ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СФЕРАХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. У. Аракелян, Н. Г. Матевосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В статье получен аналог теоремы о трех сферах для функций, гармонических в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ в случае не концентрических, но в некотором смысле коррелированных сфер. Результатом является соотношение логарифмической выпуклости для взвешенных сферических L^2–норм гармонических функций. В случае голоморфных в круге из $\mathbb{R}^2$ функций этот результат обобщается на взвешенные L^p–нормы ($p > 0$).

§0. ВВЕДЕНИЕ

Известная теорема Адамара о трех окружностях была прототипом теоремы о двух константах. Последняя теорема нашла много применений в теории комплексных функций, в частности в вопросах, связанных с принципом Фрагмена–Линделефа или с задачами единственности. Среди обобщений результата Адамара отметим теоремы о трех сферах для решений эллиптических уравнений (Ландис [1] для L^2-нормы, и Агмон [2] для L^∞-нормы), а также теоремы, содержащиеся в недавней статье Брумелхуиса [3]. Случай гармонических функций был рассмотрен Кореваaром [4] и Кореваaром и Мейелсом [5]. Ранее этот случай был рассмотрен в работе Соломенцева [6], где теорема о трех сферах получена в несколько другой форме.

Несколько аналогов теоремы Адамара о трех сферах были получены в [7] для гармонических функций $n \geq 2$ переменных и для трех возможно не концентрических шаров (вместо сфер) с взвешенной L^2–нормой; см. Теоремы 1-2 в [7]). Они нашли применения в задачах о "передаче малости" и единственности. Целью настоящей работы является получение прямого аналога теоремы Адамара для гармонических функций для взвешенной L^2–нормы, в случае (($n-1$)–мерных) неконцентрических сфер в $\mathbb{R}^n$. Основной результат с полным доказательством приведен в параграфе 3, после необходимой подготовки в параграфах 1 и 2.

§1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Для собственной подобласти Ω из $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ положим $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ и рассмотрим ассоциированное множество

$$\Omega^* = \left\{(x,r) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in \Omega, \ r \in (0, d(x))\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Очевидно, Ω^* является открытым множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$ и можно доказать, что оно связно, т.е. является областью. Рассмотрим для этого произвольные точки (x_1, r_1), $(x_2, r_2) \in \Omega^*$. Соединим точки $x_1, x_2 \in \Omega$ жордановой кривой $\gamma \subset \Omega$. Существует число $r > 0$, $r < \min\{r_1, r_2\}$ такое, что $d(x) > r$ для всех $x \in \gamma$. Тогда $\gamma \times \{r\} \subset \Omega^*$ и объединение связных множеств $\gamma \times \{r\}$, $\{x_1\} \times [r, r_1]$, $\{x_2\} \times [r, r_2]$ является связным подмножеством множества Ω^*, соединяющим точки (x_1, r_1) и (x_2, r_2).

Каждой функции $f \in C(\Omega)$ мы сопоставляем функцию $a \in C^1(\Omega^*)$ по формуле

$$a(x,r) = a(x,r;f) = \int_{B_{x,r}} f(y)\,dy, \qquad (x,r) \in \Omega^*, \tag{1}$$

где $B_{x,r}$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r. Пусть $B_r = B_{0,r}$, $B = B^n = B_1$ и $S_{x,r} = \partial B_{x,r}$, $S_r = S_{0,r}$; в частности $S = S^{n-1} = S_1$.

Через x_k обозначим k-ую координату точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно стандартного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и для $1 \leq k \leq n$ рассмотрим операторы проектирования $p_k x : x \to x - x_k e_k$, так что $p_k x$ не зависит от k-ой координаты. Пусть e – единичный вектор в $\mathbb{R}^n$, т.е. $e \in S^{n-1}$, и пусть ∂_e обозначает производную по переменной x в направлении e. Положим для простоты $\partial_k = \partial_{e_k}$ для частной производной по k-ой координате. Представляя формулу (1) в виде

$$a(x,r) = \int_{B_{x,r}} f(y + x_k e_k)\,dy = \int_{B_{p_k x,r}} \partial_k \int_{x_k}^{x_k+y_k} f(p_k y + t e_k)\,dt\,dy,$$

согласно известной теореме о дивергенции получим

$$a(x,r) = \int_{S_{p_k x,r}} n_k \int_{x_k}^{x_k+y_k} f(p_k y + t e_k)\,dt\,ds.$$

Здесь n_k — k-ая координата внешней единичной нормали n, а s обозначает поверхностную меру Лебега на $S_{p_k x,r}$. Используя независимость $S_{p_k x,r}$ от x_k, получим

$$(\partial_k a)(x,r) = \int_{S_{p_k x,r}} f(y + x_k e_k)\,n_k\,ds - \int_{S_{p_k x,r}} f(p_k y + t e_k)\,n_k\,ds = \int_{S_{x,r}} f(y)\,n_k\,ds.$$

Второй интеграл в среднем выражении равен нулю, поскольку подынтегральная функция имеет то же абсолютное значение, но с противоположными знаками для точек из $S_{p_k x, r}$, симметричных относительно гиперплоскости $y_k = 0$. Мы приходим к формуле

$$(\partial_e a)(x, r, f) = \int_{S_{x,r}} f(y)\, e \cdot n\, ds, \qquad (x, r) \in \Omega^*. \tag{2}$$

Обозначив производную по переменной r через ∂_0 получим

$$(\partial_0 a)(x, r) = \int_{S_{x,r}} f\, ds, \qquad (x, r) \in \Omega^*, \tag{3}$$

что следует из тождества

$$a(x, r) = \int_0^r \int_{S_{x,t}} f\, ds\, dt, \qquad (x, r) \in \Omega^*.$$

Из (2) и (3) следует неравенство

$$|(\nabla_x a)(x, r, f)| \leq (\partial_0 a)(x, r, |f|), \qquad (x, r) \in \Omega^*,$$

совпадающее с неравенством, отмеченным в [8] для $f \geq 0$ (см. Лемму 3 в [8]). Пусть теперь γ – гладкая жорданова дуга в Ω с параметризацией длины на $[0, T]$, где T - длина γ, так что $|\gamma'(t)| \equiv 1$ на $[0, T]$. Тогда $e = \gamma'(t)$ обозначает единичный вектор в касательном направлении к γ в точке $x = \gamma(t)$. Для заданной функции $r \in C^1(\gamma)$, удовлетворяющей условию $0 < r(x) < d(x)$ при $x \in \gamma$ обозначим через r' касательную производную r на γ, так что $r'(x) = (r \bullet \gamma)'(t)$ для $x = \gamma(t)$. Введем теперь новую функцию $\widetilde{a} \in C^1(\gamma)$, полагая

$$\widetilde{a}(x) = a(x, r(x), f) = \int_{B_{x,r(x)}} f(y)\, dy, \qquad x \in \gamma. \tag{4}$$

Из (2) - (4), для $x \in \gamma$ имеем

$$(\partial_e \widetilde{a})(x) = \int_{S_{x,r(x)}} f(y)\,(e \cdot n + r')\, ds. \tag{5}$$

§2. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ШАРЫ И СФЕРЫ

Если $\Omega = B = B^n$ и $f \in C(\overline{B})$, то (5) имеет место также при предположении $0 < r(x) \leq d(x)$.

Определение 1. Два шара $B_{x,r} \subset B$ и $B_{\overline{x},\overline{r}} \subset B$ назовем **коррелированными** (через B), если векторы x и $\overline{x}$ сонаправлены (т.е. или $|x|\,|\overline{x}| = 0$, или $x = \lambda\overline{x}$ с $\lambda > 0$) и выполняется соотношение

$$(1 + |x|^2 - r^2)\,|\overline{x}| = |x|\,(1 + |\overline{x}| - \overline{r}^2). \tag{6}$$

В этом случае соответствующие сферы $S_{x,r}$, $S_{\overline{x},\overline{r}}$ будут также называться коррелированными (через S). Очевидно, шары, концентричные с B, коррелированы.

Полагая $|\overline{x}| \leq |x|$ и принимая во внимание сонаправленность векторов x и $\overline{x}$, формулу (6) можно переписать в виде

$$|x - \overline{x}|\,[1 - (|x| + r)^2 + |x|\,(2\,r + |x - \overline{x}|)] = |x|\,(\overline{r}^2 - r^2).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\overline{r} \geq r$. Далее мы имеем неравенство

$$|x - \overline{x}|\,(2\,r + |x - \overline{x}|) \leq \overline{r}^2 - r^2,$$

т.е. $|x - \overline{x}| \leq \overline{r} - r$. Это означает, что включение $B_{x,r} \subset B_{\overline{x},\overline{r}} (\subset B)$ эквивалентно условию $|\overline{x}| \leq |x|$.

Заметим, что равенство $|x - \overline{x}| = |x| - |\overline{x}| = \overline{r} - r$ имеет место только при $r = 1 - |x|$, и тогда $\overline{r} = 1 - |\overline{x}|$, т.е. когда шары $B_{x,r}$ и $B_{\overline{x},\overline{r}}$ касаются B в некоторой точке. Если исключить этот случай, то строгое неравенство $|\overline{x}| < |x|$ влечет $\overline{B}_{x,r} \subset B_{\overline{x},\overline{r}}$ и при дополнительном условии $\overline{x} \neq 0$ получаем $\overline{B}_{\overline{x},\overline{r}} \subset B$.

Рассмотрим теорему о трех сферах для гармонических функций в случае неконцентрических, некасающихся, но коррелированных сфер. С этой целью зафиксируем шар $B_{x,r}$ с $x \neq 0$ и $0 < r < 1 - |x|$. Тогда шары $B_{x,r}$ и B неконцентрические и некасающиеся. Для рассмотрения семейства шаров, коррелированных с $B_{x,r}$ и содержащих последний, мы параметризуем интервал $[0, x] \subset \mathbb{R}^n$ по длине, полагая $\overline{x} = x_t = \gamma(t) = t\,e$ для $0 \leq t \leq |x|$, и $e = |x|^{-1}x$. Радиус $r_t = \overline{r}$ определяется по формуле (6), полагая $|\overline{x}| = t$. Следовательно, шары B_{x_t,r_t}, $t \in [0, |x|]$, порожденные через $B_{x,r}$ по корреляции, определены, и изменяются от $B_{x,r}$ при $t = |x|$ до B при $t = 0$.

Рассмотрим теперь **инверсию** φ относительно сферы $S_{a,\rho}$:

$$\varphi(y) = a + \frac{\rho^2}{|y - a|^2}(y - a). \tag{7}$$

являющимся взаимно-однозначным и конформным отображением $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, сохраняющим семейство сфер в $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ (см. [10], стр. 60). Если выберем $a = |a|e$ с $|a| > 1$ и положим $\rho^2 = |a|^2 - 1$, то $S_{a,\rho}$ будет ортогональным к S, так что $\varphi(B) = B$ с $\varphi(0) = 0$. Важно, что $|a|$ можно выбрать таким образом, что $\varphi(B_{x_t,r_t}) = B_{r_t^*}$ для всех $t \in [0,|x|]$, т.е. образы шаров B_{x_t,r_t} становятся **концентрическими** с общим центром в начале координат. На самом деле, можно найти $|a| > 1$ из квадратного уравнения (см. эквивалентную формулу (21) в [7]) :

$$\frac{|a|^2+1}{|a|} = \frac{1+|x|^2-r^2}{|x|}. \tag{8}$$

Из соотношения (6) (с $|\overline{x}| = t$),используя (8), можно найти r_t в терминах a :

$$r_t^2 = (1-|a|^{-1}t)(1-|a|t). \tag{9}$$

Также (см. (18) в [7]), радиус-образ r_t^* можно определить по формуле

$$r_t^* = r_t \frac{|a|}{|a|-t} \equiv \frac{1-|a|t}{r_t}. \tag{10}$$

Используя (9), получаем

$$(r_t^*)^2 = |a|\frac{1-|a|t}{|a|-t}. \tag{11}$$

Дифференцируя (9) и (11) по переменной t и используя (10), находим

$$2\,r_t\,r_t' = 2\,t - \frac{|a|^2+1}{|a|}, \qquad 2\,r_t(r_t^*)'\,|a| = -\rho^2\left(\frac{r_t^*}{r_t}\right). \tag{12}$$

Теперь мы намерены использовать формулу (5) в нашем специальном случае, заменяя в (5) x на $\overline{x}$, выбирая $\gamma(t) = t\,e$ при $t \in [0,|x|]$ с $e = x/|x|$ (так что $\gamma'(t) \equiv e$) и $r(\overline{x}) = r_t$ при $\overline{x} = x_t = \gamma(t)$. Для $y \in S_{x_t,r_t}$ имеем $n = n_y = r_t^{-1}(y - t\,e)$. Следовательно, из первого равенства в (12) и $a = |a|\,e$ имеем

$$e\cdot n + r_t' = \frac{e\cdot y - t + r_t\,r_t'}{r_t} = -\frac{|y-a|^2+1-|y|^2}{2\,|a|\,r_t}.$$

Подставляя это выражение в (5) и замечая, что $\partial_e = d/dt$, мы приходим к формуле

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{x_t,r_t}} f(y)\,dy = -\frac{1}{2\,|a|\,r_t}\int_{S_{x_t,r_t}} f(y)\,(|y-a|^2+1-|y|^2)\,ds, \tag{13}$$

верной для любой функции $f \in C(\overline{B})$, если $t \in [0,|x|]$.

Нам понадобятся несколько оценок для r_t^*. Положим $(r_t^*)^2 = 1-\tau$, где согласно (11) имеем $\tau = \dfrac{\rho^2\,t}{|a|-t}$. Далее из (10) для $t \in [0,|x|]$ получим $|a|t < 1$, откуда следует $0 < \tau < 1$. Используя неравенство $\log(1-\tau)^{-1} > \tau$, получим

$$\log(r_t^*) > \frac{\tau}{2} > t\,\frac{|a|-1}{|a|-t}. \tag{14}$$

Согласно (8), $|a|-1>1-|x|-r$ и $|a|-t\le|a|<|x|^{-1}\le t^{-1}$, и из (14) получим

$$\log(r_t^*)^{-1}>t^2(1-|x|-r). \tag{15}$$

Обратно, из (10) получаем $(r_t^*)^{-1}<r_t^{-1}(1-|x|t)<2r_t^{-1}(1-|x|)$. Отсюда и из (15) окончательно имеем

$$\alpha_t=\frac{\log r_t^*}{\log r_{|x|}^*}>\omega_t=\frac{t^2(1-|x|-r)}{\log\dfrac{1-|x|}{r/2}}. \tag{16}$$

§3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ЛОГ-ВЫПУКЛОСТЬ. Для функции $f\in C(B_{x,\tau})$ и $0<r<\tau$ положим

$$l_p(x,r,f)=\left(\int_{S_{x,r}}|f|^p\,ds\right)^{1/p},\qquad a_p(x,r,f)=\left(\int_{B_{x,r}}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}, \tag{17}$$

если $0<p<\infty$ и

$$l_y(x,r,f)=\sup_{S_{x,r}}|f|,\qquad a_\infty(x,r,f)=\sup_{B_{x,r}}|f|$$

для $p=\infty$. Мы опускаем x в обозначениях, если $x=0$.

Определение 2. Функция $L>0$ на $(\tau_0,\tau)\subset R^+$ называется **логарифмически выпуклой (лог-выпуклой)** по логарифму (по лог), если для $r\in[r_1,r_2]\subset(\tau_0,\tau)$ имеем

$$L(r)\le L^\alpha(r_1)\,L^{1-\alpha}(r_2),\qquad \alpha=\frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)}. \tag{18}$$

Если L является лог-выпуклой по лог, то L^γ также лог-выпукла при $\gamma>0$.

Замечание 1. Если лог-выпуклая функция L по лог является **возрастающей,** то в (18) можно заменить α на любое $\beta\in(0,\alpha]$.

Пример 1. Пусть f является голоморфной в $B^2\subset\mathbb{R}^2$. Теорема Харди о выпуклости (которая следует из классической теоремы Адамара о трех окружностях и содержит последнюю для $p=\infty$) утверждает (см. [9], стр. 9, Теорема 1.5), что функция $l_p(\cdot,f)$ для $p>0$ является лог-выпуклой по лог на $(0,1)$. То же утверждение имеет место для $a_p(\cdot,f)$ (см. [7], Лемма 2).

Пример 2. Пусть f – комплекснозначная функция, гармоническая в единичном шаре $B^n\subset\mathbb{R}^n$ $(n\ge2)$. Применяя теорему Адамара к равенству Парсеваля для f (см. [5], Лемма 2.1) получим, что и $l_2(\cdot,f)$ и $a_2(\cdot,f)$ суть лог-выпуклые по лог на $(0,1)$.

В этих примерах функции l_p и a_p являются возрастающими и поэтому имеет место Замечание 1.

Замечание 2. Пусть $H^p(B)$ – классы Харди голоморфных функций в единичном круге B (см. [9]) и $h^2(B)$ – соответствующий класс Харди гармонических функций в $B = B^n$ ($n \geq 2$) (см. [10], глава 6). В примерах 1 и 2 можно положить $r_2 = 1$ при $L = l_p(\cdot, f)$ и $L = l_2(\cdot, f)$, соответственно, предполагая $f \in H^p(B)$ в первом случае и $f \in h^2(B)$ во втором. Можно продолжить f в этих классах п.в. на $S = S^n$ по предельной теореме Фату и определить $l_p(1, f)$ как и в (17). Применяя (18) к соответствуюшим $l_p(\cdot, f_\tau)$ с $0 < \tau < 1$, где $f_\tau(y) = f(\tau y)$, и полагая $\tau \to 1$, можно получить этот результат.

Первая часть замечания выполняется также для величин $a_p(\cdot, f)$ в соответствующих классах Бергмана $b^p(B)$ голоморфных и гармонических функций, которые шире классов Харди.

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СФЕРАХ. Как в параграфе 2, пусть $B_{x,r}$ – неконцентрический и некасающийся шар в $B = B^n$, $n \geq 2$. Пусть a – точка с $|a| > 1$, сонаправлена с x и удовлетворяет (8). Рассмотрим комплекснозначную функцию f, гармоническую в шаре $B_\tau \subset R^n$ с $1 < \tau < |a|$ и обозначим через f^* преобразование **Кельвина** функции f относительно инверсии $\varphi = \varphi^{-1}$, определенной в (7) :

$$f^* = \left(\frac{\rho}{|y-a|}\right)^{n-2} \overline{f(\varphi(y))}, \qquad y \in \varphi(B_\tau). \tag{19}$$

Так как $\varphi(B) = B$, то существует $\tau_1 > 1$ такое, что $B_{\tau_1} \in \varphi(B_\tau)$. Отметим, что f^* – гармоническая в $\varphi(B_\tau)$, поэтому и в B_{τ_1} ; если $n = 2$ и f голоморфна в B_τ, то f^* голоморфна в $\varphi(B_\tau)$.

Рассмотрим теперь семейство шаров $\{B_{x_t, r_t}\}$, $t \in [0, |x|]$, коррелированных с $B_{x,r}$ (через B) и содержаших $B_{x,r}$. Применим (18) к $l_2^2(\cdot, f^*)$ к аргументам $r^*_{|x|} \leq r^*_t \leq 1$, заменяя там α на любое $\beta \in (0, \alpha]$ (см. Пример 2 и Замечание 1). Поскольку согласно (18)

$$r^*_t = \left(r^*_{|x|}\right)^\alpha \leq \left(r^*_{|x|}\right)^\beta, \tag{20}$$

то

$$l_2^2(r^*_t, f^*) \leq l_2^{2\beta}\left(r^*_{|x|}, f^*\right) l_2^{2(1-\beta)}(1, f^*). \tag{21}$$

Из (19) по формуле замены переменных ($\zeta = \varphi(y)$) в интегралах по объему, учитывая, что $\varphi(B_{x_t, r_t}) = B_{r^*_t}$ и $\det \varphi'(y) = -|y-a|^{-2n}$, получаем

$$I(t) = \int_{B^*_{r_t}} |f^*(y)|^2\, dy = \int_{B_{x_t, r_t}} \rho^4 |\zeta - a|^{-4} |f(\zeta)|^2\, d\zeta.$$

Чтобы выразить (21) непосредственно в терминах функции f и сфер S_{x_t,r_t}, $S_{x,r}$ и S, вначале применим формулу (3), а затем (13). Используя также вторую формулу в (12), получим

$$l_2^2\left(r_t^*, f^*\right) = \frac{1}{(r_t^*)'} I'(t) = \rho^2 \frac{r_t}{r_t^*} \int_{S_{x_t,r_t}} |f(y)|^2 \, ds_a, \tag{22}$$

где

$$ds_a = \frac{|y-a|^2 + 1 - |y|^2}{|y-a|^4} \, ds. \tag{23}$$

Подставим (23) в (20), используем (21) и возвратимся к обозначениям начала параграфа 2 : $x_t = \overline{x}, r_t = \overline{r}$. Окончательно, мы приходим к неравенству

$$\overline{r} \int_{S_{\overline{x},\overline{r}}} |f|^2 \, ds_a \leq \left(r \int_{S_{x,r}} |f|^2 \, ds_a \right)^{\beta} \left(\int_S |f|^2 \, ds_a \right)^{1-\beta}, \tag{24}$$

которое имеет место для любого $\beta \in (0, \alpha]$, где $(\overline{r})^* = (r^*)^{\alpha}$, или согласно (10)

$$\frac{1 - |a|\,|\overline{x}|}{\overline{r}} = \left(\frac{1 - |a|\,|x|}{r} \right)^{\alpha} \tag{25}$$

В частности, из оценки (16) следует, что в (24) можно подставить

$$\beta = \omega = |\overline{x}|^2 \frac{1 - |x| - r}{\log \dfrac{1 - |x|}{r/2}}.$$

Заметим также, что можно легко продолжить неравенство (24) на функции f из пространства Харди $h^2(B^n)$ гармонических функций, как указано в Замечании 2. Мы доказали следующую теорему.

Теорема. **Пусть $S_{x,r}$ и $S_{\overline{x},\overline{r}}$ суть коррелированные сферы через $S = S^{n-1}$, $n \geq 2$ с $x \neq 0$, $0 < r < 1 - |x|$ и $|\overline{x}| \leq |x|$. Для функции $f \in h^2(B^n)$ неравенство (24) имеет место при любом $\beta \in (0, \alpha]$, с α, удовлетворяющем (25), и для меры s_a, определенной по формуле (23) ; точку $a = |a|\,|x|^{-1} x$ ($|a| > 1$) можно найти из (8).**

Замечание 3. В случае $n = 2$, полагая, что f – голоморфная или $f \in H^2(B^2)$, в (24) можно ds_a заменить на $(|y-a|^2 + 1 - |y|^2)\, ds$. Это следует из (24) с заменой $f(y)$ на $(y-a)^2 f(y)$.

ABSTRACT. The authors obtain an analog of the Three spheres theorem for functions harmonic in the unit ball $B^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ in case of non-concentric but in some sense correlated spheres. The result is a logarithmic-convexity relation for the weighted spherical L^2-norms of harmonic functions. For the case of functions holomorphic in a disc in $\mathbb{R}^2$, the result extends to weighted L^p-norms ($p > 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. M. Landis, "Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations", Russian Math. Surveys, 18, pp. 1 — 62, 1963.
2. S. Agmon, "Unicite et convexite dans les problemes differentiales", Sm. de Mathmatiques Sup. 13, Univ. de Montral, 1965.
3. R. Brummelhuis, "Three-spheres theorem for second order elliptic equations", Journ. D'Analyse Mathmatique, vol. 65, pp. 179 — 206, 1995.
4. J. Korevaar, "Chebychev-type Quadratures : use of complex analysis and potential theory, Complex potential theory", NATO-ASI, ser. C, vol. 439, ed. P. M. Gauthier, Kluwer, Dordrecht, 1994.
5. J. Korevaar and J. L. M. Meyers, "Logarithmic convexity for supremum norms of harmonic functions", Bull. London Math. Soc., vol. 121, pp. 353 — 362, 1994
6. Е. Д. Соломенцев, "Теорема о трех сферах для гармонических функций", ДАН Арм.ССР, том 42, стр. 274 — 278, 1966.
7. Н. У. Аракелян, П. М. Готье, "Передача малости и единственности для гармонических и голоморфных функций", Изв. АН Армении, серия Математика, том 30, № 4, стр. 2 — 24, 1995.
8. N. U. Arakelian, H. Shahgholian, "Propagation of smallness for harmonic and analytic functions in arbitrary domains", Bull. London Math. Soc., vol. 31, 1999.
9. P. L. Duren, "Theory of H^p spaces", Academic Press, New York, 1970.
10. Sh. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, "Harmonic function theory", Springer, New York, 1992.

14 Марта 1999

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении,
Ереванский государственный университет
E-mails : arakel@instmath.sci.am
Norayr@scientist.com

О БЕЗУСЛОВНОЙ И АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Г. Геворкян, Г. Л. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В статье доказана эквивалентность абсолютной и безусловной сходимости почти всюду рядов по сильно регулярной общей системе Франклина.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Из безусловной сходимости п.в. функционального ряда, вообще говоря, не следует его абсолютная сходимость п.в. Однако существуют некоторые исключения. В 1967 году Е. М. Никишин и П. Л. Ульянов [1] (см. также [7], стр. 112) доказали следующий результат.

Теорема 1. (Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов) **Для ряда $\sum a_n \chi_n(t)$ по системе Хаара безусловная сходимость п.в. на множестве $E \subset [0,1]$ с положительной мерой Лебега эквивалентна его абсолютной сходимости п.в. на E.**

В 1989 году Г. Г. Геворкян распространил этот результат на ряды по системе Франклина (см. [2]). В настоящей работе этот результат распространяется на ряд по общей системе Франклина ([3], [4]), удовлетворяющий некоторому условию регулярности. Отметим, что экспоненциальные оценки для функций системы Франклина, полученные З. Чисельским [5], [6] (см. также [7], стр. 233) устроняют много трудностей. Для общей системы Франклина мы не имеем аналогичных оценок. В этой работе используются неравенства для функций общей системы Франклина из [4].

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Рассмотрим последовательность разбиений отрезка [0,1] точками $0 = t_{j0} < t_{j1} < \dots < t_{j2^j} = 1$, удовлетворяющие условиям $t_{j+1,2k} = t_{j,k}$, $0 \le k \le 2^j$. Для определенности пусть $\mathcal{P}_0 = \{0, 1\}$ и $\mathcal{P}_j = \{t_{ji} : 0 \le i \le 2^j\}$, $j > 0$, так, что $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$. Обозначим $I_{j,k} = [t_{j,k-1}, t_{j,k}]$ и $\mathcal{I}_j = \{I_{j,k}\}_{k=1}^{2^j}$. Для определения общей системы Франклина введем точки разбиения $\mathcal{P}^n$ следуюшим образом : сначала $\mathcal{P}^{2^\mu} = \mathcal{P}_\mu$, $\mu \ge 0$. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $1 \le \nu \le 2^\mu$. Возьмем

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{2^\mu} \bigcup \{t_{\mu+1,2k-1}\}_{k=1}^{\nu}, \quad \mu \ge 0.$$

Точки деления $\mathcal{P}^n$ обозначим через $\{t_k^n\}_{k=0}^n$ в порядке возрастания, $t_k^n = t_{\mu+1,k}$ для $0 \le k \le 2\nu$ и $t_k^n = t_{\mu,k-\nu}$ для $2\nu+1 \le k \le n$. Обозначим $[n] = \mu$, $I_k^n = [t_{k-1}^n, t_k^n]$, $1 \le k \le n$ и $\mathcal{I}^n = \{I_k^n\}_{k=1}^n$. Возьмем $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$. Функцию $f_n(x)$ мы берем непрерывной на $[0,1]$, линейной на каждом I_k^n $(1 \le k \le n)$ и удовлетворяющей следующим условиям :

1. f_n ортогональна функциям $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ в смысле $L_2[0,1]$;
2. $f_n\left(t_{2\nu-1}^n\right) > 0$;
3. $\|f_n\|_{L_2} = 1$.

Полученную ортонормальную систему функций $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ назовем **общей системой Франклина**. Обозначим

$$\lambda_k^n = t_k^n - t_{k-1}^n = |I_k^n|, \quad a_k^n = f_n(t_k^n), \quad \{n\} = \left[t_{2\nu-2}^n, t_{2\nu}^n\right], \quad \{\bar{n}\} = \left[t_{2\nu-3}^n, t_{2\nu+1}^n\right].$$

Последовательность $\{\mathcal{P}^n\}_{n=0}^\infty$ называется **слабо регулярной** [4], если она удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{\lambda_{2\nu-1}^n}{\lambda_{2\nu}^n} \le \gamma \quad \text{для всех} \quad n = 2^\mu + \nu \ge 2, \tag{WR}$$

где γ абсолютная постоянная. Она называется **сильно регулярной** [4], если

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{\lambda_{k-1}^n}{\lambda_k^n} \le \gamma \quad \text{и} \quad n \ge 2, \quad 1 \le k \le n. \tag{SR}$$

Общую систему Франклина назовем **(WR)-системой (или (SR)-системой)**, если ее порождающая последовательность разбиений слабо регулярна (сильно регулярна). Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Для ряда*

$$\sum a_n f_n(t) \tag{1}$$

по (SR)-системе Франклина $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ безусловная сходимость п.в. на множестве $E \subset [0,1]$ с положительной мерой Лебега эквивалентна его абсолютной сходимости п.в. на E.

Отметим, что из абсолютной сходимости п.в. на E ряда (1) следует его безусловная сходимость п.в. на E. Следовательно, мы должны доказать только обратное утверждение. Нам понадобятся следующие результаты из [4] :

$$a^n_{2\nu-1} > 0, \quad sgn(a^n_k) = -sgn(a^n_{k-1}), \quad 1 \le k \le n;$$

$$a^n_1 = -2a^n_0, \quad 2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda^n_k}{\lambda^n_{k+1}} \le \left|\frac{a^n_{k+1}}{a^n_k}\right| \le 2 + 2\frac{\lambda^n_k}{\lambda^n_{k+1}}, \quad 1 \le k \le 2\nu - 3; \tag{2}$$

$$a^n_{n-1} = -2a^n_n, \quad 2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda^n_{k+1}}{\lambda^n_k} \le \left|\frac{a^n_{k-1}}{a^n_k}\right| \le 2 + 2\frac{\lambda^n_{k+1}}{\lambda^n_k}, \quad 2\nu + 1 \le k \le n - 1.$$

Существует постоянная C_1 такая, что (см. [4])

$$C_1^{-1}\left|\lambda^n_{2\nu-1} + \lambda^n_{2\nu}\right|^{-1/2} \le |a^n_k| \le C_1\left|\lambda^n_{2\nu-1} + \lambda^n_{2\nu}\right|^{-1/2}, \quad 2\nu - 2 \le k \le 2\nu,$$

откуда следует

$$C_1^{-2} \le \left|\frac{a^n_{k-1}}{a^n_k}\right| \le C_1^2, \quad k = 2\nu - 1, 2\nu. \tag{3}$$

Очевидно, что $\max\limits_{0\le t\le 1}|f_n(t)| = \max\left(|a^n_{2\nu-2}|, |a^n_{2\nu-1}|, |a^n_{2\nu}|\right)$. Для $x \in I^n_k$, $1 \le k \le n$ обозначим

$$\widetilde{f_n}(x) = \frac{1}{|I^n_k|}\int_{I^n_k}|f_n(t)|\,dt.$$

Так как f_n линейна на I^n_k, то

$$|f_n(t)| < 3\widetilde{f_n}(t). \tag{4}$$

Следующее неравенство доказано в [4] :

$$\frac{\int_{I^n_{k+1}}|f_n(t)|\,dt}{\int_{I^n_k}|f_n(t)|\,dt} \ge 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{\lambda^n_{k+1}}{\lambda^n_k}\left(2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda^n_k}{\lambda^n_{k+1}}\right), \quad 1 \le k \le 2\nu - 3.$$

Следовательно

$$\frac{\int_{I^n_{k+1}}|f_n(t)|\,dt}{\int_{I^n_k}|f_n(t)|\,dt} \ge 3\left(\sqrt{2} - 1\right), \quad 1 \le k \le 2\nu - 3, \tag{5}$$

$$\frac{|I^n_{k+1}|^{-1}\int_{I^n_{k+1}}|f_n(t)|\,dt}{|I^n_k|^{-1}\int_{I^n_k}|f_n(t)|\,dt} \ge 4\left(\sqrt{2} - 1\right), \quad 1 \le k \le 2\nu - 3. \tag{6}$$

Если в (5) и (6) поменять местами индексы k и $k+1$, то получим аналогичные результаты для $2\nu + 1 \le k \le n - 1$. Легко проверить, что

$$\min_{y\in D}\int_a^b |y(x)|\,dx = d(b - a)\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

где $D = \{y \in C^2[a,b] : \ y'' \equiv 0, \ |y(a)| = d\}$. Следовательно

$$\frac{\int_{I^n_{2\nu-1}} |f_n(t)|\,dt}{\int_{I^n_{2\nu-2}} |f_n(t)t|\,dt} \ge \frac{|a^n_{2\nu-2}|\lambda^n_{2\nu-1}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\frac{1}{2}|a^n_{2\nu-2}|\lambda^n_{2\nu-2}}, \tag{7}$$

$$\frac{\int_{I^n_{2\nu-1}} |f_n(t)|\,dt}{\int_{I^n_{2\nu-2}} |f_n(t)|\,dt} \ge \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\gamma}, \quad \frac{|I^n_{2\nu-1}|^{-1}\int_{I^n_{2\nu-1}} |f_n(t)|\,dt}{|I^n_{2\nu-2}|^{-1}\int_{I^n_{2\nu-2}} |f_n(t)|\,dt} \ge 2\left(\sqrt{2}-1\right). \tag{8}$$

Для $k = 2\nu$ имеем

$$\frac{\int_{I^n_{2\nu}} |f_n(t)|\,dt}{\int_{I^n_{2\nu+1}} |f_n(t)|\,dt} \ge \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\gamma}, \quad \frac{|I^n_{2\nu}|^{-1}\int_{I^n_{2\nu}} |f_n(t)|\,dt}{|I^n_{2\nu+1}|^{-1}\int_{I^n_{2\nu+1}} |f_n(t)|\,dt} \ge 2\left(\sqrt{2}-1\right). \tag{9}$$

Неравенства (6), (8) и (9) дают представление о поведении ступенчатой функции $\widetilde{f_n}(t)$. Она принимает свой максимум на $\{\widetilde{n}\}$, не убывает на $[0, t^n_{2\nu-2}]$ и не возрастает на $[t^n_{2\nu}, 1]$. Хотя значения функции $\widetilde{f_n}(t)$ на $I^n_{2\nu-1}$ и $I^n_{2\nu}$ могут быть меньше чем значения функции $\widetilde{f_n}(t)$ на $I^n_{2\nu-2}$ и $I^n_{2\nu+1}$, соответственно, но они могут оцениваться снизу с помощью (8) и (9).

Обозначим через τ^n_k единственное решение уравнения $f_n(t) = 0$ на I^n_k $(1 \le k \le n)$. Из (2) следует, что $f_n(t)$ не меняет знака на $\left[\tau^n_{k-1}, \tau^n_k\right]$ $(2 \le k \le n)$. Учитывая линейность f_n на I^n_k, получаем

$$\frac{\left|\int_{\tau^n_k}^{\tau^n_{k+1}} f_n(t)\,dt\right|}{\left|\int_{\tau^n_{k-1}}^{\tau^n_k} f_n(t)\,dt\right|} = \left|\frac{a^n_k}{a^n_{k-1}}\right|^2 \left(1 + \frac{\lambda^n_{k+1}}{\lambda^n_k}\frac{1+\left|\frac{a^n_{k-1}}{a^n_k}\right|}{1+\left|\frac{a^n_{k+1}}{a^n_k}\right|}\right)\left(1 + \frac{\lambda^n_{k-1}}{\lambda^n_k}\frac{1+\left|\frac{a^n_k}{a^n_{k-1}}\right|}{1+\left|\frac{a^n_{k-2}}{a^n_{k-1}}\right|}\right)^{-1} \tag{10}$$

Следовательно, для $2 \le k \le 2\nu - 2$ имеем

$$\frac{\left|\int_{\tau^n_k}^{\tau^n_{k+1}} f_n(t)\,dt\right|}{\left|\int_{\tau^n_{k-1}}^{\tau^n_k} f_n(t)\,dt\right|} \ge \left(2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda^n_{k-1}}{\lambda^n_k}\right)^2\left[1 + \frac{\lambda^n_{k-1}}{\lambda^n_k}\left(3 + 2\frac{\lambda^n_{k-1}}{\lambda^n_k}\right)\right]^{-1} \ge \frac{9}{8}, \tag{11}$$

так как

$$\inf_{x \in (0,\infty)} \frac{\left(2+\frac{3}{2}x\right)^2}{1+x(3+2x)} = \frac{9}{8}$$

Аналогично, для $2\nu + 1 \le k \le n - 1$ имеем

$$\left|\int_{\tau^n_{k-1}}^{\tau^n_k} f_n(t)\,dt\right| \cdot \left|\int_{\tau^n_k}^{\tau^n_{k+1}} f_n(t)\,dt\right|^{-1} \ge \frac{9}{8}.$$

Так как $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть SR-система, то из (3) и (10) следует, что существует постоянная C_2 такая, что

$$C_2^{-1} \le \frac{\left|\int_{\tau^n_k}^{\tau^n_{k+1}} f_n(t)\,dt\right|}{\left|\int_{\tau^n_{k-1}}^{\tau^n_k} f_n(t)\,dt\right|} \le C_2, \quad k = 2\nu - 1, 2\nu. \tag{12}$$

Учитывая линейность f_n на I_k^n $(1 \le k \le n)$ и (2), получаем

$$\frac{\left|\int_{I_{k+1}^n} f_n(t)\,dt\right|}{\left|\int_{I_k^n} f_n(t)\,dt\right|} = \frac{\lambda_{k+1}^n}{\lambda_k^n} \frac{\left|\frac{a_{k+1}^n}{a_k^n}\right| - 1}{1 - \left|\frac{a_{k-1}^n}{a_k^n}\right|} > \frac{\lambda_{k+1}^n}{\lambda_k^n}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_k^n}{\lambda_{k+1}^n}\right) > \frac{3}{2}, \quad 1 \le k \le 2\nu - 3. \tag{13}$$

Аналогично, для $2\nu + 1 \le k \le n - 1$ получим

$$\left|\int_{I_k^n} f_n(t)\,dt\right| \cdot \left|\int_{I_{k+1}^n} f_n(t)\,dt\right|^{-1} > \frac{3}{2}.$$

Лемма 1. Существует абсолютная постоянная C_3 такая, что для любого отрезка $[t_{j,k}, t_{j,k+1}]$, любого натурального n, удовлетворяющего $\{n\} \subset [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$ и любого действительного числа a_n существует точка $\tau_n^* \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$ такая, что

$$\int_{\tau_n^*}^{t_{j,k+1}} a_n f_n(t)\,dt \ge C_3 \int_{t_{j,k}}^{t_{j,k+1}} |a_n f_n(t)|\,dt.$$

Доказательство : Предположим, что $a_n \ne 0$, в противном случае утверждение очевидно. Из условия $\{n\} \subset [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$ следует $[n] \ge j$, т.е. существуют числа l и s такие, что $t_l^n = t_{j,k}$, $t_s^n = t_{j,k+1}$ и $l \le 2\nu - 2$, $s \ge 2\nu$. Учитывая (11) и (12) имеем

$$\int_{t_l^n}^{t_s^n} |a_n f_n(t)|\,dt \le \int_{\tau_l^n}^{\tau_{s+1}^n} |a_n f_n(t)|\,dt = \sum_{k=l}^{s} \int_{\tau_k^n}^{\tau_{k+1}^n} |a_n f_n(t)|\,dt <$$

$$< \int_{\tau_{2\nu-1}^n}^{\tau_{2\nu}^n} |a_n f_n(t)|\,dt + \left(\int_{\tau_{2\nu-2}^n}^{\tau_{2\nu-1}^n} |a_n f_n(t)|\,dt + \int_{\tau_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+1}^n} |a_n f_n(t)|\,dt\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k <$$

$$< (9 + 9C_2^2 + C_2) \int_{\tau_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+1}^n} |a_n f_n(t)|\,dt = C_4 \int_{\tau_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+1}^n} |a_n f_n(t)|\,dt. \tag{14}$$

Пусть сперва $a_n < 0$. Возьмем $\tau_n^* = \tau_{2\nu}^n$. Из (11) следует, что

$$\int_{\tau_{2\nu}^n}^{t_s^n} a_n f_n(t)\,dt \ge \min\left(\int_{\tau_{2\nu}^n}^{t_{2\nu}^n} a_n f_n(t)\,dt; \int_{\tau_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+2}^n} a_n f_n(t)\,dt\right) \ge$$

$$\ge \min\left(\int_{\tau_{2\nu}^n}^{t_{2\nu}^n} a_n f_n(t)\,dt; \frac{1}{9}\int_{\tau_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+1}^n} a_n f_n(t)\,dt\right). \tag{15}$$

Учитывая сильную регулярность системы и (2), имеем

$$\frac{\int_{\tau_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+1}^n} a_n f_n(t)\,dt}{\int_{\tau_{2\nu}^n}^{t_{2\nu}^n} a_n f_n(t)\,dt} = 1 + \frac{\int_{t_{2\nu}^n}^{\tau_{2\nu+1}^n} a_n f_n(t)\,dt}{\int_{\tau_{2\nu}^n}^{t_{2\nu}^n} a_n f_n(t)\,dt} = 1 + \frac{\lambda_{2\nu+1}^n}{\lambda_{2\nu}^n} \frac{|a_{2\nu}^n| + |a_{2\nu-1}^n|}{|a_{2\nu}^n| + |a_{2\nu+1}^n|} <$$

$$< 1 + \frac{\lambda^n_{2\nu+1}}{\lambda^n_{2\nu}} \left(1 + \frac{|a^n_{2\nu-1}|}{|a^n_{2\nu}|}\right) < 1 + \gamma(3 + 2\gamma). \tag{16}$$

Из (15) и (16) получим, что для некоторой постоянной C_5 имеет место

$$\int_{\tau^n_{2\nu}}^{t^n_s} a_n f_n(t)\, dt \ge C_5 \int_{\tau^n_{2\nu}}^{\tau^n_{2\nu+1}} |a_n f_n(t)|\, dt.$$

Это вместе с (14) доказывает Лемму 1 в случае $a_n < 0$.

Рассмотрим случай $a_n > 0$. Если $\tau^n_{2\nu+1} \in [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$, то возьмем $\tau^*_n = \tau^n_{2\nu+1}$. В силу (14) достаточно найти постоянную C_6 такую, что

$$\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{t^n_s} a_n f_n(t)\, dt \ge C_6 \int_{\tau^n_{2\nu}}^{\tau^n_{2\nu+1}} |a_n f_n(t)|\, dt.$$

Как и в (15), имеем

$$\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{t^n_s} a_n f_n(t)\, dt \ge \min\left(\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{t^n_{2\nu+1}} a_n f_n(t)\, dt; \int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{\tau^n_{2\nu+3}} a_n f_n(t)\, dt\right) \ge$$

$$\ge \min\left(\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{t^n_{2\nu+1}} a_n f_n(t)\, dt; \frac{1}{9} \int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{\tau^n_{2\nu+2}} a_n f_n(t)\, dt\right). \tag{17}$$

Аналогично (16) получим

$$\frac{\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{\tau^n_{2\nu+2}} a_n f_n(t)\, dt}{\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{t^n_{2\nu+1}} a_n f_n(t)\, dt} < 1 + \gamma(3 + 2\gamma). \tag{18}$$

Снова, из сильной регулярности системы, (10) и (2) получим

$$\begin{aligned}\frac{\left|\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{\tau^n_{2\nu+2}} f_n(t)\, dt\right|}{\left|\int_{\tau^n_{2\nu}}^{\tau^n_{2\nu+1}} f_n(t)\, dt\right|} &= \left|\frac{a^n_{2\nu+1}}{a^n_{2\nu}}\right|^2 \left(1 + \frac{\lambda^n_{2\nu+2}}{\lambda^n_{2\nu+1}} \frac{1 + \left|\frac{a^n_{2\nu}}{a^n_{2\nu+1}}\right|}{1 + \left|\frac{a^n_{2\nu+2}}{a^n_{2\nu+1}}\right|}\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{\lambda^n_{2\nu}}{\lambda^n_{2\nu+1}} \frac{1 + \left|\frac{a^n_{2\nu+1}}{a^n_{2\nu}}\right|}{1 + \left|\frac{a^n_{2\nu-1}}{a^n_{2\nu}}\right|}\right)^{-1} > \frac{1}{(2 + 2\gamma)^2} \frac{1}{1 + \gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{19}$$

Из (17) – (19) следует, что существует постоянная C_6 такая, что

$$\int_{\tau^n_{2\nu+1}}^{t^n_{2\nu+1}} a_n f_n(t)\, dt \ge C_6 \int_{\tau^n_{2\nu}}^{\tau^n_{2\nu+1}} |a_n f_n(t)|\, dt, \quad a_n > 0.$$

Если $\tau^n_{2\nu+1} \notin [t_{j,k}, t_{j,k+1}]$, то возьмем $\tau^*_n = \tau^n_{2\nu-1}$. Очевидно, что $t_{j,k+1} = t^n_s = t^n_{2\nu}$. Так как $\int_0^1 a_n f_n(t)\, dt = 0$, то имеем

$$\int_{\tau^n_{2\nu-1}}^{t^n_{2\nu}} a_n f_n(t)\, dt = -\int_0^{\tau^n_{2\nu-1}} a_n f_n(t)\, dt - \int_{t^n_{2\nu}}^1 a_n f_n(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{2\nu-1} (-1)^k \int_{\tau_{k-1}^n}^{\tau_k^n} |a_n f_n(t)|\, dt + \sum_{k=2\nu}^{n-1} (-1)^k \left| \int_{I_{k+1}^n} a_n f_n(t)\, dt \right|.$$

Учитывая (11) и (13), получим

$$\int_{\tau_{2\nu-1}^n}^{t_{2\nu}^n} a_n f_n(t)\, dt > \frac{1}{9} \int_{\tau_{2\nu-2}^n}^{\tau_{2\nu-1}^n} |a_n f_n(t)|\, dt.$$

Ввиду (12) и (14), это завершает доказательство Леммы 1.

Зафиксируем $N \geq 16$ и рассмотрим f_n, $n \geq N$. Положим $T_n = \left\{ t : |a_n \widetilde{f_n}(t)| \geq 1 \right\}$, где $\widetilde{f_n}(t)$ берется согласно (4) и a_n как и в (1). Определим множество E_n следующим образом : $E_n = \emptyset$, если T_n пусто. Если все точки T_n больше $t_{2\nu-1}^n$, то возьмем $E_n = T_n \cup [t_{2\nu-1}^n, t_{2\nu}^n]$. Если все точки T_n меньше $t_{2\nu-1}^n$, то возьмем $E_n = T_n \cup [t_{2\nu-2}^n, t_{2\nu-1}^n]$. Если T_n содержит точки как больше, так и меньше $t_{2\nu-1}^n$, то возьмем $E_n = T_n \cup [t_{2\nu-2}^n, t_{2\nu}^n]$. Из (6) и (8) следует, что E_n является отрезком и

$$\left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| \geq 2\left(\sqrt{2} - 1\right), \quad t \in E_n. \tag{20}$$

Полагая $G_1 = \{n \geq N : E_n \neq \emptyset\}$, заключаем, что из $n \notin G_1$ следует $\left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| < 1$, $t \in [0,1]$.

Лемма 2. **Ряд** $\sum_{n \in G_1} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right|$ **сходится п.в. вне** $A = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$.

Доказательство : Из (5) и (7) следует, что существует постоянная C_7 такая, что .

$$\int_0^{t_k^n} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt \leq C_7 \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt, \quad 1 \leq k \leq 2\nu - 1,$$

$$\int_{t_k^n}^{1} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt \leq C_7 \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt, \quad 2\nu - 1 \leq k \leq n - 1. \tag{21}$$

За исключением некоторого множества меры нуль, множество A можно представить в виде объединения непересекающихся интервалов. Пусть J один из таких интервалов. Ясно, что для любого n или $E_n \cap J = \emptyset$, или $E_n \subset J$. Обозначим через J^δ концентрический с J интервал длины $|J^\delta| = (1+2\delta)|J|$. Пусть $[t_{p_n}^n, t_{q_n}^n]$ – наибольший интервал с концами из $\mathcal{P}^n$, содержащийся в J^δ, и пусть $K_n^J = [t_{p_n-1}^n, t_{p_n}^n] \cup [t_{q_n}^n, t_{q_n+1}^n]$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n \in G_1, E_n \subset J} \int_{[0,1] \setminus J^\delta} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt.$$

Из (21) следует

$$\sum_{n \in G_1, E_n \subset J} \int_{[0,1] \setminus J^\delta} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt \leq \sum_{n \in G_1, E_n \subset J} \int_{[0,1] \setminus [t_{p_n}^n, t_{q_n}^n]} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt \leq$$
$$\leq C_7 \sum_{n \in G_1, E_n \subset J} \int_{K_n^J} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| dt. \tag{22}$$

Пусть $n_0 = \min\{n \in G_1, E_n \subset J\}$. Заметим, что $\left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| < 1$ при $t \in K_n^J$ и $E_n \subset J$, и

$$m(K_n^J) \le \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{[n]-[n_0]} m(K_{n_0}^J) \le 2\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{[n]-[n_0]-1} m(J), \qquad (23)$$

где m есть мера Лебега.

Пусть m_0 – наименьший индекс из $\{n \in G_1, E_n \subset J\}$, для которого каждый из отрезков множества $J^\delta \setminus J$ содержит не менее двух точек из $\mathcal{P}^{m_0}$. Это так, если m_0 удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{[m_0]-[n_0]} m(J) \le \frac{1}{2}\delta m(J).$$

Можем считать, что m_0 зависит от δ (а γ и $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ считаем фиксированными). Из (23) имеем

$$\sum_{\mu=[n_0]}^{[m_0]} \sum_{n\in\overline{N}_\mu} \int_{K_n^J} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| dt \le \sum_{\mu=[n_0]}^{[m_0]} 2^\mu 2\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{\mu-[n_0]-1} m(J) = C_8(\delta) m(J), \qquad (24)$$

где $\overline{N}_\mu = \{n : [n] = \mu,\ n \in G_1,\ E_n \subset J\}$. Заметим, что если $[n] = \mu > [m_0]$, то каждый из двух отрезков множества $J^\delta \setminus J$ содержит не менее $2^{\mu-[m_0]}$ точек из $\mathcal{P}^n$. Пусть n_μ – наименьший индекс из $\overline{N}_\mu$. Из (6) получаем

$$\left|a_{n_\mu} \widetilde{f_{n_\mu}}(t)\right| \le \left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2^{\mu-[m_0]-1}}, \quad t \in \left[t^{n_\mu}_{\mathcal{P}_{n_\mu}-1}, t^{n_\mu}_{\mathcal{P}_{n_\mu}}\right].$$

Для остальных индексов из $\overline{N}_\mu$ имеем

$$\left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| \le \left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2^{\mu-[m_0]-1}} \left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2(n-n_\mu)}, \quad t \in [t^n_{\mathcal{P}_n-1}, t^n_{\mathcal{P}_n}]. \qquad (25)$$

Аналогично, для $\left[t^n_{q_n}, t^n_{q_n+1}\right]$ имеем

$$\sum_{\mu=[m_0]+1}^{\infty} \sum_{n\in\overline{N}_\mu} \int_{K_n^J} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| dt \le \sum_{\mu=[m_0]+1}^{\infty} \left[4\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{\mu-[n_0]-1} m(J) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2^{\mu-[m_0]-1}} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^k\right] = C_9(\delta) m(J). \qquad (26)$$

Из (22), (24) и (26) следует, что

$$\sum_{n\in G_1, E_n\subset J} \int_{[0,1]\setminus J^\delta} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| dt \le C_7(C_8(\delta) + C_9(\delta)) m(J).$$

Следовательно

$$\sum_{n\in G_1}\int_{[0,1]\setminus A^\delta}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt\le\sum_{J\subset A}\sum_{n\in G_1,E_n\subset J}\int_{[0,1]\setminus J^\delta}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt\le$$
$$\le C_7(C_8(\delta)+C_9(\delta))m(A),$$

где $A^\delta=\cup J^\delta$. Таким образом, мы показали, что $\sum_{n\in G_1}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|$ сходится п.в. на $[0,1]\setminus A^\delta$. Устремляя δ к нулю, получим сходимость п.в. на $[0,1]\setminus A$. Лемма 2 доказана.

В следующей лемме обозначим через $G_2=\{N,N+1,\ldots\}\setminus G_1$ и $G_2^I=\{n\in G_2,\{n\}\subset I\}$.

Лемма 3. Ряд

$$\sum_{n\in G_2\setminus G_2^I}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|$$

сходится всюду на интервале I.

Доказательство : Пусть $I=(a,b)$ и $t\in I$. Выберем $n_0\in G_2\setminus G_2^I$ так, что в каждом из интервалов (a,t) и (t,b) было бы по две точки из $\mathcal{P}^{n_0}$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве (23) - (26), получим

$$\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\le\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2^{[n]-[n_0]}}.$$

Следовательно, как и в (26)

$$\sum_{n>n_0,n\in G_2\setminus G_2^I}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\le\sum_{\mu=[n_0]}^{\infty}\sum_{n\in G_2\setminus G_2^I,[n]=\mu}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|<$$
$$<\sum_{\mu=[n_0]}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2^{\mu-[n_0]}}2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{k}\right]<\infty.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Существует постоянная C_{10} такая, что для каждого $I\in\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathcal{I}_j$ имеет место

$$\int_{[0,1]\setminus I}\sum_{n\in G_2^I}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt<C_{10}m(I).$$

Доказательство : Обозначим $n_0=\min G_2^I$ и $[t^n_{p_n},t^n_{q_n}]=I$ для $n\ge n_0$. Как и в (22) - (26) имеем

$$\int_{[0,1]\setminus I}\sum_{n\in G_2^I}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt\le C_7\sum_{n\in G_2^I}\int_{K_n^I}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt=$$
$$=C_7\sum_{\mu=[n_0]}^{\infty}\sum_{[n]=\mu,n\in G_2^I}\int_{K_n^I}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt<$$

$$< C_7 \sum_{\mu=[n_0]}^{\infty} \left[2\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{\mu-[n_0]-1} m(I) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{k} \right] = C_{10} m(I).$$

Лемма 4 доказана.

§2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Лемма 5. Пусть $\sum |a_n f_n(t)| = \infty$, $t \in E \subset [0,1]$, $m(E) > 0$. Тогда для любого $N > 16$ и $\Delta \in \mathcal{I}_{[n]}$ существуют полином $P(t) = \sum\limits_{n=N}^{M} a_n f_n(t)$ и его перестановка $\mathcal{P}^{\sigma}(t) = \sum\limits_{n=N}^{M} a_{\sigma_n} f_{\sigma_n}(t)$ такие, что

$$\mu\left\{t \in \Delta : \delta(\mathcal{P}^{\sigma}(t)) > C_6\right\} > C_6 m(\Delta)$$

при условии, что $m(\Delta \cap E) > \frac{1}{2} m(\Delta)$, где $\delta(\mathcal{P}^{\sigma}(t))$ колебания частных сумм переставленного полинома $\mathcal{P}^{\sigma}(t)$.

Доказательство : Обозначим

$$\{\Delta_k\} = \left\{\Delta \in \mathcal{I}_{[n]} : \mu\left(\Delta \bigcap (E \setminus A)\right) > \frac{1}{4} m(\Delta)\right\}. \tag{27}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n \in G_2^{\Delta_k}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| \tag{28}$$

и его подряд

$$\sum_{n \in G_2^{k}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right|, \tag{29}$$

где множество индексов $G_2^k \subset G_2^{\Delta_k}$ получается следующим образом : мы поочередно суммируем функции $\left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right|$ из (28) пока сумма не станет больше 1 на некотором интервале $J \subset \Delta_k$. Последующие функции, для которых $\{n\} \subset J$ в (29) не суммируются. Таким образом, G_2^k удовлетворяет так называемому условию (S–T), т.е., если $\sum\limits_{n \in G_2^k} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| \geq 1$ на некотором отрезке $J \subset \Delta_k$ и $\{m\} \subset J$, то $m \notin G_2^k$.

Теперь покажем, что

$$\sum_{n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| \geq 1 \quad \text{п.в. на} \quad \Delta_k \cap (E \setminus A). \tag{30}$$

Имеем

$$\left\{ t \in \Delta_k : \sum_{n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| \geq 1 \right\} = \bigcup_m J_{km},$$

Имеем $\sum\limits_{n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| < 1$, для $t \in \Delta_k \setminus \bigcup\limits_m J_{km}$. Следовательно, достаточно доказать (37) на $\bigcup\limits_m J_{km}$. Пусть $J_{km} \in \mathcal{I}_{p_0}$ фиксировано. Из определения (29) следует, что $\sum\limits_{[n]<p_0, n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| < 1$ на J_{km}. Из (6) имеем

$$\sum_{[n]=p_0, n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| < 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)} \right)^k. \tag{38}$$

Положим

$$H_{km} = \left\{ n \in G_2^k : \ [n] > p_0, \ \{n\} \text{ находится правее } J_{km} \right\},$$

$$L_{km} = \left\{ n \in G_2^k : \ [n] > p_0, \ \{n\} \text{ находится левее } J_{km} \right\}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{[n]>p_0, n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| = \sum_{n \in H_{km}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| + \sum_{n \in L_{km}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right|.$$

Пусть $J_{km} = [\alpha, \beta]$. Возможны два случая :

(а) существуют $\beta^* > \beta$ и q такие, что $[\beta, \beta^*] = J_{kq}$;

(б) для любых $\beta^* > \beta$ и q имеем $[\beta, \beta^*] \neq J_{kq}$.

Сначала рассмотрим случай (б). Возьмем $q_0 > p_0$ и $\beta' = \min\{\beta^* : \beta^* \in \mathcal{P}_{q_0}, \beta^* > \beta\}$. Из определения (29) имеем

$$\sum_{n \in H_{km}, [n]<q_0} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| < \sum_{[n]<q_0, n \in G_2^k} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| \le 1, \quad t \in [\beta, \beta']. \tag{39}$$

Учитывая (8) и (9) имеем

$$\max_{t \in J_{km}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| \le \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} \left| a_n \widetilde{f_n}(\beta) \right|, \quad n \in H_{km}. \tag{40}$$

Из (39) и (40) следует, что

$$\sum_{[n]<q_0, n \in H_{km}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| < \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}, \quad t \in J_{km}.$$

Так как q_0 произвольно, то

$$\sum_{n \in H_{km}} \left| a_n \widetilde{f_n}(t) \right| < \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}, \quad t \in J_{km}. \tag{41}$$

Имеем $\sum_{n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| < 1$, для $t \in \Delta_k \setminus \bigcup_m J_{km}$. Следовательно, достаточно доказать (37) на $\bigcup_m J_{km}$. Пусть $J_{km} \in \mathcal{I}_{p_0}$ фиксировано. Из определения (29) следует, что $\sum_{[n]<p_0, n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| < 1$ на J_{km}. Из (6) имеем

$$\sum_{[n]=p_0, n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| < 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^k. \tag{38}$$

Положим

$$H_{km} = \left\{n \in G_2^k : [n] > p_0, \ \{n\} \text{ находится правее } J_{km}\right\},$$

$$L_{km} = \left\{n \in G_2^k : [n] > p_0, \ \{n\} \text{ находится левее } J_{km}\right\}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{[n]>p_0, n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| = \sum_{n\in H_{km}}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| + \sum_{n\in L_{km}}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|.$$

Пусть $J_{km} = [\alpha, \beta]$. Возможны два случая :

(а) существуют $\beta^* > \beta$ и q такие, что $[\beta, \beta^*] = J_{kq}$;

(б) для любых $\beta^* > \beta$ и q имеем $[\beta, \beta^*] \neq J_{kq}$.

Сначала рассмотрим случай (б). Возьмем $q_0 > p_0$ и $\beta' = \min\{\beta^* : \beta^* \in \mathcal{P}_{q_0}, \beta^* > \beta\}$. Из определения (29) имеем

$$\sum_{n\in H_{km}, [n]<q_0}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| < \sum_{[n]<q_0, n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| \le 1, \quad t \in [\beta, \beta']. \tag{39}$$

Учитывая (8) и (9) имеем

$$\max_{t\in J_{km}}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| \le \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left|a_n\widetilde{f_n}(\beta)\right|, \quad n \in H_{km}. \tag{40}$$

Из (39) и (40) следует, что

$$\sum_{[n]<q_0, n\in H_{km}}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| < \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}, \quad t \in J_{km}.$$

Так как q_0 произвольно, то

$$\sum_{n\in H_{km}}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| < \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} \quad t \in J_{km}. \tag{41}$$

Возвращаясь к случаю (а), положим $[\beta,\beta^*] = J_{kq}$, $\beta^* \in \mathcal{P}_{q_0}$ и $\beta^* \notin \mathcal{P}_l$ при $l < q_0$. Достаточно рассмотреть случай $p_0 < q_0$. Имеем (39) для $t \in J_{kq}$, откуда используя (40) получим

$$\sum_{[n]<q_0, n\in H_{km}} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| < \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}, \quad t \in J_{km}. \tag{42}$$

Имеем также (38) для q_0 вместо p_0. При $\mu > q_0$ число разделяющих точек в $[\beta,\beta^*]$ соответствует $[n] = \mu+1$, увеличенное вдвое для $[n] = \mu$. Так как $\{n\}$ находится правее β^*, то имеем

$$\begin{aligned} \sum_{[n]>q_0, n\in H_{km}} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| &= \sum_{\mu=q_0+1}^{\infty} \sum_{[n]=\mu, n\in H_{km}} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| \le \\ &\le \sum_{\mu=q_0+1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{2^{\mu-q_0}} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^{k}\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Повторяя вышеизложенное для L_{km}, и используя (39) – (43), получим (37). Выберем $M > N$ настолько большим, что

$$\sum_{n\le M, n\in G_2^k} \left|a_n \widetilde{f_n}(t)\right| \ge 1, \quad t \in S_k \subset \Delta_k \cap (E\setminus A). \tag{44}$$

Имеем $m(S_k) > \frac{1}{2} m(\Delta_k \cap (E\setminus A))$ для всех Δ_k и

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{n=N}^{M} E_n\right) < \frac{1}{8}\min_k \left|I_{[n],k}\right|. \tag{45}$$

Обозначим $P(t) = \sum_{n=N}^{M} a_n f_n(t)$ и $P_k(t) = \sum_{n<M, n\in G_2^k} a_n f_n(t)$. Пусть $P_k^\sigma(t)$ – перестановка $P_k(t)$, при которой точки τ_n^* как и в Лемме 1 расположены в порядке возрастания. Положим

$$P(t) = \sum_k P_k^\sigma(t) + \left(P(t) - \sum_k P_k^\sigma(t)\right).$$

Пусть теперь $\Delta \in \mathcal{I}_{[n]}$ есть некоторый интервал, удовлетворяющий $m(\Delta\cap E) > \frac{1}{2}m(\Delta)$. Возможны два случая :

(а) $m(\Delta\cap A) > \frac{1}{4}m(\Delta)$ и (б) $m(\Delta\cap(E\setminus A)) > \frac{1}{4}m(\Delta)$.

Для случая (а) согласно (45) имеем

$$\mu\left(\Delta \bigcap \bigcup_{n=N}^{M} E_n\right) > m(\Delta\cap A) - \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=N}^{M} E_n\right) > \frac{1}{8}m(\Delta).$$

Далее, так как f_n линейна на отрезках из $\mathcal{I}_n$, в силу (20) получим

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{M}\left\{t\in\Delta : |a_n f_n(t)| > (\sqrt{2}-1)\right\}\right) > \frac{1}{24}m(\Delta),$$

что доказывает Лемму 5.

Рассмотрим случай (б). Заметим, что теперь Δ совпадает с одним из Δ_k. Для соответственного $P_k^\sigma(t)$ имеем

$$\delta(P^\sigma(t)) \geq \delta(P_k^\sigma(t)) \geq \sum_{n\in G_2^k,\tau_n^*<t,n\leq M} a_n f_n(t). \tag{46}$$

Интегрируя (46) и используя Лемму 1, получим

$$\int_{\Delta_k}\delta(P_k^\sigma(t))\,dt \geq \int_{\Delta_k}\sum_{n\in G_2^k,\tau_n^*<t,n\leq M} a_n f_n(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n\leq M,n\in G_2^k}\int_{\Delta_k\cap\{t>\tau_n^*\}} a_n f_n(t)\,dt \geq$$

$$\geq C_3\sum_{n\in G_2^k,n\leq M}\int_{\Delta_k}|a_n f_n(t)|\,dt = C_3\sum_{n\leq M,n\in G_2^k}\int_{\Delta_k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\,dt. \tag{47}$$

Из (45) следует, что

$$\mu\left\{t\in\Delta_k : \sum_{n\leq M,n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right|\geq 1\right\} \geq m(S_k) \geq \frac{1}{2}\mu\left(\Delta_k\bigcap(E\setminus A)\right) \geq \frac{1}{8}m(\Delta_k). \tag{48}$$

Из (47) и (48) получим, что

$$\int_{\Delta_k}\delta(P_k^\sigma(t))\,dt \geq \frac{C_3}{8}m(\Delta_k). \tag{49}$$

Полагая $F_k = \{t\in\Delta_k :\ \delta(P_k^\sigma(t))\geq C_3/16\}$, из (49) получим

$$\int_{F_k}\delta(P_k^\sigma(t))\,dt \geq \frac{C_3}{16}m(\Delta_k). \tag{50}$$

С другой стороны, из (4) и (37) следует, что

$$\delta\left(P_k^\sigma(t)\right) \leq \sum_{[n]\leq M,n\in G_2^k}|a_n f_n(t)| \leq 3\sum_{[n]\leq M,n\in G_2^k}\left|a_n\widetilde{f_n}(t)\right| \leq 3C_{11},\quad t\in\Delta_k$$

Следовательно

$$\int_{F_k}\delta(P_k^\sigma(t))\,dt \leq 3C_{11}m(F_k).$$

Наконец, учитывая (50), получим $m(F_k)\geq\frac{C_3}{48C_{11}}m(\Delta_k)$. Лемма 5 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Предположим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(t)| = \infty, \quad t \in E.$$

Согласно Лемме 5 существует последовательность N_k такая, что для $P_k(t) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n f_n(t)$ существует его перестановка $P_k^{\sigma}(t)$, для которой из $\Delta \in \mathcal{I}_{[N_k]}$ и $m(\Delta \cap E) > \frac{1}{2} m(\Delta)$ следует

$$\mu \{t \in \Delta : \delta(P_k^{\sigma}(t)) > C_6\} > C_6 m(\Delta).$$

Покажем, что $P^{\sigma}(t) = \sum_k P_k^{\sigma}(t)$ расходится п.в. на E. Допустим обратное, т.е. что $P^{\sigma}(t)$ сходится на некотором подмножестве $F \subset E$, $m(F) > 0$. Можно предположить, что $P^{\sigma}(t)$ сходится на F равномерно, т.е. существует M такая, что из $k > M$ следует $\delta(P_k^{\sigma}(t)) < C_6$, $t \in F$. Далее, существуют $k > M$ и $\Delta \in \mathcal{I}_{[N_k]}$ такие, что

$$m(\Delta \cap F) > \left(1 - \frac{C_6}{2}\right) m(\Delta). \tag{51}$$

Имеем $m(\Delta \cap E) > \frac{1}{2} m(\Delta)$ и, следовательно, $\mu \{t \in \Delta : \delta(P_k^{\sigma}(t)) > C_6\} > C_6 m(\Delta)$, что эквивалентно $m(\Delta \setminus F) > C_6 m(\Delta)$, которое находится в противоречии с (51). Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper proves equivalence of absolute and unconditional convergence almost everywhere of series by strongly regular general Franklin system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, "Об абсолютной и безусловной сходимости", Усп. Мат. Наук, том 22, № 3, стр. 240 – 242, 1967.
2. Г. Г. Геворкян, "Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 45, № 3, стр. 30 - 42, 1989
3. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math. vol. 25, pp. 129 – 143, 1997.
4. G. Gevorkian, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissert. Math., vol. 374, Warszawa, 1998.
5. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.
6. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.

14 Февраля 1999

Ереванский государственный университет

ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В статье изучаются алгебры обобщенных аналитических (по Аренс–Зингеру) функций. Существенно, что они являются равномерными алгебрами на компактных абелевых группах, порожденных полугруппой характеров, определяющих полный архимедовый порядок на дуальной группе. Примеры : алгебра всех непрерывных функций на единичной окружности, имеющих непрерывное аналитическое продолжение на единичный диск в комплексной плоскости и алгебра всех непрерывных почти–периодических функций на действительной оси, допускающих непрерывное аналитическое почти–периодическое продолжение на верхнюю полуплоскость. Статья описывает примарные идеалы таких алгебр и в явном виде представляет меры, ортогональные алгебрам обобщенных аналитических функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – аддитивная подгруппа действительных чисел $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. Пусть G – группа характеров группы Γ. По теореме двойственности Понтрягина группа G компактна и группа ее характеров изоморфна Γ. Для $a \in \Gamma$ пусть $\alpha(a) = \chi^a(\alpha)$, $\alpha \in G$ – соответствующий характер. Обозначим через σ нормированную меру Хаара группы G. Каждая функция $f \in L^1(G, \sigma)$ представляется в виде формального ряда Фурье $f(\alpha) \approx \sum_{a\in\Gamma} c_a^f \chi^a(\alpha)$ с коэффициентами Фурье $c_a^f = \int_G f(\alpha)\overline{\chi}^a(\alpha)\, d\sigma(\alpha)$.

Множество $\mathrm{Sp}(f)$ тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f \neq 0$, называется **спектром функции** f. Функция $f \in L^1(G, \sigma)$ называется **обобщенной аналитической функцией**, если $\mathrm{Sp}(f)$ содержится в $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Пусть A – алгебра всех непрерывных обобщенных аналитических функций. Заметим, что A является равномерной алгеброй относительно нормы $\|f\| = \sup_{\alpha\in G} |f(\alpha)|$, $f \in A$.

Проблема описания идеалов алгебры A является одной из самых старых задач теории обобщенных аналитических функций. Она полностью решена в случае, когда группа Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbf{Z}$, т.е. когда A является диск-алгеброй (см. [1]). В этой статье описываются все примарные идеалы алгебры A в случае, когда группа Γ не изоморфна $\mathbf{Z}$.

Статья состоит из 6 параграфов. В §1 приводится перечень необходимых понятий и свойств обобщенных аналитических функций. В §2 исследуются меры, ортогональные максимальному идеалу алгебры A, порожденному характерами χ^a, $a > 0$. Основные результаты статьи содержатся в §3–§5, где дается описание примарных идеалов алгебры A. Одному из примеров применения результатов статьи посвящен §6.

§1. ОБОБЩЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе приведем те сведения из теории обобщенных функций, которыми будем пользоваться в этой работе. Доказательства встречающихся здесь утверждений можно найти в [2] — [5].

Пусть Δ – пространство максимальных идеалов алгебры A. Известно, что Δ получается из декартова произведения $G \times [0,1]$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$. В дальнейшем знак $*$ будет обозначать эту точку. Образ G при естественном вложении в Δ отождествляется с множеством $G \times \{1\}$. Преобразование Гельфанда алгебры A есть равномерная алгебра $\hat{A}$, определенная на Δ, порожденная функциями χ^a, $a \in \Gamma_+ : \hat{\chi}^a(\alpha r) = \chi^a(\alpha) r^a$. Отображение $\alpha_t(a) = e^{ita}$ определяет изоморфизм между $\mathbb{R}$ и некоторой подгруппой группы G, которую также будем обозначать через $\mathbb{R}$.

Сужение конечной линейной комбинации $f = \sum_{a \in \Gamma_+} c_a^f \chi^a$ на $\mathbb{R} \subset G$ есть непрерывная почти-периодическая функция $f(t) = \sum_{a \in \Gamma_+} c_a^f e^{iat}$. Поэтому отображение $t \mapsto \alpha_t$ порождает изоморфизм между A и алгеброй $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ всех тех непрерывных почти-периодических функций, определенных на $\mathbb{R}$, формальный ряд Фурье которых имеет вид $\sum\limits_{a \in \Gamma_+} c_a^f e^{iat}$. Множество $\mathrm{Sp}(f) = \{a \in \Gamma_+ : c_a^f \neq 0\}$ называется спектром функции $f \in \Pi_\Gamma(\mathbb{R})$. Отметим, что $\mathrm{Sp}(f(\alpha)) = \mathrm{Sp}(f(t))$. Пусть $D = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ – верхняя полуплоскость в $\mathbf{C}$ и $D^\circ = D \setminus \mathbb{R}$. Любая функция из $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ непрерывно расширяется на D до ограниченной функции, аналитической на D°.

Для простоты предположим, что $2\pi \in \Gamma$. Пусть K – компактная подгруппа группы G, состоящая из всех тех $\alpha \in G$, для которых $\chi^{2\pi}(\alpha) = 1$. Очевидно, что

$\alpha_n \in K$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Декартово произведение $X = K \times \mathbb{R}$ можно наделить структурой локально-компактной абелевой группы. Определим гомоморфизм $p : X \to G$, полагая $p(\alpha, t) = \alpha \cdot \alpha_t$. Подгруппа $F = \{(\alpha_n, -n) \in X : n \in \mathbb{Z}\}$ группы X является ядром этого гомоморфизма. При каждом $n \in \mathbb{Z}$ множество $X_n = K \times [n, n+1)$ есть фундаментальная область для p. Следовательно, $p : X \to G$ – счетно-листное неразветвленное накрытие. Группа G получается из $K \times [n, n+1]$ с помощью отождествления точки $(\alpha, n+1)$ с $(\alpha \cdot \alpha_1, n)$.

Пусть $B(D)$ — алгебра всех непрерывных ограниченных функций на D, аналитических на D°. В силу принципа Фрагмена-Линделефа

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \qquad f \in B(D). \tag{1.1}$$

Поэтому сужение $B(\mathbb{R})$ алгебры $B(D)$ на $\mathbb{R}$ замкнуто в sup-норме. Конформное отображение $w(t) = (i - t)/(i + t)$ отображает $\mathbb{R}$ в единичную окружность T. Пусть $H^1(T)$ – пространство Харди на T, а H^1 – пространство всех тех функций из $L^1\left(\mathbb{R}, \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$, которые представимы в виде суперпозиции $g \circ w(t)$, $g \in H^1(T)$. Воспользовавшись теоремой Ф. и М. Риссов о мерах, ортогональных диск-алгебре, можно показать, что пространство $B^\perp(\mathbb{R})$ всех мер на $\mathbb{R}$, ортогональных к $B(\mathbb{R})$, совпадает с $H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$, где $H_0^1 = \dfrac{i-t}{i+t} H^1$.

Рассмотрим на декартовом произведении $Y = K \times D$ алгебру $B(Y)$ всех тех непрерывных функций, которые при каждом фиксированном $\alpha \in K$ принадлежат $B(D)$. Пусть $B(X)$ есть сужение $B(Y)$ на X. Из (1.1) следует, что

$$\sup_{y \in Y} |f(y)| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in B(Y).$$

Поэтому $B(Y)$ и $B(X)$ являются равномерными алгебрами.

Обозначим через $H_0^1(X)$ семейство всех мер на X вида

$$g(\alpha, t)\nu(\alpha) \times \frac{dt}{1+t^2}, \tag{1.2}$$

где $\nu(\alpha)$ – вероятностная мера на K, $g(\alpha, t) \in L^1\left(\nu(\alpha) \times \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$ и для почти всех $\alpha \in K$ функция $g_\alpha(t) = g(\alpha, t)$ принадлежит H_0^1. Обозначим через $B^\perp(X)$ пространство мер на X, ортогональных к $B(X)$.

Лемма 1.1. $B^\perp(X) = H_0^1(X)$.

Доказательство : Пусть $C(K)$ – алгебра всех непрерывных на K функций. Алгебру $C(K)$ можно вложить в $B(X)$, полагая $f(\alpha, t) = f(\alpha)$. Тогда, по одному из вариантов теоремы Крейна–Мильмана, каждую меру $\mu \in B^{\perp}(X)$ можно представить в виде $\mu = \nu(\alpha) \times h_\alpha(t)$, где $\nu(\alpha)$ -вероятностная мера на K, а мера $h_\alpha(t)$ сосредоточена на $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha\} \times \mathbb{R}$ и принадлежит $B^{\perp}(X)$ для почти всех $\alpha \in K$. Так как сужение $B(X)$ на $\mathbb{R}_\alpha$ есть $B(\mathbb{R})$, то $h_\alpha(t) \in H_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Отсюда получаем, что $\mu \in H_0^1(X)$.

Обратно, пусть $\mu \in H_0^1(X)$, $\mu = g(\alpha,t)\nu(\alpha) \times \dfrac{dt}{1+t^2}$ и $f \in B(X)$. Тогда

$$\int_X f\,d\mu = \int_K \left(\int_{\mathbb{R}} f(\alpha,t) g(\alpha,t) \frac{dt}{1+t^2} \right) d\nu(\alpha).$$

Внутренний интеграл равен нулю для почти всех $\alpha \in K$ по мере $\nu(\alpha)$. Поэтому $\mu \in B^{\perp}(X)$. Следовательно, $H_0^1(X) = B^{\perp}(X)$. Лемма 1.1 доказана.

Замечание 1. Покажем как по $\mu \in B^{\perp}(X)$ найти соответствующую ей вероятностную меру $\nu(\alpha)$ на K. Вначале построим вероятностную меру μ' на X : $\mu' = |\mu|/||\mu||$. Эта мера определяет на $C(K) \subset B(X)$ положительный функционал $F(f) = \int_X f\,d\mu'$, $f(\alpha) \in C(K)$, с нормой равной единице 1. По теореме Ф. Рисса существует вероятностная мера ν на K такая, что $F(f) = \int_K f\,d\nu$. Мера ν и есть искомая. Поскольку при $a \in \Gamma_+$ имеем $\chi^a \circ p(\alpha,t) = \chi^a(\alpha)e^{iat} \in B(X)$, то отображение $p : X \to G$ порождает вложение A в $B(X)$.

Лемма 1.2. $A^\circ = \{f \circ p : f \in A\}$ **совпадает с подалгеброй всех тех функций из** $B(X)$, **инвариантных относительно сдвигов, индуцированных элементами группы** $F = \{(\alpha_n, -n) \,.\, n \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство : Поскольку F есть ядро гомоморфизма $p : X \to G$, алгебра A° инвариантна относительно F. Пусть $f^\circ \in B(X)$ есть F-инвариантная функция. Так как фактор-группа X/F есть G, то найдется непрерывная функция f на G такая, что $f^\circ = f \circ p$. Покажем, что $f \in A$. Отметим, что гомоморфизм p осуществляет изометрический изоморфизм между равномерными алгебрами $[A^\circ; f^\circ] \subset B(X)$ и $[A; f]$ на G, где $[A; h]$ - алгебра, порожденная алгеброй A и функцией h. Известно (см. [3], стр. 220), что либо $[A; f] = A$, либо $[A; f] = C(G)$, где $C(G)$ есть алгебра всех непрерывных функций на G. Если $[A; f] = C(G)$, то $\chi^a \circ p \in B(X)$ для всех $a \in \Gamma$. Так как $\chi^a \circ p(\alpha, t) = \chi^a(\alpha)e^{iat} \notin B(X)$ при $a < 0$, то $[A; f] = A$. Следовательно, $f^\circ \in A^\circ$. Лемма 1.2 доказана.

Отображение $p : X \to G$ можно расширить до отображения $p' : Y \to \Delta^\circ$, $\Delta^\circ = \Delta \setminus \{\circ\}$, полагая $p'(\alpha, z) = \alpha \cdot \alpha_t e^{-y}$, $z = t + iy$. Отметим, что $p' : Y \to \Delta^\circ$ также является счетно-листным безграничным неразветвленным накрытием

Это отображение порождает вложение образа отображения Гельфанда алгебры A в $B(Y)$.

§2. ПРОСТРАНСТВО $I_*^{\perp}$

В этом параграфе исследуются меры на G, ортогональные максимальному идеалу $I_* = \{f \in A : \hat{f}(*) = 0\}$ алгебры A.

Пусть $M(G)$ – пространство всех конечных мер на G. Мера $\mu \in M(G)$ представима на G в виде ряда Фурье–Стилтьеса $\mu \approx \sum_{a\in\Gamma} c_a^\mu \chi^a$ с коэффициентами Фурье–Стилтьеса $c_a^\mu = \int_G \overline{\chi}^a \, d\mu$.

Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^\mu \neq 0$, называется спектром меры μ и обозначается через $\mathrm{Sp}(\mu)$. Мера $\mu \in M(G)$ ортогональна к A тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sp}(\mu) \subset \Gamma_+ \setminus \{0\}$, т.е. если μ является аналитической A-мерой (см. [6]). Для каждой меры $\mu \in M(G)$, можно определить сеть мер $\{\mu_j\} \subset M(G)$ такую, что

a) $\mathrm{Sp}(\mu_j)$ конечен и содержится в $\mathrm{Sp}(\mu)$,

b) $\|\mu_j\| \leq \|\mu\|$, и c) сеть $\{\mu_j\}$ слабо* сходится к мере μ (см. [4]).

Из a) следует, что если μ является аналитической A-мерой, то и μ_j - аналитическая A-мера. Более того, имеем $\mu_j = f_j \cdot \sigma$, где $f_j = \sum_{a\in\Gamma_+} c_a \chi^a$ - конечная линейная комбинация характеров, а σ – нормированная мера Хаара группы G.

Каждое борелевское множество $F \subset X$ можно представить в виде $F = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} F_n$, где $F_n = F \cap X_n$, $X_n = K \times [n, n+1]$. Поэтому меру $\mu \in M(G)$ можно отобразить в локально–конечную меру $\bar{\mu}$ на X, полагая $\bar{\mu}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(p(F_n))$. Отображение $\mu \mapsto \bar{\mu}$ переводит $M(G)$ на пространство $M_F(X)$ всех локально–конечных мер на X, инвариантных относительно сдвигов, индуцированных элементами группы F. Отметим, что $\bar{\sigma} = \tau \times dt$, где σ и τ суть нормированные меры Хаара на группах G и K соответственно.

Пусть $M(X)$ – пространство всех конечных мер на X. Для $\bar{\mu} \in M_F(X)$ мера $\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu}(\alpha, t)$ принадлежит $M(X)$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2}\|\mu\|_G \leq \left\|\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu}\right\|_X \leq 4\|\mu\|_G, \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|_G$ и $\|\cdot\|_X$ – нормы $M(G)$ и $M(X)$ соответственно. Пусть $H_F^1(X)$ - множество всех тех мер $\mu \in M_F(X)$, для которых $\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu} \in H_0^1(X)$. Очевидно, $\bar{\sigma} \in H_F^1(X)$. Следующая лемма устанавливает связь между $H_F^1(X)$ и пространством $A^\perp$ всех мер на G, ортогональных A.

Лемма 2.1. Отображение $\mu \mapsto \bar{\mu}$ переводит $A^{\perp}$ в $H^1_F(X)$.

Доказательство : Из (2.1) следует, что слабая* сходимость сети мер $\{\mu_j\} \subset M(G)$ к мере $\mu \in M(G)$ влечет слабую* сходимость сети мер $\left\{\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu}_j\right\} \subset M(X)$ к мере $\frac{i-t}{i+t}\frac{1}{1+t^2}\bar{\mu} \in M(X)$. Поэтому в силу a) — c), достаточно доказать лемму для тех мер $\mu \in A^{\perp}$, у которых спектр конечен. Пусть $\mu \in A^{\perp}$ и $\mathrm{Sp}(\mu)$ конечен. Имеем $\mu = f \cdot \sigma$, где $f = \sum_{k=1}^{m} c^f_{a_k}\chi^{a_k}$, $a_k > 0$. При каждом фиксированном $\alpha \in K$ функция $\bar{f}(\alpha, t) = f \circ p(\alpha, t)$ приналлежит H^1. Следовательно, $\bar{\mu} = \bar{f}(\alpha, t) \cdot \bar{\sigma} \in H^1_F(X)$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Пространство мер $\Pi^{\perp}_{\Gamma}(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$, ортогональных $\Pi_{\Gamma}(\mathbb{R})$, совпадает с $H^1_0\frac{dt}{1+t^2}$.

Доказательство : Пусть $\mu \in \Pi^{\perp}_{\Gamma}(\mathbb{R})$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iat}\,d\mu = 0, \qquad a \in \Gamma_+. \tag{2.2}$$

Так как Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, то полугруппа Γ_+ плотна в $\mathbb{R}_+$. Поэтому из (2.2) следует,что $\int_{\mathbb{R}} e^{iat}\,d\mu = 0$ для $a \in \mathbb{R}_+$, т.е. преобразование Фурье меры μ равно нулю на $\mathbb{R}_+$. Поэтому $\mu \in H^1_0\frac{dt}{1+t^2}$ (см. [3], стр. 248). Лемма 2.2 доказана.

Следствие 2.3. Сужение $A^{\perp}$ на $\mathbb{R} \subset G$ есть $H^1_0\frac{dt}{1+t^2}$.

Доказательство : следует из равенства $A|_{\mathbb{R}} = \Pi_{\Gamma}(\mathbb{R})$.

Лемма 2.4. Пусть $f(t) \in H^1$ является 1-периодической функцией на $\mathbb{R}$. Если для некоторого $a > 0$ функция $f(t)e^{-iat}$ принадлежит H^1, то $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Доказательство : Функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям леммы для $t \in \mathbb{R}$, можно представить в виде формального ряда Фурье $f(t) \approx c^f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^f_n e^{i2\pi nt}$, где $c^f_n = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}dt$. Ряд Фурье функции $g(t) = f(t)e^{-iat}$ имеет вид

$$g(t) \approx c^f_0 e^{-iat} + \sum_{n=1}^{\infty} c^f_n e^{i(2\pi n - a)t}.$$

Если $g(t) \in H^1$, то $c^f_0 e^{-iat} \in H^1$. Это возможно лишь в случае, когда $c^f_0 = 0$. Лемма 2.4 доказана.

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 2.5. **Пусть $I_*^{\perp}$ – пространство всех мер на G, ортогональных I_*. Тогда $\mu \mapsto \bar{\mu}$ отображает $I_*^{\perp}$ на $H_F^1(X)$.**

Доказательство : Нормированная мера Хаара σ группы G является представляющей мерой для мультипликативного функционала на A, определенного по $*$ (см. [3], стр. 219). Поэтому $I_*^{\perp} = A^{\perp} + \mathbf{C}\sigma$ ($\dim A/I_* = 1$). Линейное отображение $\mu \mapsto \bar{\mu}$ переводит $A^{\perp}$ в $H_F^1(X)$ и $\sigma \mapsto \bar{\sigma} = \tau \times dt \in H_F^1(X)$. Следовательно, $\mu \mapsto \bar{\mu}$ отображает $I_*^{\perp}$ в $H_F^1(X)$.

Пусть теперь мера $\mu \in M(G)$ такова, что $\bar{\mu} \in H_F^1(X)$. Покажем, что $\mu \in I_*^{\perp}$. Пусть

$$\bar{\mu} = f(\alpha, t)\, \nu(\alpha) \times dt, \tag{2.3}$$

где $f_\alpha(t) = f(\alpha, t)$ принадлежит H^1 при почти каждом (относительно ν) фиксированном $\alpha \in K$. Тогда функция

$$f_a(t) = \int_K \chi^a(\alpha) f(\alpha, t)\, d\nu(\alpha) \tag{2.4}$$

принадлежит H^1 для всех $a \in \Gamma$. Мера $\bar{\mu}$ инвариантна относительно сдвигов, индуцированных элементами группы F. Поэтому

$$\bar{\mu} = f(\alpha \cdot \alpha_n, t - n)\, \nu(\alpha \cdot \alpha_n) \times dt, \qquad (\alpha_n, -n) \in F. \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.3) и (2.5), получим $f(\alpha \cdot \alpha_n, t - n)\, \nu(\alpha \cdot \alpha_n) = f(\alpha, t)\, \nu(\alpha)$. Следовательно, $f(\alpha, t + n)\, \nu(\alpha) = f(\alpha \cdot \alpha_n, t)\, \nu(\alpha \cdot \alpha_n)$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_a(t + n) &= \int_K \chi^a(\alpha)\, f(\alpha, t + n)\, d\nu(\alpha) = \int_K \chi^a(\alpha)\, f(\alpha \cdot \alpha_n, t)\, d\nu(\alpha \cdot \alpha_n) = \\ &= \int_K \chi^a(\alpha \cdot \alpha_{-n}) f(\alpha, t)\, d\nu(\alpha). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $\chi^a(\alpha \cdot \alpha_{-n}) = \chi^a(\alpha) e^{-ian}$, то из (2.4) и (2.6) следует, что $f_a(t + n) = e^{-ian} f_a(t)$. Пусть $\varphi_a(t) = e^{iat} f_a(t)$. При $a > 0$ функции e^{iat} и $f_a(t)$ принадлежат H^1. Отсюда следует, что функция $\varphi_a(t)$ принадлежит H^1 и ее период равен 1. Применив Лемму 2.4 к $\varphi_a(t)$ получим $\int_0^1 \varphi_a(t)\, dt = 0$. Таким образом, для $a > 0$ имеем

$$\int_G \chi^a\, d\mu = \int_0^1 \left(\int_K \chi^a(\alpha) f(\alpha, t)\, d\nu(\alpha) \right) dt = \int_0^1 e^{iat} \cdot f_a(t)\, dt = \int_0^1 \varphi_a(t)\, dt = 0.$$

Следовательно $\mu \in I_*^{\perp}$. Теорема 2.5 доказана.

§3. ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ В I.

Пусть I – идеал алгебры A. Обозначим $\mathbf{hull}I$ оболочку идеала I, т.е. $\mathbf{hull}I = \{s \in \Delta : f(s) = 0, \forall f \in I\}$. В этом параграфе мы опишем все примарные идеалы алгебры A, оболочка которых совпадает с $\{*\}$. Все идеалы в этой работе мы считаем замкнутыми.

Определение 3.1. Идеал I алгебры A называется **правонепрерывным**, если множество $\bigcup_{a\in\Gamma_+\setminus\{0\}} \chi^a \cdot I$ плотно в I. Идеал I называется **левонепрерывным**, если множество $\bigcap_{a\in\Gamma_+\setminus\{0\}} \overline{\chi}^a \cdot I$ совпадает с I.

Рассмотрим типичные примеры идеалов алгебры A. Пусть $I_s = \{f \in A : f(s) = 0\}$, $I_* = \{f \in A : f(*) = 0\}$, $I_b^+ = \overline{\bigcup_{a>b} \chi^a \cdot I_*}$ и $I_b^- = \bigcap_{a<b} \chi^a \cdot I_*$ $(b \in \mathbb{R}_+)$.

Лемма 3.2. **a) Идеалы I_* и I_b^+ – правонепрерывные.**
b) Идеал I_b^- – левонепрерывный. **c) Если $b \in \Gamma_+$, то $I_b^+ = \chi^b \cdot I_*$ и $I_b^- = \chi^b \cdot A$.**

Доказательство : a) Если $f \in I_*$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $g = \sum_{a>0} c_a^f \chi^a$ такая, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Очевидно $g \in I_0^+$. Из замкнутости I_0^+ и произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $f \in I_0^+$. Отсюда получаем $I_0^+ = I_*$. Так как $\chi^a \cdot I_*$ – правонепрерывный идеал, то I_b^+ также правонепрерывный. Утверждение b) следует из Определения 3.1. Чтобы доказать c) заметим, что если $b \in \Gamma_+$, то $\chi^b \cdot I_* = \overline{\bigcup_{a>0} \chi^{b+a} \cdot I_*} = \overline{\bigcup_{a>b} \chi^a \cdot I_*} = I_b^+$. Аналогично доказывается равенство $I_b^- = \chi^b \cdot A$. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.3. **Пусть J – примарный идеал алгебры A, удовлетворяющий условию $\mathrm{hull}J = \{*\}$. Тогда найдется $b \in \mathbb{R}_+$ такое, что либо $J = I_b^-$, либо $J = I_b^+$.**

Для доказательства Теоремы 3.3 нам понадобятся два утверждения из теории аналитических функций.

Пусть μ – положительная мера на $\mathbb{R}$, сингулярная относительно меры Лебега. Тогда $\exp\left[-i\int_{\mathbb{R}} \frac{tz+1}{z-t}\, d\mu(t)\right]$ является сингулярной внутренней функцией на D^*.

Как хорошо известно (см. [1]) функцию $f \in H^1$, $f \neq 0$, определенную на D, можно факторизавать

$$f(z) = c \cdot e^{i a_f z} \cdot B_f(z) \cdot \mathrm{sing}_f(z) \cdot F_f(z), \qquad |c| = 1, \tag{3.1}$$

где $a_f \geq 0$, $B_f(z)$ является произведением Бляшке, построенным по нулям функции $f(z)$, $\mathrm{sing}_f(z)$ – сингулярная внутренняя функция, а $F_f(z)$ – внешняя функция. Напомним также, что если f – непрерывная функция, то носитель сингулярной меры μ_f, определяющей $\mathrm{sing}_f(z)$, содержится в множестве нулей функции f на $\mathbb{R}$. В дальнейшем число a_f из (3.1) будет обозначаться через $S(f)$.

Лемма 3.4. Расширение функции $f \in \Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ на D представимо в виде

$$f(z) = c \cdot e^{ia_f z} \cdot B_f(z) \cdot \mathrm{sing}_f(z) \cdot F_f(z), \qquad |c| = 1, \tag{3.2}$$

где $a_f = \inf \mathrm{Sp}(f) = S(f)$.

Доказательство : Так как $\Pi_\Gamma(\mathbb{R}) \subset H^1$, то в силу (3.1), достаточно показать, что $S(f) = \inf \mathrm{Sp}(f)$. Напомним одно свойство почти-периодических аналитических функций (см. [7], стр. 328) : функция $f(z)/e^{ibz}$ ограничена в верхней полуплоскости тогда и только тогда, когда $b \leq a_0 = \inf \mathrm{Sp}(f)$. Так как все функции в (3.2) ограничены в D (см. [1]), то $a_0 \geq a_f$. Функция $g(t) = f(t)/e^{ia_f t}$ принадлежит $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ и $0 \leq S(g) = a_f - a_0$. Поэтому $a_f \geq a_0$. Сравнивая два неравенства, получим $a_f = a_0$. Лемма 3.4 доказана.

Следствие 3.5. Для любой функции $f \in A$ функцию $\bar{f}(\alpha, t) = f \circ p(\alpha, t)$ можно представить на X в виде

$$\bar{f}(\alpha, t) = e^{iat} \cdot \chi^a(\alpha) \cdot g(\alpha, t), \tag{3.2'}$$

где $a = \inf \mathrm{Sp}(f)$, для каждого $\alpha \in K$ функция $g_\alpha(t) = g(\alpha, t)$ принадлежит H^1 и $S(g_\alpha) = 0$.

Доказательство : Для любого $\alpha \in K$ функция $\bar{f}_\alpha(t) = \bar{f}(\alpha, t)$ принадлежит $\Pi_\Gamma(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Sp}(\bar{f}_\alpha) = \mathrm{Sp}(f)$ (см. §1). Поэтому $\mathrm{Sp}(\bar{f}_\alpha)$ не зависит от α. Применив Лемму 3.4 получим (3.2').

Пусть $B_1(z)$ и $B_2(z)$ – произведения Бляшке на D. Тогда частное $B_1(z)/B_2(z)$ является произведением Бляшке тогда и только тогда, когда множество нулей (с учетом кратности) $B_2(z)$ содержится в множестве нулей $B_1(z)$. Пусть $\mathrm{sing}_1(z)$ и $\mathrm{sing}_2(z)$ – две сингулярные внутренние функции на D, а μ_1 и μ_2 суть положительные сингулярные меры на $\mathbb{R}$, порождающие $\mathrm{sing}_1(z)$ и $\mathrm{sing}_2(z)$, соответственно. Функция $\mathrm{sing}_1(z)/\mathrm{sing}_2(z)$ является внутренней функцией на D тогда и только тогда, когда разность $\mu_1 - \mu_2$ есть положительная мера на $\mathbb{R}$ (см. [1]).

Лемма 3.6. Пусть B' – такое подмножество в $B(D)$, что для любого $z \in D$ существует функция $f \in B'$, не равная нулю в точке z. Тогда если $u(t) \in L^\infty(dt)$ – унимодулярная функция ($|u(t)| = 1$ почти всюду) и $f(t)u(t) \in H^1$ для всех $f(t) \in B'(\mathbb{R}) = B'|_{\mathbb{R}}$, то найдется $a \in \mathbb{R}$ такое, что для $u'(t) = e^{-iat}u(t)$ будем иметь $u' \in H^1$ и $S(u') = 0$.

Доказательство : Пусть $f \in B'$, $f \neq 0$. Факторизуя функции f и $fu \in H^1$, продолжим u на D до мероморфной функции

$$u(z) = e^{iaz}\frac{B_1(z)\mathrm{sing}_1(z)}{B_2(z)\mathrm{sing}_2(z)}, \tag{3.3}$$

где

$$a = S(fu) - S(f), \qquad \frac{B_1(z)}{B_2(z)} = \frac{B_{fu}(z)}{B_f(z)}, \qquad \frac{\mathrm{sing}_1(z)}{\mathrm{sing}_2(z)} = \frac{\mathrm{sing}_{fu}(z)}{\mathrm{sing}_f(z)}. \tag{3.4}$$

При этом предполагается, что $\dfrac{B_1(z)}{B_2(z)}$ и $\dfrac{\mathrm{sing}_1(z)}{\mathrm{sing}_2(z)}$ суть несократимые дроби, т.е. $B_1(z)$ и $B_2(z)$ не имеют общих нулей, а меры μ_1 и μ_2, определяющие $\mathrm{sing}_1(z)$ и $\mathrm{sing}_2(z)$, соответственно, взаимно сингулярны. Покажем, что $B_2(z) = \mathrm{sing}_2(z) = 1$. Допустим противное : пусть $B_2(z) \neq 1$, т.е. $B_2(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in D^\circ$. Пусть $g \in B'$ и $g(z_0) \neq 0$. Тогда функция $B_g(z)/B_2(z)$ не является произведением Бляшке. Поэтому $gu \notin H^1$, т.е. приходим к противоречию. Предположим теперь, что $\mathrm{sing}_2(z) \neq 1$ и $t_0 \in \mathrm{supp}\mu_2$. Пусть $g \in B'$, $g(t_0) \neq 0$. Тогда имеем $t_0 \notin \mathrm{supp}\mu_g$, где μ_g – мера, определяющая $\mathrm{sing}_g(z)$. Поэтому $\mathrm{sing}_g(z)/\mathrm{sing}_2(z)$ не будет сингулярной внутренней функцией. Следовательно, $gu \notin H^1$. Таким образом, $B_2(z) = \mathrm{sing}_2(z) = 1$. Отсюда заключаем, что $u'(t) \in H^1$ и $S(u') = 0$, где $u'(t) = e^{-iat}u(t)$. Лемма 3.6 доказана.

Следствие 3.7. Пусть $h \in L^1\left(\mathbb{R}, \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$, $h \neq 0$. Предположим, что $f(t)h(t) \in H^1$ для всех $f \in B'$. Тогда

$$h(t) = h'(t)e^{iat}, \tag{3.5}$$

где $h'(t) \in H^1$ и $S(h') = 0$.

Доказательство : Известно (см. [1], стр. 189), что положительная функция $g \in L^1\left(\mathbb{R}, \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$ является модулем некоторой функции из H^1 тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbb{R}} \log g(t)\, \dfrac{dt}{1+t^2} > -\infty$. Для $f \in B'$, $f \neq 0$ имеем

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}} \log|f(t)h(t)|\,\frac{dt}{1+t^2} = \int_{\mathbb{R}} \log|f(t)|\,\frac{dt}{1+t^2} + \int_{\mathbb{R}} \log|h(t)|\,\frac{dt}{1+t^2}.$$

Так как первый интеграл в правой части последнего равенства конечен, то второй интеграл также конечен. Поэтому найдется внешняя функция $F \in H^1$ такая, что $|F(t)| = |h(t)|$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $h(t) = F(t)u(t)$, где $u(t)$ – унимодулярная функция, удовлетворяющая условиям Леммы 3.6. Следствие 3.7 доказано.

Следствие 3.8. Число a в (3.5) удовлетворяет неравенству $-a \le S(B') = \inf_{f \in B'} S(f)$. В частности, $h \in H^1$ при $S(B') = 0$.

Доказательство : Так как $S(h') = 0$ и $f(t)h'(t)e^{iat} \in H^1$ для $f \in B'$, то из (3.1) следует, что $a_f + a \ge 0$. Поэтому $a_f \ge -a$ для каждой функции $f \in B'$, $f \ne 0$. Следствие 3.8 доказано.

В дальнейшем для любого идеала J алгебры A число $\inf_{f \in J, f \ne 0} \inf \mathrm{Sp}(f)$ будем обозначать либо через a_J, либо $S(J)$.

Доказательство Теоремы 3.3 : Пусть J – такой примарный идеал алгебры A, что $\mathrm{hull} J = \{*\}$. Пусть $f \in J$, $f \ne 0$ и $\mu \in J^{\perp}$. Мера $f \cdot \mu$ принадлежит $I_*^{\perp}$. Тогда по Теореме 2.5 получаем $\overline{f \cdot \mu} = (f \cdot \mu) \circ p \in H^1_F(X)$. Следовательно, мера $\overline{f \cdot \mu}$ имеет вид

$$\overline{f \cdot \mu}(\alpha, t) = h^f(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt, \tag{3.6}$$

где функция $h^f_\alpha(t) = h^f(\alpha, t)$ принадлежит H^1 для почти каждого (относительно меры $\nu(\alpha)$) фиксированного $\alpha \in K$. Так как $\overline{f \cdot \mu} = \bar f \cdot \bar\mu$ ($\bar f = f \circ p$, $\bar\mu = \mu \circ p$) получаем $\bar\mu(\alpha, t) = h(\alpha, t) \cdot \nu(\alpha) \times dt$, где $h(\alpha, t) = h^f(\alpha, t)/\bar f(\alpha, t)$. Положим $h_\alpha(t) = h(\alpha, t)$ и $\bar f_\alpha(t) = \bar f(\alpha, t)$. Из (3.6) следует, что для всех $f \in J$ и почти всех α (относительно ν) имеем

$$f_\alpha h_\alpha \in H^1. \tag{3.7}$$

Так как $p(Y) = \Delta \setminus \{*\}$ и $\mathrm{hull} J = \{*\}$, сужение $\bar J = \{f \circ p : f \in J\}$ на $D_\alpha = \{\alpha\} \times D$ при каждом фиксированном α удовлетворяет утверждению Леммы 3.6. Применив Следствие 3.7 к (3.7) получим $h_\alpha(t) = h'_\alpha(t)e^{ia_\alpha t}$, где $h'_\alpha \in H^1$ и $S(h'_\alpha) = 0$ для почти всех α. Согласно Следствию 3.8, $S(f_\alpha) \ge -a_\alpha$ для почти всех α. Так как $S(f_\alpha) = \inf \mathrm{Sp}(f)$ не зависит от $\alpha \in K$, то $a_J \ge -a_\alpha$ для почти всех α. Следовательно, $\bar\mu(\alpha, t) = h'(\alpha, t)e^{ia_\alpha t} \cdot \nu(\alpha) \times dt$, где $h'(\alpha, t) = h'_\alpha(t) \in H^1$ и $a_J \ge -a_\alpha$ для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν. Таким образом, из $a > a_J$ следует $a + a_\alpha > 0$, и следовательно, мера $\bar\mu^a(\alpha, t) = \chi^a(\alpha)e^{iat} \cdot \bar\mu(\alpha, t)$ принадлежит $H^1_F(X)$, т.е. $\mu^a = \chi^a \cdot \mu$ принадлежит $I_*^{\perp}$. Пусть $b > a_J$. Так как

Γ плотно в $\mathbb{R}$, то существуют $c, a \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ такие, что $b = a + c$, $a > a_J$. Так как $\mu^a \in I_*^\perp$, то имеем $0 = \int_G \chi^c d\mu^a = \int_G \chi^b \, d\mu$. Так как $\mu \in J^\perp$ произвольно, то $\chi^b \in J$ и $I_{a_J}^+ \subset J$. Для завершения доказательства теоремы рассмотрим два случая :

1) для любого $f \in J$ число a_J не содержится в $\mathrm{Sp}(f)$;

2) существует функция $f \in J$ такая, что $a_J \in \mathrm{Sp}(f)$.

Случай 1). Для заданных $f \in J$ и $\varepsilon > 0$, выберем $g \in A$ так, чтобы $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi^{a_i}$, $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathrm{Sp}(f)$ и $\|f - g\|_G < \varepsilon$. Существование функции g следует из равномерной сходимости сумм Бохнера–Фейера к f (см. [7], стр. 66). Так как $a_i \in \mathrm{Sp}(f)$ $(1 \le i \le n)$, то $a_i > a_J$. Поэтому $\chi^{a_i} \in I_{a_J}^+$. Отсюда $g \in I_{a_J}^+$. Из замкнутости $I_{a_J}^+$ и произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $f \in I_{a_J}^+$. Таким образом, $J = I_{a_J}^+$.

Случай 2). Пусть $f \in J$ такая, что $a_J \in \mathrm{Sp}(f)$. Покажем, что $J = \chi^{a_J} \cdot A$. Так как $a_J \in \mathrm{Sp}(f)$ и $a_J = \inf \mathrm{Sp}(f)$, то по теореме Безиковича (см. [4]) получаем $f = \chi^{a_J} g$, где $g \in A$, $g(*) \neq 0$. Рассмотрим идеал $J' = g \cdot A + J$ алгебры A. Поскольку $\mathrm{hull} J = \{*\}$ и $g(*) \neq 0$, то идеал J' совпадает с A (см. [3], стр. 13). Поэтому найдутся $h \in A$ и $\varphi \in J$ такие, что $gh + \varphi = e$, где e – единица алгебры A. Умножая последнее равенство на χ^{a_J}, получим $f \cdot h + \chi^{a_J} \cdot \varphi = \chi^{a_J}$. Так как функции f и φ из J, то $\chi^{a_J} \in J$, $\chi^{a_J} \cdot A \subset J$. Пусть $g \in J$. Из неравенства $a_J \le \inf \mathrm{Sp}(g)$ следует $g/\chi^{a_J} \in A$ (см. [4]). Отсюда $g \in \chi^{a_J} \cdot A$, т.е. $J \subset \chi^{a_J} \cdot A$. Поэтому $\chi^{a_J} \cdot A = J$. Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.9. **Пусть $\Gamma = \mathbb{R}$. Тогда для примарного идеала J алгебры A, удовлетворяющего условию $\mathrm{hull} J = \{*\}$, имеем либо $J = \chi^{a_J} \cdot I_*$, либо $J = \chi^{a_J} \cdot A$.**

Доказательство : следует из Леммы 3.2 c) и Теоремы 3.3.

§4. ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕСЯ В I_s, $s \in \mathrm{int}\Delta^\circ$

В этом параграфе мы опишем примарные идеалы алгебры A, оболочка которых принадлежит множеству $\mathrm{int}\Delta^\circ = \Delta \setminus G$.

Ограничения накрытия $p : Y \to \Delta$ на $\{\alpha_0\} \times D$ порождает вложение верхней полуплоскости D в Δ. Поэтому будем предполагать, что $D \subset \Delta$. Пусть J – примарный идеал алгебры A, $\{z_0\} = \mathrm{hull} J \subset \mathrm{int}\Delta$ и J - образ J на Δ. Не теряя общности предположим, что $z_0 \in D^\circ \subset \Delta$, $D^\circ = D \setminus \mathbb{R}$. Сужение J на D, которое будем обозначать через $J(D)$, является подалгеброй алгебры $B(D)$. Пусть $\mathrm{ord} f(z_0)$ - порядок нуля функции $f \in J(D)$ в точке z_0. Положим

$\mathrm{ord}J(z_0) = \inf_{f\in J(D)} \mathrm{ord}f(z_0)$.

Лемма 4.1. Пусть $J^{\perp}(\mathbb{R})$ – пространство мер на $\mathbb{R} \subset G$, ортогональных J. Тогда $J^{\perp}(\mathbb{R}) = H_0^1 \cdot (\bar{b}(t))^n \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}$, где $n = \mathrm{ord}J(z_0)$, $\bar{b}(t) = \dfrac{t-\bar{z}_0}{t-z_0}$.

Доказательство : Если $f \in J(D)$, то $f(z) = \left(\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)^n f_0(z)$, где $f_0 \in B(D)$. Поэтому множество $J_0(D) = \bar{b}^n(z)\cdot J(D)$ является подпространством пространства $B(D)$. Из определения числа n следует, что для каждой точки $z \in D$ существует не равная нулю в точке z функция $f \in J_0(D)$. Следовательно, к $J_0(D)$ применима Лемма 3.6. Так как $* \notin \mathrm{hull}J$, то $S(J) = 0$. Поскольку $S(J) = S(J_0)$, то имеем $S(J_0) = 0$. Применив теперь Лемму 3.6 и Следствие 3.7 к $J_0(\mathbb{R}) = J_0(D)|_{\mathbb{R}}$ получим $J_0^{\perp}(\mathbb{R}) = H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Так как $J^{\perp}(\mathbb{R}) = \bar{b}^n(t)\cdot J_0^{\perp}(\mathbb{R})$, то $J^{\perp}(\mathbb{R}) = \bar{b}^n(t)\cdot H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. Пусть $\mu \in J^{\perp}$ – такая мера из $M(G)$, что $\mu|_{\mathbb{R}} = 0$. Тогда $\mu \in A^{\perp}$.

Доказательство : Пусть $E = \{x \in X : p(x) \in \mathbb{R}\}$. Легко проверить, что $E = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\alpha_n\} \times \mathbb{R}$. Пусть $\bar{\mu} \in M_F(X)$ – мера на X, соответствующая мере μ и $\bar{\mu}|_E = 0$. Для $f \in J$ мера $f\cdot\mu$ принадлежит $A^{\perp}$. Отсюда $f\cdot\mu = h^J(\alpha,t)\cdot\nu(\alpha)\times dt \in H_F^1(X)$. Полагая $h = h^J/\bar{f}$, получим $\bar{\mu} = h(\alpha,t)\cdot\nu(\alpha)\times dt$. Покажем, что $\bar{\mu} \in H_F^1(X)$. Из (4.1) следует, что $\nu(E) = 0$. Поэтому для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν, сужение J_α пространства $\{\bar{f}(\alpha,z) = f\circ p(\alpha,z) : f \in J\}$ на $D_\alpha = \{\alpha\}\times D$ не обращается в нуль ни в одной точке множества D_α и $S(J_\alpha) = S(J) = 0$. Используя рассуждения, примененные при доказательстве Теоремы 3.3, легко показать, что $h_\alpha(t) = h(\alpha,t) \in H^1$ для почти всех $\alpha \in K$, т.е., $\bar{\mu} \in H_F^1(X)$. Отсюда следует, что $\mu \in I_*^{\perp}$. Теперь покажем, что $\mu \in A^{\perp}$. Так как $I_*^{\perp} = A^{\perp} + \mathbb{C}\sigma$, то $\mu = \mu' + c\sigma$. Пусть $f \in J$ и $f(*) \neq 0$. Имеем $0 = \int_G f\,d\mu = \int_G f\,d\mu' + cf(*)$. Так как $\int_G f\,d\mu' = 0$, то $c = 0$, и следовательно, $\mu = \mu'$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. $J^{\perp} = A^{\perp} + J^{\perp}(\mathbb{R})$.

Доказательство : Так как $J^{\perp}(\mathbb{R}) \subset J^{\perp}$ и $A^{\perp} \subset J^{\perp}$, то имеем $J^{\perp} \supset A^{\perp} + J^{\perp}(\mathbb{R})$. Для того, чтобы доказать обратное включение положим $\mu \in J^{\perp}$, $\mu' = \mu|_{\mathbb{R}}$ и $f \in J$. Так как $f\cdot\mu \in A^{\perp}$, то $f\cdot\mu \in H_F^1(X)$. Следовательно, $\mu = h(\alpha,t)\cdot\nu(\alpha)\times dt$ и $f_\alpha(t)h_\alpha(t) \in H^1$ для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν (см. (3.7)).

Мера $\bar{\mu}'$ сосредоточена на $E = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\alpha_n\} \times \mathbb{R}$ и $\bar{\mu}' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\alpha_n, t) \cdot \nu(\alpha_n) \times dt$. Поэтому мера $\bar{\gamma}$ $(\gamma = \mu - \mu')$ удовлетворяет $\bar{\gamma} = h(\alpha, t) \cdot \nu_0(\alpha) \times dt$, где $\nu_0(\alpha) = \nu - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_0(\alpha_n) \cdot \delta_n$ и δ_n - мера Дирака, сосредоточенная в $\alpha_n \in K$. Для почти всех $\alpha \in K$ относительно меры ν_0 сужение J_α пространства $\{\bar{f}(\alpha, z) = f \circ p(\alpha, z) \colon f \in J\}$ на $D_\alpha = \{\alpha\} \times D$ не обращается в нуль ни в одной точке этого множества и $S(J_\alpha) = 0$. Используя рассуждения, примененные при доказательстве Леммы 4.2, получим $\bar{\gamma} \in H^1_F(X)$. Следовательно $\gamma \in I^\perp_\bullet$.

Пусть $\gamma' \in A^\perp$ - такая мера, что $\gamma = c\sigma + \gamma'$. Покажем, что $c = 0$. Имеем $\mu = c\sigma + \gamma' + \mu'$. Полагая $\mu_0 = \mu - \gamma'$, получим $\mu_0 = c\sigma + \mu'$. Так как $A^\perp \subset J^\perp$, то $\mu_0 \in J^\perp$. Далее, $\bar{\sigma} = \tau \times dt$, где τ - нормированная мера Хаара на группе K (см. §2). Поскольку K - бесконечная комплексная группа, то $\tau(\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in K$. Отсюда следует $\bar{\sigma}(E) = 0$. Следовательно $\sigma(\mathbb{R}) = 0$, $\mathbb{R} \subset G$. Поэтому меры σ и μ' взаимно сингулярны. Так как мера σ является единственной представляющей мерой для $* \in \Delta$ (см. §1 и [3], стр. 219), то по Теореме 7.7 из [3] имеем $c\sigma \in J^\perp$. Если $f \in J$ и $f(*) \neq 0$, то $0 = c\int_G f\, d\sigma = cf(*)$. Следовательно $c = 0$. Отсюда имеем $\mu' \in J^\perp(\mathbb{R})$. Лемма 4.3 доказана.

Отметим, что в Лемме 4.3 сумма не прямая. Покажем, что пространство $J^\perp(\mathbb{R})$ имеет прямое дополнение в $A^\perp$. Для этого заметим, что если $\mu \in A^\perp$, то $\mu' = \mu|_{\mathbb{R}} \in H^1_0 \frac{dt}{1+t^2} \subset A^\perp$ (см. §1). Следовательно $\mu = \mu_0 + \mu'$ и $\mu'|_{\mathbb{R}} = 0$. Отсюда следует, что $A^\perp = A^\perp_0 \oplus H^1_0 \frac{dt}{1+t^2}$, где $A^\perp_0 = \{\mu_0 \colon \mu \in A^\perp\}$. Так как $J^\perp(\mathbb{R}) \supset H^1_0 \frac{dt}{1+t^2}$, то $J^\perp = A^\perp + J^\perp(\mathbb{R}) = A^\perp_0 \oplus J^\perp(\mathbb{R})$.

Теорема 4.4. Пусть $b(\alpha)$ - унимодулярная борелевская функция на G вида

$$b(\alpha) = \begin{cases} b(t), & \text{если} \quad \alpha = t \in \mathbb{R} \subset G \\ 1, & \text{если} \quad \alpha \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда $J^\perp = \overline{b}^n \cdot A^\perp$.

Доказательство : Имеем $J^\perp = A^\perp_0 + \overline{b}^n \cdot H^1_0 \frac{dt}{1+t^2} = \overline{b}^n \left(b^n \cdot A^\perp_0 \oplus H^1_0 \frac{dt}{1+t^2} \right) = \overline{b}^n \cdot A^\perp$, поскольку что $b^n \cdot A^\perp_0 = A^\perp_0$. Теорема 4.4 доказана.

Пусть $I_n = \{f \in A \colon \operatorname{ord} f(z_0) \geq n\}$. Очевидно, $J \subset I_n$. Следующая Теорема показывает, что обратное утверждение также справедливо.

Теорема 4.5. $J = I_n$.

Доказательство : Из замечания следует, что достаточно показать включение $I_n \subset J$, или эквивалентно, $I_n^\perp \supset J^\perp$. Если $f \in I_n$, то $f(t) = b^n(t) f_0(t)$,

$f_0(t) \in B(\mathbb{R})$. Поэтому $\overline{b}^n \cdot H_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \subset I_n^{\perp}$. Отсюда следует, что $J^{\perp}(\mathbb{R}) \subset I_n^{\perp}$. Очевидно, $A^{\perp} \subset I_n^{\perp}$. Поэтому из $I_n^{\perp} \supset J^{\perp}(\mathbb{R}) + A^{\perp} = J^{\perp}$ получаем $I_n \subset J$. Теорема 4.5 доказана.

Таким образом, мы показали, что каждый примарный идеал в A, оболочка которого содержится в $\mathrm{int}\Delta^{\circ}$, однозначно определяется некоторым числом n.

Следствие 4.6. Пусть I - примарный идеал алгебры A. Предположим, что $\mathrm{hull} I \in \mathrm{int}\Delta^{\circ}$. Тогда $\mathrm{codim}_A I < \infty$.

Доказательство : Пусть $f \in A$ - такая функция, что $\mathrm{ord} f(z_0) = n-1$. Тогда идеал $I_{n-1} = \{f \in A : \mathrm{ord} f(z_0) \geq n-1\}$ совпадает с $\mathbf{C}f + I$. Аналогично, $I_{n-2} = \mathbf{C}g + \mathbf{C}f + I_n$, где $\mathrm{ord} g(z_0) = n-2$. Продолжая этот процесс, получим $A = \mathbf{C}f_0 + \mathbf{C}f_1 + \cdots \mathbf{C}f_{n-1} + I$, $I = I_n$, где $\mathrm{ord} f_k(z_0) = k$. Следствие 4.6 доказано.

Для сравнения напомним, что каждый примарный идеал J диск-алгебры (см. [1]) оболочка которого есть $\{z_0\}$, $|z_0| < 1$, представляется в виде $J = b^n \cdot A$, где $b(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$.

§5. ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕСЯ В I_α, $\alpha \in G$

Пусть $\mathrm{sing}_f(t)$ - сингулярная компонента функции $f \in H^1$, и пусть μ_f - положительная сингулярная мера на $\mathbb{R}$, определяющая функцию $\mathrm{sing}_f(t)$. Эту меру можно однозначно представить в виде суммы $\mu_f = \mu_f' + \beta_f \delta_0$ двух сингулярных мер, где δ_0 - мера Дирака в точке $0 \in \mathbb{R}$. Поэтому $\mathrm{sing}_f(t) = \mathrm{sing}_f^{+}(t)\,\mathrm{sing}_f^{-}(t)$, где $\mathrm{sing}_f^{+}(t)$ и $\mathrm{sing}_f^{-}(t)$ суть сингулярные внутренние функции для мер μ_f' и $\beta_f \delta_0$, соответственно. Отметим, что $\mathrm{sing}_f^{-}(t) = \exp[-i\beta_f t^{-1}]$

Пусть J - примарный идеал алгебры A, удовлетворяющий $\mathrm{hull} J = \{0\} \subset \mathbb{R} \subset G$. Обозначим через $J(\mathbb{R})$ сужение J на $\mathbb{R}$. Пусть $h \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$, $h \notin H^1$ - такая функция, что $fh \in H^1$ для всех $f \in J(\mathbb{R})$. Тогда воспользовавшись рассуждениями, аналогичными тем, которыми пользовались при доказательстве Леммы 3.6 и Следствий 3.7, 3.8, можно показать, что

$$h(t) = k(t)\exp[i\beta_h t^{-1}], \tag{5.1}$$

где $\beta_h > 0$, $k(t) \in H^1$ и $\mathrm{sing}_k^{-}(t) = 1$. При этом $\beta_h \leq \inf_{f \in J} \beta_f$.

Для $\beta \geq 0$ положим $M_\beta = H_0^1 \exp[i\beta t^{-1}] \frac{dt}{1+t^2}$. Так как $H_0^1 \exp[-i\beta' t^{-1}] \subset H_0^1$ для $\beta' \geq 0$, то $M_\beta \supset M_\beta \exp[-i\beta' t^{-1}] = M_{\beta-\beta'}$ для $0 \leq \beta' \leq \beta$. Отсюда $M_\beta \supset M_{\beta'}$, если $\beta \geq \beta' \geq 0$.

Теорема 5.1. Пусть J – примарный идеал алгебры A и $\operatorname{hull} J = \{0\}$. Тогда существует такое $\beta \geq 0$, что $J^\perp = A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_\beta$.

Доказательство : Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть мера $\mu \in J^\perp(\mathbb{R})$ сингулярна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$. Покажем, что $\mu \in \mathbf{C}\delta_0$. Действительно, в противном случае найдется точка $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$, принадлежащая носителю меры μ. Пусть функция $f \in J$ не обращается в нуль в точке t_0. Тогда $f \cdot \mu$ – ненулевая мера из $A^\perp(\mathbb{R})$, сингулярная относительно меры Лебега. С другой стороны, из Леммы 2.2 имеем $f \cdot \mu \in H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Из этого противоречия следует $\mu = c\,\delta_0$.

Шаг 2. Пусть мера $\mu \in J^\perp(\mathbb{R})$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е. $\mu = h(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$, $h(t) \in L^1\left(\dfrac{dt}{1+t^2}\right)$. Для $f \in J$ имеем $f \cdot \mu \in H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Отсюда следует, что $f \cdot h \in H_0^1$. Из (5.1) имеем

$$h(t) = k(t)\exp[i\beta t^{-1}], \qquad \beta \leq \inf_{f \in J(\mathbb{R})} \beta_f. \tag{5.2}$$

Покажем, что $k(t) \in H_0^1$. Для каждого $f \in J(\mathbb{R})$ имеем $0 = \int_{\mathbb{R}} f(t)h(t)\dfrac{dt}{1+t^2} = f(i)k(i)\exp[\beta]$. Выбирая f так, что $f(i) \neq 0$, получаем $k(i) = 0$, т.е. $k \in H_0^1$. Следовательно $\mu \in M_\beta$.

Шаг 3. Пусть теперь μ – произвольная мера из $J^\perp$. Положим $\mu_1 = \mu|_{\mathbb{R}}$. Так как $f \cdot \mu \in A^\perp$ для $f \in J$, из Следствия 2.3 получаем $f \cdot \mu_1 \in A^\perp|_{\mathbb{R}} = H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Следовательно $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_1 = 0$. Отсюда следует $\mu_1 \in J^\perp(\mathbb{R})$. Комбинируя Шаги 1 и 2, получаем $\mu_1 = c\delta_0 + \exp[i\beta t^{-1}]k(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$, где $k \in H_0^1$, $\beta \leq \inf\limits_{f \in J(\mathbb{R})} \beta_f$. Воспользовавшись рассуждениями, аналогичными тем, которыми пользовались при доказательстве Леммы 4.2, можно показать, что мера $\zeta = \mu - \mu_1$ принадлежит $A^\perp$. Следовательно $\mu \in A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_{\beta_0}$, где $\beta_0 = \inf\limits_{f \in J(\mathbb{R})} \beta_f$, $(M_\beta \subset M_{\beta_0})$. Отсюда получаем $J^\perp \subset A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_{\beta_0}$.

Шаг 4. Покажем, что $M_{\beta_0} \subset J^\perp$. Пусть $\mu \in M_{\beta_0}$ и $f \in J$. Функцию f на $\mathbb{R}$ можно представить в виде $f(t) = f'(t)\exp[-i\beta_0 t^{-1}]$, где $f' \in H_0^1$. Аналогично $\mu = \exp[i\beta_0 t^{-1}]h(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$, где $h \in H_0^1$. Следовательно $f \cdot \mu \in H_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$. Отсюда вытекает, что $M_{\beta_0} \subset J^\perp$. Следовательно, $J^\perp = A^\perp + \mathbf{C}\delta_0 + M_{\beta_0}$. Доказательство завершено.

§6. ПРИМЕР

Пусть Γ – двумерная целочисленная решетка. Группа характеров группы Γ есть двумерный тор G в $\mathbf{C}^2$. Зафиксируем иррациональное число $\beta > 0$ и положим

$\Gamma_+ = \{(n,m) \in \Gamma : \beta n + m \geq 0\}$. Обозначим через A_β равномерную алгебру на G, порожденную характерами χ^a, $a \in \Gamma_+$. Алгебра A_β является одним из примеров алгебры обобщенных аналитических функций. Эта алгебра содержит как подалгебру, алгебру всех непрерывных функций на торе, обладающих непрерывным аналитическим продолжением в бицилиндр. Этим и можно объяснить некоторый интерес к алгебре A_β (см. [3], стр. 222). Алгебру A_β можно получить иным способом. Пусть $\Delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| \leq 1, |z_1| = |z_2|^\beta\}$. Множество $\Delta^\circ = \Delta \setminus (G \cup \{(0,0)\})$ является трехмерным многообразием с одномерной комплексной структурой (CR-многообразие). Пусть $\hat{A}_\beta$ - множество тех непрерывных функций на Δ, которые являются CR-функциями на Δ° (см. [8]). Можно показать, что сужение $\hat{A}_\beta$ на G есть A_β. Компакт Δ есть пространство максимальных идеалов алгебры A_β. Преобразование Гельфанда алгебры A_β совпадает с $\hat{A}_\beta$.

ABSTRACT. The paper studies algebras of generalized analytic (by Arens–Singer) functions. Essentially, they are uniform algebras on compact Abelian groups generated by the semigroup of characters specifying complete Archimedian order on dual group. Examples : algebra of all continuous functions on unit circle having continuous analytic extension to unit disk in the complex plane and the algebra of all continuous almost-periodic functions in the real axis admitting continuous analytic almost-periodic extension to the upper half-plane. The paper describes primary ideals of such algebras and explicitly presents measures orthogonal to the algebras of generalized analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Гофман, Банаховы Пространства Аналитических Функций, Москва, ИЛ, 1963.
2. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 7, pp. 203 — 210, 1956.
3. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, Москва, Мир, 1974.
4. С. А. Григорян, "Обобщенные мероморфные функции", Изв. РАН, Сер. Матем., том 57, № 1, стр. 147 — 166, 1993.
5. T. Tonev, Big-planes, Boundaries and Function Algebras, North-Holland, Amsterdam, 1992.
6. F. Forelli, "Analytic measures", Pacific J. Math., vol. 13, pp. 571 — 578, 1963.
7. Б. Н. Левитан, Почти-Периодические Функции, ГИТТЛ, Москва, 1953
8. Е. М. Чирка, "Введение в теорию CR-многообразий", УМН, том 46, № 1, стр. 81 — 163, 1991.

13 Декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении,
Казанский энергетический институт,
E-mail : suren.Grigorian@ksu.ru

ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. Г. Казарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ есть многочлен с действительными постоянными коэффициентами. Получены достаточные условия, при которых оценка $|D^\nu P(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место для всех мультииндексов $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, или для некоторого фиксированного мультииндекса. В двумерном случае эти условия также и необходимы.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Получение так называемых априорных оценок в общей теории дифференциальных уравнений требует оценок для производных характеристического многочлена $P(\xi)$ исходных дифференциальных операторов $P(D)$ или оценок для функции Хермандера. Одной из задач является описание множества мультииндексов $\{\nu\}$, для которых

$$|D^\nu P(\xi)| \leq c \cdot (|P(\xi)| + 1) \qquad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $c > 0$ – постоянная. Другая задача есть описание множества операторов $P(D)$, для которых

$$\widetilde{P}(\xi) \leq c \cdot (|P(\xi)| + 1) \qquad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $c > 0$ – постоянная. Здесь $\widetilde{P}(\xi) = \left[\sum_\beta |D^\beta P(\xi)|^2\right]^{1/2}$ – функция Хермандера, отвечающая оператору $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$.

В монографии Л. Хермандера [1] и в работе В. Михайлова [3] подобные вопросы решены в терминах оценок мономов. С. М. Никольский [4] доказал существование обобщенного решения первой краевой задачи для общего класса регулярных операторов, содержащих гипоэллиптические операторы. В [5] найдены условия гипоэллиптичности в терминах устойчивости многочленов. Для эллиптических и полуэллиптических операторов поставленные задачи были исследованы, например, в [6] – [8]. Подобные задачи для существенно не эллиптических операторов рассмотрены в [2], [9], [10].

Начнем с некоторых стандартных обозначений. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, N_0^n – множество n-мерных мультииндексов, т.е. множество векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, ..., \xi_n^{\alpha_n})$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n$. Пусть $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, где сумма распостраняется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, и пусть $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – характеристический многочлен (символ), отвечающий оператору $P(D)$. Будем считать, что коэффициенты $\{\gamma_\alpha\}$ вещественны и $P(\xi) \neq 0$ вне некоторого шара радиуса $M = M(P) > 0$.

Определение 0.1. (см. [1]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоэллиптическим, если для любого $\nu \in N_0^n$ и $\nu \neq 0$ имеем $\dfrac{D^\nu P(\xi)}{|P(\xi)|} \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Определение 0.2. (см. [2]). Многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ (будем писать $Q < P$), если для некоторой постоянной $c > 0$ имеем

$$|Q(\xi)| \leq c \cdot (|P(\xi)| + 1) \qquad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из Определений 0.1 и 0.2 следует, что для гипоэллиптических операторов $P(D)$ и для любого $\nu \in N_0^n$ имеем $D^\nu(P) < P$. Следовательно, нижеформулируемые Задачи I и II представляют интерес лишь для не гипоэллиптических операторов.

Задача I. Для заданного оператора $P(D)$ описать множество мультииндексов $\{\nu\}$, для которых $D^\nu P < P$.

Задача II. Описать множество операторов $\{P(D)\}$, для которых $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$.

В этой статье мы решаем эти задачи в достаточно общих предположениях. Отметим, что для некоторых типичных случаев (например, для так называемого двуслойного случая), полученные условия являются необходимыми и достаточными. Приведем еще несколько обозначений и определений.

Определение 0.3. (см. [3], [5]) Для данного набора мультииндексов $\aleph = \{\alpha^j\}_1^N$, наименьший выпуклый многогранник $\Re(\aleph)$ в $\mathbb{R}^n$, содержащий все мультииндексы $\alpha^j \in \aleph$ $(j = 1, ..., N)$, называется характеристическим многогранником (или многогранником Ньютона) $\aleph$. Характеристический многогранник $\Re(P)$ оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) называется характеристическим многогранником набора $(P) \cup \{0\}$.

Определение 0.4. Многогранник $\Re$ с вершинами из N_0^n называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой координатной оси.

Пусть $\Re$ – полный многогранник. Множество $\Gamma \subset \Re$ называется гранью многогранника $\Re$, если существует единичный вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ и число $d = d(\lambda) \geq 0$ такие, что $(\lambda, \alpha) = \lambda_1\alpha_1 + ... + \lambda_n\alpha_n = d$ для всех $\alpha \in \Gamma$ и $(\lambda, \beta) < d$, $\beta \in \Re/\Gamma$. Вектор λ называется внешней нормалью ($\Re$-нормалью) грани Γ. Множество внешних нормалей грани Γ обозначим через $\Lambda(\Gamma)$. Грани размерности j многогранника $\Re$ обозначим через $\Re_i^j$ $(i = 1, ..., M_j^i,\ j = 0, 1, ..., n-1)$.

Определение 0.5. Грань $\Re_i^j$ многогранника $\Re$ называется главной, если среди $\Re$-нормалей этой грани существует нормаль, которая имеет хотя бы одну положительную координату. Если среди $\Re$-нормалей главной грани $\Re_i^j$ существует нормаль, которая имеет только неотрицательные (положительные) координаты, то грань $\Re_i^j$ называется правильной (вполне правильной). Многогранник $\Re$ называется правильным (вполне правильным), если $\Re$ – полный и все $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\Re$ правильны (вполне правильны). Пусть $\Re = \Re(P)$ – характеристический многогранник многочлена $P(\xi)$, и пусть $\Re_i^j$ $(i = 1, ..., M_j, j = 0, 1, ..., n-1)$ – правильные грани $\Re$. Каждой $\Re_i^j$ сопоставим подмногочлен

$$P^{i,j}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_i^j} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Определение 0.6. Для заданного $\lambda \in \mathbb{R}^n$ многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется λ-однородным (или обобщенно-однородным) λ-порядка d, если для любого $t > 0$

$$R(t^\lambda \cdot \xi) = R(t^{\lambda_1} \cdot \xi_1, ..., t^{\lambda_n} \cdot \xi_n) = t^d \cdot R(\xi). \tag{0.1}$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ λ-однородный многочлен является обычным однородным многочленом порядка d. Легко проверить (см., например, [3]), что подмногочлен

$P^{i,j}(\xi)$, отвечающий грани $\Re_i^j$ характеристического многогранника $\Re(P)$ многочлена P, является λ-однородным для любого вектора λ, являющегося $\Re$-нормалью этой грани, т.е. существует число $d(\lambda) = d_{i,j}(\lambda)$ такое, что

$$P^{i,j}(\xi) = \sum_{\lambda(\alpha)=d(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{0.2}$$

Определение 0.7. Грань $\Re_i^j$ многогранника $\Re(P)$, отвечающая многочлену $P(\xi)$, называется регулярной (или невырожденной), если $P^{i,j}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R^{n,0} \equiv \{\eta; \eta \in \mathbb{R}^n, \eta_1 \eta_2 ... \eta_n \neq 0\}$. Если $P^{i,j}(\eta^0) = 0$ для некоторой точки $\eta^0 \in R^{n,0}$, то грань $\Re_i^j$ назовем нерегулярной (или вырожденной).

Пусть $R(\xi)$ – λ-однородный многочлен. Положим

$$\Sigma(R) = \{\eta; \eta \in R^{n,0}, R(\eta) = 0\}. \tag{0.3}$$

Для точки $\eta \in \Sigma(R)$ обозначим

$$\Im(\eta, R) = \{\nu; \nu \in N_0^n, D^\nu R(\eta) \neq 0\}, \tag{0.4}$$

$$\Delta(\eta, R) \equiv \Delta(\eta, R, \lambda) = \min_{\nu \in \Im(\eta, R)} (\lambda, \nu). \tag{0.5}$$

Будем считать, что $\Delta(\eta, R) = 0$ при $\eta \in R^{n,0}/\Sigma(R)$. Пусть $\Re_l^k$ – некоторая правильная грань характеристического многогранника $\Re(P)$ для многочлена P, и пусть Λ_l^k –множество $\Re$-нормалей этой грани. Очевидно, что для любого вектора $\lambda \in \Lambda_l^k$ существует натуральное число $M = M(\lambda) = M(\lambda, \Re_l^k)$ и неотрицательные числа $d_j = d_j(\lambda, \Re_l^k)$ такие, что P можно представить в виде суммы отличных от нуля λ-однородных многочленов :

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{0.6}$$

где $d_0 > d_1 > ... > d_M \geq 0$. Очевидно также, что $P_{d_0}(\xi) \equiv P^{l,k}(\xi)$ для любого вектора $\lambda \in \Lambda_l^k$. Пусть правильная грань $\Re_l^k$ нерегулярна. Согласно (0.3) - (0.5), свяжем с обобщенно однородным многочленом $P^{l,k}$ (с гранью $\Re_l^k$) множества $\Sigma(\lambda, P_j)$, $\Im(\eta, P_j)$ и числа $\Delta(\eta, \lambda, P_j)$ ($j = 0, 1, ..., M, \lambda \in \Lambda_l^k$). Для произвольного мультииндекса $\nu \in N_0^n$ множества $\Sigma(\lambda, D^\nu P_j)$, $\Im(\eta, D^\nu P_j)$ и числа $\Delta(\eta, D^\nu P_j)$ определяются аналогично, если воспользоваться представлением многочлена $D^\nu P$ в виде

$$D^\nu P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_{\alpha,\nu} \xi^\alpha = \sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} D^\nu P_{d_j}(\xi). \tag{0.7}$$

Статья имеет следующую структуру : §1 содержит вспомогательные результаты, §2 посвящен Задаче II для двуслойного случая, §3 посвящен Задаче I.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1.1. Допустим, что для некоторого многочлена P, $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$. Тогда многогранник Ньютона $\Re = \Re(P)$ является правильным (см. определение 0.5).

Доказательство : Положим $(D^\nu P) = \{\alpha; \alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha,\nu} \neq 0\}$, и пусть $\Re(D^\nu P)$ – характеристический многогранник множества $D^\nu P$. Предположим обратное, т.е. что $\Re(P)$ неправильный. Это равносильно тому, что для некоторого мультииндекса $\mu \in N_0^n$, $\Re(D^\mu P) \not\subset \Re(P)$. Следовательно, существует вершина e многогранника $\Re(D^\mu P)$, которая не принадлежит $\Re(P)$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^n$ – произвольная точка такая, что $\eta^e \neq 0$, и пусть λ – некоторая $\Re(D^\mu P)$–нормаль вершины e. При $\xi \to \infty$ для последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta \equiv (s^{\lambda_1}\eta_1, ..., s^{\lambda_n}\eta_n)$ $(s = 1, 2, ...)$ имеем

$$|D^\mu P(\xi^s)| = s^{d(\lambda)}|\gamma_{e,\mu}| \cdot |\eta^e| + o(s^{d(\lambda)}), \qquad |P(\xi^s)| = o(s^{d(\lambda)}),$$

где $d(\lambda) > 0$, $\gamma_{e,\mu}\, \eta^e \neq 0$. Отсюда следует

$$\frac{|D^\mu P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty$$

что противоречит $D^\nu P < P$. Лемма 1.1 доказана.

Пусть $\Re_i^j$ – правильные грани правильного характеристического многогранника $\Re = \Re(P)$ многочлена $P(\xi)$. Пусть $P^{i,j}(\xi)$ – многочлены, отвечающие граням $\Re_i^j$ $(i = 1, ..., M_j, j = 1, ..., n-1)$. По данному вектору $\mu \in \Lambda_l^k$ представим многочлен $P(\xi)$ в виде (0.6).

Лемма 1.2. Пусть $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Тогда :

а) Либо для всех $P^{i,j}(\xi) \geq 0$, либо $P^{i,j}(\xi) \leq 0$, для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $i = 1, ..., M_j, j = 0, 1, ..., n-1$.

б) Пусть $P^{i,j}(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, и пусть пара (l, k) фиксирована $(1 \leq l \leq M_j, 0 \leq k \leq n-1)$, $\mu \in \Lambda_l^k$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $P_{d_j(\mu)}(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, ..., m-1)$, $P_{d_m(\mu)}(\eta) \neq 0$, где $0 \leq m \leq M(\mu)$, $d_m(\mu) > 0$. Тогда $P_{d_m(\mu)}(\eta) > 0$.

Доказательство : Пусть точки $\eta^0, \eta^1 \in \mathbb{R}^n$ и пары индексов (i_0, j_0), (i_1, j_1) $(1 \leq i_0 \leq M_{i_0}, 1 \leq i_1 \leq M_{i_1}, 0 \leq j_0, j_1 \leq n-1)$ такие, что $P^{i_0,j_0}(\eta^0) > 0$ и $P^{i_1,j_1}(\eta^1) < 0$ для $\mu^k \in \Lambda_{i_k}^{j_k}$, $\xi^{s,k} = s^{\mu^k}\eta^k$ $(k = 0, 1; s = 1, 2, ...)$. Так как $P^{i_k,j_k}(\xi)$ – μ^k–однородные многочлены, то из простых геометрических соображений следует

$$P(\xi^{s,k}) = P^{i_k,j_k}(\eta^k) \cdot s^{d_0(\mu^k)} + o(s^{d_0(\mu^k)}) \qquad \text{для} \quad k = 0, 1 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Это значит, что $P(\xi^{s,0}) \to +\infty$ и $P(\xi^{s,1}) \to -\infty$ при $s \to \infty$. Следовательно, существует последовательность $\{\xi^{s,2}\}$ такая, что $|\xi^{s,2}| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $P(\xi^{s,2}) = 0$ для всех $s = 1, 2, \ldots$. Это противоречит предположению Леммы и доказывает утверждение а). Для доказательства утверждения б) заметим, что для некоторой точки $\eta^0 \in \mathbb{R}^n$, $P^{i,k}(\eta^0) > 0$, и достаточно изучать поведение многочлена $P(\xi)$ на последовательностях $\xi^{s,1} = \xi^{\mu}\eta$ $(s = 1, 2, \ldots)$, где $\mu \in \Lambda_i^k$ – произвольный вектор. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть a, b, c, d, e – положительные числа такие, что $a < c$, $e < c$

$$\frac{a-e}{c-e} \le \frac{b}{d}. \tag{1.1}$$

Тогда для всех $x \ge 1$, $y \in [0, 1]$

$$\frac{x^a\, y^b}{x^c\, y^d + x^e} \le 1. \tag{1.2}$$

Доказательство : Достаточно доказать (1.2) для a, b, c, d, e таких, что $a < c$, $b < d$ и $d(a-e) = b(c-e)$. Поделив числитель и знаменатель в (1.2) на x^e и заменив $x^{(c-e)}$ на x и y^d на y соответственно, получим

$$(x\,y)^{b/d} \le x\,y + 1. \tag{1.3}$$

Последнее неравенство можно легко проверить, если рассмотреть случаи $x\,y \le 1$ и $x\,y \ge 1$.

Лемма 1.4 Пусть $\Re_i^k$ – некоторая правильная грань характеристического многогранника $\Re(P)$ многочлена P. Допустим, что $D^{\nu} P < P$ для всех $\mu \in N_0^n$, $\lambda \in \Lambda_i^k$, $d_j = d_j(\lambda) = d_j(\lambda, \Re_i^k)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$, $P_0 = P_{d_0}$, $\eta \in \Sigma(\lambda, P_0)$. Тогда

$$d_0(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_0) \le d_1. \tag{1.4}$$

Доказательство : Допустим противное, т.е.

$$d_0(\lambda) - \Delta(\eta, \lambda, P_0) > d_1. \tag{1.5}$$

Выберем мультииндекс β такой, что $D^{\beta} P_0(\eta) \ne 0$, $(\lambda, \beta) = \Delta(\eta, P_0, \lambda)$ и подставим $\xi^s = s^{\lambda} \cdot \eta$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Так как многочлены $P_j = P_{d_j}$ и $D^{\beta} P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$ являются λ-однородными, то $P_0(\eta) = 0$ и $D^{\beta} P_0(\eta) \ne 0$, и при $s \to \infty$ из (0.6) и (0.7) имеем $|P(\xi^s)| = s^{d_1} |P_1(\eta^0)| + o(s^{d_1})$,

$$|D^{\beta} P(\xi^s)| = s^{d_0 - (\lambda,\beta)} |D^{\beta} P_0(\eta)| + o(s^{d_0 - (\lambda,\beta)}).$$

Эти соотношения вместе с (1.5) показывают, что $|D^\beta P(\xi^s)| / [1 + |P(\xi^s)|] \to \infty$ при $\xi \to \infty$, что противоречит $D^\beta P < P$. Лемма 1.4 доказана.

В доказательстве следующей теоремы мы пользуемся методом, использованным в [2], [10].

Теорема 1.1. Если $|P(\xi)| \to \infty$ **при** $\xi \to \infty$, **и** $D_j P < P$ $(j = 1, 2, \ldots)$, **то** $D^\nu P < P$ **для всех** $\nu \in N_0^n$.

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 1.5. Если $|P(\xi)| \to \infty$ **при** $\xi \to \infty$ **и** $D_1 P < P$, **то** $D_1^j P < P$, $j = 1, 2, \ldots$.

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\left|D_1^j P(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty, \tag{1.6}$$

где $m = \mathrm{ord} P$. Тогда существует число l $(2 \le l \le m)$ такое, что

$$\left|D_1^l P(\xi^s)\right| > 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \left|D_1^j P(\xi^s)\right| = O\left(|D_1^l P(\xi^s)|\right) \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Пусть l – наибольшее число, удовлетворяющее (1.7). Имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1} \left|D_1^j P(\xi^s)\right| \le \varepsilon_s' \left|D_1^l P(\xi^s)\right|, \tag{1.8}$$

где, начиная с некоторого s', $\varepsilon_s' \in (0, 1)$ для $s \ge s'$ и $\varepsilon_s' \to 0$ при $s \to \infty$. Согласно (1.6) и (1.8) при $s \to \infty$ имеем

$$\left|D_1^l P(\xi^s)\right| / [1 + |P(\xi^s)|] \to \infty.$$

Следовательно, начиная с некоторого s''

$$|P(\xi^s)| \le \varepsilon_s'' \left|D_1^l P(\xi^s)\right| \qquad (s = s'', s'' + 1, \ldots) \tag{1.9}$$

и $\varepsilon_s'' \to 0$, $\varepsilon_s'' \left|D_1^l P(\xi^s)\right| \to \infty$ при $s \to \infty$. Согласно (1.8) и (1.9), для всех $s \ge s''$ имеем

$$\sum_{j=1}^{l-1} \left|D_1^j P(\xi^s)\right| \le \varepsilon_s \left|D_1^l P(\xi^s)\right|, \tag{1.10}$$

где $\varepsilon_s = \max\{\varepsilon_s', \varepsilon_s''\}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ $(s \ge s_0)$ для некоторого $s_0 \ge \max\{s', s''\}$, и $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$. Пусть $\eta^s = \xi^s + (t, 0, \ldots, 0)$, $0 < t < 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$. По формуле

Тейлора и (1.7), (1.10), для некоторой постоянной $c \geq 1$ и для $s = s_0, s_0 + 1, \ldots$ имеем

$$1 + |P(\eta^s)| \leq 1 + \sum_{j=0}^{l-1} |D_1^j P(\xi^s)| + t^l \sum_{j=l}^{m} |D_1^j P(\xi^s)| = 1 + (\varepsilon_s + c t^l)\, |D_1^l P(\xi^s)|.$$

Так как $\varepsilon_s |D_1^l P(\xi^s)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$, для достаточно больших s ($s \geq s_0$) имеем

$$1 + |P(\eta^s)| \leq (2\varepsilon_s + c t^l)\, |D_1^l P(\xi^s)|, \tag{1.11}$$

$$|D_1 P(\eta^s)| \geq \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} |D_1^l P(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{l-1} |D_1^j P(\xi^s)| - t^l \sum_{j=l+1}^{m} |D_1^j P(\xi^s)| \geq$$

$$\geq \left[\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} - \varepsilon_s - c t^l\right] |D_1^l P(\xi^s)|. \tag{1.12}$$

Подставляя $t = t_s$ в (1.11) и (1.12), из $c t_s^l = \varepsilon_s$ для всех $s \geq s_0$ получим

$$\frac{|D_1 P(\eta^s)|}{1 + |P(\eta^s)|} \geq \frac{\dfrac{t_s^{l-1}}{(l-1)!} - \varepsilon_s - c t_s^l}{2\varepsilon_s + c t_s^l} = \frac{1}{c^{1-1/l}(l-1)!} \varepsilon_s^{-1/l} - \frac{2}{3}.$$

Так как $l \geq 2$, то при $s \to \infty$ получаем $|D_1 P(\eta^s)|/[1 + |P(\eta^s)|] \to \infty$, что противоречит условиям Леммы. Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. Пусть $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ и $D_1 P < P$. Для любого многочлена $Q(\xi)$ такого, что $Q < P$ имеем

$$D_1^j Q < P \qquad (j = 1, 2, \ldots, m_1 = \operatorname{ord} Q).$$

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\delta_s = \frac{1 + |P(\xi^s)|}{\sum_{j=1}^{m_1} |D_1^j Q(\xi^s)|} \to 0. \tag{1.13}$$

Рассуждая как и в доказательстве (1.12), получаем

$$|Q(\eta^s)| \geq \left[\frac{t^l}{l!} - \alpha_s - c t^{l+1}\right] |D_1^l Q(\xi^s)| \tag{1.14}$$

для некоторых чисел $\{\alpha_s\}$, удовлетворяющих $\alpha_s \to 0$ и $\alpha_s |D_1^l Q(\xi_1^s)| \to \infty$ при $s \to \infty$. Согласно Лемме 1.5, в силу $D_1 P < P$ и (1.13), для всех $s = 1, 2, \ldots$ получим

$$1 + |P(\eta^s)| \leq 1 + |P(\xi^s)| \leq \delta_s^1 |D_1^l Q(\xi^s)|, \tag{1.15}$$

где $\delta_s^1 \to 0$ при $s \to \infty$. Тогда согласно (1.14) и (1.15), для всех достаточно больших s имеем

$$\frac{|Q(\eta^s)|}{1+|P(\eta^s)|} \geq \frac{1}{\varepsilon_s}\left[\frac{t^l}{l!} - \varepsilon_s - c\,t^{l+1}\right] \geq -1 + \frac{t^l}{\varepsilon_s}\left(\frac{1}{l!} - c\,t\right), \tag{1.16}$$

где $\varepsilon_s = \max\{\alpha_s, \delta_s^1\}$. Пусть $t_s \in (0,1)$ такая, что $t_s^l = \sqrt{\varepsilon_s}$. Так как $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$ и для достаточно больших s, то имеем $\frac{1}{l!} - c\,t_s \geq \frac{1}{2l!}$. Следовательно, из (1.16) имеем

$$\frac{|Q(\eta^s)|}{1+|P(\eta^s)|} \geq -1 + \frac{1}{2l!}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_s}} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Это противоречит предположениям. Лемма 1.6 доказана.

Доказательство Теоремы 1.1 : Пусть $D_i P < P$ $(i = 1, \dots, n)$ и $Q(\xi) = D_2 P(\xi)$. Имеем $Q < P$, и согласно Лемме 1.6 $D_1 Q = D_1 D_2 P < P$. Остальная часть доказательства очевидна. Теорема 1.1 доказана.

§2. МНОГОЧЛЕНЫ С ОДНОСЛОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ И С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ. ЗАДАЧА II

На класс изучаемых многочленов мы будем накладывать дополнительные ограничения, некоторые по существу, а часть из них технические.

Условие I. Предположим, что изучаемые многочлены могут иметь только однослойные вырождения, т.е. если многочлен P представлен в виде (0.6) по некоторому вектору λ и $P_{d_0}(\eta) = 0$ для $\eta \in R^{n,0}$, то $P_{d_1}(\eta) \neq 0$, или что то же самое $\sum(P_{d_0}) \cap \sum(P_{d_1}) = \emptyset$. Главную роль играют слои $(\lambda, \alpha) = d_0$ и $(\lambda, \alpha) = d_1$.

Условие II. Если $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P, то либо все главные грани многогранника $\Re$ регулярны, либо нерегулярна единственная вполне правильная грань размерности $n-1$.

Общий случай (более чем одна вполне правильная нерегулярная грань и грань размерности $k < n-1$) могут быть получены сопоставлением методов доказательства нижеприводимой Теоремы 2.1 и Леммы 1.1 работы [9]. Рассмотрение вполне правильных нерегулярных граней правильного многогранника $\Re(P)$ мотивируется следующим утверждением.

Лемма 2.1. **Пусть $n = 2$, и пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный характеристический многогранник многочлена P. Допустим, что $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^2$. Тогда каждая главная нерегулярная грань многогранника $\Re$ вполне правильная.**

Доказательство : Допустим обратное, т.е. что одномерная правильная грань Γ характеристического многогранника $\Re$ нерегулярна и внешная нормаль λ этой грани имеет нулевую координату. Так как все главные грани полного многогранника являются правильными, то координаты вектора λ неотрицательны. Пусть $\lambda = (1, 0)$. Очевидно, что подмногочлен, отвечающий грани, Γ имеет вид

$$P_0(\xi) = a_0 \xi_1^{d_0} \overline{P_0}(\xi_2),$$

где $a_0 \neq 0$ и $\overline{P_0}$ - многочлен от ξ_2. Пусть $P_0(\eta) = 0$ для некоторой точки $\eta \in R^{2,0}$ и $m = \text{ord}\overline{P_0}$. Покажем, что $D_2^j P_0(\eta) = 0$ $(j = 0, 1, ..., m-1)$ и следовательно, многочлен $\overline{P_0}$ представляется в виде $\overline{P_0}(\xi_2) = b_0 (\xi_2 - \eta_2)^m$, где $b_0 \neq 0$. Если предположить обратное, т.е. $D_2^{j_0} \overline{P_0}(\eta_2) \neq 0$ для некоторого j_0 $(1 \leq j_0 \leq m-1)$, то рассматривая последовательность $\xi^s = (s\,\eta_1, \eta_2)$ $(s = 1, 2, ...)$ для многочленов P и $D_2^{j_0} P$ $(s = 1, 2, ...)$ (см. (0.6)), будем иметь

$$P_{d_0}(\xi^s) = s^{d_0} P_{d_0}(\eta) = 0; \; |P_{d_j}(\xi^s)| \leq c_j\, s^{d_j}\; j = 1, ..., M; \; |D_2^{j_0} P(\xi^s)| \geq c_{M+1} s^{d_0}$$

для некоторых постоянных $c_j \geq 0$ $(j = 1, ..., M)$, $c_{M+1} > 0$ (так как $\text{ord}_{\xi_1} P_j = d_j < d_0$ $(j = 0, ..., M)$), и

$$\frac{\left|D_2^{j_0} P(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty \qquad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Это противоречит предположению леммы. Теперь повторяя приведенные рассуждения, с заменой m на j_0, получим доказательство Леммы 2.1.

Определение 2.1. Обобщенно-однородный многочлен $R(\xi)$ называется многочленом с изолированными характеристиками, если для каждой точки $\eta \in \Sigma(R)$ существуют окрестность $\cup(\eta)$, гладкие обобщенно-однородные функции $q(\xi) = q(\xi, \eta)$, $r(\xi) = r(\xi, \eta)$ и натуральное число $k = k(\eta)$ таие, что

$$R(\xi) = [q(\xi)]^m\, r(\xi), \qquad \xi \in \cup(\eta) \tag{2.1}$$

и при этом $\text{grad} q(\eta, \eta) \neq 0$, $r(\eta, \eta) \neq 0$.

Замечание 2.1 Пусть $R(\xi)$ - λ- однородный многочлен вида (2.1), $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ и $D_n q(\eta, \eta) \neq 0$.

Дифференциальные операторы с изолированными характеристиками главных символов изучены, например, в работах [6] и [11]. Доказано, что для $n = 2$

каждый обобщенно-однородный многочлен имеет лишь изолированные характеристики. Пусть $\Gamma = \Re_l^{n-1}$, $1 \le l \le M_{n-1}$ – вполне правильная нерегулярная грань характеристического многогранника $\Re(P)$ многочлена $R(\xi)$, а $P_0(\xi) \equiv P^{l,n-1}(\xi)$ – отвечающий ей подмногочлен, и пусть μ – $\Re$-нормаль этой грани, которая определяется однозначно.

Условие III. Подмногочлен P_0 есть многочлен с изолированными характеристиками.

Пусть P – многочлен, допускающий представление в виде μ-однородных многочленов (см. (0.6))

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\mu,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{2.2}$$

где $d_0 > d_1 > \ldots > d_M \ge 0$, $P_j(\xi) = P_{d_j}(\xi)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$, $P_0(\xi) \equiv P^{l,n-1}(\xi)$.

Следующая теорема является основным результатом этой статьи и дает решение Задачи II в вышеописанном классе многочленов.

Теорема 2.1. Пусть $|P(\xi)| \to \infty$, и пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P.

а) Если все правильные грани $\Re$ регулярны, то $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^n$.

б) Пусть $\Gamma = \Re_l^{n-1}$ – единственная нерегулярная вполне правильная грань характеристического многогранника $\Re(P)$, и пусть μ есть $\Re$-нормаль этой грани. Допустим, что подмногочлен P_0 имеет лишь изолированные характеристики и $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) = \emptyset$. Необходимое и достаточное условие для $D^\nu P < P$ при всех $\nu \in N_0^n$ есть

$$d_0 - \Delta(\eta, P_0) \le d_1, \qquad \eta \in \Sigma(P_0). \tag{2.3}$$

Доказательство : Необходимость условия (2.3) следует из Леммы 1.4. Утверждение а) и часть утверждения б), относящиеся к достаточности, мы докажем параллельно. Допустим обратное, что в обоих случаях существуют мультииндекс $0 \ne \nu^0 \in N_0^n$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\frac{\left|D^{\nu^0} P(\xi^s)\right|}{1 + |P(\xi^s)|} \to \infty. \tag{2.4}$$

Без потери общности можно предположить, что $\xi_i^s > 0$ $(i = 1, \ldots, n\,;\ s = 1, 2, \ldots)$.

Для $s = 1, 2, \ldots$ положим

$$\lambda_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\ln \xi_j^s)^2}}; \qquad \rho_s = \exp\sqrt{\sum_{j=1}^n (\ln \xi_j^s)^2},$$

где $\xi^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$, $(\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}$, $i = 1, \ldots, n; s = 1, 2, \ldots)$. Так как векторы λ^s принадлежат единичной сфере, то можем предположить, что $\lambda^s \to \lambda^\infty$ при $s \to \infty$. Из выпуклости многогранника $\Re$ следует, что λ^∞ является нормалью к одной (и только одной) грани многогранника $\Re$. Пусть $\{e^{1,j}\}_{j=\overline{1,n}}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ такой, что $e^{1,1} = \lambda^\infty$. Имеем $\lambda^s = \sum_{j=1}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j}$ и $\lambda_{1,1}^s \to 1$, $\lambda_{1,j}^s = o(\lambda_{1,1}^s)$, $j = 1, 2, \ldots$, поскольку $\lambda^s \to e^{1,1}$ при $s \to \infty$. Если для достаточно больших s базис $(e^{1,1}, \ldots, e^{1,n})$ удовлетворяет условию $\sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j} = 0$, то обозначим его через $(e^1, \ldots, e^n)$. В противном случае можно предположить, что $\sum_{j=2}^n \lambda_{2,j}^s e^{1,j} \neq 0$ и при $s \to \infty$

$$\frac{\sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j}}{\left|\sum_{j=2}^n \lambda_{1,j}^s e^{1,j}\right|} \to e^{2,2}.$$

На линейной оболочке базиса $(e^{1,2}, \ldots e^{1,n})$ рассмотрим базис $(e^{2,2}, \ldots e^{2,n})$ с вектором $e^{2,2}$, определенным выше. Имеем $\lambda^s = \lambda_{1,1}^s e^{1,1} + \sum_{j=2}^n \lambda_{2,j}^s e^{2,j}$ и $\lambda_{2,2}^s = o(\lambda_{1,1}^s)$ при $s \to \infty$. Продолжая этот процесс заключаем, что $\lambda^s = \sum_{j=1}^n x_j^s e^j$, где e^1, e^2, ..., e^n – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ и $x_1^s \to 1$, $x_{j+1}^s = o(x_j^s)$, $j = 1, \ldots, n-1$ при $s \to \infty$. При этом существуют числа m и s_0 такие, что $\lambda_j^s \neq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, $\lambda_i^s = 0$ $(i = m+1, \ldots, n)$, $1 \leq m \leq n$ для всех $s \geq s_0$. Можно предположить, не умаляя общности, что $s_0 = 1$ и $\lambda_i^s > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ для всех s. Для того, чтобы связать построенный базис с многогранником Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена P, рассмотрим грани $\Re_{i_1}^{k_1}, \ldots, \Re_{i_m}^{k_m}$ характеристического многогранника $\Re$. Возьмем грань $\Re_{i_1}^{k_1}$, лежащую в опорной гиперплоскости к $\Re$ с $\Re$-нормалью e^1, и каждая грань $\Re_{i_j}^{k_j}$ $(j = 2, \ldots, m)$ либо совпадает с $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, либо является подгранью $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, и в обоих случаях $\Re_{i_j}^{k_j}$ лежат в ортогональной e^j опорной гиперплоскости к $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$, для которой вектор e^j является $\Re_{i_{j-1}}^{k_{j-1}}$-нормалью. Отсюда следует, что размерности граней $\Re_{i_1}^{k_1}, \ldots, \Re_{i_m}^{k_m}$ удовлетворяют $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$. Пусть, как и выше, $P^{i_j,k_j}(\xi)$ и $D^{\nu^0} P^{i_j,k_j}(\xi)$ суть подмногочлены многочленов $P(\xi)$ и $D^{\nu^0} P(\xi)$, отвечающие грани $\Re_{i_j}^{k_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$, т.е.

$$P^{i_j,k_j}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_{i_j}^{k_j}} \gamma_\alpha \xi^\alpha; \qquad D^{\nu^0} P^{i_j,k_j}(\xi) = \sum_{\beta \in \Re_{i_j}^{k_j}} \gamma_{\beta,\nu^0} \xi^{\beta-\nu^0}, \tag{2.5}$$

где во второй сумме $\gamma_{\beta,\nu^0} = 0$ при $\beta < \nu^0$. Теперь сравним поведение многочленов $P(\xi)$ и $D^{\nu^0}P(\xi)$, полагая

$$\rho_s \to \infty, \qquad \xi^s = \rho_s^{\sum_{j=1}^n x_j^s e^j} \qquad (s = 1, 2, \dots). \tag{2.5'}$$

Можно предположить, что для некоторого r $(1 \le r \le m)$ имеем

$$\rho_s^{x_r^s} \to \infty, \qquad \rho_s^{x_{r+1}^s} \to b \ge 1 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{2.6}$$

Для $r = m = n$ положим $x_{n+1}^s = 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Из выпуклости многогранника $\Re$ и его граней и из e^j-однородности подмногочленов $P_{i_j}^{k_j}$, при некотором мультииндексе α, принадлежащем всем граням $\Re_{i_j}^{k_j}$ в силу (2.5) имеем

$$\begin{aligned} P(\xi^s) &= \rho_s^{(\alpha, x_1^s e^1)}\left[P^{i_1,k_1}\left(\rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1} x_j^s e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_1 x_1^s})\right] = \\ &= \rho_s^{(\alpha, x_1^s e^1 + x_2^s e^2)}\left[P^{i_2,k_2}\left(\rho_s^{\sum_{j=3}^{n+1} x_j^s e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_2 x_2^s})\right] = \\ &= \dots = \rho_s^{\left(\alpha, \sum_{j=3}^{r} x_j^s e^j\right)}\left[P^{i_r,k_r}\left(\rho_s^{\sum_{j=r+1}^{n+1} x_j^s e^j}\right) + o(\rho^{-\varepsilon_r x_r^s})\right], \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ – некоторые положительные числа и e^{n+1} – некоторый единичный вектор для $r = m = n$. Из (2.6) и определения чисел x_j^s $(j = 1, \dots, n)$ имеем

$$\rho_s^{\sum_{j=r+1}^{n+1} x_j^s e^j} \to e^{r+1} \equiv \eta.$$

Очевидно что $0 < \eta_i < \infty$ $(i = 1, \dots, n)$, т.е. $\eta \in R^{n,0}$. Так как (α, e^1) есть расстояние от начала координат до гиперплоскости, содержащей грань $\Re_{i_1}^{k_1}$, то возможны два случая : $(\alpha, e^1) > 0$ и $(\alpha, e^1) = 0$. Пусть $\alpha, e^1 > 0$. В этом случае грань $\Re_{i_1}^{k_1}$ главная и правильная. Предположим сначала, что $P^{i_r,k_r}(\eta) \ne 0$ (единственный возможный случай при предположении а)). Так как $(\alpha, e^1) > 0$, $x_1^s \to 1$, $x_{i+1}^s = o(x_i^s)$ $(i = 1, \dots)$ при $s \to \infty$, то имеем $\left(\alpha, \sum_{j=1}^r x_j^s e^j\right) > 0$ для всех достаточно больших s. Из (2.7) для таких s имеем

$$|P(\xi^s)| = \rho_s^{(\alpha, e^1)}|P^{i_r,k_r}(\eta)|(1 + o(1)). \tag{2.8}$$

Аналогично, для многочлена $D^{\nu^0}P$ имеем

$$\begin{aligned} |D^{\nu^0}P(\xi^s)| &\le c_1\, \rho_s^{(\alpha, e^1) - (\nu^0, e^1)}|D^{\nu^0}P^{i_r,k_r}(\eta)| + o(\rho^{(\alpha, e^1)}) \le \\ &\le c_1\, \rho_s^{(\alpha, e^1)}|D^{\nu^0}P^{i_r,k_r}(\eta)| + o(\rho_s^{(\alpha, e^1)}), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $c_1 \geq 0$ – некоторая постоянная. Соотношения (2.8) и (2.9) противоречат (2.4). Пусть теперь $P^{l_r,k_r}(\eta) = 0$ в утверждении б). Так как $\eta \in R^{n,0}$ и $(\alpha, e^1) > 0$, то $\Re^{k_r}_{l_r}$ главная, нерегулярная грань и совпадает с единственной вполне правильной нерегулярной гранью Γ, $r = m = 1$, $k_r = k_1 = n - 1$, $e^1 = \mu$ является μ-внешней нормалью грани Γ, $\eta \in \Sigma(P_0)$. Так как по предположению, P_0 есть многочлен с изолированными характеристиками, то существуют окрестность $\cup(\eta)$, гладкие μ-однородные функции $q(\xi)$, $r(\xi)$ и натуральное число k такие, что

$$P_0(\xi) = [q(\xi)]^k r(\xi), \qquad \xi \in \cup(\eta), \tag{2.10}$$

и $D_n q(\eta) \neq 0$, $r(\eta) \neq 0$. Положим $Q(\xi) \equiv P(\xi) - P_0(\xi) = P_1(\xi)$. В окрестности $\cup(\eta)$

$$P(\xi) = [q(\xi)]^k r(\xi) + P_1(\xi) + Q(\xi). \tag{2.11}$$

Заметим сначала, что Теорема 1.1 позволяет нам считать, что $|\nu^0| = 1$. Так как число k в (2.10) натуральное, то имеем $|\nu^0| < k$. Пусть для определенности $\nu^0 = (1, 0, ..., 0)$. Из (2.10) для многочлена $D^{\nu^0} P_0(\xi) \equiv D_1 P_0(\xi)$ имеем при $\xi \in \cup(\eta)$

$$D_1 P_0(\xi) = [q(\xi)]^k D_1 r(\xi) + k\,[q(\xi)]^{k-1} D_1 q(\xi). \tag{2.12}$$

Многочлены P_0, $D_1 P_0$, P_1, $D_1 P_1$ μ-однородны. Подставляя значение $\{\xi^s\}$ из (2.5') в (2.11), (2.12) и полагая

$$\eta^s = \rho_s^{\sum_{j=2}^{n+1} x_j^s e^j} \qquad (s = 1, 2, ...)$$

для достаточно больших s (для s, удовлетворяющих $\eta^s \in \cup(\eta)$), получим

$$P(\xi^s) = \rho_s^{x_1^s d_0} P_0(\eta^s) + \rho_s^{x_1^s d_1} P_1(\eta^s) + Q(\xi^s) = \rho_s^{x_1^s d_0} [q(\eta^s)]^k\, r(\eta^s) + \rho_s^{x_1^s d_1} P_1(\eta^s) + Q(\xi^s), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} D_1 P(\xi^s) &= \rho_s^{x_1^s [d_0 - \mu_1]} D_1 P_0(\eta^s) + \rho_s^{x_1^s [d_1 - \mu_1]} D_1 P_1(\eta^s) + D_1 Q(\xi^s) = \\ &= \rho_s^{x_1^s [d_0 - \mu_1]} \left([q(\eta^s)]^k D_1 r(\eta^s) + k\,[q(\eta^s)]^{k-1} D_1 q(\eta^s)\right) + \\ &+ \rho_s^{x_1^s [d_0 - \mu_1]} D_1 P_1(\eta^s) + D_1 Q(\xi^s). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Так как $|P(\xi^s)| \to \infty$ и $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ и $P_0(\eta) = 0$, то из Леммы 1.2 следует, что $P_0(\eta^s) \geq 0$ и $P_1(\eta^s) > 0$ для достаточно больших s. С другой стороны, из простых геометрических соображений, при $s \to \infty$ имеем

$$|Q(\xi^s)| = o\left(\rho_s^{x_1^s d_1}\right), \qquad |D_1 Q(\xi^s)| = o\left(\rho_s^{x_1^s [d_1 - \mu_1]}\right). \tag{2.15}$$

Из (2.13) и (2.15) для достаточно больших s имеем

$$1+|P(\xi^s)| \geq c_2 \left[1+\rho_s^{x_1^s d_1}\right], \tag{2.16}$$

где $c_2 > 0$ – постоянная. Так как $d_1 < d_0$, то из (2.14) и (2.15) получим

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq c_3 \rho_s^{x_1^s [d_0-\mu_1]}, \tag{2.17}$$

где $c_3 \geq 0$ – некоторая постоянная. Сначала предположим, что $k = 1$. По предположению, $D_n q(\eta) \neq 0$, так что из условия (2.3) следует $d_0 - \mu_n \leq d_1$. С другой стороны, $d_0 - \mu_1 \leq d_0 - \mu_n \leq d_1$ поскольку $\mu_1 \geq \mu_n$. Оценки (2.16) и (2.17) вместе противоречат (2.4). Пусть теперь $k > 1$. Так как по предположению $r(\eta) \neq 0$, то для достаточно больших s имеем $r(\eta^s) \neq 0$. Следовательно, согласно Лемме 1.2 и (2.13), для достаточно больших s имеем

$$1+P(\xi^s) \geq c_4 \left[1+\rho_s^{x_1^s d_0}[q(\eta^s)]^k + \rho_s^{x_1^s d_1}\right], \tag{2.18}$$

где $c_4 > 0$ – постоянная. Для $k > 1$ многочлен $D_1 P_0$ представляется в виде

$$D_1 P_0(\xi) = [q(\xi)]^{k_1-1} Q_1(\xi), \tag{2.19}$$

где $Q_1(\xi) = q(\xi) D_1 r(\xi) + k D_1 q(\xi)$. Из (2.14), (2.15) и (2.19) следует, что для некоторой постоянной $c_5 \geq 0$ и для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|D_1 P(\xi^s)| \leq c_5 \left[\rho_s^{x_1^s [d_0-\mu_1]} |q(\eta^s)|^{k-1} + \rho_s^{x_1^s [d_1-\mu_1]}\right]. \tag{2.20}$$

Из (2.18) и (2.20) следует, что для достаточно больших s

$$\frac{|D_1 P(\xi^s)|}{1+|P(\xi^s)|} \leq c_6 \frac{\rho_s^{x_1^s [d_0-\mu_1]} |q(\eta^s)|^{k-1}}{1+\rho_s^{x_1^s d_0} |q(\eta^s)|^k + \rho_s^{x_1^s d_1}} + c_6 \frac{\rho_s^{x_1^s [d_0-\mu_1]}}{1+\rho_s^{x_1^s d_1}}, \tag{2.21}$$

где $c_6 = c_5/c_4$. Так как $\rho_s \to \infty$, $x_1^s \to 1$ при $s \to \infty$ и $\mu_1 > 0$, то очевидно, что второе слагаемое в правой части (2.21) ограничено для всех s. Для оценки первого слагаемого заметим, что из предположения $D_n q(\eta) \neq 0$ следует $D_n^k P_0(\eta) \neq 0$. Следовательно, из (2.3) получим $d_0 - \Delta(\eta, P-0) = d_0 - k\mu_n \leq d_1$. Теперь для $x = \rho_s^{x_1^s}$, $y = |q(\eta^s)|$, $a = d_0 - \mu_1$, $b = k-1$, $c = d_0$, $d = ke = d_1$ применим Лемму 1.3. Заметим, что для достаточно больших s, $x = \rho_s^{x_1^s} \geq 1$ имеем $y = |q(\eta^s)| \in [0, 1]$, так что условие Леммы 1.3 сводится к $d_0 - k\mu_1 \leq d_1$. Это противоречие с (2.4) завершает доказательство для случая $(\alpha, e^1) > 0$. Пусть теперь $(\alpha, e^1) = 0$. Сначала отметим, что если многочлен P имеет правильный многогранник Ньютона $\Re$, то многогранник Ньютона многочлена $P(\xi)|_{\xi_j} = 0$ $(1 \le j \le n)$ также правильный. С другой стороны, грань, для которой e^1 является $\Re$-нормалью, проходит через начало координат, т.е. является неглавной гранью для $\Re$. Следовательно, $e_i^1 \le 0$ $(i = 1, ..., n)$. Заметим, что если эта грань имеет размерность m $(1 \le m \le n-1)$, то можно предположить, что $e_1^1 = ... = e_m^1 = 0$, $e_{m+1}^1 < 0,...,e_n^1 < 0$. Так как

$$e_j^1 = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln \xi_i^s}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\ln \xi_j^s)^2}} < 0,$$

то начиная с некоторого s_0 имеем $\xi_j^s < 1$ $(j = m+1, ..., n; s = s_0, s_0+1, ...)$. Далее, так как $\xi^s \to \infty$ для некоторого i $(1 \le i \le m)$ имеем $\xi_i^s \to \infty$. Следовательно, для некоторой подпоследовательности $\{\xi^s\}$, $\xi_j^s \to \infty$ по крайней мере для одного j $(m < j \le n)$, и

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{m} (\ln \xi_j^s)^2}{(\ln \xi_j^s)^2} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{2.22}$$

Пусть $\psi(\xi) = \max\limits_{1\le i\le m} \xi_i$. Для некоторых $\varepsilon > 0$ и j, удовлетворяющих (2.22), положим $\xi_j^s = o([\psi(\xi^s)]^{-\varepsilon})$, т.е. для каждого $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 \ge 0$

$$(\xi_j^s)^{\alpha_1} [\psi(\xi^s)]^{\alpha_2} \to 0. \tag{2.23}$$

Таким образом, в многочленах $P(\xi^s)$ и $D^{\nu^0} P(\xi^s)$ важную роль играют мономы $\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1}...\xi_n^{\beta_n}$ с $\beta_j = 0$ для j, удовлетворяющие условию (2.23). Поэтому полагая $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, ..., \bar{\xi}_n)$, где $\bar{\xi}_j = 0$ если j удовлетворяет (2.23) и $\bar{\xi}_j = \xi_j$ в противном случае, легко видеть, что для некоторой подпоследовательности $\{\xi^s\}$ соотношение (2.4) в обоих утверждениях а) и б) превращается в соотношение

$$\frac{D^{\nu^0} P(\bar{\xi})}{1 + |P(\bar{\xi}^s)|} \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{2.24}$$

Таким образом, для случая $(\alpha, e^1) = 0$ получим многочлен $P(\bar{\xi})$ от n переменных, чей правильный многогранник Ньютона имеет лишь регулярные правильные грани. Повторяя вышеприведенные рассуждения для многочлена $P(\bar{\xi})$ и многогранника $\bar{\Re} = \Re(P(\bar{\xi}))$, после конечного числа шагов получим либо противоречие, либо соотношение (2.24) в одномерном случае. Последнее соотношение очевидно. Теорема 2.1. доказана.

Замечание 2.2. При $n = 2$ полученный результат в классе двуслойных многочленов окончателен. Действительно, в этом случае нерегулярными могут быть лишь одномерные грани. Из результатов работы [11] следует, что при $n = 2$ обобщенно-однородный многочлен имеет лишь изолированные характеристики. Теперь приведем два примера многочленов, удовлетворяющих Условиям I–III и Теореме 2.1.

Пример 1. Пусть $n = 2$ и $P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2^2)^2 + \xi_2^6$. Многогранник Ньютона этого многочлена является вполне правильным четырехугольником с вершинами $(0,0)$, $(4,0)$, $(2,4)$, $(0,6)$. Вполне правильная грань $(2,4)$–$(0,6)$ регулярна. Единственной нерегулярной гранью является одномерная вполне правильная грань $(4,0)$–$(2,4)$ с единичной внешней нормалью $\mu = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Следовательно, Условие II выполняется. Имеем $d_0 = 8/\sqrt{5}$, $d_1 = 6/\sqrt{5}$, $P_0(\xi) = \xi_1^2(\xi_1 - \xi_2^2)^2$, $P_1(\xi) = \xi_2^6$. Множество $\Sigma(P_0)$ содержит точки вида $(t, \sqrt{t})$ или $(t, -\sqrt{t})$ при $t \neq 0$. Для точек $\eta \in \Sigma(P_0)$ имеем $P_1(\eta) \neq 0$, $\Delta(\eta, P_0) = 2/\sqrt{5}$. Следовательно, Условие I и (2.3) выполняются. Условие III следует из представления $P_0(\xi) = \xi_1^2(\xi_1 - \xi_2^2)$. Таким образом, из Теоремы 2.1 имеем $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^2$.

Пример 2. Пусть $n = 3$ и $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \xi_2 \xi_3)^2 + \xi_1^6$. Многогранником Ньютона этого многочлена является вполне правильная пирамида с вершинами $(0,0,0)$, $(8,0,0)$, $(0,8,0)$, $(0,0,8)$. Единственной вполне правильной нерегулярной гранью является двумерная грань $(8,0,0)$–$(0,8,0)$–$(0,0,8)$. Следовательно, Условие II выполняется. Имеем $\mu = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $d_0 = 8/\sqrt{3}$, $d_1 = 6/\sqrt{3}$, $P_0(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \xi_2 \xi_3)^2$, $P_1(\xi) = \xi_1^6$. Простые вычисления показывают, что для однородного многочлена $q(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \xi_2 \xi_3$ имеем $\operatorname{grad} q(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$. Следовательно, $\Delta(\eta, P_0) = 2/\sqrt{3}$ для всех $\eta \in \Sigma(P_0)$ и многочлен $P_0(\xi)$ представляется в виде (2.1) при $m = 2$ и $r(\xi) \equiv 1$. Таким образом, Условие III и (2.3) выполняются. Выполнение Условия I очевидно. Таким образом, по Теореме 2.1 имеем $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^3$.

§3. ОЦЕНКИ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧЕ I

Из результатов предыдущих пунктов следует, что если многогранник Ньютона многочлена не является правильным, либо нарушается условие (2.3), тогда существуют мультииндексы $\{\nu\}$ такие, что $D^\nu P \not< P$. В этом параграфе мы покажем, что если нарушается одно из этих условий, то все еще существует набор мультииндексов $\{\nu\}$ такой, что $D^\nu P < P$.

Теорема 3.1. **Пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$. Предположим, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и что все главные грани $\Re$ регулярны. Тогда $D^\nu P < P$ для тех и только тех $\nu \in N_0^n$, для которых $(D^\nu P) \subset \Re$.**

Необходимость следует из рассуждений, использованных в доказательстве Леммы 1.1, а достаточность следует из рассуждений, использованных в доказательстве утверждения a) Теоремы 2.1.

Теорема 3.2. **Пусть $\Re$ – правильный многогранник Ньютона многочлена P. Предположим, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и все правильные грани $\Re$ регулярны, за исключением $(n-1)$–мерной правильной грани Γ. Пусть μ – $\Re$–нормаль грани Γ и $\Sigma(P_{d_0(\mu)}) \cap \Sigma(P_{d_1(\mu)}) = \emptyset$. Тогда $D^\nu P < P$ при $d_0 - (\mu, \nu) \leq d_1$.**

Замечание 3.1. В отличие от Теоремы 2.1 а) изолированность характеристик многочлена P_0 не требуется; б) правильная (но не вполне правильная) грань может быть нерегулярной.

Доказательство Теоремы 3.2 : следует из Леммы 1.1 в [9], так как для $d_0 - (\mu, \nu) \leq d_1$ для всех мономов ξ^α многочлена $D^\nu P$ имеем $(\mu, \alpha) \leq d_1$.

Следующий результат докажем для двумерного случая, предполагая, что подмногочлен, отвечающий одномерной грани, является однородным.

Теорема 3.3. **Пусть $\Re = \Re(P)$ – правильный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$. Предположим, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и все правильные грани $\Re$ регулярны, за исключением одномерной грани Γ. Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ – $\Re$–нормаль грани Γ и $\mu_1 = \mu_2$. Предположим далее, что $\Sigma(P_0) \cap \Sigma(P_1) = \emptyset$, где множества $\Sigma(P_0)$ и $\Sigma(P_1)$ и числа d_0, d_1, $\Delta(\eta, P_0)$ определены как и выше, и**

$$\Delta(P_0) = \min_{\eta \in \Sigma(P_0)} \Delta(\eta, P_0). \tag{3.1}$$

Тогда :

а) если $d_0 - (\mu, \nu) \leq d_1$, то $D^\nu P < P$ для всех $\nu \in N_0^2$.

б) если $d_0 - \Delta(P_0) > d_1$ и $(\mu, \nu) \geq d_0 - d_1$, то $D^\nu P < P$,

в) если $d_0 - \Delta(P_0) > d_1$ и $0 \neq (\mu, \nu) \leq \Delta(P_0)$, то $D^\nu P \nless P$.

Доказательство : Заметим, что в двумерном случае любой обобщенный однородный многочлен имеет лишь изолированные характеристики (см. [6], [12]), и что только вполне правильные грани являются нерегулярными. Следовательно, утверждение пункта а) следует из Теоремы 2.1. Утверждение пункта б) непосредственно следует из Теоремы 3.2. Для доказательства утверждения пункта в) заметим, что согласно Лемме 2.1 в [11], для $\eta \in \Sigma(P_0)$ существуют натуральное число $k = k(\eta)$, действительное число $\tau = \tau(\eta)$ и многочлен $r(\xi)$ такие, что

$$P(\xi) = (\xi_1 - \tau\,\xi_2)^k\, r(\xi); \qquad r(\eta) \neq 0; \qquad \eta_1 - \tau\,\eta_2 = 0. \tag{3.2}$$

Можно предположить, не умаляя общности, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Следовательно, $d_0 = \operatorname{ord} P_0$, $d_1 = \operatorname{ord} P_1$, $\Delta(\eta, P_0) = k_2$ и и условия пункта в) можно переписать в следующем виде : $d_0 - k > d_1$ и $0 \neq |\nu| \leq \Delta(P_0) \leq k$, соответственно. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\xi_1^s = s\,\eta_1^s \equiv s\,(\tau\,\eta_2 + s^{-\varepsilon}), \qquad \xi_2^s = s\,\eta_2^s \equiv s\,\eta_2 \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Так как $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, то существует постоянная $c_1 \geq 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|P_0(\xi^s)| = s^{d_0 - \varepsilon k} |r(\eta^s)| \leq c_1\, s^{d_0 - \varepsilon k},$$

$$|P_1(\xi^s)| = s^{d_1} |P_1(\eta^s)| \leq c_1\, s^{d_1}.$$

Так как $|Q(\xi^s)| = |P(\xi^s) - P_0(\xi^s) - P_1(\xi^s)| = o(s^{d_1})$ при $s \to \infty$, то для достаточно больших s и для некоторой постоянной $c_2 \geq 0$ имеем

$$|P_0(\xi^s)| \leq c_2\, s^{\alpha_\varepsilon}, \tag{3.3}$$

где $\alpha_\varepsilon = \max\{d_0 - \varepsilon\, k, d_1\}$.

Используя (3.2) $0 \neq |\nu| \leq k$, имеем $D^\nu P_0(\xi) = (\xi_1 - \tau\,\xi_2)^{k - |\nu|} r_2(\xi)$, где $r(\eta) \neq 0$. Следовательно, $D^\nu P_0(\xi^s) = s^{d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|)} r_2(\eta^s)$, $s = 1, 2, \ldots$. Аналогично, $D^\nu P_1(\xi^s) = s^{d_1 - |\nu|} D^\nu P_1(\xi^s)$, $s = 1, 2, \ldots$ и

$$|D^\nu Q(\xi^s)| = o(s^{d_0 - |\nu|}) \qquad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Из последних трех соотношений и Леммы 1.2 следует, что существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что $|D^\nu P(\xi^s)| \geq c_3\, s^{b_\varepsilon}$, где $b_\varepsilon = \max\{d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|), d_1 - |\nu|\}$. Выберем число ε так, что

$$d_0 - \varepsilon\, k = d_1 \tag{3.4}$$

Сначала предположим, что $|\nu| = k$. Так как, по предположению $d_0 - k > d_1$, то $b_\varepsilon = d_0 - k > d_1 = a_\varepsilon$ и

$$\frac{|D^\nu P(\xi^s)|}{1 + |D^\nu P(\xi^s)|} \to \infty \qquad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{3.5}$$

Следовательно, $D^\nu P \not< P$. Пусть теперь $|\nu| < k$. Покажем, что $a_\varepsilon < b_\varepsilon$, где ε как и в (3.4). Заметим, что

$$d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|) = d_0 - |\nu| - (d_0 - d_1)\frac{k - |\nu|}{k} = (d_1 - |\nu|) + \frac{|\nu|}{k}(d_0 - d_1) > d_1 - |\nu|.$$

Таким образом, $b_\varepsilon = d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|)$. Имеем $b_\varepsilon - a_\varepsilon = d_0 - |\nu| - \varepsilon(k - |\nu|) - (d_0 - \varepsilon k) = |\nu|(\varepsilon - 1)$. Учитывая, что $d_0 - k > d_1$ и (3.4), получим $b_\varepsilon > a_\varepsilon$, откуда следует (3.5). Следовательно, $D^\nu P \not< P$. Теорема 3.3 доказана.

ABSTRACT. Let $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ be a polynomial with real constant coefficients. We derive conditions sufficient for the estimate $|D^\nu P(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ to hold for all multi-indices $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, or for some chosen multi-index. In two dimensional case these conditions are also necessary.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ Линейных Дифференциальных Операторов с Частными Производными, тома 1 – 4, Москва, Мир, 1986.
2. Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность", Труды МИАН СССР, том 150, стр. 143 — 159, 1979.
3. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 — 81, 1967.
4. С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, том 144, № 4, стр. 767 — 769, 1962.
5. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических операторов", Мат. Сб., том 75, № 3, стр. 400 — 416, 1968.
6. J. Friberg, "Multi-quasi-elliptic polynomials", Ann Suola norm. supper Pisa. Ser. III, vol. 21, pp. 239 — 260, 1967.
7. L. Cattabriga, "Su une classe di polinomi ippoellittici", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 36, pp. 285 — 309, 1966.
8. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Труды МИАН СССР, том 140, стр. 130 — 161, 1966.
9. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 21, № 5, стр. 453 — 470, 1986.
10. Ф. Трев, "О локальной разрешимости линейных дифференциальных уравнений с частными производными", Успехи Мат. Наук, вып. 2, стр. 252 — 261, 1976.
11. Г. Г. Казарян, "Об одном семействе полуэллиптических полиномов", Изв. АН Арм. ССР, том 9, № 3, стр. 180 — 211, 1974.

26 Декабря 1998

Ереванский государственный университет

ОПИСАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В n-мерном унитарном пространстве C^n рассмотрим линейный оператор J, удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$, и квадратично интегрируемую $n \times n$-матрицу-функцию $W(r)$, принимающую J-унитарные значения. Пусть W_0 – минимальный симметрический оператор в пространстве $L^2(0,l;C^n)$ квадратично интегрируемых n-мерных вектор-функций $x(r)$, $0 < r < l < \infty$, порожденных дифференциальным выражением $W^*(r)\,J\,\dfrac{d}{dr}(W(r)\,x(r))$. Расширения оператора W_0, определяемые распадающимися штурмовыми граничными условиями, представляют определенный интерес. В настоящей статье дается описание как множества таких спектральных функций, так и спектральных функций интегральных операторов с однопарным ядром.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [1].

1. Сигнатурный оператор J, определенный на $N = C^n$ и удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$, может быть представлен в виде $J = iP_+ - iP_-$, где $P_\pm = 2^{-1}(I_n \mp iJ)$ $(P_\pm^* = P_\pm = P_\pm^2; P_+ + P_- = I_n)$. Положим $N_\pm = P_\pm N$. Для опреленности предположим, что $\dim N_+ \geq \dim N_- (N_\pm = P_\pm N)$. Так как $N = N_+ \oplus N_-$ является ортогональным разложением, то операторы, действующие в N, представляются в виде блочных матриц второго порядка.

Рассмотрим квадратично интегрируемую матрицу-функцию $W(r)$ на интервале $(0,l)$ $(l < \infty)$ и принимающую J-унитарные значения :

$$W^*(r)JW(r) = J = W(r)JW^*(r), \qquad \|W(r)\| \in L^2(0,l).$$

Пусть $AC(0,l;N)$ – класс локально абсолютно непрерывных функций, определенных на $(0,l)$ со значениями в N. В работе [1] рассмотрен дифференциальный оператор

$$(\mathbf{W}x)(r) = W^*(r)J\frac{d}{dr}(W(r)x(r)), \qquad x \in L^2(0,l;N) \tag{1}$$

действующий на многообразии

$$D(\mathbf{W}) = \{x \in L^2(0,l;N)/W(r)x(r) \in AC(0,l;N), \mathbf{W}x \in L^2(0,l;N)\}.$$

Обозначим через $D(\mathbf{W}_0)$ сужение оператора $\mathbf{W}$ на многообразие $D(\mathbf{W}_0) = \{x \in D(\mathbf{W})/ \lim_{r\to 0} x(r) = \lim_{r\to l} x(r) = 0\}$. Известно (см. [1], Теорема 1), что $\mathbf{W}_0$ является симметричным и $\mathbf{W}_0^* = \mathbf{W}$. Если существует $\lim W(r)$ при $r \to 0$ и $r \to l$, то имеем

$$-i[(\mathbf{W}x,y) - (x,\mathbf{W}y)] = (\mathrm{J}\begin{bmatrix} x(l) \\ x(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(l) \\ y(0) \end{bmatrix}),$$

где $\mathrm{J} = -i\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_+ - P_- & 0 \\ 0 & P_- - P_+ \end{bmatrix}$.
Следовательно (см. [1]), вопрос описания симметрических, диссипативных и аккумулятивных расширений $\mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}$ сводится к описанию J-нейтральных и J-дефинитных подпространств в пространстве $\widehat{N} = N \ominus N$ с индефинитной метрикой, порожденной оператором J. Такие подпространства задаются с помощью нерастягивающихся "угловых" операторов $K_\pm : \widehat{N}_\pm \to \widehat{N}_\mp$, $\widehat{N}_\pm = \widehat{P}_\pm \widehat{N}$; $\widehat{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm \mathrm{J})$). Поэтому (см. [1]), рассматриваемые расширения $\mathbf{W}_K$ оператора $\mathbf{W}_0$ ($\mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}_K \subset \mathbf{W}$) определяются граничными условиями вида $(P_- x(l) + P_+ x(0)) + K_+ (P_+ x(l) + P_- x(0)) = 0$ или

$$(P_+ x(l) + P_- x(0)) + K_- (P_- x(l) + P_+ x(0)) = 0, \tag{2}$$

где $K_\pm$ - нерастягивающий оператор, определенный на всем пространстве $\widehat{N}_+ (\widehat{N}_-)$. Если K унитарный (т.е. $K^* K = I_n$), то эти условия определяют самосопряженный оператор.

В наших рассмотрениях важную роль играет матрицант $U(r,\lambda)$ дифференциального выражения (1), т.е. матричное решение задачи Коши :

$$W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)U(r,\lambda)) = \lambda U(r,\lambda); \qquad U(r,\lambda) = I_n.$$

Матрицант $U(r,\lambda)$ можно характеризовать как функцию, удовлетворящую тождеству

$$U^*(r,\mu) J\, U(r,\lambda) - J = (\lambda - \overline{\mu}) \int_0^r U^*(r,\mu)\, U(r,\lambda)\, dr.$$

Отсюда следует, что $U^*(r,\overline{\lambda})J\,U(r,\lambda) = J = U(r,\lambda)J\,U^*(r,\overline{\lambda})$, $\quad \lambda \in C$,

$$\frac{U^*(r,\lambda)J\,U(r,\lambda) - J}{\lambda - \overline{\lambda}} > 0; \qquad \frac{U(r,\lambda)J\,U^*(r,\lambda) - J}{\lambda - \overline{\lambda}} > 0, \qquad \Im\lambda \neq 0.$$

В разложении $N = N_+ \oplus N_-$ представим матрициант $U(l,\lambda)$ в виде

$$U(l,\lambda) = \begin{bmatrix} U_{11}(l,\lambda) & U_{12}(l,\lambda) \\ U_{21}(l,\lambda) & U_{22}(l,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения

$$W^*(r)\,J\,\frac{d}{dr}(W(r)x(r)) - \lambda\,x(r) = f(r), \qquad f \in L^2(0,l;N), \tag{3}$$

удовлетворяющее граничному условию (2), имеет [1] вид

$$x(r,\lambda) = (\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{W}_K)\,f)(r) = \int_0^l R_K(r,s,\lambda)\,f(s)\,ds,$$

где ядро $R_K(r,s,\lambda)$ резольвенты $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{W}_K)$ определяется соотношением

$$R_K(r,s,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda) - J)\,U^*(s,\overline{\lambda}) & \text{при} \quad s < r, \\ U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda) + J)\,U^*(s,\overline{\lambda}) & \text{при} \quad s > r \end{cases} \tag{4}$$

Функция $\omega(\lambda) = \omega_K(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) = \omega_K(\lambda) = {} & [(P_+\,U(l,\lambda) + P_-) + K(P_-U(l,\lambda) + P_+)]^{-1}\times \\ & \times[(P_+\,U(l,\lambda) - P_-)\,J + K(P_-\,U(l,\lambda) - P_+)\,J] \end{aligned} \tag{5}$$

и является R-функцией. Вышеописанная конструкция сохраняет смысл, когда нерастягивающие матрицы K заменяются нерастягивающими функциями $K(\lambda)$, которые аналитичны в верхней полуплоскости C_+.

Пусть $\Omega(C_+)$ – класс R-функций $\omega(\lambda)$, которые являются образами функций $K(\lambda)$ при преобразовании (5). Рассмотрим пространство L преобразований

$$F(\lambda,f) = \int_0^l U^*(r,\overline{\lambda})\,f(r)\,dr, \qquad f \in L^2(0,l;N). \tag{6}$$

Оно становится гильбертовым пространством целых вектор-функций $F(\cdot,f)$, если ввести скалярное произведение $(F(\lambda,f),F(\lambda,g))_L \stackrel{def}{=} (f,g)_{L^2}$.

Выражение (6) является "направляющим функционалом" оператора $\mathbf{W}_0$. Это означает (см. [2]), что уравнение (3) имеет решение, принадлежащее $D(\mathbf{W}_0)$ тогда и только тогда, когда $F(\lambda_0,f) = 0$. Следовательно, $F(\lambda,\mathbf{W}_0\,f) = \lambda\,F(\lambda,f)$, $f \in L^2(0,l;N)$. Неубывающая функция $\sigma(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$ называется спектральной функцией $\mathbf{W}_0$, если пространство L изометрически вкладывается в $L^2(-\infty,\infty;d\sigma)$. Если это вложение отображает L на все $L^2(-\infty,\infty;d\sigma)$, то $\sigma(\xi)$ называется ортогональной спектральной функцией.

Отметим, что L является пространством Бранжа, т.е. гильбертовым пространством целых вектор-функций с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda,\mu)=\int_0^l U^*(r,\overline{\lambda})\,U(r,\overline{\mu})\,dr=\frac{U^*(l,\overline{\lambda})\,J\,U(l,\overline{\mu})-J}{\overline{\mu}-\lambda}=\frac{2\,V(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\overline{\mu}-\lambda}.$$

Для каждого $F\in L$ и $x\in N$ имеем $(F(\lambda),\Phi(\lambda,\mu))_L=(F(\mu),x)_N$. Отсюда следует, что функции $\Phi(\lambda,\mu_n)\,x$, где $x\in N$ и μ_n – ограниченная последовательность в C_+, плотны в L. Следовательно, преобразование, обратное к (6), имеет вид

$$f(r)=\int_{-\infty}^{\infty}U(r,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\,F(\lambda,f).$$

В самом деле, легко проверить, что

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(r,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\,F(\lambda,f),U(r,\overline{\mu})\,x\right)_{L^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(d\sigma(\lambda)\,F(\lambda,f),\Phi(\lambda,\mu)x)=$$
$$=(F(\lambda,f),\Phi(\lambda,\mu)x)_L=(f(r),U(r,\overline{\mu})x)_{L^2}.$$

Следующая теорема описывает множество всех спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$ (см. [1]).

Теорема 1. Множество спектральных функций R-функций $\omega(\lambda)\in\Omega(C_+)$ совпадает с множеством всех спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$. Если $\omega(\lambda)$ являеся дробно-линейным преобразованием унитарного углового оператора K, то множество ортогональных спектральных функций есть в точности множество спектральных функций самосопряженных расширений оператора $\mathbf{W}_0$.

Доказательство этой теоремы основано на равенстве

$$(R_\lambda f,f)=2^{-1}(\omega(\lambda)\,F(\lambda,f),F(\overline{\lambda},f))+(G_\lambda f,f),\tag{7}$$

где $(G_\lambda f,f)$ – целая вещественная функция. Из этого соотношения следует, что для любого $f\in L^2(0,l;N)$ имеет место

$$(f,f)=\int_{-\infty}^{\infty}(F(\xi,f),d\sigma(\xi)\,F(\xi,f)),$$

где $\sigma(\xi)$ – спектральная функция R-функции $\omega(\lambda)$.

Рассмотрим теперь расширения оператора $\mathbf{W}_0$ с **распадающимися** (штурмовыми) граничными условиями, т.е. граничные условия задаются равенством (2) в предположении, что K удовлетворяет условию $P_+ K P_+ = P_- K P_- = 0$. В этом случае в разложении $N = N_+ \oplus N_-$ имеем $K = \begin{bmatrix} 0 & K_l \\ K_0 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно, (2) можно записать в виде

$$P_+ x(l) + K_l P_- x(l) = 0; \qquad P_- x(0) + K_0 P_+ x(0) = 0, \tag{8}$$

где $K_l : N_- \to N_+$ и $K_0 : N_+ \to N_-$ – произвольные нерастягивающие операторы. В частности, отсюда следует, что распадающиеся граничные условия определяют самосопряженные расширения в том и только в том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$ и оба оператора K_0 и K_l унитарны.

Перейдем теперь к описанию спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$ с распадающимися граничными условиями. В этом случае функцию $\omega(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda) & U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} i(U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda)) & -i(U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda)) \\ -iK_0 & iP_- \end{bmatrix}.$$

Положим

$$T(\lambda) = [U_{11}(l,\lambda) + K_l U_{21}(l,\lambda)]^{-1}[U_{12}(l,\lambda) + K_l U_{22}(l,\lambda)]. \tag{9}$$

Из свойств матрицианта $U(l,\lambda)$ следует, что для произвольного нерастягивающего оператора $K_l \colon N_- \to N_+$ это дробно-линейное преобразование хорошо определен и является нерастягивающим оператором из N_- в N_+. Функцию $\omega(\lambda)$ можно записать в виде $\omega(\lambda) = i \begin{bmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_+ & -T(\lambda) \\ -K_0 & P_- \end{bmatrix}$. Из равенства

$$\begin{bmatrix} P_+ & T(\lambda) \\ K_0 & P_- \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & -T(\lambda)(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} \\ -K_0(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & (P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} \end{bmatrix}$$

получим

$$\omega(\lambda) = i \begin{bmatrix} (P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}(P_+ + T(\lambda)K_0) & -2T(\lambda)(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} \\ -2K_0(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} & (P_- - K_0 T(\lambda))^{-1}(P_- + K_0 T(\lambda)) \end{bmatrix}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega_+(\lambda) &= i(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1}(P_+ + T(\lambda)K_0), \\ \omega_-(\lambda) &= i(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1}(P_- + K_0 T(\lambda)). \end{aligned} \tag{10}$$

Ясно, что функции $\omega_\pm(\lambda)$ являются R-функциями, действующими в $N_\pm$. Следовательно

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_+(\lambda) & -T(\lambda)(iP_- + \omega_-(\lambda)) \\ -K_0(iP_+ + \omega_+(\lambda)) & \omega_-(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Зафиксируем некоторое граничное условие в нуле, задав изометрический оператор $K_0 : N_+ \to N_-$ $K_0 K_0^* = P_-$, $K_0^* K_0 = P_0 = P_+$, и рассмотрим задачу описания спектральных функций симметрического оператора $\mathbf{W}_{K_0}$, определенного формулой (1) на многообразии $D(\mathbf{W}_{K_0}) = \{x \in D(\mathbf{W}) / P_- x(0) + K_0 P_+ x(0) = 0;\ x(l) = 0\}$. Имеем $(P_- \pm K_0 T(\lambda)) = K_0(P_+ \pm T(\lambda)K_0)K_0^*$. Тогда, $\omega_-(\lambda) = K_0 \omega_+(\lambda) K_0^*$. С другой стороны

$$-2T(\lambda)(P_- - K_0 T(\lambda))^{-1} = -2(P_+ - T(\lambda)K_0)^{-1} T(\lambda) K_0 K_0^* = (iP_+ - \omega_+(\lambda))K_0^*.$$

Следовательно

$$\omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \omega_+(\lambda) & (iP_+ - \omega_+(\lambda))K_0^* \\ -K_0(iP_+ + \omega_+(\lambda)) & K_0 \omega_+(\lambda) K_0^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda)[P_+ - K_0^*] + \begin{bmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Для нахождения соответствующего резольвентного ядра рассмотрим следующую $(2n \times n)$-матрицу-функцию

$$\Phi(r,\lambda) = \begin{bmatrix} \phi_1(r,\lambda) \\ \phi_2(r,\lambda) \end{bmatrix} = U(r,\lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix}, \quad \Psi(r,\lambda) = \begin{bmatrix} \psi_1(r,\lambda) \\ \psi_2(r,\lambda) \end{bmatrix} = U(r,\lambda) \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

В силу (11) имеем $\omega(\lambda) - J = \left(\begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda) + \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix} \right) [P_+ - K_0^*]$,

$$\omega(\lambda) + J = \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} (\omega_+(\lambda)[P_+ - K_0^*] + [iP_+ \ iK_0^*]).$$

Отсюда следует

$$R_{K_1}(r,s,\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} U(r,\lambda) \left(\begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} \omega_+(\lambda) + \begin{bmatrix} -iP_+ \\ -iK_0 \end{bmatrix} \right) [P_+ - K_0^*] U^*(s,\overline{\lambda}), & s < r, \\ U(r,\lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ -K_0 \end{bmatrix} (\omega_+(\lambda)[P_+ - K_0^*] + [iP_+ \ iK_0^*]) U^*(s,\overline{\lambda}), & s > r. \end{cases}$$

Учитывая (12), получим

$$R_K(r,s,\lambda) = \begin{cases} (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))\Phi^*(s,\overline{\lambda})) & \text{при} \quad s < r, \\ \Phi(r,\lambda)(\Psi^*(s,\overline{\lambda}) + \omega_+(\lambda)\Phi^*(s,\overline{\lambda})) & \text{при} \quad s > r. \end{cases} \tag{13}$$

Ясно, что при произвольном $x_+ \in N_+$ вектор-функция $\Phi(r,\lambda)x_+$ удовлетворяет граничному условию (8) в точке $r = 0$. Подставляя $T(\lambda)$ из (9) в (10) и учитывая (12), заметим, что $\omega_+(\lambda)$ определяется дробно-линейным преобразованием

$$\omega_+(\lambda) = -(\phi_1(l,\lambda) + K_l \phi_2(l,\lambda))^{-1}(\psi_1(l,\lambda) + K_l \psi_2(l,\lambda)). \tag{14}$$

Отсюда следует, что $X(r,\lambda)x_+ = (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))$ удовлетворяет граничному условию (8) в точке $r = l$. Как показано в [1], множество $\Omega(\lambda)$ матриц $\omega(\lambda)$, $\lambda \in C_+$ образует круг :

$$\frac{2\Im\omega(\lambda)}{\Im\lambda} \geq (\omega^*(\lambda) + J)\int_0^l U^*(r,\lambda)U(r,\lambda)\,dr(\omega(\lambda) - J).$$

Следовательно, матрица $\omega_+(\lambda)$ заполняет круг $\Omega(\lambda, K_0)$, задаваемый неравенством

$$\frac{2\Im\omega_+(\lambda)}{\Im\lambda} \geq \int_0^l (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))^*(\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))\,dr.$$

Отметим, что если $\dim N_+ = \dim M_-$ и K_0 – унитарный оператор, то окружность $\Omega_0(\lambda, K_0)$ задается равенством

$$\frac{2\Im\omega_+(\lambda)}{\Im\lambda} = \int_0^l (\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))^*(\Psi(r,\lambda) + \Phi(r,\lambda)\omega_+(\lambda))\,dr,$$

когда K_l пробегает множество унитарных операторов. Положим

$$A = \Im\lambda\int_0^l \Phi^*(r,\lambda)\Phi(r,\lambda)\,dr; \quad B = \Im\lambda\int_0^l \Phi^*(r,\lambda)\Psi(r,\lambda)\,dr;$$

$C = \Im\lambda\int_0^l \Psi^*(r,\lambda)\Psi(r,\lambda)\,dr$ и вышерассматриваемый круг представим в виде

$$\omega_+^*(\lambda)A\omega_+(\lambda) + \omega^*(\lambda)_+(B - iI_+) + (B^* + iI_+)\omega_+(\lambda) + C \leq 0,$$

или в параметрическом виде $\omega_+(\lambda) = O + R_l Z R_r$, $Z^*Z \leq I_+$, где $O = -A^{-1}(B - iI_+)$, $R_l = A^{-1/2}$ и $R_r = ((B^* + iI_+)A^{-1}(B - iI_+) - C)^{1/2}$.

В силу (11), соотношение (7) в рассматриваемом случае представим в виде

$$(R_\lambda f, f) = 2^{-1}(\omega_+(\lambda)F_1(\lambda, f), F_1(\overline{\lambda}, f)) +$$
$$+ \left(\begin{bmatrix} 0 & iK_0^* \\ -iK_0 & 0 \end{bmatrix} F(\lambda, f), F(\overline{\lambda}, f)\right) + (G_\lambda f, f),$$

где

$$F_1(\lambda, f) = [P_+ - K_0^*]\int_0^l U^*(r,\overline{\lambda})f(r)\,dr, \quad f \in L^2(0, l; N). \tag{15}$$

Отсюда следует, что $(f, f) = \int_{-\infty}^{\infty}(F_1(\xi, f), d\sigma_+(\xi)\,F_1(\xi, f))$, где $\sigma_+(\xi)$ – спектральная функция R-функции $\omega_+(\lambda)$.

Заметим, что $F_1(\lambda, f)$, определенная выражением (15), является направляющим функционалом для оператора $\mathbf{W}_{K_0}$. В этом легко убедиться, если представить решение $x(r,\lambda)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию $x(l,\lambda) = 0$, в виде

$$x(r,\lambda) = U(r,\lambda)J\int_r^l U^*(s,\overline{\lambda})f(s)\,ds$$

и заметить, что условие $(P_- + K_0P_+)x(0,\lambda) = (P_- + K_0P_+)J\int_r^l U^*(s,\overline{\lambda})f(s)\,ds = 0$ равносильно условию $F_1(\lambda, f) = 0$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Множество спектральных функций оператора $\mathbf{W}_{K_0}$ совпадает с множеством спектральных функций $\sigma_+(\xi)$ R-функций $\omega_+(\lambda)$, задаваемых дробно-линейным преобразованием (14), когда $K_l(\lambda)$ пробегает множество всех нерастягивающих функций, аналитических в верхней полуплоскости.

Ортогональные спектральные функции существуют в том и только в том случае, когда $\dim N_+ = \dim N_-$, а фиксированная матрица K_0 унитарна, и определяются постоянными унитарными матрицами K_l.

2. В этом пункте полученные результаты применим к интегральным операторам S с однопарным ядром (см. [3], [4]) для $f \in L^2(0,l;C^{2n})$

$$S\,f(r) = \Psi(r)\int_0^r \Phi^*(s)\,f(s)\,ds + \Phi(r)\int_r^l \Psi^*(s)\,f(s)\,ds,$$

где $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ – квадратично интегрируемые $(2n \times n)$-матрицы-функции на $(0,l)$. Заметим, что S есть интегральный оператор в $L^2(0,l;C^{2n})$ с ядром

$$S(r,s) = \begin{cases} \Psi(r)\Phi^*(s) & \text{при} \quad s < r, \\ \Phi(r)\Psi^*(s) & \text{при} \quad s > r. \end{cases}$$

В представлении по столбцам $\Phi(r) = \begin{bmatrix} \phi_1(r) \\ \phi_2(r) \end{bmatrix}$, $\Psi(r) = \begin{bmatrix} \psi_1(r) \\ \psi_2(r) \end{bmatrix}$, где $\phi_k(r)$ и $\psi_k(r)$, $k = 1,2$; $r \in (0,l)$ суть $(n \times n)$-матрицы.

Предположим, что $(2n \times 2n)$-матрица $[\Phi(r)\,\Psi(r)]$ $(r \in (0,l))$ невырождена и непрерывна в точках 0 и l. Тогда можно считать, что соотношение

$$\Phi(r)\,\Psi^*(r) - \Psi(r)\,\Phi^*(r) = [\Phi(r)\,\Psi(r)] \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^*(r) \\ \Psi^*(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix}$$

выполняется, так как пару $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ всегда можно заменить на пару $A(r)\Phi(r)$ и $A(r)\Psi(r)$, где $A(r)$-невырожденная $(2n \times 2n)$-матрица-функция. Рассмотрим функцию $U(r) = [\Phi(r)\,\Psi(r)]\,V$, где $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ iI_n & iI_n \end{bmatrix}$. Учитывая, что

$$V^* \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix},$$

легко убедиться, что $U(r)$ J-унитарна. Не умаляя общности предположим, что $U(0) = I_n$.

Рассмотрим теперь дифференциальное выражение (1), где $W(r) = U^*(r)\,J$ и соответствующий оператор $\mathbf{W}_{K_0}$. В этом случае $N_+ = N_- = C^n$, так что можно считать $K_0 = I_n$ и рассмотреть оператор $\mathbf{W}_{I_n}$, являющийся сужением оператора $\mathbf{W}$ на многообразие $D(\mathbf{W}_{I_n}) = \{x \in D(\mathbf{W}) / P_- x(0) + P_+ x(0) = 0, \quad x(l) = 0\}$.

Представим матрициант рассматриваемого дифференциального выражения в виде $U(r,\lambda) = [\Phi(r,\lambda)\,\Psi(r,\lambda)]\,V$ $\Phi(r,0) = \Phi(r)$, $\Psi(r,0) = \Psi(r)$. Отсюда следует, что ядро $R(r,s,\lambda)$ резольвенты произвольного расширения оператора $\mathbf{W}_{l_n}$ имеет вид (13).

Покажем, что оператор S является обратным к некоторому самосопряженному расширению $\widetilde{\mathbf{W}}_{l_n}$ оператора $\mathbf{W}_{l_n}$. Для этого выберем унитарный оператор K_l, задающий граничное условие в точке $r = l$ и удовлетворяющий $\omega_+(0) = 0$ (см. [10]). Имеем $T(0) = -I_n$. Следовательно, K_l определяется преобразованием, обратным к (14) :

$$K_l = -(U_{11}^*(l,0) + U_{12}^*(l,0))^{-1}(U_{21}^*(l,0) + U_{22}^*(l,0)) =$$
$$= -(U_{11}(l,0) + U_{12}(l,0))(U_{21}(l,0) + U_{22}(l,0))^{-1} = -\psi_1(l)\psi_2^{-1}(l).$$

В силу (13) имеем

$$R_K(r,s,0) = \begin{cases} \Psi(r)\Phi^*(s) & \text{при} \quad s < r, \\ \Phi(r)\Psi^*(s) & \text{при} \quad s > r. \end{cases}$$

Следовательно, $S^{-1} = \widetilde{\mathbf{W}}_{l_n}$, где $\widetilde{\mathbf{W}}_{l_n}$ – самосопряженное расширение оператора $\mathbf{W}_{l_n}$, определенным граничными операторами $K_0 = I_n$ и $K_l = -\psi_1(l)\psi_2^{-1}(l)$. Тогда $\mathbf{W}_{l_n} = \widehat{S}^{-1}$, где $\widehat{S}$ – сужение оператора S на многообразие, определенное условием

$$S\,f(l) = \Phi(l)\int_0^l \Psi^*(s)\,f(s)\,ds = 0$$

или, что то же самое, $\int\limits_0^l \Psi^*(s)\,f(s)\,ds = 0$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Произвольное самосопряженное или аккумулятивное расширение оператора $\widehat{S}$ определяется ядром

$$S(r,s) = \begin{cases} (\Psi(r) + \Phi(r)\omega_+(0))\Phi^*(s)) & \text{при} \quad s < r, \\ \Phi(r)(\Psi^*(s) + \omega_+(0)\Phi^*(s)) & \text{при} \quad s > r, \end{cases}$$

где $\omega_+(\lambda)$ определяется по формуле (14) с унитарным или нерастягивающим оператором K_l. Ядро фредгольмовой резольвенты оператора $\widehat{S}$ совпадает с ядром $R_K(r,s,\lambda)$ в представлении (13).

Таким образом, применяя Теорему 2, можно описать спектральные функции оператора $\widehat{S}$.

ABSTRACT. In n-dimensional unitary space C^n we consider a linear operator J satisfying $J^* = -J = J^{-1}$ and a square integrable $n \times n$ matrix function $W(r)$ taking J-unitary values. Let W_0 be a minimal symmetrical operator in the space $L^2(0, l; C^n)$ of square integrable n-dimensional vector-functions $x(r)$, $0 < r < l < \infty$ generated by differential expression $W^*(r)\, J \frac{d}{dr}(W(r)\, x(r))$. Extensions of W_0 determined by decaying Sturm boundary conditions are of special interest. In this paper we describe a set of such spectral functions and apply them for description of spectral functions of integral operators with single-pair kernels.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектральных функций одного класса дифференциальных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 34, № 2, стр. 54–74, 1999.
2. М. Г. Крейн, "Про ермітові оператори з напрямними функціоналами", Сб. Трудов АН УРСС, том 10, стр. 83 — 106, 1948.
3. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Осциляционные Матрицы и Ядра и Малые Колебания Механических Систем, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
4. В. А. Явряп, "К спектральной теории однопарных интегральных операторов", Изв. АН Армении, Математика, том 22, № 1, стр. 75 — 93, 1987.

25 января 1999 Ереванский государственный университет

ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 3, 1999

В статье исследуются вопросы единственности слабых решений начально–краевых задач для одного класса эволюционных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В цилиндре $Q = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, рассмотрим линейное уравнение четвертого порядка вида

$$u_t + \Delta^2 u - \Delta u - m(x, t)u = f(x, t). \tag{1}$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

где ν – внешняя нормаль к Γ. Целью настоящей статьи является доказательство единственности слабых решений задачи (1) — (3). Ж.-Л. Лионсом в [1] (см. также [2]) был получен аналогичный результат для уравнения второго порядка

$$u_t - \Delta u - m(x, t)u = f(x, t).$$

Этот результат основывался на минимаксном принципе для параболических уравнений. Так как этот принцип не применим к уравнениям высокого порядка, мы предлагаем новый подход.

§2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ – пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$ является замыканием в норме пространства $H^s(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем. $H^{-s}(\Omega)$ — пространство, дуальное к $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$. Пространство $L^2(0, T; \overset{\circ}{H}{}^s(\Omega))$ является гильбертовым пространством функций $u(x, t)$ с нормой

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^s(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_s^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{5}$$

Далее, $L^2(0, T; L^\alpha(\Omega))$, $(\alpha \geq 1)$ — пространство функций $u(x, t)$ с нормой

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^\alpha(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^\alpha(\Omega)} \, dt \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Положим $C^{s,1}(\overline{Q}) = C([0, T]; C^s(\overline{\Omega})) \cap C^1([0, T]; C(\overline{\Omega}))$.

§3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Определение 1. Функция $u \in L^2(0, T; \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, $u(x, 0) = 0$ называется сильным решением задачи (1) — (3), если для любого $v \in L^2(0, T; \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$ имеет место интегральное тождество

$$\iint_Q (u_t - m(x, t)\, u)\, v \, dx \, dt + \iint_Q \Delta u \cdot \Delta v \, dx \, dt + \iint_Q \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt = \iint_Q f\, v \, dx \, dt, \tag{7}$$

где $\nabla u = \operatorname{grad} u$. Мы естественно предполагаем, что $m\, u \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$. Для того, чтобы функция $m\, u$ принадлежала бы этому пространству, функция $m(x, t)$ должна удовлетворять некоторому условию, приведенному ниже.

Предложение 1. **Если** $m \in L^2(0, T; L^3(\Omega))$ **и** $f \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, **то для любого сильного решения** $u(x, t)$ **задачи (1)–(3) имеет место оценка**

$$\|u\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))} \leq c \|f\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \tag{8}$$

с некоторой константой $c > 0$.

Доказательство : Пусть $u(x, t)$ - решение задачи (1) — (3). Умножая обе части уравнения (1) на $u(x, t)$, интегрируя по Ω и применяя формулу Грина, получим

$$\int_\Omega [(u_t - m(x, t)\, u)\, u + |\Delta u|^2 + |\nabla u|^2]\, dx = \int_\Omega f(x, t)\, u \, dx$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u(x, t)|^2 dx + \int_\Omega (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2)\, dx = \int_\Omega m(x, t)\, u^2 \, dx + \int_\Omega f\, u \, dx. \tag{9}$$

Далее, так как $u \in L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))$, то $\left(\int_\Omega(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2)\,dx\right)^{1/2}$ эквивалентно $\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}$. Отсюда в частности следует, что существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$\int_\Omega(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2)\,dx \geq c_1\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \tag{10}$$

(здесь и ниже через c_i, $i = 1,2,\ldots$ обозначаем различные постоянные). Оценим правую часть соотношения (9). Имеем

$$\left|\int_\Omega f(x,t)\,u\,dx\right| \leq \|f(t)\|_{H^{-2}(\Omega)}\cdot\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq c_2\|f(t)\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + c_3\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{11}$$

Из неравенства Гельдера находим

$$\left|\int_\Omega m(x,t)\,u^2\,dx\right| \leq \left(\int_\Omega|m|^3dx\right)^{1/3}\left(\int_\Omega|u|^3dx\right)^{2/3} = \|m(t)\|_{L^3(\Omega)}\cdot\|u\|^2_{L^3(\Omega)}. \tag{12}$$

По теореме вложения Соболева получаем непрерывное вложение $H^s(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{s}{n}$ $(q>0)$. Следовательно, при $s=1$, $n=3$ получаем $H^1(\Omega)\subset L^6(\Omega)$ с $\|u\|_{L^6(\Omega)}\leq c\,\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Отсюда заключаем

$$\|u(t)\|_{L^3(\Omega)} \leq \|u(t)\|_{L^6(\Omega)}\cdot(\operatorname{mes}\Omega)^{1/6} \leq c\,\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}. \tag{13}$$

Согласно хорошо известному интерполяционному неравенству для пространств Соболева (см. [3]) $\|u(t)\|_{H^s(\Omega)}\leq c_4\|u(t)\|^{s/2}_{H^2(\Omega)}\cdot\|u(t)\|^{1-s/2}_{L^2(\Omega)}$, $0\leq s\leq 2$ имеем

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_5\,\|u(t)\|^{1/2}_{H^2(\Omega)}\cdot\|u(t)\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получаем

$$\|u(t)\|^2_{L^3(\Omega)} \leq c_6\,\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}\cdot\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{15}$$

Возвращаясь к оценке (12), находим

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega m(x,t)\,u^2\,dx\right| &\leq c_6\,\|m\|_{L^3(\Omega)}\cdot\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}\cdot\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \varepsilon\,\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + c_7\,\|m(t)\|^2_{L^3(\Omega)}\cdot\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (10), (11) и (16) в (9) находим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (c_1-c_3-\varepsilon)\cdot\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \leq \\ &\leq c_7\,\|m(t)\|^2_{L^3(\Omega)}\cdot\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_2\cdot\|f(t)\|^2_{H^{-2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Выберем c_3 и ε из условия $c_8 = 2(c_1 - c_3 - \varepsilon) > 0$ и перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_8 \cdot \|u\|^2_{H^2(\Omega)} \le c_9 \|m(t)\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{10} \cdot \|f(t)\|^2_{H^{-2}(\Omega)}. \quad (17)$$

Так как $u(0) = 0$, $m \in L^2(0,T;L^3(\Omega))$ и $f \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$, то из неравенства Гронуолла получаем

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le c_{10} \cdot \exp\left(c_9 \cdot \int_0^t \|m(\tau)\|^2_{L^3(\Omega)} d\tau\right) \cdot \int_0^t \|f(\tau)\|^2_{H^{-2}(\Omega)} \exp\Big(-c_9 \cdot$$
$$\cdot \int_0^\tau \|m(\tau_1)\|^2_{L^3(\Omega)} d\tau_1\Big)\, d\tau \le c_{11} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}. \quad (18)$$

В частности имеем

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c_{11} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}. \quad (19)$$

Интегрируя неравенство (17) по $t \in [0,T]$ и используя (18) получаем

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_8 \|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le \\ &\le c_9 \int_0^T \|m(t)\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + c_{10} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \le \\ &\le c_{12} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \cdot \|m\|^2_{L^2(0,T;L^3(\Omega))} + c_{10} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \le \\ &\le c_{13} \|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем окончательную оценку (8) и доказательство завершено.

Замечание. Как было отмечено выше, мы должны показать, что из $m \in L^2(0,T;L^3(\Omega))$ и $u \in L^2(0,T;\mathring{H}^2(\Omega))$ следует, что $m\,u \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Действительно, так как

$$\left|\int_\Omega (m(x,t)\,u)^{6/5}\, dx\right| \le \left(\int_\Omega |m(x,t)|^3\, dx\right)^{2/5} \cdot \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{3/5} =$$
$$\|m(t)\|^{6/5}_{L^3(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^{6/5}_{L^2(\Omega)},$$

то имеем

$$\int_0^T \|(m\,u)(t)\|^2_{L^{6/5}(\Omega)}\, dt \le \int_0^T \|m(t)\|^2_{L^3(\Omega)} \cdot \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt. \quad (20)$$

Из неравенства (19) следует, что $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Поэтому, из (20) получаем

$$\|m\,u\|_{L^2(0,T;L^{6/5}(\Omega))} \le \|m\|_{L^2(0,T;L^3(\Omega))} \cdot \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} < \infty.$$

Используя очевидное включение $L^2(0,T;L^{6/5}(\Omega)) \subset L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ мы приходим к требуемому результату, что $m\,u \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Следующая теорема есть следствие Предложения 1.

Теорема 1. **В условиях Предложения 1 сильное решение задачи (1) — (3) единственно.**

Доказательство : В уравнении (1) полагаем $f(x,t) = 0$. Тогда из неравенства (8) следует, что $u(x,t) = 0$. Теорема доказана.

§4. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Теперь мы докажем единственность слабых решений задачи (1) — (3). Пусть $u(x,t)$ - сильное решение задачи (1) — (3). Тогда имеет место следующее интегральное тождество :

$$\iint_Q u(-\varphi_t + \Delta^2\varphi - \Delta\varphi - m(x,t)\,\varphi)\,dx\,dt = \iint_Q f\,\varphi\,dx\,dt \tag{21}$$

для функций $\varphi \in C^{4,1}(\overline{Q})$, удовлетворяюших условию

$$\varphi|_\Sigma = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_\Sigma = 0. \tag{22}$$

Естественным условием могло бы быть

$$u \in L^1(Q), \quad m\,u \in L^1(Q), \tag{23}$$

однако, мы используем некоторое более сильное условие

$$u \in L^1(Q), \qquad m\,u \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \qquad m \in L^2(0,T,L^\gamma(\Omega)), \qquad \gamma > 2. \tag{24}$$

Теорема 2. **Пусть выполняются условия (24). Если функция $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (21) с $f = 0$, то $u = 0$. Другими словами, слабое решение единственно.**

Прежде чем привести доказательство, поясним основную идею. Пусть $\varphi(x,t)$ - решение уравнения

$$-\varphi_t + \Delta^2\varphi - \Delta\varphi - m(x,t)\,\varphi = h(x,t) \tag{25}$$

удовлетворяющее условиям (22). Если $u(x,t)$ является слабым решением задачи (1) — (3) с $f(x,t) = 0$, то

$$\iint_Q u(x,t)\,h(x,t)\,dx\,dt = 0. \tag{26}$$

Далее, предположим, что для любой функции $h \in L^\infty(Q)$ существует решение задачи (25), (22). Тогда из (26) следует, что $u = 0$, т.е. слабое решение единственно. Тем не менее, вообще говоря, для $h \in L^\infty(Q)$ решение φ задачи (25), (22) не принадлежит $C^{4,1}(\overline{Q})$. Заметим, что для нас достаточно, чтобы выполнялось бы тождество (26) для любого $h \in C_0^\infty(Q)$, которое всюду плотно в $L^\infty(Q)$. Как будет доказано ниже, в этом случае $\varphi \in C^{4,1}(\overline{Q})$, и φ можно подставить в интегральное тождество (21). Следовательно, задача сводится к аппроксимации решений задачи (25), (22) гладкими решениями. Обозначим через

$$m_k(x,t) = \begin{cases} m(x,t), & \text{если} \quad |m| < k \\ k, & \text{если} \quad m(x,t) > k \\ -k, & \text{если} \quad m(x,t) < -k. \end{cases} \tag{27}$$

Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty} m_k(x,t) = m(x,t) \qquad \text{п.в.} \tag{28}$$

Функцию $m_k(x,t)$ можно аппроксимировать последовательностями $\{m_k^{(i)}\}$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Следовательно, можно предположить, что в правой части (25) функция $h(x,t)$ принадлежит $C_0^\infty(Q)$. Поэтому соответствующее решение $\varphi \in C^{4,1}(\overline{Q})$. Пусть $\varphi_k(x,t)$ является решением задачи

$$-\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \Delta^2\varphi_k - \Delta\varphi_k - m_k(x,t)\,\varphi_k = h(x,t), \tag{29}$$

$$\varphi_k|_\Sigma = \left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu}\right|_\Sigma = 0, \quad \varphi_k(x,T) = 0. \tag{30}$$

Если теперь $u(x,t)$ является слабым решением задачи (1) — (3) с $f(x,t) = 0$, то из (21) и (29) получаем

$$\iint_Q u[h(x,t) + (m_k(x,t) - m(x,t))\,\varphi_k]\,dx\,dt = 0. \tag{31}$$

Положим

$$J_k = \iint_Q u(m_k(x,t) - m(x,t))\,\varphi_k\,dx\,dt. \tag{32}$$

Тогда (31) можно переписать в виде

$$\iint_Q u\,h\,dx\,dt + J_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{33}$$

Из (26) следует, что задача сводится к доказательству соотношения

$$\lim_{k\to\infty} J_k = 0 \tag{34}$$

Доказательство (34) опирается на следующее утверждение. Рассмотрим задачу, которая эквивалентна задаче (29), (30) :

$$\varphi_t + \Delta^2\varphi - \Delta\varphi - m_k(x,t)\,\varphi = h(x,t), \tag{35}$$

$$\varphi|_\Sigma = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_\Sigma = 0, \quad \varphi(x,0) = 0. \tag{36}$$

Предложение 2. Пусть $\varphi(x,t)$ – решение задачи (35), (36) и $h \in L^\infty(Q)$. Тогда имеет место следующая оценка :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c\,\|h\|_{L^\infty(Q)}. \tag{37}$$

Прежде чем доказать это утверждение проверим, что из Предложения 2 следует (34). Действительно, пусть $\varphi_k(x,t)$ — решение задачи (29), (30), которая эквивалентна (35), (36) и $h \in L^\infty(Q)$. Тогда согласно (37) имеем

$$|J_k| \le \int_0^T \|\varphi_k(t)\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|(m_k - m)\,u\|_{L^2(\Omega)}\,dt \le c\,\|h\|_{L^\infty(Q)}\cdot\|(m_k - m)\,u\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Последовательность $\{(m_k - m)\,u\}_{k=1}^\infty$ имеет суммируемую мажоранту, так как согласно (24) имеем $|u\,(m_k - m)| \le 2\,|m\,u| \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^1(Q)$. Следовательно, из (26) и теоремы Лебега получаем $J_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство Предложения 2 : Пусть $\varphi(x,t)$ — решение задачи (35), (36). Умножая обе части тождества (35) на φ и интегрируя по Ω мы имеем как в (9)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega (|\Delta\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)\,dx - \int_\Omega m_k(x,t)\,\varphi^2\,dx = \int_\Omega h(x,t)\,\varphi\,dx. \tag{38}$$

Пусть параметры $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ удовлетворяют условию $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{1}{\gamma} = 1$, $\gamma > 2$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega m_k(x,t)\,\varphi^2\,dx\right| \le \left(\int_\Omega |m_k(x,t)|^\gamma\,dx\right)^{1/\gamma}\cdot\left(\int_\Omega |\varphi(x,t)|^{2\gamma/(\gamma-1)}\,dx\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \\
&= \|m_k(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}\times \\
&\times \left(\int_\Omega |\varphi(x,t)|^{(\alpha_1\alpha_2)/(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot|\varphi(x,t)|^{(\alpha_1\alpha_2)/(\alpha_1+\alpha_2)}\,dx\right)^{(\alpha_1+\alpha_2)/(\alpha_1\alpha_2)} \le \\
&\le \|m_k(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}\|\varphi(t)\|_{L^{\alpha_1}(\Omega)}\cdot\|\varphi(t)\|_{L^{\alpha_2}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Полагая $\alpha_2 = 2$, имеем $\alpha_1 = \dfrac{2\gamma}{\gamma-2}$ и из (39) для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left|\int_\Omega m_k(x,t)\,\varphi^2\,dx\right| \le \varepsilon\,\|\varphi(t)\|^2_{L^{2\gamma/(\gamma-2)}} + c(\varepsilon)\,\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\cdot\|m_k(t)\|^2_{L^\gamma(\Omega)}. \tag{40}$$

Далее, имеем

$$\left|\int_\Omega h(x,t)\,\varphi\,dx\right| \le c\cdot\|h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\|\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1\,\|h(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}. \quad (41)$$

Согласно теореме вложения Соболева, для $n = 3$ имеем $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega) \subset C(\Omega)$, и поэтому

$$\int_\Omega (|\Delta\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)\,dx \ge c_2\|\varphi(t)\|_2^2 \ge c_3\|\varphi(t)\|^2_{C(\Omega)} \ge c_4\|\varphi(t)\|^2_{L^{2\gamma/(\gamma-2)}(\Omega)}. \quad (42)$$

Подставляя неравенства (40) — (42) в (38), получаем

$$\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_5\|\varphi(t)\|^2_{L^{2\gamma/(\gamma-2)}(\Omega)} \le$$

$$\le 2\left(1 + c(\varepsilon)\,\|m_k(t)\|^2_{L^\gamma(\Omega)}\right)\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\,c_1\|h(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)}.$$

Так как $m_k \in L^2(0,T;L^\gamma(\Omega))$, $h \in L^\infty(Q)$, аргументы, которые были использованы при доказательстве оценки (19) и неравенства Гронпула приводят к окончательной оценке $\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c\,\|h\|_{L^\infty(Q)}$. Доказательство Предложения 2 завершено.

Вернемся к доказательству Теоремы 2. Оно будет завершено, если мы сможем аппроксимировать решения задачи (25), (22) гладкими решениями. Пусть последовательность функций $\{m_{kj}\}_{j=1}^\infty$, $m_{kj} \in C_0^\infty(Q)$ сходится к $m_k(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим следуюшую задачу :

$$-\frac{\partial\varphi_{kj}}{\partial t} + \Delta^2\varphi_{kj} - \Delta\varphi_{kj} - m_{kj}(x,t)\,\varphi_{kj} = h(x,t), \quad (25')$$

$$\varphi_{kj}|_\Sigma = \left.\frac{\partial\varphi_{kj}}{\partial\nu}\right|_\Sigma = 0, \qquad \varphi_{kj}(x,T) = 0. \quad (22')$$

Теперь мы можем предположить, что $h \in C_0^\infty(Q)$ и согласно Предложению 2 получаем $\|\varphi_{kj}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c\,\|h\|_{L^\infty(Q)}$
с $\varphi_{kj} \in C^{4,1}(\overline{Q})$, которое можно подставить в интегральное тождество. Соотношение (26) выполняется для любой функции h из множества, всюду плотного в $L^\infty(Q)$. Следовательно, $u(x,t) = 0$ является решением и единственность доказана. Доказательство Теоремы 2 завершено.

ABSTRACT. The paper studies the questions of uniqueness of the weak solutions of initial boundary value problems for a class of evolutionary equations of fourth order with nonregular coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. - Л. Лионс, Управление Сингулярными Распределенными Системами, Москва, Наука, 1987.
2. H. Bresis, Communication personalle, Fevier, 1982.
3. J. - L. Lions, "Perturbations singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal", Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.

17 Марта 1999

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34 НОМЕР 3 1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы