ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ГРУБАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

В статье рассмотрена задача "грубой дифференцируемости" гауссовского случайного поля $\xi(Q)$, $Q \in \mathbb{R}^2$. Доказано, что однородные гауссовские поля т.н. "класса Райса" грубо дифференцируемы только в случае, когда функция Райса является опорной функцией эллипса. В этом случае случайное пространственное направление Ω, нормальное к плоскости, касательной к $\xi(Q)$ в точке O, оказывается независимым от $\xi(O)$. Найден точный вид плотности распределения для Ω. Этот результат дает возможность вычисления интенсивности точечного процесса пересечений фиксированной горизонтальной прямой уровня x со случайной поверхностью $\xi(Q)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассмотрена задача "грубой дифференцируемости" гауссовских случайных полей определенных в $\mathbb{R}^2$. Прежде чем дать соответствующее определение рассмотрим случайные процессы на $\mathbb{R}$.

Пусть $\xi(Q)$ — случайный процесс на $\mathbb{R}$. Точку в $\mathbb{R}$ где мы изучаем дифференцируемость, отождествляем с началом координат и обозначаем через O. Для точки $Q \in \mathbb{R}$ с одномерной координатой u, пусть $f_Q(y|x)$ есть условная плотность распределения случайной величины $u^{-1}(\xi(Q) - x)$, при условии $\xi(O) = x$.

Определение 1. Если для каждого y существует предел

$$F(y|x) = \lim_{u \to 0} f_Q(y|x), \tag{1}$$

являющийся плотностью распределения по переменной y, то будем говорить, что $\xi(Q)$ **грубо дифференцируем** в точке O на уровне x. Случайная величина $\lim_{u \to 0} u^{-1}(\xi(Q_1) - x)$, имеющая плотность распределения удовлетворяющую (1), будем называть **грубой производной** для $\xi(Q)$ в точке O на уровне x.

Для гауссовского случайного процесса $\xi(Q)$ на $\mathbb{R}$ свойство грубой дифференцируемости можно легко доказать при следующем дополнитекьном предположении на корреляционную функцию :

$$E\xi(O)\xi(Q) = 1 - h^2 u^2 + o(u^2), \quad u \to 0, \tag{2}$$

где коэффициент h не зависит от u. Мы называем (2) **условием Райса** (см. [1]). Опираясь на описанный подход можно определить **грубую дифференцируемость** случайного поля $\xi(Q)$ в $\mathbb{R}^d$. Для $d = 2$ имеем следуюшее определение. Через $g(\phi)$ обозначим прямую направления ϕ, содержащую начало координат $O \in \mathbb{R}^2$.

В $\mathbb{R}^2$ мы будем использовать псевдополярные координаты $Q = (\phi, u)$: азимут ϕ определяется из условия $Q \in g(\phi)$, а u — одномерная координата на $g(\phi)$, которую естественно назвать "расстоянием со знаком" из O. Таким образом, $\phi \in (0, \pi)$ и $u \in (\infty, -\infty)$.

Будем говорить, что n точек $Q_1 = (\phi_1, u_1), \dots, Q_n = (\phi_n, u_n)$ сходятся к O **гомотетично**, если азимуты $\phi_1, \dots, \phi_n$ остаются фиксированными для некоторых ненулевых постоянных $k_1, \dots, k_n$:

$$u_1 = k_1 v, \quad u_2 = k_2 v, \quad \dots, \quad u_n = k_n v, \tag{3}$$

и при этом $v \to 0$.

Определение 2. Для уровня $x \in (-\infty, \infty)$, азимута $\phi \in (0, \pi)$ и $y \in (-\infty, \infty)$ обозначим через $H(x, \phi, y) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ прямую, проходящую через точку (O, x), проекция которой на горизонтальную плоскость есть $g(\phi)$ и tg(угол над горизонтом) $= y$. Будем говорить, что случайное поле $\xi(Q)$, определенное в $\mathbb{R}^2$ грубо дифференцируемо в начале координат O на уровне x, если выполнены следующие три условия :

Существование $P_{n,x}$: Для любого конечного множества азимутов $\phi_1, \dots, \phi_n$, условная совместная плотность распределения случайных величин $u_1^{-1}[\xi(Q_1) - x], \dots, u_n^{-1}[\xi(Q_n) - x]$, при условии $\xi(O) = x$, имеет предельное распределение вероятностей $P_{n,x}$, когда $Q_1, \dots, Q_n$ гомотетично стремятся к точке O вдоль радиальных направлений $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Согласованность : Предел $P_{n,x}$ не зависит от выбора начальных точек $Q_1, \dots, Q_n$, соответствующих $v = 1$.

Существование касательной плоскости : Пусть $l(\phi_1), ..., l(\phi_n)$ — случайные величины, обладающие совместным распределением $P_{n,x}$. Для каждого $n > 1$ прямые $H(x, \phi_1, l(\phi_1)),..., H(x, \phi_n, l(\phi_n))$, с вероятностью $P_{n,x} = 1$, принадлежат одной и той же плоскости T, последняя интерпретируется как случайная касательная плоскость.

Замечание. Если случайная плоскость T существует, то она необходимо содержит точку (O, x), таким образом, только ориентация плоскости T является случайной. Случайную ориентацию плоскости T можно описать (случайным) пространственным направлением Ω, нормальным к T. Из грубой дифференцируемости следует, что вероятностное распределение направления Ω не зависит от выбора азимутов ϕ_1, ...,ϕ_n. В частности, зная $P_{2,x}$ для всяких двух азимутов $\phi_1 \neq \phi_2$, можно вычислить плотность распределения направления Ω.

Определение 3. Случайное гауссовское поле $\xi(Q)$, определенное в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяет условию Райса для плоскости, если существует некоторая функция (функция Райса) $h(\phi) > 0$, зависящая от азимута $\phi \in (0, \pi)$ такая, что имеет место асимптотическая формула

$$E\xi(O)\,\xi(Q) = 1 - h^2(\phi)\, u^2 + o(u^2), \tag{4}$$

причем $Q = (\phi, u)$ стремится к точке O вдоль прямой $g(\phi)$.

Этот класс не пуст, так как он содержит однородные гауссовские поля с **эллиптико–экспоненциальной** ковариационной функцией (см. пример, приведенный ниже). В этой статье показано, что в классе Райса однородные гауссовские поля грубо не дифференцируемы, за исключением случая, когда $h(\phi)$ – опорная функция эллипса (**эллиптическая** $h(\phi)$). В этом случае случайное пространственное направление Ω **не зависит** от $\xi(O)$, и для плотности распределения направления Ω найдена точная формула. Неожиданный результат касающийся эллиптичности функции $h(\phi)$, естественно приводит к задаче, сформулированной в конце статьи.

Мы определим случайную плоскость T с помощью условия прохождения случайной поверхности через "вертикальное окно", т.е. интервал $(x, x + dx)$, помещенный на вертикальную ось с основанием O. Действительно, применение условия $\{\xi(O) = x\}$ при вычислении $P_{n,x}$ состоит из двух последовательных операций : 1) применение условия $\{\xi(O) \in (x, x + dx)\}$ и 2) вычисление предела при $dx \to 0$.

Условие прохождения случайной поверхности через "горизонтальное окно" на уровне x также прелставляет интерес. Этому соответствует прохождение **кривой уровня** через узкое окно dl, помещенное в горизонтальной плоскости на уровне x. Соответствующее событие запишем как $\{\xi(Q) \text{ hits } dl\}$. Мы покажем, что плотность распределения для Ω, соответствуюшая условию $\{\xi(Q) \text{ hits } dl\}$, можно вычислить достаточно простым интегрированием. В однородном гауссовском случае, таким путем получается выражение для интенсивности точечного процесса пересечений случайной поверхности с горизонтальной прямой произвольного уровня и направления.

§2. АНАЛИЗ

Пусть $\xi(Q)$ — гауссовский процесс в $\mathbb{R}^2$. Для простоты положим, что $\xi(Q)$ однороден, и $E\xi(Q) = 0$, $Var\,\xi(Q) = 1$. Мы также предполагаем, что $\xi(Q)$ удовлетворяет условию Райса для плоскости.

Пример : эллиптико-экспоненциальные ковариационные функции. Известно, что функция $\exp[-c^2x^2]$, где $c \neq 0$ - постоянная, а $x \in \mathbb{R}$ является ковариационной функцией гауссовского процесса на $\mathbb{R}$. Следовательно, по Теореме Бохнера-Хинчина, $\exp[-a^2x^2 - b^2y^2]$ является корреляционной функцией однородного гауссовского процесса в $\mathbb{R}^2$, заданного в декартовых координатах x, y.

В координатах ϕ, u эта функция имеет вид $\rho_\phi(u) = \exp\left[-h^2(\phi)u^2\right]$, причем

$$h^2(\phi) = a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi. \tag{5}$$

В обшем случае эллиптическая функция Райса зависит также и от угла поворота $\alpha \in [0, \pi)$, т.е. :

$$h^2(\phi) = a^2 \sin^2(\phi - \alpha) + b^2 \cos^2(\phi - \alpha). \tag{6}$$

Отметим, что (6) является "опорной функцией" эллипса [2].

Пусть точки $Q_1 = (\phi_1, u_1), \ldots, Q_n = (\phi_n, u_n)$ стремятся к O **гомотетично.**

Совместная плотность распределения случайных величин $\xi(O)$, $u_1^{-1}[\xi(Q_1) - \xi(O)]$, ..., $u_n^{-1}[\xi(Q_n) - \xi(O)]$ есть многомерная нормальная плотность с ковариационной матрицей $\mathbf{C}_n$. Ее запишем в терминах функций $\rho_i(x)$ и $\rho_{ij}(x, y)$:

$$\rho_i(u_i) = E\xi(O)\xi(Q_i) \quad \text{и} \quad \rho_{ij}(u_i, u_j) = E\xi(Q_i)\xi(Q_j),$$

так что $\rho_{ij}(x, y) = \rho_{ji}(y, x)$ и для любого $j \neq i$ имеем $\rho_i(x) = \rho_{ij}(x, 0)$. Обозначая $\gamma = \rho_{1n}(u_1, u_n)$, имеем

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\rho_1(u_1) - 1}{u_1} & \cdots & \dfrac{\rho_n(u_n) - 1}{u_n} \\ \dfrac{\rho_1(u_1) - 1}{u_1} & \dfrac{2 - 2\rho_1(u_1)}{u_1^2} & \cdots & \dfrac{\gamma - \rho_1(u_1) - \rho_n(u_n) + 1}{u_1 u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\rho_n(u_n) - 1}{u_n} & \dfrac{\gamma - \rho_1(u_1) - \rho_n(u_n) + 1}{u_1 u_n} & \cdots & \dfrac{2 - 2\rho_n(u_n)}{u_n} \end{pmatrix}$$

Так как точки $Q_1, ..., Q_n$ стремятся к O гомотетично, то легко найти предел матрицы $\mathbf{C}_n$. Из условия Райса получаем

$$\lim \frac{\rho_i(u_i) - 1}{u_i} == 0. \tag{7}$$

Рассмотрим предел

$$A_{ij} = \lim \frac{\rho_{ij}(u_i, u_j) - \rho_i(u_i) - \rho_j(u) + 1}{u_i u_j}.$$

Обозначая через ϕ_{ij} направление отрезка Q_i, Q_j, а через u_{ij} его длину, используя $u_i = k_i v$ и $u_j = k_j v$, находим $u_{ij}^2 = v^2[k_i^2 + k_j^2 + 2k_i k_j \cos(\phi_i - \phi_j)]$. Следовательно

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \lim_{v \to 0} \frac{-h^2(\phi_{ij})u_{ij}^2 + h^2(\phi_i)u_i^2 + h^2(\phi_j)u_j^2}{u_i u_j} = \\ &= \frac{(-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i))k_i^2 + (-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j))k_j^2 + 2k_i k_j h^2(\phi_{ij}) \cos(\phi_i - \phi_j)}{k_i k_j} = \\ &= h^2(\phi_{ij}) \left[2\cos(\phi_i - \phi_j) - \frac{k_i}{k_j} - \frac{k_j}{k_i}\right] + h^2(\phi_i)) \frac{k_i}{k_j} + h^2(\phi_j)) \frac{k_j}{k_i}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что

$$k_i / k_j = \frac{\sin(\phi_{ij} - \phi_j)}{\sin(\phi_{ij} - \phi_i)}. \tag{9}$$

Обозначая матрицу $\|A_{ij}\|$ через $\mathbf{A}_n$, предел матрицы $\mathbf{C}_n$ можно записать в виде

$$\lim \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}.$$

Согласно теории многомерных гауссовских распределений существование вероятностного распределения $P_{n,x}$ следует из существования предельной матрицы $\mathbf{A}_n$. В нашем случае $P_{n,x} = P_n$ не зависит от x. Прежде чем перейти к рассмотрению условия согласованности, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Для функций

$$h^2(\phi) = \cos^2\phi, \quad h^2(\phi) = \sin^2\phi \quad \text{и} \quad h^2(\phi) = \cos\phi\sin\phi,$$

числа A_{ij} соответственно равны

$$2\cos\phi_i\cos\phi_j, \quad 2\sin\phi_i\sin\phi_j \quad \text{и} \quad \cos\phi_i\sin\phi_j + \sin\phi_i\cos\phi_j.$$

Доказательство : Удобно переписать (9) в виде

$$A_{ij} = (-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i))\frac{k_i}{k_j} + (-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j))\frac{k_j}{k_i} + 2h^2(\phi_{ij})\cos(\phi_i - \phi_j). \tag{10}$$

В первом случае имеем

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i) = (-\cos^2\phi_{ij} + \cos^2\phi_i) = \sin(\phi_{ij} - \phi_i)\sin(\phi_{ij} + \phi_i),$$

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j) = (-\cos^2\phi_{ij} + \cos^2\phi_j) = \sin(\phi_{ij} - \phi_j)\sin(\phi_{ij} + \phi_j).$$

Подставляя в (10), получаем

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2\left[-\cos^2\phi_{ij}\sin\phi_i\sin(\phi_j) + \sin^2\phi_{ij}\cos\phi_i\cos(\phi_j) + \right. \\ &\left. + \cos(\phi_j - \phi_i)\cos^2\phi_{ij}\right] = 2\cos\phi_i\cos\phi_j. \end{aligned} \tag{11}$$

Результат для $h^2(\phi) = \sin^2\phi$ можно получить из (11), подставляя $\frac{\pi}{2} - \phi$ вместо ϕ. Получаем

$$A_{ij} = 2\sin\phi_i\sin\phi_j. \tag{12}$$

В третьем случае

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_i) = \cos\phi_i\sin\phi_i - \cos\phi_{ij}\sin\phi_{ij} = \frac{1}{2}[\sin 2\phi_i - \sin 2\phi_{ij}],$$

$$-h^2(\phi_{ij}) + h^2(\phi_j) = \cos\phi_j\sin\phi_j - \cos\phi_{ij}\sin\phi_{ij} = \frac{1}{2}[\sin 2\phi_j - \sin 2\phi_{ij}].$$

Следовательно

$$A_{ij} = \frac{1}{2}[\sin 2\phi_i - \sin 2\phi_{ij}]\frac{\sin(\phi_{ij} - \phi_j)}{\sin(\phi_{ij} - \phi_i)} + \frac{1}{2}[\sin 2\phi_j - \sin 2\phi_{ij}]\frac{\sin(\phi_{ij} - \phi_i)}{\sin(\phi_{ij} - \phi_j)} +$$
$$+ 2\sin\phi_{ij}\cos\phi_{ij}\cos(\phi_i - \phi_j).$$

Преобразуя выражения в квадратных скобках и проведя сокращения, получаем

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -\cos(\phi_{ij} + \phi_i)\sin(\phi_{ij} - \phi_j) - \cos(\phi_{ij} + \phi_j)\sin(\phi_{ij} - \phi_i) + \\ &+ 2\sin\phi_{ij}\cos\phi_{ij}\cos(\phi_i - \phi_j) = \\ &= [-\cos\phi_{ij}\cos\phi_i + \sin\phi_{ij}\sin\phi_i][\sin\phi_{ij}\cos\phi_j - \cos\phi_{ij}\sin\phi_j] + \\ &+ [-\cos\phi_{ij}\cos\phi_j + \sin\phi_{ij}\sin\phi_j][\sin\phi_{ij}\cos\phi_i - \cos\phi_{ij}\sin\phi_i] + \\ &+ 2\sin\phi_{ij}\cos\phi_{ij}\cos(\phi_i - \phi_j). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок члены, содержащие произведение $\cos\phi_{ij}\sin\phi_{ij}$ сокращаются, поэтому предыдущее выражение принимает вид

$$A_{ij} = \cos^2\phi_{ij}\cos\phi_i\sin\phi_j + \sin^2\phi_{ij}\sin\phi_i\cos\phi_j + \cos^2\phi_{ij}\sin\phi_i\cos\phi_j + \\ + \sin^2\phi_{ij}\cos\phi_i\sin\phi_j = \cos\phi_i\sin\phi_j + \sin\phi_i\cos\phi_j. \tag{13}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если имеет место свойство Согласованности (см. введение), то функция Райса $h^2(\phi)$ необходимо эллиптична :

$$h^2(\phi) = a^2\cos^2(\phi-\alpha) + b^2\sin^2(\phi-\alpha). \tag{14}$$

Доказательство : Для гауссовского процесса $\xi(Q)$, свойство Согласованности имеет место тогда и только тогда, когда A_{ij} не зависят от ϕ_{ij}. В (8) выберем $\phi_i = 0$ и $\phi_j = \frac{\pi}{2}$. Имеем $k_i/k_j = -\cot\phi_{ij}$, и область возможных значений функции ϕ_{ij} является $(\pi/2,\pi)$. Условие, что A_{ij} как функция $\phi_{ij}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ является постоянной C_1, запишется в виде

$$h^2(\phi)[\cot\phi + \tan\phi] - a^2\cot\phi - b^2\tan\phi = C_1,$$

где $a^2 = h^2(0)$, $b^2 = h^2(\frac{\pi}{2})$ и вместо ϕ_{ij} мы использовали ϕ. Следовательно, на интервале $(\pi/2,\pi)$ необходимо имеем

$$h^2(\phi) = \frac{C_1 + a^2\cot\phi + b^2\tan\phi}{\cot\phi+\tan\phi} = C_1\cos\phi\,\sin\phi + a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi \tag{15}$$

Выбирая $\phi_j = \pi$, $\phi_i = \frac{\pi}{2}$ и действуя аналогично, получаем следующее представление функции $h^2(\phi)$ на интервале $(0,\frac{\pi}{2})$:

$$h^2(\phi) = C_2\cos\phi\,\sin\phi + a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi, \tag{16}$$

где C_2 - некоторая константа.

Таким образом, для $\phi\in(0,\pi)$ функция $h^2(\phi)$ необходимо имеет тригонометрическую форму (15) — (16), зависящую от четырех параметров a, b, C_1, C_2.

Используя линейность и Лемму 1, из (15) — (16) получаем

$$A_{ij} = 2a^2\cos\phi_i\cos\phi_j + 2b^2\sin\phi_i\sin\phi_j + C(\phi_{ij})[\cos\phi_i\sin\phi_j + \sin\phi_i\cos\phi_j].$$

Если ϕ_i и ϕ_j принадлежат внутренности интервала $(0,\frac{\pi}{2})$, то $C(\phi_{ij}) = C_1$ для $\phi_{ij}\in(\pi,\frac{\pi}{2})$ и $C(\phi_{ij}) = C_2$ для $\phi_{ij}\in(\frac{\pi}{2}, max(\phi_i,\phi_j))$. Функция $C(\phi_{ij})$ является константой лишь при $C_1 = C_2 = C$, т.е. когда $h^2(\phi) = C\cos\phi\sin\phi + a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi$.

Эта квадратичная форма от переменных $\sin\phi$ и $\cos\phi$ должна быть неотрицательной. Это приводит к представлению (14), где a и b суть константы, вообще говоря $a \neq b$, причем $\alpha \in (0,\pi)$. Представление (14) имеет вид опорной функции эллипса с главными полуосями a^{-1} и b^{-1}, повернутого на угол α (см. [4]). Лемма 2 полностью доказана.

Теорема 1. Однородное случайное гауссовское поле на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее плоскому условию Райса грубо дифференцируемо тогда и только тогда, когда функция $h(\phi)$ в выражении (5) имеет эллиптический вид (14).

Доказательство : Необходимость была доказана в Лемме 2. Из Леммы 1 следует, что эллиптическая форма функции $h(\phi)$ влечет свойство **Согласованности**. Остается доказать, что из эллиптичности функции $h(\phi)$ следует существование касательной плоскости. Рассмотрим $\mathbf{A}_3$ (см. (8)). Не умаляя общности предположим, что $\alpha = 0$. Используя Лемму 1 и представление (14), получаем (здесь используем обозначения $\gamma_i = \sin\phi_i$ и $\beta_i = \cos\phi_i$, $i = 1,2,3$)

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a^2\gamma_1^2 + b^2\beta_1^2 & a^2\gamma_1\gamma_2 + b^2\beta_1\beta_2 & a^2\gamma_1\gamma_3 + b^2\beta_1\beta_3 \\ a^2\gamma_1\gamma_2 + b^2\beta_1\beta_2 & a^2\gamma_2^2 + b^2\beta_2^2 & a^2\gamma_2\gamma_3 + b^2\beta_2\beta_3 \\ a^2\gamma_1\gamma_3 + b^2\beta_1\beta_3 & a^2\gamma_2\gamma_3 + b^2\beta_2\beta_3 & a^2\gamma_3^2 + b^2\beta_3^2 \end{pmatrix}$$

Убедимся, что $det\,\mathbf{A}_3 = 0$. Для этого представим $det\,\mathbf{A}_3$ в виде суммы 8 детерминантов, содержащих только столбцы из cos и sin. Например, детерминант содержащий только столбцы sin, sin, cos имеет вид

$$det \begin{pmatrix} a^2\sin^2\phi_1 & a^2\sin\phi_1\sin\phi_2 & b^2\cos\phi_1\cos\phi_3 \\ a^2\sin\phi_1\sin\phi_2 & a^2\sin^2\phi_2 & b^2\cos\phi_2\cos\phi_3 \\ a^2\sin\phi_1\sin\phi_3 & a^2\sin\phi_2\sin\phi_3 & b^2\cos^2\phi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= a^2\sin\phi_1\, a^2\sin\phi_2\, b^2\cos\phi_3\, det \begin{pmatrix} \sin\phi_1 & \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \\ \sin\phi_2 & \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \\ \sin\phi_3 & \sin\phi_3 & \cos\phi_3 \end{pmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Так как этот результат вытекает из комбинаторной структуры, которая остается в силе для матриц $\mathbf{A}_n$ для всех порядков $n > 2$, то приходим к следующему заключению :

$$det\,\mathbf{A}_n = 0 \text{ для всех } n > 2. \qquad (18)$$

Так как $\det \mathbf{A}_3 = 0$, то одна из строчек (скажем третья) является линейной комбинацией двух других. Получаем следующие уравнения :

$$A[a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1] + B[a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2] =$$

$$= a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3,$$

$$A[a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2] + B[a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2] =$$

$$= a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3.$$

Эти уравнения легко решаются. Каждую из величин A и B можно найти в виде отношения квадратических форм от величин a^2 и b^2 :

$$A = [(a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3)(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2) -$$

$$- (a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3)(a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)] \cdot [(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 +$$

$$+ b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2)^2 - (a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)(a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)]^{-1},$$

$$B = [(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_3)(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2) -$$

$$- (a^2 \sin \phi_2 \sin \phi_3 + b^2 \cos \phi_2 \cos \phi_3)(a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)] \cdot [(a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 +$$

$$+ b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2)^2 - (a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1)(a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)]^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что отсутствуют слагаемые, пропорциональные a^4 и b^4, что приводит к сокращению множителей $a^2 b^2$. Поэтому из предыдущего выражения получаем

$$A(\phi; \phi_1, \phi_2) = \frac{\cos(\phi - \phi_1) - \cos(\phi - \phi_2)\cos(\phi_2 - \phi_1)}{\sin^2(\phi_2 - \phi_1)} \tag{19}$$

$$B(\phi; \phi_1, \phi_2) = \frac{\cos(\phi - \phi_2) - \cos(\phi - \phi_1)\cos(\phi_2 - \phi_1)}{\sin^2(\phi_2 - \phi_1)} \tag{20}$$

Рассмотрим цилиндрическую поверхность $\mathbf{S}$, ось которой перпендикулярна плоскости $\mathbb{R}^2$ и пересечение которой с последней плоскостью (экватор) есть окружность радиуса 1 с центром в точке O. Рассмотрим стандартные цилиндрические координаты ϕ, y на поверхности $\mathbf{S}$. Как обычно $\phi \in (0, 2\pi)$ определяет образующую, а y является одномерной координатой на образующей (эквивалентно, расстояние со знаком от экватора). В цилиндрических координатах ϕ, y кривая пересечения поверхности $\mathbf{S}$ с плоскостью, проходящей через O и с направлением нормали $\omega = (\theta, \nu)$ имеет уравнение

$$y(\phi) = \tan \nu \sin(\phi - \theta). \tag{21}$$

Как обычно, $\omega = (\theta, \nu)$, где ν есть угол между ω и вертикальным направлением, а θ — азимут направления ω.

Кривые на поверхности S, принадлежащие этому классу мы будем называть плоскими. Отметим, что

$$y(\phi) = A(\phi; \phi_1, \phi_2)\, y_1 + B(\phi; \phi_1, \phi_2)\, y_2, \tag{22}$$

где A и B определяются как и в (19) и (20), является уравнением плоской кривой на S, которая содержит точки (ϕ_1, y_1) и (ϕ_2, y_2). (Доказательство : (22) можно преобразовать в (21) с параметрами $\operatorname{tg}\nu$ и θ, а затем использовать $A(\phi_1; \phi_1, \phi_2) = 1$, $B(\phi_1; \phi_1, \phi_2) = 0$, $A(\phi_2; \phi_1, \phi_2) = 0$, $B(\phi_2; \phi_1, \phi_2) = 1$.) Отсюда следует, что случайные точки $(\phi_1, t(\phi_1))$, $(\phi_2, t(\phi_2))$, $(\phi_3, t(\phi_3))$ с вероятностью 1 принадлежат некоторой плоской кривой на поверхности S. Эквивалентно, с вероятностью $P_3 = 1$, прямые $H(x, \phi_1, t(\phi_1))$, $H(x, \phi_2, t(\phi_2))$, $H(x, \phi_3, t(\phi_3))$ принадлежат единственной плоскости. Последняя плоскость совпадает со случайной касательной плоскостью T, описанной во Введении. Доказательство завершено.

Ниже через ω будем обозначать нормальное направление плоскости, содержащей прямые $H(x, \phi_1, t(\phi_1))$ и $H(x, \phi_2, t(\phi_2))$. Имеет место (см. [3])

$$dy_1\, dy_2 = \frac{\sin(\phi_2 - \phi_1)}{\cos^3 \nu}\, d\omega, \tag{23}$$

где $d\omega = \sin \nu d\nu d\theta$ – телесный угол.

Совместное распределение $t(\phi_1)$ и $t(\phi_2)$ является нормальным с ковариационной матрицей $\mathbf{A}_2$ (см. (8)). Используем Лемму 1, не умаляя общности предполагая, что (14) выполняется для $\alpha = 0$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1 & a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 & a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $D = det \mathbf{A}_2 = a^2 b^2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2) \not\equiv 0$, и матрица, обратная к $\mathbf{A}_2$ имеет вид

$$\mathbf{A}_2^{-1} = D^{-1} \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1 & a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 & a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим совместную плотность распределения $t(\phi_1)$ и $t(\phi_2)$:

$$f_{\phi_1 \phi_2}(y_1, y_2) = (2\pi\sqrt{D})^{-1} \cdot \exp\left\{ -\frac{a^{-2} b^{-2}}{2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2)} \cdot \left[(a^2 \sin^2 \phi_1 + b^2 \cos^2 \phi_1) y_1^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ (a^2 \sin^2 \phi_2 + b^2 \cos^2 \phi_2)\, y_2^2 - 2 y_1 y_2 (a^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + b^2 \cos \phi_1 \cos \phi_2) \right] \right\}.$$

Из (23) получаем, что плотность распределения $X(\omega)\,d\omega$ ориентации случайной плоскости, проходящей через $\ell(\phi_1)$ и $\ell(\phi_2)$, имеет вид

$$X(\omega) = \frac{\sin(\phi_2 - \phi_1)}{\cos^3 \nu} f_{\phi_1\phi_2}(y_1, y_2).$$

Согласно Замечанию во Введении, выбираем $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = \pi/2$. Используя (21), получаем

$$X(\omega) = (2\pi ab)^{-1} \cos^{-3}\nu \cdot \exp\left\{-\frac{b^2 y_1^2 + a^2 y_2^2}{2a^2 b^2}\right\} =$$

$$= (2\pi ab)^{-1} \cos^{-3}\nu \cdot \exp\left\{-\operatorname{tg}^2\nu \frac{b^2 \sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}{2a^2b^2}\right\}. \tag{24}$$

Теорема 2. Если однородное гаусовское случайное поле $\xi(Q)$ грубо дифференцируемо, то $\xi(O)$ и случайное направление Ω, нормальное к касательной плоскости T в $\xi(O)$, независимы. Случайная ориентация Ω имеет плотность распределения $X(\omega)d\omega$, задаваемую формулой (24).

Результат (24) может быть использован для вычисления плотности распределения $Y(\theta)$ случайного **азимута** направления нормального к T. Эта случайная ориентация не зависит от уровня z и вычисляется интегрированием $X(\omega)\sin\nu d\nu$. Для каждого $c > 0$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{-3}\nu \cdot \exp\{-c\operatorname{tg}^2\nu\}\sin\nu\, d\nu = \frac{1}{2c}.$$

Следовательно, искомая плотность распределения имеет вид

$$Y(\theta) = \frac{(2\pi)^{-1}ab}{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}, \tag{25}$$

где угол θ измеряется от направления полуоси a.

Приведем проверку равенства $\int Y(\theta)d\theta = 1$. По хорошо известной теореме об опорных функциях выпуклых фигур, примененной к эллипсам, заключаем, что $r = (b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{-1/2}$ является эллипсом, записанным в полярных координатах , с главными полуосями a^{-1} и b^{-1}. Так как $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ есть элемент площади, то площадь этого эллипса равна $\pi a^{-1}b^{-1}$, откуда

$$\int (b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{-1}\, d\theta = 2\pi a^{-1}b^{-1}.$$

Проверка завершена.

Из результата (24) можно получить условную плотность распределения направления нормали к случайной гауссовской поверхности в точке $\xi(O)$ при условии

$\xi(O) = x$, в смысле горизонтального окна (см. заключительное замечание из Введения). Рассмотрим **кривую уровня** поля $\xi(Q)$, соответствующую уровню x. Эта кривая представляет собой пересечение поля $\xi(Q)$ с горизонтальной плоскостью, отстоящей на x от O. Вероятность события, что эта кривая уровня пересекает горизонтальный прямолинейный отрезок dl в этой плоскости, выходящий из точки (O, x), и образует с dl угол, лежащий в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, можно вычислить, используя якобиан

$$\cos\nu \, dx \, d\omega = (\sin\nu)^2 \sin\alpha \, d\alpha \, dl \, d\nu, \tag{26}$$

где как и выше, dx – интервал на вертикальной оси. Эта формула хорошо известна в интегральной геометрии : обе стороны суть элементы инвариантной относительно евклидовых движений меры в пространстве плоскостей, см. [3]. Обозначим через $X_1(\omega)\, d\alpha\, d\nu$ плотность распределения случайной ориентации касательной плоскости в точке $\xi(O) = x$, что соответствует условию в смысле горизонтального окна dl.

Разделив (26) на $\cos\nu$ и помножив на $X(\omega)$, получим вероятность события $\{\xi(O) \in dx$ и $\Omega \in d\omega\}$. Последняя вероятность асимптотически эквивалентна вероятности события $\{\xi(Q)$ hits $dl\} \bigcap \{\Omega \in d\omega\}$. Отсюда вытекает следующая

Теорема 3. Если однородное гауссовское случайное поле $\xi(Q)$ грубо дифференцируемо, то независимо от уровня x

$$X_1(\omega) = \lambda^{-1} \sin\alpha \, (\cos\nu)^{-1} (\sin\nu)^2 X(\omega), \tag{27}$$

где $X(\omega)$ задается согласно (24), и

$$\lambda = \iint \sin\alpha \, (\cos\nu)^{-1} (\sin\nu)^2 X(\omega)\, d\alpha\, d\nu. \tag{28}$$

Интенсивность точечного процесса пересечений поверхности (кривой уровня) поля $\xi(Q)$ с горизонтальной тестовой прямой на уровне x равна $\lambda G(x)$, где $G(x)$ есть гауссовская плотность распределения случайной величины $\xi(Q)$.

Задача. Из результата Теоремы 1 возникает следующий вопрос : Существуют ли однородные гауссовские поля на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие плоскому условию Райса с **неэллиптической** $h(\phi)$? Если такие поля и существуют, то они грубо не дифференцируемы.

ABSTRACT. The paper poses the problem of "rough differentiability" of a Gaussian random field $\xi(Q)$, $Q \in \mathbb{R}^2$. The main finding is that within the "Rice class", translation invariant Gaussian fields are in fact never roughly differentiable, except for the case where the Rice function is the support function of an ellipse. In this case, the random spatial direction Ω normal to the plane tangent to $\xi(Q)$ at a given point O turns out to be independent of $\xi(O)$. The probability density for Ω is written down explicitly. This result opens the way for calculation of the intensity of the point process of intersections of a given horizontal line on the level z with the random surface $\xi(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, Стационарные Случайные Процессы. Свойства Выборочных Функций и их Приложения, Мир, Москва, 1969.
2. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem," Israel Journal of Mathematics, vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
3. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Москва, Наука, 1989.

11 ноября 1998

Американский университет Армении, Ереван,
E-mail : rhambart@aua.am

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОШИБКИ ПРОГНОЗА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ – стационарная в широком смысле случайная последовательность со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Пусть σ_T^2 – среднеквадратическая ошибка прогноза величины $X(0)$ линейными формами по переменным $X(-T), \dots, X(-1)$, и $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$. В работе изучается скорость убывания к нулю величины $\delta_T = \sigma_T^2 - \sigma^2$ при $T \to \infty$ в зависимости от свойств спектральной плотности $f(\lambda)$. Доказано, что для $0 < \gamma < 1/2$ и $T \to \infty$ оценки $\delta_T = O(T^{-\gamma})$ или $\delta_T = o(T^{-\gamma})$ имеют место для достаточно широких классов спектральных плотностей при некоторых ограничениях на типы их нулей. Статья содержит также результаты, характеризующие асимптотическое поведение теплицевых определителей $D_n(f)$ порожденных функцией $f(\lambda)$.

§1. Введение

Пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$ — стационарная в широком смысле случайная последовательность со спектральной плотностью (с.п.) $f(\lambda)$, удовлетворяющей условиям

$$0 \le f(\lambda) \in L_1[-\pi, \pi], \quad f(\lambda + 2\pi) = f(\lambda),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty. \tag{1}$$

Обозначим через σ_T^2 среднеквадратическую ошибку линейного прогноза случайной величины $X(0)$ по случайным величинам $X(-T), \dots, X(-1)$:

$$\sigma_T^2 = \min_{\{a_k\}} \left\| X_0 - \sum_{k=1}^{T} a_k X(-k) \right\|^2,$$

где $\|X\|^2 = E|X|^2$. Пусть $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$ — ошибка линейного прогноза по всему прошлому. Известно (см., например, [13], [17]), что из условия (1) следует

$$\sigma^2 = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda \right\} > 0. \tag{2}$$

Полагая

$$\delta_T = \sigma_T^2 - \sigma^2, \tag{3}$$

имеем $\delta_T \geq 0$ и $\delta_T \to 0$ при $T \to \infty$. В статье исследуется скорость убывания к нулю величины δ_T при $T \to \infty$, зависящей от свойств с. п. $f(\lambda)$.

Задача об оценке δ_T для различных классов спектральных плотностей рассматривалась многими авторами. Статьи Г. Бакстера [2], Я. Геронимуса [7], У. Гренандера и Г. Сеге [13], У. Гренандера и М. Розенблатта [14] и другие содержат достаточные условия в терминах с. п. $f(\lambda)$ для выполнения соотношения

$$\delta_T = O(T^{-\gamma}), \quad \gamma > 0, \quad T \to \infty. \tag{4}$$

Необходимое и достаточное условие для (4) в случае $\gamma = 2(r + \alpha)$, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, $r + \alpha > 1/2$ получено И. А. Ибрагимовым в [17] : с. п. $f(\lambda)$ **должна почти всюду совпадать с непрерывной положительной функцией, принадлежащей классу Никольского** $H_2(\gamma)$ (определение $H_2(\gamma)$ дано в §2).

Из теоремы Ибрагимова следует, что для "больших" значений γ ($\gamma > 1$), с. п. $f(\lambda)$ необходимо отделена от нуля. С другой стороны, в той же работе [17] показано также, что если $f(\lambda)$ имеет нули или неограничена, то δ_T убывает к нулю медленнее (по порядку), чем $T^{-(1+\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon > 0$. В работе [21] (см. также [11]) при тех же условиях был доказан более сильный результат $\delta_T \asymp T^{-1}$, где $a_T \asymp b_T$ означает, что a_T/b_T асимптотически (при $T \to \infty$) отделена от 0 и ∞. Представляет интерес описать классы спектральных плоскостей, для которых оценка (4) выполняется для $0 < \gamma < 1/2$.

Статьи Г. Бакстера [2], И. Хиршмана [15] и Б. Голинского [11] содержат достаточные условия в терминах с. п. $f(\lambda)$ для выполнения соотношения

$$\delta_T = o(T^{-\gamma}), \quad \gamma > 0, \quad T \to \infty. \tag{5}$$

Отметим, что во всех этих работах предполагается, что с. п. $f(\lambda)$ отделена и от нуля и от бесконечности. Для специального класса спектральных плотностей, обладающих нулями типа Маккенхаупта, оценка (5) доказана в статье [8].

В настоящей работе мы доказываем, что для $0 < \gamma < 1/2$ оценки (4) и (5) имеют место для достаточно широких классов спектральных плотностей, обладающих нулями типа Маккенхаупта или полиномиальными нулями. Некоторые результаты этой статьи были анонсированы в [10].

Статья имеет следующую структуру : в §2 исследуется асимптотическое поведение ошибки прогноза, в §3 изучается асимптотическое поведение теплицевых определителей, порожденных спектральной плотностью, в §4 приводятся доказательства результатов, сформулированных в §2.

§2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОШИБКИ ПРОГНОЗА

Начнем с некоторых обозначений и определений. Положим

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p([-\pi,\pi]) = \left\{\psi :\ ||\psi||_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\lambda)|^p\, d\lambda\right)^{1/p} < \infty\right\}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\mathbf{L}_\infty = \mathbf{L}_\infty([-\pi,\pi]) = \left\{\psi :\ ||\psi||_\infty = \operatorname{esssup}_{\lambda\in[-\pi,\pi]} |\psi(\lambda)| < \infty\right\}.$$

Для функции $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$, ее $\mathbf{L}_p$–модуль непрерывности определяется равенством

$$\omega_p(\psi;\delta) = \sup_{|t|<\delta} ||\psi(\cdot+t) - \psi(\cdot)||_p, \quad \delta > 0.$$

Обозначим через $\mathrm{lip}(\alpha;p)$, $\mathbf{W}_p(\gamma)$ и $\mathbf{H}_p(\gamma)$ $\mathbf{L}_p$-класс Липшица, классы Соболева и Никольского, соответственно. Напомним их определения (см., например, [24]) :

Определение 1. 1) Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ принадлежит классу $\mathrm{lip}(\alpha;p)$ для $0 < \alpha < 1$ и $p > 1$, если $\omega_p(\psi;\delta) = o(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$.

2) Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ принадлежит классу $\mathbf{W}_p(\gamma)$ для $\gamma > 0$ и $1 \le p < \infty$, если $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda)d\lambda = 0$ и $\psi(\lambda)$ имеет производную порядка γ в смысле Вейля такую, что $\psi^{(\gamma)}(\lambda) \in \mathbf{L}_p$.

3) Пусть $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbb{N}_0$, $\gamma = r + \alpha$ и $1 \le p \le \infty$, где $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. Функция $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ принадлежит классу $\mathbf{H}_p(\gamma)$, если $\psi(\lambda)$ имеет r-ую производную $\psi^{(r)}(\lambda) \in \mathbf{L}_p$ и

$$||\psi^{(r)}(\cdot+h) - \psi^{(r)}(\cdot)||_p \le C|h|^\alpha,$$

где C – положительная постоянная.

Определение 2. Будем говорить, что 2π–периодическая неотрицательная функция $f(\lambda)$ удовлетворяет **условию Маккенхаупта** (или имеет нули типа Макенхаупта), если (см. [16]) :

$$\sup \frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda)\, d\lambda \int_J \frac{1}{f(\lambda)}\, d\lambda < \infty, \tag{6}$$

где супремум берется по всем интервалам $J \subset [-\pi,\pi]$ и $|J|$– длина интервала J. Наконец, класс 2π–периодических неотрицательных функций, удовлетворяющих условию Маккенхаупта (6), будем обозначать через $\mathcal{A}_2$.

В §4 мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. **Предположим, что с.п.** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условиям**

a) $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$;

b) $\log f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1/2$.

Тогда $\delta_T = O(T^{-2\alpha})$ **при** $T \to \infty$.

Теорема 2. **Предположим, что с.п.** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условиям**

a) $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$;

b) $\log f(\lambda) \in \mathbf{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1/2$.

Тогда $\delta_T = o(T^{-2\alpha})$ **при** $T \to \infty$.

Теорема 3. **Предположим, что с.п.** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условию** $\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$. **Тогда** $\delta_T = O(T^{-2/p})$ **при** $T \to \infty$.

Теорема 4 относится к случаю

$$f(\lambda) = |Q_m(e^{i\lambda})|^2 h(\lambda), \tag{7}$$

где $Q_m(z)$ — многочлен степени m и $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$.

Теорема 4. **Предположим, что с.п.** $f(\lambda)$ **имеет вид (7), где** $Q_m(z)$, $(|Q_m(0)| = 1)$ — **многочлен степени** m **с корнями на единичной окружности** $|z| = 1$. **Тогда имеют место следующие утверждения :**

a) **Если** $h(\lambda) \in \ calA_2$ **и** $\log h(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1/2$, **то**

$$\delta_T = O(T^{-2\alpha}) \qquad \text{при} \quad T \to \infty; \tag{8}$$

b) **Если** $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ **и** $\log h(\lambda) \in \mathbf{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1/2$, **то**

$$\delta_T = o(T^{-2\alpha}) \qquad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{9}$$

c) **Если** $h(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$, **то**

$$\delta_T = O(T^{-2/p}) \qquad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{10}$$

§3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пусть $f(\lambda)$ - весовая функция, т.е. $f(\lambda)$ - неотрицательная 2π-периодическая функция класса $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$. Обозначим через $D_n(f)$ соответствуюший теплипев определитель :

$$D_n(f) = \det \|c_{k-j}\|_{k,j=\overline{0,n}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} f(\lambda)\,d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

суть коэффициенты Фурье функции $f(\lambda)$.

В этом параграфе мы изучаем асимптотическое поведение $D_n(f)$ при $n \to \infty$. В 1920 Г. Сеге доказал свою "слабую" теорему (см. [13], р. 89), утверждающую, что из условия $\log f \in \mathbf{L}_1$ следует

$$\lim_{n\to\infty} [D_n(f)]^{1/(n+1)} = G(f), \tag{12}$$

где

$$G(f) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\,d\lambda\right\} \tag{13}$$

– геометрическое среднее функции $f(\lambda)$. Заметим, что соотношение (12) можно записать в виде

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\,d\lambda = o(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

В 1952 г. Сеге уточнил этот результат (см. [13], стр. 101) доказав, что для строго положительных функций $f(\lambda)$, производные f' которых удовлетворяют условию Липшица с произвольным показателем α $(0 < \alpha \le 1)$, имеет место асимптотическое соотношение (при $n \to \infty$)

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k|d_k|^2 + o(1), \tag{15}$$

где

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} \log f(\lambda)\,d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

суть коэффициенты Фурье функции $\log f(\lambda)$.

Асимптотическое соотношение (15) рассматривали А. Девинатц [5], И. Хиршман [15], Я. Л. Геронимус [7], И. А. Ибрагимов [18] и другие. Целью их исследований было доказательство (15) при менее ограничительных условиях чем условия Г. Сеге. В частности, И. А. Ибрагимов доказал следующую теорему (см. [18], [20]).

Теорема 5 (И. А. Ибрагимов). Пусть $f(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$ и $\log f(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$. Тогда асимптотическое соотношение (15) имеет место, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} k|d_k|^2 < \infty. \tag{16}$$

Отметим (см. [24]), что условие (16) эквивалентно следующему :

$$\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_2(1/2). \tag{17}$$

Из теоремы Ибрагимова и формулы (15) получаем, что каждое из условий (16) и (17) достаточно для

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)\,d\lambda\right] < \infty.$$

Замечание 1. Из результатов И. А. Ибрагимова [19] вытекает, что весовая функция $f(\lambda)$, удовлетворяющая (16) (следовательно и (17)), необходимо удовлетворяет (6).

В этом параграфе для заданного α $(0 < \alpha < 1)$ мы опишем классы функций, для которых в "слабой" теореме Г. Сеге остаточный член (при $n \to \infty$) имеет порядок $O(n^\alpha)$ или $o(n^\alpha)$, т.е.

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} O(n^\alpha) \\ o(n^\alpha) \end{cases} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 6. **Предположим, что весовая функция** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условиям a) и b) Теоремы 1. Тогда при** $n \to \infty$

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)\,d\lambda = O(n^{1-2\alpha}). \tag{18}$$

Теорема 7. **Предположим, что весовая функция** $f(\lambda)$ **удовлетворяет условиям a) и b) Теоремы 1. Тогда при** $n \to \infty$

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)\,d\lambda = o(n^{1-2\alpha}). \tag{19}$$

Теорема 8. **Предположим, что весовая функция** $f(\lambda)$ **такова, что** $\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$. **Тогда при** $n \to \infty$

$$\log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)\,d\lambda = O(n^{1-2/p}). \tag{20}$$

Теперь рассмотрим весовые функции $f(\lambda)$ вида (7). В нижеследующей теореме полагаем

$$R_n(f,h) = \log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log h(\lambda)\,d\lambda. \tag{21}$$

Теорема 9. **Если весовая функция $f(\lambda)$ имеет вид (7), где $Q_m(z)$, ($|Q_m(0)| = 1$) есть многочлен степени m с корнями на единичной окружности $|z| = 1$, то имеют место следующие утверждения :**

a) Если $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log h(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1/2$, то

$$R_n(f,h) = O(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{22}$$

b) Если $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log h(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1/2$, то

$$R_n(f,h) = o(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{23}$$

c) Если $h(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$, $p \geq 2$, то

$$R_n(f,h) = O(n^{1-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Для доказательства Теорем 6 – 9 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты. Пусть $\mathcal{H}^{2+}$ обозначает класс Харди в единичном круге, т.е., $\mathcal{H}^{2+}$ – множество аналитических функций $\varphi(z)$ внутри единичного круга $\{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\lambda})|^2 \, d\lambda < \infty.$$

Заметим (см., например, [20], стр. 52–53), что класс $\mathcal{H}^{2+}$ можно отождествить с замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$. Это подпространство, которое мы также будем обозначать через $\mathcal{H}^{2+}$, состоит из функций $\varphi(e^{i\lambda}) \in \mathbf{L}_2[-\pi,\pi]$, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda}) e^{ik\lambda} \, d\lambda = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Хорошо известно (см., например, [20], стр. 54), что условие $\log f \in \mathbf{L}_1[-\pi,\pi]$ необходимо и достаточно для представления

$$f(\lambda) = |g(f, e^{i\lambda})|^2 \quad \text{для почти всех } \lambda \in [-\pi,\pi], \tag{25}$$

где $g(f,z)$ — внешняя функция из класса Харди $\mathcal{H}^{2+}$. В частности, можно взять функцию Сеге (см. [6], стр. 210) :

$$g(z) = g(f,z) = exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log f(\lambda)\, d\lambda\right\}, \quad z = e^{i\lambda}. \tag{26}$$

Заметим, что функция $g(z)$ отлична от нуля в единичном круге $\{z : |z| < 1\}$, причем значение $g(0)$ вещественно и положительно.

Лемма 1. Имеют место следующие утверждения :

1) **Если** $\log f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, **то**

$$\inf_{Q \in \mathcal{T}_n} \left\| \frac{\bar{g}}{g} - Q \right\|_2^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{27}$$

2) **Если** $\log f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1$, **то**

$$\inf_{Q \in \mathcal{T}_n} \left\| \frac{\bar{g}}{g} - Q \right\|_2^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{28}$$

где $\mathcal{T}_n$ **— множество тригонометрических многочленов степени не выше** n **и** $g(z) = g(f; z)$ **— функция Сеге, определенная формулой (26).**

Доказательство : Докажем утверждение 1). Известно (см. [24], Теорема 4), что если 2π–периодическая функция $f(\lambda)$ принадлежит классу $\mathbf{H}_p(\alpha)$, $2 \leq p < \infty$, то при $n \to \infty$ ее коэффициенты Фурье $\hat{f}_k$ необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{|k| \geq n} |\hat{f}_k|^2 = O(n^{-2\alpha}).$$

Следовательно, для $p \geq 2$ из предположения $\log f(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$ следует

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{29}$$

где d_k суть коэффициенты Фурье функции $\log f(\lambda)$. Обозначим через $E_2(k; h)$ наилучшее приближение функции $h(\lambda) \in \mathbf{L}_2$ тригонометрическими многочленами степени не выше k. Учитывая равенство (см., например, [7])

$$E_2^2(n; \log f) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|^2,$$

из (29) получаем

$$E_2^2(n; \log f) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{30}$$

Из (30), используя неравенство (см. [26], стр. 344)

$$\omega_2(\log f; 1/n) \leq C \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_2(k; \log f),$$

где $\omega_2(\log f; 1/n)$ — модуль непрерывности функции $\log f(\lambda)$ в пространстве $\mathbf{L}_2$, получаем

$$\omega_2^2(\log f; 1/n) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Принимая во внимание, что модули коэффициентов Фурье функций $\log f$ и $\widetilde{\log f}$ попарно совпадают ($\widetilde{\log f}$ обозначает функцию, гармонически сопряженную с функцией $\log f$), получаем

$$\omega_2(\log f; 1/n) = \omega_2(\widetilde{\log f}, 1/n). \tag{32}$$

Поэтому из (31) и (32) имеем

$$\omega_2^2(\widetilde{\log f}; 1/n) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{33}$$

Далее, из (25) имеем $g = \exp\{\frac{1}{2}(\log f + i\widetilde{\log f})\}$. Следовательно

$$\frac{\bar{g}}{g} = \exp\left\{-i\widetilde{\log f}\right\}. \tag{34}$$

Из соотношений $|e^u - 1| < |u|e^{|u|}$ и $|\bar{g}g^{-1}| = 1$ получаем

$$\left|\exp\left\{-i\widetilde{\log f}(\lambda+\delta)\right\} - \exp\left\{-i\widetilde{\log f}(\lambda)\right\}\right| =$$
$$= \left|\exp\left\{-i\left[\widetilde{\log f}(\lambda+\delta) - \widetilde{\log f}(\lambda)\right]\right\} - 1\right| \le \left|\widetilde{\log f}(\lambda+\delta) - \widetilde{\log f}(\lambda)\right|.$$

Следовательно, из (34) имеем

$$\omega_2\left(\frac{\bar{g}}{g}; \delta\right) = \omega_2\left(e^{-i\widetilde{\log f}}\right) \le \omega_2\left(\widetilde{\log f}; \delta\right). \tag{35}$$

Используя (32), (33), (35) и неравенство (см. [26], стр. 338) $E_2(n; \log f) \le C\,\omega_2(\log f; 1/n)$, получаем

$$E_2^2\left(n; \frac{\bar{g}}{g}\right) = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) можно доказать аналогичным образом, используя характеризационную теорему класса $\mathrm{lip}(\alpha, 2)$ (см. [1], стр. 222), согласно которой условие $\log f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$ эквивалентно следующему :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где d_k — коэффициенты Фурье функции $\log f(\lambda)$. Лемма 1 доказана.

Напомним понятие ортогональных многочленов на единичной окружности, связанных с весовой функцией (см. [6], [13]). Каждой неотрицательной 2π–периодической функции $f(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$ соответствует система многочленов $\varphi_n(z) = \varphi_n(f; z)$, $n = 0, 1, \ldots$, которые ортогональны на единичной окружности $|z| = 1$ относительно веса $f(\lambda)$ и однозначно определяются следующими условиями :

(i) $\varphi_n(z) = \kappa_n(f)z^n + \cdots + l_n(f)$ — многочлен степени n, в котором коэффициент $\kappa_n = \kappa_n(f)$ вещественен и положителен;

(ii) для произвольных неотрицательных целых k и j

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(z)\overline{\varphi_j(z)}f(\lambda)d\lambda = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{для } k = j, \\ 0, & \text{для } k \neq j, \end{cases} \qquad z = e^{i\lambda}.$$

Отметим, что каждый многочлен $\varphi_n(z)$ явно выражается через коэффициенты Фурье функции $f(\lambda)$ (см. [13], стр. 54). Более того, коэффициент $k_n(f)$ при z^n многочлена $\varphi_n(z)$ выражается через теплицев определитель $D_n(f)$, порожденный функцией $f(\lambda)$. Имеет место следующее равенство (см. [13], стр. 54) :

$$\kappa_n^2(f) = \frac{D_{n-1}(f)}{D_n(f)} = \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(0)|^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{36}$$

Доказательство следующей леммы можно найти в [13], стр. 70 — 73.

Лемма 2. **Пусть $f(\lambda)$ – неотрицательная, 2π-периодическая функция из $L_1[-\pi, \pi]$, и пусть $\log f(\lambda) \in L_1[-\pi, \pi]$. Тогда**

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n(f) = [G(f)]^{-1/2} = \frac{1}{g(f, 0)}, \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(z) = \frac{1}{g(f, 0)} \cdot \frac{1}{g(f, z)}, \quad |z| < 1, \tag{38}$$

где $g(f, z)$ и $G(f)$ — функция Сеге и геометрическое среднее функции $f(\lambda)$, определенные по (13) и (26) соответственно.

Лемма 3. **Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — система ортогональных многочленов относительно весовой функции $f(\lambda)$. Имеем**

1) Если $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log f(\lambda) \in H_p(\alpha)$, $p \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{39}$$

2) Если $f(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log f(\lambda) \in \mathrm{lip}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{40}$$

Для доказательства Леммы 3 мы нуждаемся в понятии минимального угла между подпространствами гильбертова пространства.

Определение 3. Минимальный угол $u(H_1, H_2) \in [0, \pi/2]$ между подпространствами H_1 и H_2 гильбертова пространства H определяется равенством

$$\cos u(H_1, H_2) = \sup_{\psi_1 \in H_1, \psi_2 \in H_2} \frac{|(\psi_1, \psi_2)|}{||\psi_1|| \cdot ||\psi_2||},$$

где $(\cdot, \cdot)$ и $||\cdot||$ - скалярное произведение и норма в пространстве H соответственно.

Обозначим через $\mathbf{L}_2(f)$ весовое пространство

$$\mathbf{L}_2(f) = \left\{\varphi(\lambda) : \ ||\varphi||_f = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda\right)^{1/2} < \infty\right\}.$$

Пусть $H_a^b(f)$, $-\infty \le a < b \le \infty$ — подпространство пространства $\mathbf{L}_2(f)$, порожденное функциями $\{e^{i\lambda t}, a \le t \le b\}$, т.е. $H_a^b(f) = \overline{\mathrm{sp}}\{e^{i\lambda t} : a \le t \le b\}_f$, где $\overline{\mathrm{sp}}\{\cdot\}_f$ обозначает замыкание в $\mathbf{L}_2(f)$ линейной оболочки функций, находящихся в скобках. Следующий важный результат можно найти в [23], стр. 254.

Лемма 4. Следующие утверждения эквивалентны :

а) Весовая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (6) ;

b) Минимальный угол $u_f(H_{-\infty}^0(f), H_1^\infty(f))$ между подпространствами $H_{-\infty}^0(f)$ и $H_1^\infty(f)$ в пространстве $\mathbf{L}_2(f)$ положителен, т.е.

$$\rho_1(f) = \cos u_f(H_{-\infty}^0(f), H_1^\infty(f)) < 1. \tag{41}$$

Доказательство Леммы 3 : Докажем утверждение 1). Пусть $g_1(z) = g_1(1/f; z)$ — функция Сеге, соответствующая $1/f(\lambda)$. Из утверждения 1) Леммы 1 имеем

$$\left\|\frac{\bar g_1}{g_1} - Q_n\right\|_2^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{42}$$

где Q_n — многочлен наилучшего приближения функции $\bar g_1(\lambda) g_1^{-1}(\lambda)$ в метрике пространства $\mathbf{L}_2$. Запишем функцию $g_1 Q_n$ в виде $A_n + B_n$, где B_n — многочлен по неположительным степеням функции $e^{i\lambda}$, $B_n \in H_{-\infty}^0(f)$ и $A_k \in H_1^\infty(f)$. В силу (25) имеем

$$\left\|\frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n\right\|_2^2 = ||(\overline{g}_1 - B_n) - A_n||_f^2 \ge ||(\overline{g}_1 - B_n)||_f^2 + ||A_n||_f^2 - 2|(\overline{g}_1 - B_n, A_n)_f|. \tag{43}$$

Используя определение минимального угла, получаем

$$2|(\overline{g}_1 - B_n, A_n)_f| \le 2\rho_1(f)||(\overline{g}_1 - B_n)||_f^2 ||A_n||_f^2 \le \rho_1(f)\left(||(\overline{g}_1 - B_n)||_f^2 + ||A_n||_f^2\right).$$

Так как функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (6), то из Леммы 4 имеем $\rho_1(f) < 1$. Следовательно, в силу (43)

$$\left\| \frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2 \geq (1 - \rho_1(f)) \|\overline{g}_1 - B_n\|_f^2.$$

Таким образом

$$\inf_{P_k \in T_n} \|g_1 - P_k\|_f^2 \leq \frac{1}{1 - \rho_1(f)} \left\| \frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2, \tag{44}$$

где T_n — множество тригонометрических многочленов P_k степени $k \leq n$. Из (38) следует, что коэффициенты Фурье функции $g_1(\lambda)$ по ортонормальной системе $\{\varphi_\nu(z)\}$ суть $\overline{\varphi_\nu(0)}(\overline{g_1(0)})^{-1}$. Поэтому

$$\inf_{P_k \in T_n} \|g_1 - P_k\|_f^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 |g_1(0)|^{-2}. \tag{45}$$

Из (44) и (45) получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = \frac{1}{|g_1(0)|^2} \inf_{P_k \in T_n} \|g - P_k\|_f^2 \leq \frac{1}{(1 - \rho_1(f))|g(0)|^2} \left\| \frac{\overline{g}_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2. \tag{46}$$

Наконец, из (42) и (46) имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тем самым утверждение 1) доказано. Утверждение 2) доказывается аналогичным образом, оно следует из утверждения 2) Леммы 1 и (46). Лемма 3 доказана. Доказательство следующей леммы можно найти в [3], стр. 50.

Лемма 5. Для последовательности неотрицательных чисел a_k и $\delta > \beta > 0$ соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} k^\delta a_k = O(n^\beta) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = O(n^{\beta-\delta}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство Теоремы 6 : Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — система ортогональных многочленов, соответствующая весовой функции $f(\lambda)$. Принимая во внимание, что $D_0(f) = |\varphi_k(0)|^{-2}$ (см. [13], стр. 54), из (36) получим

$$\begin{aligned} \log D_n(f) &= \log \prod_{k=1}^{n} \frac{D_k(f)}{D_{k-1}(f)} D_0(f) = -\sum_{k=1}^{n} \log \sum_{\nu=0}^{k} |\varphi_\nu(0)|^2 - \log|\varphi_0(0)|^2 = \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \log \sum_{\nu=0}^{k} |\varphi_\nu(0)|^2. \end{aligned} \tag{47}$$

Из (37) и (38)

$$G(f)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2\right)^{-1}. \tag{48}$$

Следовательно

$$(n+1)\log G(f)=-(n+1)\log\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2=-\sum_{k=0}^{n}\log\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2. \tag{49}$$

Из (47) и (49) получаем

$$\log D_n(f)-(n+1)\log G(f)=-\sum_{k=0}^{n}\log\sum_{\nu=0}^{k}|\varphi_\nu(0)|^2+\sum_{k=0}^{n}\log\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\log\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum_{\nu=0}^{k}|\varphi_\nu(0)|^2}=-\sum_{k=0}^{n}\log\left(1-\frac{\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}{\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2}\right).$$

Следовательно

$$\log D_n(f)-(n+1)\log G(f)=-\sum_{k=0}^{n}\log(1-\beta), \tag{50}$$

где

$$\beta=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2\right)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2=G(f)\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2<1.$$

Для $0<\beta\le m<1$ существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что $C_1\beta\le-\log(1-\beta)\le C_2\beta$. Поэтому из (50) находим

$$\log D_n(f)-(n+1)\log G(f)\asymp G(f)\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2. \tag{51}$$

Теперь покажем, что в условиях теоремы

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2=O(n^{1-2\alpha})\quad \text{при}\quad n\to\infty. \tag{52}$$

Из утверждения 1) Леммы 3 имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(0)|^2=O(n^{-2\alpha})\quad \text{при}\quad n\to\infty. \tag{53}$$

Далее, полагая $a_k=|\varphi_k(0)|^2$, $\delta=1$ и $\beta=1-2\alpha$ получаем, что все условия Леммы 5 выполнены (из условия $0<\alpha<1/2$ следует $\delta>\beta>0$). Следовательно, согласно этой лемме соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}k|\varphi_k(0)|^2=O(n^{1-2\alpha})\quad \text{при}\quad n\to\infty \tag{54}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{55}$$

Нетрудно проверить также и следующее равенство :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 = \sum_{k=1}^{n} k|\varphi_k(0)|^2 + (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2. \tag{56}$$

Таким образом, из (54), (55) и (56) вытекает (52). Наконец, из (51) и (52) получаем (18). Теорема 6 доказана.

Доказательство Теоремы 7 : В силу (19) и (51) достаточно доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |\varphi_\nu(0)|^2 = o(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{57}$$

С этой целью заметим, что утверждение Леммы 5 остается в силе, если заменить O на o. Следовательно, полагая $a_k = |\varphi_k(0)|^2$, $\delta = 1$, $\beta = 1 - 2\alpha$ и используя эту новую версию Леммы 5, приходим к заключению, что соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} k|\varphi_k(0)|^2 = o(n^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{58}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = o(n^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{59}$$

Следовательно, из (56), (58) и (59) вытекает (57). Теорема 7 доказана.

Для доказательства Теоремы 8 нам потребуется одна теорема Д. Сарасона, которая характеризует класс функций исчезающей средней осцилляции (VMO) (см. [25]). Для интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $\psi(\lambda)$ и для интервала $J \subset [-\pi, \pi]$ положим

$$\psi_J = \frac{1}{|J|} \int_J \psi(\lambda)\, d\lambda,$$

где $|J|$ — длина интервала J. Пусть далее

$$M_a(\psi) = \sup_{|J| \le a} \frac{1}{|J|} \int_J |\psi(\lambda) - \psi_J|\, d\lambda.$$

Определение 4. Класс (VMO) — это пространство тех функций $\psi(\lambda) \in \mathbf{L}_1[-\pi, \pi]$, для которых $M_1(\psi) < \infty$ и $M_0(\psi) = \lim_{a \to 0+} M_a(\psi) = 0$.

Для неотрицательной функции $h(\lambda)$, определенной на $[-\pi,\pi]$, и числа $a > 0$ положим

$$N_a(h) = \sup_{|J|\le a} \frac{1}{|J|^2} \int_J h(\lambda)\,d\lambda \int_J \frac{1}{h(\lambda)}\,d\lambda. \tag{60}$$

Положим $N_0(h) \equiv \lim_{a\to 0} N_a(h)$. Очевидно, что $N_0(h)$ конечна, если и $h(\lambda)$ и $h^{-1}(\lambda)$ локально интегрируемы. По неравенству Шварца имеем $N_0(h) \ge 1$. Следующая теорема характеризует класс VMO в терминах величины $N_0(h)$ (см. [25], стр. 395).

Теорема 10 (Д. Сарасон). Пусть $\psi(\lambda) \in L_1[-\pi,\pi]$ такая, что $M_1(\psi) < \infty$. Тогда для того чтобы $\psi(\lambda)$ принадлежала классу VMO необходимо и достаточно, чтобы $N_0(e^{\psi}) = 1$.

Доказательство Теоремы 8 : Сперва докажем, что косинус минимального угла в пространстве $\mathbf{L}_2(f)$ между подпространствами $H^0_{-\infty}(f)$ и $H^{\infty}_1(f)$ положителен, т.е.

$$\rho_1(f) = \cos u_f(H^0_{-\infty}(f), H^{\infty}_1(f)) < 1.$$

Известно (см. [4], стр. 210), что $\mathbf{W}_p(1/p) \subset VMO$. Следовательно, в условиях теоремы имеем $\log f(\lambda) \in VMO$. Применяя теорему Сарасона для функции $\psi(\lambda) = \log f(\lambda)$ получим $N_0(f) = 1$. Поэтому, согласно (60) имеем

$$\frac{1}{|J|^2} \int_J f(\lambda)\,d\lambda \int_J \frac{1}{f(\lambda)}\,d\lambda < \infty.$$

Таким образом, функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию Маккенхаупта (6). Отсюда, в силу Леммы 4 получаем $\rho_1(f) < 1$.

Теперь покажем, что из условия $\log f(\lambda) \in \mathbf{W}_p(1/p)$ $(p \ge 2)$ следует соотношение

$$\left\| \frac{\bar g_1}{g_1} - Q_n \right\|_2^2 = O(n^{-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{61}$$

где $g_1(\lambda)$ – функция Сеге, соответствующая $1/f(\lambda)$, а Q_n – многочлен наилучшего приближения функции $\bar g_1(\lambda) g_1^{-1}(\lambda)$ в метрике пространства $\mathbf{L}_2$. Так как функция $\log f(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathbf{W}_p(1/p)$, $p \ge 2$, по Теореме 7 из [24] ее коэффициенты Фурье d_k необходимо удовлетворяют условию

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2/p} |d_k|^2 < \infty.$$

Следовательно

$$\sum_{|k|\ge n} |d_k|^2 = O(n^{-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{62}$$

Действуя как и в доказательстве утверждения 1) Леммы 1, из (62) получаем (61). Далее, рассуждая как и в доказательстве утверждения 1) Леммы 3, из (61) и $\rho_1(f) < 1$, получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(n^{-2/p}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оставшаяся часть доказательства повторяет доказательство Теоремы 6. Теорема 8 доказана.

Для доказательства Теоремы 9 нам понадобится следующее утверждение, вытекающее из одного результата А. Ленарда [22] (см., также [9]).

Лемма 6. Пусть функции $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ связаны соотношением (7), где $Q_m(z)$ ($|Q_m(0)| = 1$) — тригонометрический многочлен степени m с корнями на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда имеет место соотношение

$$\log D_n(f) - \log D_{n+m}(h) = O(\log n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{63}$$

где $D_n(f)$ и $D_{n+m}(h)$ — теплицевы определители, порожденные функциями $f(\lambda)$ и $h(\lambda)$ соответственно.

Доказательство Теоремы 9 : Покажем, что утверждения a) – c) следуют из Теорем 6 – 8 и Леммы 6. Действительно, из (21) имеем

$$R_n(f,h) = \log D_n(f) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \left[\log D_{n+m}(h) - \frac{n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\lambda)\, d\lambda\right] + [\log D_n(f) - \log D_{n+m}(h)]. \tag{64}$$

По Лемме 6 второе слагаемое в правой части (64) при $n \to \infty$ имеет порядок $O(\log n)$. Следовательно, утверждения a) – c) вытекают из (64) и Теорем 6 – 8 соответственно. Теорема 9 доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 – 4

Доказательство Теоремы 1 : Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ ($k = 0, 1, \ldots$) — система ортогональных многочленов на единичной окружности, соответствующих как и в §3 спектральной плотности $f(\lambda)$. Известно (см. [13], стр. 227), что

$$\sigma_T^2 = \frac{D_T(f)}{D_{T-1}(f)} = \left[\sum_{k=0}^{T} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1}, \tag{65}$$

где $D_T(f)$ – теплицев определитель, порожденный с.п. $f(\lambda)$. Из (2), (13) и (48) следует, что

$$\sigma^2 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1}. \tag{66}$$

Согласно (3), (65) и (66) получаем

$$\delta_T = \left[\sum_{k=0}^{T} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1} - \left[\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2\right]^{-1} = \sigma^2\sigma_T^2 \sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 \le \sigma_0^4 \sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2, \tag{67}$$

где $\sigma_0 = |\varphi_0(0)|^{-2}$. Используя утверждение 1) Леммы 3 находим

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(T^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{68}$$

Таким образом, утверждение Теоремы 1 следует из (67) и (68). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2 : Из утверждения 2) Леммы 3 имеем

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = o(T^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{69}$$

Следовательно, требуемое утверждение следует из (67) и (69). Теорема 2 доказана.

Доказательство Теоремы 3 : Рассуждая как и в доказательстве Теоремы 8 получаем

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(0)|^2 = O(T^{-2/p}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{70}$$

Следовательно, требуемое утверждение вытекает из (67) и (70). Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4 : Докажем утверждение а). В силу (67), достаточно показать, что

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} |\varphi_k(f;0)|^2 = O(T^{-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{71}$$

Так как $f(\lambda)$ имеет вид (7) с $h(\lambda) \in \mathcal{A}_2$ и $\log h(\lambda) \in \mathbf{H}_p(\alpha)$, $p \ge 2$, $0 < \alpha < 1/2$, то применяя утверждение а) Теоремы 9, с учетом (21) получаем

$$\log D_T(f) - (T+1)\log G(h) = O(T^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{72}$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|Q_m(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda = 0,$$

из (7) и (72) получаем

$$\log D_T(f) - (T+1)\log G(f) = O(T^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T\to\infty. \tag{73}$$

Следовательно, из (51) и (73) вытекает

$$\sum_{k=0}^{T}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(f;0)|^2 = O(T^{1-2\alpha}) \quad \text{при} \quad T\to\infty. \tag{74}$$

Так как последовательность $a_T = \sum_{k=T+1}^{\infty}|\varphi_k(f;0)|^2$ удовлетворяет условиям $a_T > 0$ и $a_T > a_{T+1}$, получаем

$$\sum_{k=T+1}^{\infty}|\varphi_\nu(f;0)|^2 \le \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|\varphi_\nu(f;0)|^2. \tag{75}$$

Из (74) и (75) следует (71). Этим завершается доказательство утверждения a).

Утверждения b) и c) можно доказать аналогично. Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. Let $X(t)$, $t = 0, \pm1, \ldots$, be a wide sense stationary random sequence with spectral density function $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$. Let σ_T^2 be the mean square prediction error for the variable $X(0)$ by linear forms in the variables $X(-T),\ldots,X(-1)$, and let $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$. The paper investigates the rate of decrease to zero of $\delta_T = \sigma_T^2 - \sigma^2$ as $T\to\infty$, depending on the properties of spectral density function $f(\lambda)$. It is shown that for $0<\gamma<1/2$ and $T\to\infty$ the estimates $\delta_T = O(T^{-\gamma})$ or $\delta_T = o(T^{-\gamma})$ are possible for sufficiently broad classes of spectral densities under certain restrictions on the types of their zeros. The paper also contains a related study of the asymptotic behavior of Toeplitz determinants $D_n(f)$ generated by the function $f(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, Наука, Москва, 1965.
2. G. Baxter, "An asymptotic result for the finite predictor", Math. Scand., vol. 10, pp. 137 – 144, 1962.
3. R. P. Boas, Integrability Theorems for Trigonometric Transforms. Springer–Verlag, New York, 1967.
4. N. Brezis, L. Nirenberg, "Degree theory and BMO ; Part I : Compact manifolds without boundaries", Selecta Mathematica, New Series, vol. 1, no. 2, pp. 197 – 263, 1995.
5. A. Devinatz, "The strong Szegö theorem", Illinois J. Math., vol. 11, pp. 160 – 175, 1967.
6. G. Freud, Orthogonal Polynomials, Pergamon Press, New York, 1971.

7. Я. Л. Геронимус, "Об одной задаче Г. Сеге, М. Каца, Г. Бакстера и Дж. Гиршмана", Изв. АН СССР, сер. Математика, том 31, стр. 289 – 304, 1967.
8. М. С. Гиновян, "Асимптотическое поведение теплицева определителя", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 97, стр. 22 – 31, 1980.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотическое поведение логарифма функции правдоподобия при наличии полиномиальных нулей спектральной функции", Записки Научных Семинаров ЛОМИ, том 108, стр. 5 – 21, 1981.
10. M. S. Ginovian, "On asymptotic behavior of Toeplitz determinants", in Theory of Functions and Application (Collection of Works Dedicated to the Memory of M. M. Djrbashian), pp. 57 – 60, Yerevan, 1995.
11. Б. Л. Голинский, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и ее Примен., том 19, № 4, стр. 724 – 739, 1974.
12. Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, "О предельной теореме Г. Сеге", Изв. АН СССР, сер. Математика, том 35, стр. 408 – 427, 1971.
13. У. Гренандер, Г. Сеге, Теплицевы Формы и их Применения, Иностр. Лит., Москва, 1961.
14. U. Grenander, M. Rosenblatt, "An extension of a theorem of G. Szegö and its application to the study of stochastic processes", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 76, pp. 112 – 126, 1954.
15. I. I. Hirschman, "The strong Szegö limit theorem for Toeplitz determinants", Amer. J. Math., vol. 88, pp. 577 – 614, 1966.
16. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176. pp. 227 – 251, 1973.
17. И. А. Ибрагимов, "Об асимптотическом поведении ошибки прогноза", Теория Вероятн. и ее Примен., том 9, № 4, стр. 695 – 703, 1964.
18. И. А. Ибрагимов, "Об одной теореме Г. Сеге", Мат. Заметки, том 3, № 6, стр. 693 – 703. 1968.
19. И. А. Ибрагимов, "Об условии информационной регулярности для стационарных гауссовских процессов", Проблемы Передачи Информации, том 5, № 3, стр. 8 – 21, 1969.
20. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. Гауссовские Случайные Процессы, Наука, Москва, 1970.
21. И. А. Ибрагимов, В. Н. Солев, "Асимптотическое поведение ошибки прогноза стационарной последовательности со спектральной плотностью специального вида", Теория Вероятн. и ее Примен., том 13. № 4, стр. 746 – 750, 1968.
22. A. Lenard, "Some remarks on large Toeplitz determinants", Pacific Journal of Math., vol. 42, no. 1, pp. 137 – 145, 1972.
23. Н. К. Никольский, Лекции об Операторе Сдвига, Наука, Москва, 1980.
24. М. К. Потапов, "О коэффициентах Фурье", В сб. Исследов. по Совр. Проблемам Констр. Теории Функций. АН Аз.ССР, Баку, стр. 475 – 473, 1965.
25. D. Sarason, "Functions of vanishing mean oscillation", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 207, pp. 286 – 299, 1973.
26. А. Ф. Тиман, Теория Приближения Функций Действительного Переменного, Физ.Мат ГИЗ., Москва, 1960.

2 Декабря 1998

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : mamgin@instmath.sci.am

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ В МЕТРИКЕ L^p, $p > 2$

М. Г. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – конечная ортонормальная система ограниченных функций на $[0,1]$, и пусть для некоторого $p_0 > 2$, $\|\varphi_n\|_{L^{p_0}} \le const$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. В статье доказывается, что существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для любого $p \in [2, p_0]$ и $f(x) \in L^p(E)$ существует $g(x) \in L^1([0,1])$, совпадающая с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ на E в $L^p(E)$ и на $[0,1]$ в $L^1([0,1])$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1912 Н. Н. Лузин [1] доказал следующую теорему.

Теорема (Лузин). Для любой измеримой, почти всюду конечной функции $f(x)$, определенной на $[0,1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ и непрерывная функция $g(x)$ такая, что $g(x)$ совпадает с $f(x)$ на E.

Эта идея Лузина получила большое развитие в фундаментальных результатах, полученных Д. Е. Меньшовым в [2] и [3].

Теорема I (Меньшов). Пусть $f(x)$ – измеримая и почти всюду конечная функция на $[0, 2\pi]$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $g(x)$ такая, что $g(x)$ совпадает с $f(x)$ на некотором множестве E с $|E| > 2\pi - \varepsilon$ и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Теорема II (Меньшов). Пусть $f(x)$ – интегрируемая функция на $[0, 2\pi]$ и $Q \subset [0, 2\pi]$ – нигде не плотное множество. Тогда существует интегрируемая функция $g(x)$ такая, что $g(x) = f(x)$ на Q и ее ряд Фурье

по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Дальнейшие результаты в этом направлении получены А. Талаляном [4], К. Осколковым [5], Ф. Арутюняном [6], Р. Осиповым [7], Б. Кашиным и Г. Кошелевой [8], Ш. Хеладзе [9], А. Гулисашвили [10], Л. Гоголадзе и Т. Зеркидзе [11].

В работе [14] получен следующий результат : **для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $|E| > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^1([0, 2\pi])$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 2\pi])$, совпадающая с $f(x)$ на E и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится в метрике $L^1([0, 2\pi])$.**

Вопрос : выполняется ли этот результат для общих полных ортонормированных систем в пространстве L^p, $p \geq 1$? Отметим, что работы автора [12] – [14] содержат следующие результаты, справедливые для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных функций в $L^2([0, 1])$:

1. Существует подпоследовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел со следующими свойствами : a) для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^1([0, 1])$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 1])$, совпадающая с $f(x)$ на E и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^1([0, 1])$; b) последовательность соответствующих коэффициентов Фурье $\{c_k(g)\}$ принадлежит l_q для всех $q > 2$ и

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{m_k} c_n(g)\varphi_n(x) = g(x) \quad \text{почти всюду на} \quad [0, 1].$$

2. Для заданного $\varepsilon > 0$ и полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных функций в $L^2([0, 1])$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждого $p \in [1, 2)$ и для любой функции $f(x) \in L^p([0, 1])$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 1])$, совпадающая с $f(x)$ на E и ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^p(E)$ на E и в метрике $L^1([0, 1])$ на $[0, 1]$.

3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограничены. Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой непрерывной на E функции $f(x)$ существует функция $g(x) \in L^1([0, 1])$, совпадающая с $f(x)$ на E и ее ряд Фурье по системе

$\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится равномерно на E.

К. Казарян [15] доказал, что Теорема I не верна для класса равномерно ограниченных полных ортонормированных систем. Б. Кашин [16] доказал, что Теорема II не верна для общих полных ортонормированных систем. А. Талалян [17] доказал, что для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ и для любой $f(x) \in L^2([0,1])$ существует функция $g(x) \in L^2([0,1])$ и измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что $f(x) = g(x)$ на E и ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится почти всюду.

Отметим, что как в Теореме I Меньшова, так и в результате Талаляна [17] множество E зависит от функции $f(x)$, но в работах [12] - [14] и в настоящей статье множество E не зависит от функции $f(x)$.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. **Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$. Если для некоторого $p_0 > 2$**

$$||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq const, \quad n = 1, 2, ...,$$

то существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для любого $p \in [2, p_0]$ и $f(x) \in L^p(E)$ существует функция $g(x) \in L^1([0,1])$, $g(x) = f(x)$ на E такая, что на E ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится к $g(x)$ в $L^p(E)$ и на $[0,1]$ в $L^1([0,1])$.

Верен и двумерный аналог Теоремы 1.

Теорема 2. **Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$ и для некоторого $p_0 > 2$, $||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq const$, $n = 1, 2, ...$. Тогда существует перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел такая, что система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладает следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]^2$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждого $p \in [2, p_0]$ и для любой $f(x,y) \in L^p([0,1]^2)$ существует функция $g(x,y) \in L^1([0,1]^2)$, $g(x,y) = f(x,y)$ на E такая,**

что двойной ряд Фурье функции $g(x,y)$ по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x),\varphi_{\sigma(n)}(x)\}$ сходится к $g(x,y)$ на E в $L^p(E)$ и на $[0,1]^2$ в $L^1([0,1]^2)$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Олевский [17] установил, что существует непрерывная функция $f_0(x)$ такая, что для любой функции $f(x)$ с $\left|\{x\in[0,2\pi]:\ f(x)=f_0(x)\}\right|>0$ последовательность тригонометрических коэффициентов Фурье не принадлежит l_q при всех $q\in(0,2)$.

Ниже мы будем пользоватся неравенством Гарсия (см. [18], стр. 72)

$$\frac{1}{N!}\sum_{\sigma}\left[\max_{1\le n\le N}\left|\sum_{k=1}^{n}\chi_{\sigma(k)}\right|^p\right]^{1/p}\le A_p\left[\left|\sum_{k=1}^{N}\chi_k\right|+\left(\sum_{k=1}^{N}\chi_k^2\right)^{1/2}\right],\quad p\ge 1,\qquad(2.1)$$

где первое суммирование распространяется по всем возможным перестановкам σ натуральных чисел $1,...,N$, χ_k – произвольные действительные числа, $A_p>1$ зависят только от p.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЛЕММ

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$ и для некоторого $p_0>2$

$$||\varphi_n||_{L^{p_0}}\le B_{p_0}=const,\qquad n=1,2,...\qquad(3.1)$$

Тогда для любых $\varepsilon_0>0$, $N_0>1$ и $f(x)\in L^2([0,1])$ существуют измеримое множество $E\subset[0,1]$, функция $g(x)\in L^1([0,1])$, полином $Q(x)=\sum\limits_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x)$ и перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N_0,...,N$, удовлетворящие

1. $|E|>1-\varepsilon_0$,
2. $g(x)=f(x)$ для $x\in E$,
3. $\int_0^1|g(x)|\,dx\le 3\int_0^1|f(x)|\,dx$,
4. $\int_0^1|Q(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon_0$,
5. $\max\limits_{N_0\le n<N}\int_0^1\left|\sum\limits_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx\le 3\int_0^1|f(x)|\,dx$,
6. $\max\limits_{N_0\le n<N}\left(\int_E\left|\sum\limits_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\le 2\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{1/p}+\varepsilon_0,\ p\in[2,p_0]$.

Доказательство : Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x),\qquad(3.2)$$

где χ – индикаторная функция, Δ_ν – интервалы постоянства такие, что

$$32 A_{p_0} B_{p_0} |\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p_0} < \frac{\varepsilon_0^2}{2}, \tag{3.3}$$

$$\left(\int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} < \varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{4\nu_0}; \frac{1}{4A_{p_0}} \int_0^1 |f(x)|\, dx \right\}, \tag{3.4}$$

где A_{p_0} – постоянная из неравенства Гарсия (2.1). Положим

$$I_\nu(x) = \begin{cases} -\frac{2-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\gamma_\nu & \text{для} \quad x \in [0, \varepsilon_0/2], \\ \gamma_\nu & \text{для} \quad x \in [\varepsilon_0/2, 1], \\ I_\nu(x \pm k) & \text{для} \quad x \pm k \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.5}$$

Легко видеть, что существует натуральное число $s_1 > 2\nu_0$ такое, что

$$\left| \int_0^1 I_1(2^{s_1} x) \chi_{\Delta_1}(x) \varphi_n(x)\, dx \right| \le \frac{\varepsilon}{16\sqrt{N_0}}, \quad n = 1, \dots, N_0. \tag{3.6}$$

Положим

$$g_1(x) = I_1(2^{s_1} x) \chi_{\Delta_1}(x), \quad E_1 = \{x \in [0, 1] : g_1(x) = \gamma_1\}. \tag{3.7}$$

Из (3.3), (3.5) и (3.7) имеем $|E_1| > (1 - \varepsilon_0)|\Delta_1|$, $g_1(x) = 0$ вне Δ_1,

$$\int_0^1 |g_1(x)|\, dx < 2|\gamma_1| \cdot |\Delta_1|, \tag{3.8}$$

$$\left(\int_0^1 g_1^2(x)\, dx \right)^{1/2} < \frac{2}{\varepsilon_0} \sqrt{\gamma_1^2 |\Delta_1|} \le \frac{1}{8} \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Так как система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в $L^2([0, 1])$, то существует достаточно большое натуральное число N_1 такое, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) - g_1(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где

$$a_k^{(1)} = \int_0^1 \varphi_k(x) g_1(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (3.6) – (3.8) следует, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^{N_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) - g_1(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{4} \left[\sum_{k=1}^{N_0} |a_k^{(1)}|^2 \right]^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Согласно (3.8) для всех $m \in [N_0, N_1]$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^{m} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \right| dx \le \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \right| dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N_0-1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \right| dx \le$$

$$\leq 2\left[\int_0^1 g_1^2(x)\,dx\right]^{1/2} < \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{3.10}$$

Теперь предположим, что числа $s_1 < \cdots < s_{\nu-1}$, $N_1 < \cdots < N_{\nu-1}$, функции $g_k(x)$, множества E_k и полиномы $Q_k(x)$, $k = 1, ..., \nu - 1$ определены. Выберем натуральные числа s_ν и N_ν настолько большими, чтобы

$$\left|\int_0^1 I_\nu(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x)\varphi_n(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{16^\nu\sqrt{N_{\nu-1}}}, \quad n = 1, ..., N_{\nu-1},$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N_\nu} a_k^{(\nu)}\varphi_k(x) - g_\nu(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где

$$a_k^{(\nu)} = \int_0^1 \varphi_k(x)g_\nu(x)\,dx, \quad g_\nu(x) = I_\nu(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x). \tag{3.11}$$

Положим

$$E_\nu = \{x \in \Delta_\nu : \ g_\nu(x) = \gamma_\nu\}. \tag{3.12}$$

Рассуждая так же, как и при получении оценок (3.8) – (3.10), мы видим, что функция $g_\nu(x)$, множество E_ν и полином

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^{(\nu)}\varphi_k(x) \tag{3.13}$$

удовлетворяют следующим условиям :

$$|E_\nu| > (1 - \varepsilon_0/2)|\Delta_\nu|, \ g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{для } x \in E_\nu, \\ 0 & \text{для } x \notin \Delta_\nu, \end{cases} \ \int_0^1 |g_\nu(x)|\,dx < 2|\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu|, \tag{3.14}$$

$$\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\,dx < \varepsilon^2, \quad \int_0^1 \left|\sum_{k=N_{\nu-1}}^{m} a_k^{(\nu)}\varphi_k(x)\right| dx \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{3.15}$$

Положим

$$G_\nu = \{x \in [0,1] : |Q_\nu(x) - g_\nu(x)| < \varepsilon\}, \quad E = \left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} G_\nu\right). \tag{3.16}$$

В силу (3.15) и (3.16) имеем

$$|G_\nu| > 1 - \varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4\nu_0}. \tag{3.17}$$

Из (3.12), (3.14) – (3.17) следует, что $|E| > 1 - \varepsilon_0$. В силу (3.3), (3.5) и (3.11) для $\nu \in [1, \nu_0]$ имеем

$$\left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left|a_k^{(\nu)}\right|^2\right)^{1/2} \leq 2\left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\left(\int_0^1 |g_\nu(x)|^{p_0}\,dx\right)^{1/p_0} \leq 2\left(\frac{2}{\varepsilon_0}|\Delta_\nu|^{1/p_0}|\gamma_\nu|\right).$$

Последовательным применением неравенства Гарсия (2.1), для каждого числа $\nu \in [1, \nu_0]$ можно определить перестановку $\sigma_\nu(k)$, $k = N_{\nu-1}, \dots, N_\nu - 1$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, \dots, N_\nu - 1$ такую, что

$$\int_E \left[\max_{N_{\nu-1} \le n < N_\nu} \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \right| \right]^{p_0} dx \le$$

$$\le (A_{p_0})^{p_0} \int_E \left[\left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a^{(\nu)}_k \varphi_k(x) \right| + \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} [a^{(\nu)}_k \varphi_k(x)]^2 \right)^{1/2} \right]^{p_0} dx. \qquad (3.18)$$

Из (3.3), (3.4), (3.12) и (3.18) – (3.17), для $\nu \in [1, \nu_0]$ получим

$$\max_{N_{\nu-1} \le n < N_\nu} \left(\int_E \left| \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \le$$

$$\le A_{p_0} \left[\left(\int_E |Q_\nu(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} + \left(\int_E \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} [a^{(\nu)}_k \varphi_k(x)]^2 \right)^{p_0/2} dx \right)^{1/p_0} \right] \le$$

$$\le A_{p_0} \left[\left(\int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} + \left(\int_E |g_\nu(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \right] +$$

$$+ A_{p_0} \left[\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left(\int_0^1 [a^{(\nu)}_k \varphi_k(x)]^{p_0} \right)^{2/p_0} \right]^{1/2} \le$$

$$\le A_{p_0}\varepsilon + A_{p_0} \left[|\Delta_\nu|^{1/p_0} |\gamma_\nu| + B_{p_0} \left(\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \left| a^{(\nu)}_k \right|^2 \right)^{1/2} \right] \le \qquad (3.19)$$

$$\le A_{p_0}\varepsilon + \frac{4}{\varepsilon_0} A_{p_0} B_{p_0} |\Delta_\nu|^{1/p_0} |\gamma_\nu| < \varepsilon_0.$$

Теперь определим функцию $g(x)$, полином $Q(x)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N_0, \dots, N$:

$$g(x) = \psi(x) + [f(x) - \varphi(x)], \quad \text{где} \quad \psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x); \qquad (3.20)$$

$$Q = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \varphi_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x), \qquad (3.21)$$

где $N = N_{\nu_0}$, $a_k = a^{(\nu)}_k$ для $N_{\nu-1} \le k < N_\nu$, $1 \le \nu \le \nu_0$;

$$\sigma(k) = \sigma_\nu(k) \quad \text{для} \quad N_{\nu-1} \le k < N_\nu, \quad \nu = 1, \dots, \nu_0. \qquad (3.22)$$

Так как $\psi(x) = \varphi(x)$ на E (см. (3.2), (3.14) и (3.16)), то из (3.20) следует, что $g(x) = f(x)$ на E. Учитывая (3.4), (3.14), (3.15), (3.20) и (3.21), получим

$$\int_0^1 |g(x)|\, dx \le 3 \int_0^1 |f(x)|\, dx,$$

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)|\, dx \le \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\, dx + \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon_0.$$

Пусть $N_0 \le n < N$. Тогда для некоторого $\overline{\nu}$ имеем $N_{\overline{\nu}-1} \le n < N_{\overline{\nu}}$, и из (3.13), (3.21) и (3.22) получаем

$$\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} Q_\nu(x) + \sum_{k=N_{\overline{\nu}-1}}^{n} a_{\sigma(k)}^{(\overline{\nu})}\varphi_{\sigma(k)}(x). \qquad (3.23)$$

Отсюда и из (3.2), (3.4), (3.14), (3.15) следует

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx \le \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} \int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|\, dx + \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} \int_0^1 |g_\nu(x)|\, dx +$$
$$+ \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\overline{\nu}-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right| dx <$$
$$< \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|\, dx + 2\int_0^1 |\varphi(x)|\, dx + \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|\, dx < 3\int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

В силу (3.4), (3.14), (3.16), (3.19) и (3.23), для $p \in [2, p_0]$ получим

$$\left(\int_E \left| \sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \le \sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} \left(\int_E |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^p dx \right)^{1/p} +$$
$$+ \left(\int_E \left[\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x) \right]^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_E \left| \sum_{k=N_{\overline{\nu}-1}}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \le \varepsilon +$$
$$+ \left(\int_E |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} + \frac{\varepsilon_0}{2} \le 2\left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \varepsilon_0.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. **Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций в $L^2([0,1])$, и для некоторого $p_0 > 2$ имеем $\|\varphi_n\|_{L^{p_0}} \le B_{p_0}$ для всех $n \ge 1$. Тогда для любых интервалов $\Delta_1, \Delta_2 \subset [0,1]$ и любых чисел $\gamma \ne 0$, $\varepsilon > 0$, $\overline{N}_0 > 1$ существуют измеримое множество $E \subset T \equiv [0,1]^2$, функция $g(x,y) \in L^1(T)$, полином**

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{N} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $\overline{N}_0, ..., N$, удовлетворяющих следующим условиям :

1. $|E| > 1 - \varepsilon$,
2. $g(x,y) = \gamma\chi_\Delta(x,y)$ для $(x,y) \in E$,
3. $\iint\limits_T |g(x,y)|\, dxdy \le 9|\gamma| \cdot |\Delta|, \quad \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$,
4. $\iint\limits_T |Q(x,y) - g(x,y)|\, dxdy < \varepsilon$,
5. $$\max_{\overline{N}_0 \le \overline{k}, \overline{n} \le N} \iint\limits_T \left| \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy +$$
$$+ \sup_{\sqrt{2}\overline{N}_0 \le R \le \sqrt{2}N} \iint\limits_T \left| \sum_{2\overline{N}_0^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \le$$
$$\le 36|\gamma| \cdot |\Delta|,$$
6. $$\max_{\overline{N}_0 \le \overline{k}, \overline{n} \le N} \left(\iint\limits_E \left| \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} +$$
$$+ \sup_{\sqrt{2}\overline{N}_0 \le R \le \sqrt{2}N} \left(\iint\limits_E \left| \sum_{2\overline{N}_0^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le$$
$$\le 16|\gamma| \cdot |\Delta|, \quad p \in [2, p_0].$$

Доказательство : Применим Лемму 1 для $N_0 = \overline{N}_0$, $f(x) = \gamma\chi_{\Delta_1}(x)$, $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{6|\Delta_2|}$ и определим измеримое множество $E_1 \subset \Delta_1$, функцию $g_1(x)$, полином $Q_1(x) = \sum_{k=\overline{N}_0}^{N_1} a_k^{(1)}\varphi_k(x)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $\overline{N}_0, ..., N_1$, удовлетворяющие следующим условиям :

$$|E_1| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g_1(x) = \gamma\chi_{\Delta_1}(x) \quad \text{на} E_1, \tag{3.24}$$

$$\int_0^1 |g_1(x)|\, dx \le 3|\gamma| \cdot |\Delta_1|, \quad \int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{6|\Delta_2|}, \tag{3.25}$$

$$\max_{\overline{N}_0 \le n \le N_1} \int_0^1 \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{n} a_{\sigma_1(k)}^{(1)} \varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right| dx \le 3|\gamma| \cdot |\Delta_1|.$$

$$\max_{N_0 \le n \le N_1} \left(\int_{E_1} \left| \sum_{k=\overline{N}_0}^{n} a_{\sigma_1(k)}^{(1)} \varphi_{\sigma_1(k)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \le 2|\gamma| \cdot |\Delta_1|^{1/p}, \quad p \in [2, p_0]. \tag{3.26}$$

Положим $M_0 = 2(N_1^2+1)$ и вновь применим Лемму 1, для $N_0 = M_0$, $f(y) = \chi_{\Delta_2}(y)$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{6(|\gamma|\cdot|\Delta_1|+1)}$. Так мы определим измеримое множество $E_2 \subset [0,1]$, функцию $g_2(y)$, полином $Q_2(y) = \sum\limits_{n=M_0}^{M} a_n^{(2)}\varphi_n(y)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $M_0, \dots, M$, удовлетворяющих условиям

$$|E_2| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad g_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y) \quad \text{на } E_2, \tag{3.27}$$

$$\int_0^1 |g_2(y)|\, dy \le 3|\Delta_2|, \quad \int_0^1 |Q_2(y) - g_2(y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{6(|\gamma|\cdot|\Delta_1|+1)}, \tag{3.28}$$

$$\max_{M_0\le m\le M} \int_0^1 \left|\sum_{n=M_0}^{m} a_{\sigma_2(n)}^{(2)}\varphi_{\sigma_2(n)}(y)\right| dy \le 3|\Delta_2|,$$

$$\max_{M_0\le m\le M} \left(\int_{E_2} \left|\sum_{n=M_0}^{m} a_{\sigma_2(n)}^{(2)}\varphi_{\sigma_2(n)}(y)\right|^p dy\right)^{1/p} \le 2|\Delta_2|^{1/p}, \quad p\in[2,p_0]. \tag{3.29}$$

Для $(x,y)\in T$ положим

$$E = E_1\times E_2,\ g(x,y) = g_1(x)g_2(y),\ Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y) = \sum_{k,n=\overline{N}_0}^{M} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y), \tag{3.30}$$

где

$$a_{k,n} = \begin{cases} a_k^{(1)}a_n^{(2)} & \text{для } \overline{N}_0\le k\le N_1,\ M_0\le n\le M,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и

$$\sigma(m) = \begin{cases} \sigma_1(m) & \text{для } \overline{N}_0\le m\le N_1,\\ m & \text{для } N_1\le m\le M_0,\\ \sigma_2(m) & \text{для } M_0\le m\le M.\end{cases} \tag{3.31}$$

Из (3.24), (3.25), (3.27), (3.28) и (3.30) следует, что условия 1.– 3. Леммы 2 выполнены. Так как

$$\iint_T |Q(x,y) - g(x,y)|\, dxdy \le \int_0^1 |Q_2(y) - g_2(y)|\, dy \int_0^1 |Q_1(x)|\, dx +$$

$$+ \int_0^1 |Q_1(x) - g_1(x)|\, dx \int_0^1 |g_2(y)|\, dy < \varepsilon,$$

то условие 4. Леммы 2 также выполнено.

Теперь проверим выполнение условий 5. и 6. Пусть $\overline{N}_0^2 + M_0^2 \le R^2 \le N_1^2 + M^2$. Тогда для некоторого $m_0 > M_0$ имеем $m_0 < R \le m_0+1$. Так как $M_0 = 2(N_1^2+1)$, то имеем $R^2 - N_1^2 > (m_0-1)^2$, и следовательно, для любого $p\in[2,p_0]$ из (3.23), (3.26), (3.29) - (3.31) получим

$$\left(\iint_E \left|\sum_{\overline{N}_0^2+M_0^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \left(\iint\limits_E \left|\sum_{k=\overline{N}_0}^{N_1}\sum_{n=M_0}^{m_0-1} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_0<\overline{k}\leq N_1}\left(\iint\limits_E \left|\sum_{k=\overline{N}_0}^{\overline{k}} a_{\sigma(k),\sigma(m_0)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(m_0)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_{E_1}\left|\sum_{k=\overline{N}_0}^{N_1} a^{(1)}_{\sigma_1(k)}\varphi_{\sigma_1(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{E_2}\left|\sum_{n=M_0}^{m_0-1} a^{(2)}_{\sigma_2(n)}\varphi_{\sigma_2(n)}(y)\right|^p dy\right)^{1/p} +$$

$$+ |a^{(2)}_{\sigma_2(m_0)}|\left(\int_{E_2}|\varphi_{\sigma_2(m_0)}(y)|^p dy\right)^{1/p} \times$$

$$\times \max_{N_0<\overline{k}\leq N_1}\left(\int_{E_1}\left|\sum_{k=N_0}^{\overline{k}} a^{(1)}_{\sigma_1(k)}\varphi_{\sigma_1(k)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq 12|\gamma|\cdot|\Delta|^{1/p}.$$

Аналогично, при $\overline{N}_0 < \overline{k} \leq N_1$ и $M_0 < \overline{n} \leq M$ получим

$$\left(\iint\limits_E \left|\sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \leq 4|\gamma|\cdot|\Delta|^{1/p}, \quad p\in[2,p_0],$$

$$\iint\limits_T \left|\sum_{k,n=\overline{N}_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \leq 9|\gamma|\cdot|\Delta|.$$

Аналогично доказывается, что для всех $R\in[\sqrt{2}\overline{N}_0, \sqrt{2}N]$, имеет место неравенство

$$\iint\limits_T \left|\sum_{2\overline{N}_0^2\leq k^2+n^2\leq R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \leq 27|\gamma|\cdot|\Delta|.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система ограниченных функций, полная в пространстве $L^2([0,1])$ и для некоторого $p_0 > 2$ и любого $n \geq 1$ имеем $||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq B_{p_0}$. Тогда для любой функции $f(x,y)\in L^{p_0}(T)$ и для любых чисел $\epsilon > 0$, $N > 1$ существуют измеримое множество $E\subset T\equiv[0,1]^2$, функция $g(x,y)\in L(T)$, полином

$$Q(x,y) = \sum_{k,n=N}^{M} a_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N,\dots,M$, удовлетворяющих следующим условиям :

1. $|E| > 1-\varepsilon$,
2. $g(x,y) = f(x,y)$ для $(x,y)\in E$,
3. $\iint\limits_T |g(x,y)|\,dxdy \le 10 \iint\limits_T |f(x,y)|\,dxdy$,
4. $\iint\limits_T |Q(x,y)-g(x,y)|\,dxdy < \varepsilon$,
5. $$\sup_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\left(\iint\limits_E\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p}+$$
$$+\max_{N\le\bar{k},\bar{n}\le M}\left(\iint\limits_E\left|\sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p}\le$$
$$\le 6\left(\iint\limits_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p}+\varepsilon,$$
6. $$\max_{N\le\bar{k},\bar{n}\le M}\iint\limits_T\left|\sum_{k,n=N}^{\bar{k},\bar{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy+$$
$$+\sup_{\sqrt{2}N\le R\le\sqrt{2}M}\iint\limits_T\left|\sum_{2N^2\le k^2+n^2\le R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy\le$$
$$\le 22\iint\limits_T |f(x,y)|\,dxdy.$$

Доказательство : Рассмотрим ступенчатую функцию $\varphi(x,y)=\sum\limits_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x,y)$, где Δ_ν – прямоугольники постоянства такие, что

$$\left(\iint\limits_T |f(x,y)-\varphi(x,y)|^{p_0}dxdy\right)^{1/p_0}+\max_{1\le\nu\le\nu_0}\left[|\Delta_\nu|^{1/p_0}|\gamma_\nu|\right]<\varepsilon_0, \tag{3.32}$$

где

$$\varepsilon_0=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4};\frac{1}{40}\iint\limits_T |f(x,y)|\,dxdy\right\}. \tag{3.33}$$

Последовательным применением Леммы 2, для $\nu=1,\dots\nu_0$ определим измеримые множества E_ν, функции $g_\nu(x,y)$, полиномы

$$Q_\nu(x,y)=\sum_{k,n=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} a_{k,n}^{(\nu)}\varphi_k(x)\varphi_n(y)$$

и перестановки $\{\sigma_\nu(k)\}$ натуральных чисел $N_{\nu-1}, \dots, N_\nu - 1$, удовлетворяющие условиям

$$|E_\nu| > 1 - \frac{\varepsilon}{\nu_0}, \quad g_\nu(x,y) = \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x,y), \quad (x,y) \in E_\nu, \tag{3.34}$$

$$\iint_T |g_\nu(x,y)|\, dxdy \le 9|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|, \quad \iint_T |Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)|\, dxdy \le \left(\frac{\varepsilon_0}{\nu_0}\right)^2, \tag{3.35}$$

$$\sup_{\sqrt{2}N_{\nu-1} \le R \le \sqrt{2}N_\nu} \left(\iint_{E_\nu} \left| \sum_{2N_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_{\nu-1} \le \bar{k},\bar{n} \le N_\nu} \left(\iint_{E_\nu} \left| \sum_{k,n=N_{\nu-1}}^{\bar{k},\bar{n}} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le \tag{3.36}$$

$$\le 16|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|^{1/p}, \quad p \in [2, p_0],$$

$$\max_{N_{\nu-1} \le \bar{k},\bar{n} \le N_\nu} \iint_T \left| \sum_{k,n=N_{\nu-1}}^{\bar{k},\bar{n}} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dxdy +$$

$$+ \sup_{\sqrt{2}N_{\nu-1} \le R \le \sqrt{2}N_\nu} \iint_T \left| \sum_{2N_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a^{(\nu)}_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)} \varphi_{\sigma_\nu(k)}(x) \varphi_{\sigma_\nu(n)}(y) \right| dxdy \le$$

$$\le 36|\gamma_\nu| \cdot |\Delta_\nu|. \tag{3.37}$$

Теперь мы можем определить множество E, функцию $g(x,y)$, полином $Q(x,y)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел $N_0, \dots, N = N_{\nu_0}$ следующим образом :

$$E = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu\right) \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} G_\nu\right), \quad \text{где} \quad G_\nu = \left\{(x,y) \in T : |Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)| < \frac{\varepsilon_0}{\nu_0}\right\}; \tag{3.38}$$

$$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x,y) + [f(x,y) - \varphi(x,y)]; \tag{3.39}$$

$$Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) = \sum_{k,n=N_0}^{N} a_{k,n} \varphi_k(x) \varphi_n(y); \tag{3.40}$$

$$\sigma(k) = \sigma_\nu(k) \quad \text{для } N_{\nu-1} \le k < N_\nu, \quad \nu = 1, \dots, \nu_0,$$

где

$$a_{k,n} = \begin{cases} a^{(\nu)}_{k,n} & \text{для} \quad N_{\nu-1} \le k, n < N_\nu, \ 1 \le \nu \le \nu_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу (3.34), (3.35), (3.38) – (3.40), условия 1.– 4. Леммы 3 выполнены. Проверим теперь выполнение условий 5. и 6. Для всех $p \in [2, p_0]$ из (3.32) – (3.34) и (3.38) следует

$$\left(\iint\limits_E \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x,y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \leq \left(\iint\limits_E |\varphi(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq 2\left(\iint\limits_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p}, \tag{3.41}$$

$$\iint\limits_T \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x,y)\right| dxdy \leq 9\sum_{\nu=1}^{\nu_0} |\gamma_\nu|\cdot|\Delta_\nu| \leq 10\iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

Пусть $2N_0^2 \leq R^2 \leq 2N^2$. Тогда для некоторого $1 \leq \overline{\nu} \leq \nu_0$ имеем $\sqrt{2}N_{\overline{\nu}} < R \leq \sqrt{2}N_{\overline{\nu}+1}$, и следовательно, для всех $p \in [2, p_0]$ из (3.40) имеем

$$\sum_{2N_0^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) +$$
$$+ \sum_{2N_{\overline{\nu}}^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} a^{(\overline{\nu})}_{\sigma_{\overline{\nu}}(k),\sigma_{\overline{\nu}}(n)}\varphi_{\sigma_{\overline{\nu}}(k)}(x)\varphi_{\sigma_{\overline{\nu}}(n)}(y).$$

Для всех $p \in [2, p_0]$ из соотношений (3.32), (3.33), (3.36) - (3.38) и (3.41) следует

$$\left(\iint\limits_E \left|\sum_{2N_0^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \left(\iint\limits_T \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} [Q_\nu(x,y) - g_\nu(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$
$$+ \left(\iint\limits_E \left|\sum_{2N_{\overline{\nu}}^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} a^{(\overline{\nu})}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$
$$+ \left(\iint\limits_E \left|\sum_{\nu=1}^{\overline{\nu}-1} g_\nu(x,y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{16} + 16|\gamma_{\overline{\nu}}|\cdot|\Delta_{\overline{\nu}}|^{1/p} + 2\left(\iint\limits_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} \leq 3\left(\iint\limits_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично

$$\iint\limits_T \left|\sum_{2N_0^2 \leq k^2+n^2 \leq R^2} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \leq 11\iint\limits_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

Аналогично доказывается, что для всех $N_0 \le \overline{k}, \overline{n} \le N$ и для всех $p \in [2, p_0]$ имеют место неравенства

$$\left(\iint_E \left|\sum_{k,n=N_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 3\left(\iint_E |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\iint_T \left|\sum_{k,n=N_0}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \le 11 \iint_T |f(x,y)|\, dxdy.$$

Лемма 3 доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 2 : Пусть $F = \{f_\nu(x,y)\}$ – счетное плотное подмножество пространства $L^{p_0}(T)$, $p_0 > 2$. Последовательным применением Леммы 3, для любого $\nu = 1, 2, \ldots$ определим измеримые множества $\overline{E}_\nu$, функции $\overline{g}_\nu(x,y)$, полиномы

$$\overline{Q}_\nu(x,y) = \sum_{k,n=\overline{N}_{\nu-1}}^{\overline{N}_\nu - 1} a_{k,n}^{(\nu)}\varphi_k(x)\varphi_n(y)$$

и перестановки $\{\sigma_\nu(k)\}$ натуральных чисел $\overline{N}_{\nu-1}, \ldots, \overline{N}_\nu - 1$, удовлетворяющие

$$|\overline{E}_\nu| > 1 - 2^{-2\nu}, \quad \overline{g}_\nu(x,y) = f_\nu(x,y), \quad (x,y) \in \overline{E}_\nu, \tag{4.1}$$

$$\iint_T |\overline{g}_\nu(x,y)|\, dxdy \le 10 \iint_T |f_\nu(x,y)|\, dxdy, \quad \iint_T \left|\overline{Q}_\nu(x,y) - \overline{g}_\nu(x,y)\right| dxdy < 2^{-4\nu}, \tag{4.2}$$

$$\left(\iint_{\overline{E}_\nu} \left|\sum_{2\overline{N}_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} + \tag{4.3}$$

$$+\left(\iint_{\overline{E}_\nu} \left|\sum_{k,n=\overline{N}_{\nu-1}}^{\overline{N}_\nu - 1} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le$$

$$\le 6\left(\iint_{\overline{E}_\nu} |f_\nu(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} + 2^{-2\nu}, \quad p \in [2, p_0].$$

$$\iint_T \left|\sum_{2\overline{N}_{\nu-1}^2 \le k^2+n^2 \le R^2} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right| dxdy +$$

$$+ \iint_T \left|\sum_{k,n=\overline{N}_{\nu-1}}^{\overline{k},\overline{n}} a_{\sigma_\nu(k),\sigma_\nu(n)}^{(\nu)}\varphi_{\sigma_\nu(k)}(x)\varphi_{\sigma_\nu(n)}(y)\right| dxdy \le 22 \iint_T |f_\nu(x,y)|\, dxdy. \tag{4.4}$$

где $\sqrt{2N_{\nu-1}} \le R < \sqrt{2N_\nu}$ и $N_{\nu-1} \le \bar{k}, \bar{n} < N_\nu$. Положим
$G_\nu = \left\{(x,y) \in T : \left|\overline{Q}_\nu(x,y) - \bar{g}_\nu(x,y)\right| < 2^{-2\nu}\right\}$. Из (4.2) имеем

$$|G_\nu| > 1 - 2^{-2\nu}. \tag{4.5}$$

Определим перестановку $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел следующим образом : $\sigma(k) = \sigma_\nu(k)$ для $\overline{N}_{\nu-1} \le k < \overline{N}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$E = \bigcap_{\nu=\nu_0}^{\infty} \left(\overline{E}_\nu \cap G_\nu\right), \quad \text{где} \quad \nu_0 > \log_{1/2} \varepsilon. \tag{4.6}$$

В силу (4.1) и (4.5) имеем $|E| > 1 - \varepsilon$.

Пусть $f(x,y) \in L^p(T)$ для некоторого $p \in [2, p_0]$. Можно выбрать подпоследовательность функций $\{f_{\nu_m}(x,y)\} \subset F$ такую, что

$$\lim_{M\to\infty} \iint_T \left|\sum_{m=1}^{M} f_{\nu_m}(x,y) - f(x,y)\right|^p dxdy = 0, \tag{4.7}$$

$$\left(\iint_T |f_{\nu_m}(x,y)|^p\, dxdy\right)^{1/p} < 2^{-8m}, \quad m \ge 2. \tag{4.8}$$

Предположим, что функции $g_s(x,y)$ и полиномы $Q_s(x,y) = \sum_{k,n=N_s}^{M_s} b_{k,n}^{(s)} \varphi_k(x)\varphi_n(y)$ при $s = 1, \ldots, m-1$ удовлетворяют условиям

$$g_s(x,y) = f_{\nu_s}(x,y), \quad (x,y) \in E, \quad \iint_T |g_s(x,y)|\, dxdy \le 2^{-s+1}, \tag{4.9}$$

$$\iint_T \left|\sum_{j=1}^{s} [Q_j(x,y) - g_j(x,y)]\right| dxdy < 2^{-2s}, \tag{4.10}$$

$$\left(\iint_E \left|\sum_{j=1}^{s} [Q_j(x,y) - g_j(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 2^{-2s}, \tag{4.11}$$

$$\sup_{\sqrt{2N_s} \le R \le \sqrt{2M_s}} \left(\iint_E \left|\sum_{2N_s^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)}^{(s)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_s \le \bar{k}, \bar{n} \le M_s} \left(\iint_E \left|\sum_{k,n=N_s}^{\bar{k},\bar{n}} b_{\sigma(k),\sigma(n)}^{(s)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 2^{-s},$$

$$\sup_{\sqrt{2N_s} \le R \le \sqrt{2M_s}} \iint_T \left|\sum_{2N_s^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)}^{(s)} \varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy +$$

$$+\max_{N_s\le\overline{k},\overline{n}\le M_s}\iint_T\left|\sum_{k,n=N_s}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(s)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|dxdy<2^{-s}.$$

Теперь выберем $f_{\overline{\nu}_m}(x,y)\in F$ так, что

$$\left(\iint_T\left|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\left[f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right]\right|^p dxdy\right)^{1/p}\le 2^{-8(m+1)}. \tag{4.12}$$

В силу неравенства (см. (4.8) - (4.11))

$$\left(\iint_E\left|f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p}<2^{-2m-1},$$

из (4.12) следует, что

$$\left(\iint_E|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)|^p\,dxdy\right)^{1/p}<2^{-2m}. \tag{4.13}$$

Положим

$$g_m(x,y)=f_{\nu_m}(x,y)+[\overline{g}_{\overline{\nu}_m}(x,y)-f_{\overline{\nu}_m}(x,y), \tag{4.14}$$

$$Q_m(x,y)=\overline{Q}_{\overline{\nu}_m}(x,y)=\sum_{k,n=N_m}^{M_m} b^{(m)}_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y)=\sum_{k,n=\overline{N}_{\overline{\nu}_m-1}}^{\overline{N}_{\overline{\nu}_m}-1} a^{(\overline{\nu}_m)}_{k,n}\varphi_k(x)\varphi_n(y), \tag{4.15}$$

где $N_m=\overline{N}_{\overline{\nu}_m-1}$, $M_m=\overline{N}_{\overline{\nu}_m}-1$, $b^{(m)}_{k,n}=a^{(\overline{\nu}_m)}_{k,n}$.

В силу (4.1), (4.2), (4.11), (4.12) и (4.14) имеем

$$g_m(x,y)=f_{\nu_m}(x,y),\quad (x,y)\in E, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\iint_T|g_m(x,y)|\,dxdy&\le\iint_T\left|\overline{g}_{\overline{\nu}_m}(x,y)\right|\,dxdy+\\ &+\iint_T\left|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\left[f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right]\right|dxdy+\\ &+\iint_T\left|\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|dxdy<2^{-m},\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\iint_T\left|\sum_{s=1}^{m}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|dxdy&\le\iint_T|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-[f_{\nu_m}(x,y)-\\ -\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\Bigg]\Bigg|\,dxdy&+\iint_T\left|\overline{Q}_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\overline{g}_{\overline{\nu}_m}\right|dxdy\le 2^{-2m}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Из (4.5), (4.6), (4.12) и (4.14) следует, что

$$\left(\iint_E \left|\sum_{s=1}^{m}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le \left(\iint_E \left|\overline{Q}_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\overline{g}_{\overline{\nu}_m}\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\iint_E \left|f_{\overline{\nu}_m}(x,y)-\left[f_{\nu_m}(x,y)-\sum_{s=1}^{m-1}[Q_s(x,y)-g_s(x,y)]\right]\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le 2^{-2m}. \tag{4.19}$$

Согласно (4.3), (4.4), (4.13) и (4.15) имеем

$$\sup_{\sqrt{2}N_m\le R\le\sqrt{2}M_m}\left(\iint_E \left|\sum_{2N_m^2\le k^2+n^2\le R^2} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} +$$

$$+\max_{N_m\le\overline{k},\overline{n}\le M_m}\left(\iint_E \left|\sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right|^p dxdy\right)^{1/p} \le \tag{4.20}$$

$$\le\left(\iint_E |f_{\overline{\nu}_m}(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} < 2^{-m},$$

$$\sup_{\sqrt{2}N_m\le R\le\sqrt{2}M_m}\iint_T \left|\sum_{2N_m^2\le k^2+n^2\le R^2} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy+$$

$$+\max_{N_m\le\overline{k},\overline{n}\le M_m}\iint_T \left|\sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right| dxdy \le \tag{4.21}$$

$$\le\iint_T |f_{\overline{\nu}_m}(x,y)|\,dxdy \le 2^{-m}.$$

По индукции построим функции $\{g_m(x,y)\}$ и полиномы $\{Q_m(x,y)\}$, удовлетворяющие условиям (4.16) – (4.21) для всех $m\ge 1$. Из (4.17) следует, что

$$\iint_T \left|\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x,y)\right| dxdy < \infty.$$

Положим

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x,y), \tag{4.22}$$

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} b_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k,n=N_m}^{M_m} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\varphi_{\sigma(n)}(y)\right], \tag{4.23}$$

где

$$b_{\sigma(k),\sigma(n)} = \begin{cases} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)} & \text{для} \quad N_m \le k, n < M_m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Согласно (4.7), (4.16) и (4.22) получим $g(x,y) \in L(T)$, и $g(x,y) = f(x,y)$ на E. Для заданных натуральных чисел $\overline{k}$, $\overline{n}$ и некоторого m будем иметь $N_m \le \min\{\overline{k}, \overline{n}\} \le M_m$. Из (4.17) - (4.23) следует, что

$$\iint_T \left| \sum_{k,n=1}^{\overline{k},\overline{n}} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right| dxdy \le$$

$$\le \iint_T \left| \sum_{s=1}^{m} [Q_s(x,y) - g_s(x,y)] \right| dxdy + + \sum_{s=m+1}^{\infty} \iint_T |g_s(x,y)|\, dxdy +$$

$$+ \max_{N_m \le \overline{k},\overline{n} \le M_m} \iint_T \left| \sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right| dxdy \le 2^{-m},$$

$$\left(\iint_E \left| \sum_{k,n=1}^{\overline{k},\overline{n}} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\iint_E \left| \sum_{s=1}^{m} [Q_s(x,y) - g_s(x,y)] \right|^p dxdy \right)^{1/p} + \sum_{s=m+1}^{\infty} \left(\iint_E |f_{\nu_s}(x,y)|^p dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ \max_{N_m \le \overline{k},\overline{n} \le M_m} \left(\iint_E \left| \sum_{k,n=N_m}^{\overline{k},\overline{n}} b^{(m)}_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le 2^{-m}.$$

Аналогично доказывается, что при $\sqrt{2}N_m \le R \le \sqrt{2}M_m$, $m = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$\iint_T \left| \sum_{2N_m^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right| dxdy < 2^{-m},$$

$$\left(\iint_E \left| \sum_{2N_m^2 \le k^2+n^2 \le R^2} b_{\sigma(k),\sigma(n)} \varphi_{\sigma(k)}(x) \varphi_{\sigma(n)}(y) - g(x,y) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \le 2^{-m}.$$

Теорема 2 доказана.

Применяя доказательство Леммы 1 вместо Леммы 3 получим доказательство Теоремы 1.

ABSTRACT. Let $\{\varphi_n(x)\}$ be a complete orthonormal system of bounded functions on $[0,1]$, and let for some $p_0 > 2$, $||\varphi_n||_{L^{p_0}} \leq const$ for every $n = 1, 2, \ldots$. The paper proves that a rearrangement $\{\sigma(k)\}$ of the natural numbers exists, such that the system $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ has the following property : for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$, such that for any $p \in [2, p_0]$ and $f(x) \in L^p(E)$ there exists $g(x) \in L^1([0,1])$ coinciding with $f(x)$ on E, whose Fourier series by $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ converges to $g(x)$ on E in $L^p(E)$ and on $[0,1]$ in $L^1([0,1])$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Мат. Сб., том 28, № 2, стр. 266 – 294, 1912.
2. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат. Сб., том II(53), стр. 67 – 96, 1942.
3. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды Моск. Матем. об-ва, том 1, стр. 5 – 38, 1952.
4. А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. Заметки, том 33, № 5, стр. 715 – 722, 1983.
5. К. И. Осколков, "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", Докл. АН СССР, том 228, № 2, стр. 304 – 306, 1976.
6. Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", Докл. АН Арм. ССР, том 42, № 3, стр. 134 – 140, 1966.
7. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 1, № 4, стр. 270 – 283, 1966.
8. Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, сер. Математика и Механика, № 1, стр. 6 – 8, 1988.
9. Ш. В. Хеладзе, "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле L^1-метрики", Мат. Сбор., том 107, стр. 245 – 258, 1978.
10. А. Б. Гулисашвили, "Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов", Зап. Науч. Семин. ЛОМИ, том 107, стр. 45 – 59, 1982.
11. Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе, "О сопряженных функциях нескольких переменных", Сообщ. АН Груз. ССР, том 94, № 3, стр. 541 – 544, 1979.
12. M. G. Grigorian, "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1", Analysis Mathem., vol. 17, no. 3, pp. 211 – 237, 1991.
13. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. Сбор., том 181, № 8, стр. 1011 – 1030, 1990.
14. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, сер. мат., том 57, № 5, стр. 75 – 105, 1993.
15. К. С. Казарян, "О некоторых вопросах теории ортогональных рядов", Мат. Сбор., том 119, № 2, стр. 278 – 298, 1982.
16. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Мат. Сбор., том 99(141), стр. 355 – 365, 1976.
17. А. М. Олевский, "Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана", Докл. АН СССР, том 238, стр. 796 – 799, 1978.
18. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва, 1984.

3 Мая 1997

Ереванский государственный университет

ОБРАЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРЕ

В. А. Ногин, А. Н. Карапетянц

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

В работе рассматриваются мультипликативные операторы $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ с символами $a(|\xi|)\,|\xi|^{-\alpha}e^{i\gamma|\xi|}$, $(n-1)/2 < \mathrm{Re}\,\alpha < n$, $\gamma > 0$, действующие на функциях $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Для $1 \le p < n/\mathrm{Re}\,\alpha$ они часто реализуются в виде операторов типа потенциала со степенными или логарифмическими особенностями ядер на сфере. Строится обращение указанных операторов на функциях из L_p в эллиптическом $(\inf\limits_{t>0}|a(t)| > 0)$, квазиэллиптическом $(a(t) \ne 0,\ t > 0)$ и в общем неэллиптическом $(\mathrm{mes}\,\{t > 0 : a(t) = 0\} = 0)$ случаях. В первых двух случаях приводится также описание образов $A^{\alpha}_{a,\gamma}(L_p)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задача обращения операторов типа потенциала

$$I^{\alpha}_{\theta}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(y)}{|y|^{n-\alpha}}\,\varphi(x-y)\,dy, \qquad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < n \tag{1}$$

с гладкими характеристиками $\theta(x)$ в настоящее время представляет значительный интерес. Первые работы в этом направлении принадлежат С. Г. Самко, построившему обращение и получившему описание потенциалов Рисса с L_p-плотностями (см. [1], [2]), а также обобщенных потенциалов Рисса с однородными характеристиками (см. [3]). Эти и дальнейшие исследования по обращению операторов вида (1) отражены в обзорной статье [4].

Естественным развитием указанной тематики является обращение операторов типа потенциала с особенностями ядер, "размазанными" по подмножествам из $\mathbb{R}^n$. Такие потенциалы находят приложение в теории дробных степеней дифференциальных операторов, в частности, классических операторов математической физики, волновых операторов, операторов Клейна–Гордона–Фока и

Данное исследование финансировано Русским Фондом фундаментальных исследований (грант № 96-01-00098а)

Шредингера, телеграфного оператора (см. [4] — [8]), а также гипоэллиптических операторов второго порядка с постоянными коэффициентами (см. [9]).

В настоящей статье в рамках L_p-пространств методом аппроксимативных обратных операторов строится обращение мультипликативных операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ с символами

$$m_{\alpha,\gamma}(|\xi|) = a(|\xi|)\,|\xi|^{-\alpha} \exp\{i\gamma\,|\xi|\}, \quad \gamma > 0, \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \tag{2}$$

$$a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+) \equiv \{\omega \in C^m(\mathbb{R}^1_+) \colon |\omega^{(k)}(t)| \le c\,t^{-k}, \quad 0 \le k \le m\}.$$

Эти операторы представимы в виде операторов типа потенциала со степенными или логарифмическими особенностями ядер на сфере $|x| = \gamma$ при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$. Как будет доказано ниже, при достаточно гладких $a(|\xi|)$ операторы $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ не имеют особенности в начале координат (т.е. они непрерывны в нуле). Интересно, что потенциалы, определенные по (1) с радиальными характеристиками $\theta(x) = \theta(|x|)$, являются предельными операторами (при $\gamma \to 0$) операторов в классе операторов $\{A^{\alpha}_{a,\gamma}\}_{\gamma\ge 0}$.

Операторы $A^{\alpha}_{a,\gamma}$, действующие на функциях $\varphi \in L_p$, реализуются в виде свертки :

$$A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Omega_{\alpha,\gamma}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy, \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \quad 1 \le p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}, \tag{3}$$

где

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = (2\pi)^{-n/2}|x|^{\alpha-n} \int_0^{\infty} t^{n/2-\alpha} a(t\,|x|^{-1}) \exp(i\gamma\,t\,|x|^{-1})\, J_{\frac{n-2}{2}}(t)\,dt, \tag{4}$$

при $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, а при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$ понимается аналитическое продолжение (относительно α) правой части равенства (4) в полосу $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ (см. Теорему 3).

Для "достаточно хороших" функций операторы, определенные по (3), имеют представление

$$\widehat{A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi}(\xi) = m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi), \tag{5}$$

где $m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)$ определена по (2).

В рамках пространств L_p строится обращение для операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ в эллиптическом ($\inf\limits_{t>0}|a(t)| > 0$), квазиэллиптическом ($a(t) \ne 0$, $t > 0$), а также в общем неэллиптическом ($\operatorname{mes}\{t > 0 \colon a(t) = 0\} = 0$) случаях. В квазиэллиптическом случае мы предполагаем, что в нуле и на бесконечности $a(|\xi|)$ может иметь нуль даже экспоненциального порядка, т.е. $|a(|\xi|)|^{-1}\exp(-\eta\,|\xi|-\theta/|\xi|)\leq c$ для некоторых $\eta,\theta\geq 0$.

В эллиптическом и квазиэллиптическом случаях обратный к $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ оператор имеет вид

$$B^{\alpha}_{a,\gamma}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}b^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy, \tag{6}$$

где

$$b^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|x|)=\left(F^{-1}B^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}\right)(|x|),\qquad B^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|\xi|)=\frac{|\xi|^{\alpha}}{a(|\xi|)}\exp\left\{-\varepsilon\,|\xi|^2-\delta\,\frac{\varepsilon}{|\xi|^{2n}}-i\gamma\,|\xi|\right\} \tag{7}$$

Выше $\delta=0$ в эллиптическом случае, $\delta=1$ в квазиэллиптическом случае, и $F^{-1}f(x)$ есть обратное преобразование Фурье. Мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. **Пусть** $\dfrac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$, $1\leq p<\dfrac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}$, $a(t)\in\Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m>\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $a(t)\neq 0$ **для** $t>0$ **и** $|a(t)|^{-1}\exp(-\eta t-\theta/t)<c$, $\eta,\theta\geq 0$. **Тогда**

$$B^{\alpha}_{a,\gamma}A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x)=\varphi(x),\qquad \varphi\in L_p,$$

где $B^{\alpha}_{a,\gamma}$ **– оператор определенный по (6). Предел в (6) понимается по норме** L_p **для** $1<p<\dfrac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}$ **или почти всюду при** $1\leq p<\dfrac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}$.

В неэллиптическом случае обратный оператор $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ строится в виде

$$T^{\alpha}_{a,\gamma}f(x)=\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\;\overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to 0}}T^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon,\delta}f(x)=\overset{(L_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}}\;\overset{(L_2)}{\lim_{\delta\to 0}}\int_{\mathbb{R}^n}h^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}(|y|)\,f(x-y)\,dy, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}&h^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}(|x|)=\left(F^{-1}H^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}\right)(|x|),\\&H^{\varepsilon,\delta}_{\alpha,\gamma}(|\xi|)=\overline{a(|\xi|)}\,|\xi|^{\alpha}\exp\{-i\gamma\,|\xi|-\varepsilon\,|\xi|^2\}\left(|a(|\xi|)|^2+i\delta\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 2. Пусть $\dfrac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$, $1\leq p<\min\left(2,\dfrac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}\right)$. **Предположим, что** $a(t)\in\Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m>\left[\dfrac{n}{2}\right]$, $\mathrm{mes}\,\{t>0\colon a(t)=0\}=0$. **Тогда**

$$T^{\alpha}_{a,\gamma}A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x)=\varphi(x),\qquad \varphi\in L_p,$$

где $T^{\alpha}_{a,\gamma}$ **– оператор, определенный по (8). Предел в (8) можно понимать как по норме** L_p**, так и как предел почти всюду.**

Отметим, что ранее задача обращения операторов с символами вида (2) рассматривалась лишь в двух частных случаях : когда $a(|\xi|)\equiv 1$ в [15] и когда $a(|\xi|)$ – полином в [10].

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Мы будем использовать следующие обозначения : $D^k f(x) = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots, \partial x_n^{k_n}} f(x)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ есть мультииндекс, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ – его длина ; $< f, \omega > = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, \omega(x)\, dx$; $Ff(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)\, dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$; $F^{-1} f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi)\, d\xi$ – обратное преобразование Фурье ; $W(x, \varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} \exp\{-|x|^2/(4\varepsilon)\}$ – ядро Гаусса-Вейерштрасса ; $W_\varepsilon \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x - y, \varepsilon)\, \varphi(y)\, dy$, $S = S(\mathbb{R}^n)$ – класс Л. Шварца быстро убывающих гладких функций ; $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$; $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^n) = \{f(\xi) \colon f(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi \in \mathbf{L}_1\}$ – винеровское кольцо функций ; M_p^p – класс p–мультипликаторов ; $\Psi_0 = \Psi_0(\mathbb{R}^n) = \{\psi(x) \in S \colon D^k \psi(0) = 0,\ |k| = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\Phi_0 = \Phi_0(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(x) \in S \colon \widehat{\varphi}(\xi) \in \Psi_0\}$.

Обозначим через $J_\nu(z)$ функцию Бесселя первого рода. Для достаточно больших значений $|z|$ и $|\arg z| < \pi$ имеет место следующее асимптотическое разложение (см. [11], формула 8.451, стр. 975) :

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 1/2)}{(2k)!\, \Gamma(\nu - 2k + 1/2)} (2z)^{-2k} + O(|z|^{-2m}) \right) - \sin(z - \pi\nu/2 - \pi/4) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 3/2)}{(2k+1)!\, \Gamma(\nu - 2k - 1/2)} (2z)^{-2k-1} + O(|z|^{-2m-1}) \right) \right]. \tag{10}$$

Функция $J_\nu(z)$ допускает следующее интегральное представление (см. [11], формула 8.411.10) :

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)\, \Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - 1/2} e^{izt}\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, \nu > -1/2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) легко следуют необходимые в дальнейшем оценки

$$|J_\nu(z)| \le c\, |z|^{\mathrm{Re}\, \nu}, \qquad |z| < 1, \qquad \mathrm{Re}\, \nu > -1/2, \tag{12}$$

$$|J_\nu(z)| \le c\, |z|^{-1/2}, \qquad |z| > 1. \tag{13}$$

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. [12]. **Пусть функция $f(x, z)$ аналитична по z в некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ при почти всех $x \in \Omega$, где Ω – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и имеет суммируемую мажоранту : $|f(x, z)| \le F(x) \in \mathbf{L}_1(\Omega)$. Тогда $\int_\Omega f(x, z)\, dx$ аналитичен в $\mathcal{D}$.**

Лемма 2. [13]. a) Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, $N > [n/2]$ и существуют постоянные $c, \delta > 0$ такие, что $|D^k f(x)| \le c\,|x|^{-\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le |k| \le N$. Тогда $f \in \mathcal{R}_0$.
b) Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^n \setminus \{O\})$, $N > [n/2]$ имеет компактный носитель и существуют такие постоянные c, $\delta > 0$, что $|D^k f(x)| \le c\,|x|^{\delta-|k|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $0 \le |k| \le N$. Тогда $f \in \mathcal{R}_0$.

§3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ С СИМВОЛАМИ $m_{a,\gamma}(|\xi|)$

1. Востановление ядра $\Omega_{a,\gamma}(|x|)$ оператора $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ по его символу $m_{a,\gamma}(|\xi|)$.
Начнем с представления

$$\Omega_{a,\gamma}(|x|) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} m_{a,\gamma}(|\xi|)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Переходя к полярным координатам и используя формулу Бохнера (см. [14], стр. 358) для $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ получаем (4). Тогда из (12) и (13) следует, что интеграл в (4) абсолютно сходится. Из указанных выше оценок и Леммы 1 следует аналитичность (по α) функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ в полосе $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$

Теорема 3. Для $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$ интеграл $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ абсолютно сходится при $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ и допускает аналитическое продолжение в полосу $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ $(|x| \ne \gamma)$. Это аналитическое продолжение имеет следующий вид :

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|). \tag{14}$$

где

$$\Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|x|^{n-\alpha}} \int_0^{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}} t^{n/2-\alpha} \exp\left(i\gamma t/|x|\right) a(t/|x|)\, J_{\frac{n-2}{2}}(t)\, dt,$$

$$\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{-(n-1)/2}\pi^{-(n+1)/2}}{|x|^{n-\alpha}} \times$$
$$\times \int_{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}^{\infty} t^{(n-1)/2-\alpha} \exp\left(i\gamma t/|x|\right) a(t/|x|) \left[\varphi(t)\cos\left(t - \frac{n-1}{4}\pi\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(n-3)}{8}\left(\frac{1}{t} + \Psi(t)\right)\sin\left(t - \frac{n-1}{4}\pi\right)\right] dt,$$

$$\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|) = i\,\frac{(2\pi)^{-(n+1)/2}}{|x|^{n-\alpha-1}(\gamma-|x|)} \left[\frac{\gamma-|x|}{\gamma+|x|} \exp\left\{i\left(\frac{(\gamma+|x|)^2}{|x|\,|\gamma-|x||} - \frac{n-1}{4}\pi\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{i\left(\frac{\gamma^2-|x|^2}{|x|\,|\gamma-|x||} + \frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}\right] \left(\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}\right)^{(n-1-2\alpha)/2} a\left(\frac{\gamma+|x|}{|x|\,|\gamma-|x||}\right),$$

$$\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|) = i\,\frac{(2\pi)^{-(n+1)/2}(\gamma+|x|)}{|x|^{n-\alpha-1}(\gamma-|x|)\,|\gamma-|x||}\times$$
$$\times\int_1^\infty\left[\frac{\gamma-|x|}{\gamma+|x|}\exp\left\{i\left(\frac{(\gamma+|x|)^2}{|x|\,|\gamma-|x||}y-\frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}+\right.$$
$$\left.+\exp\left\{i\left(\frac{\gamma^2-|x|^2}{|x|\,|\gamma-|x||}y+\frac{n-1}{4}\pi\right)\right\}\right]$$
$$\left[\left(\frac{n-1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}y\right)^{(n-2\alpha-3)/2}a\left(\frac{\gamma+|x|}{|x|\,|\gamma-|x||}y\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{|x|}\left(\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}y\right)^{(n-2\alpha-1)/2}a'\left(\frac{\gamma+|x|}{|x|\,|\gamma-|x||}y\right)\right]dy$$

с $\varphi(t) = O(t^{-2})$ и $\Psi(t) = O(t^{-3})$ при $t\to\infty$.

Доказательство : Для построения аналитического продолжения интеграла $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ (при $|x|\neq\gamma$) перепишем его в виде

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|x|^{n-\alpha}}\left\{\int_0^{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}} + \int_{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}^\infty\right\}t^{n/2-\alpha}\times \tag{15}$$
$$\times\exp(i\gamma t/|x|)\,a(t/|x|)\,J_{\frac{n-2}{2}}(t)\,dt \equiv \Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|) + I_{\alpha,\gamma}(|x|).$$

Из (12) и Леммы 1 следует, что для $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ интегралы $\Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|)$ и $\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|)$ абсолютно сходятся и аналитичны (по α) в полосе $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Далее, из (10) для $I_{\alpha,\gamma}(|x|)$ имеем

$$I_{\alpha,\gamma}(|x|) = \Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|) + \omega_{\alpha,\gamma}(|x|), \tag{16}$$

где

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{-(n-1)/2}\pi^{-(n+1)/2}}{|x|^{n-\alpha}}\times$$
$$\times\int_{\frac{\gamma+|x|}{|\gamma-|x||}}^\infty t^{(n-1)/2-\alpha}\exp(i\gamma t/|x|)\,a(t/|x|)\cos\left(t-\frac{n-1}{4}\pi\right)dt,$$

Интегрируя по частям и делая замену переменной $t\,\frac{|\gamma-|x||}{\gamma+|x|} = y$ для $\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ получаем

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|) + \Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|). \tag{17}$$

Поскольку $a(t)\in A^1(\mathbb{R}^1_-)$, то интеграл $\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|)$ абсолютно сходится для $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, и следовательно, по Лемме 1 является аналитической (по α) в этой области. Аналитичность неинтегрального члена $\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|)$ для $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ очевидна. Таким образом, из (15) — (17) для функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ определенной по (4), следует аналитическое продолжение в полосу $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ ($|x|\neq\gamma$), имеющее вид (14). Теорема 3 доказана.

2. Свойства ядра $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. **Пусть** $m = 1, 2, ..., [n/2] + 1$, $\max(n-1)/2, n-m < \mathrm{Re}\,\alpha < n$, $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$. **Тогда при** $|x| < \gamma/2$ **функция** $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ **представима в виде**

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2}$$

$$\left[\int_0^1 t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt + e^{i(\gamma+|x|\eta)} \sum_{k=1}^{m} \frac{i^k}{(\gamma+|x|\eta)^k}\, g_{k-1}(\alpha, 1) + \right. \tag{18}$$

$$\left. \frac{i^m}{(\gamma+|x|\eta)^m} \int_1^\infty g_m(\alpha, t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt \right] d\eta,$$

где

$$g_k(\alpha, t) = \frac{d^k}{dt^k}\left[t^{n-\alpha-1}\, a(t)\right], \qquad k = 0, 1, ... \tag{19}$$

Доказательство : Докажем вначале (18) для $\frac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$. Из (11) и абсолютной сходимости интеграла (4) для $\frac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$ имеем

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it\gamma}\, dt \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2} e^{it|x|\eta}\, d\eta = \tag{20}$$

$$= \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \lim_{N\to\infty} \Omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|),$$

где

$$\Omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|) = \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2}\, d\eta \int_0^N t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt.$$

Для интеграла

$$\omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|, \eta) = \int_1^N t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt$$

интегрирование по частям дает

$$\omega^N_{\alpha,\gamma}(|x|, \eta) = \frac{1}{i(\gamma+|x|\eta)} \left[e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, t^{n-\alpha-1} a(t) \Big|_1^N - \right.$$

$$\left. - \int_1^N \left[(n-\alpha-1)\, t^{n-\alpha-2} a(t) + t^{n-\alpha-1} a'(t)\right] e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt \right].$$

Подставляя полученное выражение в (20) и переходя к пределу при $N \to \infty$, из теоремы Лебега о мажорантной сходимости получаем

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{1-n}\pi^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-3)/2} \left[\int_0^1 t^{n-\alpha-1} a(t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i(\gamma+|x|\eta)} e^{i(\gamma+|x|\eta)} a(1)\, g_0(\alpha,1) - \frac{1}{i(\gamma+|x|\eta)} \int_1^\infty g_1(\alpha,t)\, e^{it(\gamma+|x|\eta)}\, dt\right] d\eta. \tag{21}$$

Интегрируя по частям $m-1$ раз и учитывая (19), получим (18). Таким образом, при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ равенство (18) доказано.

Заметим, что функции $(\gamma+|x|\eta)^{-k} e^{it(\gamma+|x|\eta)}$ непрерывны и ограничены ($|x| < \gamma/2$), функции $g_k(\alpha,t)$ аналитичны при $\alpha \in \mathbb{C}$ и $|g_m(\alpha,t)| \le c t^{n-\operatorname{Re}\alpha-m-1}$, где c не зависит от α, $|\operatorname{Re}\alpha| < M$, $|\operatorname{Im}\alpha| < M$, $M > 0$. Следовательно, согласно Лемме 1, выражение в правой части (18) является аналитической функцией в полосе $n-m < \operatorname{Re}\alpha < n$. Отсюда, в силу аналитичности функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ ($|x| \ne \gamma$), при $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ получаем равенство (18) для $\max\left(\frac{n-1}{2}, n-m\right) < \operatorname{Re}\alpha < n$. Лемма 3 доказана.

Докажем теперь основной результат этого пункта. В следующей теореме приведены оценки для функции $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$.

Теорема 4. **Для $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$ функция $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, если $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ и в $\mathbb{R}^n \setminus \{\{O\} \bigcup \{x\colon |x| = \gamma\}\}$, если $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}$. Справедливы следующие оценки :**

$$|\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n} \begin{cases} \left(\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|}\right)^{(n+1)/2-\operatorname{Re}\alpha} & \text{при } \dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \dfrac{n+1}{2} \\ 1+\ln\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|} & \text{при } \operatorname{Re}\alpha = \dfrac{n+1}{2} \\ 1, & \text{при } \dfrac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \end{cases} \tag{22}$$

где константа c может быть выбрана не зависящей от α в некоторой окрестности каждой точки α. Для $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$ и $m > n-\operatorname{Re}\alpha$ функция $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ непрерывна в нуле.

Доказательство : Непрерывность следует из (4), (14) и (18). Для доказательства (22) вначале предположим, что $\frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Из (4), (12) и (13) имеем

$$|\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}\left\{\int_0^1 t^{n-\operatorname{Re}\alpha-1}\, dt + \int_1^\infty t^{(n-1)/2-\operatorname{Re}\alpha}\, dt\right\} \le c|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}.$$

Пусть теперь $\dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \dfrac{n+1}{2}$. Из (12), (13) и (14) получаем

$$|\Omega^1_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c\,|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n} \begin{cases} \left(\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|}\right)^{(n+1)/2-\operatorname{Re}\alpha} & \text{для } \dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \dfrac{n+1}{2} \\ 1+\ln\dfrac{|x|+\gamma}{||x|-\gamma|} & \text{для } \operatorname{Re}\alpha = \dfrac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Легко показать, что $|\Omega^2_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c\,|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n}$ и

$$|\Omega^3_{\alpha,\gamma}(|x|)| \le c\,|x|^{\operatorname{Re}\alpha-n} \left(\frac{|x|+\gamma}{|\gamma-|x||}\right)^{(n+1)/2-\operatorname{Re}\alpha} \tag{23}$$

Так как $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$, для $\Omega^4_{\alpha,\gamma}(|x|)$ получим ту же оценку как и в (23). Собирая приведенные выше оценки, получаем (22). Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Оценки, приведенные в Теореме 4, являются точными, так как для $a(|\xi|) = 1$ имеют место следующие асимптотические соотношения (см. [15]) :

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) \underset{|x|\to\gamma}{\sim} c \begin{cases} (\gamma-|x|)^{\alpha-(n+1)/2} & \text{для } \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha \le \frac{n+1}{2},\ \alpha \ne \frac{n+1}{2}, \\ \ln(|\gamma-|x||) & \text{для } \alpha = \dfrac{n+1}{2}, \end{cases}$$

$$\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|) \underset{|x|\to\infty}{\sim} c|x|^{\alpha-n}, \qquad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha \le n.$$

Можно показать, что эти асимптотические соотношения справедливы и для функций $a(|\xi|)$ таких, что $a(t)$ принадлежит классу $C^{m,\gamma}(\mathbb{R}^1_+)$ гельдеровских функций, стабилизирующихся на бесконечности степенным образом (см. [16]) и $a(\infty) \ne 0$.

3. Символ $m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)$. В этом пункте мы покажем, что оператор свертки с ядром $\Omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$ действительно имеет своим символом функцию $m_{\alpha,\gamma}(|x|)$. Докажем вначале формулу для преобразования Фурье потенциала $A^\alpha_{a,\gamma}\varphi$.

Лемма 4. *Пусть* $\dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$, $\varphi \in \Phi_0$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_{\alpha,\gamma}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi. \tag{24}$$

Доказательство : Докажем вначале равенство (24) для $\dfrac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi = \lim_{N\to\infty} \int_{|\xi|<N} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,e^{-ix\xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,e^{i\xi y}\,dy\right] d\xi =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left[\int_{|\xi|<N} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,e^{-i\xi(x-y)}\,d\xi\right] dy.$$

Переходя во внутреннем интеграле к сферическим координатам и применяя формулу Бохнера (см. [14], стр. 358), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^{(n-2)/2}}\,dy\int_0^N t^{n/2-\alpha}\,e^{i\gamma t}\,a(t)J_{(n-2)/2}(|x-y|\,t)\,dt. \tag{25}$$

Из (12) и (13) следует

$$|x|^{-(n-2)/2}\left|\int_0^N t^{n/2-\alpha}\,e^{i\gamma t}\,a(t)J_{(n-2)/2}(|x|\,t)\,dt\right| \le c|x|^{\mathrm{Re}\,\alpha-n}.$$

Так как по теореме Лебега о мажорантной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла в (25), то получаем (24) для $\dfrac{n+1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$. Для доказательства (24) при $\dfrac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$ достаточно показать аналитичность по α обеих частей равенства (24) в полосе $\dfrac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$. Аналитичность правой части (24) следует из Леммы 1. Аналитичность левой части (24) следует из Леммы 1 и оценки (22). Лемма 4 доказана.

Замечание 2. Вычисляя предел в (24) при $\gamma \to 0$, по теореме Лебега о мажорантной сходимости, получаем

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\Omega_{\alpha,\gamma}(|y|)\,\varphi(x-y)\,dy = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{a(|\xi|)}{|\xi|^\alpha}\,\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi, \qquad \varphi\in\Phi_0.$$

Нетрудно показать, что класс операторов с символами $\dfrac{a(|\xi|)}{|\xi|^\alpha}$, $a(t)\in\Lambda^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ на функциях $\varphi\in\Phi_0$ совпадает с классом операторов типа потенциала (1) с радиальными характеристиками $\theta(x)=\theta(|x|)$, $\theta(t)\in\Lambda^\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Поэтому, класс операторов (1) с радиальными характеристиками $\theta(x)=\theta(|x|)$ является предельным при $\gamma\to 0$ в классе операторов $\{A^\alpha_{a,\gamma}\}_{\gamma\ge 0}$.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из Леммы 2.

Лемма 5. **Пусть** $a(t)\in\Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m>[n/2]$ **и** $\varphi\in\Phi_0$. **Тогда** $m_{\alpha,\gamma}(|\xi|)\,\widehat{\varphi}(\xi)\in\mathcal{R}_0\bigcap L_1$.

Из Лемм 4 и 5 следует

Теорема 5. **Пусть** $\dfrac{n-1}{2}<\mathrm{Re}\,\alpha<n$, $a(t)\in\Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$ **и** $m>[n/2]$. **Тогда для** $\varphi\in\Phi_0$ **справедливо равенство** (5).

4. Действие операторов $A^\alpha_{a,\gamma}$ в L_p. Следующая теорема легко доказывается на основе оценок (22).

Теорема 6. **Пусть** $\dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $1 \le p < \dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **и** $a(t) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1_+)$. **Тогда для** $\varphi \in \mathbf{L}_p$ **интеграл (3) абсолютно сходится и оператор** $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ **отображает**

$$\mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_s \quad \text{для} \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n+1}{2}, 1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}, \quad s \geq \frac{np}{n - p\operatorname{Re}\alpha},$$

$$\mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_s \quad \text{для} \quad \frac{n+1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, 1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}, \quad s = \frac{np}{n - p\operatorname{Re}\alpha},$$

$$\mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_s \quad \text{для} \quad \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n, \quad s > \frac{n}{n - \operatorname{Re}\alpha}.$$

Если $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$ **и** $m > n - \operatorname{Re}\alpha$, **то** $s \geq \dfrac{np}{n - p\operatorname{Re}\alpha}$, $p \neq 1$.

§4. ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ В ПРОСТРАНСТВАХ $\mathbf{L}_p$

1. Эллиптический и квазиэллиптический случаи. Эллиптический случай характеризуется условием $\inf\limits_{t>0}|a(t)| \neq 0$, а квазиэллиптический – $a(t) \neq 0$, $t > 0$ и один или оба предела $\lim\limits_{t\to 0} a(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$ равны нулю. В этом пункте строится обращение операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ в пространствах $\mathbf{L}_p$ в предположении, что $a(t)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$0 \neq a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+), m > [n/2], \quad |a(t)|^{-1} \exp\left\{-\eta t - \frac{\theta}{t}\right\} \leq c, \quad \eta, \theta \geq 0. \tag{26}$$

Примером функции, удовлетворяющей условиям (26) является функция $a(t) = \exp\{-t - t^{-1}\}$. Следующие две леммы легко следуют из Леммы 2.

Лемма 6. **Если** $a(t)$ **удовлетворяет условиям (26), то функция** $b^{\delta}_{\alpha,\varepsilon}(|x|)$ **из (7) принадлежит** $\mathbf{L}_1$.

Обозначим

$$K_\varepsilon(|\xi|) = \exp\left\{-\varepsilon|\xi|^{-2n}\right\} - 1, \quad K(|\xi|) = K_1(|\xi|),$$
$$k(|x|) = (F^{-1}K)(|x|), \quad k_\varepsilon(|\xi|) = \sqrt{\varepsilon}\, k(|\varepsilon^{1/(2n)}x|). \tag{27}$$

Лемма 7. **Функция** $k(|x|)$ **принадлежит** $\mathbf{L}_1$ **и**

$$\widehat{k}_\varepsilon(|\xi|) = K_\varepsilon(|\xi|), \qquad \|k_\varepsilon\|_1 = \|k\|_1, \qquad \|k_\varepsilon\|_\infty \leq c\sqrt{\varepsilon}. \tag{28}$$

Для доказательства формулы обращения нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 8. **Пусть** $\dfrac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$, $\varphi \in \mathbf{L}_p$ **и** $1 \le p < \dfrac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$. **Если** $a(t)$ **удовлетворяет условию (26), то**

$$B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon} A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x) = \delta W_\varepsilon Q_\varepsilon \varphi(x) + W_\varepsilon \varphi(x), \tag{29}$$

где $\delta = 0$ **в эллиптическом случае, 1 – в квазиэллиптическом, и** Q_ε **— оператор с символом** $K_\varepsilon(|\xi|)$.

Доказательство : Для $\varphi \in \Phi_0$ равенство (29) проверяется переходом к образам Фурье. Операторы в (29) ограничены и действуют из $\mathbf{L}_p$ в $\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q$, $q > \dfrac{np}{n - p\,\mathrm{Re}\,\alpha}$. Поскольку класс Φ_0 плотен в $\mathbf{L}_p$ для $p > 1$ (см. [3], §3), то (29) имеет место для $\varphi \in \mathbf{L}_p$, $p > 1$. Для $\varphi \in \mathbf{L}_1$ равенство (29) доказывается вначале в смысле Φ_0'-распределений, а далее так как две локально суммируемые функции из S' совпадающие в смысле Φ_0' могут отличаться лишь многочленом, то отсюда следует справедливость (29) для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Лемма 8 доказана.

Доказательство Теоремы 1 : В эллиптическом случае $\delta = 0$ и утверждение теоремы следует из (29). Для доказательства утверждения Теоремы 1 в квазиэллиптическом случае ($\delta = 1$), заметим, что $|Q_\varepsilon \varphi(x)| \leq \|k_\varepsilon\|_{p'} \|\varphi\|_p \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $1 \leq p < \infty$ следует из интерполяционного неравенства

$$\|k_\varepsilon\|_q \leq c\,\varepsilon^{(1-s)/2} \|k\|_1^s \|k\|_\infty^{1-s}, \qquad 1 < q \leq \infty, \qquad s = \frac{1}{q}.$$

Следовательно, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$W_\varepsilon Q_\varepsilon \varphi(x) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in \mathbf{L}_p, \quad 1 \leq p < \frac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}. \tag{30}$$

Теперь докажем, что

$$W_\varepsilon Q_\varepsilon \varphi \overset{(\mathbf{L}_p)}{\to} 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi \in \mathbf{L}_p, \quad 1 < p < \frac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}. \tag{31}$$

Для $\varphi \in S$ используя равенство Парсеваля и интерполяционное неравенство, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\|Q_\varepsilon \varphi\|_p \leq \|Q_\varepsilon \varphi\|_q^{1-s} \|Q_\varepsilon \varphi\|_2^s \leq c\,\|\varphi\|_q^{1-s}\, \|K_\varepsilon(|\xi|)\,\widehat{\varphi}\|_2^s \to 0, \tag{32}$$

где q таково, что $2 < p < q$ и $\dfrac{1}{p} = \dfrac{s}{2} + \dfrac{1-s}{q}$, $1 < p < \infty$. Так как

$$\|Q_\varepsilon \varphi\|_p \leq c\,\|k_\varepsilon\|_1 \|\varphi\|_p = c\,\|\varphi\|_p, \varphi \in \mathbf{L}_p,$$

из (32) получаем $\|Q_\varepsilon \varphi\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для $\varphi \in \mathbf{L}_p$ и $1 < p < \infty$. Откуда следует (31). Остается заметить, что $W_\varepsilon \varphi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ как по норме $\mathbf{L}_p$ при $1 \leq p < \infty$, так и почти всюду для $1 \leq p \leq \infty$. Теорема 1 доказана.

2. Описание образа $A^\alpha_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p)$ в эллиптическом и квазиэллиптическом случаях. В этом пункте приведено описание образа $A^\alpha_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p)$ в терминах обратного к $A^\alpha_{a,\gamma}$ оператора. Пусть X – одно из пространств, в которое согласно Теореме 6 ограниченно действует оператор $A^\alpha_{a,\gamma}$.

Теорема 7. **Пусть** $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ **и** $a(t)$ **удовлетворяет условию (26). Предположим, что** $1 \le p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **в эллиптическом случае и** $1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$ **в квазиэллиптическом случае. Тогда**

$$A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p) = \{f \in X: \ B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p\},$$

где $B^{\alpha}_{a,\gamma}$ **— оператор, определенный по (6), а предел понимается в смысле нормы пространства** $\mathbf{L}_p$.

Доказательство : Вложение $A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p) \subset \{f \in X: \ B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p\}$ следует из Теорем 1 и 6. Для доказательства обратного вложения предположим, что $f \in X$ и $B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p$. Для $\omega \in \Phi_0$ имеем

$$< A^{\alpha}_{a,\gamma} B^{\alpha}_{a,\gamma} f, \omega > = < B^{\alpha}_{a,\gamma} f, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}}\omega > = < \overset{(\mathbf{L}_p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon} f, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}}\omega > =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} < f, \overline{B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}}\, \overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}}\omega > = < f, \omega >,$$

где $\overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}}$ и $\overline{B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}}$ суть операторы с символами $\overline{m_{a,\gamma}(|\xi|)}$, $\overline{B^{\delta}_{a,\varepsilon}(|\xi|)}$ соответственно. Первое, третье и четвертое равенства в приведенной выше цепочке равенств обосновываются при помощи теоремы Фубини и очевидного соотношения

$$\overline{B^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon}}\,\overline{A^{\alpha}_{a,\gamma}}\,\omega \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{(\mathbf{L}_q)}{\longrightarrow}} \omega, \qquad \omega \in \Phi_0, \quad 1 < q < \infty.$$

Наконец, из равенства $< A^{\alpha}_{a,\gamma} B^{\alpha}_{a,\gamma} f, \omega > = < f, \omega >$ получаем $f(x) = A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x)$, $\varphi = B^{\alpha}_{a,\gamma} f \in \mathbf{L}_p$. Теорема 7 доказана.

В эллиптическом случае $(\inf_{t>0} |a(t)| \neq 0)$ возникает естественный вопрос о взаимосвязи образов операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ и $A^{\alpha}_{1,\gamma}$, где символ оператора $A^{\alpha}_{1,\gamma}$ равен $e^{i\gamma|\xi|}\,|\xi|^{-\alpha}$.

Теорема 8. **Пусть** $a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+)$, $m > [n/2]$ **и** $\inf_{t>0} |a(t)| \neq 0$. **Тогда** $A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p) = A^{\alpha}_{1,\gamma}(\mathbf{L}_p)$, $1 < p < \frac{n}{\operatorname{Re}\alpha}$.

Доказательство : следует из включений $a(|x|), \frac{1}{a(|x|)} \in M^p_p$.

3. Обращение операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ **в неэллиптическом случае.** Строя обращения операторов $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ мы используем идеи развитые в работе [16] при обращении операторов типа потенциала (1) в неэллиптическом случае.

Будем считать, что $a(t)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$a(t) \in \Lambda^m(\mathbb{R}^1_+), \quad m > [n/2], \quad \operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R}^1_+: \ a(t) = 0\} = 0. \tag{33}$$

Из Леммы 2 следует

Лемма 9. *Если $a(t)$ удовлетворяет (33), то функция $h^{\varepsilon,\delta}_{a,\gamma}(|x|)$ в (9) принадлежит пространству $\mathbf{L}_1$.*

Для доказательства формулы обращения будем пользоваться следующей леммой, которая доказывается аналогично Лемме 8.

Лемма 10. *Пусть $\dfrac{n-1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < n$, $1 \le p < \dfrac{n}{\mathrm{Re}\,\alpha}$, и $p \le 2$. Если $\mathrm{Re}\,\alpha < n/2$ и $a(t)$ удовлетворяет условию (33), то для $\varphi \in \mathbf{L}_p$ имеем*

$$T^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon,\delta}\, A^{\alpha}_{a,\gamma}\varphi(x) = W_\varepsilon\,\varphi(x) - i\,\delta\, M_{\varepsilon,\delta}\varphi(x), \tag{34}$$

где $T^{\alpha}_{a,\gamma,\varepsilon,\delta}$ определяется по (8) и $M_{\varepsilon,\delta}$ – оператор с символом

$$\omega_{\varepsilon,\delta}(|x|) = e^{-\varepsilon|\xi|^2}\,(|a(|\xi|)|^2 + i\,\delta)^{-1} \in M^2_2.$$

Теперь мы приступим к доказательству основного результата этой статьи.

Доказательство Теоремы 2 : С учетом (34) достаточно показать, что

$$\delta\,\|M_{\varepsilon,\delta}\,\varphi\|_2 \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{35}$$

Применяя равенство Парсеваля и теорему Лебега о мажорантной сходимости, получаем

$$\delta^2\|M_{\varepsilon,\delta}\varphi\|^2_2 = \delta^2 \left\| \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)}{|a(|\xi|)|^2 + i\delta} \right\|^2_2 =$$

$$= \delta^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2}{|a(|\xi|)|^4 + \delta^2}\, d\xi \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Применение указанной теоремы обосновано тем, что

$$\delta^2 \frac{\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2}{|a(|\xi|)|^4 + \delta^2} \le \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4}|\xi|^4\right)\left|\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2 \in \mathbf{L}_1 \quad \text{и}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^2 \frac{\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2\right)\widehat{W_{\varepsilon/2}\varphi}(\xi)\right|^2}{|a(|\xi|)|^4 + \delta^2} = 0$$

для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\xi \in \mathbb{R}^n : a(|\xi|) = 0\}$. Следовательно, формула (35) и поэтому и Теорема 2 доказаны.

ABSTRACT. The paper considers multiplicator operators $A^{\alpha}_{a,\gamma}$ with symbols $a(|\xi|)\,|\xi|^{-\alpha}\,e^{i\gamma|\xi|}$, $(n-1)/2 < \mathrm{Re}\,\alpha < n$, $\gamma > 0$ acting on functions $\varphi \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$. For $1 \le p < n/\mathrm{Re}\,\alpha$ they are often realized in the form of potential-type operators with kernels having exponential or logarithmic singularities on the sphere. Inversions of these operators on functions from $\mathbf{L}_p$ are constructed in the elliptic ($\inf\limits_{t>0}|a(t)| > 0$), quasi-elliptic ($a(t) \ne 0$, $t > 0$) and general nonelliptic ($\mathrm{mes}\,\{t > 0 : a(t) = 0\} = 0$) cases. For the first two cases the images $A^{\alpha}_{a,\gamma}(\mathbf{L}_p)$ are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Самко, "О пространствах риссовых потенциалов", Изв. АН СССР, Сер. Матем., том. 40, № 5, стр. 1143 — 1172, 1976.
2. С. Г. Самко, "К описанию образа $I^\alpha(\mathbf{L}_p)$ дробных интегралов (потенциалов Рисса)", Изв. АН Арм.ССР, Сер. Матем., том. 12, № 5, стр. 329 — 334, 1977.
3. С. Г. Самко, Гиперсингулярные Интегралы и их Приложения, Изд-во Ростовского Университета, Ростов, 208 стр., 1984.
4. S. G. Samko, "Inversion theorems for potential type integral transforms in $\mathbb{R}^n$ and on S^{n-1}", Integral Transforms and special functions, vol. 1, no. 2, pp. 145 — 163, 1993.
5. В. А. Ногин, Е. В. Сухинин, "Обращение и описание гиперболических потенциалов с $\mathbf{L}_p$-плотностями", Докл. РАН (Россия), том 329, № 5, стр. 550 — 552, 1993.
6. В. А. Ногин, Е. В. Сухинин, "Дробные степени оператора Клейна–Гордона–Фокса в $\mathbf{L}_p$-пространствах", Докл. РАН (Россия), том 341, № 2, стр. 166 — 168, 1995.
7. В. А. Ногин, Е. В. Сухинин, "Дробные степени оператора Шредингера в $\mathbf{L}_p$-пространствах", Препринт, ВИНИТИ, № 1190–В94, 23 стр., 12 Мая 1994.
8. A. P. Chegolin, V. A. Nogin, "Complex powers of the telegraph operator in L^p-spaces", Тезисы докладов конференции "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление", часть 1, стр. 118, Минск, 1996.
9. А. В. Абрамян, В. А. Ногин, "Комплексные степени гипоэллиптических операторов второго порядка с постоянными коэффициентами в $\mathbf{L}_p$ пространствах", Дифференциальные Уравнения, том 33, № 8, стр. 1134 — 1135, 1997.
10. В. А. Ногин, А. П. Чеголин, "Обращение некоторых интегральных операторов с вырождающимися и осциллирующими символами", Изв. Вузов, Сер. Математика, № 10, стр. 36 — 39, 1996.
11. И. С. Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений, 5-ое издание, Москва, Физматгиз, 1108 стр., 1971.
12. В. А. Ногин, С. Г. Самко, "О сходимости в $\mathbf{L}_p$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой", Препринт, ВИНИТИ, № 179-В81, 47 стр., 14 Января 1981.
13. J. Boman, "Saturation Problems and Distribution Theory", Lect. Notes Math., vol. 187, pp. 249 — 266, 1971.
14. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Минск, Наука и Техника, 688 стр., 1987.
15. М. М. Заволженский, В. А. Ногин, "Об одном методе обращения операторов типа потенциала", Препринт, ВИНИТИ, № 978-В91, 82 стр., 6 Марта 1991.
16. М. М. Заволженский, В. А. Ногин, "О методе обращения операторов типа потенциала", Докл. РАН (Россия), том 324, № 4, 1992.
17. С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев, "Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям первого рода", Труды МИАН, том 172, стр. 299 — 312, 1985.

22 Апреля 1998 Ростовский государственный университет

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА И ОЦЕНКИ ДЛЯ СИСТЕМ РИССА В $\mathbb{R}^{n+1}_+$

М. А. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 34, № 1, 1999

В статье установлен аналог хорошо известной теоремы Харди–Литтлвуда в круге для общих весов, ограниченных некоторыми условиями "регулярности", но не скоростью роста. Также получены оценки для системы Рисса в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $f(re^{i\varphi}) = u(re^{i\varphi}) + iv(re^{i\varphi})$, $\operatorname{Im} f(0) = v(0) = 0$ аналитична в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Теорема Харди–Литтлвуда [1] утверждает, что если при некоторых $0 < p \leq 1$ и $0 < \alpha < \infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leq \frac{1}{(1-r)^\alpha}, \qquad \text{то} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha},$$

где C – неотрицательная постоянная, зависящая лишь от p (см. [1] или [2]). Модификации этого результата полученные в работах [5] - [7], связаны со следующей задачей.

Какую оценку можно найти для $\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\, d\varphi$, чтобы имела место оценка $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leq \mu\left(\frac{1}{1-r}\right)$, где μ – положительная функция в $[0,1)$, рост которой в некотором смысле регулярный ?

В настоящей статье эта задача решена для функций из классов $H^p(\alpha)$ ($\alpha > -1$, $0 < p < \infty$), исследованных М. М. Джрбашяном в [8] и [9]. Эти классы содержат все функции $f(z)$, аналитические в $\mathbb{D}$ такие, что

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^\alpha |f(re^{i\vartheta})|^p\right)^{1/p} d\rho d\vartheta < \infty.$$

В [8], [9] было установлено следующее интегральное представление для функции $f \in H^p(\alpha)$ ($\alpha > -1$, $0 < p < \infty$) :

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2)^\alpha \frac{u(\rho e^{i\vartheta})}{(1-r\rho e^{i(\varphi-\vartheta)})^{\alpha+2}} \rho \, d\rho d\vartheta - \overline{f(0)}. \qquad (1)$$

Известно, что $H^p(\alpha)$ при $1 \leq p < \infty$ является банаховым пространством, а при $0 < p < 1$ – полным метрическим пространством с расстоянием $d(f,g) = \|f-g\|^p_{p,\alpha}$.

Для формулировки второй задачи нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x = (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = (x',x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$, где $x' = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ – проекция точки $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Далее введем обозначение $dm_{n+1}(x) = dx'dx_{n+1} = dx_1\cdots dx_n dx_{n+1}$ для меры Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Вектор-функция $u(x) = (u_1(x),\dots,u_n(x),u_{n+1}(x))$, заданная в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, с компонентами из класса C^1 назовем **гармоническим векторным полем** (или системой М. Рисса), если она удовлетворяет следующим условиям Коши-Римана :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i,k \leq n+1. \tag{2}$$

Если эти условия выполнены, то существует гармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция H такая, что $u = \nabla H$. Из (2) следует, что любая компонента гармонической функции $u(x',x_{n+1})$ представима в виде

$$u_j(x',x_{n+1}) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j u_{n+1}\left(t', \frac{x_{n+1}}{2}\right)\, dt'}{\left(|x'-t'|^2 + x_{n+1}^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad 1 \leq j \leq n+1 \tag{3}$$

(см., например, [10], Гл. 3).

Вторая задача, рассмотренная в статье, состоит в оценке интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x',x_{n+1})|\, dx', \quad k = 1,\dots,n,$$

при дополнительном предположении, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x',x_{n+1})|\, dx' \leq \mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right),$$

где μ – положительная функция на $[0,+\infty)$, а ее рост удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Если неоговорено иное, все наши условия регулярности предполагаются выполненными только в окрестности граничной точки.

Автор выражает свою благодарность А. М. Джрбашяну и К. Л. Аветисяну за внимание и поддержку.

§1. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА

1.1. Для решения первой задачи нам понадобится следующая Лемма Харди–Литтлвуда.

Лемма 1. Пусть

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^x e^{\psi(t)} dt, \quad x > 0,$$

где $\psi \in C^2(0, +\infty)$ и $\psi'(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$.

1°. Если $\psi'(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to +\infty$, то $\mathcal{J}(x) \sim xe^{\psi(x)}$ при $x \to +\infty$, и $\mathcal{J}(x) \le xe^{\psi(x)}$.

2°. Если существует $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^2} = L \neq \infty$, то $\mathcal{J}(x) \sim (1-L)^{-1} \frac{1}{\psi'(x)} e^{\psi(x)}$ при $x \to +\infty$. Следующая теорема является результатом статьи по первой задаче.

Теорема 1. Пусть $v(re^{i\varphi})$ и $u(re^{i\varphi})$ – гармонические сопряженные функции ($v(0) = 0$). Предположим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\varphi})|\, d\varphi \le \mu\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad 0 \le r < 1,$$

где $\mu(t) = \varphi(\log t)$, а $\varphi(t)$ – положительная и монотонно возрастающая функция на $[1, +\infty)$.

1°. Если $1/\psi'(t)$ – выпуклая функция и $l = \lim\limits_{t\to\infty} \psi'(t) > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r_\varepsilon \in [0, 1)$ такое, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\, d\varphi \le \frac{2}{\pi}\left[\left(1 + \frac{1}{l}\right)^{l+1} + \varepsilon\right] \mu\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r_\varepsilon \le r < 1.$$

2°. Если $1/\psi'(t)$ – выпуклая функция, $\lim\limits_{t\to\infty} \psi'(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} t\psi'(t) = K > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r_\varepsilon \in [0, 1)$ такое, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\, d\varphi \le \frac{2}{\pi}(1+\varepsilon)\frac{K}{K+1} \mu\left(\frac{1}{1-r}\right)\left[\psi'\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\right]^{-1}, \quad r_\varepsilon \le r < 1.$$

Доказательство : 1°. Представим u в виде интеграла Пуассона :

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\vartheta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Re\cos(\varphi - \vartheta) + r^2}\, d\vartheta,$$

где $0 \le r < R < 1$, $-\pi < \varphi \le \pi$. Из условий Коши-Римана имеем

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\vartheta}) \frac{(R^2 - r^2)\sin(\varphi - \vartheta)}{(R^2 - 2Re\cos(\varphi - \vartheta) + r^2)^2}\, d\vartheta.$$

Следовательно

$$\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(Re^{i\vartheta})| \frac{(R^2 - r^2)|\sin(\varphi - \vartheta)|}{(R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \vartheta) + r^2)^2}\, d\vartheta.$$

Так как $v(0) = 0$, то

$$|v(re^{i\varphi})| = \left|\int_0^r \frac{\partial v(te^{i\varphi})}{\partial t}\, dt\right| \le \int_0^r \left|\frac{\partial v(te^{i\varphi})}{\partial t}\right| dt.$$

Следовательно

$$|v(re^{i\varphi})| \le \frac{1}{\pi}\int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} |u(Re^{i\vartheta})| \frac{(R^2-t^2)|\sin(\varphi-\vartheta)|}{(R^2-2Rt\cos(\varphi-\vartheta)+t^2)^2}\, d\vartheta dt.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по интервалу $[-\pi,\pi]$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial v}{\partial r}(re^{i\varphi})\right| d\varphi \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(Re^{i\vartheta})| \frac{(R^2-r^2)|\sin(\varphi-\vartheta)|}{(R^2-2Rr\cos(\varphi-\vartheta)+r^2)^2}\, d\vartheta d\varphi.$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль $(0,r)$, и воспользуемся условиями, что $v(0) = 0$ и

$$|v(re^{i\varphi})| = \left|\int_0^r \frac{\partial v(te^{i\varphi})}{\partial t}\, dt\right| \le \int_0^r \left|\frac{\partial v(te^{i\varphi})}{\partial t}\right| dt.$$

Так как

$$\int_0^r\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial v}{\partial r}(te^{i\varphi})\right| d\varphi dt = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^r\left|\frac{\partial v}{\partial r}(te^{i\varphi})\right| dt d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{i\varphi})|\, d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^r\int_{-\pi}^{\pi}|u(Re^{i\vartheta})|(R^2-t^2)\, d\vartheta dt \int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin(\varphi-\vartheta)|}{(R^2-2Rt\cos(\varphi-\vartheta)+t^2)^2}\, d\vartheta dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^r\frac{dt}{R^2-t^2}\int_{-\pi}^{\pi}|u(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \le \frac{4}{\pi}\int_0^r\frac{1}{R^2-t^2}\mu\left(\frac{1}{1-R}\right) dt,$$

где $0 \le t \le r < R < 1$. Так как $\dfrac{4}{R^2-t^2} \le \dfrac{2+\delta}{R-t}$, то для любого $\delta > 0$ и $r \in (r_\delta, 1)$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{i\varphi})|\, d\varphi \le \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^r \mu\left(\frac{1}{1-R}\right)\frac{dt}{R-t}, \quad 0 \le r_\delta < r < R.$$

Следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{i\varphi})|\, d\varphi \le \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^r \min_{R>t}\frac{\mu\left(\frac{1}{1-R}\right)}{R-t}dt + C, \tag{1.1}$$

где $C > 0$ зависит только от μ и δ. Делая замену переменной $x = \log\frac{1}{1-t}$ и учитывая равенства $R - t = e^{-x}(1-e^{-\varepsilon})$, $dt = e^{-x}dx$

$$\mu\left(\frac{1}{1-R}\right) = \varphi\left(\log\frac{1}{1-R}\right) = e^{\psi\left(\log\frac{1}{1-R}\right)} = e^{\psi(x+\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0,$$

формулу (1.1) приводим к виду

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\,d\varphi \le \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} \min_{\varepsilon>0}\left\{e^{\psi(x+\varepsilon)}(1-e^{-\varepsilon})^{-1}\right\} dx \stackrel{def}{=} \mathcal{J}(r).$$

Нетрудно проверить, что минимум под интегралом достигается при $\psi'(x+\varepsilon_x)(1-e^{-\varepsilon_x})-e^{-\varepsilon_x}=0$, т.е. $\varepsilon_x=\log\left(1+\frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right)$. Причем

$$\min_{\varepsilon>0}\left\{e^{\psi(x+\varepsilon)}(1-e^{-\varepsilon})^{-1}\right\} = e^{\psi(x+\varepsilon_x)}\left(1+\psi'(x+\varepsilon_x)\right). \tag{1.2}$$

Ввиду условий 1°, для некоторого $\xi\in[x,x+\varepsilon_x]$ при $x\to+\infty$

$$\exp[\psi(x+\varepsilon_x)] = \exp[(\psi(x+\varepsilon_x)) + \psi(x)] = \exp[\psi(x)+\varepsilon_x\psi'(\xi)] =$$

$$= \psi'(x)\exp[\psi(x)]\exp\left[\log\left(1+\frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right)\right] \sim \left(1+\frac{1}{l}\right)^l \exp[\psi(x)].$$

Следовательно, в силу (1.2) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\,d\varphi \le \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x+\varepsilon_x)}(1+\psi'(x+\varepsilon_x))\,dx \sim$$

$$\sim \frac{2+\delta}{\pi}(l+1)\left(1+\frac{1}{l}\right)^l \int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x)}\,dx.$$

В случае 1° имеем $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^2}=0$. Тем самым, по Лемме 1

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\,d\varphi \le \frac{2+\delta}{\pi}(l+1)\left(1+\frac{1}{l}\right)^l \frac{\exp\left[\psi\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\right]}{\psi'\left(\log\frac{1}{1-r}\right)} \sim$$

$$\sim \frac{2+\delta}{\pi}\left(1+\frac{1}{l}\right)^l \mu\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Если $l=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon_x=0$. В этом случае $\psi'(t)$ – возрастающая функция, и следовательно

$$\log\frac{\psi'(x+\varepsilon_x)}{\psi'(x)} = \varepsilon_x\frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)} \le \frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)} \le \frac{\psi''(\xi)}{(\psi'(\xi))^2} = o(1), \quad x\le\xi<x+\varepsilon_x.$$

Таким образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\,d\varphi \le \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x+\varepsilon_x)}(1+\psi'(x+\varepsilon_x))\,dx =$$

$$= \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x+\varepsilon_x)+\varepsilon_x\psi'(\xi)}(1+\psi'(x+\varepsilon_x))\,dx \sim$$

$$\sim e\frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x)}\psi'(x)\,dx \sim e\frac{2+\delta}{\pi}\mu\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

что доказывает утверждение 1°.

2°. Если условия 2° выполнены, то $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_x = +\infty$, и функция $\psi'(t)$ убывая стремится к нулю при $t \to +\infty$. Имеем также

$$\min_{\varepsilon>0} \frac{e^{\psi(x+\varepsilon)}}{(1-e^{-\varepsilon})} = \frac{e^{\psi(x+\varepsilon_x)}}{(1-e^{-\varepsilon_x})} \geq \frac{e^{\psi(x)}}{(1-e^{-\varepsilon_x})} \sim e^{\psi(x)}, \tag{1.3}$$

и существует число $\xi \geq x$ такое, что

$$\begin{gathered}\min_{\varepsilon>0} \frac{e^{\psi(x+\varepsilon)}}{(1-e^{-\varepsilon})} \leq \exp\left\{\psi\left(x+\frac{1}{\sqrt{\psi'(x)}}\right)\right\}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\psi'(x)}}\right\}\right) \sim \\ \sim \exp\left\{\psi(x)+\frac{\psi'(x)}{\sqrt{\psi'(\xi)}}\right\}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Из (1.2), (1.3) и (1.4) следует асимптотическое равенство :

$$\mathcal{J}(r) \sim \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x)}\,dx \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Следовательно, остается применить Лемму 1 и заметить, что $\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^2} = L$ конечен (если $L = -\infty$, то интегрируя соотношение $1 = O(\psi''(t)/(\psi'(t))^2)$ легко прийти к $t = O(1/\psi'(t))$, что противоречит нашему предположению 2°). В силу Леммы 1 имеем

$$\mathcal{J}(r) = \frac{2+\delta}{\pi}(1-L)^{-1}\mu\left(\frac{1}{1-r}\right)\left[\psi'\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\right]^{-1} \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Таким образом, доказательство 2° завершается, так как $L = -(k+\varepsilon)^{-1}$.

3°. Как и раньше, $\lim_{x\to\infty} \varepsilon_x = +\infty$. Следовательно существует ε_x такое, что

$$\lim_{x\to+\infty} \varepsilon_x \inf_{t>x} \psi'(t) = 0.$$

Тогда, согласно (1.2) (1.3) и (1.4) приходим к следующему асимптотическому соотношению :

$$\mathcal{J}(r) \sim \frac{2+\delta}{\pi}\int_0^{\log\frac{1}{1-r}} e^{\psi(x)}\,dx \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Теперь остается заметить, что $\psi'(t) = O(t^{-1})$ при $t \to +\infty$ и применить Лемму 1. В результате получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leq \frac{2+\delta}{\pi}\mu\left(\frac{1}{1-r}\right)\log\frac{1}{1-r}.$$

Доказательство завершено.

1.2. Вернемся ко второй задаче. Следуя Ф. Шамояну [12], разобьем единичный круг $\mathbb{D}$ на следующие части :

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \ 1 - \frac{1}{2^k} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \ \frac{\pi l}{2^k} < \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k}, \right. \tag{1.5}$$
$$\left. l = -\overline{2^k : 2^k - 1}, \quad k = 0, 1, \ldots \right\}$$

и применим лемму, доказанную в [12].

Лемма 2 [12]. Пусть $v \in C(\mathbb{D})$, $U_\rho(w) = \{z \in \mathbb{D} : |z - w| < \rho\}$ **и** $d\sigma(\xi)$ – **элемент площади. Если для любого** $\rho \in (0, 1 - |w|)$

$$|v(w)| \leq \frac{A}{\pi \rho^2} \int_{U_\rho(w)} |v(\xi)| \, d\sigma,$$

то верна оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\xi \in \Delta_{k,l}} |v(\xi) \Delta_{k,l}| \leq \iint_{\mathbb{D}} |v(\xi)| \, d\sigma(\xi),$$

где $\Delta_{k,l}$ **определены по формуле (1.5) и** $|\Delta_{k,l}| = \sigma(|\Delta_{k,l}|)$.

Следующая теорема относится ко второй задаче.

Теорема 2. Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$ – **аналитичная функция в** $\mathbb{D}$, **и пусть** $f(z) \in H^p(\alpha)$ $(0 < p \leq 1, \ \alpha > -1)$. **Предположим, что** $\operatorname{Im} f(0) = v(0) = 0$ **и**

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq \mu\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad 0 \leq r < 1,$$

где функция $\mu(t)$ **удовлетворяет условию** $\mu(2t) \leq C\mu(t)$ $(t > t_0 > 0)$ **и** $\mu(t) = \varphi(\log t)$, **где** $\varphi(t)$ – **положительная, монотонно возрастающая функция на** $[0, +\infty)$. **Положим** $\psi(t) = \log \varphi(t)$.

1°. **Если** $\psi'(t) = o(t^{-1})$ **при** $t \to +\infty$, **то**

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leq C\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \log \frac{1}{1-r} \quad \text{при} \quad r \to 1 - 0.$$

2°. **Если существует** $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} = L$, **то**

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leq C \frac{\mu\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\psi'\left(\log \frac{1}{1-r}\right)} \quad \text{при} \quad r \to 1 - 0.$$

Доказательство : Ясно, что $f_R(z) = f(Rz)$ – ограниченная функция в $|z| < R < 1$. Следовательно, при $0 \leq r < R$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$ имеем

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \iint_{|\xi|<1} (1 - |\xi|^2)^\alpha \frac{u_R(\xi)}{(1 - \bar{\xi} z)^{\alpha+2}} \, d\sigma(\xi) - \overline{f_R(0)}.$$

Используя разбиение круга (1.5), элементарное неравенство $(a+b)^p \le a^p + b^p$ $(a, b > 0,\ 0 < p \le 1)$ и применяя Лемму 2 и соотношение $|\Delta_{k,l}| \sim (1-|\xi|^2)^2$, получим

$$|f_R(z)|^p \le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\xi \in \Delta_{k,l}} \frac{|u_R(\xi)|^p (1-|\xi|^2)^{\alpha p}}{|1-\bar{\xi} z|^{p(\alpha+2)}} |\Delta_{k,l}|^p \le$$

$$\le C \iint\limits_{|\xi|<1} \frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha p + 2p - 2} |u_R(\xi)|^p}{|1-\bar{\xi} z|^{p(\alpha+2)}} d\sigma(\xi), \quad |z| < R.$$

Следовательно, при $0 \le r < R$ и $-\pi < \varphi \le \pi$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \le C \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha p + 2p - 2} |u_R(\rho e^{i\vartheta})|^p}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\vartheta)}|^{p(\alpha+2)}} \rho \, d\rho d\vartheta d\varphi =$$

$$= C \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^{\alpha p + 2p - 2}}{(1-r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} \rho \, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} |u_R(\rho e^{i\vartheta})|^p d\vartheta d\varphi \le C[J_1(r) + J_2(r)],$$

где

$$J_1(r) = \int_0^r \frac{(1-\rho^2)^{\alpha p + 2p - 2}}{(1-r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} \rho \mu \left(\frac{1}{1-R\rho} \right) d\rho.$$

$$J_2(r) = \int_r^1 \frac{(1-\rho^2)^{\alpha p + 2p - 2}}{(1-r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} \rho \mu \left(\frac{1}{1-R\rho} \right) d\rho.$$

Так как $1 - r > 1 - \rho$ при $\rho \in [r, 1)$, то

$$J_2 \le \frac{1}{1-r} \int_r^1 \mu \left(\frac{1}{1-R\rho} \right) d\rho \le \mu \left(\frac{1}{1-R} \right) \sim \mu \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

В интеграле J_1 имеем $1 - r > 1 - \rho$. Так как $t < R < 1$, то получаем

$$J_1 \le \int_0^r \frac{\mu\left(\frac{1}{1-R\rho}\right)}{[(1-r) + r(1-\rho)]^{\alpha p + 2p - 1}} d\rho = \int_0^{Rr} \frac{\mu\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1 - \frac{t}{R}} \frac{dt}{R} \le \int_0^r \frac{\mu\left(\frac{1}{1-t}\right)}{R-t} dt.$$

Следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v_r(re^{i\varphi})|^p d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} |f_R(re^{i\varphi})|^p d\varphi \le C\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) + \int_0^r \frac{\mu\left(\frac{1}{1-r}\right)}{R-t} dt.$$

Если $x = \log(1-t)^{-1}$, то $\mu((1-t)^{-1}) = \exp\{\psi(x)\}$. Заменой переменной в последнем интеграле получим

$$\int_0^r \frac{\mu\left(\frac{1}{1-r}\right)}{R-t} dt = \int_0^{\log \frac{1}{1-r}} e^{\psi(x)} dx.$$

Применение Леммы 1 завершает доказательство.

§2. ОЦЕНКИ СИСТЕМЫ РИССА В $\mathbb{R}^{n+1}_+$

Теорема 3. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ – гармоническое векторное поле в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и $\lim\limits_{x_{n+1}\to+\infty} u_k(x', x_{n+1}) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u_{n+1}(x', x_{n+1})|\, dx' \le \mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right), \tag{2.1}$$

где функция $\mu(t)$ определена на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет $\mu(2t) \le C\mu(t)$ и $\mu(x^{-1}_{n+1}) = \varphi(log(1 + x^{-1}_{n+1}))$, причем $\varphi(t)$ монотонно убывает на $[0, +\infty)$, и $\psi(t) = -\log\varphi(t) = o(\log t)$ при $t \to +0$.

1°. Если $\psi'(t) = o(t^{-1})$ при $t \to +\infty$, то при $x_{n+1} \to +0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u_k(x', x_{n+1})|\, dx' \le C\mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

2°. Если существует $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^2} = l < +\infty$, то при $x_{n+1} \to +0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u_k(x', x_{n+1})|\, dx' \le C\frac{\mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)}{\psi'\left(\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)\right)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство : $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ является системой Рисса и справедлива формула (2.1). Следовательно, компоненты u представимы в виде (3), т.е.

$$u_k(x', x_{n+1}) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_k}{(|x' - t'|^2 + x^2_{n+1})^{\frac{n+1}{2}}} u_{n+1}\left(t', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dt', \quad k = 1, \dots, n+1,$$

где $C_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/\pi^{\frac{n+1}{2}}$ и $x_{n+1} \ge \delta > 0$. Эти компоненты удовлетворяют (2). Поэтому

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_{n+1}} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_k} = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2x_{n+1}(x_k - t_k)}{(|x' - t'|^2 + x^2_{n+1})^{\frac{n+3}{2}}} u_{n+1}\left(t', \frac{x_{n+1}}{2}\right) dt'$$

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_{n+1}}\right| \le C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_{n+1}\left(t', \frac{x_{n+1}}{2}\right)}{(|x' - t'|^2 + x^2_{n+1})^{\frac{n+1}{2}}}\, dt'.$$

Заметим теперь, что

$$|u(x', x_{n+1})| = \left|\int_{x_{n+1}}^{\infty} \frac{\partial u_k(x', t')}{\partial t}\, dt\right| \le \int_{x_{n+1}}^{\infty} \left|\frac{\partial u_k(x', t')}{\partial t}\right| dt.$$

Следовательно

$$|u_k(x', x_{n+1})| \le C \int_{x_{n+1}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|u_{n+1}\left(t', \frac{t}{2}\right)\right| \frac{dt'dt}{(|x' - t'|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Для продолжения доказательства нам понадобится следующая лемма, относящаяся к хорошо известному разбиению Уитни (см., например, [10], глава 6).

Лемма 3. **В $\mathbb{R}^{n+1}_+$ существует система замкнутых кубов $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ со сторонами, паралельными координатным осям такая, что**

(i) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \mathbb{R}^{n+1}_+$ **;**

(ii) внутренности Δ_k попарно непересекаются ;

(iii) $\operatorname{diam} \Delta_k = \operatorname{dist} \left(\Delta_k, C\mathbb{R}^{n+1}_+\right) \leq 4 \operatorname{diam} \Delta_k$ **;**

(iv) если Δ_k^* $(k \geq 1)$ – кубы с теми же центрами что и Δ_k, но растянутые с коэффициентом $5/4$, то система $\{\Delta_k^*\}_1^{\infty}$ образует конечное покрытие $\mathbb{R}^{n+1}_+$ (или, что то же самое, любой куб Δ_k^* $(k \geq 1)$ пересекается с не более чем 12^{n+1} кубами из $\{\Delta_k\}_1^{\infty}$).

Применив эту лемму для случая $x_{n+1} \geq \delta > 0$, получим

$$|u_k(x', x_{n+1})| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|x' - t^{(k)'}\right|^2 + \left(t^{(k)}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} |\Delta_k| \max_{(t't)\in\Delta_k} \left|u_{n+1}\left(t', \frac{t}{2}\right)\right|.$$

Следовательно

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x', x_{n+1})|\, dx' \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \max_{(t't)\in\Delta_k} \left|u_{n+1}\left(t', \frac{t}{2}\right)\right| |\Delta_k| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left|x' - t^{(k)'}\right|^2 + \left(t^{(k)}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx' \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \max_{(t't)\in\Delta_k} \left|u_{n+1}\left(t', \frac{t}{2}\right)\right| |\Delta_k| \left(t^{(k)}\right)^{-1}.$$

Согласно Лемме 2.2, [13]

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x', x_{n+1})|\, dx' \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \max_{(t't)\in\Delta_k} \left|u_{n+1}\left(t', \frac{t}{2}\right)\right| \left(t^{(k)}\right)^{-1} |\Delta_k| \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k^*} \left|u_{n+1}\left(t', \frac{t}{2}\right)\right| t^{-1}\, dt' dt \leq C \int_{x_{n+1}}^{+\infty} \mu\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}.$$

Обозначая $x = \log(1 + t^{-1})$ и используя

$$\mu\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi\left(\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) = \exp\left\{-\psi\left(\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)\right\} = e^{-\psi(x)},$$

получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x', x_{n+1})|\, dx' \leq C \int_0^{\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)} e^{\psi(x)} \frac{e^x}{e^x - 1} dx.$$

Если $x_{n+1} \to \infty$, то $x \to 0$, а интеграл остается сходящимся, поскольку $\psi(t) = O(\log t)$. С другой стороны, если $x_{n+1} \to +0$, то $x \to +\infty$. В этом случае

$e^{-\psi(x)}\frac{e^x}{e^x-1} \sim e^{-\psi(x)}$, где $\psi(x)$ - возрастающая функция. Лемма 1 завершает доказательство.

Теоремы 1 и 2 влекут следующий закон скорости роста : **скорость роста интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} |v(re^{i\vartheta})| d\vartheta$ не больше, чем скорость роста $\mu((1-r)^{-1})$, если скорость роста μ не меньше, чем скорость роста степенной функции. Если скорость роста μ меньше, чем скорость роста степенной функции, то скорость роста того же самого интеграла не больше, чем скорость роста $\mu((1-r)^{-1})F(-\log(1-r))$, где F – неубывающая функция на** $(0,+\infty)$.

Некоторые простые примеры показывают, что в круге возможны следующие скорости роста :

$$\log\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) = A\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\beta}, \quad A>0, \quad \alpha\geq 0, \quad \beta\geq 1,$$

$$\log\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) = A\log\frac{1}{1-r}\left(\log\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\right)^{\gamma}, \quad A>0, \quad \gamma\geq 1.$$

Отметим, что в Теоремах 2 и 3 μ растет медленнее, чем степенная функция.

ABSTRACT. An analog of the well-known Hardy–Littlewood theorem in the disk is established for general weights satisfying a "regularity" condition which does not restrict their growth. Also, some estimates are proved for the Riesz system in the upper half-space $\mathbb{R}^{n+1}_+$ of $\mathbb{R}^{n+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, J. E.Littlewood, "Some properties of conjugate functions", J. Reine Angew. Math., vol. 167, pp. 405 – 423, 1932.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Москва, Наука, 1965.
3. M. L. Cartwright, "On analytic functions regular in the unit circle I–II", Quart. J. Math. Oxford Ser., vol. 4, 1933.
4. G. H. Hardy, J. E.Littlewood, "Some more theorems containing Fourier series and Fourier power series", Duke Math. J., vol. 2, pp. 354 – 382, 1936.
5. C. N. Linden, "The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle", Quart. J. Math. Oxford Ser., vol. 2, pp. 196 – 316, 1956.
6. В. Н. Мацаев, "Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов", ДАН СССР, том 154, № 5, стр. 1034 – 1037, 1964.
7. Н. К. Никольский, "Избранные задачи весовой аппроксимации из спектрального анализа", Труды Мат. Инст. им. Стеклова, том 120, 1974.
8. М. М. Джрбашян, "О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге", ДАН Арм. ССР, том 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
9. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Матем. и Мех. АН Арм. ССР, том 2, стр. 3 – 40, 1948.
10. Н. Штейн, Сингулярные Интегралы и Дифференциальные Свойства Функций, Мир, Москва, 1978.
11. G. H. Hardy, Orders of Infinity, Cambridge, 1924.
12. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и вопросы представимости в некоторых классах функций, голоморфных в полидиске", Сиб. Мат. Журнал, том 31, № 2, стр. 197 – 215, 1990.
13. М. А. Закарян, "Параметрические представления и двойственность в весовых пространствах гармонических в полупространстве функций", Изв. АН Армении, Математика, том 32, № 5, стр. 69 – 80, 1997.

22 октября 1998 Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 34 НОМЕР 1 1999

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Грубая дифференцируемость гауссовских случайных полей на плоскости
Р. В. Амбарцумян 5

Асимптотическое поведение ошибки прогноза для стационарных случайных последовательностей
М. С. Гиновян 18

О сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам в метрике L^p, $p > 2$
М. Г. Григорян 37

Обращение некоторых операторов типа потенциала с особенностями ядер на сфере
В. А. Ногин, А. Н. Карапетянц 57

Обобщение теоремы Харди–Литтлвуда и оценки для систем Рисса в $\mathbb{R}_+^{n+1}$
М. А. Закарян 72