний идеал в A . Для коммутативности A/J необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\gamma, \chi \in \Gamma} \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} ||| \exp(\lambda \bar{a}_\gamma) \bar{a}_\chi \exp(-\lambda \bar{a}_\gamma) ||| < \infty$.

Если $J = \text{Rad}(A)$ – радикал алгебры A , то Следствия 4 и 5 обеспечивают коммутативность фактор-алгебры $A/\text{Rad}(A)$, что, в свою очередь, эквивалентно равномерной непрерывности спектрального радиуса в A (см. [10]). В случае $J = \{0\}$ получаем критерий коммутативности алгебры.

Пусть $D : A \rightarrow A$ – непрерывное A -дифференцирование (т.е. $D \in BL(A)$ и $D(ab) = (Da)b + a(Db)$, где $a, b \in A$). Тогда в фактор-алгебре A/J индуцируется A/J -дифференцирование $D_J : A/J \rightarrow A/J$, определяемое по формуле $D_J(\bar{a}) = \pi_J(Da) = \bar{D}a$. Очевидно, $D_J \in BL(A/J)$. Пусть $\text{aut}(A)$ – группа автоморфизмов

алгебры A . Тогда, при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\exp(\lambda D) \in \text{aut}(A)$, и поэтому $\exp(\lambda D_J) \in \text{aut}(A/J)$.

Теорема 3. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A , а $D : A \rightarrow A$ есть непрерывная A -производная. Для того, чтобы $D^n(a) \in J$ для всех $n \geq n_0$, $a \in A$, необходимо и достаточно, чтобы $\|\exp(\lambda D_J)(\bar{a})\| = O(|\lambda|^{n_0-1})$ для $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство : Пусть $D^{n_0}(a) \in J$. Тогда $D_J^{n_0}(\bar{a}) = 0$, и поэтому для всех натуральных $n \geq n_0$ имеем $D_J^n(\bar{a}) = 0$. Если $\varphi \in P(A/J)$, то для целой функции $f_\varphi(\lambda) = \varphi(\exp(\lambda D_J)(\bar{a}))$ имеем

$$f_\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\lambda^k \varphi(D_J^k(\bar{a}))}{k!}.$$

Следовательно, $\|\exp(\lambda D_J)(\bar{a})\| = \sup_{\varphi \in P(A/J)} |f_\varphi(\lambda)| = O(|\lambda|^{n_0-1})$, for $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Обратно, предположим, что $\|\exp(\lambda D_J)(\bar{a})\| = O(|\lambda|^{n_0-1})$ для $|\lambda| \rightarrow \infty$. Тогда в силу теоремы Лиувилля, для $n \geq n_0$ имеем $D_J^n(\bar{a}) = 0$, и поэтому $D^n(a) \in J$. Теорема 3 доказана.

Следствие 6. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A , а $D : A \rightarrow A$ есть непрерывная A -производная. Для того, чтобы $Da \in J$, где $a \in A$, необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|(\exp \lambda D_J)(\bar{a})\| < \infty$.

В случае $J = \{0\}$ получаем следующее утверждение.

Следствие 7. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, и $D : A \rightarrow A$ есть непрерывная A -производная. Для того, чтобы элемент $a \in \ker(D)$, где $\ker(D)$ – ядро оператора D , необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|(\exp \lambda D)(a)\| < \infty$.

Теорема 4. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, J – замкнутый двусторонний идеал в A , а $D : A \rightarrow A$ есть непрерывная A -производная. Если для $a \in A$ имеем $Da \notin J$, то $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} V((\exp \lambda D_J)(\bar{a})) = \mathbb{C}$.

Доказательство : Пусть $\varphi \in P(A/J)$. Рассмотрим целую функцию $f_\varphi(\lambda) = \varphi(\exp(\lambda D_J)(\bar{a}))$. Тогда образ f_φ лежит в множестве $U_J = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} V((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$.

Предположим, что $\mathbb{C} \setminus U_J$ содержит по крайней мере две точки. Тогда, в силу теоремы Пикара для целых функций имеем $f_\varphi(\lambda) \equiv \text{const}$, и поэтому для всех

натуральных $n \geq 1$ получаем $\varphi(D_J^n(\bar{a})) = 0$. В частности, $D_J(\bar{a}) = 0$, т.е. $D\bar{a} \in J$. Однако это противоречит условию теоремы. Таким образом, $C \setminus U_J$ содержит самое большее одну точку. Теперь покажем, что $U_J = C$. Так как для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\exp(\lambda D_J) \in \text{aut}(A/J)$, то имеем $\text{sp}(\bar{a}) = \text{sp}((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ для любого элемента $\bar{a} \in A/J$.

Пусть $\zeta_0 \in \text{sp}(\bar{a})$ и $\zeta \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число. Тогда на прямой, проходящей через точки ζ_0 и ζ , найдется такая точка ζ_1 , что $\zeta_1 \in V((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как отрезок $[\zeta_0, \zeta_1] \subset V((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ и числовой образ $V((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$ есть выпуклое множество, то $\zeta \in V((\exp \lambda D_J)(\bar{a}))$, и значит $U_J = C$. Теорема 4 доказана.

В случае, когда идеал $J = \{0\}$ получаем нижеследующее утверждение.

Следствие 8. Пусть A — комплексная банахова алгебра с единицей, и $D : A \rightarrow A$ есть непрерывная A -производная. Если элемент $a \notin \ker(D)$, то $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} V((\exp \lambda D)(a)) = \mathbb{C}$.

Рассмотрим оператор $\delta_{a,b}(c) = ac - cb$, где $a, b, c \in A$. Так как $\delta_{a,b}(cd) = \delta_{a,b}(c)d + c\delta_{a,b}(d) + c(b-a)d$, то для $a \neq b$ оператор $\delta_{a,b}$ не дифференцируем. Тем не менее имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть A — комплексная банахова алгебра с единицей, и пусть $a, b, c \in A$ такие элементы, что $ac \neq cb \pmod{J}$, где J — замкнутый двусторонний идеал в A . Тогда $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\exp(\lambda \bar{a}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{b})) = \mathbb{C}$.

Доказательство : Так как $ac - cb \notin J$, то для любого элемента $d \in J$ имеем $ac - cb + d \notin J$. Тогда для любого $j \in J$ элемент $d = (a - c)j + j(c - b) \in J$, и следовательно, $(a + j)(c + j) - (c + j)(b + j) \notin J$. Отсюда следует, что $\exp(\lambda(a + j))(c + j) - (c + j)\exp(\lambda(b + j)) \notin J$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем $\exp(\lambda(a + j))(c + j)\exp(-\lambda(b + j)) - (c + j) \notin J$. Пусть $U_j = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} U_\lambda^{<j>}$, где $U_\lambda^{<j>} = V(\exp(\lambda(a + j))(c + j)\exp(-\lambda(b + j)))$. Покажем, что $U_j = \mathbb{C}$. Пусть $C \setminus U_j$ содержит по крайней мере две точки. Тогда для $\varphi \in P(A)$ образ целой функции $f_\varphi^{<j>}(\lambda) = \varphi(\exp(\lambda(a + j))(c + j)\exp(-\lambda(b + j)))$ лежит в U_j . Тогда по теореме Пикара для целых функций имеем, что $f_\varphi^{<j>}(\lambda) \equiv \text{const}$. Следовательно, производная f -функции равна нулю, и поэтому $(a + j)(c + j) = (c + j)(b + j)$, что противоречит условиям Теоремы 5. Таким образом, множество $C \setminus U_j$ может содержать самое большее одну точку. Убедимся, что $U_j = \mathbb{C}$. Пусть $\zeta_0 \in \text{Sp}(c + j)$ и $\zeta \in \mathbb{C}$ — произвольное комплексное число. Тогда существует точка $\zeta_1 \in U_\lambda^{<j>}$

такая, что ζ лежит в сегменте $[\zeta_0, \zeta_1]$. Так как $\zeta_0 \in U_\lambda^{<J>}$ и $U_\lambda^{<J>}$ – выпуклое множество, то необходимо $\zeta \in U_\lambda^{<J>}$, и поэтому $\zeta \in U_J$. Таким образом, для каждого элемента $j \in J$ имеем $U_j = \mathbb{C}$.

Заметим, что $V(\exp(\lambda \bar{a}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{b})) = \bigcap_{j \in J} V(\exp(\lambda(a+j))(c+j) \exp(-\lambda(b+j)))$.

Следовательно

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} (\exp(\lambda \bar{a}) \bar{c} \exp(-\lambda \bar{b})) = \bigcap_{j \in J} U_j = \mathbb{C}.$$

Доказательство завершено.

В случае $J = \{0\}$ соответствующие результаты можно найти в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Williams, "On commutativity and numerical range in Banach algebras", J. Functional Analysis, vol. 10, pp. 326 — 329, 1972.
2. S. K. Khasbardar, N. K. Thakare, "Commutativity in a Banach algebra," Bolletino U.M.I. vol. 5, no. 15-A, pp. 581 — 584, 1978.
3. Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путмана о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, том 22, № 22, стр. 179 — 188, 1977.
4. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр", Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем., том 19, № 6, стр. 405 — 421, 1978.
5. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв. НАН Армении, сер. Матем., том 29, № 1, стр. 43 — 49, 1994.
6. J. F. Bonsal and J. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer-Verlag, 1973.
7. Е. А. Горин, "Estimation of a partial involution in a Banach algebra", Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 5, no. 1, pp. 117 — 118, 1997.
8. P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Princeton, New-Jersey, 1967.
9. М. И. Караханян, "О коммутативности области изменения A -значной аналитической функции", Изв. НАН Армении, сер. Матем., том 31, № 1, стр. 29 — 37, 1996.
10. B. Aupetit, "Characterisation spectrale des algebres de Banach comutatives", Pacif. Journ. of Mathematics, vol. 63, no. 1, pp. 23 — 35, 1976.

12 мая 1999

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34

НОМЕР 4

1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Обобщенная квазианалитичность бесконечно дифференцируемых функций

Г. В. Бадалян..... 5

Локально асимптотически нормальные семейства гауссовских распределений

М. С. Гиновян 20

Аппроксимация решений полуэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$

Г. А. Карапетян, Г. В. Даллакян 31

Асимптотические представления и адиабатические инварианты

Е. А. Тароян..... 44

Мультипликаторы степенных рядов, операторы Тейлора и вложения пространств

Р. Ф. Шамоян 56

Краткие сообщения

Об одной проблеме моментов Хаусдорфа

А. М. Джрбашян 74

О коммутативности в банаховой алгебре

И. М. Караханян, М. И. Караханян 77