ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОРОДНЫХ ГАУССОВСКИХ ПОЛЕЙ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

Пусть $X(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ — центрированное вещественнозначное однородное гауссовское поле со спектральной плотностью $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \ldots, t_n)$. В работе рассматривается задача непараметрического статистического оценивания спектральных средних $\varphi(f) = \int g(\mathbf{t})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$ на основе выборки X_T объема $T = (T_1, \ldots, T_n)$. В качестве оценки $\varphi(f)$ мы рассматриваем статистику $\widehat{\varphi}_T = \int g(\mathbf{t})\, I_T(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$, где $I_T(\mathbf{t})$ – периодограмма поля $X(\mathbf{u})$. В статье описаны классы спектральных плотностей, для которых $\widehat{\varphi}_T$ является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала $\varphi(f)$ и имеет асимптотически нормальное распределение. В работе рассмотрены случаи как дискретного, так и непрерывного параметров.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ — центрированное вещественнозначное однородное гауссовское поле со спектральной плотностью (с.п.) $f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in Q^n$, т.е. $\mathbb{E}X(\mathbf{u}) = 0$ и

$$\mathbb{E}X(\mathbf{u})\, X(\mathbf{v}) = r(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \int_{Q^n} e^{i(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{t})} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U^n, \tag{1}$$

где $r(\mathbf{u})$ – ковариационная функция поля $X(\mathbf{u})$, а $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n)$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = u_1 t_1 + \cdots + u_n t_n$ – обычные векторные обозначения.

Рассматриваются одновременно два случая : случай дискретного параметра (д. п.) и случай непрерывного параметра (н. п.). В случае д. п. областью изменения U^n переменной $\mathbf{u}$ является множество всевозможных узлов целочисленной решетки в n–мерном евклидовом пространстве, т. е. $U^n = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n),\ u_k = 0, \pm 1, \ldots, k = \overline{1, n}\}$, а в случае н. п. – n–мерное евклидово пространство $U^n = \mathbb{R}^n$. В случае д. п. областью изменения Q^n переменной $\mathbf{t}$ является n–мерный тор $Q^n = [-\pi, \pi]^n = \{\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n),\ -\pi \le t_k \le \pi,\ k = \overline{1, n}\}$, а в случае н. п. – $Q^n = \mathbb{R}^n$. В случае непрерывного параметра поле $X(\mathbf{u})$ предполагается измеримым и среднеквадратично непрерывным.

Спектр поля $X(\mathbf{u})$ характеризуется линейным функционалом $\varphi(f)$ (см. [2], [5], [10]) :

$$\varphi(f) = \int_{Q^n} g(\mathbf{t})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{2}$$

где $g(\mathbf{t}) = g(t_1, \ldots, t_n)$ – некоторая интегрируемая функция.

Отметим, что если $g(\mathbf{t})$ является индикатором n-мерного интервала $[-\pi, s_1] \times \cdots \times [-\pi, s_n]$ в случае д.п. (или $[-\infty, s_1] \times \cdots \times [-\infty, s_n]$ – в случае н.п.), то $\varphi(f) = F(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, где $F(\mathbf{s})$ – спектральная функция поля $X(\mathbf{u})$. Если $g(\mathbf{t}) = e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})}$, то $\varphi(f)$ совпадает с ковариационной функцией $r(\mathbf{u})$.

В этой статье рассматривается задача непараметрического статистического оценивания функционала $\varphi(f)$ по наблюдениям :

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_T = \{X(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \qquad u_k = \overline{1, T_k},\ k = \overline{1,n}\} && \text{в случае д.п.,} \\ &\mathbf{X}_T = \{X(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \quad 0 \le u_k \le T_k,\ k = \overline{1,n}\} && \text{в случае н.п.,} \end{aligned} \tag{3}$$

где $T = (T_1, \ldots, T_n)$.

В качестве оценки для $\varphi(f)$ рассмотрим статистику $\widehat{\varphi}_T$ (см. [2], [5], [10]) :

$$\widehat{\varphi}_T \stackrel{def}{=} \varphi(I_T) = \int_{Q^n} g(\mathbf{t})\, I_T(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{4}$$

где $I_T(\mathbf{t})$ — так называемая **периодограмма**, построенная по выборке (3), т.е.

$$I_T(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^n\, |T|} \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} X(\mathbf{u})\, e^{-i(\mathbf{u},\mathbf{t})} \right|^2 \qquad \text{в случае д.п.} \tag{5}$$

и

$$I_T(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \left| \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} X(\mathbf{u})\, e^{-i(\mathbf{u},\mathbf{t})}\, d\mathbf{u} \right|^2 \qquad \text{в случае н.п.,} \tag{6}$$

где $|T| = \prod_{k=1}^{n} T_k$.

Используя (1), (5) и (6), легко проверить, что статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная по (4) допускает следующее спектральное представление :

$$\widehat{\varphi}_T = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \int_{Q^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{w})\, G_T(\mathbf{w}, \mathbf{s})\, g(\mathbf{w})\, d\mathbf{w}\, Z(d\mathbf{t})\, Z(d\mathbf{s}), \tag{7}$$

где

$$G_T(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t_k, s_k), \tag{8}$$

$$G_{T_k}(t_k, s_k) = \sum_{m=1}^{T_k} e^{im(t_k - s_k)} = e^{iT_k(t_k-s_k)/2} \cdot \frac{\sin(T_k(t_k - s_k)/2)}{\sin((t_k - s_k)/2)} \quad \text{в случае д.п.,} \tag{9}$$

$$G_{T_k}(t_k, s_k) = \int_0^{T_k} e^{i\lambda(t_k - s_k)}\, d\lambda = e^{iT_k(t_k-s_k)/2} \cdot \frac{\sin(T_k(t_k - s_k)/2)}{(t_k - s_k)/2} \quad \text{в случае н.п.,} \tag{10}$$

а $Z(d\mathbf{t})$ — ортогональная стохастическая мера, участвующая в спектральном представлении поля $X(\mathbf{u})$ (см. [14], глава 7) :

$$X(\mathbf{u}) = \int_{Q^n} e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})}\, Z(d\mathbf{t}),$$

и удовлетворяющая условию

$$\mathbb{E} Z(d\mathbf{t}) Z(d\mathbf{s}) = \delta(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{11}$$

где $\delta(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \delta(\mathbf{t} - \mathbf{s})$ – δ–функция Дирака.

В настоящей статье исследуются асимптотические (при $T \to \infty$) свойства статистики $\widehat{\varphi}_T$, определенной по формуле (4). Описаны некоторые классы спектральных плотностей, для которых $\widehat{\varphi}_T$ является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала $\varphi(f)$, и имеет асимптотически нормальное распределение. Некоторые результаты этой статьи были анонсированы в [5].

Наше исследование асимптотических свойств оценки $\widehat{\varphi}_T$ основано на следующем представлении кумулянта $\chi_k(\widehat{\varphi}_T)$ порядка k оценки $\widehat{\varphi}_T$ (ср. [9], [12]) :

$$\chi_k(\widehat{\varphi}_T) = |T|^{-k}\, 2^{k-1}(k-1)!\, \mathrm{tr}[\mathbb{B}_T(f)\mathbb{B}_T(g)]^k, \tag{12}$$

где $\mathbb{B}_T(f)$ и $\mathbb{B}_T(g)$ — усеченные теплицевы операторы, порожденные функциями $f(\mathbf{t})$ и $g(\mathbf{t})$, соответственно.

Статья имеет следующую структуру : в §2 исследуется асимптотическое поведение следа произведений усеченных теплицевых операторов, а в §3 изучаются асимптотические свойства оценки $\widehat{\varphi}_T$.

§2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ УСЕЧЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Обозначим через $\mathbf{P}_T$ интегральный оператор в $\mathbf{L}_2([-\pi,\pi]^n)$ с ядром (8), (9), а через $\widetilde{\mathbf{P}}_T$ – интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ с ядром (8), (10). Заметим, что $\mathbf{P}_T$ является ортогональным проектором в $\mathbf{L}_2([-\pi,\pi]^n)$ на подпространство тригонометрических многочленов степени не выше $T = (T_1, \ldots, T_n)$, а $\widetilde{\mathbf{P}}_T$

– ортогональным проектором в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на подпространство целых функций экспоненциального типа не выше $\leq T = (T_1, \ldots, T_n)$, сужения которых на $\mathbb{R}^n$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Для функций $\psi(t) \in L_1([-\pi,\pi]^n)$ и $\widetilde{\psi}(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определим усеченные теплицевы операторы :

$$\mathbb{B}_T(\psi) = \mathrm{P}_T \psi \, \mathrm{P}_T \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbb{B}}_T(\widetilde{\psi}) = \widetilde{\mathrm{P}}_T \widetilde{\psi} \widetilde{\mathrm{P}}_T, \tag{13}$$

где ψ и $\widetilde{\psi}$ – операторы умножения на функции $\psi(t)$ и $\widetilde{\psi}(t)$, соответственно.

Теорема 1. Пусть $\psi_k(t) \in L_{p_k}([-\pi,\pi]^n)$, $1 \leq p_k < \infty$ для $k = \overline{1,m}$. Положим $\nu = \sum_{k=1}^m (p_k)^{-1}$.

a) Если $\nu \leq 1$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)} \cdot \int_{[-\pi,\pi]^n} \prod_{k=1}^m \psi_k(t)\, dt. \tag{14}$$

b) Если $\alpha = \nu + \varepsilon > 1$ с $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|^\alpha} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = 0. \tag{15}$$

Здесь и ниже запись $T = (T_1, \ldots, T_n) \to \infty$ означает, что $T_k \to \infty$ для всех $k = \overline{1,n}$, a $\mathrm{tr}[B]$ обозначает след оператора B.

В случае непрерывного параметра имеет место аналогичный результат при том же самом ν.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{\psi}_k(t) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p_k < \infty$ для $k = \overline{1,m}$.

a) Если $\nu \leq 1$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \widetilde{\mathbb{B}}_T(\widetilde{\psi}_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m \widetilde{\psi}_k(t)\, dt.$$

b) Если $\alpha = \nu + \varepsilon > 1$ и $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{|T|^\alpha} \mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^m \widetilde{\mathbb{B}}_T(\widetilde{\psi}_k)\right] = 0.$$

Замечание 1. Аналоги Теорем 1 и 2 для $n = 1$ доказаны в [1] и [6], соответственно.

Ниже мы приводим результаты только для дискретного параметра. В случае непрерывного параметра соответствующие результаты формулируются и доказываются аналогичным образом.

Начнем с некоторых вспомогательных результатов. Обозначим через $\{s_j(B)\}_{j\geq 1}$ множество сингулярных чисел компактного оператора B, т.е. множество собственных значений оператора $K = (B^*B)^{1/2}$, где B^* оператор, сопряженный к B. Для числа p $(1 \leq p \leq \infty)$ определим p-норму Шаттена компактного оператора B равенством

$$\|B\|_p = \begin{cases} (\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j^p(B))^{1/p}, & \text{при} \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_j s_j(B), & \text{при} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{S}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ класс всех компактных операторов B, для которых $\|B\|_p < \infty$. Приведем список ниже используемых свойств классов $\mathcal{S}_p$. Доказательства можно найти в [8].

P1). $\mathrm{tr}[B] \leq \|B\|_1$, причем знак равенства достигается для неотрицательного B.

P2). Если $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ и $B \in \mathcal{S}_{p_1}$, то $B \in \mathcal{S}_{p_2}$ и $\|B\|_{p_2} \leq \|B\|_{p_1}$.

P3). Если $B_k \in \mathcal{S}_{p_k}$, $p_k \geq 1$, $k = \overline{1,n}$ и $p^{-1} = \sum_{k=1}^n (p_k)^{-1} \leq 1$, то $B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{S}_p$ и $\|B\|_p \leq \|B_1\|_{p_1} \cdot \cdots \cdot \|B_n\|_{p_n}$.

P4). $\|B\|_\infty = \|B\|$, где $\|B\|$ – операторная норма B, определенная равенством $\|B\| = \sup_{\|h\|_2=1} |(Bh,h)|$.

Следующая лемма дает верхнюю границу для p–нормы Шаттена теплицева оператора $\mathbb{B}_T(\psi)$.

Лемма 1. Пусть $\psi(t) \in \mathbf{L}_p(Q^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_p \leq (2\pi)^n |T|^{1/p} \|\psi\|_p. \tag{16}$$

Доказательство : В силу интерполяционной теоремы Рисса–Торина для классов $\mathcal{S}_p$ (см. [8]), неравенство (16) достаточно доказать для $p = 1$ и $p = \infty$.

Случай $p = \infty$. Из P4) имеем

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_\infty = \sup_{\|h\|_2=1} |(\mathbb{B}_T(\psi)h,h)| =$$

$$= \sup_{\|h\|_2=1} \left| \int_{Q^n} \psi(\mathbf{t}) \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} h(\mathbf{u})\, e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})} \right|^2 dt \right| \leq$$

$$\leq \|\psi(\mathbf{t})\|_\infty \sup_{\|h\|_2=1} \int_{Q^n} \left| \sum_{u_1=1}^{T_1} \cdots \sum_{u_n=1}^{T_n} h(\mathbf{u})\, e^{i(\mathbf{u},\mathbf{t})} \right|^2 dt = (2\pi)^n \|\psi(\mathbf{t})\|_\infty,$$

т.е. (16) для $p = \infty$.

Случай $p = 1$. Функцию $\psi(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_1(Q^n)$ представим в виде $\psi(\mathbf{t}) = \psi_1(\mathbf{t})\,\psi_2(\mathbf{t})$ таким образом, чтобы $\|\psi\|_1 = \|\psi_1\|_2 \cdot \|\psi_2\|_2$. Применяя P3) для $n = 2$ и $p_1 = p_2 = 2$, получаем

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_1 = \|\mathbf{P}_T\, \psi\, \mathbf{P}_T\|_1 = \|\mathbf{P}_T\, \psi_1 \cdot \psi_2\, \mathbf{P}_T\|_1 \le \|\mathbf{P}_T\, \psi_1\|_2 \cdot \|\psi_2\, \mathbf{P}_T\|_2. \tag{17}$$

Покажем, что

$$\|\mathbf{P}_T\, \psi_1\|_2^2 = (2\pi)^n |T| \int_{Q^n} |\psi_1(\mathbf{t})|^2\, d\mathbf{t}, \tag{18}$$

где $|T| = \prod_{k=1}^n T_k$. Имеем

$$[\mathbf{P}_T\, \psi_1]\, h(\mathbf{s}) = \int_{Q^n} G_T(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \psi_1(\mathbf{t})\, h(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{19}$$

Поэтому (см. [8], стр. 141)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_T \psi_1\|_2^2 &= \int_{Q^n} \int_{Q^n} |G_T(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \psi_1(\mathbf{t})|^2\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{s} = \\ &= \int_{Q^n} \left(\int_{Q^n} G_T(\mathbf{s}, \mathbf{t}) G_T(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s} \right) |\psi_1(\mathbf{t})|^2\, d\mathbf{t}. \end{aligned} \tag{20}$$

Прямым вычислением из (8) – (10) получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{s})\, G_T(\mathbf{s}, \mathbf{t})\, d\mathbf{s} = G_T(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = |T| = \prod_{k=1}^n T_k. \tag{21}$$

Следовательно, (18) вытекает из (20) и (21). Аналогичным образом можно показать, что

$$\|\psi_2\, \mathbf{P}_T\|_2^2 = (2\pi)^n |T| \int_{Q^n} |\psi_2(\mathbf{t})|^2\, d\mathbf{t}. \tag{22}$$

Таким образом, из (17), (18) и (22) имеем

$$\|\mathbb{B}_T(\psi)\|_1 \le (2\pi)^{n/2} |T|^{1/2}\, \|\psi_1\|_2 \cdot (2\pi)^{n/2} |T|^{1/2}\, \|\psi_2\|_2 = (2\pi)^n |T| \cdot \|\psi\|_1.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : а) Пусть $l\,(1 \le l \le m)$ – число тех функций $\psi_k(\mathbf{t})$ в (14), которые не являются многочленами (т.е. имеющие бесконечно много ненулевых коэффициентов Фурье). Мы применяем индукцию по m. Для $m = 0$ (все $\psi_k(\mathbf{t})$ являются многочленами) легко проверить, что (14) выполняется. Теперь предположим, что (14) имеет место в случае, когда среди функций $\psi_k(\mathbf{t})$ имеются не более l функций, которые не являются многочленами и докажем, что (14) выполняется в случае, когда среди функций $\psi_k(\mathbf{t})$ имеются не более $l + 1$ функций, которые не являются многочленами. Без потери общности мы можем предполагать, что $\psi_1(t)$ не является многочленом. Для $M = (M_1, \ldots, M_n)$ и $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ обозначим

$$\psi_{1,M}(\mathbf{t}) = (\psi_1 * F_M)(\mathbf{t}) = \int_{Q^n} F_M(\mathbf{t}-\mathbf{s})\,\psi_1(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} \tag{23}$$

сингулярный интеграл Фейера, порожденный функцией $\psi_1(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_1(Q^n)$, где

$$F_M(\mathbf{t}) = F_{M_1}(t_1)\cdots F_{M_n}(t_n), \tag{24}$$

а

$$F_{M_k}(t_k) = \frac{1}{2\pi M_k}\left(\frac{\sin\dfrac{M_k t_k}{2}}{\sin\dfrac{t_k}{2}}\right)^2, \qquad t_k \in [-\pi, \pi] \tag{25}$$

– одномерное ядро Фейера. Заметим, что функция $\psi_{1,M}(\mathbf{t})$, определенная по формуле (23), является тригонометрическим многочленом от n переменных степени $M = (M_1, \ldots, M_n)$. Положим

$$\psi_1^M(\mathbf{t}) = \psi_1(\mathbf{t}) - \psi_{1,M}(\mathbf{t}). \tag{26}$$

В силу индукционного предположения имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{|T|}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_{1,M})\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)}\cdot\int_{Q^n}\psi_{1,M}(\mathbf{t})\prod_{k=2}^{m}\psi_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{27}$$

Известно (см. [16], том II, Теорема (1.23)), что для $\psi_1(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ $(1 \le p_1 < \infty)$ имеет место соотношение

$$\|\psi_1 - \psi_{1,M}\|_{p_1} \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty. \tag{28}$$

Поэтому, учитывая, что $\prod\limits_{k=2}^{m}\psi_k(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$, где $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1} \le 1$, получаем, что правая часть (27) сходится к $(2\pi)^{n(m-1)}\cdot\int_{Q^n}\prod_{k=1}^{m}\psi_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}$ при $M \to \infty$. Следовательно

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{|T|}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_{1,M})\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = (2\pi)^{n(m-1)}\cdot\int_{Q^n}\prod_{k=1}^{m}\psi_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{29}$$

Таким образом, для завершения доказательства пункта a) остается показать, что

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{|T|}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = 0. \tag{30}$$

Применяя P1), P3) (для $n = m$) и Лемму 1, получим

$$\frac{1}{|T|}\left|\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right]\right| \le \frac{1}{|T|}\left\|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right\|_1 \le$$
$$\le \frac{1}{|T|}\|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\mathbb{B}_T(\psi_k)\|_{p_k} \le C\,|T|^{\nu-1}\,\|\psi_1^M\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\psi_k\|_{p_k}.$$

Отсюда следует (30), так как по предположению $\nu - 1 = \sum_{k=1}^{m}(p_k)^{-1} - 1 \le 0$ и, в силу (26) и (28), имеем $\|\psi_1^M\|_{p_1} \to 0$ при $M \to \infty$. Доказательство пункта a) завершено.

Для доказательства пункта b) предположим, что $\nu = \sum\limits_{k=1}^{m}(p_k)^{-1} > 1$ (в противном случае требуемое утверждение следует из пункта a)). Если все функции $\psi_k(\mathbf{t})$ являются многочленами, то соотношение (15) выполнено, так как по предположению $\alpha > 1$. В противном случае применим индукцию по числу тех функций, которые не являются многочленами. Не умаляя общности предположим, что $\psi_1(\mathbf{t})$ не является многочленом, и пусть $\psi_1(\mathbf{t}) = \psi_{1,M}(\mathbf{t}) + \psi_1^M(\mathbf{t})$, где $\psi_{1,M}(\mathbf{t})$ задается по (23). Имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|T|^{\alpha}}\mathrm{tr}\left[\prod_{k=1}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] = \\ &= \frac{1}{|T|^{\alpha}}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_{1,M})\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] + \frac{1}{|T|^{\alpha}}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right].\end{aligned} \tag{31}$$

В силу индукционного предположения, первое слагаемое в правой части (31) стремится к нулю (при $M \to \infty$ и $T \to \infty$). Далее, так как по предположению $\nu > 1$, применяя P1), P2), P3) (для $n = m$) и Лемму 1 получаем

$$\left|\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right]\right| \le$$
$$\le \left\|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right\|_1 \le \|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\|_{\nu p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\mathbb{B}_T(\psi_k)\|_{\nu p_k} \le$$
$$\le \|\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\mathbb{B}_T(\psi_k)\|_{p_k} \le C\,|T|^{\nu}\,\|\psi_1^M\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\psi_k\|_{p_k}.$$

Следовательно, для второго слагаемого в правой части (31) получаем

$$\frac{1}{|T|^{\alpha}}\mathrm{tr}\left[\mathbb{B}_T(\psi_1^M)\prod_{k=2}^{m}\mathbb{B}_T(\psi_k)\right] \le C\,|T|^{\nu-\alpha}\|\psi_1^M\|_{p_1}\prod_{k=2}^{m}\|\psi_k\|_{p_k}. \tag{32}$$

По предположению, $\nu - \alpha = -\varepsilon < 0$ и $\psi_k \in \mathbf{L}_{p_k}(Q^n)$ для $k = \overline{2,m}$, а из (26) и (28) имеем $\|\psi_1^M\|_{p_1} \to 0$ при $M \to \infty$. Следовательно, последнее выражение в (32) стремится к нулю при $M \to \infty$ и $T \to \infty$.

Теорема 1 доказана.

§3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

3.1. Асимптотическая несмещенность. Положим

$$h(\mathbf{w}) = \int_{Q^n} f(\mathbf{t}) g(\mathbf{t}+\mathbf{w})\, d\mathbf{t}. \tag{33}$$

Пусть функционал $\varphi(f)$ и оценка $\widehat{\varphi}_T$ определены по формулам (2) и (4), соответственно.

Теорема 3. Пусть выполнено одно из следующих условий :

a) $f(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ **и** $g(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_2}(Q^n)$ **с** $p_1, p_2 \geq 1$, $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1$ **или**

b) $h(\mathbf{w})$ **– ограничена и непрерывна в** $\mathbf{w} = 0 \stackrel{def}{=} (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$.

Тогда статистика $\widehat{\varphi}_T$ **является асимптотически несмещенной оценкой для** $\varphi(f)$, **т.е.**

$$\lim_{T\to\infty} [\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f)] = 0. \tag{34}$$

Доказательство : Вначале докажем, что при условии a), (34) следует из Теоремы 1. Положим

$$\Delta_T \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f) \tag{35}$$

и покажем, что

$$\Delta_T = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \operatorname{tr}[\mathbb{B}_T(f)\mathbb{B}_T(g) - \mathbb{B}_T(fg)], \tag{36}$$

где $\mathbb{B}_T(f)$, $\mathbb{B}_T(g)$ и $\mathbb{B}_T(fg)$ – усеченные теплицевы операторы, порожденные функциями $f(\mathbf{t})$, $g(\mathbf{t})$ и $f(\mathbf{t})\,g(\mathbf{t})$, соответственно (см. (13)).

Действительно, из спектрального представления (7) и формулы (11) имеем

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) = \frac{1}{(2\pi)^n |T|} \int_{Q^n}\int_{Q^n} |G_T(\mathbf{t},\mathbf{s})|^2 f(\mathbf{t})\, g(\mathbf{s})\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{s}, \tag{37}$$

где ядро $G_T(\mathbf{t},\mathbf{s})$ определяется по (8) и (9).

С другой стороны, легко убедиться (ср. [11], гл. 15), что оператор $\mathbb{B}_T(h)$ может быть реализован как интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(Q^n)$ с ядром

$$\Gamma_{T,h}(\mathbf{t},\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t},\mathbf{w})\, G_T(\mathbf{w},\mathbf{s}) h(\mathbf{w})\, d\mathbf{w}. \tag{38}$$

Поэтому и $\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)$ может быть реализован как интегральный оператор в $\mathbf{L}_2(Q^n)$ с ядром

$$\Gamma_T(\mathbf{t},\mathbf{s}) \stackrel{def}{=} \int_{Q^n} \Gamma_{T,f}(\mathbf{t},\mathbf{w})\Gamma_{T,g}(\mathbf{w},\mathbf{s})\, d\mathbf{w} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{Q^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{u}) G_T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) G_T(\mathbf{w}, \mathbf{v}) G_T(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \, f(\mathbf{u}) \, g(\mathbf{v}) \, d\mathbf{w} \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{v}. \tag{39}$$

Учитывая воспроизводящее свойство ядра $G_T(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{u}, \mathbf{w}) G_T(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{w} = G_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tag{40}$$

из (39) находим

$$\Gamma_T(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{u}) G_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) G_T(\mathbf{v}, \mathbf{s}) \, f(\mathbf{u}) \, g(\mathbf{v}) \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{v}. \tag{41}$$

По известной формуле для вычисления следа интегральных операторов (см. [8], стр. 147) и (40), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)] &= \int_{Q^n} \Gamma_T(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{u}) G_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) G_T(\mathbf{v}, \mathbf{t}) f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{v} \, d\mathbf{t} = \\ &= \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) G_T(\mathbf{v}, \mathbf{u}) f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{v} = \int_{Q^n} \int_{Q^n} |G_T(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{42}$$

Из (21), (38) с $h = fg$ и (40) получаем

$$\operatorname{tr}[\mathbb{B}_T(fg)] = \int_{Q^n} \int_{Q^n} G_T(\mathbf{t}, \mathbf{u}) G_T(\mathbf{u}, \mathbf{t}) \, f(\mathbf{u}) \, g(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{t} = (2\pi)^n |T| \int_{Q^n} f(\mathbf{u}) g(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}. \tag{43}$$

Теперь нетрудно заметить, что (36) следует из (2), (35), (37), (42) и (43). Применяя Теорему 1, пункт a) для $m = 2$, $\psi_1 = f$ и $\psi_2 = g$, из (36) и (43) находим

$$\Delta_T = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{44}$$

Отсюда и из (35) получаем (34). Тем самым, при выполнении условия a) теорема доказана.

Для доказательства утверждения теоремы при выполнении условия b) нам понадобится следующий результат из теории кратных тригонометрических рядов (см. [16], том II, Теорема (1.20)).

Лемма 2. *Пусть $\psi(\mathbf{t})$ – ограниченная функция. Тогда в каждой точке непрерывности $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ функции $\psi(\mathbf{t})$ имеем*

$$\lim_{T \to \infty} \int_{Q^n} F_T(\mathbf{t}_0 - \mathbf{s}) \psi(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} = \psi(\mathbf{t}_0),$$

где $F_T(\mathbf{t})$ – ядро Фейера, определенное по (24) и (25).

Имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n|T|}|G_T(\mathbf{u}-\mathbf{v})|^2 = F_T(\mathbf{u}-\mathbf{v}). \tag{45}$$

Поэтому, из (33), (37) и (45) находим

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) = \int_{Q^n}\int_{Q^n} F_T(\mathbf{t}-\mathbf{s})\, f(\mathbf{t})\, g(\mathbf{s})\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{s} = \int_{Q^n} F_T(\mathbf{u})\, h(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \tag{46}$$

Отсюда и из (2) и (33) получаем

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f) = \int_{Q^n} F_T(\mathbf{u})\, h(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} - h(\mathbf{0}). \tag{47}$$

Так как, по предположению, функция $h(\mathbf{w})$ ограничена и непрерывна в точке $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, то требуемый результат следует из Леммы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Теорема 3 для случая a) другим методом была доказана в [2].

3.2. Состоятельность. Сперва изучим асимптотическое поведение дисперсии оценки $\widehat{\varphi}_T$, определенной по (4).

Теорема 4. Пусть $f(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ и $g(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_{p_2}(Q^n)$, где $p_1, p_2 \geq 1$ и $1/p_1 + 1/p_2 \leq 1/2$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} |T|\, \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))^2 = 2\cdot(2\pi)^{3n}\int_{Q^n} f^2(\mathbf{t})\, g^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{48}$$

Доказательство : Из (12) находим

$$\mathbb{D}(\widehat{\varphi}_T) = \chi_2(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))) = \frac{2}{|T|}\mathrm{tr}[\mathbb{B}_T(f)\mathbb{B}_T(g)]^2. \tag{49}$$

Поэтому, полагая $m = 4$, $\psi_1 = \psi_3 = f$, $\psi_2 = \psi_4 = g$, и применяя Теорему 1 a), из (49) получаем (48). Теорема 4 доказана.

Теорема 5. При условиях Теоремы 4 статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная по формуле (4), является среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала (2) :

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \varphi(f))^2 = 0. \tag{50}$$

Доказательство : Имеем

$$\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \varphi(f))^2 = \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))^2 + K_T^2, \tag{51}$$

где $K_T = \varphi(f) - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T)$. Поэтому, (50) является непосредственным следствием (51) и Теорем 3 и 4. Теорема 5 доказана.

3.3. Асимптотическая нормальность.

Теорема 6. При условиях Теоремы 4 распределение нормированной случайной величины $|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))$ слабо сходится (при $T \to \infty$) к нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ с дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = 2 \cdot (2\pi)^{3n} \int_{Q^n} f^2(\mathbf{t})\, g^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{52}$$

Доказательство : Применим метод кумулянтов : в силу (12) находим

$$\chi_k\left(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))\right) = \begin{cases} 0, & \text{для } k = 1 \\ \dfrac{2^{k-1}}{|T|^{k/2}}(k-1)!\,\mathrm{tr}\,[\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)]^k, & \text{для } k \geq 2 \end{cases} \tag{53}$$

По Теореме 4 при $T \to \infty$ имеем

$$\chi_2\left(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))\right) = \frac{2}{|T|}\mathrm{tr}\,[\mathbb{B}_T(f)\,\mathbb{B}_T(g)]^2 \to 2\,(2\pi)^{3n} \int_{Q^n} f^2(\mathbf{t})\, g^2(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{54}$$

Далее, из (53) и Теоремы 1, b) для $k \geq 3$ получаем

$$\chi_k\left(|T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))\right) \to 0 \qquad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{55}$$

Комбинируя (53) - (55) завершаем доказательство Теоремы 6.

3.4. Локальные условия. В этом пункте, используя хорошо известную теорему вложения для классов Никольского, мы получаем "локальные" достаточные условия для вышеприведенных асимптотических свойств оценки $\widehat{\varphi}_T$. Напомним определение класса Никольского $\mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (см. [4], [15]).

Определение 1. Для заданных чисел $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_k < 1$ и $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_k \in \mathbb{N}_0$ $(k = \overline{1, n})$, где $\mathbb{N}_0$ - множество неотрицательных целых чисел, положим $\gamma_k = r_k + \alpha_k$ $(k = \overline{1, n})$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Функция $\psi(\mathbf{t}) = \psi(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{L}_p(Q^n)$ принадлежит классу $\mathbf{H}_{p,k}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, если $\psi(\mathbf{t})$ имеет обобщенную производную $\psi_{t_k}^{(r_k)}(\mathbf{t}) \in \mathbf{L}_p(Q^n)$, удовлетворяющую следующему условию :

$$\|\psi_{t_k}^{(r_k)}(\cdot + e_k h) - \psi_{t_k}^{(r_k)}(\cdot)\|_p \leq C_k |h|^{\alpha_k},$$

где $C_k > 0$ - постоянная, а e_k - единичный вектор направленный по оси t_k. Пространство $\mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ определяется следующим образом :

$$\mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{H}_{p,k}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

Для заданных $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_k, \gamma_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$, положим

$$\overline{\beta} = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{-1}\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \overline{\gamma} = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{-1}\right)^{-1}. \tag{56}$$

Следующая теорема вложения принадлежит С. М. Никольскому (см. [4], [13], [15]).

Лемма 3. Пусть $\psi(t) \in \mathbf{H}_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ с $p \geq 1$ и $\gamma_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$. Пусть p_1 удовлетворяет условию $p < p_1 \leq \infty$ и $\chi = 1 - (1/p - 1/p_1)\, 1/\overline{\gamma} > 0$. Тогда $\psi(t) \in \mathbf{H}_{p_1}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, где $\rho_k = \chi\gamma_k$, $k = \overline{1,n}$. В частности, если $\overline{\gamma} > 1/p$, то $\psi(t)$ непрерывна и $\|\psi\|_\infty < \infty$.

Определение 2. Пусть $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – множество всех спектральных плотностей из класса $\mathbf{H}_p(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Будем говорить, что пара (f, g) функций $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяет **условию** $(\mathcal{H})$, если $f(t) \in \Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и $g(t) \in \mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ для некоторых $\beta_k, \gamma_k > 0$ $(k = \overline{1,n})$ и $p, q \geq 1$ $(1/p + 1/q = 1)$, удовлетворяющих одному из следующих условий c1) – c4) :

c1) $\overline{\beta} > 1/p$, $\overline{\gamma} > 1/q$,

c2) $\overline{\beta} \leq 1/p$, $\overline{\gamma} \leq 1/q$ и $\overline{\beta} + \overline{\gamma} > 1/2$,

c3) $\overline{\beta} > 1/p$, $1/q - 1/2 < \overline{\gamma} \leq 1/q$,

c4) $\overline{\gamma} > 1/q$, $\quad 1/p - 1/2 < \overline{\beta} \leq 1/p$,

где $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ задаются формулой (56).

Теорема 7. Пусть пара (f, g) функций $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{H})$. Тогда статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная формулой (4), является асимптотически несмещенной и среднеквадратически состоятельной оценкой для функционала (2), и имеет асимптотически (при $T \to \infty$) нормальное $N(0, \sigma^2)$ распределение с дисперсией σ^2, задаваемой по формуле (52).

Доказательство : Достаточно показать, что в условиях теоремы существуют числа p_1 $(p_1 > p)$ и q_1 $(q_1 > q)$, удовлетворяющие условию $1/p_1 + 1/q_1 \leq 1/2$ такие, что $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$.

Случай $\overline{\beta} > 1/p$, $\overline{\gamma} > 1/q$ очевиден, так как из Леммы 3 имеем $\Sigma_p(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_\infty(Q^n)$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_\infty(Q^n)$.

Пусть теперь $\overline{\beta} \leq 1/p$, $\overline{\gamma} \leq 1/q$ и $\overline{\beta} + \overline{\gamma} > 1/2$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условиям $\overline{\beta} > \varepsilon$ и $\overline{\gamma} > \varepsilon$, полагаем

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \overline{\beta} + \varepsilon, \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \overline{\gamma} + \varepsilon. \tag{57}$$

Легко видеть, что $p_1 > p$, $q_1 > q$, $\chi_1 = 1 - (1/p - 1/p_1)\,1/\overline{\beta} > 0$ и $\chi_2 = 1 - (1/q - 1/q_1)\,1/\overline{\gamma} > 0$. Следовательно, из Леммы 3 находим $\Sigma_p(\beta_1, \dots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_{p_1}(Q^n)$ и $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$. Далее, используя (57) получаем

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) + 2\epsilon = 1 - (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) + 2\epsilon.$$

Так как ϵ произвольно и по предположению $\overline{\beta} + \overline{\gamma} > 1/2$, получаем $1/p_1 + 1/q_1 \leq 1/2$.

Пусть теперь $\overline{\beta} > 1/p$ и $1/q - 1/2 < \overline{\gamma} \leq 1/q$. По Лемме 3 имеем $\Sigma_p(\beta_1, \dots, \beta_n) \subset \mathbf{L}_\infty(Q^n)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию $\overline{\gamma} > \varepsilon$, положим

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \overline{\gamma} + \varepsilon. \tag{58}$$

Очевидно $q_1 > q$ и $\chi_2 = 1 - (1/q - 1/q_1)\,1/\overline{\gamma} > 0$. Следовательно, в силу Леммы 3, имеем $\mathbf{H}_q(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \subset \mathbf{L}_{q_1}(Q^n)$. Далее, из (58) находим

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \overline{\gamma} + \varepsilon.$$

Так как ϵ произвольно и по предположению $1/q - \overline{\gamma} < 1/2$, получаем $1/p_1 + 1/q_1 \leq 1/2$.

Случай $\overline{\gamma} > 1/q$ и $1/p - 1/2 < \overline{\beta} \leq 1/p$ исследуется аналогичным образом. Применяя Теоремы 3, 5 и 6 мы завершаем доказательство Теоремы 7.

Замечание 3. Для стационарных гауссовских процессов ($n = 1$) в [7] было показано, что в условиях Теоремы 7, статистика $\widehat{\varphi}_T$, определенная по (4), есть $T^{1/2}$-состоятельная, асимптотически нормальна и асимптотически эффективная оценка для функционала (2). Для однородных гауссовских полей ($n > 1$) этот результат становится не верным.

Действительно, используя стандартные аргументы (см. [2], [7], [10]), можно показать, что когда $T = (T_1, \dots T_n)$ стремится к бесконечности с постоянной скоростью во всех направлениях, то в силу Теоремы 7, смещение $K_T = |\mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T) - \varphi(f)|$ оценки $\widehat{\varphi}_T$ зависит от размерности n и имеет порядок $O\left(|T|^{-1/n}\right)$. Следовательно, в отличии от случая $n = 1$, для $n > 1$ случайные величины $\xi_T = |T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \mathbb{E}(\widehat{\varphi}_T))$ и $\eta_T = |T|^{1/2}(\widehat{\varphi}_T - \varphi(f))$ имеют различные асимптотические (при $T \to \infty$) распределения.

Отметим, что в [10] найдены условия, при которых модифицированная периодограммная статистика является $|T|^{1/2}$ состоятельной оценкой для функционала (2)

ABSTRACT. Let $X(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in U^n$ be a centered real-valued homogeneous Gaussian field with spectral density $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \ldots, t_n)$. We consider the problem of nonparametric statistical estimation of spectral averages $\varphi(f) = \int g(\mathbf{t})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$, on the basis of a sample $\mathbf{X}_T$ of size $T = (T_1, \ldots, T_n)$. As an estimator for $\varphi(f)$ we take the statistics $\widehat{\varphi}_T = \int g(\mathbf{t})\, I_T(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$, where $I_T(\mathbf{t})$ is the periodogram of $X(\mathbf{u})$. The paper describes some classes of spectral densities, where $\widehat{\varphi}_T$ is asymptotically unbiased, mean square consistent estimator for the functional $\varphi(f)$ and has asymptotically normal distribution. Both continuous and discrete parameter cases are treated.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random Variables and Toeplitz matrices," Probab. Theory Relat. Fields, vol. 79, pp. 37 — 45, 1988.
2. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, Ю. Сушинскас, "О среднем оценок спектра однородного поля", Литовский Мат. Сб., том 14, стр. 67 — 74, 1974.
3. Р. Бенткус, В. Руткаускас, "Об асимптотике первых двух моментов спектральных оценок второго порядка", Литовский Мат. Сб., том 13, стр. 29 — 45, 1973.
4. В. И. Буренков, "Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве", Итоги Науки; Мат. Анализ, 1965, № 13, стр. 71 — 155, Москва, 1966.
5. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства оценки спектра однородного гауссовского поля", ДАН Армении, том 94, стр. 264 — 269, 1993.
6. M. S. Ginovian, "On Toeplitz Type Quadratic Functionals in Gaussian Stationary Process", Probability Theory and Related Fields, vol. 100, pp. 395 - 406, 1994.
7. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", Изв. АН Армении, Математика, том 30, № 1, стр. 3 — 20, 1995.
8. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в Теорию Линейных Несамосопряженных Операторов в Гильбертовом Пространстве, Москва, Наука, 1965.
9. U. Grenander and G. Szegö, Toeplitz Forms and their Applications, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1958.
10. X. Guyon, "Some parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice," Biometrika, vol. 69, pp. 95 — 105, 1982.
11. P. R. Halmosh, A Hilbert Space Problem Book, Princeton-New Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1967.
12. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория Вер. и Прим., том 8, стр. 391 — 430, 1963.
13. В. И. Коляда, "О вложении классов $H_p^{\omega_1, \ldots, \omega_n}$", Мат. Сборник, том 127 (169), № 3, стр. 352 — 383, 1985.
14. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, Стационарные Случайные Процессы. Свойства Выборочных Функций и их Приложения, Мир, Москва, 1969.
15. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Москва, Наука, 1977.
16. A. Zygmund, Trigonometric Series, vol. I, II, Cambridge University Press, 1965.

12 Декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ УОЛША В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $L^1_\mu[0,1]$

С. А. Епископосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

В работе построены весовое пространство $L^1_\mu[0,1]$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$ по системе Уолша, который универсален в $L^1_\mu[0,1]$ относительно перестановок.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mu(x)$ – измеримая на $[0,1]$ функция с $0 < \mu(x) \le 1$, и пусть $L^1_\mu[0,1]$ – соответствующее весовое пространство, т.е. банахово пространство измеримых на $[0,1]$ функций с ограниченным интегралом

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|\mu(x)\,dx < \infty.$$

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) \in L^1_\mu[0,1] \tag{1.1}$$

называется **универсальным относительно перестановок** в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$, если для любой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ члены ряда (1.1) можно переставить ($k \longmapsto \sigma(k)$) так, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$ сходится к функции $f(x)$ в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} f_{\sigma(k)}(x) - f(x) \right| \mu(x)\,dx = 0.$$

Определение 2. Ряд (1.1) называется **универсальным в обычном смысле** в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$, если для любой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что соответствующая последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n_k} f_k(x)$ сходится к $f(x)$ в пространстве $L^1_\mu[0,1]$.

Определение 3. Ряд (1.1) называется **универсальным относительно частичных сумм** в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$, если для каждой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ существует частичная сумма $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x)$, сходящаяся к $f(x)$ в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]$.

Приведенные выше определения даны не в наиболее общей форме, а только в той общности, в которой они будут применяться в настоящей работе. В этой работе рассматривается вопрос о существовании рядов по системе Уолша универсальных в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно перестановок и в обычном смысле. Вопрос существования различных типов универсальных рядов в смысле сходимости почти всюду и по мере рассматривался в работах [1] – [7]. Здесь мы приводим те результаты, которые непосредственно относятся к теоремам, доказанным в этой статье.

Первые универсальные в смысле сходимости почти всюду тригонометрические ряды были построены Д. Е. Меньшовым [1] и В. Я. Козловым [2]. Ими были построены ряды вида

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos kx + b_k sin kx \tag{A}$$

такие, что для любой измеримой на $[0, 2\pi]$ функции $f(x)$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что соответствующая последовательность частичных сумм ряда (A) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$. Отметим, что в этом результате для $f(x) \in L^1_{[0,2\pi]}$ невозможно заменить сходимость почти всюду на сходимость в метрике пространства $L^1_{[0,2\pi]}$.)

Этот результат был обобщен А. А. Талаляном на произвольные ортонормированные полные системы (см. [3]). Им же установлено (см. [4]), что если $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ нормированный базис в пространстве $L^p_{[0,1]}$, $p > 1$, то существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad a_k \to 0, \tag{B}$$

который обладает следующим свойством : для любой измеримой функции $f(x)$ члены ряда (B) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы по мере к функции $f(x)$. М. Г. Григорян построил ряд $\sum c_k W_k(x)$ по системе Уолша– Пэли (см. [5]), который универсален в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1]$ относительно частичных сумм для некоторой весовой функции $\mu(x) \in (0,1]$. В настоящей работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Существует ряд по системе Уолша–Пэли

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) \quad \text{с} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty, \quad q > 2, \tag{1.2}$$

обладающий следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую весовую функцию $\mu(x) \in (0,1]$, $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$ такую, что ряд (1.2) будет универсален относительно перестановок в пространстве $L^1_\mu[0,1]$.

Теорема 2. Существует ряд вида (1.2) такой, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить весовую функцию $\mu(x) \in (0,1]$ с $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \neq 1\}| < \varepsilon$ такую, чтобы ряд (1.2) был универсальным в обычном смысле в пространстве $L^1_\mu[0,1]$.

Теорема 3. Существует двойной ряд по системе Уолша

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} c_{n,k} W_n(x) W_k(y) \quad \text{с} \sum_{n,k=1}^{\infty} |c_{n,k}|^q < \infty, \quad q > 2, \tag{1.3}$$

обладающий следующим свойством : для любого числа $\varepsilon > 0$ можно построить весовую функцию $\mu(x,y) \in (0,1]$ с

$$|\{(x,y) \in [0,1]^2 : \mu(x,y) \neq 1\}| < \varepsilon \tag{1.4}$$

такую, что для всякой функции $f(x,y) \in L^1_\mu[0,1]^2$ члены ряда (1.3) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился бы к функции $f(x,y)$ как по сферическим так и по прямоугольным частичным суммам в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]^2$, т.е. ряд (1.3) универсален относительно перестановок в пространстве $L^1_\mu[0,1]^2$.

Теорема 4. Существует двойной ряд по системе Уолша вида (1.3), обладающий следующим свойством : для любого числа $\varepsilon > 0$ можно построить весовую функцию $\mu(x,y) \in (0,1]$, удовлетворяющую условию (1.4) такую, что для любой функции $f(x,y) \in L^1_\mu[0,1]^2$ можно найти как сферические так и прямоугольные частичные суммы, которые сходились бы к функции $f(x,y)$ в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]^2$, т.е. ряд (1.3) универсален относительно частичных сумм в пространстве $L^1_\mu[0,1]^2$.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Вначале приведем определение системы Уолша- Пэли (см. [8]) :

$$W_0(x) = 1, \quad W_n(x) = \prod_{s=1}^{k} r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^{k} 2^{m_s}, \quad m_1 > \cdots > m_s, \tag{2.1}$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера :

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2], \\ -1, & x \in (1/2, 1); \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Лемма 1. Для заданных чисел $0 < \varepsilon < 1$, $k_0 > 1$, $\gamma \neq 0$ и интервала Δ вида $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]$, $1 \leq i \leq 2^m$, существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и многочлен $P(x) = \sum\limits_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x)$, удовлетворяющие условиям :

$$1) \quad P(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \qquad 2) \quad |E| > |\Delta| \cdot (1 - \varepsilon),$$

$$3) \quad \left(\sum_{k=k_0}^{N} c_k^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|}.$$

Доказательство : Пусть $\nu_0 = \left[\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon\right] + 1$. Существует натуральное число m_0 такое, что для $m \geq m_0$

$$S_m(x, \gamma \cdot \chi_\Delta(x)) = \sum_{j=0}^{m} a_j W_j(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x), \quad x \in [0, 1], \tag{2.2}$$

где $\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E и

$$a_j = \int_0^1 [\gamma \cdot \chi_\Delta(t)] \cdot W_j(t)\, dt.$$

Возьмем натуральное число p_1 настолько большим, что если $0 \leq k \leq m_0$, то

$$W_{m_1}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_1+k}(x), \quad \text{, где } m_1 = 2^{p_1} > m_0 \quad (\text{см. } (2.1)), \tag{2.3}$$

и пусть

$$b_s = \begin{cases} a_j, & \text{для } s = m_1 + j,\ j \in [0, m_0], \\ 0, & \text{для } s \notin [m_1, m_1 + m_0], \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\Delta_1^{(-)} = \{x \in \Delta : \ W_{m_1}(x) = -1\}; \quad \Delta_1^{(+)} = \{x \in \Delta : \ W_{m_1}(x) = +1\}.$$

Из (2.2) имеем

$$\sum_{s=N_0}^{N_1-1} b_s W_s(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_1^{(+)}}(x) - \gamma \cdot \chi_{\Delta_1^{(-)}}(x),$$

где $N_0 = m_1$, $N_1 = m_1 + m_0 + 1$.

Предположим, что определены числа $m_1 < \ldots < m_{\nu-1}$ $(\nu < \nu_0)$, $m_i > N_{i-1}$, $2 \leq i \leq \nu - 1$, многочлены вида

$$P_i(x) = \sum_{s=N_{i-1}}^{N_i-1} b_s W_s(x), \quad N_{i-1} < N_i, \quad 1 \leq i \leq \nu - 1$$

и множества $\Delta_i^{(+)}$, $\Delta_i^{(-)}$ $(1 \leq i \leq \nu - 1)$, для которых справедливы условия

$$\sum_{s=N_{i-1}}^{N_i-1} b_s W_s(x) = \left(2^{i-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_i'}(x)\right) \cdot W_{m_i}(x), \quad 1 \leq i \leq \nu - 1, \tag{2.5}$$

$$\Delta_i' = \bigcap_{j=1}^{i} \Delta_j^{(-)}, \quad |\Delta_i'| = 2^{-i} \cdot |\Delta|, \quad \Delta_j^{(-)} = \{x \in \Delta : W_{m_j}(x) = -1\}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что существует натуральное число q_ν такое, что

$$\sum_{j=0}^{q_\nu} a_j^{(\nu)} \cdot W_j(x) = 2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_{\nu-1}'}(x), \quad x \in [0,1], \tag{2.7}$$

где

$$a_j^{(\nu)} = \int_0^1 \left[2^{\nu-1} \cdot \gamma \cdot \chi_{\Delta_{\nu-1}'}(x)\right] \cdot W_j(x)\, dx.$$

Возьмем натуральное число p_ν настолько большим, чтобы (см. (2.1))

$$W_{m_\nu}(x) \cdot W_k(x) = W_{m_\nu+k}(x), \quad \text{для } 0 \leq k \leq N_{\nu-1}, \text{ где } m_\nu = 2^{p_\nu}, \tag{2.8}$$

$$m_\nu > 3 \cdot m_{\nu-1} + N_{\nu-1}.$$

Пусть

$$b_s = \begin{cases} a_j^{(\nu)}, & \text{для } s = m_\nu + j, \quad j \in [0, q_\nu] \\ 0, & \text{для других } s, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$N_\nu = m_\nu + q_\nu + 1,$$

$$\Delta_\nu' = \Delta_{\nu-1}' \cap \Delta_\nu^{(-)}, \quad \text{где} \quad \Delta_\nu^{(-)} = \{x \in \Delta : W_{m_\nu}(x) = -1\}. \tag{2.10}$$

Из (2.7) — (2.9) получим

$$\sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} b_s W_s(x) = W_{m_\nu}(x) \cdot \sum_{j=0}^{q_\nu} a_j^{(\nu)} W_j(x) = 2^{\nu-1}\gamma \cdot W_{m_\nu}(x) \cdot \chi_{\Delta_{\nu-1}'}(x). \tag{2.11}$$

Из условия $m_\nu > 3m_{\nu-1}$ вытекает, что множества $\Delta_\nu^{(-)}$ и $\Delta_\nu^{(+)}$ имеют одинаковые порции на интервалах постоянства функции $W_{m_{\nu-1}}(x)$. Следовательно

$$|\Delta_\nu'| = \frac{|\Delta_{\nu-1}'|}{2} = \frac{|\Delta|}{2^\nu}. \tag{2.12}$$

Таким образом, по индукции можно определить натуральные числа $m_1 < .... < m_{\nu_0}$; $m_\nu > 3m_{\nu-1} + N_{\nu-1}$, множества Δ'_ν, $1 \le \nu \le \nu_0$ и многочлены

$$P_\nu(x) = \sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} b_s W_s(x), \tag{2.13}$$

удовлетворяющие для любого $\nu \in [1, \nu_0]$ условиям (2.11) и (2.12). Определим многочлен $P(x)$ и множество E следующим образом :

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{s=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} b_s W_s(x) \right), \quad N = N_{\nu_0} - 1, \tag{2.14}$$

$$E = \Delta \setminus \Delta'_{\nu_0}, \quad c_s = \begin{cases} b_s, & \text{для } N_{\nu-1} \le s < N_\nu, \ 1 \le \nu \le \nu_0, \\ 0, & \text{для } k_0 \le s < N_0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Очевидно (см. (2.10)), что для любого $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем

$$\gamma \cdot \chi_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \left[2^{i-1}\gamma \cdot \chi_{\Delta'_{i-1}}(x) \cdot W_{m_i}(x) \right] + 2^\nu \gamma \cdot \chi_{\Delta'_\nu}(x). \tag{2.16}$$

В силу (2.11), (2.14) и (2.16) имеем

$$P(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_k W_k(x) = \gamma \cdot \chi_\Delta(x) - 2^{\nu_0}\gamma \cdot \chi_{\Delta'_{\nu_0}}(x). \tag{2.17}$$

Следовательно, из (2.12) – (2.15) получаем

$$P(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \quad \text{и} \quad |E| > |\Delta| \cdot (1 - 2^{-\nu_0}).$$

Так как $|\Delta'_{\nu_0}| = 2^{-\nu_0}|\Delta|$ (см. (2.12)), из (2.17) находим

$$\int_\Delta |P(x)|^2 \, dx < 2^{\nu_0+2}\gamma^2|\Delta|. \tag{2.18}$$

Как следует из (2.14)

$$\int_0^1 P(x) \cdot W_k(x) \, dx = \begin{cases} c_k, & \text{для } k_0 \le k \le N, \\ 0, & \text{для других } k. \end{cases}$$

Поэтому из (2.14) и (2.18) получаем $\left(\sum_{k=k_0}^{N} c_k^2 \right)^{1/2} = \|P\|_2 < \sqrt{8/\varepsilon} \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{|\Delta|}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любых чисел $\varepsilon \in (0,1)$, $N_0 > 2$ и ступенчатой функции

$$f(x) = \sum_{s=1}^{q} \gamma_s \cdot \chi_{\Delta_s}(x), \tag{2.19}$$

где Δ_s — интервал вида $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right]$, $1 \le i \le 2^m$, существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ и многочлен $P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k W_k(x)$, которые удовлетворяют условиям :

$$(1) \quad P(x) = f(x) \quad \text{на } E, \quad (2) \quad |E| > 1 - \varepsilon, \quad (3) \quad \sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon,$$

$$(4) \quad \max_{N_0 \le m < N} \left[\int_e \left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x)\right| dx\right] < \varepsilon + \int_e |f(x)|\, dx$$

для любого измеримого подмножества e из E.

Доказательство : Не умаляя общности можно считать, что

$$|\gamma_k| \cdot \sqrt{|\Delta_k|} < \varepsilon^3 \left(64 \int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{-1}, \quad k = 1, ..., q. \tag{2.20}$$

Последовательным применением Леммы 1 можно определить множества $E_s \in \Delta_s$ и многочлены

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad s = 1, ..., q,$$

удовлетворяющие условиям

$$|E_s| > |\Delta_s| \cdot (1-\varepsilon), \quad P_s(x) = \begin{cases} \gamma_s, & x \in E_s \subset \Delta_s, \quad s = 1, ..., q, \\ 0, & x \notin \Delta_s, \quad s = 1, ..., q, \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} |c_k^{(s)}|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{8/\varepsilon} \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{|\Delta_s|}, \quad s = 1, ..., q. \tag{2.22}$$

Положим

$$E = \bigcup_{s=1}^{q} E_s, \quad P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{q} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x)\right], \tag{2.23}$$

где $c_k = c_k^{(s)}$ для $N_{s-1} \le k < N_s$, $s = 1, ..., q$, $N = N_q - 1$.

Из условий (2.19), (2.21), (2.23) имеем

$$P(x) = f(x) \quad \text{на} \quad E, \qquad |E| > (1-\varepsilon).$$

Учитывая соотношения (2.19) - (2.23), получаем

$$\sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^{2+\varepsilon} \leq \max_{N_0\leq k\leq N} |c_k|^{\varepsilon} \sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^2 \leq$$

$$\leq \max_{1\leq s\leq q} \left[\sqrt{8/\varepsilon}\cdot|\gamma_s|\cdot\sqrt{|\Delta_s|}\right]\cdot\sum_{s=1}^{q}\left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1}|c_k^{(s)}|^2\right] \leq$$

$$\leq \max_{1\leq s\leq q} \left[\sqrt{8/\varepsilon}\cdot|\gamma_s|\cdot\sqrt{|\Delta_s|}\right]\cdot\frac{8}{\varepsilon}\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx < \varepsilon.$$

Таким образом, множество E и многочлен $P(x)$ удовлетворяют условиям 1) — 3) Леммы 2. Проверим теперь выполнение условия 4). Пусть $N_0 \leq m < N$. Для некоторого $s_0 \in [1,q]$, $(N_{s_0} \leq m < N_{s_0+1})$, из (2.23) получаем

$$\sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{s_0}\left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x)\right] + \sum_{k=N_{s_0}}^{m} c_k^{(s_0+1)} W_k(x). \qquad (2.24)$$

Учитывая, что $P(x) = f(x)$ на E, из (2.19) - (2.24) для любого измеримого множества $e \subset E$ имеем

$$\int_e \left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k W_k(x)\right| dx \leq \int_e \left|\sum_{s=1}^{s_0}\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x)\right)\right| dx +$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{s_0}}^{m} c_k^{(s_0+1)} W_k(x)\right| dx \leq \int_e |f(x)|\,dx + \sqrt{8/\varepsilon}\cdot|\gamma_{s_0+1}|\cdot\sqrt{|\Delta_{s_0+1}|} <$$

$$< \int_e |f(x)|\,dx + \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. **Для любых $\gamma \neq 0$, $0 < \delta < 1$, $N > 1$ и квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T = [0,1]^2$ существует измеримое множество $E \subset T$ и многочлен**

$$P(x,y) = \sum_{k,s=N}^{M} c_{k,s} W_k(x)\cdot W_s(y),$$

обладающие следующими свойствами :

(1) $|E| > 1-\delta$, (2) $\sum_{k,s=N}^{M} |c_{k,s}|^{2+\delta} < \delta$, (3) $P(x,y) = \gamma\cdot\chi_\Delta(x,y)$, $(x,y)\in E$,

(4) **для любого измеримого множества e из E**

$$\max_{N\leq \overline{n},\overline{m}\leq M}\left[\int\int_e \left|\sum_{k,s=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{k,s} W_k(x) W_s(y)\right| dxdy\right] +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left[\int\int_{e} \left| \sum_{2N^2 \le k^2+s^2 \le R^2} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dx dy \right] \le 16 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Доказательство : Применим Лемму 2, полагая $f(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_1}(x)$, $N_0 = N$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Тогда существуют измеримое множество $E_1 \subset [0,1]$ и многочлен

$$P_1(x) = \sum_{k=N}^{N_1} a_k W_k(x),$$

удовлетворяющие следующим условиям :

$$1^\circ \quad P_1(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_1}(x), \quad x \in E_1, \quad 2^\circ \quad |E_1| > 1 - \frac{\delta}{2}, \quad 3^\circ \quad \sum_{k=N}^{N_1} |a_k|^{2+\delta} < \delta,$$

4° для любого измеримого множества $e_1 \subset E_1$

$$\max_{N \le \overline{n} \le N_1} \left[\int_{e_1} \left| \sum_{k=N}^{\overline{n}} a_k W_k(x) \right| dx \right] \le 2 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta_1|.$$

Пусть

$$M_0 = 2 \cdot \left(N_1^2 + 1 \right) \tag{2.25}$$

и вновь применим Лемму 2, полагая $f(y) = \chi_{\Delta_2}(y)$, $N_0 = M_0$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Тогда существуют измеримое множество $E_2 \subset [0,1]$ и многочлен $P_2(y) = \sum_{s=M_0}^{M} b_s W_s(y)$, удовлетворяющие следующим условиям :

$$1^{\circ\circ} \quad P_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y), \quad y \in E_2, \quad 2^{\circ\circ} \quad |E_2| > 1 - \frac{\delta}{2}, \quad 3^{\circ\circ} \quad \sum_{s=M_0}^{M} |b_s|^{2+\delta} < \delta,$$

$4^{\circ\circ}$ для любого измеримого $e_2 \subset E_2$

$$\max_{M_0 \le \overline{m} \le M} \left[\int_{e_2} \left| \sum_{s=M_0}^{\overline{m}} b_s W_s(y) \right| dy \right] \le 2 \cdot |\Delta_2|.$$

Пусть

$$E = E_1 \times E_2, \quad P(x,y) = P_1(x) P_2(y) = \sum_{k,s=N}^{M} c_{k,s} W_k(x) W_s(y), \tag{2.26}$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} a_k b_s, & \text{для } N \le k \le N_1, \quad M_0 \le s \le M, \\ 0, & \text{для других } k \text{ и } s. \end{cases}$$

Из условий $1^\circ - 3^\circ$, $1^{\circ\circ} - 3^{\circ\circ}$ и (2.26) следует выполнение условий 1) - 3) Леммы 3. Теперь проверим выполнение условия 4).

Пусть $N^2 + M_0^2 < R^2 < N_1^2 + M^2$. Тогда для некоторого $m_0 > M_0$ имеем $m_0 < R < m_0 + 1$ и в силу (2.25) получаем, что $R^2 - N_1^2 > (m_0 - 1)^2$. Следовательно, из условий 4°, 4°° и (2.26) для измеримого множества $e = e_1 \times e_2 \subset E$, $e_1 \subset E_1$, $e_2 \subset E_2$ получим

$$\iint_e \left| \sum_{N^2+M_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy \le$$
$$\le \iint_e \left| \sum_{k=N}^{N_1} \sum_{s=M_0}^{m_0-1} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy +$$
$$+ \max_{N<n\le N_1} \left[\iint_e \left| \sum_{k=N}^{n} c_{k,m_0} W_k(x) W_{m_0}(y) \right| dxdy \right] \le$$
$$\le \left[\int_{e_1} \left| \sum_{k=N}^{N_1} a_k W_k(x) \right| dx \right] \cdot \left[\int_{e_2} \left| \sum_{s=M_0}^{m_0-1} b_s W_s(y) \right| dy \right] +$$
$$+ |b_{m_0}| \left[\int_{e_2} |W_{m_0}(y)| \, dy \right] \max_{N<n\le N_1} \left[\int_{e_1} \left| \sum_{k=N}^{n} a_k W_k(x) \right| dx \right] \le 12 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Аналогично, для $N \le \overline{n} \le N_1$, $M_0 \le \overline{m} \le M$ получим

$$\iint_e \left| \sum_{k,s=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy \le 4 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любых $\varepsilon > 0$, $N > 1$ и $f(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y)$ существует измеримое множество $E \subset T = [0,1]^2$ и многочлен

$$P(x,y) = \sum_{k,s=N}^{M} c_{k,s} W_k(x) \cdot W_s(y),$$

удовлетворяющие следующим условиям :

(1) $P(x,y) = f(x,y)$, для $(x,y) \in E$, (2) $|E| > 1 - \varepsilon$, (3) $\sum_{k,s=N}^{M} |c_{k,s}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$,

(4) **для любого измеримого множества $e \subset E$**

$$\max_{N \le \overline{n},\overline{m} \le M} \left[\iint_e \left| \sum_{k,s=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy \right] +$$
$$+ \max_{\sqrt{2}N \le R \le \sqrt{2}M} \left[\iint_e \left| \sum_{2N^2 \le k^2+s^2 \le R^2} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy \right] \le$$
$$\le 2 \iint_e |f(x,y)| \, dxdy + \varepsilon.$$

Доказательство : Пусть Δ_ν - прямоугольная область постоянства функции $f(x,y)$. Не умаляя общности предположим, что

$$\max_{1\le\nu\le\nu_0}(|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|)<\frac{\varepsilon}{32}. \tag{2.27}$$

В силу Леммы 3 и (2.27) для натурального $\nu\in[1,\nu_0]$ и $\delta=\frac{\varepsilon}{16\nu_0}$ существует измеримое множество $E_\nu\subset T$ и многочлен

$$P_\nu(x,y)=\sum_{k,s=N_\nu}^{M_\nu}c_{k,s}^{(\nu)}W_k(x)\cdot W_s(y), \tag{2.28}$$

удовлетворяющие условиям :

$$|E_\nu|>1-\frac{\varepsilon}{2^{\nu_0}},\quad \sum_{k,s=N_\nu}^{M_\nu}|c_{k,s}^{(\nu)}|^{2+\epsilon}<\frac{\varepsilon}{\nu_0}, \tag{2.29}$$

$$P_\nu(x,y)=\gamma_\nu\cdot\chi_{\Delta_\nu}(x,y)\quad \text{для } (x,y)\in E_\nu, \tag{2.30}$$

для любого измеримого множества e из E_ν

$$\max_{N_\nu\le\overline{n},\overline{m}\le M_\nu}\left[\iint_e\left|\sum_{k,s=N_\nu}^{\overline{n},\overline{m}}c_{k,s}^{(\nu)}W_k(x)W_s(y)\right|dxdy\right]+$$

$$+\max_{\sqrt{2}N_\nu\le R\le\sqrt{2}M_\nu}\left[\iint_e\left|\sum_{2N_\nu^2\le k^2+s^2\le R^2}c_{k,s}^{(\nu)}W_k(x)W_s(y)\right|dxdy\right]\le 16\cdot|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.31}$$

Следовательно, существует измеримое множество $E_\nu\subset T$ и многочлен $P_\nu(x,y)$ вида (2.28), удовлетворющий условиям (2.29) — (2.31). При этом можно взять $N_1=N$, $N_\nu=M_{\nu-1}+1$, $1\le\nu\le\nu_0$. Пусть

$$E=\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0}E_\nu,\quad P(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}P_\nu(x,y)=\sum_{k,s=N}^{M}c_{k,s}W_k(x)W_s(y),\quad M=M_{\nu_0}, \tag{2.32}$$

где

$$c_{k,s}=\begin{cases}c_{k,s}^{(\nu)}, & \text{для } N_\nu\le k,s\le M_\nu,\ 1\le\nu\le\nu_0,\\ 0, & \text{для других } k \text{ и } s.\end{cases}$$

В силу (2.29), (2.30) и (2.32) получаем, что условия 1) — 3) Леммы 4 выполнены. Осталось проверить условие 4) Леммы 4.

Пусть $R\in[\sqrt{2}N,\sqrt{2}M]$. Тогда для некоторого $\nu'\in[1,\nu_0]$ имеем $\sqrt{2}N_{\nu'}\le R\le\sqrt{2}N_{\nu'+1}$. Следовательно, из (2.32) получаем

$$\sum_{2N^2\le k^2+s^2\le R^2}c_{k,s}W_k(x)W_s(y)=\sum_{\nu=1}^{\nu'-1}P_\nu(x,y)+\sum_{2N_{\nu'}^2\le k^2+s^2\le R^2}c_{k,s}^{(\nu')}W_k(x)W_s(y).$$

Теперь из (2.30) — (2.32) учитывая, что $P(x,y) = f(x,y)$ на E, для любого измеримого множества $e \subset E$ имеем

$$\iint_e \left| \sum_{2N^2 \le k^2+s^2 \le R^2} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy \le \iint_e |f(x,y)|\, dxdy + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, для любого $e \subset E$

$$\max_{N \le \overline{n}, \overline{m} \le M} \left[\iint_e \left| \sum_{k,s=N}^{\overline{n},\overline{m}} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) \right| dxdy \right] \le \iint_e |f(x,y)|\, dxdy + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Лемма 4 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1 : Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1] \tag{3.1}$$

множество ступенчатых функций, принимающих рациональные значения на интервалах с рациональными концами. В силу Леммы 2 существует последовательность множеств $\{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и последовательность многочленов

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < \dots < N_s < \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$

удовлетворяющих условиям :

$$P_s(x) = f_s(x), \quad x \in E_s, \tag{3.3}$$

$$|E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0,1], \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} \left| c_k^{(s)} \right|^{2+2^{-2s}} < 2^{-2s} \quad \text{и} \tag{3.5}$$

$$\max_{N_{s-1} \le p < N_s} \left[\int_e \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| dx \right] < 2^{-2(s+1)} + \int_e |f_s(x)|\, dx \tag{3.6}$$

для любого измеримого $e \subset E_s$.

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x) \right], \tag{3.7}$$

где $c_k = c_k^{(s)}$ for $N_{s-1} \le k < N_s$, $s = 1, 2, \ldots$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$

$$\Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad E = \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} E_s, \quad n_0 = [\log_{1/2} \varepsilon] + 1, \tag{3.8}$$

$$B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{n_0} \cup \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right).$$

Очевидно (см. (3.4)), что $|B| = 1$ и $|E| > 1 - \varepsilon$. Определим следующую измеримую функцию :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in E \cup ([0,1] \setminus B), \\ \mu_n & \text{для } x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \ge n_0 + 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2n} \prod_{s=1}^{n} h_s \right]^{-1}, \quad h_s = ||f_s(x)||_C + \max_{N_{s-1} \le p < N_s} \left\| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right\|_C + 1. \tag{3.10}$$

Здесь $||g(x)||_C = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$. Из (3.5), (3.7) - (3.10) получаем, что $|\{x \in [0,1] : \mu(x) \ne 1\}| < \varepsilon$, $0 < \mu(x) \le 1$ и для любого $q > 2$ имеем $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty$. Следовательно

$$\lim_{k \to \infty} c_k = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.8) — (3.10) следует, что для всех $s \ge n_0$ и $p \in [N_{s-1}, N_s)$

$$\int_{[0,1] \setminus \Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x)\, dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu_n \, dx \right] \le$$

$$\le \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| h_s^{-1} \, dx \right] < \frac{1}{3} \, 2^{-2s}. \tag{3.12}$$

Из (3.3) и (3.8) — (3.10) для всех $s \ge n_0$ получаем

$$\int_0^1 |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x)\, dx = \int_{\Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x)\, dx +$$

$$+ \int_{[0,1] \setminus \Omega_s} |P_s(x) - f_s(x)| \mu(x)\, dx = \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |P_s(x) - f_s(x)| \mu_n \, dx \right] \le$$

$$\le \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2s} \left[\int_0^1 \left(|f_s(x)| + \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \right) h_s^{-1} \, dx \right] < \frac{1}{3} \, 2^{-2s} < 2^{-2s}. \tag{3.13}$$

Используя (3.6), (3.8) – (3.10) и (3.12), для всех $p \in [N_{s-1}, N_s)$ и $s \geq n_0 + 1$ получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x)\, dx = \int_{\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x)\, dx +$$

$$+ \int_{[0,1]\setminus\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| \mu(x)\, dx <$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left[\int_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} W_k(x) \right| dx \right] \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} <$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left(2^{-2(s+1)} + \int_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} |f_s(x)|\, dx \right) \mu_n + \frac{1}{3} 2^{-2s} = 2^{-2(s+1)} \sum_{n=n_0+1}^{s} \mu_n +$$

$$+ \int_{\Omega_s} |f_s(x)|\, \mu(x) dx + \frac{1}{3} 2^{-2s} < \int_0^1 |f_s(x)| \mu(x)\, dx + 2^{-2s}. \tag{3.14}$$

Для любой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ можно выбрать функцию $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)| \mu(x)\, dx < 2^{-2}, \quad \nu_1 > n_0 + 1. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 |f_{\nu_1}(x)| \mu(x)\, dx < 2^{-2} + \int_0^1 |f(x)| \mu(x)\, dx. \tag{3.16}$$

Из (2.1), (3.13) и (3.15) для $m_1 = 1$ получим

$$\int_0^1 |f(x) - [P_{\nu_1}(x) + c_{m_1} W_{m_1}(x)]|\, \mu(x)\, dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_{\nu_1}(x)|\, \mu(x) dx +$$

$$+ \int_0^1 |f_{\nu_1}(x) - P_{\nu_1}(x)|\, \mu(x)\, dx + \int_0^1 |c_{m_1} W_{m_1}(x)|\, \mu(x)\, dx < 2 \cdot 2^{-2} + |c_{m_1}|. \tag{3.17}$$

Предположим, что числа $\nu_1 < \ldots < \nu_{q-1}$ и $m_1 < \ldots < m_{q-1}$ выбраны так, что выполняются следующие условия :

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{j} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right| \mu(x)\, dx < 2 \cdot 2^{-2j} + |c_{m_j}|, \quad 1 \leq j \leq q-1. \tag{3.18}$$

Выберем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\int_0^1 \left| \left(f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right) - f_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)\, dx < \tag{3.19}$$

$$< 2^{-2q}, \quad \nu_q > \nu_{q-1}, \quad \nu_q > m_{q-1}.$$

Отсюда и из (3.18) получим

$$\int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x)\right| \mu(x) dx < 9 \cdot 2^{-2q} + \left|c_{m_{q-1}}\right|. \qquad (3.20)$$

Из (3.13), (3.14) и (3.20) имеем

$$\int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x)\right| \mu(x)\, dx < 2^{-2\nu_q}, \quad P_{\nu_q}(x) = \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} W_k(x), \qquad (3.21)$$

$$\max_{N_{\nu_q-1} \le p < N_{\nu_q}} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{p} c_k^{(\nu_q)} W_k(x) \right| \mu(x)\, dx < 10 \cdot 2^{-2q} + \left|c_{m_{q-1}}\right|. \qquad (3.22)$$

Положим

$$m_q = \min\left\{ n \in N : n \notin \left\{ \left\{ \{k\}_{k=N_{\nu_s-1}}^{N_{\nu_s}-1} \right\}_{s=1}^{q} \cup \{m_s\}_{s=1}^{q-1} \right\} \right\}. \qquad (3.23)$$

Учитывая соотношения (2.1), (3.19) и (3.21) получим

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{q} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right| \mu(x)\, dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left| \left(f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} [P_{\nu_s}(x) + c_{m_s} W_{m_s}(x)] \right) - f_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \left|f_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x)\right| \mu(x)\, dx + \int_0^1 \left|c_{m_q} W_{m_q}(x)\right| \mu(x)\, dx < 2 \cdot 2^{-2q} + \left|c_{m_q}\right|. \qquad (3.24)$$

Таким образом, мы можем выбрать из ряда (3.7) последовательность членов $c_{m_q} W_{m_q}(x)$ и многочленов

$$P_{\nu_q}(x) = \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} W_k(x), \quad N_{n_q-1} > N_{n_{q-1}}, \quad q = 1, 2, \ldots, \qquad (3.25)$$

удовлетворяющих условиям (3.22) — (3.24) для всех $q \ge 1$. Учитывая выбор $P_{\nu_q}(x)$ и $c_{m_q} W_{m_q}(x)$ (см. (3.23) и (3.25)) получим, что ряд

$$\sum c_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} W_k(x) + c_{m_q} W_q(x) \right]$$

получается из ряда (3.7) перестановкой членов. Из (3.11), (3.22) и (3.24) заключаем, что $\sum c_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x)$ сходится к функции $f(x)$ в метрике пространства $L^1_\mu[0,1]$, т.е. ряд (3.7) универсален относительно перестановок в $L^1_\mu[0,1]$ (см. Определение 1). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Последовательно применяя Лемму 2, можно найти последовательность множеств $\{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и последовательность многочленов

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < \dots < N_s < \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{3.26}$$

удовлетворяющих следующим условиям :

$$|E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0,1], \tag{3.27}$$

$$\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} \left|c_k^{(s)}\right|^{2+2^{-2s}} < 2^{-2s}, \tag{3.28}$$

$$\int_{E_s} \left| f_n(x) - \sum_{s=1}^{n} P_s(x) \right| dx < 2^{-2n}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.29}$$

где $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность (3.1). Положим

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} W_k(x) \right], \tag{3.30}$$

где $c_k = c_k^{(s)}$ для $N_{s-1} \le k < N_s$, $s = 1, 2, \dots$ Очевидно, что $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q < \infty$ для любого $q > 2$ (см. (3.28)). Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве Теоремы 1, можем построить весовую функцию $0 < \mu(x) \le 1$ такую, что

$$\int_0^1 \left| f_n(x) - \sum_{s=1}^{n} P_s(x) \right| \mu(x)\, dx < 2^{-2n}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.31}$$

Для любой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1]$ из последовательности (3.1) можно выбрать подпоследовательность $\{f_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ так, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{\nu_k}(x)| \mu(x)\, dx < 2^{-2k}. \tag{3.32}$$

Из условий (3.30) – (3.32) заключаем, что

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{\nu_k} P_s(x) \right| \mu(x)\, dx \le \int_0^1 |f(x) - f_{\nu_k}(x)| \mu(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| f_{\nu_k}(x) - \sum_{s=1}^{\nu_k} P_s(x) \right| \mu(x)\, dx < 2^{-2k} + 2^{-2\nu_k}.$$

Следовательно, ряд (3.30) является универсальным в пространстве $L^1_\mu[0,1]$ в обычном смысле (см. Определение 2). Теорема 2 доказана.

Замечание. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве Теоремы 1 (Теоремы 2) и применяя Лемму 4 вместо Леммы 2, получим доказательство Теоремы 3 (Теоремы 4).

В заключение выражаю благодарность профессору М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ABSTRACT. In this paper a weight μ and a series $\sum_{k=1}^{\infty} c_k W_k(x)$ by Walsh system is constructed, which is universal with respect to rearrangements in the weighted space $L^1_\mu[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Е. Меньшов, "О частичных суммах тригонометрических рядов", Мат. Сб., том 20, стр. 197 – 238, 1947.
2. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. Сб., том 26, стр. 351 – 364, 1950.
3. А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду подпоследовательности частичных сумм общих ортогональных рядов", Изв. АН. Арм.ССР, сер. Физ.-Мат. наук, том. 10, стр. 17 – 34, 1957.
4. А. А. Талалян, "О рядах, универсальных относительно перестановок", Изв. АН СССР, сер. Матем., том 24, стр. 567 – 604, 1960.
5. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia Math., vol. 134 no. 3, pp. 211 – 237, 1999.
6. П. Л. Ульянов, "О безусловной сходимости и суммируемости", Изв. АН СССР, сер. Матем., том 22, стр. 811 – 840, 1958.
7. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН Арм.ССР, том 64, стр. 72 – 76, 1976.
8. R.Paley, "A remarkable system of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., vol. 34, pp. 241 – 279, 1932.

15 Декабря 1998 Ереванский государственный университет

ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Г. А. Карапетян, В. Т. Сардарян, А. П. Крмзян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

В работе изучается асимптотическое поведение собственных значений семиэллиптических дифференциальных операторов вида $A(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\leq k} a_\alpha(x)D^\alpha$, определенных на анизотропном пространстве Соболева $H_{k\mu}(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Условия при которых спектр оператора A дискретный, а его собственные значения имеют конечные кратности задаются вместе с асимптотическим соотношением $N(\lambda) = c\lambda^{|\mu|/k} + o\left(\lambda^{|\mu|/k}\right)$, $\lambda \to \infty$, где $N(\lambda)$ – число собственных значений λ_j удовлетворяющих условию $|\lambda_j| < \lambda$, а $c > 0$ – постоянная зависящая от A и Ω.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая свойству конуса, а m_1, $m_2, \ldots, m_n$ – натуральные числа. Для $\mu = \left(\frac{1}{2m_1}, \ldots, \frac{1}{2m_n}\right)$, $p \geq 1$ и $k \geq 1$ обозначим через $W_p^{k\mu}(\Omega)$ анизотропное пространство Соболева, т.е. множество функций f, для которых существуют производные $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$ для любого мультииндекса α с $(\alpha, \mu) \leq k$. При $p = 2$ пространство $W_p^{k\mu}(\Omega) \equiv H_{k\mu}(\Omega)$ является гильбертовым с нормой $||u||_k$ и полунормой $|u|_k$:

$$||u||_k = \left(\int_\Omega \sum_{(\alpha,\mu)\leq k} |D^\alpha u|^2 \, dx\right)^{1/2}, \qquad |u|_k = \left(\int_\Omega \sum_{(\alpha,\mu)=k} |D^\alpha u|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Для ограниченного линейного преобразования T на гильбертовом пространстве X определим двойную норму $|||T||| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||T\varphi_i||^2\right)^{1/2}$, где $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ — ортонормированный базис в X. Проверим, что эта величина не зависит от выбора базиса $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Действительно, если $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ – другой базис в X, то $\sum_{i=1}^\infty ||T\varphi_i||^2 = \sum_{i=1}^\infty ||T\psi_i||^2 = \sum_{i=1}^\infty ||T^*\varphi_i||^2 = \sum_{j,i=1}^\infty ||(T\varphi_i, \psi_j)||^2$. След $\mathrm{tr}(T \cdot S)$

оператора $T \cdot S$ определим следующим образом :

$$\mathrm{tr}(T \cdot S) = \sum_{i=1}^{\infty} (TS\varphi_i, \varphi_j),$$

где S — ограниченное линейное преобразование.

Имеют место следующие соотношения :

$$\mathrm{tr}(T \cdot S) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (T\varphi_j, \varphi_i)(S\varphi_i, \varphi_j), \qquad \mathrm{tr}(TS) \le |||T||| \cdot |||S|||.$$

Для линейного оператора A обозначим через $\rho(A)$ и $\tau(A)$ резольвентное множество и спектр оператора A, соответственно. Множество всех ненулевых комплексных чисел λ, для которых $R(1-\lambda A) = X$, а $(1-\lambda A)^{-1}$ — ограниченное линейное преобразование на X, мы будем обозначать через $\rho_m(A)$ и называть видоизмененным резольвентным множеством оператора A. Отметим, что $\lambda \in \rho_m(A)$ эквивалентно условию $\lambda^{-1} \in \rho(A)$. Пусть λ - собственное значение оператора A. Вектор $f \neq 0$ называется обобщенным собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, если для некоторого целого $k > 0$ имеем $(\lambda - A)^k f = 0$. Пусть λ — характеристическое значение оператора A, т.е. $\lambda A g = g$ для некоторого $g \neq 0$. Вектор $f \neq 0$ называется обобщенным характеристическим вектором оператора A, если $(1-\lambda A)^k f = 0$ для некоторого целого k. Для действительного числа θ и положительного a положим $E(\theta, a) = \{re^{i\theta} : r > a\}$.

Определение 1. Пусть A - линейный оператор. Направление θ в комплексной плоскости будем называть направлением минимального роста резольвенты оператора A, если $E(\theta, a) \subset \rho(A)$ для некоторого положительного a и $\|(\lambda - A)^{-1}\| = O\left(|\lambda|^{-1}\right)$ для $\lambda \in E(\theta, a)$, $|la| \to \infty$. Вектор θ назовем направлением минимального роста видоизмененной резольвенты оператора A, если $E(\theta, a) \subset \rho_m(A)$ для некоторого $a > 0$ и $\|A_\lambda\| \equiv \|A(1-\lambda A)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1})$ для $\lambda \in E(\theta, a)$ при $|\lambda| \to \infty$.

§1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ $L_2(\Omega)$ В $H_{k\mu}(\Omega)$

Лемма 1.1. *Пусть* $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$ *и* $u \in H_{k\mu}(\Omega)$. *Тогда функция* u *может быть изменена на множестве меры нуль так, что* $u \in C(\overline{\Omega})$. *Существует постоянная* $\gamma = \gamma(\Omega, \mu)$ *такая, что для всех* $x \in \overline{\Omega}$ *имеем*

$$|u(x)| \le \gamma \cdot \left(|u|_0^{1-|\mu|/(2k)} |u|_k^{|\mu|/(2k)} + |u|_0\right). \tag{1.1}$$

Доказательство : По теореме Соболева для анизотропных классов (см. [2]) имеем

$$|u(x)| \le \gamma \cdot r^{-(k-|\mu|/2)}\left(|u|_{k,\Omega} + r^k |u|_{0,\Omega}\right), r \ge 1.$$

Если $|u|_k \le |u|_0$ возьмем $r = 1$ и получим $|u(x)| \le \gamma \cdot \left(|u|_0^{1-|\mu|/(2k)} |u|_k^{|\mu|/(2k)} + |u|_0\right)$. Для $|u|_k > |u|_0$ имеем $r^k = |u|_0^{-1}|u|_k$ и получим $|u(x)| \le 2\gamma \cdot |u|_0^{1-|\mu|/(2k)} |u|_k^{|\mu|/(2k)} \le 2\gamma \cdot \left(|u|_0^{1-|\mu|/(2k)} |u|_k^{|\mu|/(2k)} + |u_0|\right)$. Лемма 1.1 доказана. Следующие две леммы доказываются аналогично.

Лемма 1.2. Пусть $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$ **и** $u \in H_{k\mu}(\Omega)$. **Существует постоянная** γ_*, **зависящая только от** Ω **и** μ **такая, что после изменения функции** u **на множестве меры нуль**

$$|u(x)| \le \gamma_* \|u\|_k^{|\mu|/(2k)} \|u\|_0^{1-|\mu|/(2k)}, x \in \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.3. Существует постоянная $\gamma = \gamma(\Omega, \mu)$ **такая, что для всех** $u \in H_{k\mu}(\Omega)$ **и** $0 \le j \le k$

$$|u|_{j,\Omega} \le \gamma \cdot \left[|u|_0^{1-j/k} |u|_k^{j/k} + |u|_0\right] \le 2\gamma \cdot |u|_0^{1-j/k} \|u\|_k^{j/k}. \tag{1.3}$$

Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$. Для $0 \le l \le k$ положим

$$\|T\|_l = \sup_{f \in L_2(\Omega), \|f\|_{0,\Omega}=1} \|Tf\|_l, \qquad |T|_l = \sup_{f \in L_2(\Omega), \|f\|_{0,\Omega}=1} |Tf|_l.$$

Теорема 1.1. Пусть T **— ограниченное линейное преобразование на** $L_2(\Omega)$ **такое, что** $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, **где** $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$. **Тогда** T **имеет конечную двойную норму** $|||T|||$, **удовлетворяющую неравенствам**

$$|||T||| \le \gamma \cdot |\Omega|^{1/2} \left(|T|_k^{|\mu|/(2k)} |T|_0^{1-|\mu|/(2k)} + |T|_0\right), \tag{1.4}$$

$$|||T||| \le \gamma_* \cdot |\Omega|^{1/2} \|T\|_k^{|\mu|/(2k)} \|T\|_0^{1-|\mu|/(2k)}, \tag{1.5}$$

где $|\cdot|$ **— мера Лебега, а** γ **- постоянная из (1.1).**

Доказательство : Пусть $\{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...\}$ является ортонормальным базисом в $L_2(\Omega)$ и $u_j = T\Phi_j$ для $j = 1, 2, ...,$ и пусть $a_1, a_2, ..., a_N$ - произвольные комплексные числа. Пусть $f = \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j(x)$. Тогда из непрерывности функций u_j и $u = Tf$ следует, что $u(x) = \sum_{j=1}^N a_j u_j(x)$ для всех $x \in \Omega$. В силу

Леммы 1.1 для всех $x \in \Omega$ и любых комплексных $a_1, a_2, \dots, a_N$ имеем $|u(x)| \le \gamma \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right) \cdot \|f\|_{0,\Omega}$, т.е.

$$\left|\sum_{j=1}^{N} a_j u_j(x)\right| \le \gamma \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right) \left[\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2\right]^{1/2}. \tag{1.6}$$

Если для фиксированного x положить $a_j = \overline{u_j(x)}$, то из (1.6) получим

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j(x)|^2 \le \gamma^2 \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right)^2 \quad \text{для любого} \quad x \in \Omega.$$

Интегрируя по Ω, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \|T\Phi_j\|_{0,\Omega}^2 \le \gamma^2 |\Omega| \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right)^2.$$

Так как это неравенство имеет место для всех N, то

$$|||T||| \le \gamma^2 |\Omega|^{1/2} \cdot \left(|T|_0^{1-|\mu|/(2k)}|T|_k^{|\mu|/(2k)} + |T|_0\right).$$

Аналогично доказывается неравенство (1.5). Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, где $\dfrac{|\mu|}{2k} < 1$. Предположим также, что существует хотя бы одно направление минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T. Пусть $N(t)$ – сумма кратностей характеристических значений $\{\lambda_j\}$ оператора T, удовлетворяющих условию $|\lambda_j| \le t$. Для всех $\lambda \in \rho_m(T)$ при $t \to \infty$ имеем $N(t) = O(t^{|\mu|/k})$ и

$$\operatorname{tr}(TT_\lambda) = \sum_j \frac{1}{(\lambda_j - \lambda)\,\lambda_j}, \tag{1.7}$$

где $T_\lambda = T(I - \lambda T)^{-1}$. Если $\|T_\lambda\|_0 \le c|\lambda|^{-1}$ для $\lambda \in E(\theta, a)$, тогда для $t \ge a > 0$ имеем $N(t) \le 4\gamma_s^2\, |\Omega|\, \|T\|_k^{|\mu|/k}(1+c)^2 t^{|\mu|/k}$.

Доказательство : Для $\lambda \in E(\theta, a)$ имеем $1 = (1 - \lambda T)(1 - \lambda T)^{-1} = (1 - \lambda T)^{-1} - \lambda T(1 - \lambda T)^{-1}$. Отсюда следует, что $(1 - \lambda T)^{-1} = 1 + \lambda T_\lambda$. Следовательно, $\|(1 - \lambda T)^{-1}\|_0 \le 1 + |\lambda|\,|T_\lambda\|_0 \le 1 + C$. Имеем также $\|T_\lambda\|_k = \|T(1 + \lambda T)^{-1}\|_k \le \|T\|_k\, \|(1 - \lambda T)^{-1}\|_0 \le \|T\|_k\,(1 + C)$. Из Теоремы 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} |||T_\lambda||| &\le \gamma_s |\Omega|^{1/2}\, \|T_\lambda\|_k^{|\mu|/(2k)}\, \|T_\lambda\|_0^{1-|\mu|/(2k)} \le \\ &\le \gamma_s\, |\Omega|^{1/2}\, \|T\|_k^{|\mu|/(2k)}\, (C+1)^{|\mu|/(2k)}\, C^{1-|\mu|/(2k)} |\lambda|^{-1+|\mu|/(2k)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Собственными значениями оператора T_λ являются числа $\dfrac{\lambda_j^{-1}}{1-\lambda_j^{-1}\lambda} = \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda}$, а их кратность равна кратности собственных значений λ_j^{-1} оператора T. Следовательно, применяя Теорему 12.14 из [1] к оператору T_λ, получим

$$\sum_j |\lambda_j - \lambda|^{-2} \le |||T_\lambda|||^2. \tag{1.9}$$

Для $|\lambda_j| \le t$ и $|\lambda| = t$ имеем, что $|\lambda_j - \lambda| \le 2t$. В силу (1.8) получаем

$$\sum_{|\lambda_j|\le t} \frac{1}{4t^2} \le |||T|||^2 \le \gamma_s^2\, |\Omega| \cdot ||T||_k^{|\mu|/k} (1+C)^{|\mu|/k} C^{2-|\mu|/k} t^{-2+|\mu|/k}.$$

Умножая полученное неравенство на $4t^2$ находим

$$N(t) \le 4\gamma_s^2\, |\Omega|\, ||T||_k^{|\mu|/k}\, (1+C)^{|\mu|/k}\, C^{2-|\mu|/k}\, t^{|\mu|/k}.$$

Теперь докажем (1.7). В силу Теоремы 12.17 из [1], для всех $\lambda \in \rho_m(T)$ имеем

$$\mathrm{tr}(TT_\lambda) = \sum_j \frac{1}{(\lambda_j - \lambda)\lambda_j} + c, \tag{1.10}$$

где c – постоянная. Если $\lambda \in \Lambda(\theta, a)$, то из (1.8) получим

$$\mathrm{tr}(TT_\lambda) \le |||T||| \cdot |||T_\lambda||| \le \mathrm{const} \cdot |\lambda|^{-1+|\mu|/(2k)}.$$

Следовательно, $\mathrm{tr}(TT_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in E(\theta, a)$. С другой стороны, $[(\lambda_j - \lambda)\,\lambda_j]^{-1} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in E(\theta, a)$. Следовательно, в равенстве (1.10) $c = 0$. Теорема 1.2 доказана.

Следствие 1.1. Пусть для каждого $\lambda \in (\theta, a)$ оператор T_λ в Теореме 1.2 существует и выполняется оценка $||T_\lambda||_0 \le C\,|\lambda|^{-1}$. Если $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots$ для $j = 1, 2, \dots$, то имеем $|\lambda_j| \ge \left[4\gamma_s^2 |\Omega|\,(1+C)^2\right]^{-k/|\mu|} ||T||_k^{-1} \cdot j^{k/|\mu|}$.

Доказательство : Утверждение следует из Теоремы 1.2, так как $j \le N(|\lambda_j|)$.

Рассмотрим билинейную форму $B[v, u]$ над замкнутым подпространством V пространства $H_{k\mu}(\Omega)$, $|\mu|/(2k) < 1$, где $|\mu| < 2k$. Предположим, что существуют постоянные $K > 0$ и c_0 такие, что для всех $u, v \in V$ имеем

$$|B[v, u]| \le K\, ||v||_{k,\Omega} ||u||_{k,\Omega}, \qquad \mathrm{Re}\, B[u, u] \ge c_0\, ||u||^2_{k,\Omega}.$$

По Теореме Лакса–Мильграма (см. [4]) существует единственное линейное преобразование T, действующее из $L_2(\Omega)$ в V и удовлетворяющее следующим соотношениям :

$$B[v, Tf] = (v, f)_{0,\Omega}, \quad f \in L_2(\Omega), \quad v \in V. \tag{1.11}$$

Теорема 1.3. **При вышеуказанных условиях полуплоскость $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ содержится в $\rho_m(T)$, а отрицательная действительная ось является направлением минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T. Если модули характеристических значений оператора T расположить в порядке неубывания, то**

$$|\lambda_j| \geq \frac{c_0}{(16\gamma_s^2\,|\Omega|)^{k/|\mu|}}\, j^{k/|\mu|}.$$

Доказательство : Подставляя $\nu = Tf$ в (1.11), получим

$$\operatorname{Re}(Tf,f) = \operatorname{Re} B[Tf,Tf] \geq c_0\,\|Tf\|^2_{k,\Omega} \geq 0. \tag{1.12}$$

Так как отображение T из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ является ограниченным, то при достаточно больших $|\lambda|$ имеем $\lambda \in \rho(T)$. Тогда по Теореме 12.8 из [1] следует, что каждое λ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$ принадлежит $\rho(T)$. Поэтому $(1-\lambda T)^{-1}$ существует для всех λ таких, что $\operatorname{Re}\lambda^{-1} < 0$, так как $1-\lambda T = \lambda(\lambda^{-1} - T)$ и $\operatorname{Re}\lambda^{-1} < 0$. Из коммутативности T и $(1-\lambda T)^{-1}$ следует, что для $u = T_\lambda f = T(1-\lambda T)^{-1} f$ имеет место соотношение $(1-\lambda T) = Tf$. Следовательно, $u = T(\lambda u + f)$. В силу (1.11) для всех $\nu \in V$ имеем $B[\nu,u] = (\nu, \lambda u + f)$ и $B[\nu, T_\lambda f] = (\nu, \lambda T_\lambda f + f)$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Полагая $\nu = T_\lambda f$, получаем $B[T_\lambda f, T_\lambda f] = \bar{\lambda}\,\|T_\lambda f\|_0^2 + (T_\lambda f, f)$. Следовательно

$$c_0\,\|T_\lambda f\|_0^2 \leq \operatorname{Re} B[T_\lambda f, T_\lambda f] = \operatorname{Re}\lambda\,\|T_\lambda f\|_0^2 + \operatorname{Re}(T_\lambda f, f) \leq$$
$$\leq \operatorname{Re}\lambda\,\|T_\lambda f\|_0^2 + \|T_\lambda f\|_0 \|f\|_0.$$

Разделив полученное неравенство на $\|T_\lambda f\|_0$ находим $\|T_\lambda\|_0 \leq \dfrac{1}{c_0 - \operatorname{Re}\lambda}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Следовательно, если λ – отрицательное вещественное число, то $\|T_\lambda\|_0 \leq \dfrac{1}{c_0-\lambda} \leq \dfrac{1}{|\lambda|}$. Таким образом, условия Следствия 1.1 выполняются при $C = 1$. Теперь утверждение вытекает из Следствия 1.1, так как в силу (1.12) имеем $\|T\|_k \leq c_0^{-1}$.

Теорема 1.4. **Пусть выполнены условия Теоремы 1.3, и пусть билинейная форма $B[\nu,u]$ является эрмито–симметричной, а оператор T, определенный по (1.11), является самосопряженным. Если модули характеристических значений λ_j оператора T расположить в порядке неубывания, то $\lambda_j \geq c_0\,(16\gamma_s^2\,|\Omega|)^{-2k/|\mu|}\, j^{2k/|\mu|}$, $j = 1, 2, \ldots$.**

Доказательство : Из (1.12) получаем, что $(Tf,f) \geq 0$ для всех f, т.е. T является положителным, компактным, самосопряженным оператором. Следовательно, существует единственный положителный, компактный, самосопряженный оператор S с характеристическими значениями $\lambda_j^{1/2}$ такой, что $S^2 = T$. Так как $Tf \neq 0$

для $f \neq 0$ имеем $Sf \neq 0$ для $f \neq 0$. Следовательно, область значений оператора S плотна в $L_2(\Omega)$. Используя (1.11) для $\nu = Tf$, получаем

$$B[Tf, Tf] = (Tf, f) = (S^2 f, f) = \|Sf\|_0^2.$$

Обозначая $Sf = g$, по условию теоремы $c_0 \|Sg\|_k^2 = c_0 \|Tf\|_k^2 \leq B[Tf, Tf] = \|g\|_0^2$. Так как область значений оператора S плотна в $L_2(\Omega)$, то из последнего неравенства следует, что область значений содержится в $H_{k\mu}(\Omega)$ и $\|S\|_k \leq c_0^{-1/2}$. Рассмотрим теперь видоизмененную резольвенту S_λ вдоль положительной мнимой оси. Из неравенства $\|T_\lambda\| \leq |\csc\theta|\,|\lambda|^{-1}$, $\arg\lambda = \theta$ следует, что $\|S_\lambda\|_0 \leq |\lambda|^{-1}$. Таким образом, предположения Следствия 1.1 выполнены для S_λ и $C = 1$. Таким образом, результат вытекает из Следствия 1.1 и из вышедоказанной оценки для $\|S\|_k$. Теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5. Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что $R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, где $k > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$. Если $R(T^*) \subset H_{k\mu}(\Omega)$ и $l = k - \left[\frac{|\mu|}{2}\right] - 1$, то T – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K(x, y) \in H_{l\overline{\mu}}(\Omega \times \Omega)$, причем $\overline{\mu} = (\mu, \mu)$ и

$$\left[\int_\Omega |K(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \leq \gamma \cdot \left[\left(|T|_k^{|\mu|/k} + |T^*|_k^{|\mu|/k}\right) |T|_0^{1-|\mu|/k} + |T|_0\right], \qquad (1.13)$$

где $\gamma = \gamma(\Omega, \mu)$.

Доказательство : Из Теоремы 1.1 следует, что T имеет конечную двойную норму. Следовательно, (см. [1]) T – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K(x, y)$. Остается показать, что $K \in H_{l\overline{\mu}}(\Omega \times \Omega)$ и имеет место оценка (1.13). Полагая $r = \max\left\{|T|_k^{1/k}\,|T|_0^{-1/k}, |T^*|_k^{1/k}\,|T|_0^{-1/k}, 1\right\}$ имеем

$$|T|_k \leq r^k\,|T|_0, \qquad |T^*|_k \leq r^k\,|T|_0, \qquad 1 \leq r. \qquad (1.14)$$

Отметим, что T^* – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Рассмотрим оператор T^α, отображающий $f \in L_2(\Omega)$ в $D^\alpha Tf$, $(\alpha, \mu] \leq l$. Так как $Tf \in H_{k\mu}(\Omega)$, то $D^\alpha Tf \in H_{(k-(\alpha,\mu))\mu}(\Omega)$ и $k - (\alpha, \mu) \geq k - l = [|\mu|/2] + 1 > |\mu|/2$. Следовательно, T^α – ограниченное линейное отображение из $L_2(\Omega)$ в $H(k - \epsilon)\mu(\Omega)$ и T^α – интегральный оператор с ядром Гильберта–Шмидта $K^\alpha(x, y)$. Пусть $\{\Phi_j\}$ является ортонормальным базисом в $L_2(\Omega)$ и пусть $u_j = T\Phi_j$, $f = \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j$, $u = Tf = \sum_{j=1}^N a_j u_j$, где $a_1, \ldots, a_N$ суть комплексные числа. Из теоремы вложения Соболева для анизотропных классов, с точностью до множества меры нуль имеем $u_j \in C^l(\Omega)$, $u \in C^l(\Omega)$. Следовательно, для фиксированного индекса α, удовлетворяющего условию $(\alpha, \mu) \leq l$, для всех $x \in (\Omega)$, получаем

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j u_j(x), \qquad D^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j D^\alpha u_j(x). \tag{1.15}$$

Полагая $u = Tf$ при $r \geq 1$, получим $|D^\alpha u(x)| \leq \gamma \cdot r^{-(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))}(|T|_k + +r^k|T|_0)\,\|f\|_0$. Из (1.15) следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} a_j\, D^\alpha u_j(x) \leq \gamma \cdot r^{-(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))}\left(|T|_k + r^k\,|T|_0\right)\left(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2\right)^{1/2}$$

для любых постоянных $a_1, \dots, a_N$ и для всех $x \in \Omega$. Для фиксированного x пусть $a_j = \overline{D^\alpha u_j(x)}$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{N} |D^\alpha u_j(x)|^2 \leq \gamma^2 \cdot r^{-2(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))}\left(|T|_k + r^k\,|T|_0\right)^2.$$

Интегрируя по x на Ω, используя $D^\alpha u_j = D^\alpha T\Phi_j = T^\alpha \Phi$, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \|T^\alpha \Phi_j\|_0^2 \leq \gamma^2\,|\Omega|\,r^{-2(k-|\mu|/2-(\alpha,\mu))}\left(|T|_k + r^k\,|T|_0\right)^2.$$

Так как последнее неравенство имеет место для всех положительных целых N, то из (1.14) получаем

$$|||D^\alpha T||| = |||T^\alpha||| \leq 2\gamma\,|\Omega|^{1/2}\,r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)}\,|T|_0. \tag{1.16}$$

Теперь покажем, что $K^\alpha(x,y) = D_x^\alpha K(x,y)$. Пусть $\varphi(x,y) = a(x)\,b(y)$, где $a, b \in C_0^\infty(\Omega)$. Так как K^α является ядром соответствующего $T^\alpha = D^\alpha T$, то для почти всех $x \in \Omega$ имеем $\int_\Omega K^\alpha(x,y)\,b(y)\,dy = (D^\alpha Tb)(x)$. Следовательно

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} K^\alpha(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy &= \int_\Omega a\,D^\alpha(Tb)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha a\,T\,b\,dx = \\ &= (-1)^\alpha \int_{\Omega\times\Omega} K\,D^\alpha\varphi\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Равенство (1.17) выполняется также для любой функции φ вида $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\,b_j(y)$, где $a_j,\ b_j \in C_0^\infty(\Omega)$. Покажем, что (1.17) имеет место для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\times\Omega)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\times\Omega)$. Тогда существует компактно вложенное в

Ω открытое множество Ω' ($\Omega' \subset\subset \Omega$) такое, что $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega' \times \Omega'$. Предположим, что функция $\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ выбрана так, что $\varepsilon(x) \equiv 1$ для $x \in \Omega'$. Пусть $Q = \left\{(x,y) : |x_k| < \frac{1}{2}, |y_k| < \frac{1}{2}\right\}$ куб, содержащий $\Omega \times \Omega$. Продолжим функцию $\varphi(x,y)$ на Q так, что $\varphi \equiv 0$ на $Q \setminus \mathrm{supp}(\varphi)$, а затем периодически продолжим на $E_n \times E_n$. Нетрудно убедиться, что так продолженная функция φ будет периодической на $C^\infty(E_n \times E_n)$. Поэтому разложение Фурье функции φ сходится равномерно к $\varphi : \varphi(x,y) = \sum_{\xi,\eta} a_{\xi,\eta} e^{2\pi i(x\cdot\xi + y\cdot\eta)}$, где сумма берется по всем ξ и η с целыми компонентами. Имеем также $D_x^\alpha \varphi(x,y) = \sum\limits_{\xi,\eta} (2\pi i\xi)^\alpha a_{\xi,\eta} e^{2\pi i(x\cdot\xi+y\cdot\eta)}$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_N(x,y) = \varepsilon(x)\,\varepsilon(y) \sum_{|\xi|+|\eta|\le N} a_{\xi,\eta}\, e^{2\pi i(x\cdot\xi+y\cdot\eta)} =$$

$$= \sum_{|\xi|+|\eta|\le N} a_{\xi,\eta}\,\varepsilon(x) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,\varepsilon(y)\, e^{2\pi i y\cdot\eta)}.$$

Функции $\varepsilon(x)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}$ и $\varepsilon(y)\, e^{2\pi i y\cdot\eta}$ принадлежат $C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно, для функции $\varphi_N(x,y)$ имеет место равенство (1.17)

$$\int_{\Omega\times\Omega} K^\alpha \varphi_N\, dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega\times\Omega} K\, D_x^\alpha \varphi_N\, dx\, dy,$$

а при $N \to \infty$ предельные соотношения в пространстве $L_2(\Omega)$: $\varphi_N \to \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\varphi(x,y)$ и $D_x^\alpha \varphi_N \to D_x^\alpha(\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi(x,y))$. Отсюда получим

$$\int_{\Omega\times\Omega} K^\alpha \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi\, dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega\times\Omega} K\, D_x^\alpha(\varepsilon(x)\varepsilon(y)\varphi)\, dx\, dy \text{ или}$$

$$\int_{\mathrm{supp}\Phi} K^\alpha \varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi\, dx\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathrm{supp}\Phi} K\, D_x^\alpha(\varepsilon(x)\,\varepsilon(y)\,\varphi)\, dx\, dy.$$

Если $(x,y) \in \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega' \times \Omega'$, то $\varepsilon(x) \equiv 1$, $\varepsilon(y) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки (x,y). Следовательно, формула (1.17) имеет место для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$. Отсюда следует, что $K(x,y)$ имеет все слабые производные $D_x^\alpha K(x,y)$, $(\alpha,\mu) \le l$. Для доказательства существования слабых производных $D_y^\alpha K(x,y)$, $(\alpha,\mu) \le l$ выполним все предыдущие шаги, взяв вместо оператора T оператор T^*. Так как $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$ является ядром оператора T^*, то из вышеполученных результатов следует существование слабых производных $D_x^\alpha \overline{K(y,x)}$, $(\alpha,\mu) \le l$ и имеет место оценка, аналогичная (1.16) :

$$|||D^\alpha T^*||| \le 2\gamma\, |\Omega|^{1/2} r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)}\, |T|_0. \tag{1.18}$$

Отметим, что $D_x^\alpha \overline{K(y,x)}$ является ядром оператора $D^\alpha T^*$. Это означает, что для $K(x,y)$ существуют все слабые производные $D_y^\alpha K(x,y)$, $(\alpha,\mu) \le l$. Комбинируя

(1.16) и (1.18) с $|||T||| = \|K(x,y)\|_{L_2(\Omega\times\Omega)}$, для $(\alpha,\mu) \le l$ получим

$$\|D_x^\alpha K\|_{0,\Omega\times\Omega} \le 2\gamma\,|\Omega|^{1/2}\, r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)}\,|T|_0,\ \|D_y^\alpha K\|_{0,\Omega\times\Omega} \le 2\gamma|\Omega|^{1/2}\, r^{|\mu|/2+(\alpha,\mu)}\,|T|_0.$$

А так как $\Omega\times\Omega$ — связное множество, удовлетворяющее свойству конуса, то $K \in H_{l,\mu}(\Omega\times\Omega)$ и

$$|K|_{i,\Omega\times\Omega} \le \gamma_1\, r^{|\mu|/2+i}\,|T|_0, \qquad i = 0,1,\dots,l. \tag{1.19}$$

Рассмотрим след $K(x,y)$ на многообразии $x = y$. Так как $K \in H_{l,\mu}(\Omega\times\Omega)$, то по теореме о следах в анизотропных пространствах H_μ (см. [2]) и из (1.19) получаем, что след $K(x,y)$ на диагонали $(\Omega\times\Omega)$ существует и выполняется неравенство

$$\left[\int_\Omega |K(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le \gamma_2\, r^{-l+|\mu|/2}\left(|K|_{l,\Omega\times\Omega} + r^l\,|K|_0\right) \le 2\gamma_3\, r^{|\mu|}|T|_0, \tag{1.20}$$

где r равно одному из чисел $|T|_k^{1/k}|T|_0^{-1/k}$ или $|T^*|_k^{1/k}|T|_0^{-1/k}$. Следовательно $r^{|\mu|} \le |T|_0^{-|\mu|/k}\left[|T|_k^{|\mu|/k} + |T^*|_k^{|\mu|/k}\right]$ и неравенство (1.13) выполняется. Теорема 1.5 доказана.

Следствие 1.2. Предположим, что для открытого множества $a\Omega$, $a > 0$ и оператора $T_{(a)}$ на $L_2(a\Omega)$ выполнены все условия Теоремы 1.5. Если $K_{(a)}$ – ядро соответствующее оператору $T_{(a)}$, то

$$\begin{aligned} &a^{|\mu|/2}\left[\int_{a\Omega}\left|K_{(a)}(x,x)\right|^2\,dx\right]^{1/2} \le \\ &\le \gamma\left[a^{|\mu|}\left(|T_{(a)}|_k^{|\mu|/k} + |T^*_{(a)}|_k^{|\mu|/k}\right)|T_{(a)}|_0^{1-|\mu|/k} + |T_{(a)}|_0\right]. \end{aligned}$$

Доказательство : Пусть $u(y)$ — функция, определенная на Ω и $u_1^0(x) = u(a^{-\mu}x)$, $x \in a\Omega$. Имеем $u_1^0(a^\mu x) = u(x)$, $x \in \Omega$. Если $u \in H_{l,\mu}(\Omega)$, то $u_1^0 \in H_{l,\mu}(\Omega)$ и

$$|u_1^0|_{l,a\Omega} = a^{|\mu|/2-l}\,|u|_{l,\Omega}. \tag{1.21}$$

Для $f \in L_2(\Omega)$ определим оператор T согласно соотношению $(Tf)_1^0 = T_{(a)}f_1^0$. Так как $R(T_{(a)}) \subset H_{k,\mu}(a\Omega)$, то получаем $Tf \in H_{k,\mu}(\Omega)$. Легко проверить, что $(T^*f)_1^0 = T^*_{(a)}f_1^0$. Из (1.21) имеем

$$\frac{|Tf|_{l,\Omega}}{|f|_{0,\Omega}} = \frac{a^{l-|\mu|/2}\,|(Tf)_1^0|_{l,a\Omega}}{a^{-|\mu|/2}|f_1^0|_{0,a\Omega}} = \frac{a^l|T_{(a)}f_1^0|_{l,a\Omega}}{|f_1^0|_{0,a\Omega}}.$$

Следовательно, $|T|_l = a^l\,|T_{(a)}|_l$, $|T^*|_l = a^l\,|T^*_{(a)}|_l$. Подставляя эти соотношения в (1.13), для ядра K оператора T получаем

$$\left[\int_\Omega |K_{(a)}(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le \gamma\left[a^{|\mu|}\left(|T_{(a)}|_k^{|\mu|/k} + |T^*_{(a)}|_k^{|\mu|/k}\right)|T_{(a)}|_0^{1-|\mu|/k} + |T_{(a)}|_0\right]. \tag{1.22}$$

Обозначая через $K_{(a)}(x,y)$ ядро оператора $T_{(a)}$, для $f \in L_2(\Omega)$ и $y = a^\mu\xi$ получаем

$$(Tf)_1^0(x) = (Tf)(a^{-|\mu|}x) == \int_{a\Omega} K(a^{-|\mu|}x, a^{-|\mu|}y)\,f_1^0(y)\,dy =$$
$$= (T_{(a)}\,f_1^0)(x) = \int_{a\Omega} K_{(a)}(x,y)\,f_1^0(y)\,dy.$$

Следовательно, $K_{(a)}(x,y) = a^{-|\mu|}\,K(a^{-|\mu|}x, a^{-|\mu|}y)$. Полагая $y = a^{-|\mu|}\,x$, имеем

$$\int_{a\Omega}|K_{(a)}(x,x)|^2\,dx = \int_{a\Omega} a^{-2|\mu|}\,|K(a^{-|\mu|}x, a^{-|\mu|}x)|^2\,dx = a^{-|\mu|}\int_{a\Omega}|K(y,y)|^2\,dy.$$

Сравнение с (1.22) завершает доказательство Следствия 1.2.

Теорема 1.6. При условиях Теоремы 1.5, пусть θ – направление минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T и $\{\lambda_j\}$ – последовательность характеристических чисел оператора T. Тогда для каждого λ, $\lambda \ne \lambda_j$ видоизмененная резольвента T_λ является интегральным оператором с ядром Гильберта-Шмидта $K_\lambda(x,y) \in H_{\lambda\mu}(\Omega\times\Omega)$. Кроме того, $K_\lambda(x,y)$ имеет след на диагонали $x = y$ и

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} = O(|\lambda|^{-1+|\mu|/k}) \tag{1.23}$$

при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta$. Для $\lambda \ne \lambda_j$ имеем

$$\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|\,dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda}. \tag{1.24}$$

Доказательство : Для $\lambda \in \rho_m(T)$ и $T_\lambda = T(1-\lambda T)^{-1}$ имеем $R(T_\lambda) \subset R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$. Так как T и $(1-\lambda T)^{-1}$ коммутативны, то $R(T^*_\lambda) \subset R(T^*) \subset H_{k\mu}(\Omega)$. Поэтому, согласно Теореме 1.5 оператор T_λ имеет ядро Гильберта-Шмидта $K_\lambda(x,y) \in H_{\lambda\mu}(\Omega\times\Omega)$ и

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le \gamma\left[\left(|T_\lambda|_k^{|\mu|/k} + |(T_\lambda)^*|_k^{|\mu|/k}\right)|T_\lambda|_0^{1-|\mu|/k} + |T_\lambda|_0\right]. \tag{1.25}$$

Для $\lambda \in E(\theta, a)$ имеем $|T_\lambda|_0 \le c\,|\lambda|^{-1}$, $\|T_\lambda\|_k \le \|T\|_k\,(1+c)$. Так как $(1-\lambda T)^{-1} = 1 + \lambda T_\lambda$ для $\lambda \in E(\theta, a)$, то очевидно получаем $\|(T_\lambda)^*\|_k \le \|T^*\|_k \|(1-\lambda T)^{-1*}\|_0 = \|T^*\|_k \|(1-\lambda T)^{-1}\|_0 \le \|T^*\|_k\,(1+c)$. Следовательно, из (1.25) получаем

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2 dx\right]^{1/2} \le \gamma\left[(1+c)^{|\mu|/k}\left(\|T\|_k^{|\mu|/k} + \right.\right. \tag{1.26}$$
$$\left.\left. + \|(T^*\|_k^{|\mu|/k}\right) c^{-1+|\mu|/k}\,|\lambda|^{-1+|\mu|/k} + c|\lambda|^{-1}\right] \le c\,|\lambda|^{-1+|\mu|/k}.$$

Остается доказать (1.24). Из Следствия 1.1 вытекает, что $\lambda_j \ge \mathrm{const}\, j^{k/|\mu|}$ для достаточно большого j. Так как $k > |\mu|$, то ряд $\sum_j |\lambda_j|^{-1}$ сходится. По теореме 12.21 из [1], для $\lambda \in \rho_m(T)$ имеем

$$\mathrm{tr}(\lambda T T_\lambda) = \sum_j \frac{\lambda}{(\lambda_j - \lambda)\,\lambda_j} = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda} - \sum_j \frac{1}{\lambda_j}. \tag{1.27}$$

Так как $(1-\lambda T)\,T_\lambda = (1-\lambda T)\,T\,(1-\lambda T)^{-1} = (1-\lambda T)\,(1-\lambda T)^{-1} T = T$, то $\lambda T T_\lambda = T_\lambda - T$. По Теореме 1.5 интеграл $\int_\Omega K(x,x)dx$ существует, и поэтому имеем

$$\mathrm{tr}(\lambda T T_\lambda) = \int_\Omega [K_\lambda(x,x) - K(x,x)]\,dx.$$

Из (1.27) следует, что

$$\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|\,dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda} + c,$$

где c - постоянная, не зависящая от λ. Покажем, что $c = 0$. Из оценки (1.23) следует, что $\int_\Omega K_\lambda(x,x)\,dx \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta$. Следовательно, нам надо показать, что $\sum_j \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\arg\lambda = \theta$. По теореме 12.6 из [1] имеем $|\arg\lambda_j - \theta| < \delta$ для $|\lambda_j| > a$ и некоторого $\delta > 0$. Теперь, если $z = r\,e^{i\theta}$, $w = s\,e^{i\varphi}$ и $\delta \le |\theta - \varphi| \le \pi/2$, то имеем $|z-w|^2 = r^2 - 2rs\cos(\theta-\varphi) + s^2 = r^2\sin^2(\theta-\varphi) + (r\cos(\theta-\varphi) - s^2) \ge |z|^2\sin^2\delta$. Если $\pi/2 \le |\theta-\varphi| \le \pi$, то $|z-w|^2 \ge r^2 + s^2 \ge |z|^2$. Следовательно, $|z-w| \ge |z|\sin\delta$ для $\delta \le |\theta-\varphi| \le \pi$. Применяя это неравенство для λ_j и λ получаем

$$|\lambda_j - \lambda| \ge \max(|\lambda_j|, |\lambda|)\,\sin\delta. \tag{1.28}$$

Следовательно, если $j \ge j_0$, $\lambda \in E(\theta, a)$ и все λ_j лежат вне этого угла, то для $|\lambda| \to \infty$ и $\lambda \in E(\theta, a)$ имеем

$$\left|\sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda}\right| \le \frac{\mathrm{const}}{|\lambda|} + \csc\delta \sum_{j \le j_0} \frac{1}{\max(|\lambda_j|, |\lambda|)} \to 0.$$

Отсюда получаем, что $c = 0$. Теорема 1.6 доказана.

§2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В этом параграфе изучается линейный дифференциальный оператор $P(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$, где $a_\alpha(x)$ — действительные функции, определенные на множестве Ω. Оператор $P_0(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)=k} a_\alpha(x) D^\alpha$ называется главной частью оператора $P(x, D)$. Оператор $P(x, D)$ называется полуэллиптическим, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждого $\xi \in R^n$ и $x \in \Omega$ $P_0(x, \xi) \geq C\left(\xi_1^{2m_1} + \ldots + \xi_n^{2m_n}\right)^k$.

Теорема 2.1. Пусть T — ограниченное линейное преобразование на $L_2(\Omega)$ такое, что области значений операторов T и T^* содержатся в $H_{k\mu}(\Omega)$, где $k > 2[|\mu|/2] + 1$, а θ — направление минимального роста видоизмененной резольвенты оператора T. Предположим, что существует открытое множество $\Omega_0 \subset \Omega$ и полуэллиптический оператор $P(x, D)$ в Ω_0 вида $P(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha$, где $a_\alpha \in C^0(\Omega_0)$ и удовлетвотяются следующие условия :

1°. Для $x \in \Omega_0$, всех вещественных ξ и всех комплексных λ таких, что $\arg\lambda = \theta$ имеем $P(x, i\xi) \neq \lambda$;

2°. Для любого $x^0 \in \Omega_0$ и $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \subset \Omega_0$ точки x^0 и константа c_ε такие, что для всех $f \in L_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} &\|P_0 T f - f\|_{0,U} \leq \varepsilon \|f\|_{0,\Omega} + c_\varepsilon \|Tf\|_{k-1,\Omega}, \\ &\|P_0^* T^* f - f\|_{0,U} \leq \varepsilon \|f\|_{0,\Omega} + c_\varepsilon \|T^* f\|_{k-1,\Omega}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где P_0^* – сопряженный оператор для P_0, а $P_0(D)$ — главная часть оператора $P(x, D)$. Тогда имеют место следующие утверждения :

a) Для любого $\lambda \in \rho_m(T)$, T_λ является интегральным оператором с ядром Гильберта–Шмидта $K_\lambda \in H_{l\mu}(\Omega \times \Omega)$, где $l = k - \left[\frac{|\mu|}{2}\right] - 1$.

b) Ядро K_λ имеет след $K_\lambda(x, x) \in L_2(\Omega)$ на диагонали $(\Omega \times \Omega)$ и для $\lambda \in E(\theta, a)$, $|\lambda| \to \infty$ и постоянной c, зависящей только от P, θ и Ω_0, имеем

$$\left[\int_\Omega |K_\lambda(x, x)|^2\, dx\right]^{1/2} = O(|\lambda|^{-1+|\mu|/k}), \int_\Omega K_\lambda(x, x)\, dx =$$
$$= c|\lambda|^{-1+|\mu|/k} + o(|\lambda|^{-1+|\mu|/k}).$$

c) Если $\rho_\theta(x) = (2\pi)^n \int_{E_n} (P(x, i\xi) - e^{i\theta})^{-1} d\xi$ и $\Omega_\delta \subset\subset \Omega_{\delta'} \subset\subset \Omega_0$, где $\Omega_\delta \subset \Omega_0$ состоит из точек, расстояния которых от $\partial\Omega_0$ больше δ, то $c = \lim\limits_{\delta\to 0} \int_{\Omega_{\delta'}} \rho_\theta(x)\, dx$.

Доказательство : Вначале покажем, что из условия 2 вытекает : для произвольного $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U' \subset \Omega_0$ точки x_0 и постоянная c'_ε такие, что для всех $f \in L_2(\Omega)$ и достаточно больших $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем

$$\begin{gathered} \|(P_0 - \lambda)\, T_\lambda f - f\|_{0,U'} \le \varepsilon \, \|f\|_{0,\Omega} + c'_\varepsilon \|T_\lambda f\|_{k-1,\Omega}, \\ \|(P_0^* - \lambda)\,(T_\lambda)^* f - f\|_{0,U'} \le \varepsilon \, \|f\|_{0,\Omega} + c'_\varepsilon \|(T_\lambda)^* f\|_{k-1,\Omega}. \end{gathered} \tag{2.1'}$$

В самом деле, имеем $(P_0-\lambda)\,T_\lambda f - f = P_0 T\,(1-\lambda T)^{-1} - (1-\lambda T)^{-1} f$. Для заданного ε, пусть U - окрестность точки x_0 такая, что условие (2.1) выполняется. Тогда применяя неравенство (2.1) к $(1-\lambda T)^{-1} f$, получаем $\|(P_0-\lambda)T_\lambda f - f\|_{0,U'} \le \varepsilon\,\|(1-\lambda T)^{-1}\|_0\,\|f\|_{0,\Omega} + c_\varepsilon\,\|T_\lambda f\|_{k-1,\Omega}$. Для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем

$$\|(1-\lambda T)^{-1}\|_{0,\Omega} \le 1 + |\lambda|\,\|T_\lambda\|_0 \le 1 + K,$$

где K - постоянная такая, что $\|T_\lambda\|_0 \le K\,|\lambda|^{-1}$. Обозначая $\varepsilon' = \varepsilon(1+K)^{-1}$ и выбирая U', удовлетворяющей условию (2.1) с $\varepsilon = \varepsilon'$, получаем первое неравенство в (2.1′). Второе неравенство в (2.1′) доказывается аналогично. Пусть Ω'_δ фиксировано и $\Omega' \subset\subset \Omega'_\delta$. Для $\varepsilon > 0$ существует группа конгруентных непересекающихся кубов Q'_j таких, что $\Omega' \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q'_j \subset \Omega'_\delta$ и оценки (2.1′) имеют место в Q_j, где Q_j - куб концентрический с Q'_j и имеющий стороны $b^{\mu_k} = 2a^{\mu_k}$, $k = \overline{1,n}$, где a^{μ_k} — стороны куба Q'_j. Пусть $\arg\lambda = \theta$. Существует фундаментальное решение $F^j_\lambda(x)$ для полуэллиптического оператора $P(x^j, D)$ с постоянными коэффициентами, где x^j - центр куба Q'_j. Для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ существует видоизмененная резольвента T_λ. Продолжим функцию $f \in L_2(Q'_j)$ вне Q'_j, полагая $f(x) \equiv 0$, $x \notin Q'_j$, и определим оператор S^j_λ на $L_2(Q'_j)$ по формуле $S^j_\lambda f = T_\lambda f - F^j_\lambda * f$. Из соотношений $R(T_\lambda) \subset R(T) \subset H_{k\mu}(\Omega)$ и $F^j_\lambda * f \in H_{k\mu}(E_n)$ следует, что $R(S^j_\lambda) \subset H_{k\mu}(Q'_j)$. Следовательно S^j_λ — ограниченное линейное преобразование из $L_2(Q'_j)$ в $H_{k\mu}(Q'_j)$. Так как $k > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$, то условия Теоремы 1.6 выполнены. Поэтому для оператора T_λ существует ядро Гильберта-Шмидта $K_\lambda(x,x) \in L_2(\Omega)$. Согласно Теореме 1.5, аналогичные аргументы применимы к ядру $G^j_\lambda(x,y)$ оператора S^j_λ. В этом случае оператор $(S^j_\lambda)^*$ определяется по формуле $(S^j_\lambda)^* = (T_\lambda)^* f - \int_{Q'_j} \overline{F^j_\lambda(y-x)}\, f(y)\, dy$ и фундаментальное решение оператора $P^*(x^j, D) - \overline{\lambda}$ является $(F^j_\lambda)^* = \overline{F^j_\lambda(-x)}$. Следовательно, $R((S^j_\lambda)^*) \subset H_{k\mu}(Q'_j)$. По Теореме 1.5, для ядер операторов S^j_λ и $(S^j_\lambda)^*$ имеем

$$G^j_\lambda(x,y) = K_\lambda(x,y) - F^j_\lambda(x-y), \quad (G^j_\lambda)^*(x,y) = K^*_\lambda(x,y) - (F^j_\lambda)^*(x-y), \tag{2.2}$$

где $(G^j_\lambda)^*$ и K^*_λ суть ядра операторов $(S^j_\lambda)^*$ и T^*_λ, соответственно. Для куба Q_{δ_0} со сторонами $(\delta_0^{\mu_1}, \dots, \delta_0^{\mu_n})$ пусть $\gamma = \gamma(Q_{\delta_0}, \mu)$ – постоянная, удовлетворяющая (1.2). По Следствию 1.2, для $b^{\mu_i} < \delta_0^{\mu_i}$, $i = \overline{1,n}$ имеем

$$\left(\frac{b}{\delta_0}\right)^{|\mu|/2} \left(\int_{Q'_j} |G^j_\lambda(x,x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \gamma \left[\left(\frac{b}{\delta_0}\right)^{|\mu|} \left(|S^j_\lambda|_k^{|\mu|/k} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + |(S^j_\lambda)^*|_k^{|\mu|/k}\right) \cdot |S^j_\lambda|_0^{1-|\mu|/k} + |S^j_\lambda|_0\right]. \tag{2.3}$$

Получим некоторые грубые оценки для полунорм оператора S^j_λ. По неравенству треугольника для $f \in L_2(Q'_j)$ имеем

$$|S^j_\lambda f|_i \le |T_\lambda f|_i + |F^j_\lambda * f|_i. \tag{2.4}$$

Так как $||T_\lambda|_0 \le K\,|\lambda|^{-1}$, то для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем $||T_\lambda||_k \le ||T||_k\,(1+K)$. Отсюда получаем $||S^j_\lambda f||_{k,Q_j} \le [||T||_k\,(1+K) + \text{const}]\,||f||_{0,Q_j}$. Следовательно, $||S^j_\lambda f||_k$ ограничена для всех λ. Из Леммы 1.3 получаем

$$|S^j_\lambda|_i \le \text{const}\,|S^j_\lambda|_0^{1-i/k} ||S^j_\lambda||_k^{i/k} \le \text{const}\,|S^j_\lambda|_0^{1-i/k}. \tag{2.5}$$

Для $f \in L_2(Q'_j)$ имеем

$$||F^j_\lambda * f||_{0,Q'_j} \le |\lambda|^{-1}\left[\omega||f||_{0,E_m} + \text{const}||F^j_\lambda * f||_{k,E_m}\right] \le \text{const}\,|\lambda|^{-1}\,||f||_{0,Q'_j}.$$

Таким образом, из (2.4), находим $|S^j_\lambda|_0 \le |T_\lambda|_0 + \text{const}\,|\lambda|^{-1} \le \text{const}|\lambda|^{-1}$. А из (2.5) следует, что $|S^j_\lambda|_i \le \text{const}\,|\lambda|^{i/k-1}$, $0 \le i \le k-1$. Следовательно, для достаточно большого $|\lambda|$ имеем

$$||S^j_\lambda||_{k-1} \le \text{const}\,|\lambda|^{-1/k}. \tag{2.6}$$

Теперь используя (2.1′), получим более точные оценки. По Лемме 1.3 для $f \in L_2(Q'_j)$ имеем

$$||(P(x^j, D) - \lambda)\,T_\lambda f - f||_{0,Q_j} = ||(P(x^j, D) - \lambda)\,S^j_\lambda f||_{0,Q_j} \le$$
$$\le \varepsilon||f||_{0,Q_j} + c'_\varepsilon\,||T_\lambda f||_{k-1,Q_j} \le \left[\varepsilon + c_\varepsilon\,|\lambda|^{-1/k}\right]||f||_{0,Q_j}.$$

Следовательно, для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ получаем

$$||(P(x^j, D) - \lambda)\,S^j_\lambda f||_0 \le 2\varepsilon\,||f||_{0,Q'_j}. \tag{2.7}$$

Применяя лемму 14.2 из [1] для случая полуэллиптических операторов, из (2.6) находим

$$|S^j_\lambda f|_{i,Q_j} \le |\lambda|^{i/k-1}\left[2\omega\varepsilon||f||_{0,Q'_j} + |\lambda|^{-1/k}\,||f||_{0,Q'_j}\right].$$

Следовательно, для достаточно большого $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем $|S_\lambda^j|_{i,Q_j} \le 3\omega\varepsilon|\lambda|^{i/k-1}$, $(|S_\lambda^j)^*|_{i,Q_j} \le 3\omega\varepsilon|\lambda|^{i/k-1}$. Подставляя в (2.3) и используя (2.2), для достаточно больших $|\lambda|$ находим

$$\int_{Q_j} |K_\lambda(x,x) - F_\lambda^j(0)|^2\,dx \le (12\gamma\omega)^2\,\varepsilon^2\left(\frac{b}{\delta_0}\right)^{\mu}|\lambda|^{2|\mu|/k-2}.$$

Просуммировав по всем кубам Q'_j и используя $b^{|\mu|} = |Q'_j|$, получаем

$$\sum_j \int_{Q'_j}\left|K_\lambda(x,x) - F_\lambda^j(0)\right|^2 dx \le (12\gamma\omega)^2\,\varepsilon^2\,\delta_0^{-|\mu|}\left|\bigcup_{j=1}^N Q'_j\right| |\lambda|^{2|\mu|/k-2} \le \tag{2.8}$$
$$\le c\varepsilon^2\,|\lambda|^{2|\mu|/k-2}.$$

Имеем

$$F_\lambda^j(0) = |\lambda|^{|\mu|/k-1}(2\pi)^{-n}\int_{E_n}\left(P(x^j, i\xi) - e^{i\theta}\right)^{-1} d\xi = |\lambda|^{|\mu|/k-1}\rho_\theta(x^j).$$

Поэтому из (2.8) выводим, что

$$\sum_j \int_{Q'_j}\left||\lambda|^{1-|\mu|/k}\,K_\lambda(x,x) - \rho_\theta(x^j)\right|^2 dx \le c\varepsilon^2. \tag{2.9}$$

Пусть $\widetilde{\rho}_\theta(x)$ — функция, определенная на Ω_0 такая, что $\widetilde{\rho}_\theta(x) \equiv \rho_\theta(x^j)$, $x \in Q'_j$, $\widetilde{\rho}_\theta(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_0 \setminus \bigcup_j Q'_j = \Omega_0 \setminus E$. Используя (2.9) и неравенство Коши-Шварца получим

$$\left|\int_E |\lambda|^{1-|\mu|/k} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_E \widetilde{\rho}_\theta(x)\,dx\right| \le \tag{2.10}$$
$$\left[\int_E \left||\lambda|^{1-|\mu|/k}\,K_\lambda(x,x) - \widetilde{\rho}_\theta(x)\right|^2 dx\right]^{1/2} \le c\,|\Omega_0|^{1/2}\,\varepsilon.$$

Применяя Теорему 1.6 получим, что $K_\lambda \in H_{k\mu}(\Omega\times\Omega)$ и для достаточно больших $|\lambda|$, $\arg\lambda = \theta$ имеем

$$|\lambda|^{1-|\mu|/k}\left[\int_\Omega |K_\lambda(x,x)|^2\,dx\right]^{1/2} \le c.$$

Следовательно, по неравенству Коши-Шварца имеем

$$|\lambda|^{1-|\mu|/k}\left[\int_{\Omega_0\setminus E} |K_\lambda(x,x)|\,dx\right] \le c\,|\Omega_0 \setminus E|^{1/2}.$$

Из (2.10), применяя неравенство треугольника, получаем

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \arg\lambda=\theta}} \sup\left||\lambda|^{1-|\mu|/k}\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_{\Omega'_\varepsilon}\rho_\theta(x)\,dx\right| \le$$
$$\le c\,|\Omega_0|^{1/2}\,\varepsilon + c\,|\Omega_0\setminus E|^{1/2} + \left|\int_E \rho_\theta(x)\,dx - \int_E \widetilde{\rho}_\theta(x)\,dx\right| + \int_{\Omega'_\varepsilon - \Omega'}|\rho_\theta(x)|\,dx.$$

Очевидно $\int_E \widetilde{\rho_\theta}(x)\,dx$ является суммой Римана интеграла $\int_E \rho_\theta(x)\,dx$, поэтому

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \arg\lambda=\theta}} \sup \left| |\lambda|^{1-|\mu|/k} \int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_{\Omega'_\delta} \rho_\theta(x)\,dx \right| \le$$
$$\le c\,|\Omega_0|^{1/2}\varepsilon + c\,|\Omega_0 - \Omega'|^{1/2} + \int_{\Omega'_\delta - \Omega'} |\rho_\theta(x)|\,dx.$$

Так как $\Omega' \subset\subset \Omega'_\delta$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то из последнего неравенства следует

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \arg\lambda=\theta}} \sup \left| |\lambda|^{1-|\mu|/k} \int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx - \int_{\Omega'_\delta} \rho_\theta(x)\,dx \right| \le c\,|\Omega_0 - \Omega'|^{1/2} \le c\,|\Omega_0 - \Omega_\delta|^{1/2}.$$

Так как $|\lambda|^{1-|\mu|/k}\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx$ не зависит от δ, а $\int_{\Omega'_\delta}\rho_\theta(x)\,dx$ не зависит от λ, то оба предела $\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \arg\lambda=\theta}} |\lambda|^{1-|\mu|/k}\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx$ и $\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega'_\delta}\rho_\theta(x)\,dx$ существуют и равны друг другу. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть $A(x,D) = \sum_{(\alpha,\mu)\le k} a_\alpha(x)\,D^\alpha$ – полуэллиптический оператор в Ω с ограниченными коэффициентами. 1) Если старшие коэффициенты оператора $A(x,D)$ непрерывны, а A симметричен на $C_0^\infty(\Omega)$ в том смысле, что $A(\varphi,\Psi)_{0,\Omega} = (\varphi, A\Psi)_{0,\Omega}$ для всех $\varphi,\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$; 2) если существует неограниченный самосопряженный оператор G на $L_2(\Omega)$, удовлетворяющий условию $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G) \subset H_{k\mu}(\Omega)$ и $Gu = Au$ для $u \in D(G)$; 3) для $k < 2[|\mu|/2]+1$ существует нечетное число $b > \dfrac{2\left[\frac{|\mu|}{2}\right]+1}{k}$ такое, что A принадлежит $(C^{(b-1)k}(\Omega))^*$ и $D(G^b) \subset H_{bk\mu}(\Omega)$, то спектр оператора G дискретен и собственные значения оператора G имеют конечную кратность. Для $\lambda > 0$ обозначим через $N_+(\lambda)$ сумму всех неотрицательных собственных значений λ_j оператора G, удовлетворяющих условию $\lambda_j < \lambda$, а через $N_-(\lambda)$ аналогичную сумму для отрицательных λ_j, $\lambda_j \ge -\lambda$. Имеем

$$N_\pm(\lambda) = c_\pm \lambda^{|\mu|/k} + o\left(\lambda^{|\mu|/k}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,$$

где $c_\pm = (2\pi)^{-n}\int_\Omega \omega_\pm(x)\,dx$ и $\omega_\pm(x) = |\{\xi :\ 0 < \pm A'(x,i\xi) < 1\}|$.

Доказательство : Имеем, что $(\lambda - G)^{-1}$ существует для всех невещественных λ и все невещественные $e^{i\theta}$ являются направлениями минимального роста резольвенты оператора G. Так как $D(G) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, то $(\lambda - G)^{-1}$ отображает $L_2(\Omega)$ в $H_{k\mu}(\Omega)$. Следовательно, по теореме Реллиха (см. [1]) оператор $(\lambda -$

$G)^{-1}$ компактен. Отсюда следует, что спектр оператора $(\lambda - G)^{-1}$ состоит только из собственных значений конечной кратности, а единственной возможной предельной точкой является точка 0, которая тоже входит в спектр оператора $(\lambda - G)^{-1}$. Следовательно, спектр самого оператора G дискретен и собственные значения имеют конечную кратность. Следовательно, первое утверждение Теоремы доказано. Для доказательства второго утверждения нам понадобится Теорема 2.1. Не умаляя общности, можно предположить, что точка 0 не принадлежит спектру оператора G. Следовательно, $T = G^{-1}$ является ограниченным линейным самосопряженным оператором на $L_2(\Omega)$. Так как $(\lambda - G)^{-1} = -T_\lambda$, то каждому невещественному $e^{i\theta}$ соответствует направление минимального роста оператора T_λ. Рассмотрим случай $k < 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$. По условию существует нечетное целое b такое, что $bk > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$. Положим $T^b = (G^b)^{-1}$. Легко видеть, что A^b существует и его коэффициенты непрерывны и ограничены в Ω. Главной частью оператора A^b является оператор $(A^b)'(x,\xi) = (A'(x,\xi))^b$. Следовательно, A^b – семиэллиптический оператор порядка bk. Так как $R(T^b) \subset H_{bk\mu}(\Omega)$ и $bk > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$, то T^b является самосопряженным оператором. Осталось проверить условия 1 и 2 Теоремы 2.1. Отметим, что в случае $k > 2\left[\frac{|\mu|}{2}\right] + 1$ мы берем $b = 1$. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ имеем

$$A^b T^b f = f. \tag{2.11}$$

Пусть теперь $\Omega_0 = \Omega$. Обозначим через P главную часть оператора A^b, т.е. $A^b = P + B$, где B – оператор порядка меньше чем bk с ограниченными коэффициентами. Из (2.11) получаем

$$\|PT^b f - f\|_{0,\Omega} \le \|BT^b f\|_{0,\Omega} \le C\,\|T^b f\|_{bk-1,\Omega}. \tag{2.12}$$

Для фиксированного $x^0 \in \Omega$ и произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через $U(x^0)$ окрестность точки x^0 такую, что $|a_\alpha(x) - a_\alpha(x^0)| < \varepsilon$ для всех $x \in U(x^0)$, где $a_\alpha(x)$ суть коэффициенты оператора P. Обозначая через P_0 оператор с коэффициентами $a_\alpha(x)$, из (2.12) находим

$$\begin{aligned} \|P_0 T^b f - f\|_{0,U} &\le \|(P_0 - P)T^b f\|_{0,U} + C\,\|T^b f\|_{bk-1,U} \le \\ &\le \gamma\,\varepsilon\,\|T^b\|_{bk}\,\|f\|_{0,\Omega} + C\|T^b f\|_{bk-1,\Omega}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где γ – постоянная, зависящая от k, μ и n. Из (2.13) получаем первое неравенство в (2.1). Второе неравенство в (2.1) выводится аналогично. Следовательно, проверили условие 2 Теоремы 2.1. Далее, если $e^{i\theta}$ вещественно, то оно является направлением минимального роста резольвенты самосопряженного оператора G. Следовательно, для всех $u \in D(G)$ и $\arg\lambda = \theta$ имеем $\|u\|_{0,\Omega} \le \frac{\text{const}}{|\lambda|}\|(G-\lambda)\,u\|_{0,\Omega}$. В частности, так как $D(G) \subset C_0^\infty(\Omega)$, то для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ находим

$$\|\varphi\|_{0,\Omega} \le \frac{\text{const}}{|\lambda|}\|(G-\lambda)\,\varphi\|_{0,\Omega}.$$

Отсюда следует, что $A'(x,i\xi) - e^{i\theta} \ne 0$. Следовательно, $(A'(x,i\xi))^k - e^{i\theta} \ne 0$ для $\xi \in \mathbb{R}$. Так как $A'(x,i\xi)$ вещественно для всех $\xi \in \mathbb{R}$, то условие 1 Теоремы 2.1 также выполнено. Таким образом, имеем

$$\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx = c\,|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1} + o\left(|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1}\right), \tag{2.14}$$

где $K_\lambda(x,x)$ — ядро оператора $(T^b)_\lambda$, а c — постоянная из Теоремы 2.1.

Так как характеристическими значениями оператора T^b являются $\{\lambda_j\}$, где $\{\lambda_j\}$ – собственные значения оператора G, то из Теоремы 1.6 и (2.14) для $\arg\lambda = \theta$ и невещественного $e^{i\theta}$ получаем

$$\int_{\Omega_0} K_\lambda(x,x)\,dx = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^b - \lambda} = c\,|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1} + o\left(|\lambda|^{|\mu|/(bk)-1}\right), \quad |\lambda| \to \infty. \tag{2.15}$$

Для $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = it$, $t > 0$ имеем

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j^b - it} = c\,|t|^{|\mu|/(bk)-1} + o\left(|t|^{|\mu|/(bk)-1}\right).$$

По Теореме 2.1, имеем $c = \int_\Omega \rho(x)\,dx$, где

$$\rho(x) = (2\pi)^{-n}\int_{E_n} \frac{d\xi}{[A'(x,i\xi)]^b - i}. \tag{2.16}$$

Пусть $q = |\mu|/k$; $0 < q < b$. Если c_1 и c_2, соответственно, вещественная и мнимая части c, то из (2.15) получаем

$$\sum_j \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b} + t^2} = c_1\,t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right), \quad \sum_j \frac{t}{\lambda_j^{2b} + t^2} = c_2\,t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right). \tag{2.17}$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j^{2b} + t} = \int_0^\infty \frac{dN\left(\lambda^{1/(2b)}\right)}{\lambda + t} = c_2\,t^{q/(2b)-1} + o\left(t^{q/(2b)-1}\right), \tag{2.18}$$

где $N(\lambda) = N_+(\lambda) + N_-(\lambda)$.

Используя теорему Харди–Литтлвуда (см. [1]) получим

$$N(\lambda^{1/2b}) = c_2\,\frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi q/(2b)}\,\lambda^{1/(2b)} + o(\lambda^{1/(2b)}). \tag{2.19}$$

Подставляя в (2.19) $\mu = \lambda^{1/(2b)}$ получим

$$N(\mu) = 2\,b\,c_2\,\frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi q}\,\mu^b + o(\mu^b). \tag{2.20}$$

Рассмотрим величины $N_+(\lambda)$ и $N_-(\lambda)$. Так как, по предположению, b нечетно, то знаки λ_j и λ_j^b совпадают. Следовательно

$$\begin{gathered}\sum_j \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b}+t^2} = \sum_{\lambda_j>0} \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b}+t^2} + \sum_{\lambda_j<0} \frac{\lambda_j^b}{\lambda_j^{2b}+t^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+t^2}\,dN_+ \\ +(\lambda^{1/(2b)}) - \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+t^2}\,dN_-(\lambda^{1/(2b)}) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+t^2}\,dN(\lambda^{1/(2b)}) - \\ -2\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+t^2}\,dN_-(\lambda^{1/(2b)}) = c_1\,t^{q/k-1} + o(t^{q/k-1}).\end{gathered} \tag{2.21}$$

Пусть $\overline{N}(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\tau}\,dN(\tau^{1/(2b)})$. Интегрируя по частям и используя (2.19) находим

$$\begin{aligned}\overline{N}(\lambda) &= \sqrt{\lambda}\,N(\lambda^{1/(2b)}) - \frac{1}{2}\int_0^\lambda \tau^{-1/2}\,N(\lambda^{1/(2b)})\,d\tau = \\ &= 2\,b\,c_2\,\frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi q}\left[\lambda^{q/(2b)+1/2} - \frac{1}{2}\int_0^\lambda \tau^{-1/2+q/(2b)}\,d\tau\right] + \\ &+ o\left(\lambda^{q/(2b)+1/2}\right) = c_2\,\frac{\sin(\pi q/(2b))}{\pi}\,\frac{\lambda^{q/(2b)+1/2}}{q/(2b)+1/2} + o\left(\lambda^{q/(2b)+1/2}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место результат, обратный теореме Харди–Литтлвуда :

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+t^2}\,dN(\lambda^{1/2b}) = \int_0^\infty \frac{d\overline{N}(\lambda)}{\lambda+t^2} = c_2\,\tan(\pi q/(2b))\,t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+t^2}\,dN_-(\lambda^{1/(2b)}) = [c_2\,\tan(\pi q/(2b)) - c_1]\,t^{q/b-1} + o\left(t^{q/b-1}\right).$$

Пусть теперь

$$\overline{N}_-(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{\tau}\,dN_-(\tau^{1/(2b)}). \tag{2.22}$$

Из предыдущей асимптотической формулы получаем

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda+t^2}\,d\overline{N}_-(\lambda) = \frac{1}{2}\,[c_2\,\tan(\pi q/(2b) - c_1]\,t^{q/(2b)-1/2} + o\left(t^{q/(2b)-1/2}\right).$$

Вновь используя теорему Харли–Литтлвуда получаем

$$\overline{N}_-(\lambda) = \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) - c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{\lambda^{q/(2b)+1/2}}{\pi\,(\pi q/(2b)+1/2)} + o\left(\lambda^{q/(2b)+1/2}\right).$$

Следовательно

$$N_-(\lambda^{b/2}) = \text{const} + \int_0^\lambda \tau^{-1/2}\, dN_-(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) - c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{b\,\lambda^{q/(2b)}}{\pi q} + o\left(\lambda^{q/(2b)}\right).$$

Подставляя λ вместо λ^{2b} находим

$$N_-(\lambda) = \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) - c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{b\,\lambda^q}{\pi q} + o(\lambda^q).$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$N_+(\lambda) = \frac{1}{2}\left[c_2 \sin(\pi q/(2b)) + c_1 \cos(\pi q/(2b))\right] \frac{b\,\lambda^q}{\pi q} + o(\lambda^q).$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы, нам надо вычислить постоянную $c = c_1 + i c_2$. Так как $A'(x, i\xi) \in \mathbb{R}$ для $\xi \in \mathbb{R}$, полагая $p(\xi) = (A'(x, i\xi))^k$ из (2.16) получаем

$$(2\pi)^n \rho(x) = \int_{E_n} \frac{d\xi}{p(\xi) - 1} = \int_{E_n} \frac{p(\xi)\, d\xi}{p^2(\xi) + 1} + i \int_{E_n} \frac{d\xi}{p^2(\xi)+1}.$$

Для $0 < t < \infty$ положим $V(t^\mu) = \left\{\xi : \left|p\left(\frac{\xi_1}{t^{\mu_1}}, \ldots, \frac{\xi_n}{t^{\mu_n}}\right)\right| < 1\right\}$. Обозначим через $v(t^\mu) = |V(t^\mu)|$ меру Лебега множества $V(t^\mu)$. Из μ–однородности A' следует, что $v(t^\mu) = t^{q/b}\, v(1)$. Следовательно

$$(2\pi)^n \operatorname{Im}\rho(x) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\, dv(t^\mu) = \frac{q}{b}\, v(1) \int_0^\infty \frac{t^{q/b-1}}{t^2+1}\, dt = \frac{q}{b}\, v(1)\, \frac{\pi}{\sin(\pi q/(2b))}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим следующие два случая :

1) k – четно. В этом случае $p(\xi)$ является нечетной функцией и поэтому $\operatorname{Re}(p(\xi)) = 0$. Мы также имеем $v(1) = |\{\xi : |p(\xi)| < 1\}| = 2\omega_+(x) = 2\omega_-(x)$. В силу (2.23) получаем

$$\rho(x) = i \operatorname{Im}\rho(x) = i\,(2\pi)^{-n}\, 2\,\omega_\pm(x)\, \frac{\pi q}{b \sin(\pi q/(2b))}.$$

Так как $c = \int_\Omega \rho(x)\, dx$, то

$$c_1 + i c_2 = i\,(2\pi)^{-n}\, \frac{\pi q}{b \sin(\pi q/(2b))} \int_\Omega \omega_\pm(x)\, dx = \frac{\pi q}{b \sin(\pi q/(2b))}\, i\, c_\pm.$$

Таким образом, $c_1 = 0$ и $\sin(\pi q/(2b))\, c_2 = \frac{\pi q}{b} c_\pm$. Следовательно, $N_\pm(\lambda) = c_\pm \lambda^q + o(\lambda^q)$. Для нечетного k Теорема доказана.

2) Пусть k четно. В этом случае $p(\xi)$ является четной функцией. Из полуэллиптичности оператора A следует, что $z = \operatorname{sign} p(\xi)$ не меняется. Поэтому

$$(2\pi)^n \operatorname{Re} \rho(x) = \int_{E_n} \frac{p(\xi)\, d\xi}{p^2(\xi)+1} =$$

$$= z \int_0^\infty \frac{t}{t^2+1}\, dv(t^\mu) = z\frac{q}{b} v(1) \int_0^\infty \frac{t^{q/b}}{t^2+1}\, dt = z\, \frac{q}{2b} v(1) \frac{\pi}{\cos(\pi q/(2b))}.$$

Имеем $v(1) = \omega_z(x)$, $\omega_{-z}(x) = |\{\xi:\ -1 < z\, A'(x, i\xi) < 0\}| = 0$. Следовательно

$$c_1 + i c_2 = z\, \frac{q}{2b} \frac{\pi}{\cos(\pi q/(2b))} c_z + i \frac{q}{2b} \frac{\pi}{\sin(\pi q/(2b))} c_z.$$

Отсюда следует, что $\cos(\pi q/(2b))\, c_1 = z \frac{\pi q}{2b} c_z$ и $\sin(\pi q/(2b))\, c_2 = \frac{\pi q}{2b} c_z$. Следовательно $N_-(\lambda) = \frac{1-z}{2} c_z \lambda^q + o(\lambda^q)$, $N_+(\lambda) = \frac{1+z}{2} c_z \lambda^q + o(\lambda^q)$. Наконец, имеем $N_-(\lambda) = c_- \lambda^q + o(\lambda^q)$ и $N_+(\lambda) = c_+ \lambda^q + o(\lambda^q)$. Теорема 2.2 доказана.

ABSTRACT. The paper investigates the asymptotic behavior of eigenvalues of selfadjoint semielliptic differential operators of the form $A(x, D) = \sum_{(\alpha,\mu)\le k} a_\alpha(x) D^\alpha$, defined on nonisotropic Sobolev space $H_{k\mu}(\Omega)$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Conditions under which the spectrum of A is discrete and its eigenvalues are of finite multiplicities are given together with the asymptotic relation $N(\lambda) = c\lambda^{|\mu|/k} + o\left(\lambda^{|\mu|/k}\right)$, $\lambda \to \infty$, where $N(\lambda)$ is the number of eigenvalues λ_j satisfying $|\lambda_j| < \lambda$, and c is a positive constant depending on A and Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Мир, 1975.
3. В. А. Солонников, О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p(R^n)$, Записки Научн. Семин. ЛОМИ АН СССР, том 6, стр. 194 — 210, 1972.
4. К. Иосида, Функциональный Анализ, Москва, Мир, 1967.

21 Октября 1998

Ереванский государственный университет

ОПИСАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ф. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

Пусть $\mathbf{W}_0$ – минимальный симметрический оператор в пространстве $L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ интегрируемых с квадратом n-мерных вектор-функций $x(r)$ $(0 < r < l < \infty)$, порожденных дифференциальным выражением $W^*(r)J\dfrac{d}{dr}(W(r)x(r))$. Здесь $\mathbf{C}^n$ – n-мерное унитарное пространство, J – линейный оператор в $\mathbf{C}^n$, удовлетворяющий условию $J^* = -J = J^{-1}$, а $W(r)$ – квадратично интегрируемая $n\times n$ матрица-функция, принимающая J-унитарные значения. Самосопряженное или аккумулятивное расширение $\mathbf{W}_K$ оператора $\mathbf{W}_0$ и его резольвентное ядро определяется по неразложимой матрице K и ее дробно-линейным преобразованием $\omega_K(\lambda)$. Аналитические в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ матрицы-функции $\omega_K(\lambda)$ порождают матричные меры $\sigma(\xi)$ на $\mathbb{R}^1$. В статье доказано, что множество всех спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$ совпадает с множеством матричных мер, порожденных матриц-функциями $\omega_K(\lambda)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть J — линейный оператор, определенный на $\mathbf{C}^n$ и удовлетворяющий условиям $J^* = -J = J^{-1}$. Этот оператор можно представить в виде :

$$J = iP_+ - iP_-, \quad \text{где} \quad P_\pm = 2^{-1}(I_n \mp iJ), \quad (P_\pm^2 = P_\pm = P_\pm^*,\ P_+ + P_- = I_n).$$

Рассмотрим квадратично интегрируемую матрицу-функцию (m-функцию) $W(r)$ на интервале $(0,l)$ $(l<\infty)$, принимающую J-унитарные значения :

$$W^*(r)\,J\,W(r) = J = W(r)\,J\,W^*(r), \quad \|W(r)\| \in L^2(0,l).$$

Через $AC(0,l;\mathbf{C}^n)$ обозначим класс локально абсолютно-непрерывных функций, определенных на $(0,l)$ со значениями в $\mathbf{C}^n$. Введем в пространстве $L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ дифференциальный оператор $\mathbf{W}$, действующий по формуле

$$(\mathbf{W}x)(r) = W^*(r)J\frac{d}{dr}(W(r)x(r)), \quad x \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n), \quad r\in(0,l) \tag{1}$$

на многообразии

$$D(\mathbf{W}) = \{x \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n) : W(r)x(r) \in AC(0,l;\mathbf{C}^n), \mathbf{W}x \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n)\}.$$

В случае, когда $W(r)$ – локально абсолютно-непрерывная m-функция, дифференциальное выражение (1) совпадает с

$$J\,\frac{dx(r)}{dr} + V(r)\,x(r), \qquad 0 < r < l, \tag{2}$$

где эрмитова m-функция $V(r)$, называемая потенциалом, определяется равенством

$$V(r) = W^*(r)\,J\,\frac{dW(r)}{dr}.$$

Эрмитовость m-функции $V(r)$ следует из равенства

$$\frac{dW^*(r)}{dr}\,J\,W(r) + W^*(r)\,J\,\frac{dW(r)}{dr} = \frac{d}{dr}(W^*(r)\,J\,W(r)) = 0.$$

Обратно, дифференциальное выражение (2) с эрмитовым потенциалом $V(r)$ сводится к выражению (1) с J-унитарной m-функцией $W(r)$, являющейся решением задачи Коши

$$\frac{dW(r)}{dr} = -W(r)\,J\,V(r), \qquad W(0) = I_n.$$

Самосопряженные и аккумулятивные расширения $\mathbf{W}_K$ оператора $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}^*$ и их резольвентные ядра определяются по нерастягивающейся матрице K и ее дробно-линейному преобразованию $\omega_K(\lambda)$. Аналитические в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ матрицы-функции $\omega_K(\lambda)$ порождают матричные меры $\sigma(\xi)$ на $\mathbb{R}^1$. Эта конструкция остается верной для аналитических в $\mathbf{C}_+$ нерастягивающихся матриц-функций $K(\lambda)$. С помощью матричного решения $U(r,\lambda)$ $(r \in (0,l), \lambda \in \mathbf{C})$ задачи Коши $W^*(r)\,J\dfrac{d}{dr}(W(r)U(r,\lambda)) = \lambda U(r,\lambda)$; $U(0,\lambda) = I_n$ определяется пространство Бранжа L "преобразований Фурье" $F(\lambda, f)$, где $f \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$. Матричная мера $\sigma(\xi)$ на $\mathbb{R}^1$ называется спектральной функцией оператора $\mathbf{W}_0$, если оператор сужения преобразования $F(\lambda, f)$ на $\mathbb{R}^1$ является изометрическим вложением пространства L в $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma)$. В статье доказывается, что множество всех спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$ совпадает с множеством матричных мер, порожденных матриц-функциями $\omega_K(\lambda)$. Аналогичная задача для уравнения струны была исследована И. С. Кацом и М. Г. Крейном в [1].

§1. РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА $\mathbf{W}_0$ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Оператор $\mathbf{W}$ удовлетворяет тождеству Лагранжа ($x, y \in D(\mathbf{W})$) :

$$(\mathbf{W}\,x)(r), y(r))_N - (x(r), (\mathbf{W}\,y)(r))_N = \frac{d}{dr}(J\,W(r)\,x(r), W(r)\,y(r))_N =$$
$$= \frac{d}{dr}(J\,x(r), y(r)).$$

Следовательно, для $x, y \in D(\mathbf{W})$ имеем

$$(\mathbf{W}\,x, y)_{L^2} - (x, \mathbf{W}\,y)_{L^2} = \lim_{r\to l}(J\,x(r), y(r)) - \lim_{r\to 0}(J\,x(r), y(r)). \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что имеет место "регулярный случай", т.е. для произвольного $x \in D(\mathbf{W})$ существует $\lim x(r)$ при $r \to l$ и $r \to 0$. Так как решениями уравнения $\mathbf{W}\,x = f$ ($f \in L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$) являются функции вида

$$x(r) = -J\,W^*(r)\,J\left(c - \int_0^r W(s)\,J\,f(s)\,ds\right), \qquad c \in \mathbf{C}^n,$$

можно утверждать, что наложенное условие равносильно условию существования $\lim W(r)$ при $r \to l$ и $r \to 0$.

Матрицант $U(r, \lambda)$ дифференциального выражения (1) определяется как матричное решение задачи Коши : $W^*(r)\,J\dfrac{d}{dr}(W(r)U(r,\lambda)) = \lambda U(r,\lambda)$; $\quad U(0,\lambda) = I_n$.

Матрицант $U(r, \lambda)$ является функцией экспоненциального вида относительно $\lambda \in \mathbf{C}$, т.е. $\|U(r,\lambda)\| = O(e^{c|\lambda|})$. Как функция от $r \in [0, l]$, матрицант $U(r,\lambda)$ удовлетворяет равенству : $\dfrac{d}{dr}(U^*(r,\mu)\,J\,U(r,\lambda) = (\lambda - \overline{\mu})\,U^*(r,\mu)\,U(r,\lambda)$ или эквивалентно

$$U^*(r,\mu)\,J\,U(r,\lambda) - J = (\lambda - \overline{\mu})\int_0^r U^*(r,\mu)\,U(r,\lambda)\,dr. \tag{4}$$

Тождество (4) называется "основным тождеством" для $U(r,\lambda)$, потому что каждая m-функция, удовлетворяющая (4), является матрицантом дифференциального выражения (1) с $W(r) = U^*(r,0)\,J$. Из (4) получаем

$$U^*(r,\overline{\lambda})\,J\,U(r,\lambda) = J = U(r,\lambda)\,J\,U^*(r,\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{5}$$

$$\frac{U^*(r,\lambda)\,J\,U(r,\lambda) - J}{\lambda - \overline{\lambda}} > 0; \quad \frac{U(r,\lambda)\,J\,U(r,\lambda) - J}{\lambda - \overline{\lambda}} > 0, \quad \Im\lambda = \frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i} \neq 0. \tag{6}$$

Рассмотрим "минимальный" оператор $\mathbf{W}_0$, являющийся сужением оператора $\mathbf{W}$ на многообразие $D(\mathbf{W}_0) = \{x \in D(\mathbf{W}) : \lim_{r\to 0} x(r) = \lim_{r\to l} x(r) = 0\}$.

Теорема 1. Оператор $\mathbf{W}_0$ симметричен и $\mathbf{W}_0^* = \mathbf{W}$.

Симметричность оператора $\mathbf{W}_0$следует из (3). Для доказательства равенства $\mathbf{W}_0^* = \mathbf{W}$ нам нужны следующие вспомогательные результаты.

Предложение 1. Для $f \in L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ выражение

$$F(\lambda, f) = \int_0^l U^*(r, \overline{\lambda})\, f(r)\, dr$$

является "направляющим функционалом" оператора $\mathbf{W}_0$.

Доказательство : Достаточно показать, что (см. [2]) уравнение

$$W^*(r)\, J\, \frac{d}{dr}(W(r)x(r)) - \lambda\, x(r) = f(r) \tag{7}$$

имеет решение, принадлежащее $D(\mathbf{W}_0)$, тогда и только тогда, когда $F(\lambda, f) = 0$. Это следует из представления решения $x(r)$ уравнения (7) в виде

$$x(r) = U(r, \lambda) \left(c - J \int_0^r U^*(s, \overline{\lambda})\, f(s)\, ds \right), \quad c \in \mathbf{C}^n. \tag{8}$$

Предложение 2. Имеет место следующее разложение

$$L^2(0, l; \mathbf{C}^n) = \overline{\operatorname{Im}(\mathbf{W}_0)} \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{W}).$$

Доказательство : Пусть $g \in L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ ортогонально к $\operatorname{Im}(\mathbf{W}_0)$. Из Предложения 1, для $f \in L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ имеем

$$\int_0^l U^*(r, 0)\, f(r)\, dr = 0 \Rightarrow \int_0^l (g(r), f(r))\, dr = 0.$$

Положим $g_1(r) = -J\, U^*(r, 0)\, J\, g(r)$, $f_1(r) = U^*(r, 0)\, f(r)$, $(g(r), f(r))_{\mathbf{C}^n} = (g_1(r), f_1(r))_{\mathbf{C}^n}$. Следовательно

$$\int_0^l f_1(r)\, dr = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^l (g_1(r), f_1(r))\, dr = 0.$$

Обозначая $f_1(r) = g_1(r) - l^{-1}$, *получаем* $\int_0^l g_1(r)\, dr$ и так как $\int_0^l f_1(r)\, dr = 0$, то находим

$$\int_0^l (f_1(r), f_1(r))\, dr = \int_0^l (g_1(r), f_1(r))\, dr - l^{-1} \left(\int_0^l f_1(r)\, dr, \int_0^l f_1(r)\, dr \right) = 0.$$

Это означает, что $f_1(r) = 0$ почти всюду, т.е. если $g \perp \operatorname{Im}(\mathbf{W}_0)$, то $g_1(r) = const$. Следовательно, $g(r) = U(r, 0)\, g_1(r) = U(r, 0)\, c \in \operatorname{Ker}(\mathbf{W})$. Поэтому соотношение $\mathbf{W}_0^* = \mathbf{W}$ следует из Предложения 2 (см. [3], стр. 197). Теорема 1 доказана.

2. Рассмотрим расширения оператора $\mathbf{W}_0$. Для этого представим (3) в виде

$$i^{-1}[(\mathbf{W}\,x, y) - (x, \mathbf{W}\,y)] = \left(\mathbf{J}\begin{bmatrix} x(l) \\ x(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(l) \\ y(0) \end{bmatrix}\right), \tag{9}$$

где

$$\mathbf{J} = -i\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_+ - P_- & 0 \\ 0 & P_- - P_+ \end{bmatrix}.$$

Следовательно (см. [4]) вопрос описания симметричных, диссипативных и аккумулятивных расширений оператора $\mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}$ сводится к описанию J-нейтральных и J-дефинитных подпространств в пространстве $\widehat{\mathbf{C}^n} = \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^n$ с индефинитной метрикой, порожденной оператором $\mathbf{J}$. Как известно (см. [5]), такие подпространства задаются с помощью нерастягивающихся "угловых" операторов $K_\pm : \widehat{\mathbf{C}^n_\pm} \to \widehat{\mathbf{C}^n_\mp}$, где $\widehat{\mathbf{C}^n_\pm} = \widehat{P}_\pm \widehat{\mathbf{C}^n}$; $\widehat{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm \mathbf{J})$. Сопоставляя вышеприведенные понятия приходим к следующему утверждению.

Предложение 3. Произвольное максимальное диссипативное или аккумулятивное расширение $\mathbf{W}_K$ оператора $\mathbf{W}_0$, ($\mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}_K \subset \mathbf{W}$) определяется граничными условиями

$$\begin{aligned} &(P_- x(l) + P_+ x(0)) + K_+(P_+ x(l) + P_- x(0)) = 0 \quad \textbf{или} \\ &(P_+ x(l) + P_- x(0)) + K_-(P_- x(l) + P_+ x(0)) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $K_\pm$ – нерастягивающий оператор, определенный на всем пространстве $\widehat{\mathbf{C}^n_+}$ ($\widehat{\mathbf{C}^n_-}$). Для унитарного K ($K^* K = I_n$) эти условия определяют самосопряженный оператор.

Замечание 1. В [5], [6] граничные условия задаются в виде

$$Mx(l) + Nx(0) = 0; \qquad \operatorname{rank}[M, N] = n; \qquad \frac{1}{i}(MJM^* - NJN^*)\begin{cases} \leq 0, \\ = 0, \\ \geq 0. \end{cases}$$

В любом случае наложенные условия означают, что вектор $[x(l), x(0)]$ принадлежит максимальному J-нейтральному или J-дефинитному подпространству J-пространства $\widehat{\mathbf{C}^n}$. Граничное условие (10) в терминах углового оператора K обладает свойством однозначности : $M = P_+ + KP_-$, $N = P_- + KP_+$.

Рассмотрим одно из вышеуказанных расширений $\mathbf{W}_K$ оператора $\mathbf{W}$. Из (8) следует, что $\lambda \in C$ является собственным значением оператора $\mathbf{W}_K$ ($\lambda_n \in \operatorname{Sp}(\mathbf{W}_K)$) в том и только в том случае, когда существует ненулевое решение $x_0 \in \mathbf{C}^n$ уравнения $[(P_+ U(l, \lambda_n) + P_-) + K(P_- U(l, \lambda_n) + P_+)]\, x_0 = 0$. Это условие соответствует аккумулятивному расширению. Для диссипативного случая необходимо проекторы $P_\pm$ поменять местами. Таким образом, для определения спектра $\mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)$ нужно найти решение уравнения

$$\det[(P_+U(l,\lambda_n)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda_n)+P_+)]=0$$

Так как $u(r,\lambda_n)=U(r,\lambda_n)\,x_0$ является собственной функцией оператора $\mathbf{W}_K$, отвечающей собственному значению λ_n, то кратность значения $\lambda_n\in\mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)$ равна $\kappa_n=\dim\mathrm{Ker}[(P_+U(l,\lambda_n)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda_n)+P_+)]$. При этом всегда можно выбрать базис $\{x_{np}\}_{p=1}^{\kappa_n}$ рассматриваемого подпространства так, что собственные функции $u_p(r,\lambda_n)=U(r,\lambda_n)\,x_{np}$, $(p=1,2,\dots\kappa_n)$ были бы ортонормированы. В самом деле, имеем

$$(u_p(r,\lambda_n),u_q(r,\lambda_n))_{L^2}=\int_0^l(U(r,\lambda_n)\,x_{np},U(r,\lambda_n)\,x_{nq})\,dr=(\mathbf{U}_n\,x_{np},x_{nq})_{\mathbf{C}^n},$$

где $\mathbf{U}_n=\int\limits_0^l U^*(r,\lambda_n)\,U(r,\lambda_n)\,dr$. Поскольку этот оператор, действующий в пространстве $\mathbf{C}^n$ положителен, то выбран ортогональный базис $\{\mathbf{U}_n^{1/2}x_{np}\}_{p=1}^{\kappa_n}$ в подпространстве $\mathbf{U}_n^{1/2}\,\mathrm{Ker}[(P_+U(l,\lambda_n)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda_n)+P_+)]$ прилем к требуемому утверждению.

Исследуем теперь резольвенту $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{W}_K)$ оператора $\mathbf{W}_K$. Определим значение $c\in\mathbf{C}^n$ в (8) так, чтобы выполнялось (10). Имеем

$$[(P_+U(l,\lambda)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda)+P_+]\,c=(P_++K\,P_-)\,U(l,\lambda)\,J\int_0^l U^*(s,\bar\lambda)\,f(s)\,ds.$$

Так как для $\lambda\notin\mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)$ оператор слева обратим, то получим

$$c=[(P_+U(l,\lambda)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda)+P_+]^{-1}\,(P_++K\,P_-)\,U(l,\lambda)\,J\int_0^l U^*(s,\bar\lambda)\,f(s)\,ds.$$

Таким образом, решение $x(r,\lambda)\in D(\mathbf{W})$ уравнения (7) можно представить в виде

$$x(r,\lambda)=U(r,\lambda)\,\{\Phi(l,\lambda)(P_++K\,P_-)\,U(l,\lambda)\,J-J\}\int_0^r U^*(s,\bar\lambda)\,f(s)\,ds+$$
$$+U(r,\lambda)\,\{\Phi(l,\lambda)(P_++K\,P_-)\,U(l,\lambda)J\}\int_r^l U^*(s,\bar\lambda)\,f(s)\,ds,$$

где $\Phi(l,\lambda)=[(P_+U(l,\lambda)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda)+P_+)]^{-1}$.

Положим

$$\omega(\lambda)=\omega_K(\lambda)=[(P_+U(l,\lambda)+P_-)+K(P_-U(l,\lambda)+P_+)]^{-1}$$
$$[(P_+U(l,\lambda)-P_-)\,J+K(P_-U(l,\lambda)-P_+)\,J]. \qquad (11)$$

Легко проверить, что выражения в квадратных скобках можно представить в виде $2^{-1}(\omega(\lambda)-J)$ и $2^{-1}(\omega(\lambda)+J)$ соответственно. Следовательно

$$x(r,\lambda)=(\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{W}_K)\,f)(r)=\int_0^l R_K(r,s,\lambda)\,f(s)\,ds, \tag{12}$$

где ядро $R_K(r,s,\lambda)$ резольвенты $\mathbf{R}_\lambda(\mathbf{W}_K)$ определяется соотношениями

$$R_K(r,s,\lambda)=\frac{1}{2}\begin{cases} U(r,\lambda)\,(\omega(\lambda)-J)\,U^*(s,\bar\lambda) & \text{для} \quad s<r, \\ U(r,\lambda)(\omega(\lambda)+J)\,U^*(s,\bar\lambda) & \text{для} \quad s>r. \end{cases} \tag{13}$$

m-функция $\omega(\lambda)=\omega_K(\lambda)$ определена для любого нерастягивающего оператора K $(K^*K\le I_n)$ и является мероморфной m-функцией, полюсы которой совпадают с $\mathrm{Sp}\,(\mathbf{W}_K)$.

Замечание 2. Для диссипативных операторов все результаты остаются в силе с $\omega(\lambda)$ вида

$$\begin{aligned}\omega(\lambda)&=[(P_-U(l,\lambda)+P_+)+K\,(P_+-U(l,\lambda)+P_-)]^{-1}\\ &[(P_-U(l,\lambda)-P_+)\,J+K\,(P_+U(l,\lambda)-P_-)\,J].\end{aligned} \tag{14}$$

Через $\omega_a(\lambda)$ и $\omega_d(\lambda)$ обозначая m-функции, определенные по (11) и (14), получим $(\omega_d(\bar\lambda))^*=\omega_a(\lambda)$. В случае унитарного K имеем $\omega^*(\lambda)=\omega(\lambda)$.

3. Рассмотрим дробно-линейное преобразование (11). Матрицу этого преобразования представим в виде

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda)\\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda)\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} P_+U(l,\lambda)+P_- & (P_+U(l,\lambda)-P_-)J\\ P_-U(l,\lambda)+P_+ & (P_-U(l,\lambda)-P_+)\,J\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Полагая $V(\mu,\lambda)=2^{-1}(U^*(l,\mu)\,J\,U(l,\lambda)-J)$ и $V_*(\mu,\lambda)=(U(l,\lambda)\,J\,U^*(l,\mu)-J)$ находим

$$A^*(\mu)\begin{bmatrix} i\,I_n & 0\\ 0 & -i\,I_n\end{bmatrix}A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} V(\mu,\lambda) & V(\mu,\lambda)\,J\\ -J\,V(\mu,\lambda) & -J\,V(\mu,\lambda)\,J\end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$A(\lambda)\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}A^*(\mu)=\begin{bmatrix} i\,I_n & 0\\ 0 & -i\,I_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} P_+V_*(\mu,\lambda)P_+ & P_+V_*(\mu,\lambda)\,P_-\\ P_-V_*(\mu,\lambda)\,P_+ & P_-V_*(\mu,\lambda)P_-\end{bmatrix}. \tag{17}$$

В частности

$$\begin{aligned} &A(\lambda)\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}A^*(\bar\lambda)=\\ &=\begin{bmatrix} i\,I_n & 0\\ 0 & -i\,I_n\end{bmatrix}, \qquad A^*(\bar\lambda)\begin{bmatrix} i\,I_n & 0\\ 0 & -i\,I_n\end{bmatrix}A(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{18}$$

Из (16) и (6) получаем

$$A_{11}^*(\lambda)\,A_{11}(\lambda)-A_{21}^*(\lambda)\,A_{21}(\lambda)=i\,V(\lambda,\lambda)\begin{cases} >0 & \text{для} \quad \lambda\in C_+,\\ =0 & \text{для} \quad \lambda\in R,\\ <0 & \text{для} \quad \lambda\in C_-;\end{cases}$$

$$A_{12}^*(\lambda)\,A_{12}(\lambda)\,A_{22}^*(\lambda)\,A_{22}(\lambda)=i\,J\,V(\lambda,\lambda)\,J\begin{cases} >0 & \text{для} \quad \lambda\in C_+,\\ =0 & \text{для} \quad \lambda\in R,\\ <0 & \text{для} \quad \lambda\in C_-.\end{cases}$$

Следовательно, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 4. Для $\lambda \in C_+$ ($\lambda \in C_-$) операторы $A_{21}(\lambda)A_{11}^{-1}(\lambda)$ и $A_{22}(\lambda)A_{12}^{-1}(\lambda)$ существуют и являются строго сжимающими.

Следовательно, дробно-линейное преобразование (11) существует при произвольном нерастягивающем операторе K и оператор $(A_{11}(\lambda)+K\,A_{21}(\lambda))^{-1}$ равномерно ограничен относительно K $(K^*K \leq I_n)$.

Теорема 2. Пусть m-функция $U(\lambda)$ удовлетворяет соотношениям (5) и (6), а m-функция $A(\lambda)$ определена по формуле (15). Тогда для произвольного фиксированного $\lambda \in C_+$ дробно-линейное преобразование (11) : $\omega(\lambda) = \Delta(K) = (A_{11}(\lambda) + K\,A_{21}(\lambda))^{-1}(A_{12}(\lambda) + K\,A_{22}(\lambda))$ отображает взаимно-однозначно единичный матричный круг $\Theta = \{K : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n / K^*K \leq I_n\}$ или окружность $\Theta_0 = \{K : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n / K^*K = I_n\}$) на свой образ $\Omega(\lambda)$ (или $\Omega_0(\lambda)$). Множество $\Omega(\lambda)$ (или $\Omega_0(\lambda)$) является матричным кругом (окружностью), лежащем в верхней матричной полуплоскости $\Im\,\omega(\lambda) \geq 0$ и определяется соотношениями

$$2\Im\,\omega(\lambda) = -i(\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) \geq (\omega^*(\lambda) + J)\{-iV(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J)(\Im\,\lambda > 0),$$

$$(2\Im\,\omega(\lambda) = -i(\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) = (\omega^*(\lambda) + J)\{-iV(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J)(\Im\,\lambda > 0)), \tag{19}$$

$$2\Im\,\omega(\lambda) = -i(\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) \geq (\omega(\lambda) + J)\,\{iV(\bar\lambda,\bar\lambda)\}(\omega^*(\lambda) - J)\,(\Im\,\lambda > 0),$$

$$(2\Im\,\omega(\lambda) = -i\,(\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) = (\omega(\lambda) + J)\,\{i\,V(\bar\lambda,\bar\lambda)\}(\omega^*(\lambda) - J)\,(\Im\lambda > 0)). \tag{20}$$

Доказательство : Из (18) следует, что

$$A^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} i\,A_{12}^*(\bar\lambda) & -i\,A_{22}^*(\bar\lambda) \\ -iA_{11}^*(\bar\lambda) & iA_{21}^*(\bar\lambda) \end{bmatrix}.$$

Так как $\omega(\lambda) = \Delta(K)$, то оператор K однозначно восстанавливается в виде обратного преобразования :

$$K = -(A_{12}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\,A_{11}^*(\bar\lambda))^{-1}(A_{22}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\,A_{21}^*(\bar\lambda)). \tag{21}$$

Для доказательства (19) используем (16) и следующее соотношение, вытекающее из (11) :

$$A(\lambda)\begin{bmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \\ I_n \end{bmatrix}(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)).$$

Имеем

$$[-\omega^*(\lambda) \quad I_n]\,A^*(\lambda)\begin{bmatrix} i\,I_n & 0 \\ 0 & -i\,I_n \end{bmatrix} \quad A(\lambda)\begin{bmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix} =$$

$$= [-\omega^*(\lambda) \quad I_n]\left\{\begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(\mu,\lambda) & V(\mu,\lambda)\,J \\ -J\,V(\mu,\lambda) & -J\,V(\mu,\lambda)\,J \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix} =$$

$$= (\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) + (\omega^*(\lambda) + J)\,V(\lambda,\lambda)(\omega(\lambda) - J) =$$

$$= i\{-2\Im\,\omega(\lambda) + (\omega^*(\lambda) + J)\{-i\,V(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J)\}.$$

С другой стороны

$$
\begin{aligned}
&-i\left\{[-\omega^*(\lambda) \quad I_n]\, A^*(\lambda) \begin{bmatrix} i\,I_n & 0 \\ 0 & -i\,I_n \end{bmatrix} A(\lambda) \begin{bmatrix} -\omega(\lambda) \\ I_n \end{bmatrix}\right\} = \\
&= (A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda))^*[-K^* \quad I_n] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K \\ I_n \end{bmatrix} (A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)) = \\
&= (A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda))^*\,(K^*K - I_n)(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)) \le 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Это приводит к (19), причем для $K \in \Theta_0$ имеет место знак равенства в (22). Обратно, пусть $\omega(\lambda)$ удовлетворяет (19). Тогда из (22) для любого $x \in \mathbf{C}^n$ имеем

$$
\left(J \begin{bmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)\,x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)\,x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)\,x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\,\omega(\lambda)\,x \end{bmatrix}\right) \le 0.
$$

Обозначим через $-K$ нерастягивающий угловой оператор J-неположительного подпространства

$$
\left\{\begin{bmatrix} A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\,\omega(\lambda)\,x \\ A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\,\omega(\lambda)\,x \end{bmatrix} \Big/ \; x \in \mathbf{C}^n\right\}
$$

пространства $\widehat{\mathbf{C}^n}$. Это означает, что $-K\,(A_{22}(\lambda) - A_{21}(\lambda)\omega(\lambda)) = A_{12}(\lambda) - A_{11}(\lambda)\omega(\lambda)$, т.е. $\omega(\lambda)$ определяется преобразованием (11). Отметим, что если в (19) имеет место знак равенства, то рассматриваемое подпространство J-нейтральное. Следовательно, его угловой оператор унитарен, и поэтому $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$. Для доказательства (20) заметим, что

$$
[I_n \quad \omega(\lambda)]\, A^{-1}(\lambda) = i\,(A_{12}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)\,A_{11}^*(\bar\lambda))\,[I_n \quad K]. \tag{23}
$$

Теперь из (17) получим

$$
\begin{aligned}
&\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda) = [I_n \quad \omega(\lambda)] \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} = \\
&[I_n \quad \omega(\lambda)]\, A^{-1}(\lambda) \begin{bmatrix} i\,I_n & 0 \\ 0 & -i\,I_n \end{bmatrix} A^{*-1}(\lambda) \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} + \\
&+ [I_n \quad \omega(\lambda)]\, A^{-1}(\lambda) \begin{bmatrix} P_+ V_*(\lambda,\lambda)\, P_+ & P_+ V_*(\lambda,\lambda)\, P_- \\ P_- V_*(\lambda,\lambda)\, P_+ & P_- V_*(\lambda,\lambda)\, P_- \end{bmatrix} A^{*-1}(\lambda) \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

В силу (23) имеем

$$
\begin{aligned}
&[I_n\,\omega(\lambda)]\, A^{-1}(\lambda) \begin{bmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{bmatrix} A^{*-1}(\lambda) \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} = \\
&= i(A_{12}^*(\bar\lambda) - \omega(\lambda)A_{11}^*(\bar\lambda))\,(I_n - K^*K)\,(A_{12}(\bar\lambda) - A_{11}(\bar\lambda)\omega^*(\lambda)) \ge 0.
\end{aligned}
$$

Учитывая (15), второе слагаемое (24) запишем в виде

$$[I_n \quad \omega(\lambda)]\, A^{-1}(\lambda) \begin{bmatrix} P_+ \\ P_- \end{bmatrix} V_*(\lambda,\lambda)\, [P_+ \quad P_-]\, A^{*-1}(\lambda) \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} =$$
$$= [I_n \quad \omega(\lambda)] \begin{bmatrix} A_{12}^*(\bar\lambda)\, P_+ - A_{22}^*(\bar\lambda) P_- \\ -A_{11}^*(\bar\lambda)\, P_- + A_{21}^*(\bar\lambda)\, P_- \end{bmatrix} \times$$
$$\times V_*(\lambda,\lambda) \begin{bmatrix} A_{12}^*(\bar\lambda)\, P_+ - A_{22}^*(\bar\lambda)\, P_- \\ -A_{11}^*(\bar\lambda)\, P_- + A_{21}^*(\bar\lambda)\, P_- \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} =$$
$$= 2^{-1}\, [I_n \quad \omega(\lambda)] \begin{bmatrix} J \\ I_n \end{bmatrix} U^*(l,\bar\lambda)\, J\, V_*(\lambda,\lambda)\, J\, U(l,\bar\lambda)\, [-J \quad I_n] \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} =$$
$$= 2^{-1}(\omega(\lambda) + J)\, U^*(l,\bar\lambda)\, J\, V_*(\lambda,\lambda) J\, U(l,\bar\lambda)\, (\omega^*(\lambda) - J) =$$
$$= -(\omega(\lambda) + J)\, V(\bar\lambda,\bar\lambda)(\omega^*(\lambda) - J).$$

Отсюда следует (20) при $I_n - K^*K = 0$, т.е. для $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$ имеет место равенство. Обратно, пусть $\omega(\lambda)$ удовлетворяет (20). Тогда из вышесказанного получаем

$$-i\,[I_n \quad \omega(\lambda)]\, A^{-1}(\lambda) \begin{bmatrix} i\, I_n & 0 \\ 0 & -i\, I_n \end{bmatrix} A^{*-1}(\lambda) \begin{bmatrix} I_n \\ \omega^*(\lambda) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Следовательно, подпространство

$$\left\{ \begin{bmatrix} (A_{12}(\bar\lambda) - A_{11}(\bar\lambda)\omega^*(\lambda))\, x \\ -(A_{22}(\bar\lambda) - A_{21}(\bar\lambda)\omega^*(\lambda))\, x \end{bmatrix} / x \in N \right\}$$

является J-отрицательным. Стало быть, существует нерастягивающий угловой оператор K^* этого подпространства, определяемый следующим образом :

$$K^* = -(A_{22}(\bar\lambda) - A_{21}(\bar\lambda)\omega^*(\lambda))\, (A_{12}(\bar\lambda) - A_{11}(\bar\lambda)\,\omega^*(\lambda))^{-1}.$$

Последнее утверждение эквивалентно $K = \Theta^{-1}(\omega)$, и поэтому $\omega(\lambda) \in \Omega(\lambda)$. Ясно, что в случае равенства в (21), угловой оператор K^* унитарен и $\omega(\lambda) \in \Omega_0(\lambda)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Пусть $U(l_1,\lambda)$ и $U(l_2,\lambda)$ – значения матрицанта уравнения (1) для $l_1 < l_2$ ($\Im\lambda > 0$). Легко проверить, что $-i\, V_1(\lambda,\lambda) =$

$$= \Im\lambda \int_0^{l_1} (U^*(r,\lambda)\, U(r,\lambda))\, dr \leq \Im\lambda \int_0^{l_2} (U^*(r,\lambda]\, U(r,\lambda))\, dr = -i\, V_2(\lambda,\lambda).$$

Тогда из (19) и (20) следует вложение $\Omega_2(\lambda) \subset \Omega_1(\lambda)$

Замечание 4. В диссипативном случае, когда $\omega(\lambda)$ определяется по (14), аналогично имеем $2\Im\omega(\lambda) \leq (\omega^*(\lambda) + J)\{i\, V(\lambda,\lambda)\}(\omega(\lambda) - J)$ и

$$2\Im\omega(\lambda) \leq (\omega(\lambda) + J)\{-i\, V(\bar\lambda,\bar\lambda)\}(\omega^*(\lambda) - J).$$

Теперь укажем на параметрическое представление для $\Omega(\lambda)$ и $\Omega_0(\lambda)$. Отметим, что (19) можно представить в виде

$$[\omega^*(\lambda) + J - V^{-1}(\lambda,\lambda)]\{-iV(\lambda,\lambda)\}[\omega(\lambda) - J + V^{-1}(\lambda,\lambda)] \le -i[2J - V^{-1}(\lambda,\lambda)].$$

Легко проверить, что $V(\mu,\lambda) = V(\mu,\nu) + V(\bar\nu,\lambda) - 2V(\mu,\nu)JV(\bar\nu,\lambda)$. Полагая $\mu = \nu = \bar\lambda$ получим

$$V(\bar\lambda,\bar\lambda) + V(\lambda,\lambda) = 2V(\bar\lambda,\bar\lambda)JV(\lambda,\lambda).$$

Следовательно, $V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda) + V^{-1}(\lambda,\lambda) = 2J$. Полагая $C = J - V^{-1}(\lambda,\lambda)$, находим

$$(\omega(\lambda) - C)^*(-iV(\lambda,\lambda)(\omega(\lambda) - C) \le (iV(\bar\lambda,\bar\lambda))^{-1}.$$

Таким образом, приходим к следующему представлению для круга $\Omega(\lambda)$ (или окружности $\Omega_0(\lambda)$) :

$$\omega(\lambda) = C + (iV(\bar\lambda,\bar\lambda)^{-1/2}Z(-iV(\lambda,\lambda)^{-1/2}, \quad Z \in \Theta \quad (\text{или} \quad Z \in \Theta_0).$$

Аналогично, используя равенство $J - V^{-1}(\lambda,\lambda) = V^{-1}(\bar\lambda,\bar\lambda) - J$, из (20) получаем

$$\omega(\lambda) = C + (-iV(\lambda,\lambda)^{-1/2}Z(iV(\bar\lambda,\bar\lambda)^{-1/2}, \quad Z \in \Theta(Z \in \Theta_0).$$

§ 2. ОПИСАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА W_0

1. Для $f \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ определим следующее преобразование

$$F(\lambda,f) = \int_0^l U^*(r,\bar\lambda)f(r)\,dr.$$

Множество преобразований $F(\lambda,f)$ образует гильбертово пространство L целых вектор-функций, если определить скалярное произведение равенством

$$(F(\lambda,f),F(\lambda,g))_L \stackrel{def}{=} (f,g)_{L^2}.$$

Отметим, что L является пространством Бранжа, т.е. L является гильбертовым пространством целых вектор-функций с порождающим ядром

$$\Phi(\lambda,\mu) = \int_0^l U^*(r,\bar\lambda)U(r,\bar\mu)\,dr = \frac{U^*(l,\bar\lambda)JU(l,\bar\mu) - J}{\bar\mu - \lambda} = \frac{2V(\bar\lambda,\bar\mu)}{\bar\mu - \lambda}, \tag{25}$$

т.е. для любого $F \in L$ и для любого $x \in \mathbf{C}^n$ имеем

$$(F(\lambda),\Phi(\lambda,\mu)x)_L = (F(\mu),x)_{\mathbf{C}^n}. \tag{26}$$

В самом деле, имеем

$$(F(\lambda), \Phi(\lambda,\mu)\,x)_L = \int_0^l (f(r), U(r,\bar\mu)\,x) = (\int_0^l U^*(r,\bar\mu)\,f(r)\,dr, x)_{\mathbf{C}^n} = (F(\mu), x)_{\mathbf{C}^n}.$$

Из (26) следует, что линейный оператор из L в $\mathbf{C}^n$, ставящий в соответствие $F(\lambda) \in L$ его значение $F(\mu)$ в точке μ, является непрерывным. Следовательно, многообразие $M_\mu = \{F \in L/F(\mu) = 0\}$ является подпространством и $M_\mu^\perp = N_\mu = \{\Phi(\lambda,\mu)\,x/x \in \mathbf{C}^n\}$. Поэтому $L = M_\mu \oplus N_\mu$, и ортопроектор P_{M_μ} на подпространство M_μ имеет вид

$$P_{M_\mu} F(\lambda) = F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)\,c, \qquad \text{где} \quad c = \Phi^{-1}(\mu,\mu)\,F(\mu)(\in \mathbf{C}^n).$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. Для $F(\lambda) \in L$ и $\mu \in C_+$ функция $(\lambda-\mu)^{-1}F(\lambda)$ принадлежит L в том и только в том случае, когда $F \in M_\mu$. Поэтому в подпространстве M_μ определен оператор умножения на $(\lambda-\bar\mu)(\lambda-\mu)^{-1}$, отображающий M_μ на $M_{\bar\mu}$.

Доказательство : Ясно, что если $(\lambda-\mu)^{-1}F(\lambda) \in L$, то $F(\mu) = 0$. Пусть $F(\lambda) = F(\lambda, f) \in L$ и $F(\mu) = 0$. Так как $F(\lambda, f)$ является направляющим функционалом для оператора W_0 (см. §1, Предложение 1), то уравнение $\mathbf{W}_0 g - \mu g = f$ имеет решение $g \in D(\mathbf{W}_0)$. Следовательно, $F(\lambda, f) = (\lambda-\mu)F(\lambda, g)$ и поэтому $(\lambda-\mu)^{-1}\,F(\lambda) \in L$. Для доказательства второго утверждения достаточно убедиться, что для любого $F(\lambda) \in M_\mu$ функция $(\lambda-\bar\mu)(\lambda-\mu)^{-1}\,F(\lambda) = F(\lambda) + (\mu-\bar\mu)(\lambda-\mu)^{-1}\,F(\lambda)$ принадлежит M, а следовательно и $M_{\bar\mu}$.

Определение 1. Неубывающая m-функция $\sigma(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ называется спектральной функцией оператора $\mathbf{W}_0$, если сужение функции $F(\lambda) \in L$ на вещественную ось является изометрическим вложением L в $L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$. При этом, если рассматриваемое вложение отображает L на все $L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$, то $\sigma(\xi)$ называется ортогональной.

Множество спектральных (ортогональных спектральных) функций оператора $\mathbf{W}_0$ обозначим через Σ (Σ_0). Зафиксируем некоторую спектральную функцию $\sigma(\xi)$ и $\mu \in C_+$, и в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$ рассмотрим оператор умножения на $(\xi-\bar\mu)(\xi-\mu)^{-1}$. Этот оператор является унитарным и отображает M_μ на M_μ. Функция $(\xi-\bar\mu)(\xi-\mu)^{-1}\,\Phi(\xi,\mu)\,x \in L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$ ортогональна подпространству

M_μ. Следовательно, для каждого $x \in \mathbf{C}^n$ найдется $y \in \mathbf{C}^n$ такое, что в разложении $L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma) = L \oplus (L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma) \ominus L)$ имеем

$$(\xi - \bar{\mu})(\xi - \mu)^{-1}\,\Phi(\xi, \mu)\,x = \Phi(\xi, \bar{\mu})\,y - \Phi_0(\xi), \qquad \Phi_0(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma) \ominus L). \quad (27)$$

Рассмотрим оператор $\mathbf{C}_\mu(\sigma)$ определенный равенством $\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x = y$. В силу (27) имеем

$$\|\Phi(\xi, \bar{\mu})\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x\| \le \|\Phi(\xi, \mu)\,x\|, \quad (28)$$

где $\|\cdot\|$ – норма пространства $L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$. В неравенстве (28) имеет место равенство для всех $x \in \mathbf{C}^n$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\lambda)$ является ортогональной спектральной функцией. Так как функции $\Phi(\lambda, \mu)\,x$ и $\Phi(\lambda, \bar{\mu})\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x$ принадлежат пространству L, то неравенство (28) можно понимать в смысле метрики пространства L. Следовательно

$$\int_0^l (U(r, \mu)\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x, U(r, \mu)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x)\,dr \le \int_0^l (U(r, \bar{\mu})\,x, U(r, \bar{\mu})\,x)\,dr.$$

Отсюда и из (25) получаем $\mathbf{C}_\mu^*(\sigma)\,\Phi(\bar{\mu}, \bar{\mu})\,\mathbf{C}_\mu(\sigma) \le \Phi(\mu, \mu)$, где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi)$ является ортогональной спектральной функцией.

Обозначим через $\Sigma(\mu)$ $(\Sigma(\nu))$ круг (окружность) тех $\mathbf{C}_\mu(\sigma)$, которые удовлетворяют последнему неравенству (равенству). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 6. Если σ пробегает множество спектральных (ортогональных спектральных) функций оператора $\mathbf{W}_0$, то операторы $\mathbf{C}_\mu(\sigma)$ $\quad(\mu \in C_+)$ принадлежат кругу $\Sigma(\mu)$ (окружности $\Sigma(\nu)$).

Замечание 5. Параметрическое представление рассматриваемого круга $\Sigma(\mu)$ (окружности $\Sigma(\mu)$) задается формулой

$$\Sigma(\mu) = \{\mathbf{C}_\mu(\sigma) = \Phi^{-1/2}(\bar{\mu}, \bar{\mu})\,Z\,\Phi^{1/2}(\mu, \mu)\,/\,Z \in \Theta\,Z \in \Theta_0\}.$$

Теперь построим дробно-линейное преобразование, отображающее единичный круг Θ (окружность Θ_0) на круг $\Sigma(\mu)$ (окружность $\Sigma(\mu)$). Отметим, что для ортогональных спектральных функций $\sigma(\lambda)$ в смысле метрики пространства $L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$, для любого $x \in \mathbf{C}^n$ имеем равенство $(\xi - \bar{\mu})(\xi - \mu)^{-1}\,\Phi(\xi, \mu)\,x = \Phi(\xi, \bar{\mu})\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x$.

Принимая во внимание (25) получаем

$$(U^*(l,\xi)\,J\,U(l,\bar\mu)-J)\,x=(U^*(l,\xi)\,J\,U(l,\mu)-J)\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x. \tag{29}$$

Применив оператор $-U(l,\xi)\,J$ к обеим частям равенства (29), получим $(U(l,\bar\mu)-U(l,\xi))\,x=(U(l,\mu)-U(l,\xi))\,\mathbf{C}_\mu(\sigma)\,x$. Следовательно, $\mathbf{C}_\mu(\sigma)=(U(l,\mu)-U(l,\xi))^{-1}(U(l,\bar\mu)-U(l,\xi))$. Последнее соотношение можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_\mu(\sigma)=&[(P_+U(l,\mu)+P_-)+S(P_-U(l,\mu)+P_+)]^{-1}[(P_+U(l,\bar\mu)+P_-)+\\&+S(P_-U(l,\bar\mu)+P_+)],\end{aligned} \tag{30}$$

где оператор S определен по формуле $S=(P_+-U(l,\xi)\,P_-)^{-1}\,(P_-+U(l,\xi)\,P_+)$, и следовательно, унитарен в силу J-унитарности оператора $U(l,\xi)$. Существование преобразования (30) следует из условия (см. [7]) $-i(U^*(l,\mu)\,J\,U(l,\mu)-J)>0$, в силу которого существует и является сжимающим оператор $(P_-U(l,\mu)+P_+)(P_+U(l,\mu)+P_-)^{-1}$. Легко проверить, что матрица преобразования (30) удовлетворяет тождеству

$$\begin{bmatrix}U^*(l,\mu)P_++P_- & U^*(l,\mu)P_-+P_+\\ U^*(l,\bar\mu)P_++P_- & U^*(l,\bar\mu)P_-+P_+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_n\end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}P_+U(l,\mu)+P_- & P_+U(l,\bar\mu)+P_-\\ P_-U(l,\mu)+P_+ & P_-U(l,\bar\mu)+P_+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi(\bar\mu,\bar\mu) & 0\\ 0 & -\Phi(\mu,\mu)\end{bmatrix}.$$

Следовательно (см. [7]), J_0-унитарная ($J_0=P_+-P_-$) матрица

$$\begin{bmatrix}(P_+U(l,\mu)+P_-)\,\Phi^{-1/2}(\bar\mu,\bar\mu) & (P_+U(l,\bar\mu)+P_-)\,\Phi^{-1/2}(\mu,\mu)\\ (P_-U(l,\mu)+P_+)\Phi^{-1/2}(\bar\mu,\bar\mu) & (P_-U(l,\bar\mu)+P_+)\,\Phi^{-1/2}(\mu,\mu)\end{bmatrix}$$

определяет интерсферическое дробно-линейное преобразование. Следовательно, (30) отображает круг Θ (окружность Θ_0) на круг $\Sigma(\mu)$ (окружность $\Sigma(\mu)$).

2. Рассмотрим множество $\mathbf{B}(C_+)$ ($\mathbf{B}_0(C_+)$) m-функций $K(\lambda)$, аналитических в верхней полуплоскости C_+ и принимающих значения из Θ (Θ_0). Обозначим через $\Omega(C_+)$ ($\Omega_0(C_+)$)образ этого множества при дробно-линейном преобразовании (11). Для любых $\lambda\in C_+$ и $\omega(\lambda)\in\Omega(\lambda)$, соответствующая m-функция принадлежит множеству $\Omega(C_+)$ тогда и только тогда, когда m-функция $K(\lambda)$ определенная по (21) будет аналитической, т.е. когда $K(\lambda)\in\mathbf{B}(C_+)$.

Напомним (см. [3]), что $\omega(\lambda)\in\Omega(C_+)$ называются R-функциями и допускают представление

$$\omega(\lambda)=A+\lambda B=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi-\lambda}-\frac{\xi}{1+\xi^2}\right)d\sigma_1(\xi),$$

где A – эрмитова, а B – положительная матрицы, причем $\sigma_1(\xi)$ является неубывающей m-функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\xi)}{1+\xi^2} < \infty.$$

Матричная мера $\sigma(\lambda) = 2^{-1}\sigma_1(\lambda)$ называется спектральной функцией R-функции $\omega(\lambda)$. Множество спектральных функций $\sigma(\xi)$ R-функций $\omega(\lambda) \in \Omega(C_+)$ обозначим через T (T_0). Нашей целью является доказательство утверждения, что множества T (T_0) и Σ (Σ_0) совпадают.

Лемма 1. Пусть $\omega(\lambda) \in \Omega(C_+)$, а $\sigma(\xi)$ – ее спектральная функция. Пусть оператор R_λ определяется соотношениями (12) и (13). Тогда для любого фиксированного $f \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ функция $(R_\lambda f, f)$ является R_0-функцией (см. [8]) и выполняется равенство

$$(R_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi,f), d\sigma(\xi)F(\xi,f))}{\xi-\lambda}. \tag{31}$$

Доказательство : Для вектор-функции $u(r,\lambda) = (R_\lambda f)(r)$, которая является решением уравнения (7), имеем $(R_\lambda f, f) = (u,f) = (u,\mathbf{W}u) - \bar{\lambda}(u,u)$. Следовательно $\Im(R_\lambda f, f) = \Im\lambda(u,u) + i2^{-1}((\mathbf{W}u,u) - (u,\mathbf{W}u))$. Так как $u(r,\lambda)$ удовлетворяет граничному условию (10) с нерастягивающим оператором $K(\lambda)$, то $\bar{\lambda}(u,u)$ – неотрицательно. Поэтому $\Im(R_\lambda f, f) \geq \Im(u,u) = \Im(R_\lambda f, R_\lambda f)$. Следовательно, для $\lambda = i\eta$ $(\eta > 0)$ имеем

$$\eta\|R_{i\eta} f\|^2 \leq \Im(R_{i\eta} f, f) \leq \|R_{i\eta} f\|\,\|f\| \Rightarrow \eta\|R_{i\eta} f\| \leq \|f\|.$$

Таким образом, получаем $\eta\|R_{i\eta} f\|\|f\| \leq \|f\|^2$. Отсюда следует (см. [8], стр. 640), что $(R_\lambda f, f)$ является R_0-функцией и выполняются соотношения

$$\lim_{\eta \nearrow 0} \eta\Im(R_{i\eta} f, f) \leq (f,f), \tag{32}$$

$$(R_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_f(\xi)}{\xi-\lambda}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_f(\xi) = \lim_{\eta \nearrow 0} \eta\Im(R_{i\eta} f, f) \leq (f,f).$$

Отсюда в силу формулы обращения Стильтеса, для любых точек непрерывности a и b функции $\tau_f(\xi)$ имеем

$$\tau_f(b) - \tau_f(a) = \pi^{-1} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \Im(R_{\xi+i\epsilon} f, f)\, d\xi. \tag{33}$$

С другой стороны, из представления (13) получаем

$$(R_\lambda f, f) = 2^{-1}(\omega(\lambda)\, F(\lambda, f), F(\bar\lambda, f)) + (G_\lambda f, f), \tag{34}$$

где G_λ - оператор в $L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$, действующий по формуле

$$(G_\lambda f)(r) = \int_0^l G(r, s, \lambda)\, f(s)\, ds,$$

где

$$G(r, s, \lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} -U(r, \lambda)\, J\, U^*(s, \bar\lambda) & \text{при} \quad s < r, \\ U(r, \lambda)\, J\, U^*(s, \bar\lambda) & \text{при} \quad s > r. \end{cases}$$

Легко проверить, что $G_\lambda^* = G_{\bar\lambda}$, т.е. $\overline{(G_\lambda f, f)} = (G_{\bar\lambda} f, f)$.

Используя обобщенную формулу Стильтьеса (см. [8], стр. 633) из (34) получаем

$$\pi^{-1} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \Im(R_{\xi+i\epsilon} f, f)\, d\xi = \int_a^b (F(\xi, f), d\sigma(\xi) F(\xi, f)), \tag{35}$$

где a и b - произвольные точки непрерывности функции $\sigma(\xi)$.

Сопоставляя равенства (33) и (35) и учитывая , что общие точки непрерывности функций $\tau_f(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ плотны на вещественной оси, получаем равенство

$$\tau_f(b) - \tau_f(a) = \int_a^b (F(\xi, f), d\sigma(\xi) F(\xi, f)), \qquad a, b \in (-\infty, \infty),$$

которое равносильно (31). Лемма 1 доказана.

Отметим, что для $\lambda \in C_+$, $f \in L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$, и $\omega(\lambda) \in \Omega(C_+)$ (или $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$) множество $(R_\lambda f, f)$ является кругом (или окружностью) в верхней полуплоскости.

Теорема 3. Множество спектральных функций R-функций $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$ и множество ортогональных спектральных функций оператора $\mathbf{W}_\pm$ совпадают.

Доказательство : Пусть $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$. Как было показано ранее, $\omega(\lambda) = \omega^*(\bar\lambda)$ является мероморфной m-функцией с простыми полюсами в точках $\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)$. Следовательно, $\omega(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-1} P_k + R_k$, где R_k суть члены, регулярные в окрестности точки $\lambda = \lambda_k$. Матрица P_k является эрмитовой так как $P_k = \lim(\lambda - \lambda_k)\omega(\lambda)$ при $\lambda \to \lambda_k$ по вещественной оси. Следовательно, спектральная функция $\sigma(\xi)$ R-функции $\omega(\lambda)$ является ступенчатой и имеет вид

$$\sigma(\xi) = \sum_{\xi < \lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} P_k. \tag{36}$$

Равенство (31) принимает вид

$$(R_\lambda f, f) = \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} \frac{(F(\lambda_k, f),\, P_k\, F(\lambda_k, f))}{\lambda - \lambda_k} =$$

$$\sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} \int_0^l \frac{(f(r), U(r, \lambda_k)\, P_k\, F(\lambda_k, f))}{\lambda - \lambda_k}\, dr.$$

Так как R_λ является резольвентой самосопряженного оператора $\mathbf{W}_K$ со спектральной оператор-функцией E_ξ, то получим

$$(R_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_\xi f, f)}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} \frac{(f(r), U(r, \lambda_k)\, P_k\, F(\lambda_k, f))_{L^2}}{\lambda - \lambda_k}.$$

Это означает, что

$$(E_\xi f)(r) = \sum_{\substack{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K) \\ \lambda_k < \xi}} U(r, \lambda_k)\, P_k \int_0^l U^*(s, \lambda_k)\, f(s)\, ds, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Следовательно, $(f, f) =$

$$= \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} (f, U(r, \lambda_k)\, P_k \int_0^l U^*(s, \lambda_k)\, f(s)\, ds) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi, f), d\sigma(\xi)\, F(\xi, f)),$$

которое доказывает, что $\sigma(\lambda)$ является спектральной функцией оператора $\mathbf{W}_0$. Теперь покажем, что $\sigma(\lambda)$ является ортогональной спектральной функцией. Заметим, во-первых, что если $u_p(r, \lambda_k) = U(r, \lambda_k)\, x_{kp}$ $(p = 1, 2, \cdots, \kappa_k)$ – ортонормированный базис подпространства $\ker(\mathbf{W}_K - \lambda_k I_n)$, то для любого $f \in L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ имеем

$$(F(\lambda_k, f), P_k\, F(\lambda_k, f)) = ((E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k-0})f, f) = \sum_{p=1}^{\kappa_k} \left| \int_0^l (u_p(r, \lambda_k), f(r))\, dr \right|^2 =$$

$$= \sum_{p=1}^{\kappa_k} (F(\lambda_k, f), x_{kp})(x_{kp}, F(\lambda_k, f)) = (F(\lambda_k, f), \sum_{p=1}^{\kappa_k} x_{kp} x_{kp}^*\, F(\lambda_k, f)).$$

Отсюда следует, что $P_k = \sum_{p=1}^{\kappa_k} x_{kp} x_{kp}^*$. Из равенства (36) для любого фиксированного $F(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^1; d\sigma)$ имеем

$$\|F(\lambda)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi), d\sigma(\xi)\, F(\xi)) = \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} (F(\lambda_k), P_k F(\lambda_k)).$$

Положим

$$f(r) = \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} \sum_{p=1}^{\kappa_k} (F(\lambda_k), x_{kp})\, U(r, \lambda_k)\, x_{kp}.$$

Поскольку система $u_p(r,\lambda_k) = U(r,\lambda_k)x_{kp}$ $(p = 1,2,\cdots,\kappa_k)$, $\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)$ является ортонормированным базисом в $L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ и

$$\sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} \sum_{p=1}^{\kappa_k} \|(F(\lambda_k),x_{kp})U(r,\lambda_k)x_{kp}\|^2 = \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} \sum_{p=1}^{\kappa_k} |(F(\lambda_k),x_{kp})|^2 =$$
$$= \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} (F(\lambda_k),P_kF(\lambda_k)) = \|F(\xi)\|^2 < \infty,$$

то имеем $f(r) \in L^2(0,l;N)$. Поэтому $F(\xi) = F(\xi,f)$ в смысле пространства $L^2(\mathbb{R}^1;d\sigma)$. Это доказывает, что $\sigma(\xi)$ является ортогональной спектральной функцией. Обратно, пусть $\sigma(\xi)$ – ортогональная спектральная функция оператора $\mathbf{W}_0$. Покажем, что $\sigma(\xi)$ является спектральной функцией для некоторой R-функции $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$. Рассмотрим равенство (29). Заметим, что оператор $I_n - C_\mu(\sigma)$ обратим, так как если $C_\mu(\sigma)x_0 = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, то получаем $U(l,\bar\mu)x_0 = U(l,\mu)x_0$, что противоречит (6). Следовательно,

$$U(l,\xi) = [U(l,\mu)C_\mu(\sigma) - U(l,\bar\mu)][C_\mu(\sigma) - I_n]^{-1} = \mathrm{const}$$

почти всюду относительно меры $d\sigma(\xi)$. Следовательно, m-функция $\sigma(\xi)$ является ступенчатой функцией. Пусть $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1,2,\cdots)$ – точки роста функции $\sigma(\xi)$ со скачками $P_k = \sigma(\lambda_k + 0) - \sigma(\lambda_k - 0)$. Имеем

$$(f,f) = \sum_{\lambda_k \in \mathrm{Sp}(\mathbf{W}_K)} (F(\lambda_k,f), P_kF(\lambda_k,f)). \tag{37}$$

Определим оператор K по формуле

$$K(P_-U(l,\lambda_k) + P_+)P_kx = -(P_+U(l,\lambda_k) + P_-)P_kx, \qquad x \in \mathbf{C}^n.$$

Оператор K корректно определен, так как $U(l,\lambda_k)$ не зависит от λ_k. В силу J-унитарности $U(l,\lambda_k)$ оператор K будет унитарным или изометрическим в зависимости от того, совпадает или нет многообразие $M = \{y = P_kx/x \in \mathbf{C}^n, n = 1,2,\cdots\}$ со всем пространством $\mathbf{C}^n$.

Предположим, что $N \neq M$ и рассмотрим некоторое унитарное расширение $\widetilde{K}$ оператора K. Это расширение определяет некоторый самосопряженный оператор $\mathbf{W}_{\widetilde{K}}$. Очевидно, что спектральная функция $\widetilde{\sigma}(\lambda)$ оператора $\widetilde{K}$ удовлетворяет условию $\widetilde{\sigma}(\lambda_k + 0) - \widetilde{\sigma}(\lambda_k - 0) \geq P_k$. Тогда в силу (37), m-функции $\sigma(\lambda)$ и $\widetilde{\sigma}(\lambda)$ совпадают. Следовательно, оператор K унитарен, а $\sigma(\lambda)$ является спектральной функцией R-функции $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$. Теорема 3 доказана.

3. Для фиксированного $F \in L$ и $\mu \in C_+$ рассмотрим множество $K(F,\mu) =$

$$= \left\{ I_{F,\mu}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi), d\sigma(\xi)F(\xi))}{\xi - \mu} \; : \; \sigma(\xi) \text{ - спектральная функция для } \mathbf{W}_0 \right\}.$$

Лемма 2. Множество $K(F,\mu)$ есть диск. Точка $I_{F,\mu}(\sigma)$ принадлежит границе этого круга тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi)$ является ортогональной спектральной функцией.

Доказательство : Во-первых заметим, что множество $K(F,\mu)$ выпукло. Имеем

$$\begin{aligned} I_{F,\mu}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi) - \Phi(\xi,\mu)\,c_0, d\sigma(\xi)\,F(\xi))}{\xi - \mu} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Phi(\xi,\mu)\,c_0, d\sigma(\xi)\,F(\xi))}{\xi - \mu}, \end{aligned} \tag{38}$$

где $c_0 = \Phi^{-1}(\mu,\mu)F(\mu) \in \mathbf{C}^n$.

Так как функция $F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)c_0$ обращается в нуль при $\lambda = \mu$, то имеем $(\lambda-\mu)^{-1}(F(\lambda) - \Phi(\lambda,\mu)c_0) \in \mathrm{L}$. Следовательно, первый интеграл в (38) является скалярным произведением в пространстве L и поэтому не зависит от выбора спектральной функции $\sigma(\xi)$. Второй интеграл представим в виде

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Phi(\xi,\mu)c_0, d\sigma(\xi)F(\xi))}{\xi - \mu} = \\ &= (\mu - \bar{\mu})^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi - \bar{\mu}}{\xi - \mu} (\Phi(\xi,\mu)c_0, d\sigma(\xi)\,F(\xi)) - \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(\xi,\mu)c_0, d\sigma(\xi)F(\xi)) \right). \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь второй интеграл в скобках также не зависит от выбора $\sigma(\xi)$. Для первого интеграла имеем $(\mu-\bar{\mu})^{-1}(\Phi(\lambda,\bar{\mu})\,C_\mu(\sigma)\,c_0, F(\lambda))_L = (\mu-\bar{\mu})^{-1}(C_\mu(\sigma)c_0, F(\mu))_{\mathbf{C}^n}$. Следовательно, точка $I_{F,\mu}(\sigma)$ вместе с $(C_\mu(\sigma)c_0, F(\mu))_N$ описывают круг. В случае когда $\sigma(\xi)$ пробегает множество ортогональных спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$ эта точка описывает окружность. Лемма 2 доказана.

Теорема 4. Множество спектральных функций R-функции $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$ совпадает с множеством спектральных функций оператора $\mathbf{W}_0$.

Доказательство : Пусть $\sigma(\xi)$ является спектральной функцией R-функции $\omega(\lambda) \in \Omega_0(C_+)$. Покажем, что для любого $f \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ имеет место равенство

$$(f,f) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\xi,f), d\sigma(\xi)F(\xi,f)). \tag{40}$$

Для этого достаточно убедиться, что в неравенстве (32) имеет место равенство. Для фиксированных $f \in L^2(0,l;\mathbf{C}^n)$ и $\lambda \in C_+$ рассмотрим $(R_\lambda f, f)$, когда

$\omega(\lambda)$ пробегает множество $\Omega(C_+)$. Из (34) следует, что в этом случае $(R_\lambda f, f)$ заполняет круг $K(f,\lambda)$ в верхней полуплоскости. Когда $\omega(\lambda)$ пробегает $\Omega_0(C_+)$, то $(R_\lambda f, f)$ заполняет окружность этого круга. Покажем, что точки этой окружности непрерывно зависят от параметра $K \in \Theta_0$. В самом деле, при $K^*K = I_n$ имеем

$$\omega_K(\lambda) = (A_{11}(\lambda) + KA_{21}(\lambda))^{-1}(A_{12}(\lambda) + KA_{22}(\lambda)) =$$
$$= (A_{12}^*(\bar\lambda) + A_{22}^*(\bar\lambda)K^*)(A_{11}^*(\bar\lambda) + A_{21}^*(\lambda)K^*)^{-1}.$$

Следовательно, при $K_1, K_2 \in \Theta_0$ получим

$$\omega_1(\lambda) - \omega_2(\lambda) = (A_{11}(\lambda) + KA_{21}(\lambda))^{-1}(I_n - K^*K)(A_{11}^*(\lambda) + A_{21}^*(\lambda)K^*)^{-1}.$$

Остается заметить, что множители при $(I_n - K^*K)$ равномерно ограничены для $K \in \Theta_0$. В неравенстве (32) имеет место равенство и $\eta\Im(R_{i\eta}f, f)$ монотонно возрастая стремится к (f, f) при $\eta \nearrow 0$. Из теоремы Дини следует, что эта сходимость равномерная относительно $K \in \Theta_0$. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ найдется $\eta(\epsilon)$ такое, что при $\eta > \eta(\epsilon)$ неравенство $\eta\Im(R_{i\eta}f, f) > (f, f) - \epsilon$ имеет место одновременно для всех $K \in \Theta_0$. Но тогда это неравенство выполняется для всех точек круга $(R_{i\eta}f, f)$, когда K пробегает все множество Θ. Таким образом, доказано, что в (32) имеет место равенство и, следовательно, справедливо тождество (40), т.е. функция $\sigma(\lambda)$ является спектральной функцией оператора $\mathbf{W}_0$. Обратно, пусть $\sigma(\lambda)$ – спектральная функция оператора $\mathbf{W}_0$. Случай ортогональной спектральной функции рассмотрен в Теореме 3. Поэтому мы рассмотрим не ортогональную спектральную функцию $\sigma(\lambda)$. В этом случае, для произвольно фиксированного $F(\lambda) = F(\lambda, f) \in L$ точка $I_{F,\lambda}(\sigma)$ будет внутренней точкой круга $K(F,\lambda)$. По Теореме 3 круги $K(F,\lambda)$ и $K(f,\lambda)$ имеют общую границу и поэтому совпадают. Следовательно, $I_{F,\lambda}(\sigma)$ представима в виде

$$I_{F,\lambda}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F(\xi), d\sigma(\xi)F(\xi))}{\xi - \lambda} = (\omega(\lambda)F(\lambda, f), F(\lambda, f)) + (G_\lambda f, f).$$

Для любых $\mu_0 \in C_+$ и $x \in \mathbf{C}^n$ положим $F(\xi) = \Phi(\xi, \mu_0)x$. Для всех $\xi \in (-\infty, \infty)$ имеем $F(\xi) \neq 0$ (в противном случае, из

$$0 = \Phi(\xi_0, \mu_0)x_0 = \frac{U^*(l, \xi_0)\, J\, U(l, \bar\mu_0) - J}{\mu_0 - \xi}\, x_0,$$

следует $U(l, \xi_0)x_0 = U(l, \bar\mu_0)x_0$, что противоречит (5) и (6)). Далее, в равенстве (34) левая часть и слагаемое $(G_\lambda f, f)$ в правой части суть аналитические функции в C_+. Поэтому m-функция $\Phi^*(\lambda, \mu_0)\,\omega(\lambda)\,\Phi(\lambda, \mu_0)$ является голоморфной в C_+. Отсюда следует, что в C_+ голоморфна и m-функция $\omega(\lambda)$ за исключением, быть может, изолированных точек $\lambda = \lambda_n$, являющихся нулями функций $\Phi^*(\bar\lambda, \mu_0)$ и $\Phi(\lambda, \mu_0)$. Учитывая, что $\Im\omega(\lambda) \geq 0$ $(\lambda \in C_+)$ получаем, что $\omega(\lambda)$ является R-функцией. Обозначая через $\sigma_1(\xi)$ ее спектральную функцию имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x, \Phi^*(\xi, \mu_0) d\sigma(\lambda) \Phi(\xi, \mu_0) x)}{\xi - \mu_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x, \Phi^*(\xi, \mu_0) d\sigma_1(\lambda) \Phi(\xi, \mu_0) x)}{\xi - \mu_0},$$

что эквивалентно $\sigma_1(\xi) = \sigma(\xi)$. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. Let $\mathbf{W}_0$ be minimal symmetrical operator in the space $L^2(0, l; \mathbf{C}^n)$ of square integrable n-dimensional vector-functions $x(r)$ $(0 < r < l < \infty)$ generated by differential expression $W^*(r) J \frac{d}{dr}(W(r)x(r))$. Here $\mathbf{C}^n$ is n-dimensional unitary space, J is a linear operator in $\mathbf{C}^n$ satisfying $J^* = -J = J^{-1}$ and $W(r)$ is a square integrable $n \times n$ matrix-function taking J-unitary values. A selfadjoint or accumulative extension $\mathbf{W}_K$ of $\mathbf{W}_0$ and its resolvent kernel is determined by a nonexpanding matrix K and its linear-fractional transform $\omega_K(\lambda)$. Analytical in the upper half-plane $\mathbf{C}_+$ matrix-functions $\omega_K(\lambda)$ generate matrix measures $\sigma(\xi)$ on $\mathbb{R}^1$. The paper proves that the set of all spectral functions of $\mathbf{W}_0$ coincides with the set of matrix measures generated by matrix-functions $\omega_K(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Кац, М. Г. Крейн, "О спектральных функциях струны", Дополн. II в [6].
2. М. Г. Крейн, "Про ермітові оператори з напрямними функціоналаи", Сб. Трудов Инст. Матем. АН Ук. ССР, том 10, стр. 83 — 106, 1948.
3. М. А. Наймарк, Линейные Дифференциальные Операторы, Москва, Наука, 1969.
4. Ф. Е. Мелик-Adамян "О канонических дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве", Изв. АН Арм.ССР, Сер. Матем., том 12, № 1, стр. 11 — 31, 1977.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтеровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и ее Применения, Москва, Наука, 1967.
6. Ф. В. Аткинсон, Дискретные и Непрерывные Граничные Задачи, Москва, Мир, 1968.
7. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами", Мат. Исслед., том 2, № 3, Кишинев, "Штиница", 1967.
8. И. С. Кац, М. Г. Крейн, "R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя", Дополнение II в [6].

13 Декабря 1998

Ереванский государственный университет

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛУОСИ

Л. Г. Арабаджян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 2, 1999

§1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральные уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty V(t-x) f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty) \tag{1}$$

относительно искомой функции f с ядром $V \in L_1(\mathbb{R}^+)$ возникают в различных математических моделях физических процессов и в теоретических проблемах. Таким примером является вопрос разрешимости общих интегральных уравнений типа свертки посредством вольтерровой факторизации соответствующих интегральных операторов (см. [6] – [8]).

В настоящей работе уравнение (1) рассматривается в случае, когда ядро V и свободный член g удовлетворяют условиям

(a) $\quad V \geq 0, \quad V(x)$- монотонно убывает на $\mathbb{R}^+, \quad \infty > \gamma \equiv \int_0^\infty V(t)\, dt > 1;$

(b) $\quad g \in L_1(\mathbb{R}^+) \quad$ и $\quad \int_0^\infty t|g(t)|\, dt < \infty.$

Если $V(t)$ и $g(t)$ дополнительно удовлетворяют условиям (см. [6] – [8])

$$(c) \quad V(t) \geq 0, \quad \int_0^\infty V(t)\, dt = 1; \quad (d) \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

то этот случай называется консервативным случаем уравнения (1).

Теорема 1 ([8]). **При условиях (c) и (d), уравнение (1) обладает локально интегрируемым решением $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$ с асимптотическим поведением**

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x), \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

В случае (b) это решение суммируемо на $\mathbb{R}^+$, т.е. $f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Пусть f — суммируемое решение консервативного уравнения

$$f(x) = g_0(x) + \int_x^\infty V_0(t-x) f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Интегрируя (2) от $x > 0$ до ∞ и используя теорему Фубини (см. [9]), получим

$$\int_x^\infty f(\tau)\, d\tau = \int_x^\infty g_0(\tau)\, d\tau + \int_0^\infty V_0(t)\, dt \int_{x+t}^\infty f(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Используя теорему Фубини и условие (с), последнее слагаемое можно преобразовать к виду

$$\int_0^\infty V_0(t)\, dt \int_{x+t}^\infty f(\tau)\, d\tau = \int_x^\infty f(\tau)\, d\tau - \int_x^\infty f(t)\, dt \int_{t-x}^\infty V_0(\tau)\, d\tau.$$

Подставляя это значение интеграла в (3), получаем

$$\int_x^\infty g_0(t)\, dt = \int_x^\infty f(t)\, dt \int_{t-x}^\infty V_0(\tau)\, d\tau.$$

Умножим последнее равенство на $\alpha \neq 0$ и полученный результат сложим с (2). Находим, что решение f консервативного уравнения (2) удовлетворяет (1), где функции V и g выражаются через V_0 и g_0 посредством равенств :

$$V(x) = V_0(x) + \alpha \int_x^\infty V_0(t)\, dt, \quad g(x) = g_0(x) - \alpha \int_x^\infty g_0(t)\, dt. \tag{4}$$

§2. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть функции V и g в уравнении (1) удовлетворяют условиям (a) и (b).

Теорема 2. Уравнение (1) при условиях (a) и (b), для любого $\gamma > 1$ обладает суммируемым решением $f \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Доказательство : Рассмотрим функции

$$V_0(x) = V(x) - \alpha e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha t} V(t)\, dt, \tag{5}$$

$$g_0(x) = g(x) - \alpha e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt, \tag{6}$$

где V и g суть ядро и свободный член уравнения (1), а α – произвольное действительное число. Легко проверить, что для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^+$ для функции V_0 из (5) и g_0 из (6) имеют место соотношения (4). Нетрудно показать также, что при надлежащем выборе α, функция V_0 из (5) удовлетворяет условиям (с). Действительно, в силу монотонности функции V, для любого α имеем

$$V_0(x) \geq V(x) \left(1 - \alpha e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha t}\, dt\right) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Кроме того, справедливы равенства :

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\infty V_0(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} V(t)\,dt.$$

Так как $\gamma(0) > 1$ и $\gamma(+\infty) = 0$, то существует такое значение $\alpha > 0$, что $\gamma(\alpha) = 1$. Покажем теперь, что при таком выборе α функция g_0, определенная по (6), обладает свойствами (b). В самом деле, в равенстве (6) имеем $g \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и

$$\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \int_0^x e^{\alpha u} g(u)\,du = \int_0^\infty g(u)\,du < \infty.$$

Следовательно $g_0 \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Далее, так как g уловлетворяет (b) и

$$\alpha \int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx \int_0^x e^{\alpha u} g(u)\,du = \int_0^\infty u g(u)\,du + \int_0^\infty g(u)\,du < \infty,$$

то получаем $\int_0^\infty t|g_0(t)|\,dt < \infty$. Следовательно, функции V_0 и g_0, определяемые равенствами (5) и (6) удовлетворяют условиям Теоремы 1. Таким образом, существует суммируемое решение f уравнения (2). В силу вышеизложенных рассуждений эта функция будет удовлетворять также и исходному уравнению (1). Теорема 2 доказана.

§3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь однородное уравнение

$$S(x) = \int_0^\infty V(t) S(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

где ядро V удовлетворяет условию (a).

Теорема 3. При условии (a) однородное уравнение (7) в $L_1(\mathbb{R}^+)$ обладает единственным (с точностью до постоянного множителя) решением вида $S(x) = e^{-\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}^+$ и определяется однозначно из уравнения

$$\int_0^\infty V(t) e^{-\alpha t}\,dt = 1. \tag{8}$$

Доказательство : Пусть $S \in L_1(\mathbb{R}^+)$ - произвольное решение уравнения (7). Так как ядро V удовлетворяет (a), то существует консервативное ядро V_0, удовлетворяющее (4) (с параметром α, удовлетворяющим (8)). Тогда из (7) имеем

$$S(x) = \int_0^\infty \left[V_0(t) + \alpha \int_t^\infty V_0(u)\,du\right] S(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Отделяя интегралы в правой части и меняя порядок интегрирования во втором интеграле, получаем

$$\widetilde{S}(x) = \int_0^\infty V_0(t)\widetilde{S}(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{9}$$

где $\widetilde{S}(x) \equiv S(x) - \alpha\int_x^\infty S(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}^+$. Пусть

$$F_h(x) \equiv \int_x^{x+h} \widetilde{S}(t)\,dt, \quad h \in \mathbb{R}^+.$$

Так как $\widetilde{S} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$ находим

$$F_h(x) \to 0, \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{10}$$

Из (9) получаем

$$F_h(x) = \int_0^\infty V_0(t)F_h(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

В [8] показано, что консервативное уравнение (11) в классе функций (10) имеет на $\mathbb{R}^+$ лишь тривиальное решение $F_h(x) \equiv 0$. Так как это равенство выполняется при любом $h \in \mathbb{R}^+$, то

$$S(x) - \alpha\int_x^\infty S(t)\,dt \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда S будет дифференцируемой на $\mathbb{R}^+$ функцией удовлетворяющей уравнению $\frac{dS}{dx} + \alpha S = 0$. Следовательно $S(x) = Ce^{-\alpha x}$. Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hopf, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tract., 1934
2. В. Феллер , Введение в Теорию Вероятностей и ее Приложения, Москва, Мир, том II, 1984.
3. А. А. Боровков, Вероятностные Процессы в Теории Массового Обслуживания, Москва, Наука, 1972.
4. R. Bellman, K. Cooke, Differential- Difference Equations, Academic Press, 1963.
5. В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Москва, Наука, 1967.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера-Хопфа, Препринт, № 01, Ереванский Университет, 1979.
7. Л. Г. Арабаджян, "О консервативном уравнении Винера-Хопфа", Изв. АН Арм. ССР, Сер. Матем., том 16, № 1, стр. 65 — 80, 1981.
8. Л. Г. Арабаджян, Н. В. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Матем. Анализ, том 22, ВИНИТИ, Москва, стр. 175 — 244, 1984.
9. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, Москва, 1976.

1 Декабря 1998

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34 НОМЕР 2 1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы