ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

В статье исследуется разрешимость краевых задач для нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, вырождающихся на части границы. Доказывается существование и единственность решений в специальных весовых функциональных пространствах.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В статье продолжаются исследования по разрешимости краевых задач для нелинейных эволюционных вырождающихся уравнений, начатые в работах авторов [1] — [3]. Получены результаты по разрешимости краевых задач для двух классов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, где вырождение происходит на границе и имеет несколько специальный характер. Для корректной постановки краевых задач мы доказываем их однозначную разрешимость в специальных весовых функциональных пространствах типа Соболева–Никольского.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Пусть Ω – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, лежащая в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ и $\Gamma_0 = \Gamma \bigcap \{x_n = 0\} \neq \emptyset$. Для нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка

$$L(u) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(x, \nabla u) + c(x, u) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ и $\nabla = (\partial_1, ..., \partial_n)$, рассмотрим следующую краевую задачу :

$$u|_{\Gamma^*} = 0, \tag{1.2}$$

где либо $\Gamma^* = \Gamma$, либо $\Gamma^* = \Gamma \setminus \Gamma_0$.

1.2. Мы будем исследовать разрешимость задачи (1.1), (1.2) в следующих функциональных пространствах.

Через $W^1_{p,\sigma}(\Omega)$, $p > 2$, $\sigma \subset \mathbb{R}^1$, обозначим весовой класс функций $u(x)$, определенных на Ω, для которых

$$\|u\|_{W^1_{p,\sigma}} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\partial_i u|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.3}$$

Известно [4], [5], что классы $W^1_{p,\sigma}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (1.3). Банаховые пространства с нормой

$$\|u\|_1 = \left(\int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |u(x)|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\partial_i u|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1.4}$$

обозначим через $W^1_{p,\sigma}(\Omega)$. Мы будем использовать банахово подпространство $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$, определенное как замыкание в норме (1.3) линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых и финитных на Ω функций. При $-1/p < \sigma < 1 - 1/p$ эти пространства имеют следующую структуру :

$$\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega) = \left\{ u \in W^1_{p,\sigma} : \quad u|_{\Gamma^*} = 0 \right\}. \tag{1.5}$$

Это следует из Теоремы 1.2.1 работы [4].

1.3. Опишем класс рассматриваемых операторов (1.1) :

i) Функции $a_i(x,\xi) \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n$, $c(x,\eta) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1)$ и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &|a_i(x,\xi)| \le C\, x_n^{p\sigma} \, |\xi|^{p-1}, \qquad |a_{ij}(x,\xi)| \le C\, x_n^{p\sigma} \, |\xi|^{p-2}, \\ &C_1 x_n^{p\sigma} \, |u|^p \le c(x,u)\, u \le C_2 x_n^{p\sigma} \, |u|^p, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $a_{ij}(x,\xi) = \dfrac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}$, а C, C_1, C_2 – некоторые положительные постоянные.

ii) Существуют положительные постоянные μ_i, $i = 1, \dots, 4$ такие, что

$$\mu_0 \, x_n^{p\sigma} \, |\xi|^p \le \sum_{i=1}^n a_i(x,\xi)\, \xi_i \le \mu_1 x_n^{p\sigma} \, |\xi|^p, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\xi)\, \xi_i \, \xi_j \ge \mu_2 \, x_n^{p\sigma} \, |\xi|^p, \tag{1.8}$$

$$\mu_3 x_n^{p\sigma} \, |u|^{p-2} \le \frac{\partial c(x,u)}{\partial u} \le \mu_4 x_n^{p\sigma} \, |u|^{p-2}$$

для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

1.4. Для определения обобщенного решения задачи (1.1), (1.2), рассмотрим нелинейную форму на гладких функциях u

$$< L(u), u >= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\partial_i a_i(x,\nabla u)\,u\,dx+\int_{\Omega}c(x,u)\,u\,du=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i(x,\nabla u)\,\partial_i u\,dx-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}a_i(x,\nabla u)\,u\,\cos(\nu,x_i)\,d\Gamma+\int_{\Omega}c(x,u)\,u\,dx, \tag{1.9}$$

где ν – внешняя нормаль к поверхности Γ.

Для $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ имеем $u|_{\Gamma_1}=0$. Замечая, что $\cos(\nu,x_i)=0$, $i=1,2,\dots,n-1$ на Γ_0 и $\cos(\nu,x_n)=-1$, из (1.9) будем иметь

$$< L(u), u >= \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i(x,\nabla u)\,\partial_i u\,dx+\int_{\Omega}c(x,u)\,u\,dx+\int_{\Gamma_0}a_n(x,\nabla u)\,u\,d\Gamma. \tag{1.10}$$

Функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ при $\sigma\geq 1-1/p$, вообще говоря, не обращаются в нуль на Γ_0.

Предложение 1.1. Для $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ и $\sigma\geq 1-1/p$ существует

$$\int_{\Gamma_0}a_n(x,\nabla u)\,u\,d\Gamma=0. \tag{1.11}$$

Доказательство : Допустим противное, пусть $\lim\limits_{x_n\to 0}a_n(x,\nabla u)\,u\neq 0$. Если $x_n>0$ достаточно мало, то в силу (1.7)

$$x_n^{-\sigma}\,a_n(x,\nabla u)\geq\frac{x_n^{-\sigma}}{2}\,w(x'), \tag{1.12}$$

где $w(x')=\lim\limits_{x_n\to 0}a_n(x,\nabla u)$. Из (1.6) и (1.12) следует

$$x_n^{-\sigma+p\sigma}|\partial_i u|^{p-1}\geq x_n^{-\sigma}\frac{w(x')}{2}.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень q, после интегрирования получим

$$\int_0^{x_n}\int_{\Gamma_0}x_n^{p\sigma}\,|\partial_i u|^p\,d\Gamma\,dx_n\geq\int_0^{x_n}x_n^{-q\sigma}\left[\int_{\Gamma_0}\left|\frac{w(x')}{2}\right|^q d\Gamma\right]dx_n,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Отсюда следует, что при $\sigma\geq 1-1/p$ интеграл справа расходится. В то же время, интеграл в левой части неравенства сходится, так как $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$. Это противоречие завершает доказательство.

Лемма 1.1. Пусть выполнены условия (1.6). Тогда оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ в сопряженное пространство $(\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega))^*$, является ограниченным.

Доказательство : Пусть $B = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega): \quad \|u\| \le R < \infty\}$ – произвольное ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$. Для любого фиксированного элемента $u^* \in B$ рассмотрим линейный функционал, действующий в $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$:

$$l(v) = < L(u^*), v > = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, \nabla u^*)\, \partial_i v \, dx + \int_\Omega c(x, u^*)\, v \, dx. \tag{1.13}$$

В силу (1.6), (1.4) и неравенства Гельдера

$$|l(v)| \le C \left[\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla u^*|^{p-1} \, |\partial_i v| \, dx + \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |u^*|^{p-1} \, |v| \, dx \right] =$$

$$= C \left[\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega x_n^{(p-1)\sigma} \, |\nabla u^*|^{p-1} \, x_n^\sigma \, |\partial_i v| \, dx + \int_\Omega x_n^{(p-1)\sigma} \, |u^*|^{p-1} \, x_n^\sigma \, |v| \, dx \right] \le$$

$$\le C_1 \, \|u^*\|^{p-1} \, \|v\|_1 \le C_1 \, R^{p-1} \, \|v\|_1.$$

Следовательно

$$\|L(u^*)\|_{(\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega))^*} \le C_1 \, R^{p-1}, \qquad u^* \in B, \tag{1.14}$$

т.е. оператор L ограничен. Лемма доказана.

Замечание 1.1. Для $f \in L_{q,-\sigma}(\Omega)$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$ линейный функционал

$$< f, v > = \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx,$$

действующий в $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$, является ограниченным. Так как $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega) \subset L_{p,\sigma}(\Omega)$, то имеем $< f, v > = \int_\Omega x_n^{-\sigma} \, f(x) \, x_n^\sigma \, v(x) \, dx$, откуда следует

$$| < f, v > | \le \|f\|_{L_{q,-\sigma}} \, \|v\|_{L_{p,\sigma}} \le C \, \|f\|_{L_{q,-\sigma}} \, \|v\|_1.$$

Утверждение доказано.

Предложение 1.1, Лемма 1.1 и Замечание 1.1 приводят к следующему определению.

Определение 1.1. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), если для любых $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ и $f \in L_{q,-\sigma}(\Omega)$ имеет место

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, \nabla u) \, \partial_i v \, dx + \int_\Omega c(x, u) \, v \, dx = \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx. \tag{1.15}$$

§2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе будет доказана однозначная разрешимость задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. Пусть оператор L, действующий из $\mathring{W}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ в $\left(\mathring{W}^1_{p,\sigma}(\Omega)\right)^*$, удовлетворяет условиям i), ii). Тогда для любого $f \in L_{q,-\sigma}(\Omega)$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство : Применяя "метод монотонности" [6], [7], установим ряд свойств оператора L.

1°. Пусть $u \in \mathring{W}^1_{p,\sigma}(\Omega)$. Рассмотрим нелинейную форму

$$< L(u), u >= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, \nabla u)\, \partial_i u\, dx + \int_\Omega c(x, u)\, u(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Из (1.6), (1.7) имеем

$$\begin{aligned} < L(u), u >&\geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega x_n^{p\,\sigma}\, |\partial_i u|^p\, dx + C_1 \int_\Omega x_n^{p\sigma}\, |u(x)|^p\, dx \geq \\ &\geq C_0\, \|u\|_1^p = h(\|u\|_1)\, \|u\|_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $C_0 = \min(\mu_0, C_1)$ и $h(r) = C_0\, r^{p-1} \to \infty$ при $r \to \infty$.

2°. Докажем полунепрерывность оператора L. Пусть $u \in \mathring{W}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ и пусть последоватвельность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in \mathring{W}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ такова, что

$$\|u_k - u\|_1 \to 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.3}$$

Учитывая (1.6), (1.8), для любого $v \in \mathring{W}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ находим

$$\begin{aligned} &|L(u_k), v > - < L(u), v > | = \\ &= \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, \nabla u + \tau(\nabla u_k - \nabla u))}{\partial \xi_j}\, \partial_j(u_k - u)\, \partial_i v\, dx\, d\tau + \right. \\ &\left. + \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial c(x, u + \tau(u_k - u))}{\partial \tau}\, (u_k - u)\, v(x)\, dx\, d\tau \right| \leq \\ &\leq C \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \int_0^1 x_n^{p\,\sigma}\, |\nabla u + \tau\, \nabla(u_k - u)|^{p-2}\, |\partial_j(u_k - u)|\, |\partial_i v|\, dx\, d\tau + \\ &+ \int_\Omega \int_0^1 x_n^{p\,\sigma} |u + \tau(u_k - u)|^{p-2}\, |u_k - u|\, |v(x)|\, dx\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Оценим интегралы

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^1 x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla u + \tau \nabla(u_k - u)|^{p-2} \, |\partial_j (u_k - u)| \, |\partial_i v| \, dx \, d\tau \leq \\
&\leq C_1 \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, \left[|\nabla u|^{p-2} + |\nabla(u_k - u)|^{p-2} \right] \, |\partial_j (u_k - u)| \, |\partial_i v| \, dx = \\
&= C_1 \left(\int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla u|^{p-2} \, |\partial_j (u_k - u)| \, |\partial_i v| \, dx + \right. \\
&\left. + \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla (u_k - u)|^{p-2} \, |\partial_j (u_k - u)| \, |\partial_i v| \, dx \right) \leq \\
&\leq C_2 \left(\int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, \left[|\nabla u|^{p-1} + |\partial_i v|^{p-1} \right] \, |\partial_j (u_k - u)| \, dx + \right. \\
&\left. + \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla (u_k - u)|^{p-2} \, |\partial_j (u_k - u)| \, |\partial_i v| \, dx \right).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Оценим теперь интегралы в правой части последнего неравенства. В силу (2.3), имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla u|^{p-1} \, |\partial_j (u_k - u)| \, dx = \int_\Omega x_n^{(p-1)\,\sigma} \, |\nabla u|^{p-1} \, x_n^{\sigma} \, |\partial_j (u_k - u)| \, dx \leq \\
&\leq \left(\int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\partial_j (u_k - u)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega x_n^{q(p-1)\,\sigma} \, |\nabla u|^{q(p-1)} \, dx \right)^{1/q} \leq \\
&\leq \|u_k - u\|_1 \, \|u\|_1^{p/q} \to 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Остальные интегралы в (2.4), (2.5) оцениваются аналогично. Таким образом, из (2.4) — (2.6) следует

$$
| < L(u_k), v > - < L(u), v > | \to 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty,
$$

т.е. оператор L полунепрерывен.

3°. Для доказательства монотонности оператора L берем произвольно $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$. В силу (1.8) имеем

$$
\begin{aligned}
&< L(u) - L(v), u - v >= \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial a_i(x, \nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v))}{\partial \xi_j} \, \partial_j (u - v) \, \partial_i (u - v) \, dx \, d\tau + \\
&+ \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial c(x, v + \tau(u - v))}{\partial \xi} \, (u - v)^2 \, dx \, d\tau \geq \\
&\geq \mu_2 \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} \, |\nabla (u - v)|^p \, dx + \mu_3 \int_\Omega x_n^{p\,\sigma} |u - v|^p \, dx \geq \mu \|u - v\|_1^p,
\end{aligned}
$$

где $\mu = \min\{\mu_2, \mu_3\}$. Это доказывает монотонность оператора L. Следовательно, выполнены условия Теоремы 13 из [6] в стационарном случае. Отсюда следует Теорема 2.1. Доказательство завершено.

§3. РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе рассматриваем смешанную краевую задачу для нелинейного вырождающегося параболического уравнения

$$u_t + L(u) = f(t,x) \tag{3.1}$$

в цилиндре $Q_T = (0,T) \times \Omega$, а оператор L вида (1.1). Условия следующие :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$u|_{\Gamma^*} = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.3}$$

Разрешимость задачи (3.1) — (3.3) опирается на одну общую теорему существования, полученную в [6]. Введем следующие обозначения.

Пусть X – банахово пространство, а X^* – пространство линейных непрерывных функционалов над X. Обозначим через $L_p(0,T;X)$ $(p>1)$ пространство функций $u(t) : [0,T] \to X$ с нормой

$$\|u\| = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}, \tag{3.4}$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма банахова пространства X.

Пусть $A(t,u)$ – нелинейный, монотонный оператор, зависящий от параметра $t \in [0,T]$ и действующий из $L_p(0,T;X)$ в сопряженное пространство $L_q(0,T;X^*)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$u' + A(t,u) = h, \tag{3.5}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{3.6}$$

где $h(t) \in L_q(0,T;X^*)$.

Наконец, через $H(u_0)$ обозначим пространство функций $u(t) \in L_p(0,T;X)$ таких, что $u' \in L_q(0,T;X^*)$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in X$.

Теорема А, [6]. Если выполнены следующие условия :

1) справедливо неравенство

$$< A(t,u), u > \ge C_0 \|u\|_X^p - k(t) \tag{3.7}$$

для почти всех $t \in [0,T]$ и любого $u(t) \in L_p(0,T;X)$ с некоторой постоянной $C_0 > 0$, где $k(t)$ ограниченная функция ;

2) оператор $A(t,u)$ ограничен и полунепрерывен ;

тогда отображение

$$L(u) = u' + A(t,u): \quad H(u_0) \to L_q(0,T;X^*)$$

есть эпиморфизм, т.е. для любого $h \in L_q(0,T;X^*)$ задача (3.5), (3.6) разрешима.

Теорема 3.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям i), ii) §1, а $f \in L_q(0,T;\left(\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)\right)^*)$. Тогда для любого $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)$ задача (3.1) — (3.3) имеет единственное обобщенное решение $u \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega))$.

Доказательство : **Существование.** Согласно рассуждениям, проведенным в доказательстве Леммы 1.2 в [3] и Леммы 1.1 в §1 настоящей статьи, оператор L, действующий из $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega))$ в $L_q\left(0,T;\left(\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)\right)^*\right)$ ограничен.

Так как коэффициенты уравнения не зависят от временной переменной, то повторяя доказательство Теоремы 2.1, получим монотонность и полунепрерывность оператора L. Применяя Теорему А, доказываем существование обобщенного решения задачи (3.1) — (3.3).

Единственность. Пусть $u_1, u_2 \in H(u_0)$ - два решения задачи (3.1) — (3.3). Тогда $u_1 - u_2$ удовлетворяют тождеству

$$(u_1 - u_2)_t + L(u_1) - L(u_2) = 0 \tag{3.8}$$

и

$$(u_1 - u_2)|_{t=0} = 0. \tag{3.9}$$

Из (3.8) получим

$$\int_0^\tau < (u_1 - u_2)_t, u_1 - u_2 > dt + \int_0^\tau < L(u_1) - L(u_2), u_1 - u_2 > dt = 0 \tag{3.10}$$

для почти всех $\tau \in [0,T]$. Последние интегралы существуют, так как $(u_1 - u_2)_t$ и $L(u)$ принадлежат пространству $L_q(0,T;\left(\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\sigma}(\Omega)\right)^*)$.

В силу монотонности оператора L и (3.10), имеем

$$\int_0^\tau < (u_1 - u_2)_t, u_1 - u_2 > dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\|u_1 - u_2\|^2_{L_2} dt \le 0.$$

Поскольку $p > 2$, то очевидно, что $u_1 - u_2 \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Теперь, используя начальное условие (3.9), из предыдущего неравенства получим

$$\int_\Omega |u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)|^2 dx = 0.$$

Так как τ произвольно, то $u_1 = u_2$ в цилиндре Q_T. Этим завершается доказательство Теоремы 3.1.

ABSTRACT. The paper studies solvability of the boundary value problems for nonlinear elliptic and parabolic equations of second order that degenerate on a part of the boundary. The existence and uniqueness of solutions in special weight functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная задача для нелинейных вырождающихся систем типа Соболева", Изв. АН Армении, Математика, том 28, № 3, стр. 18 – 30, 1993.
2. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Начально–краевая задача для вырождающихся нелинейных уравнений типа Соболева высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, том 30, № 1, стр. 21 – 36, 1995.
3. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная краевая задача для квазилинейных вырождающихся эволюционных уравнений высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, том 31, № 3, стр. 2 – 23, 1996.
4. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, Н. В. Мирошин, "Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений", Изв. ВУЗ-ов, сер. Матем., том 8 (315), стр. 4 — 30, 1988.
5. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью", Труды МИ АН СССР, том 163, стр. 157 — 183, 1983.
6. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка", Усп. Мат. Наук, том 23, № 1 (123), стр. 45 — 90, 1968.
7. Ж. – Л. Лионс, Некоторые Методы Решения Нелинейных Краевых Задач, Москва, Мир, 1972.

27 апреля 1997

Ереванский государственный университет

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА

В. С. Закарян, Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Получена связь между классической и обобщенной задачей Гильберта и предложены некоторые эффективные методы решения обобщенной задачи. Результаты применяются к задаче Пуанкаре для уравнения Лапласа.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – достаточно гладкая, простая замкнутая кривая, содержащаяся в кольце $r < |z| < R$ и охватывающая окружность $|z| = r$. Обозначим через D^+ область, ограниченную контуром Γ и окружностью $|z| = r$, а через D^- – область, ограниченную контуром Γ и окружностью $|z| = R$. Пусть Γ_1 и Γ_2 означают окружности $|z| = r$ и $|z| = R$, соответственно.

Рассмотрим следующую обобщенную задачу Гильберта : найти функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в областях D^+ и D^-, соответственно, и удовлетворяющие граничным условиям

$$a(z)\varphi(z) = \psi(z) + f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{0.1}$$

$$\varphi(\gamma_1 z) = \varphi(\gamma_1 \bar{z}), \quad z \in \Gamma_1, \tag{0.2}$$

$$\psi(\gamma_2 z) = \psi(\gamma_2 \bar{z}), \quad z \in \Gamma_2, \tag{0.3}$$

где γ_1 и γ_2 – постоянные, $|\gamma_1| = |\gamma_2| = 1$, $a(z)$ и $f(z)$ – некоторые функции, заданные на Γ. Предположим, что функции $a(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гельдера, а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ непрерывны в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$, соответственно. Предполагается, что $a(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$. В (0.2) и ниже $\bar{z}$ означает комплексное сопряженное точки z.

В предельном случае, когда $R \to \infty$, $r \to 0$, мы получаем обычную задачу Гильберта (см. [1], стр. 146 и [2], стр. 49). При $f = 0$ задача (0.1) – (0.3) называется однородной.

Целью данной работы является исследование связей между классической и обобщенной задачей Гильберта и получение эффективных методов решения обобщенной задачи. Результаты применяются к задаче Пуанкаре для уравнения Лапласа.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть G^+ и G^- – области с границей Г. Предположим, что G^- неограничена. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические функции в D^+ и D^-, непрерывные в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$, соответственно, и удовлетворяют условиям (0.2) и (0.3).

Лемма 1. Существуют и единственны функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, такие что

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_1^2 r^2\right), \quad z \in D^+, \tag{1.1}$$

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2^2 R^2\right), \quad z \in D^-, \tag{1.2}$$

причем $\varphi_1(z)$ и ограниченная на бесконечности $\psi_1(z)$, аналитичны в G^+ и G^- и непрерывны в замкнутых областях $\overline{G^+}$ и $\overline{G^-}$, соответственно.

Доказательство : Согласно формуле Коши (см. [3], стр. 54)

$$\psi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{1.3}$$

где $\Phi_1(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$, а $\Phi_2(z)$ аналитична в G^-, непрерывна в замкнутой области $\overline{G^-}$ и равна нулю на бесконечности. Подставляя функцию $\psi(z)$ из (1.3) в (0.3), получим

$$\Phi_1(\gamma_2 z) + \Phi_2(\gamma_2 z) = \Phi_1(\gamma_2 \overline{z}) + \Phi_2(\gamma_2 \overline{z}), \quad |z| = R. \tag{1.4}$$

Так как $\overline{z} = z^{-1}R^2$ при $|z| = R$, то условие (1.4) принимает вид

$$\Phi_1(\gamma_2 z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) = \Phi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) - \Phi_2(\gamma_2 z), \quad |z| = R. \tag{1.5}$$

Функция $\Phi_1(\gamma_2 z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right)$ аналитична в круге $|z| < R$, а $\Phi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) - \Phi_2(\gamma_2 z)$ аналитична в области $|z| > R$ и стремится к $\Phi_1(0)$ при $|z| \to \infty$. Тогда, согласно теореме Лиувилля (см. [3], стр. 64)

$$\Phi_1(\gamma_2 z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) = \Phi_1(0), \quad |z| < R, \tag{1.6}$$

$$\Phi_1\left(\frac{1}{z}\gamma_2 R^2\right) - \Phi_2(\gamma_2 z) = \Phi_1(0), \quad |z| > R. \tag{1.7}$$

Равенства (1.6) и (1.7) эквивалентны. Подставляя Φ_1 из (1.6) в (1.3), получим представление (1.2), где $\psi_1(z) = \Phi(z) + \Phi_1(0)/2$.

Теперь докажем, что в (1.2) функция $\psi_1(z)$ определяется через $\psi(z)$ единственным образом, т.е. если $\psi(z) \equiv 0$, то $\psi_1(z) \equiv 0$. Действительно, если $\psi(z) \equiv 0$, то из (1.2) имеем $\psi_1(z) = -\psi_1(\gamma_2^2 \bar{z})$ для $|z| = R$. Разлагая функцию $\psi_1(z)$ в ряд Лорана в области $|z| \geq R$, получим $\psi_1(z) \equiv 0$. Так как $\psi_1(z)$ ограничена на бесконечности, то ряд Лорана не содержит положительных степеней z.

Легко проверить, что любая функция вида (1.2) удовлетворяет условию (0.3). Аналогично доказывается представление (1.1). Из представлений (1.1) и (1.2) следует, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в окрестностях окружностей Γ_1 и Γ_2, соответственно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $\varphi(z)$ аналитична в области D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяет условию (0.2), то она представляется в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^k + (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{m+1} \varphi_0(z), \quad z \in D^+, \tag{1.8}$$

где m – натуральное число, $c_0, ..., c_m$ – постоянные, а $\varphi_0(z)$ аналитична в D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяет условию (0.2). Постоянные $c_0, ..., c_m$ и функция $\varphi_0(z)$ определяются через $\varphi(z)$ единственным образом.

Доказательство : Обозначим

$$\varphi_m(z) = \varphi(z) - \sum_{k=0}^{m} c_k (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^k. \tag{1.9}$$

Из представления (1.8) следует

$$\varphi_m(z) = \varphi_0(z)(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{m+1}. \tag{1.10}$$

Дифференцируя обе части (1.10) j раз и подставляя $z = i\gamma_1 r$, получим

$$\varphi_m^{(j)}(i\gamma_1 r) = 0, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{1.11}$$

Подставляя $\varphi_m(z)$ из (1.9) в (1.11), получим систему алгебраических уравнений для постоянных $c_0, ..., c_m$:

$$\sum_{k=0}^{j} a_{jk} c_k = \varphi^{(j)}(i\gamma_1 r), \quad a_{jj} \neq 0, \quad j = 0, 1, ..., m. \tag{1.12}$$

Из системы (1.12) постоянные $c_0, ..., c_m$ определяются однозначно. Следовательно, функция $\varphi_m(z)$ в (1.10) корректно определена и удовлетворяет условиям (1.11). Так как функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (0.2), то функция $\varphi_m(z)$ также удовлетворяет (0.2). Из (1.11) получим $\varphi_m^{(j)}(-i\gamma_1 r) = 0$, $j = 0, 1, ..., m$. Из (1.10)

$$\varphi_0(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-m-1}\varphi_m(z).$$

Ясно, что функция $\varphi_0(z)$ аналитична в области D^+, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$ и удовлетворяет (0.2). Единственность представления (1.10) очевидна. Лемма 2 доказана.

§2. ЗАДАЧА (0.1) – (0.3)

1. Сначала рассмотрим обобщенную задачу Гильберта (0.1) – (0.3) при $a(z) \equiv 1$. Подставляя $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (1.1), (1.2) в (0.1), получим

$$\varphi_1(z) - \psi_1(\gamma_2^2 R^2 z^{-1}) = \psi_1(z) - \varphi_1(\gamma_1^2 r^2 z^{-1}) + f(z), \quad z \in \Gamma. \tag{2.1}$$

Функция $\varphi_1(z) - \psi_1(\gamma_2^2 R^2 z^{-1})$ аналитична в G^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{G^+}$, а функция $\psi_1(z) - \varphi_1(\gamma_1^2 r^2 z^{-1})$ аналитична в G^-, непрерывна в $\overline{G^-}$ и ограничена на бесконечности. Граничное условие (2.1) определяет эти функции формулами (см. [1], стр. 135)

$$\varphi_1(z) - \psi_1(\gamma_2^2 R^2 z^{-1}) = F(z) + c, \quad z \in G^+, \tag{2.2}$$

$$\psi_1(z) - \varphi_1(\gamma_1^2 r^2 z^{-1}) = F(z) + c, \quad z \in G^-, \tag{2.3}$$

где c – произвольная комплексная постоянная и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t - z}\,dt.$$

Подставляя $\psi_1(z)$ из (2.3) в (2.2), получим

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(\rho z) + F(\gamma_2^2 R^2 z^{-1}) + F(z) + 2c, \quad z \in G^+, \tag{2.4}$$

где $\rho = r^2\gamma_1^2 R^{-2}\gamma_2^{-2}$. Устремляя $z \to 0$, находим $c = -\frac{1}{2}F(0)$. Функция $\varphi_1(z)$ представима в виде

$$\varphi_1(z) = c_0 + z\Phi(z), \tag{2.5}$$

где функция $\Phi(z)$ аналитична в G^+ и непрерывна в $\overline{G^+}$, а c_0 – комплексная постоянная. Подставляя c и $\varphi_1(z)$ из (2.5) в (2.3) и (2.4), получим

$$\psi_1(z) = c_0 + \gamma_1^2 r^2 z^{-1}\Phi(\gamma_1^2 r^2 z^{-1}) + F(z) - \frac{1}{2}F(0), \tag{2.6}$$

$$\Phi(z) = \rho\Phi(\rho z) + F_0(z), \tag{2.7}$$

где

$$F_0(z) = \frac{1}{z}\left[F(z) - F(0) + F(\gamma_2^2 R^2 z^{-1})\right].$$

Отметим, что функция $F_0(z)$ аналитична в G^+ и непрерывна в $\overline{G^+}$. Из (2.7) получим оценку

$$|\rho\Phi(\rho z)| \leq \frac{r^2}{R^2}||\Phi||, \quad ||\Phi|| = \max_{z\in G^+}|\Phi(z)|. \tag{2.8}$$

Так как $r < R$, то из неравенства (2.8) следует, что уравнение (2.7) имеет единственное решение. Легко проверить, что функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k F_0(\rho^k z) \tag{2.9}$$

является решением уравнения (2.7). Взяв

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k F_0(\rho^k z)$$

в качестве n-го приближения, погрешность приближенного решения можно оценить неравенством

$$|\Phi(z) - \Phi_n(z)| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}||F_0||.$$

Если $f \equiv 0$, то $\Phi(z) \equiv 0$, $\psi(z) = \varphi(z) \equiv 2c_0$, где c_0 – произвольная комплексная постоянная. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. При $a = 1$ однородная задача (0.1) – (0.3) имеет одно линейно независимое (в поле комлексных чисел) решение $\varphi(z) = \psi(z) = c$, а неоднородная задача (0.1) – (0.3) всегда разрешима и частное решение определяется формулами (1.1), (1.2), (2.5), (2.6) и (2.9) (при $c_0 = 0$).

2. Рассмотрим теперь случай, когда функция $a(z)$ в (0.1) имеет вид $a(z) = z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1}$. Обозначая

$$\Phi(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\varphi(z), \tag{2.10}$$

граничные условия (0.1) – (0.3) запишутся в виде

$$\Phi(z) = \psi(z) + f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.11}$$

$$\Phi(\gamma_1 z) = \Phi(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \tag{2.12}$$

$$\psi(\gamma_2 z) = \psi(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2. \tag{2.13}$$

Мы доказали, что задача (2.11) – (2.13) всегда разрешима, и общее решение определяется формулой

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + c, \quad \psi(z) = \psi_0(z) + c, \tag{2.14}$$

где $(\Phi_0(z), \psi_0(z))$ – частное решение задачи (2.11) – (2.13), а c – произвольная комплексная постоянная. Подставляя $\Phi(z)$ из (2.14) в (2.10), имеем

$$(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\varphi(z) = \Phi_0(z) + c. \tag{2.15}$$

Подставляя $z = i\gamma_1 r$ в (2.14), получим $c = -\Phi_0(i\gamma_1 r)$. Так как функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет условию (2.12), то для нее имеет место представление (1.1) при $\varphi(z) = \Phi_0(z)$. Следовательно, $\Phi_0(i\gamma_1 r) = \Phi_0(-i\gamma_1 r)$. Подставляя c в (2.14) и (2.15), получим

$$\varphi(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-1}[\Phi_0(z) - \Phi_0(i\gamma_1 r)], \qquad \psi(z) = \psi_0(z) - \Phi_0(i\gamma_1 r).$$

Таким образом, рассмотренная задача имеет единственное решение.

3. Рассмотрим теперь случай $a(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^n$, где n – натуральное число, $n \geq 2$. Полагая

$$\Phi(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{n-1}\varphi(z), \tag{2.16}$$

граничные условия (0.1) – (0.3) запишутся в виде

$$(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\Phi(z) = \psi(z) + f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{2.17}$$

$$\Phi(\gamma_1 z) = \Phi(\gamma_1 \bar{z}), \quad z \in \Gamma_1, \tag{2.18}$$

$$\psi(\gamma_2 z) = \psi(\gamma_2 \bar{z}), \quad z \in \Gamma_2. \tag{2.19}$$

Пусть $(\Phi(z), \psi(z))$ – единственное решение задачи (2.17) – (2.19). Дифференцируя обе части (2.16) j раз по z и подставляя $z = i\gamma_1 r$, получим

$$\Phi^{(j)}(i\gamma_1 r) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-2. \tag{2.20}$$

В этом случае (2.20) является необходимым условием для разрешимости задачи (2.17) – (2.19). Пусть условия (2.20) выполнены. Используя (1.1), получим

$$\Phi^{(j)}(-i\gamma_1 r) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-2. \tag{2.21}$$

Из (2.16) имеем

$$\varphi(z) = \Phi(z)(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{1-n}. \tag{2.22}$$

Из (2.20) и (2.21) следует, что функция $\varphi(z)$, определенная формулой (2.22), аналитична в G^+ и непрерывна в $\overline{G^+}$. Следовательно, в этом случае условия (2.20) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (0.1) – (0.3) единственным образом.

4. Рассмотрим теперь случай, когда в (0.1)

$$a(z) = (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-m}, \tag{2.23}$$

где m – натуральное число. Подставляя $\varphi(z)$ из (1.8) в (0.1) и учитывая (2.23), получим

$$(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})\varphi_0(z) - \psi(z) = -\sum_{k=0}^{m} c_k (z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{k-m} + f(z). \tag{2.24}$$

Согласно Лемме 2, для условий (0.2) и (0.3), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0(\gamma_1 z) &= \varphi_0(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \\ \psi(\gamma_2 z) &= \psi(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

В пункте 3 мы показали, что задача (2.24) – (2.25) имеет единственное решение относительно $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Подставляя решение задачи (2.24) – (2.25) в (1.8), заключаем, что неоднородная задача (0.1) – (0.3) разрешима для любой функции $f(z)$, а число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи есть $m + 1$.

5. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть n – индекс функции $a(z)$ на контуре Γ (см. [1], стр. 147). Так как $a(z)$ непрерывна на Γ, то n – целое число. Обозначим

$$a_0(z) = a(z)(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^{-n}. \tag{2.26}$$

Так как контур Γ охватывает окружность $|z| = r$ и $|\gamma_1| = 1$, имеем $|z| > r$, $|\gamma_1^2 r^2 z^{-1}| < r$, $z \in \Gamma$. Следовательно, индекс функции $z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1}$ на Γ равен единице. Поэтому индекс функции $a_0(z)$ на Γ равен нулю, и функция $\ln(a_0(z))$ удовлетворяет условию Гельдера для любого $z \in \Gamma$. Пусть $(\varphi_0(z), \psi_0(z))$ – частное решение задачи (0.1) – (0.3) при $f(z) = \ln(a_0(z))$, $a(z) \equiv 1$. Из (0.1) имеем

$$\varphi_0(z) = \psi_0(z) + \ln(a_0(z)), \tag{2.27}$$

а из (2.26), (2.27) получим

$$a_0(z) = \exp[\varphi_0(z)]\exp[-\psi_0(z)], \qquad a(z) = \exp[\varphi_0(z)]\exp[-\psi_0(z)](z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^n.$$

Подставляя $a(z)$ в (0.1), получим $(z + \gamma_1^2 r^2 z^{-1})^n \Phi(z) = \omega(z) + f_0(z)$, $z \in \Gamma$, где

$$\Phi(z) = \varphi(z)\exp[\varphi_0(z)], \quad \omega(z) = \psi(z)\exp[\psi_0(z)], \quad f_0(z) = f(z)\exp[\psi_0(z)]. \tag{2.28}$$

В обозначениях (2.28) условия (0.2) и (0.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_1 z) &= \Phi(\gamma_1 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_1, \\ \omega(\gamma_2 z) &= \omega(\gamma_2 \overline{z}), \quad z \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Таким образом, общий случай сводится к рассмотренным выше случаям.

§3. ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предыдущие результаты можно применить к краевым задачам для эллиптических уравнений. Для простоты рассмотрим задачу Пуанкаре для эллиптического уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (x,y)\in D, \tag{3.1}$$

где A, B и C – некоторые комплексные постоянные, а D – единичный круг $x^2+y^2<1$. Обозначим через L окружность $x^2+y^2=1$. Рассмотрим граничное условие

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y), \quad (x,y)\in L, \tag{3.3}$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $f(x,y)$ определены на L и удовлетворяют условию Гельдера. Уравнение

$$A+B\lambda+C\lambda^2=0 \tag{3.2}$$

называется **характеристическим уравнением**. Эллиптичность (3.1) означает, что $C\neq 0$ и характеристическое уравнение (3.3) не имеет действительных решений (см. [4], стр. 110). Предположим, что корни уравнения (3.3) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im}\lambda_1>0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2<0. \tag{3.4}$$

Согласно [4], стр. 155, задачу Пуанкаре (3.1), (3.2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению. Эту задачу мы сведем к обобщенной задаче Гильберта (0.1) – (0.3).

Общее решение уравнения (3.1) определяется формулой (см. [4], стр. 109)

$$u(x,y)=\varphi_1(x+\lambda_1 y)+\varphi_2(x+\lambda_2 y)+c, \tag{3.5}$$

где $\varphi_1(x+\lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x+\lambda_2 y)$ – произвольные аналитические функции относительно аргументов $(x+\lambda_1 y)$ и $(x+\lambda_2 y)$, c – произвольная постоянная и $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ при $(x,y)\in D$. Отметим, что функции $\varphi_1(x+\lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x+\lambda_2 y)$ и постоянная c в (3.5) определяются через $u(x,y)$ единственным образом.

Мы ищем решение $u(x,y)$ задачи (3.1), (3.2) в классе функций, первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}$. Пусть D_j – образ круга D при отображении

$$\zeta=\xi+i\eta=x+\lambda_j y, \quad (x,y)\in D, \quad (\xi,\eta)\in D_j, \quad j=1,2.$$

Границы L_1 и L_2 областей D_1 и D_2 являются эллипсами. Пусть $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ – аналитические функции в D_1 и D_2, соответственно, первые производные которых непрерывны в замкнутых областях $\overline{D_1}$ и $\overline{D}_2$. В (3.5) мы берем суперпозицию функций $\varphi_j(\zeta)$ и $x+\lambda_j y$, $j=1,2$. Подставляя $u(x,y)$ из (3.5) в (3.2), получим

$$A_1(z)\varphi_1'(x+\lambda_1 y)+A_2(z)\varphi_2'(x+\lambda_2 y)=f(z), \quad z\in L, \tag{3.6}$$

где $A_j(z)=a(x,y)+\lambda_j b(x,y)$, $z=x+iy$, $j=1,2$. Предположим, что $A_j(z)\neq 0$ для любого $z\in L$. Полагая

$$\psi_j(\zeta)=\varphi_j'(\zeta), \quad \zeta\in D_j, \quad j=1,2, \tag{3.7}$$

граничное условие (3.6) запишется в виде

$$A_1(z)\psi_1(x+\lambda_1 y)+A_2(z)\psi_2(x+\lambda_2 y)=f(z), \quad z\in L. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ имеем

$$\varphi_j(x+\lambda_j y)=\int_0^{x+\lambda_j y}\psi_j(\zeta)\,d\zeta, \quad j=1,2. \tag{3.9}$$

Для любого $(x,y)\in L$ имеем

$$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Следовательно

$$(x+\lambda_1 y)=\mu_1\left(z+\frac{\nu_1}{z}\right), \quad (x+\lambda_2 y)=\mu_2\left(\frac{1}{z}+\nu_2 z\right), \quad (x,y)\in L, \tag{3.10}$$

где

$$\mu_1=\frac{\lambda_1+i}{2i}, \quad \nu_1=\frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}, \quad \mu_2=\frac{i-\lambda_2}{2i}, \quad \nu_2=\frac{i+\lambda_2}{i-\lambda_2}.$$

Условие (3.4) влечет $|\nu_j|<1$, $j=1,2$. Подставляя $x+\lambda_j y$ из (3.10) в (3.8), получим

$$A_1(z)\psi_1\left(\mu_1\left(z+\frac{\nu_1}{z}\right)\right)+A_2(z)\psi_2\left(\mu_2\left(\frac{1}{z}+\nu_2 z\right)\right)=f(z), \quad |z|=1.$$

Пусть

$$\varphi(z)=\psi_1\left(\mu_1\left(z+\frac{\nu_1}{z}\right)\right), \quad \psi(z)=\psi_2\left(\mu_2\left(\frac{1}{z}+\nu_2 z\right)\right), \tag{3.11}$$

$$a(z)=-\frac{A_1(z)}{A_2(z)}, \quad g(z)=-\frac{f(z)}{A_2(z)}.$$

Согласно (3.11) граничное условие (3.6) можно записать в виде

$$a(z)\varphi(z) = \psi(z) + g(z), \quad z \in L. \tag{3.12}$$

Так как функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ аналитичны в D_1 и D_2, соответственно, и непрерывны в замкнутых областях $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в кольцах $\sqrt{|\nu_1|} < |z| < 1$ и $1 < |z| < \left(\sqrt{|\nu_2|}\right)^{-1}$ и непрерывны в их замыканиях, соответственно. Из (3.10) получим условия (0.2) – (0.3), где Γ_1 и Γ_2 – окружности $z = \sqrt{|\nu_1|}$ и $z = \left(\sqrt{|\nu_2|}\right)^{-1}$, соответственно, и $\gamma_1 = \sqrt{\frac{\nu_1}{|\nu_1|}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{\nu_2}{|\nu_2|}}$. Из (3.11) имеем

$$\psi_1(\zeta) = \varphi\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\nu_1\mu_1^2}}{2\mu_1}\right), \quad \psi_2(\zeta) = \psi\left(\frac{2\mu_2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\nu_2\mu_2^2}}\right). \tag{3.13}$$

В формуле (3.13) под $\sqrt{\zeta^2 - 4\nu_j\mu_j^2}$ понимается ветвь, аналитичная вне отрезка $[-2\mu_j\sqrt{\nu_j}, 2\mu_j\sqrt{\nu_j}]$ и удовлетворяющая

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{1}{\zeta}\sqrt{\zeta^2 - 4\nu_j\mu_j^2} = 1, \quad j = 1, 2.$$

Так как функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в кольцах $\sqrt{|\nu_1|} < |z| < 1$ и $1 < |z| < \left(\sqrt{|\nu_2|}\right)^{-1}$ соответственно и удовлетворяют условиям (0.2), (0.3), то функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$, определенные формулой (3.13), аналитичны в областях D_1 и D_2, соответственно.

Таким образом, задача Пуанкаре (3.1), (3.2) сводится к обобщенной задаче Гильберта (3.12), (0.2), (0.3). Решения задач (3.1), (3.2) и (3.12), (0.2), (0.3) связаны с помощью формул (3.5), (3.9), (3.13).

ABSTRACT. A relationship between the classical and generalized Hilbert problems is derived and some effective methods of resolution of the generalized problem are presented. The results are applied in the Poincare problem for Laplace equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы Сингулярных Интегральных Уравнений, Наука, Москва, 1970.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории Функций Комплексного Переменного, Наука, Москва, 1973.
4. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.

29 марта 1998

Армянский государственный инженерный университет
E-mail : hterzian@seua.am

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ РЕТРАКТЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. А. Мирзаханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Статья описывает модификацию некоторых основных понятий теории классических ретрактов в так называемой K_0H-категории. Объектами этой категории являются всевозможные подмножества фиксированного действительного гильбертова пространства, а морфизмами являются непрерывные отображения, принадлежащие некоторому специальному классу K_0. Доказываются бесконечномерные аналоги некоторых свойств евклидовых окрестностных ретрактов, а также бесконечномерные аналоги ряда классических теорем теории ретрактов, таких, как теоремы Борсука о распространении отображений и гомотопий, теорема Ханнера и других, в класс K_0 или в более широкий класс $K \supset K_0$.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы описываем модификацию некоторых основных понятий теории классических ретрактов в категорию, называемую K_0H-категорией. Объектами этой категории являются всевозможные подмножества фиксированного действительного (не объязательно сепарабельного) гильбертова пространства H, а морфизмами $f : X \longmapsto Y$ являются отображения из некоторого класса K_0 непрерывных отображений $f : M \longmapsto H$ подмножеств H.

Окрестностные ретракты евклидовых пространств и гомоморфные им пространства обладают многими "хорошими" свойствами. Отметим, что эти свойства не сохраняются для окрестностных ретрактов подпространств бесконечномерных функциональных пространств, в частности, для гильбертовых пространств в классе всех непрерывных отображений. Например, евклидова сфера S^{n-1} не является ретрактом евклидова шара B^n, между тем гильбертова сфера S является ретрактом гильбертова шара B.

Так как гильбертово пространство H является абсолютным ретрактом и, следовательно, абсолютным окрестностным ретрактом, то K_0-ретракты и K_0-окрестностные ретракты пространства H будут абсолютными ретрактами и абсолютными окрестностными ретрактами в классе метризуемых пространств, соответственно.

В настоящей статье мы доказываем бесконечномерные аналоги некоторых свойств евклидовых окрестностных ретрактов, а также бесконечномерные аналоги ряда классических теорем теории ретрактов, таких, как теоремы Борсука о распространении отображений и гомотопий, теоремы Ханнера и других, в класс K_0 или в более широкий класс K. Доказываем также ряд важных свойств компактных K_0– и K–окрестностных ретрактов пространства H.

§1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Начнем с определений классов K_0 и K (подробное описание этих классов см. [1] – [8]).

Определение 1. Пусть G – произвольное открытое подмножество действительного гильбертова пространства H. Будем говорить, что непрерывное отображение $f : G \longmapsto H$ **принадлежит классу** K_0 (относительно H), если выполнены следующие условия :

a) для любой точки $x_0 \in G$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U = U(x_0, \varepsilon) \subset G$ точки x_0, конечномерное линейное подпространство $L = L(x_0, \varepsilon)$ пространства H и действительное число $\lambda = \lambda(x_0, \varepsilon)$, такие, что из ортогональности подпространства L и $x - y$ для $x, y \in U$ следует неравенство

$$||f(x) - f(y) - \lambda(x - y)|| \leq \varepsilon||x - y||; \qquad (1)$$

b) отображение f локально удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любой точки $x_0 \in G$ существуют окрестность $U \subset G$ точки x_0 и положительное число $c = c(x_0)$ такие, что для любых точек $x, y \in U$ имеет место неравенство

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||. \qquad (2)$$

Будем говорить, что отображение $f : G \longmapsto H$ **принадлежит классу** K (относительно H), если оно удовлетворяет условию a).

Пусть теперь M – произвольное (не обязательно открытое) подмножество пространства H. Будем говорить, что непрерывное отображение $g : M \longmapsto H$

принадлежит классу K_0 (или K) относительно H, если существуют открытое в H подмножество $G \supset M$ и отображение $f : G \longmapsto H$, принадлежащее классу K_0 (соотв. K), такое, что $g(x) = f(x)$ для любой точки $x \in M$.

Замечание 1. Условия a) и b) в совокупности равносильны (см. [1], [2]) условию

c) непрерывное отображение $f : G \longmapsto H$ **принадлежит классу** K_0 (относительно H), если для каждой точки $x_0 \in G$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $U = U(x_0, \varepsilon) \subset G$ точки x_0, конечномерное линейное подпространство $L = L(x_0, \varepsilon)$ и числа $\lambda = \lambda(x_0, \varepsilon)$ и $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ такие, что выполнено соотношение (1), когда для $x, y \in U$ угол между $x - y$ и L не превосходит $\frac{\pi}{2} - \delta$.

Замечание 2. Число $\lambda = \lambda(x_0, \varepsilon)$, фигурирующее в условиях a) и c), можно выбрать так, чтобы оно зависело только от точки x_0, и не зависело бы от ε. Соответствующая действительная непрерывная функция $\lambda_f(x)$ называется **терминальной производной** отображения $f : G \longmapsto H$ (см. [1]).

Для фиксированного вещественного гильбертова пространства H обозначим через $K_0 H$ (или KH) класс всех непрерывных отображений $g : M \longmapsto H$, $M \subset H$, принадлежащих классу K_0 (соотв. K) относительно H. Отображения класса $K_0 H$ (или KH) будем называть K_0- (соотв. $K-$) отображениями. Композиция $g \circ f$ двух K_0-отображений $f : G \longmapsto H$ и $g : G_1 \longmapsto H$, $f(G) \subset G_1$ является K_0-отображением и (см. [1], [3])

$$\lambda_{g \circ f}(x) = \lambda_f(x)\lambda_g(f(x)), \quad x \in G. \tag{3}$$

Вообще говоря, композиция двух K-отображений не является K-отображением. Однако возможны и исключения. Например, если g есть K_0-отображение, а f есть K-отображение, то $g \circ f$ является K-отображением. Если композиция K-отображений есть K-отображение, то имеет место соотношение (3) (см. [3]).

Для заданного отображения $f : X \longmapsto H$, удовлетворяющего условию $f(X) \subset Y \subset H$, будем писать $f : X \longmapsto Y$. Последнее отображение назовем K_0- или $K-$, если f обладает соответствующим свойством. Таким образом, определяем $K_0 H$-**категорию**, объектами которой служат всевозможные подмножества из H, а морфизмами объекта X в объект Y суть всевозможные K_0-отображения $f : X \longmapsto Y$ из $K_0 H$. Изоморфизмы в этой категории назовем K_0-**гомеоморфизмами**.

Определение 2. Для заданного подпространства $X \subset H$ множество $Y \subset$

X называется **K_0-ретрактом подпространства** X, если существует K_0-отображение $r : X \longmapsto Y$ (**K_0-ретракцией** подпространства X в Y) такое, что $r|Y = 1_Y$. Множество Y называется **K_0-окрестностным ретрактом в** X, если Y является K_0-ретрактом некоторого открытого (относительно X) множества U. Понятия K-ретракта и K-окрестностного ретракта определяются аналогичным образом.

Отметим, что ортогональный проектор $p : H \longmapsto L$, где L – замкнутое линейное подпространство, принадлежит классу K_0H [2] тогда и только тогда, когда L конечномерно или имеет конечную коразмерность. Поэтому каждое из этих подпространств является K_0-ретрактом для H.

Определение 3. Пусть $X, Y \subset H$. Семейство K_0-отображений $f_t : X \longmapsto Y$, $0 \le t \le 1$ называется **K_0-гомотопией, связывающей** f_0 и f_1, если отображение $F : I \times X \longmapsto Y$, определенное формулой $F(t,x) = f_t(x)$ принадлежит классу K_0H в случае, когда замкнутое линейное подпространство M, порожденное множеством X не совпадает с H и в противном случае принадлежит классу K_0H^*, где $H^* = \mathbb{R} \times H$. В первом случае I – единичный отрезок прямой $\mathbb{R}$, проходящий через O и ортогональный к M.

Два K_0-отображения $f, g : X \longmapsto Y$ назовем **K_0-гомотопными** и будем писать $f \underset{K_0}{\simeq} g$, если существует K_0-гомотопия, связывающая f и g. Аналогичным образом определяются K-гомотопии.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В классе всех непрерывных отображений единичная сфера $S \subset H$ является ретрактом для единичного замкнутого шара $B \subset H$. Используя бесконечномерные гомотопические группы (см. [5]), установлено [6], что сфера S не является K_0-ретрактом шара B и H. Вместе с тем, сфера S является K_0–окрестностным ретрактом шара B и H, ибо отображение $x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|}$ является K_0-ретракцией $B \setminus \{0\}$ (соотв. $H \setminus \{0\}$) на S. Этот факт играет существенную роль в этом параграфе.

Предложение 1. Пусть F – замкнутое подмножество в H, а G – одна из ограниченных компонент дополнения $H \setminus F$. Не существует K_0-отображения $f : \overline{G} \longmapsto F$ такого, что $f(x) = x$ для всякой точки $x \in \overline{G} \setminus G$, где $\overline{G}$ – замыкание G.

Доказательство : Так как переносы и гомотетии пространства H являются K_0-отображениями, то не умоляя общности, предположим, что $0 \in G \subset B$. Допустим, что существует K_0-отображение $f : \overline{G} \longmapsto F$ такое, что $f(x) = x$ для всякой точки $x \in \overline{G} \setminus G$. Определим отображение $g : B \longmapsto S$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & \text{для} \quad x \in B \setminus G, \\ \frac{f(x)}{\|f(x)\|} & \text{для} \quad x \in \overline{G}. \end{cases}$$

Так как $\varphi : H \setminus \{0\} \longmapsto S$, задаваемое формулой $\varphi(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, является K_0-отображением, то отображение $g : B \longmapsto S$ является K_0-отображением и удовлетворяет $g(x) = x$ для каждой точки $x \in S$. Следовательно, g является K_0-ретракцией B на S. Это противоречие завершает доказательство.

Предложение 2. Для каждого непустого открытого ограниченного $G \subset H$ множество $F = H \setminus G$ не является K_0-ретрактом в H.

Доказательство : Предположим обратное, т.е. F является K_0-ретрактом в H. Пусть $r : H \longmapsto F$ – некоторая K_0-ретракция. Пусть для компоненты $G_1 \subset G$

$$f = r \mid \overline{G}_1 \ : \overline{G}_1 \longmapsto F.$$

Отображение f является ограничением K_0-отображения. Для любой точки $x \in (\overline{G}_1 \setminus G_1)$ имеем $f(x) = x$, что противоречит Предложению 1. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Пусть F – замкнутое ограниченное подмножество H, являющееся K_0-ретрактом в H. Тогда $G = H \setminus F$ связно.

Доказательство : Существование ограниченных компонент множества G противоречит Предложению 1. Докажем, что G не может иметь двух неограниченных компонент. Поскольку сдвиги и гомотетии являются K_0-отображениями, то не умоляя общности, можем считать, что $F \subset B$. Так как множество $H \setminus B$ связно, то оно содержится в некоторой неограниченной компоненте G_1 множества G. Если существует другая неограниченная компонента $G_2 \subset G$, то необходимо $G_2 \subset B$, что невозможно. Таким образом, G связно. Предложение 3 доказано.

Аналогичным образом мы получаем следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть замкнутое ограниченное подмножество $F \subset H$ является K_0-окрестностным ретрактом в H. Тогда множество компонент множества $H \setminus F$ конечно.

Предложение 5. Пусть X – K_0-окрестностный ретракт в H, и пусть $H^* = \mathbb{R}^n \times H$, где $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство. Если множество $X^* \subset H^*$ K_0-гомеоморфно относительно H^* множеству X, то X^* является K_0-окрестностным ретрактом в H^*.

Доказательство : Сначала рассмотрим случай $n = 0$, т.е. $H^* = H$. Пусть $r : V \longmapsto X$ – некоторая K_0-ретракция открытого множества $V \subset H$ на X. Пусть $f : X^* \underset{K_0}{\cong} X$ – некоторый K_0-гомеоморфизм и $g : G \longmapsto H$ – K_0-отображение открытого множества $G \subset H$ такое, что $g(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in X^*$. Положим $r^* = f^{-1} \circ r \circ g : U \longmapsto X^*$, $U = G^{-1}(V)$. Отображение r^* является K_0-ретракцией открытого множества $U \subset H$ на X^*.

Пусть теперь $n > 0$. Так как ортогональный проектор $p : H^* \longmapsto H$ является K_0-ретракцией, то X будет K_0-окрестностным ретрактом в H^*. Следовательно, X^* является K_0-окрестностным ретрактом в H^*. Предложение 5 доказано.

Из Предложения 5 следует, что для подмножеств гильбертова пространства свойство быть гильбертовым K_0-окрестностным ретрактом есть K_0-топологический инвариант, т.е. инвариант K_0-гомеоморфизмов.

Лемма 1. Пусть $A \subset X \subset H$ и Y – K_0-окрестностный ретракт в H. Тогда всякое K_0– (или K–) отображение $f : A \longmapsto Y$ можно продолжить до K_0– (соотв. K–) отображения $f : U \longmapsto Y$ некоторой окрестности $U \subset X$ множества A.

Доказательство : Пусть $V \subset H$ – открытое множество, для которого Y является K_0-ретрактом, и пусть $r : V \longmapsto Y$ – K_0-ретракция, а $f : A \longmapsto Y$ – K_0– (соотв. K–) отображение. По определению класса K_0 (или K), существуют открытое подмножество $G \supset A$ в H и K_0– (соотв. K–) отображение $g : G \longmapsto H$ такое, что $g(x) = f(x)$ для каждой точки $x \in A$. Положим

$$f^* = r \circ g : U \longmapsto Y, \quad U = X \cap [G \setminus g^{-1}(H \setminus V)].$$

Отображение f^* будет искомым продолжением.

Лемма 2. Пусть $A \subset X \subset H$, A замкнуто в X и

$$T = (\{0\} \times X) \cup (I \times A) \subset I \times X. \tag{4}$$

Тогда для любой окрестности U множества T в подпространстве $I \times X$ существует K_0-отображение $\psi : I \times X \longmapsto U$, тождественное на T.

Доказательство : Для любой точки $x \in A$ подмножество $I \times \{x\} \subset T$ компактно. Так как U – окрестность множества T, то существует открытая окрестность $V_x \subset X$ точки x такая, что $I \times V_x \subset U$. Положив $V = \bigcup\limits_{x \in A} V_x$, получим открытую окрестность $V \subset X$ подмножества A такую, что $I \times V \subset U$. Пусть $\varphi : X \longmapsto Y$ – гладкая функция Урысона [9] такая, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Для каждой точки $x \in X$ и $t \in I$ имеем $(\varphi(x)t, x) \in U$. Рассмотрим отображение

$$\psi : I \times X \longmapsto U, \quad \psi(t, x) = (\varphi(x)t, x).$$

Это отображение представляет собой диагональное произведение отображения $q : I \times X \longmapsto I$, задаваемое по формуле $q(t, x) = \varphi(x)t$ и проекцией $p : I \times X \longmapsto X$. Так как p и q являются K_0-отображениями, то и их диагональное произведение ψ будет K_0–отображением [5]. Наконец, очевидно, что ψ тождественное отображение на T. Лемма 2 доказана.

Предложение 6. Пусть A и T будут как и в Лемме 2, Y – K_0-окрестностный ретракт в H. Тогда всякое K_0-отображение (в гильбертовом пространстве $H^* = \mathbb{R} \times H$) $F : T \longmapsto Y$ может быть продолжено до K_0-отображения $\tilde{\tilde{F}} : I \times X \longmapsto Y$.

Доказательство : В силу Леммы 1 отображение F продолжается до некоторого K_0-отображения (относительно H^*) $F^* : U \longmapsto Y$, где $U \supset T$ открыто в $I \times X$. По Лемме 2 существует K_0-отображение $\psi : I \times X \longmapsto U$, тождественное на T. Положив $\tilde{\tilde{F}} = F^* \circ \psi$, получим искомое отображение.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $A \subset X \subset H$, A замкнуто в X, Y – K_0-окрестностный ретракт в H, $f : X \longmapsto Y$ – K_0-отображение и $(g_t) : A \longmapsto Y$ – частичная K_0-гомотопия отображения f. Тогда гомотопию (g_t) можно продолжить до K_0-гомотопии $(f_t) : X \longmapsto Y$ отображения f.

Доказательство : Рассмотрим подмножество (4) и зададим отображение $F' : T \longmapsto Y$ по формуле

$$F'(t, x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in X, \quad t = 0, \\ g_t(x) & \text{при} \quad x \in A, \quad t = 1. \end{cases}$$

Так как (g_t) есть K_0-гомотопия, то $G(t, x) = g_t(x)$ является K_0-отображением. Поскольку отображение $(0, x) \longmapsto f(x)$ можно представить в виде композиции

$(0,x) \longmapsto x \longmapsto f(x)$, то отображение $F' : (0 \times X) \longmapsto Y$ есть K_0-отображение. Следовательно, F' является K_0-отображением. Согласно Предложению 6, отображение F' можно продолжить до K_0-отображения $F : I \times X \longmapsto Y$. Полагая $f_t(x) = F(t,x)$, получим искомую K_0-гомотопию (f_t). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $A \subset X \subset H$, A замкнуто в X и Y – K_0-окрестностный ретракт в H. Пусть $f : X \longmapsto Y$ – K-отображение и $(g_t) : A \longmapsto Y$ частичная K-гомотопия отображения f. Тогда (g_t) можно продолжить до K-гомотопии $(g_t^*) : V \longmapsto Y$ некоторой окрестности $V \supset A$ в X отображения $f|V$.

Доказательство : Повторив рассуждения доказательства Предложения 6, можно построить K-отображение $F : T \longmapsto Y$, его K-продолжение $F^* : U \longmapsto Y$ на окрестность U в $I \times X$ и окрестность $V \supset A$ в X такую, что $I \times V \subset U$. Положив $g_t^*(x) = F^*(t,x)$, где $t \in I$, $x \in V$, получим искомую K-гомотопию (g_t^*). Теорема 2 доказана.

Предложение 7. Замкнутый K_0-окрестностный ретракт X пространства H является K_0-ретрактом в H в том и только в том случае, когда X K_0-стягиваемо относительно себя в точку.

Доказательство : Пусть X – K_0-ретракт в H, и пусть $r : H \longmapsto X$ – K_0-ретракция. Пространство H K_0-стягиваемо относительно себя в точку $x_0 \in X$. В самом деле $(f_t) : H \longmapsto H$, $f_t(x) = (1-t)x + tx_0$ является K_0-гомотопией такой, что $f_0 = 1_H$, а f_1 отображает H в точку x_0. Рассмотрим гомотопию $(\varphi_t) : X \longmapsto X$, $\varphi_t = r \circ f_t \circ i$, где $i : X \longmapsto H$ – вложение. Гомотопия (φ_t) есть K_0-гомотопия, связывающая 1_X с отображением X в точку x_0.

Обратно, пусть X – K_0-окрестностный ретракт пространства H и $(g_t') : X \longmapsto X$ – K_0-стягивание относительно себя в точку $x \in X$. Положим $g_t = g_{1-t}'$ и рассмотрим отображение $f : H \longmapsto X$, переводящее H в x_0. Ясно, что (g_t) – частичная K_0-гомотопия отображения f. Согласно Теореме 1 существует K_0-гомотопия $(f_t) : H \longmapsto H$ такая, что $f_0 = f$ и $f_t|X = g_t$. Отображение f_1 есть K_0-ретракция H на X, следовательно, X – K_0-ретракт в H. Предложение 7 доказано.

Следствие 1. Пусть X есть K_0-ретракт в H, а X^* – замкнутое подмножество гильбертова пространства $H^* = \mathbb{R}^n \times H$, $n \geq 0$. Если X^* и X K_0-гомеоморфны относительно H^*, то X^* будет K_0-ретрактом в H^*.

Доказательство : Согласно Предложению 5, X^* и X являются K_0-окрестностными ретрактами в H^*. Так как X K_0-стягиваемо относительно себя в точку, то X^* обладает тем же свойством, и в силу Предложения 7, X^* будет K_0-ретрактом в H^*.

Предложение 8. Пусть Y – K_0-ретракт в H, $A \subset X \subset H$ и A замкнуто в X. Тогда всякое K_0-отображение $f : A \longmapsto Y$ можно продолжить до K_0-отображения $\widetilde{f} : X \longmapsto Y$.

Доказательство : Пусть $(\varphi_t) : Y \longmapsto Y$ – K_0-стягивание (см. Предложение 7) и $f_t = \varphi_t \circ f$. Ясно, что $(f_t) : A \longmapsto Y$ есть K_0-гомотопия отображения f в постоянное отображение. Остается применить Теорему 1.

Замечание 3. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n \subset H$ является K_0-ретрактом в H. Согласно Предложению 8, если $A \subset X \subset H$ и A замкнуто в X, то всякое K_0-отображение $f : A \longmapsto \mathbb{R}^n$ можно продолжить до K_0-отображения $\widetilde{f} : X \longmapsto \mathbb{R}^n$. Таким образом, имеем K_0-аналог фундаментальной теоремы Титце-Урысона о непрерывном продолжении.

Предложение 9. Пусть Y – K_0-окрестностный ретракт в H, $A \subset X \subset H$ и множество A замкнуто в X. Пусть $f, g : X \longmapsto Y$ – K_0– (или K–) отображения, а $(\varphi_t) : A \longmapsto Y$ – K_0– (или K–) гомотопия, связывающая $f|A$ с $g|A$. Существуют окрестность V множества A в X и K_0– (соотв. K–) гомотопия $(\widetilde{\varphi}_t) : V \longmapsto Y$, связывающая $f|V$ с $g|V$ и являющаяся продолжением на V гомотопии (φ_t).

Доказательство : Рассмотрим подмножество $M = (0 \times X) \cup (1 \times X) \cup (I \times A) \subset I \times X$ и K_0– (соотв. K–) отображение $\Phi : M \longmapsto Y$, задаваемое формулой

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in X, \quad t = 0, \\ g(x) & \text{при} \quad x \in X, \quad t = 1, \\ \varphi_t(x) & \text{при} \quad x \in A, \quad t \in I. \end{cases}$$

Согласно Лемме 1, Φ можно продолжить до K_0– (соотв. K–) отображения $\widetilde{\Phi} : U \longmapsto Y$, где U – некоторая окрестность множества M в $I \times X$. Так как $I \times A \subset U$ и I – компактно, то существует окрестность V множества A в X такая, что $I \times V \subset U$. Положим $\widetilde{\varphi}_t(x) = \Phi(t, x)$ при $x \in A$ и $t \in I$. Ясно, что $(\widetilde{\varphi}_t)$ является продолжением на V гомотопии (φ_t). Так как ограничение $\widetilde{\Phi}|I \times V$ является K_0– (соотв. K–) отображением, то гомотопия $(\widetilde{\varphi}_t)$ – искомая K_0– (соотв. K–) гомотопия. Предложение 9 доказано.

Следствие 2. Пусть Y – K_0-окрестностный ретракт в H, $A \subset X \subset H$ и $f, g : X \longmapsto Y$ – K_0– (или K–) отображения, совпадающие на A. Существуют открытая окрестность V множества A в X и K_0– (соотв. K–) гомотопия $(\tilde{\varphi}_t) : V \longmapsto Y$ такая, что

$$(\tilde{\varphi}_t) : f \mid V \underset{K_0}{\simeq} g \mid V \quad (rel\ A). \tag{5}$$

Доказательство : Пусть $\overline{A}$ – замыкание A в X. Так как Y – хаусдорфово, то $f(x) = g(x)$ для любой точки $x \in \overline{A}$. Пусть $(\varphi_t) : \overline{A} \longmapsto Y$ – постоянная гомотопия, переводящая $f|\overline{A}$ в $g|\overline{A}$. Так как (φ_t) есть K_0– (соотв. K–) гомотопия, то утверждение следует из Предложения 9.

Следствие 3. Пусть Y – K_0-окрестностный ретракт в H, и пусть $A \subset Y$ – K_0-окрестностный ретракт в Y. Пусть $r : U \longmapsto A$ – некоторая K_0-ретракция открытого в Y множества U на A. Тогда существует открытая в U окрестность V подмножества A такая, что

$$1_U \mid V \underset{K_0}{\simeq} (i \circ r) \mid V \quad (rel\ A),$$

где $i : A \longmapsto U$ – некоторое вложение.

Доказательство : U есть K_0-окрестностный ретракт в H. Остается применить Следствие 2 к K-отображениям 1_U и $i \circ r : U \longmapsto U$.

Определение 4. Подмножество $X \subset H$ называется локально K_0-стягиваемым, если для каждой точки $x \in X$ и для каждой открытой в X окрестности U точки x существует открытая в X окрестность V точки x такая, что $V \subset U$ и V K_0-стягиваемо в точке x в U.

Следствие 4. Каждый K_0-окрестностный ретракт в H локально K_0-стягиваемый.

Доказательство : Пусть Y есть K_0-окрестностный ретракт в H, и пусть $U \subset Y$ – произвольная открытая в Y окрестность точки $y_0 \in Y$. Пусть G есть открытое множество в H и $r : G \longmapsto Y$ – некоторая K_0-ретракция. Положим $G' = r^{-1}(U)$ и $r' = r|G'$. Ясно, что $r' : G' \longmapsto U$ есть K_0-ретракция, и, следовательно, U есть K_0-окрестностный ретракт в H. Рассмотрим отображения

$$f = 1_U : U \longmapsto U, \quad g : U \longmapsto U, \quad g(U) = \{y_0\}.$$

В силу Следствия 2 существует открытая окрестность V точки y_0 и K_0-гомотопия (5), следовательно окрестность V K_0-стягиваема в U к точке y_0.

Теорема 3. Замкнутое подмножество X из H, являющееся объединением $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ открытых в X K_0-окрестностных ретрактов X_i в H, является K_0-окрестностным ретрактом в H.

Доказательство : Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Пусть G_1 и G_2 – такие открытые подмножества в H, что X_i есть K_0-ретракт в G_i, и пусть $r_i : G \longmapsto X_i$ есть K_0-ретракция, $i = 1, 2$. Предположим сначала, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Тогда X_1 и X_2 будут замкнутыми множествами в X, следовательно они будут замкнутыми в H. Так как H нормально, то существуют непересекающиеся открытые в H множества $G_1' \supset X_1$ и $G_2' \supset X_2$. Положим $U_1 = G_1 \cap G_1'$, $U_2 = G_2 \cap G_2'$, $U = U_1 \cup U_2$, имеем $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ и $X \subset U$. Очевидно, что U открыто в H. Рассмотрим отображение $r : U \longmapsto X$, $r \mid U_i = r_i \mid U_i$, $i = 1, 2$. Так как $r_1|U_1$ и $r_2|U_2$ являются K_0-ретракциями, то r тоже является K_0-ретракцией.

Предположим теперь, что $X_0 = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ и пусть $G_0 = r_1^{-1}(X_0) \cap r_2^{-1}(X_0)$. Так как X_0 открыто в X_i, $i = 1, 2$, то G_0 открыто в H. Рассмотрим отображения $r_1', r_2' : G_0 \longmapsto X_0$, $r_i' = r_i \mid G_0$, $i = 1, 2$. Так как X_0 является K_0-окрестностным ретрактом в H, то согласно Следствию 2, существует открытое в G_0 подмножество $G_{1,2}$, содержащее X_0 и следующую K_0-гомотопию

$$(r_t') : r_1' \mid G_{1,2} \underset{K_0}{\simeq} r_2' \mid G_{1,2} \quad (rel\ X_0).$$

Положим $A_1 = X \setminus X_2$ и $A_2 = X \setminus X_1$. Множества A_1 и A_2 не пересекаются и замкнуты в H. В силу полной нормальности H существуют открытые в H множества V_1 и V_2, удовлетворяющие условиям $A_1 \subset V_1$, $A_2 \subset V_2$ и $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$. Положим $W_1 = G_1 \cap V_1$ и $W_2 = G_2 \cap V_2$. Ясно, что W_1 и W_2 открыты в H и $X_i \subset W_i \subset G_i$, $i = 1, 2$. Пусть $\varphi : H \longmapsto [0, 1]$ – гладкая функция Урысона [7], такая, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in \overline{V}_1$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in \overline{V}_2$. Имеем $\varphi : H \longmapsto H$, так что φ есть K_0-отображение. Объединение $W = W_1 \cup W_2 \cup G_{1,2}$ открыто в H и содержит X. Определим отображение $r : W \longmapsto X$ по формуле

$$r(x) = \begin{cases} r_1(x) & \text{при} \quad x \in W_1, \\ r_2(x) & \text{при} \quad x \in W_2, \\ r'_{\varphi(x)}(x) & \text{при} \quad x \in G_{1,2}. \end{cases}$$

Легко проверить, что r является K_0-ретракцией W на X. Следовательно, X есть K_0-окрестностный ретракт в H. Теорема 3 доказана.

Имеет место следущее обобщение Теоремы 3.

Теорема 3′. В Теореме 3 $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ можно заменить на $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

§4. СЛУЧАЙ КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

Из Теорем 3 и 3′ следует, что компактное множество $X \subset H$ является K_0-окрестностным ретрактом в H тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ существует открытая в X окрестность, которая является K_0-окрестностным ретрактом в H. Аналогично, если каждая точка замкнутого сепарабельного подмножества $X \subset H$ имеет окрестность в X, которая является K_0-окрестностным ретрактом в H, то X есть K_0-окрестностный ретракт в H.

Предложение 10. Пусть Y – компактный K_0-окрестностный ретракт в H. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого подмножества $X \subset H$ любые два K_0– (или K–) отображения $f, g : X \longmapsto Y$, удовлетворяющие условию

$$||f(x) - g(x)|| < \varepsilon, \quad x \in X \tag{6}$$

K_0– (соотв. K–) гомотопны относительно подмножества $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.

Доказательство : Пусть $U \subset H$ – подмножество, для которого Y служит K_0-ретрактом, и пусть $r : U \longmapsto Y$ K_0-ретракция. Положим $\varepsilon = \rho(Y, H \setminus U)$. Так как Y компактно, имеем $\varepsilon > 0$. Пусть $f, g : X \longmapsto Y$ – K_0– (соотв. K–) отображения, удовлетворяющие условию (6). Рассмотрим гомотопию

$$(h'_t) : U \longmapsto U, \quad h'_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Если отображения f, g суть K_0–отображения, то искомую K_0-гомотопию можно получить положив $h_t = r \circ h'_t$. Пусть теперь f, g суть K-отображения. Так как композиция K-гомотопии (h'_t) и K_0-отображения r является K-гомотопией [4], то имеем $(h_t) : f \underset{K_0}{\simeq} g$ $(rel\ A)$ и $(h_t) : f \underset{K}{\simeq} g$ $(rel\ A)$.

Теорема 4. Если компактное множество $X \subset H$ является K-окрестностным ретрактом (в частности, K_0-окрестностным ретрактом) в H, то X гомеоморфно подмножеству конечномерного линейного подпространства в H, т.е. X конечномерно.

Доказательство : Пусть G – открытое подмножество H, для которого X является K-окрестностным ретрактом, и пусть $r : G \longmapsto X$ K-ретракция. Выберем ε между 0 и 1. Так как X компакт, то существуют [3] конечномерное линейное подпространство $L \subset H$ и окрестность $U \subset G$ компакта X такие, что из $x, y \in U$ и $(x - y) \perp L$ следует $||r(x) - r(y) - \lambda_r(x)(x - y)|| \le \varepsilon||x - y||$. Так как X – компакт, то значение терминальной производной $\lambda_r(x) = 0$ для всякой точки $x \in G$ (см. [2]). Следовательно $||r(x)-r(y)|| \leq \varepsilon||x-y||$. Для $x, y \in X$, $x \neq y$ вектор $x-y$ не может быть перпендикулярен к L (в противном случае $||x-y|| \leq \varepsilon||x-y||$, в противоречии с $\varepsilon < 1$). Таким образом, ортогональное проектирование $p : H \longmapsto L$ является инъективным на X. Поэтому $p|X$ гомеоморфно отображает X на $p(X)$. Следовательно, X конечномерно. Теорема 4 доказана.

Следствие 5. Если локально-компактное множество $X \subset H$ является K-окрестностным ретрактом (в частности, K_0-окрестностным ретрактом) в H, то X конечномерно.

Доказательство : Пусть G открыто в H, и $r : G \longmapsto X$ – K-ретракция. Для любой точки $x_0 \in X$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $\overline{U}$ компактно в X. Применив доказательство Теоремы 4 к K-отображениям

$$r|r^{-1}\left(\overline{U}\right) : r^{-1}\left(\overline{U}\right) \longmapsto H$$

и компактного множества $\overline{U}$ заключаем, что $dim\ \overline{U} < \infty$. Таким образом, любая точка в X обладает конечномерной окрестностью в X, и следовательно $dim\ X < \infty$.

Следствие 6. Компактный K-окрестностный ретракт (в частности, K_0-окрестностный ретракт) пространства H есть окрестностный ретракт евклидова пространства.

Доказательство : Согласно Теореме 4 X гомеоморфен подмножеству X^* конечномерного линейного подпространства пространства H. Так как X есть компактный абсолютный окрестностный ретракт, то X^* также обладает этими свойствами. Лежащий в евклидовом пространстве X есть окрестностный ретракт евклидова пространства.

Следствие 7. Гильбертовый куб Q координатного гильбертова пространства l_2 не является K-окрестностным ретрактом пространства l_2.

Таким образом, любая ретракция $r : l_2 \longmapsto Q$ является примером вполне непрерывного отображения, не принадлежащего классу K относительно l_2.

Предложение 11. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n \subset H$ и $Y \subset H$. Имеют место следующие утверждения :

a) X – окрестностный ретракт в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда X есть K-окрестностный ретракт в H ;

b) если X есть окрестностный ретракт в $\mathbb{R}^n$ и Y – K-окрестностный ретракт в H, то декартово произведение $X \times Y$ будет K-окрестностным ретрактом в $H^* = \mathbb{R}^n \times H$.

Доказательство : a) Пусть X – окрестностный ретракт в $\mathbb{R}^n$ и $U \supset X$ открытое в $\mathbb{R}^n$ множество, для которого X есть ретракт, и $r : U \longmapsto X$ – некоторая ретракция. Положим

$$G = p^{-1}(\dot{U}), \quad r' = r \circ p : G \longmapsto X,$$

где $p : H \longmapsto \mathbb{R}^n$ – ортогональное проектирование. Известно [2], что p есть K_0-отображение, а r' будет ретракцией открытого в H множества G на X. Согласно [3], [4], r и r' – K_0-отображения. Следовательно, r' есть K-ретракция G на X. Отметим, что если ретракция $r : U \longmapsto X$ локально удовлетворяет условию Липшица, то r' есть K_0-отображение, т.е. X будет K-окрестностным ретрактом в H.

Предположим теперь, что X – K-окрестностный ретракт в H и $r : G \longmapsto X$ есть некоторая K-ретракция открытого в H множества $G \supset X$. Положим

$$U = G \cap \mathbb{R}^n, \quad r' = r \mid U : U \longmapsto X.$$

Ясно, что r есть ретракция, т.е. X есть окрестностный ретракт в $\mathbb{R}^n$.

b) Пусть X - окрестностный ретракт в $\mathbb{R}^n$, а Y – K-окрестностный ретракт в H. Пусть $r_1 : G_1 \longmapsto X$ – некоторая ретракция открытого в $\mathbb{R}^n$ множества $G_1 \supset X$, а $r_2 : G_2 \longmapsto Y$ – K-ретракция открытого в H множества $G_2 \supset Y$. Согласно [4], r_1 есть K-отображение. Ясно, что отображение

$$r = r_1 \times r_2 : G_1 \times G_2 \longmapsto X \times Y$$

является K-ретракцией относительно H^* (см. [4]), т.е. $X \times Y$ есть K-окрестностный ретракт в H^*. Предложение 11 доказано.

Следствие 8. Евклидовый шар B^n и сфера S^{n-1} являются K_0-ретрактом и K_0-окрестностным ретрактом, соответственно, любого действительного гильбертова пространства H.

Доказательство : Существуют ретракции $r : \mathbb{R}^n \longmapsto B^n$ и $r' : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longmapsto S^{n-1}$, локально удовлетворяющие условию Липшица. Остается применить доказательство утверждения a) Предложения 11.

§5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Теорема 5. Пусть Y_1, Y_2 – замкнутые подмножества H и $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$. Тогда

a) если Y_1, Y_2 и Y_0 суть K_0-окрестностные ретракты (или K_0-ретракты) в H, то Y есть K_0-окрестностный ретракт (соотв. K_0-ретракт) в H;

b) если Y и Y_0 суть K_0-окрестностные ретракты (или K_0-ретракты) в H, то и Y_1 и Y_2 будут K_0-окрестностными ретрактами (соотв. K_0-ретрактами) в H.

Доказательство : a) Рассмотрим замкнутые подмножества :

$$H_1 = \{x \in H : \rho(x, Y_1) \geq \rho(x, Y_2)\}, \quad H_2 = \{x \in H : \rho(x, Y_1) \leq \rho(x, Y_2)\},$$

$$H_0 = H_1 \cap H_2.$$

Имеем $H = H_1 \cup H_2$, и существуют замкнутые в H_0 окрестность V_0 множества Y_0 и K_0-ретракция $r_0 : V_0 \longmapsto Y_0$. Таким образом

$$r_i : Y_i \cup V_0 \longmapsto Y_i, \quad r_i(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in Y_i, \\ r_0(x) & \text{при} \quad x \in V_0, \end{cases} \quad i = 1, 2$$

есть K_0-ретракция. Так как $Y_i \cup V_0$ замкнуто в H, то согласно Лемме 1, существуют замкнутая в H_2 окрестность V_i множества $Y_i \cup V_0$ и K_0-отображение $f_i : V_i \longmapsto Y_i$, являющееся продолжением отображения r_i, $i = 1, 2$. Положим

$$U_1 = V_1 - (V_1 \cap V_2 - V_0), \quad U_2 = V_2 - (V_1 \cap V_2 - V_0), \quad U = U_1 \cup U_2.$$

Ясно, что $U_1 \cap U_2 \subset V_0$, $U_i \cap H_0 \subset V_0$, $Y_i \subset U_i$, $i = 1, 2$. Так как $g_i | U_i \cap U_2 = r | U_i \cap U_2$, $g_i = f_i | U_i$, $i = 1, 2$, то K_0-отображение $r : U \longmapsto Y$ на U можно построить, положив $r | U_i = g_i$, $i = 1, 2$. Ясно, что r есть K_0-ретракция U на Y. Покажем, что $Y \subset int\, U$, т.е.

$$Y \cap \left(\overline{H \setminus U}\right) = \emptyset, \tag{7}$$

Заметим, что $H_i \cap Y = Y_i$, $Y \cap \left(\overline{H_i \setminus V_i}\right) = Y_i \cap \left(\overline{H_i \setminus V_i}\right) = \emptyset$, $i = 1, 2$. Имеем $H \setminus U \subset [H \setminus (V_1 \cup V_2)] \cup [(V_1 \cap V_2) \setminus V_0]$. Следовательно,

$$Y \cap \left(\overline{H \setminus U}\right) \subset \left[\overline{H \setminus (V_1 \cup V_2)}\right] \cup Y \cap \left[\overline{(V_1 \cap V_2) \setminus V_0}\right],$$

$$Y \cap \left[\overline{H \setminus (V_1 \cap V_2)}\right] = Y \cap \left[\overline{H_1 \setminus (V_1 \cup V_2)} \cup \overline{H_2 \setminus (V_1 \cup V_2)}\right] \subset$$

$$\subset Y \cap \left(\overline{H_1 \setminus V_1}\right) \cup Y \cap \left(\overline{H_2 \setminus V_2}\right) = \emptyset.$$

Наконец $Y \cap \left[\overline{(V_1 \cap V_2) \setminus V_0}\right] \subset Y_0 \cap \left(\overline{H_0 \setminus V_0}\right) = \emptyset$. Итак, (7) выполнено.

В случае K_0-ретрактов вместо окрестности V_0 нужно рассмотреть подпространство H_0. Согласно Предложению 8 отображения $r_i : Y_i \cup H_0 \longmapsto Y_i$ могут быть продолжены до K_0-отображений $f_i : H_i \longmapsto Y_i$, $i = 1, 2$. Так как в этом случае $V_1 \cup V_2 = H$ и $V_1 \cap V_2 \setminus V_0 = \emptyset$, то построенная выше окрестность U совпадает с H, следовательно Y есть K_0-ретракт в H.

b) Y_0 есть K_0-окрестностный ретракт в H, и следовательно в Y. Пусть $r : U \longmapsto Y_0$ – некоторая K_0-ретракция, где U – окрестность множества Y_0 в Y. Рассмотрим K_0-ретракцию

$$r^* : Y_1 \cup U \longmapsto Y_1, \quad r^*(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in Y_1, \\ r_2(x) & \text{при} \quad x \in U_2, \end{cases},$$

где $U_i = U \cap Y_i$, $r_i = r|U_i$, $i = 1, 2$. Так как $Y_1 \cup U = (Y_1 \setminus Y_2) \cup U$ есть объеденение двух открытых в Y множеств, то $Y_1 \cup U$ есть окрестность Y_1 в Y. Так как Y есть K_0-окрестностный ретракт в H, то Y_1 есть K_0-окрестностный ретракт в Y, и следовательно в H. Аналогично доказываем для Y_2.

В случае K_0-ретрактов окрестность U заменяется множеством Y, и следовательно $U_i = Y_i$, $i = 1, 2$. Повторяя предыдушие рассуждения, можно показать, что Y_1 и Y_2 суть K_0-ретракты в Y, и следовательно в H. Теорема 5 доказана.

§6. СВОЙСТВА ТЕРМИНАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть X есть K_0-окрестностный ретракт (или K_0-ретракт) в H, G – открытое множество в H, и $r : G \longmapsto X$ – некоторая K_0– (соотв. K–) ретракция. Так как отображение r можно рассмотреть как $G \longmapsto G$, то $r \circ r = r$ и имеем

$$\lambda_r(x) = \lambda_r(x)\lambda_r(r(x)), \quad x \in G.$$

Таким образом, если для некоторой точки $x_0 \in G$ имеем $\lambda_r(x_0) \neq 0$, то $\lambda_r(r(x_0)) = 1$. Следовательно, для каждой точки $x \in X$ имеем либо $\lambda_r(x) = 0$, либо $\lambda_r(x) = 1$, причем если $\lambda_r(x_0) = 0$, то $\lambda_r(r^{-1}(x_0)) = 0$. Таким образом, если функция $\lambda_r(x)$ тождественно равна нулю на X, то она будет тождественно равна нулю на всем G. Например, это свойство выполнено, если X есть локально компактное (в частности, компактное или конечномерное) множество.

Терминальная производная аддитивного или линейного отображения $f : G \longmapsto H$ есть постоянная на G и называется **терминальным числом** отображения f

(см. [3]). Поэтому каждая такая K_0– (соотв. K–) ретракция $r : G \longmapsto X$ есть либо 0, либо 1 на G. Выше было отмечено, что ортогональный проектор $p : H \longmapsto L$ на конечномерное подпространство или на подпространство конечной коразмерности является K_0-отображением. Следовательно, p есть K_0-ретракция, принимающая значение 0 в первом случае и 1 – во втором случае. Следовательно, всякое бесконечномерное линейное (замкнутое) подпространство пространства H, имеющее бесконечномерную коразмерность относительно H не может быть K_0-окрестностным ретрактом в H.

Определение 5. Непустое подмножество A подпространства $X \subset H$ называется **K_0-деформационным ретрактом** (соотв. **K_0-сильным деформационным ретрактом**) X, если существует K_0-отображение $r : X \longmapsto A$, называемое **K_0-деформационной ретракцией** X на A такое, что

1) $i \circ r \underset{K_0}{\cong} 1_X$ (соотв. $i \circ r \underset{K_0}{\cong} 1_X$ $(rel\ A)$),

2) $r \circ i = 1_A$, где $i : A \longmapsto X$ – некоторое вложение.

Множество A называется **K_0-слабым деформационным ретрактом** X, если оно удовлетворяет условию 1) и $r \circ i \underset{K_0}{\cong} 1_A$ (последнее условие заменяет условие 2)). Аналогично определяются окрестностные варианты таких ретрактов.

Единичная сфера с K_0 ретракцией $r : x \longmapsto \dfrac{x}{||x||}$ является важным примером K_0-окрестностного сильного деформационного ретракта в H, а выпуклое подмножество из H является примером K_0-слабого деформационного ретракта в H.

§7. K_0r-ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 6. K_0-отображение $f : X \longmapsto Y$, $X, Y \subset H$ называется **K_0r-отображением** X на Y, если существует K_0-отображение $g : Y \longmapsto X$ такое, что $f \circ g = 1_Y$. Множество Y называется **K_0r-образом** множества X.

Ясно, что K_0-ретракции и K_0-гомеоморфизмы являются K_0r-отображениями. Композиция двух K_0r-отображений есть K_0r-отображение. Если линейные оболочки сомножителей в декартовом произведении $X \times Y$ суть конечномерны, или одна из них имеет конечную коразмерность в H, то обе проекции $X \times Y \longmapsto X$ и $X \times Y \longmapsto Y$ являются K_0r-отображениями.

Предложение 12. Справедливы следующие утверждения :

а) K_0-отображение $f : X \longmapsto Y$ будет K_0r-отображением тогда и только тогда, когда f представимо в виде $f = h \circ r$, где r есть K_0-ретракция, а h есть K_0-гомеоморфизм.

b) Подмножество $Y \subset H$ будет K_0-ретрактом в H тогда и только тогда, когда Y есть K_0r-образ H.

c) Замкнутое подмножество $Y \subset H$ будет K_0-ретрактом в H тогда и только тогда, когда Y есть K_0r-образ H.

d) K_0r-образ K_0-окрестностного ретракта (соотв. замкнутый K_0r-образ K_0-ретракта) пространства H будет K_0-окрестностным ретрактом (соотв. K_0-ретрактом) пространства H.

Доказательство : a) Пусть $f : X \longmapsto Y$ – некоторое K_0r-отображение, $g : Y \longmapsto X$ его правое обратное и $A = g(Y)$. Так как $f \circ g = 1_Y$, то g инъективно и $f|A = g^{-1}$. Таким образом, $h = g^{-1}$ есть K_0-гомеоморфизм A на Y. Положим $r = g \circ f$, отображение $r : X \longmapsto A$ есть K_0-ретракция и $f = h \circ r$.

Пусть теперь $f : X \longmapsto Y$ представимо в виде $f = h \circ r$, где r есть K_0-ретракция, а h – некоторый K_0-гомеоморфизм. Так как r и h суть K_0r-отображения, то f есть K_0r-отображение.

b) Пусть Y – K_0-окрестностный ретракт в H. Как и K_0-ретракт открытого в H множества $G \supset Y$, Y есть K_0r-образ G. Пусть теперь Y – K_0r-образ открытого в H множества G. В силу утверждения a), Y K_0-гомеоморфно K_0-ретракту открытого в H множества, т.е. Y есть K_0-окрестностный ретракт в H. Согласно Предложению 5, Y есть K_0-окрестностный ретракт в H.

c) Если замкнутое множество $Y \subset H$ есть K_0-ретракт в H, то Y есть K_0r-образ H. Пусть теперь Y – K_0r-образ пространства H. В силу утверждения a), Y K_0-гомеоморфно некоторому K_0-ретракту пространства H. Следовательно, согласно Следствию 1, Y есть K_0-ретракт в H.

d) непосредственно следует из утверждений b) и c).

Следствие 9. Справедливы следующие утверждения :

a) Пусть Y есть K_0r-образ пространства H, $A \subset X \subset H$ и A замкнуто в X. Тогда всякое K_0-отображение $f : A \longmapsto Y$ можно продолжить до K_0-отображения $f^* : X \longmapsto Y$.

b) Если $Y \subset H$ есть K_0r-образ открытого в H подмножества и $A \subset X \subset H$, то всякое K_0-отображение $f : A \longmapsto Y$ можно продолжить до K_0-отображения $f^* : U \longmapsto Y$ на некоторую окрестность U относительно X подмножества A.

Доказательство : Утверждение a) следует из Предложения 8 и 12 a), а утверждение b) следует из Леммы 1 и Предложения 12 b).

Следствие 10. Если X есть компактный K_0r-образ (в частности, компактный K_0-ретракт) пространства H, то всякое K_0-отображение $f : X \longmapsto X$ имеет неподвижную точку.

Доказательство : Согласно Предложению 12 a), X K_0-гомеоморфно K_0-ретракту в H. Следовательно, X как компактный абсолютный ретракт обладает свойством неподвижной точки.

ABSTRACT. The paper describes a modification of some basic concepts of classical retracts theory in so-called K_0H-category. The objects of this category are all possible subsets of a fixed real Hilbert space, and the morphisms are continuous mappings, belonging to a special class K_0. We prove infinite-dimensional analogs of some properties of Euclidean neighborhood retracts as well as infinite-dimensional analogs of a number of classical theorems of retracts theory, such as Borsuk theorems on extension of mappings and homotopies, Hanner theorem and others, in the class K_0 and in a somewhat broader class $K \supset K_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский, "Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 9, № 2, стр. 107 – 120, 1974.
2. Э. А. Мирзаханян, "О свойствах одного класса отображений подмножеств гильбертова пространства", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 15, № 5, стр. 349 – 356, 1980.
3. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства. I", Уч. Записки ЕГУ, № 3(174), стр. 21 – 28, 1990.
4. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства. II", Уч. Записки ЕГУ, № 1, стр. 3 – 10, 1991.
5. Э. А. Мирзаханян, "Построение бесконечномерных гомотопических групп", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 8, № 3, стр. 212 – 225, 1973.
6. Э. А. Мирзаханян, "О некоторых свойствах бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства", ДАН Арм. ССР, том 79, № 1, стр. 15 – 17, 1984.
7. Э. А. Мирзаханян, "Об одной теореме инвариантности области гильбертова пространства при K_0-диффеоморфизмах", Уч. Записки ЕГУ, № 2, стр. 28 – 33, 1986.
8. Э. А. Мирзаханян, "О свойствах терминальных чисел линейных ограниченных операторов, принадлежащих одному классу отображений подмножеств гильбертова пространства", ДАН Арм. ССР, том 80, № 5, стр. 51 – 53, 1985.
9. С. Ленг, Введение в Теорию Дифференцируемых Многообразий, Мир, Москва, 1967.
10. К. Куратовский, Топология, том 2, Мир, Москва, 1969.

5 апреля 1998

Ереванский государственный университет

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА В ШЕСТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕТРИКОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

А. О. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

В статье изучается проблема Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка. По критерию Адамара описаны все уравнения Гюйгенса в шестимерном пространстве с метрикой диагональной плоской волны.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Задача описания линейных гиперболических уравнений второго порядка, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, известна как задача Адамара. Адамар сформулировал эту проблему в 1923 году [1] и сделал важный шаг для ее решения в рамках теории задачи Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} g_{ij}(x)\, u_{x_ix_j} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = 0, \tag{1}$$

$$u|_S = f, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = g. \tag{2}$$

Здесь S – многообразие размерности $n-1$, а $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная в направлении нормали ν к S.

Определение. Уравнение (1) удовлетворяет принципу Гюйгенса (по терминологии Адамара "в узком смысле" [1]), если в каждой точке $x^0 = (x_0^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ значение решения задачи Коши (1), (2) зависит от значений данных Коши на пересечении начального многообразия S с характеристическим коноидом с вершиной в точке x^0.

Из классических результатов Пуассона, Кирхгофа и Тедоне следует, что обычное волновое уравнение

$$\Box_n\, u \equiv u_{x_0x_0} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_ix_i} = 0$$

является гюйгенсовым, если $n \geq 4$ четное. При этом характеристическим коноидом является конус

$$(x_0 - x_0^0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_i^0)^2 = 0$$

с вершиной в точке $x^0 = (x_0^0, \ldots, x_n^0)$.

Принцип Гюйгенса инвариантен относительно так называемых элементарных преобразований :

a) невырожденная замена независимых переменных ;

b) преобразование неизвестной функции $u \to \lambda(x)\, u$, $\lambda(x) \neq 0$ (калибровочное преобразование) ;

c) умножение уравнения на функцию $\lambda(x) \neq 0$.

Два уравнения называются эквивалентными, если одно из них получается из другого с помощью элементарных преобразований. Гиперболические уравнения, эквивалентные волновому, называются тривиальными гюйгенсовыми уравнениями. Долгое время казалось, что кроме тривиальных нет других гюйгенсовых уравнений. Первые примеры нетривиальных уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, были получены К. Штельмахером [2]. Он доказал, что уравнения вида

$$\Box_6\, u + c(x_0, \ldots, x_5) u = 0$$

с действительным аналитическим коэффициентом c, удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда $c = 0$, $c = -\dfrac{2}{x_0^2}$, $c = \dfrac{2}{x_i^2}$, $i = 1, \ldots, 5$. Настоящая статья изучает тот же вопрос для уравнения

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1)\, u_{x_ix_i} + c\,(x_0 - x_1, x_2, \ldots, x_5)\, u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^6 \quad (3)$$

с действительными аналитическими коэффициентами $a_i > 0$ $(i = 2, \ldots, 5)$ и c. Известно [3] — [5], что для $c = 0$, $c = \dfrac{2a_i(x_0 - x_1)}{x_i^2}$, $i = 2, \ldots, 5$ уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса. Возникает проблема описания всех гюйгенсовых уравнений вида (3).

§1. КРИТЕРИЙ АДАМАРА

Рассмотрим лоренцово пространство V_6 с метрикой плоской волны

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - \sum_{i=2}^{5} a_i^{-1}(x_0 - x_1)\, dx_i^2,$$

порожденной уравнением (3). Пусть $x^0 \in V_6$ фиксирована и $\Gamma(x, x^0)$ – квадрат геодезического расстояния между точками $x^0, x \in V_6$. Известно [3], [5], что

$$\Gamma(x,x^0) = (x_0 - x_0^0)^2 - (x_1 - x_1^0)^2 - \sum_{i=2}^{5} A_i^{-1}(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0)(x_i - x_i^0)^2,$$

где

$$A_i(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0) = \frac{1}{(x_0 - x_1) - (x_0^0 - x_1^0)} \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0 - x_1} a_i(\sigma)\, d\sigma, \quad i = 2, \ldots, 5.$$

Функция вида

$$U(x,x^0) = V(x,x^0)\Gamma^{-2} - W(x,x^0)\ln\Gamma + R \tag{4}$$

называется элементарным решением уравнения (3), если она удовлетворяет (3) вне характеристического коноида

$$\Gamma(x,x^0) = 0. \tag{5}$$

В (4)

$$V(x,x^0) = U_0(x,x^0) + U_1(x,x^0)\Gamma, \qquad W(x,x^0) = \sum_{i=2}^{\infty} U_\nu(x,x^0)\Gamma^{\nu-2}$$

где U_ν, $(\nu = 0, 1, \ldots)$ и R – достаточно гладкие функции.

Подстановка функции $U(x,x^0)$ в (3) приводит к системе уравнений в частных производных относительно U_0, U_1, U_2 и W

$$XU_0 = 0, \tag{6}$$

$$4(X+1)U_1 = L[U_0], \tag{7}$$

$$4(X+2)\,U_2 = L[U_1], \qquad L[W] = 0, \tag{8}$$

где

$$X = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{4}(M - 12) \equiv$$
$$\equiv X_1 + \frac{1}{4}(M - 12), \tag{9}$$

$$M = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2} 5a_i(x_0 - x_1)\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i^2}.$$

Ясно, что M зависит только от $x_0 - x_1$. Функция $W(x,x^0)$ является решением задачи Гурса для уравнения (3) с данными на поверхности характеристического коноида (5). Критерий Адамара утверждает, что уравнение (3) удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда логарифмический член его элементарного решения (4) исчезает для всех $x^0 \in V_6$ и всех x, лежащих внутри коноида (5), т.е.

$$W(x, x^0) = 0. \tag{10}$$

Замечание. Из единственности решения задачи Гурса следует, что условие (10) эквивалентно требованию

$$W(x, x^0) \triangleq 0, \tag{10'}$$

которое можно заменить условием

$$U_2(x, x^0) \triangleq 0. \tag{10''}$$

Здесь знак $\triangleq$ означает, что уравнение удовлетворяется только на характеристическом коноиде (5).

Известно [4], что оператор X_1 в (9) является дифференциальным оператором вдоль геодезических кривых, которые являются бихарактеристическими кривыми для уравнения (3). Так как коноид (5) содержит эти кривые, то из условия (10″) следует $X\,U_2(x, x^0) \triangleq 0$. Используя уравнение (8), получаем

$$L[U_1] \triangleq 0. \tag{11}$$

Таким образом, задача построения всех гюйгенсовых уравнений вида (3) свелась к задаче нахождения функций $c(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_s)$, для которых коэффициент $U_1(x, x^0)$ в (4) удовлетворяет уравнению (7) и условию (11).

§2. ПОСТРОЕНИЕ ГЮЙГЕНСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Решения уравнений (6) и (7) можно представить в виде [4]

$$U_0(x, x^0) = \alpha \exp\left[-\int_0^s \frac{1}{4\sigma}(M - 12)d\sigma\right], \tag{12}$$

$$U_1(x, x^0) = \frac{U_0(x, x^0)}{4s} \int_0^s \frac{L[U_0]}{U_0(x(\sigma), x^0)}\, d\sigma. \tag{13}$$

Используя нормировку, примененную в [1], получим

$$\alpha = U_0(x^0, x^0) = \prod_{i=2}^{5} (a_i(x_0^0 - x_1^0))^{-1/2},$$

а интегралы вычисляются вдоль геодезической кривой, соединяющей точки x^0, x. На этой кривой имеем

$$x_0 - x_1 = x_0^0 - x_1^0 + (\tau_0 + \xi_0)\,\sigma, \tag{14}$$

$$x_i = x_i^0 - \sigma A_i(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0)\eta_{0i} \quad i = 2, \cdots, 5, \tag{15}$$

где τ_0, ξ_0, η_{0i} определяют касательную к геодезической кривой в точке x^0.

$$U_0(x, x^0) = \prod_{i=2}^{5} (A_i(x_0 - x_1, x_0^0 - x_1^0))^{-1/2}.$$

Поэтому для U_1 имеем

$$U_1(x, x^0) = \frac{U_0}{4s} \int_0^s c(x_0^0 - x_1^0 + (\tau_0 + \xi_0)\sigma, x_2^0 - \sigma A_2\eta_{02}, \cdots, x_5^0 - \sigma A_5\eta_{05})d\sigma =$$

$$= \frac{U_0}{4s(\tau_0 + \xi_0)} \int_0^{s(\tau_0+\xi_0)} c(x_0^0 - x_1^0 + \gamma, x_2^0 - \frac{\eta_{02}}{(\tau_0 + \xi_0)} \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0^0 - x_1^0 + \gamma} a_2(r)\,dr, \cdots, x_5^0 -$$

$$- \frac{\eta_{05}}{(\tau_0 + \xi_0)} \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0^0 - x_1^0 + \gamma} a_5(r)\,dr) d\gamma \equiv F\left(s(\tau_0 + \xi_0), \frac{s\tau_{02}}{s(\tau_0 + \xi_0)}, \cdots, \frac{s\eta_{05}}{s(\tau_0 + \xi_0)}\right).$$

Согласно формулам (14), (15), отсюда следует, что $U_1 = U_1(x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_5)$. Следовательно, функция $L[U_1]$ зависит от переменных $p = x_0 - x_1, x_2, \cdots, x_5$ и не зависит от $q = x_0 + x_1$. С другой стороны, согласно (11), $L[U_1] = 0$ на пятимерной характеристической поверхности

$$q = q^0 + \frac{1}{p - p^0} \sum_{i=2}^{5} A_i^{-1}(p, p^0)(x_i - x_i^0)^2, \quad p^0 = x_0^0 - x_1^0, \quad q^0 = x_0^0 + x_1^0.$$

Следовательно

$$L[U_1] = 0. \tag{16}$$

Теперь мы должны определить функцию U_1 из уравнения (7), которое в данном случае может быть записано в виде

$$4(p - p^0)\frac{\partial U_1}{\partial p} + 4\sum_{i=2}^{5} a_i(p)\,A_i^{-1}(p, p^0)(x_i - x_i^0)\frac{\partial U_1}{\partial x_i} +$$

$$+2\left(\sum_{i=2}^{5} a_i(p)\,A_i^{-1}(p, p^0) - 4\right) U_1 + 4U_1 = U_0\,c. \tag{17}$$

Разделив последнее уравнение на U_0 и учитывая (6), для функции $V = \dfrac{4U_1}{U_0}$ получаем

$$(p - p^0)\frac{\partial V}{\partial p} + \sum_{i=2}^{5} a_i(p)\,A_i^{-1}(p, p^0)(x_i - x_i^0)\frac{\partial V}{\partial x_i} + V = c. \tag{18}$$

Легко видеть, что условие (16) эквивалентно условию

$$L[V] = 0. \tag{19}$$

Решение этого уравнения строится в виде степенного ряда

$$V = V_0 + V_1(p - p^0) + \sum_{i=2}^{5} V_i(x_i - x_i^0) + \cdots .$$

Условие (19) можно записать в виде

$$L[V]|_{x'=\xi} + \frac{\partial L[V]}{\partial p}|_{x'=\xi}(p - p^0) + \sum_{i=2}^{5} \frac{\partial L[V]}{\partial x_i}|_{x'=\xi}(x_i - x_i^0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L[V]}{\partial p^2}|_{x'=\xi}(p - p^0)^2 + \sum_{i=2}^{5} \frac{\partial^2 L[V]}{\partial p\, \partial x_i}(p - p^0)(x_i - x_i^0) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=2}^{5} \frac{\partial^2 L[V]}{\partial x_k \partial x_l}|_{x'=\xi}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0) + \cdots = 0, \tag{20}$$

где $x' = (p, x_2, \cdots, x_5)$ и $\xi = (p^0, x_2^0, \cdots, x_5^0)$. Приравнивая к нулю коэффициенты этого разложения, получим последовательность уравнений для функции c. Непосредственные вычисления дают

$$L[V]|_{x'=\xi} = -\frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} a_i(p^0)\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}(\xi) + c^2(\xi). \tag{21}$$

Взяв точку ξ произвольной, получаем первое уравнение для c :

$$\sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1)\,\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - 3c^2 = 0. \tag{22}$$

Из этого уравнения следует, что $\dfrac{\partial}{\partial p}L[V]|_{x'=\xi} = 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial x_i}L[V]|_{x'=\xi} = 0$. Члены второго порядка дают уравнения

$$\sum_{i=2}^{5}\left[-\frac{1}{5}a_i\frac{\partial^4 c}{\partial p^2 \partial x_i^2} - \frac{2}{5}a_i'\frac{\partial^3 c}{\partial p \partial x_i^2} - \frac{11}{45}a_i''\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} + \frac{1}{15 a_i}(a_i')^2\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2}\right] + \frac{4}{3}c\frac{\partial^2 c}{\partial p^2} + \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)^2 = 0, \tag{23}$$

$$\sum_{i=2}^{5}\left[-\frac{1}{5}a_i\frac{\partial^4 c}{\partial p \partial x_r \partial x_i^2} + \left(-\frac{1}{5}a_i' + \frac{1}{40}\frac{a_i}{a_r}a_r'\right)\frac{\partial^3 c}{\partial x_r \partial x_i^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{a_r}a_r' c\frac{\partial c}{\partial x_r}\right] +$$

$$+\frac{4}{3}c\frac{\partial^2 c}{\partial p \partial x_r} + \frac{\partial c}{\partial x_r}\frac{\partial c}{\partial p} = 0, \quad r = 2, \ldots, 5, \tag{24}$$

$$-\frac{1}{5}\sum_{i=2}^{5} a_i\frac{\partial^4 c}{\partial x_l \partial x_r \partial x_i^2} + \frac{4}{3}c\frac{\partial^2 c}{\partial x_l \partial x_r} + \frac{\partial c}{\partial x_r}\frac{\partial c}{\partial x_l} = 0, \quad r, l = 2, \ldots, 5. \tag{25}$$

Из последнего уравнения и (22) получим

$$\frac{2}{3}\frac{\partial^2 c}{\partial x_r \partial x_l}c - \frac{\partial c}{\partial x_l}\frac{\partial c}{\partial x_r} = 0,$$

которое легко свести к

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}c^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad r, l = 2, \dots, 5.$$

Отсюда

$$c = \left(\sum_{l=2}^{5} d_l(x_0 - x_1)x_l + k\,(x_0 - x_1)\right)^{-2} \tag{26}$$

с произвольными функциями $d_l(x_0 - x_1)$ $(l = 2, \dots, 5)$ и $k(x_0 - x_1)$. Согласно (22) уравнение (24) сводится к

$$\frac{1}{a_r}a_r' c\frac{\partial c}{\partial x_r} - 3\frac{\partial c}{\partial x_r}\frac{\partial c}{\partial p} + 2c\frac{\partial^2 c}{\partial p \partial x_r} = 0.$$

Подставляя функцию c из (26), получаем

$$d_r = \frac{\beta_r}{\sqrt{2a_r}}, \qquad r = 2, \dots, 5, \tag{27}$$

а из (22)

$$\sum_{r=2}^{5}\beta_r^2 = 1. \tag{28}$$

Уравнение (25) вместе с (22) дает

$$\sum_{i=2}^{5}\frac{3}{a_i}(a_i')^2\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - 2\sum_{i=2}^{5}a_i''\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - 9\left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)^2 + 6c\frac{\partial^2 c}{\partial p^2} = 0.$$

Подставляя выражение для c, получим

$$\sum_{i=2}^{5}\left[\frac{3}{a_i}(a_i')^2 - 2a_i''\right]d_i^2\left(\sum_{l=2}^{5}d_l x_l + k\right) - 2\left(\sum_{l=2}^{5}d_l'' x_l + k''\right) = 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$d_r\sum_{i=2}^{5}\left[\frac{3}{a_i}(a_i')^2 - 2a_i''\right]d_i^2 = 2d_r'', \quad r = 2, \dots, 5, \tag{30}$$

$$k\sum_{i=2}^{5}\left[\frac{3}{a_i}(a_i')^2 - 2a_i''\right]d_i^2 = 2k''. \tag{31}$$

После легких преобразований запишем уравнение (30) в виде

$$\beta_r\sum_{i=2}^{5}\sqrt{a_i}(a_i^{-1/2})''\beta_i^2 = \beta r\sqrt{a_r}(a_r^{-1/2})'', \quad r = 1, \dots, 5. \tag{32}$$

Обозначим $r_i = \sqrt{a_i}(a_i^{-1/2})''$, $i = 2, \ldots, 5$. Пусть

$$r_i \neq r_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, 5. \tag{33}$$

Тогда система уравнений (28), (32) имеет только решения $\beta_l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta_i = 0$, $i \neq l$ $(l, i = 2, \ldots, 5)$. В этом случае из (27) получим $d_l = \dfrac{1}{\sqrt{2a_l}}$, $d_i = 0$, $i \neq l$, $l, i = 2, \ldots, 5$, и уравнение (31) принимает вид $k'' - r_l k = 0$, $l = 2, \ldots, 5$. Общее решение этого уравнения есть

$$k_l = \frac{\alpha_l \tilde{A}_l}{\sqrt{2a_l}} + \frac{c_l}{\sqrt{2a_l}} \quad (\alpha_l, c_l = const),$$

где

$$\tilde{A}_l = \int_{x_0^0 - x_1^0}^{x_0 - x_1} a_l(\sigma)\, d\sigma, \quad l = 2, \ldots, 5.$$

Подставляя значения d_l и k_l в (26), находим функцию c и уравнение (3) принимает вид

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^{5} a_i(x_0 - x_1) u_{x_ix_i} + \frac{2a_l(x_0 - x_1)}{(x_l + \alpha_l \tilde{A}_l)^2} u = 0, \quad l = 2, \ldots, 5. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь случай

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4, \tag{35}$$

когда условия (33) нарушаются. В этом случае система уравнений (28), (32) имеет решения $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt{2}}$ с $\alpha_i = const$, $i = 2, \ldots, 5$, $\sum\limits_{i=2}^{5} \alpha_i^2 = 1$. Тогда из формулы (27) получаем $d_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt{2a_i}}$, $i = 2, \ldots, 5$ и уравнение (31) принимает вид $k'' - r_i k = 0$, $i = 2, \ldots, 5$. Отсюда

$$k_i = \frac{m_i \tilde{A}_i}{\sqrt{2a_i}} + \frac{l_i}{\sqrt{2a_i}} \quad i = 2, \ldots, 5 \quad (m_i, l_i = const).$$

Из условий (35) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{2a_i}} = \frac{\gamma_{ij} \tilde{A}_j}{\sqrt{2a_j}} + \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2a_j}} \quad (\delta_{ij}, \gamma_{ij} = const), \quad i, j = 2, \ldots, 5.$$

Если $\gamma_{ij} = 0$ и $a_i = \sigma_{ij} a_j$, где $\sigma_{ij} = const$, $i, j = 2, \ldots, 5$, то для (3) получаем уравнение

$$u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - a_j(x_0 - x_1) \sum_{k=2}^{5} \sigma_{kk} u_{x_kx_k} + \frac{2a_j}{\left(\sum_{k=2}^{5} \frac{\alpha_k x_k}{\sqrt{\sigma_{kj}}} + m_j \tilde{A}_j\right)^2} u = 0, \ j = 2, \ldots, 5,$$

$$\sum_{i=2}^{5} \alpha_i^2 = 1,$$

которое эквивалентно частному случаю уравнения (34). Если $\delta_{ij} = 0$, $i, j = 2, \ldots, 5$, то из (26) получаем

$$c = \frac{2a_j}{\left(\alpha_j x_j + \tilde{A}_j \sum\limits_{i=2, i\neq j}^{5} \gamma_{ij}\alpha_i x_i + m_j \tilde{A}_j \right)^2}, \quad j = 2, \ldots, 5, \quad \sum_{i=2}^{5} \alpha_i^2 = 1.$$

Аналогичным образом исследуются остальные случаи нарушения условия (33). Поскольку для построенных уравнений выполняется критерий Адамара, то принцип Гюйгенса удовлетворяется, а все коэффициенты в разложении (20) обращаются в нуль. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема. Уравнение (3), кроме тривиального случая $c = 0$, удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда функция c равна

$$a) \qquad c = \frac{2a_l(x_0 - x_1)}{(x_l + \alpha_l \tilde{A}_l)^2}, \quad l = 2, \ldots, 5, \quad \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{2a_i}} \neq \frac{\gamma_{ij}\tilde{A}_j}{\sqrt{2a_j}},$$

$$i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, 5;$$

$$b) \quad c = \frac{2a_{i_1}}{\left(\alpha_{i_1} x_{i_1} + \tilde{A}_{i_1} \sum_{k=2}^{p} \gamma_{i_k i_1}\alpha_{i_k} x_{i_k} + m_{i_1}\tilde{A}_{i_1} \right)^2}, \quad \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{2a_{i_k}}} = \frac{\gamma_{i_k i_1}\tilde{A}_{i_1}}{\sqrt{2a_{i_1}}},$$

$$\sum_{r=2}^{5} \alpha_{i_r}^2 = 1, \quad k = 2, \ldots, p, \quad p = 2, \ldots, 4, \quad i_l = 2, \ldots, 5, \quad l = 1, \ldots, 4, \quad i_l \neq i_1.$$

ABSTRACT. In the paper Hadamar's problem for the linear second order hyperbolic equations is investigated. By Hadamard's criterion, all Huygens' equations in six dimensions with diagonal plane wave metric are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, New Haven, Yale University Press, 1923.
2. K. Stellmacher, Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl, IIa, Bd. 10, pp. 133 – 138, 1953.
3. P. Günther, Huygens' Principle and Hyperbolic Equations, Acad. Press, Boston, 1988.
4. А. О. Оганесян, "Обобщение метода Лагнеза-Штельмахера на один класс уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 25, № 5, стр. 462 — 473, 1990.
5. Н. Х. Ибрагимов, А. О. Оганесян, "Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой", Успехи Мат. Наук, 46, № 3, стр. 111 – 146, 1991.

18 сентября 1998

Ереванский государственный университет

ОПТИМАЛЬНАЯ ВЫБОРКА И ТОЧНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

А. Х. Симонян,[1] М. Р. Лидбеттер[2]

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Результаты, касающиеся точности полиномиального оценивания действительнозначных изотропных случайный полей в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ получены с использованием приближения особого типа многочленами достаточно высокой степени. Простое условие на ковариационную функцию гарантирует существование непрерывной версии случайного поля и дает возможность получить рекомендации по выбору шага оптимального квантования для регулярного выборочного метода при соответствующем алгоритме восстановления выборочных функций. Даны верхние экспоненциальные оценки для вероятностей больших уклонений для полей ошибок. Эти методы иллюстрируются на примерах при определенных условиях на энтропию параметрического пространства.

§1. ВВЕДЕНИЕ

При выборке в случае непрерывных сигналов выбор шага квантования очевидным образом важен. Он должен быть достаточно мал для как можно более точного восстановления выборочных функций, но достаточно велик для экономии объема компьютерной памяти. Качество восстановления реализаций зависит от поведения ковариационной функции случайного процесса в начале координат параметрического пространства.

Нужно также иметь в виду, что ковариационные функции недифференцируемых и дифференцируемых случайных процессов могут иметь визуально похожие

[1] *Данное исследование финансировано советом инностранных стипендий Фулбрайт и агенством Информации США. Частично финансировано грантом № N00014-93-1-0841 военно-морских исследований и контрактом № . F49620-95-1-0138 научных исследований министерства военно-воздушных сил.*

[2] *Исследование финансировано грантом № N00014-93-1-0841 военно-морских исследований.*

графики, хотя в этих случаях оптимальные шаги квантования и алгоритмы восстановления реализаций существенно отличаются. Таким образом, оценивание ковариационных функций на основе ограниченных эмпирических данных должно осуществляться достаточно точно. Для иллюстрации этого рассмотрим ковариационные функции вида

$$r^{(1)}(t) = 1 - \sqrt{t}, \quad r^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\left(|1+t|^{3/2} + |1-t|^{3/2} - 2|t|^{3/2}\right),$$

$$r^{(3)}(t) = \exp(-t^2), \quad r^{(4)}(t) = \frac{\sin(2.4t)}{2.4t}, \quad t \in [0,1].$$

Графики этих функций показаны на Рис. 1.

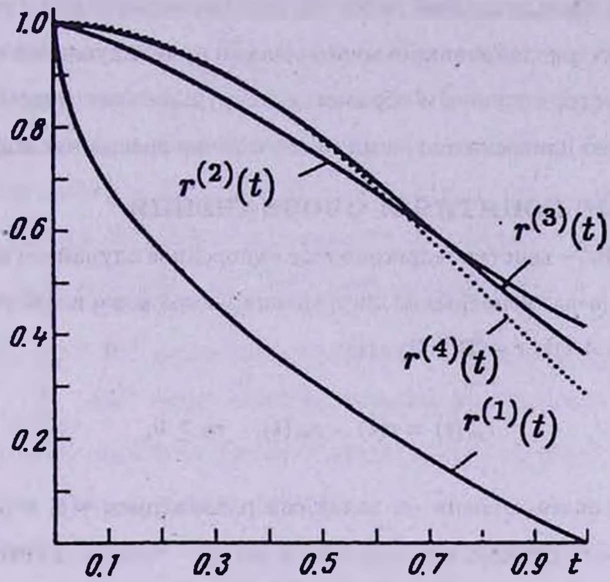

Рис. 1.

Здесь $r^{(1)}(\cdot)$ и $r^{(2)}(\cdot)$ соответствуют стационарным процессам с недифференцируемыми траекториями, тогда как $r^{(3)}(\cdot)$ и $r^{(4)}(\cdot)$ соответствуют дифференцируемым стационарным процессам. Отметим, что $r^{(3)}(\cdot)$ и $r^{(4)}(\cdot)$ выглядят аналогично $r^{(2)}(\cdot)$, но как увидим позже, оптимальные шаги квантования весьма разные. Во многих физических и технических применениях выборочные траектории непрерывных случайных функций обычно квантуют из источника данных, делая их доступными для компьютерного хранения и обработки.

В теории связи и передачи сигналов классическая выборочная теорема Шеннона широко используется для квантования и оценивания выборочных траекторий случайных процессов с ограниченным спектром. Однако, этот подход не срабатывает для процессов с неограниченным спектром, имеющих, например, ковариационные функции вида $r^{(1)}(\cdot)$ или $r^{(2)}(\cdot)$. Для этих случаев можно использовать регрессионные алгоритмы, и схемы квантования могут быть получены для гауссовских стационарных процессов с неограниченным спектром [2], [3]. Обобщения регрессионных оценок не практичны с точки зрения численного анализа [11] (алгоритмы восстановления реализаций зависят от значений ковариационной функции). Это же справедливо и при оценивании тригонометрическими многочленами [8].

В отличие от этого квантование и оценивание, рассматриваемые в настоящей статье, не предполагают гауссовости и могут быть сформулированы для многомерных случаев. Предложенный метод оценивания выборочных траекторий так называемыми интерполяционными многочленами индивидуальной степени имеет много преимуществ, и главным образом, конструкция этих многочленов делает их вычислительно привлекательными чисто с точки зрения численного анализа.

§2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ – действительнозначное однородное случайное поле с $E\zeta(t) = 0$, $E\zeta^2(t) < \infty$ и m-раз непрерывно дифференцируемой ковариационной функцией $r(t) = E\{\zeta(\tau)\zeta(\tau+t)\}$, $t \in \mathbb{R}^d$. Пусть

$$r_m(t) = r(t) - p_m(t), \quad m \geq 0, \tag{1}$$

где $p_m(t)$ – многочлен степени m, заданный разложением $r(t)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$, причем как $r(t)$, так и $p_m(t)$ - четные функции. Если m-нечетное число, то $p_m(t) = p_{m-1}(t)$. Далее, если $r(t)$ изотропно (т.е. зависит от евклидовой нормы $|t| = \sqrt{\sum t[l]^2}$ точки t), то

$$p_m(t) = p_{m-1}(t) = \sum_{j=0}^{(m-1)/2} c_j |t|^{2j}, \quad \text{причем} \quad (-1)^j c_j > 0. \tag{2}$$

Теорема 1. (Дж. Кент [6]) **Если $r(t)$ d-раз непрерывно–дифференцируема и**

$$|r_d(t)| = O\left(\frac{|t|^d}{|\log|t||^{3+\gamma}}\right), \quad |t| \to 0 \tag{3}$$

для некоторого $\gamma > 0$, то для случайного поля $\{\zeta(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ существует версия с непрерывными реализациями.

Пример в [6] показывает, что условие (3) в Теореме 1 не может быть значительно ослаблено.

Замечание 1. В одномерном случае, когда $|r_1(t)| = r(0) - r(t)$, Теорема 1 является известным классическим результатом [4].

Замечание 2. Если для некоторого $\beta > 0$ выполняется более простое условие

$$|r_d(t)| = O\left(|t|^{d+\beta}\right), \quad |t| \to 0, \tag{4}$$

то имеет место и (3).

В этой статье мы рассматриваем случайные поля, удовлетворяющие условию (4), а $\zeta(t)$ обозначает непрерывную версию. Буквами i, j, k, m, n будем обозначать целые числа. Вектор $t = (t[1], ..., t[d]) \in \mathbb{R}^d$ назовем **позиционной точкой.** Буквы s и t будем использовать для позиционных точек в $\mathbb{R}^d$. $\mathbb{Z}^d$ является целочисленной решеткой и $\mathbb{Z}^d_+ = \{u \in \mathbb{Z}^d : \ u[l] \geq 0, \ l = 1, ..., d\}$. Буквы u, v, y, w будем использовать для элементов из $\mathbb{Z}^d_+$. Таким образом, $L_d(k) = \{u \in \mathbb{Z}^d_+ : u[l] \leq k, \ l = 1, ..., d\}$ обозначает кубическую решетку (содержащую $(k+1)^d$ позиционных точек), и $C_d = \{t \in \mathbb{R}^d : 0 \leq t[l] \leq 1, \ l = 1, ..., d\}$ есть единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Для $u \in \mathbb{Z}^d_+$ можно использовать две нормы :

$$\text{(i)} \quad ||u||_1 = \sum_l u[l] \quad \text{и} \quad \text{(ii)} \quad ||u||_\infty = \max_l\{u[l]\}.$$

Для $u \in \mathbb{Z}^d_+$ и $t \in \mathbb{R}^d$ определим одночлен $t^u = \prod_{l=1}^{d} t[l]^{u[l]}$ и будем говорить, что многочлен $\sum_{||u||_1 \leq k} a_u t^u$ имеет **общую степень** k, тогда как $\sum_{||u||_\infty \leq k} a_u t^u$ имеет индивидуальную степень k. Таким образом, $p_m(t)$ в (1) имеет общую степень m, если m четно, и $m-1$, если m нечетно.

Введем следующий класс "интерполяционных многочленов", см. [6]. Возмем $h > 0$ и рассмотрим следующий регулярный выборочный метод или h-квантование параметрического пространства $\mathbb{R}^d$ с основным шагом h. Для $n \geq 1$ пусть $I_{h,y,n} = hy + hC_d = h(y + C_d)$, $y \in L_d(n-1)$, будет кубом с нижней вершиной в hy и ребрами длины h. Зафиксируем $k \geq 1$, $y \in L_d(n-1)$, $h > 0$ и для $t \in I_{h,y,n}$ положим $t = h(y+s)$, $s \in C_d$. Интерполяционный многочлен индивидуальной степени $k \geq 1$ определим как

$$q_h(y+s) = q(h(y+s)) = \sum_{||u||_\infty \leq k} A_u s^u,$$

где

$$A_u = \sum_{||v||_\infty \leq k} a_{uv} \zeta\left(h\left(y + \frac{v}{k}\right)\right),$$

a_{uv} определяются $(k+1)^d$ связующими условиями : $q\left(h\left(y+\frac{v}{k}\right)\right) = \zeta\left(h\left(y+\frac{v}{k}\right)\right)$. Таким образом, эти коэффициенты зависят от k и d, но не зависят от функции $\zeta(t)$

и от y и h. Если $k \geq 1$, то многочлен $q_h(t)$, ограниченный гранью куба $h(y+C_d)$, является интерполяционным многочленом в $\mathbb{R}^{d-1}$. На $(k+1)^{d-1}$ позиционных точках куба $h(y+L_d(k))$, лежащих на этой грани, предыдущий многочлен совпадает с исходным полем. На грани между любыми двумя смежными клетками, $q_h(t)$ сводится к одному и тому же $(d-1)$-мерному интерполяционному многочлену, проходящему через $(k+1)^{d-1}$ позиционные точки. Следовательно, $q_h(t)$ непрерывен (хотя и недифференцируем) на границах смежных клеток.

§3. ПРИРАЩЕНИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Определение 1. Для $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta(t_i)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ суть весовые коэффициенты, а n – число фиксированных позиций $t_i \in \mathbb{R}^d$. Такую линейную комбинацию будем называть **приращением** k**-го порядка** $(k \geq 1)$, если для всех $w \in \mathbb{Z}_+^d$ с $||w||_1 \leq k$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^w = 0.$$

Обозначим ошибку полиномиального оценивания $\zeta(t)$ (поле ошибок) через

$$\widehat{\zeta}_h(y+s) = \zeta(h(y+s)) - q(h(y+s)) = \zeta(h(y+s)) -$$

$$- \sum_{||v||_\infty \leq k} \left(\sum_{||u||_\infty \leq k} a_{uv} s^u \right) \zeta\left(h\left(y + \frac{v}{k}\right)\right),$$

и пусть

$$\widehat{r}_{h,y}(s,z) = cov\left[\widehat{\zeta}_h(y+s), \widehat{\zeta}_h(y+z)\right], \quad s, z \in C_d.$$

Лемма 1. Поле ошибок циклически стационарно (периодически коррелировано), т.е. $\widehat{r}_{h,y}(s,z) = \widehat{r}_{h,0}(s,z)$ и

$$\widehat{r}_h(s,z) = \widehat{r}_{h,0}(s,z) = r(h(s-z)) -$$

$$- \sum_{||u||_\infty \leq k} \left\{ \sum_{||v||_\infty \leq k} a_{uv} \left[r\left(h\left(s - \frac{v}{k}\right)\right) z^u + r\left(h\left(z - \frac{v}{k}\right)\right) s^u \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{||u||_\infty \leq k} \sum_{||u'||_\infty \leq k} \left[\sum_{||v||_\infty \leq k} \sum_{||v'||_\infty \leq k} a_{uv} a_{u'v'} r\left(\frac{h}{k}(v-v')\right) s^u z^{u'} \right]. \qquad (5)$$

Доказательство : следует из шаблонных вычислений.

Далее, не умаляя общности (см. Лемму 1), рассмотрим ошибку $\widehat{\zeta}_h(s)$ на C_d (эквивалентно случаю $y=0$). Следующая лемма играет ключевую роль.

Лемма 2. Поле ошибок $\widehat{\zeta}_h(s)$ является приращением k-ого порядка для поля $\zeta(hs)$, $s \in C_d$.

Доказательство : Согласно Определению 1, $\widehat{\zeta}_h(s)$ является суммой вида $\sum \alpha_i \zeta(t_i)$, где

$$\alpha_0 = 1, \quad t_0 = hs, \quad \alpha_v = \sum_{\|u\|_\infty \le k} a_{uv} s^u, \quad t_v = h\frac{v}{k}, \quad \|v\|_\infty \le k.$$

Нужно проверить, что $\sum \alpha_i t_i^w = 0$ для всех $w \in \mathbb{Z}_+^d$ с $\|w\|_1 \le k$. Имеем

$$\sum_i \alpha_i \zeta(t_i) = \alpha_0 \zeta(t_0) + \sum_{\|v\|_\infty \le k} \alpha_v \zeta(t_v),$$

$$\sum_i \alpha_i t_i^w = \alpha_0 t_0^w + \sum_{\|v\|_\infty \le k} \alpha_v t_v^w = (hs)^w - \sum_{\|v\|_\infty \le k} \left[\sum_{\|u\|_\infty \le k} a_{uv} \left(\frac{hv}{k}\right)^w \right] s^u =$$

$$= (hs)^w - \sum_{\|u\|_\infty \le k} \left[\sum_{\|v\|_\infty \le k} a_{uv} \left(\frac{hv}{k}\right)^w \right] s^u = (hs)^w - \sum_{\|u\|_\infty \le k} A_u s^u = (hs)^w - q(hs),$$

где $A_u = \sum_{\|v\|_\infty \le k} a_{uv} \left(\frac{hv}{k}\right)^w$ суть коэффициенты интерполяционного многочлена $q(hs) = \sum_{\|u\|_\infty \le k} A_u s^u$ для функции $g(hs) = (hs)^w$. Как и выше, постоянные a_{uv} не зависят от $g(t)$, а определются $(k+1)^d$ связующими условиями

$$g\left(\frac{hv}{k}\right) = q\left(\frac{hv}{k}\right), \quad \|v\|_\infty \le k.$$

Следовательно, интерполяционный многочлен порядка k совпадает с простым многочленом $g(t) = t^w$, $\|w\|_1 \le k$ в $(k+1)^d$ позициях, и следовательно, они тождественны. Таким образом

$$\sum_i \alpha_i t_i^w = (hs)^w - q(hs) = (hs)^w - g(hs) = (hs)^w - (hs)^w = 0.$$

Лемма 3. Предположим, что ковариационная функция $r(t)$ поля $\zeta(t)$ m-раз непрерывно дифференцируема ($m \ge 0$). Тогда в формуле (5) значения функции $r(t)$ можно заменить их “иррегулярными” частями $r_m(t)$, задаваемыми согласно (1) для $2k \ge m$, если m четное, и $2k \ge m-1$, если m нечетное.

Доказательство : аналогично рассуждениям Леммы 2 в [6], хотя наше утверждение несколько более общее. Утверждение предыдущей Леммы 3 остается в силе и для средне квадратической ошибки (СКО) при оценивании поля $\zeta(t)$ интерполяционными многочленами индивидуальной степени k.

§4. ОПТИМАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРНАЯ ВЫБОРКА И ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ

Пусть $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ - изотропное случайное поле с m-раз непрерывно дифференцируемой ковариационной функцией $r(t)$. Пусть для $\delta_0 > 0$, постоянной b, четного целого m такого, что $m + \alpha \geq d$

$$r_m(t) = (-1)^{m/2+1} b^2 |t|^{m+\alpha}, \quad |t| \leq \delta_0, \quad 0 < \alpha < 2. \tag{6}$$

Так как из (6) следует (4) для некоторого $\beta > 0$, то $\zeta(t)$ можно предполагать непрерывной. Для гауссовских полей непрерывность следует из более слабого условия [1]

$$r(0) - r(t) = O\left(\frac{1}{|\log|t||^{1+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

поэтому условие $m + \alpha \geq d$ можно опустить.

Обозначим дисперсию поля ошибок (или СКО) через $\sigma^2_{h,k}(s)$, и предположим, что $2k \geq m$.

Определение 2. Шаг квантования h_0 называется основным ε-оптимальным для некоторого $\varepsilon > 0$, если

$$h_0 = \sup\left\{h : \max_{s \in C_d} \sigma^2_{h,k}(s) \leq \varepsilon^2, \ 0 < h \leq \delta_0 d^{-1/2}\right\}.$$

Теорема 2. При условии (6) для $s \in C_d$, если $\zeta(hs) \not\equiv q_h(s)$,

(i)
$$\sigma^2_{h,k}(s) = -2 \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \left[\sum_{\|v\|_\infty \leq k} a_{uv} r_m\left(h\left(s - \frac{v}{k}\right)\right) s^u\right] +$$
$$+ \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \sum_{\|u'\|_\infty \leq k} \left[\sum_{\|v\|_\infty \leq k} \sum_{\|v'\|_\infty \leq k} a_{uv} a_{u'v'} r_m\left(\frac{h}{k}(v - v')\right) s^{u+u'}\right];$$

(ii) $\sigma^2_{h,k}(s) = b^2 h^{m+\alpha} \sigma^2_k(s)$, где

$$\sigma^2_k(s) = (-1)^{m/2}\left[2 \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \sum_{\|v\|_\infty \leq k} a_{uv} \left|s - \frac{v}{k}\right|^{m+\alpha} s^u - \right.$$
$$\left. - \sum_{\|u\|_\infty \leq k} \sum_{\|u'\|_\infty \leq k} \sum_{\|v\|_\infty \leq k} \sum_{\|v'\|_\infty \leq k} a_{uv} a_{u'v'} \left|\frac{v - v'}{k}\right|^{m+\alpha} s^{u+u'}\right], \quad \sigma^2_k(s) \not\equiv 0;$$

(iii) $h_{opt} = h_0 = \left(\frac{\varepsilon^2}{b^2 \sigma^2_k}\right)^{1/(m+\alpha)}$, где $\sigma^2_k = \max_{s \in C_d} \sigma^2_k(s)$.

Доказательство : легко следует из Лемм 1 – 3, условия (6) и Определения 2.

Утверждение (ii) Теоремы 2 задает скорость убывания СКО по h и точное значение коэффициента $b^2 \sigma^2_k(s)$. Отсюда также следует, что $\sigma^2_k(s)$ зависит от d и неубывает по d.

Теорема 3. **Пусть $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – стационарный случайный процесс с абсолютно непрерывной спектральной компонентой. При условии (6) наименьшая подходящая степень для интерполяционного многочлена будет $k = 1$, а интерполяционный многочлен индивидуальной степени 1 является ломаной функцией. Следующие рекомендации по выбору h_{opt} обеспечивают СКО $= \varepsilon$, если $0 < h_0 < \delta_0$:**

$$(a) \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon^2}{b^2(2^{2-\alpha}-1)}\right)^{1/\alpha}, \quad \text{для} \quad m=0,\ 1 \le \alpha < 2$$

(для гауссовского процесса это справедливо при $0 < \alpha < 2$);

$$(b) \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon^2}{b^2(1-2^{-\alpha})}\right)^{1/(2+\alpha)}, \quad \text{для} \quad m=2;$$

$$(c) \quad h_{opt} = 2\left(\frac{\lambda_4\varepsilon^2}{6(\lambda_4-\lambda_2^2)}\right)^{1/4}, \quad \text{для} \quad m \ge 4,$$

где λ_i является i-ым спектральным моментом, причем $\lambda_0 = 1$.

Доказательство : Имеем $d = 1$, $k = 1$ и

$$q(hs) = \sum_{u=0}^{1}\sum_{v=0}^{1} a_{uv}\zeta(hv)s^u, \quad s \in [0,1],$$

$$q(hv) = \zeta(hv), \quad v = 0, 1.$$

Следовательно, $a_{00} = a_{11} = 1$, $a_{01} = 0$, $a_{10} = -1$ и $q(hs) = (1-s)\zeta(0) + s\zeta(h)$, $s \in [0,1]$. Из Теоремы 2 и вычисления σ_1^2 получаем (a) при $m = 0$, и (b) когда $m = 2$. Случай (c) можно проверить непосредственным вычислением σ_1^2 для $m \ge 4$. В последнем случае "регулярная" часть ковариационной функции играет решающую роль, так как $2k < m$, и мы не можем применить Теорему 2. Для случаев (a) и (b) Теорема 2 применима, и следовательно, "иррегулярная" часть ковариационной функции становится решающей.

Замечание 3. Случай (a) соответствует процессам, которые недифференцируемы в среднем квадратическом ($m = 0$ и $2k > m$), случай (b) соответствует один раз дифференцируемым процессам ($m = 2$ и $2k = m$), а случай (c) соответствует процессам, которые по крайней мере дважды дифференцируемы в среднем квадратическом ($m \ge 4$ и $2k < m$).

Замечание 4. Если, дополнительно предположить, что процесс $\zeta(t)$ гауссовский и $m = 0$, то наилучший регрессионный алгоритм для оценивания $\zeta(hs)$, $s \in [0,1]$, является функцией регрессии $E\{\zeta(hs)|\zeta(0),\zeta(h)\}$, см. [3]. Далее, с вероятностью 1, функция регрессии асимптотически является "многочленом Лидстоуна" степени α, $0<\alpha<2$, при $h\to 0$, т.е.

$$E\{\zeta(hs)|\zeta(0),\zeta(h)\}\sim\frac{1}{2}[1-s^{\alpha}+(1-s)^{\alpha}]\zeta(0)+\frac{1}{2}[1+s^{\alpha}-(1-s)^{\alpha}]\zeta(h)=$$

$$=\frac{1}{2}[\zeta(0)+\zeta(h)]+\frac{1}{2}[\zeta(h)-\zeta(0)][s^{\alpha}-(1-s)^{\alpha}],\quad s\in[0,1],\quad h\to 0. \tag{7}$$

Заметим, что для малых значений h отклонение функции регрессии (7) от интерполяционного многочлена индивидуальной степени 1 (прямолинейный отрезок) определяется как $\Delta_{\alpha}(s)=s^{\alpha}-(1-s)^{\alpha}+1-2s$, $s\in[0,1]$. Например, $\max\limits_{0\le s\le 1,\ 1\le\alpha<2}|\Delta_{\alpha}(s)|\approx 0.0268$, и график $\Delta_{3/2}(s)$ задан на Рис. 2.

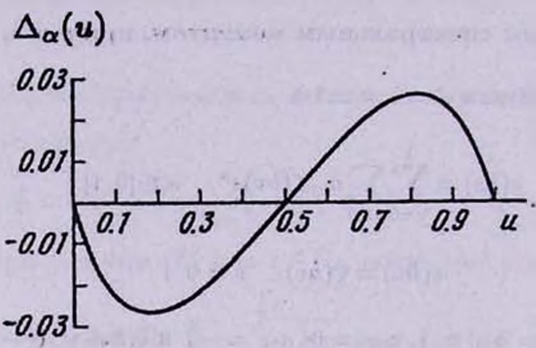

Рис. 2.

Более того, для оценки (7), $\max\limits_{s\in[0,1]}$ СКО (МСКО) $=b^2h^{\alpha}\sigma_1^2$ приводит к тому же самому h_{opt}. Это показывает, что интерполяционный многочлен степени 1, имеющий ту же оптимальность что и (7), является более простым для вычислений и поэтому предпочтителен чем (7).

Замечание 5. В случаях (b) и (c), $E\{\zeta(hs)|\zeta(0),\zeta(h)\}$ асимптотически является интерполяционным многочленом степени 1, при $h\to 0$, и вновь МСКО $=b^2h^{m+\alpha}\sigma_1^2$, см. [10].

Теорема 4. ***Пусть $\zeta(t)$, $t\in\mathbb{R}^2$ – изотропное гауссовское случайное поле с $E\zeta(t)\equiv 0$ и ковариационной функцией***

$$r(t)=1-b^2|t|^{\alpha},\quad |t|\le\delta_0,\quad 0<\alpha<2$$

для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда наименьшая подходящая степень для интерполяционного многочлена будет $k = 1$ и соответствующий интерполяционный многочлен имеет вид

$$q_h(s[1], s[2]) = (1 - s[1])(1 - s[2])\zeta(0,0) + s[2])(1 - s[1])\zeta(0, h) +$$

$$+ s[1])(1 - s[2])\zeta(h, 0) + s[1]s[2]\zeta(h, h), \quad (s[1], s[2]) \in C_2. \tag{8}$$

Кроме того, для СКО $= \varepsilon$ и $0 < h_0 < \delta_0 2^{-1/2}$ имеем

$$h_{opt} = \left(\frac{\varepsilon^2}{b^2(2^{-\alpha/2+1} - 2^{\alpha/2-2} - 2^{-1})}\right)^{1/\alpha}. \tag{9}$$

Доказательство : Так как $d = 2$, $k = 1$, $m = 0$, то для $s[1], s[2]) \in C_2$ получаем

$$q_h(s[1], s[2]) = \sum_{u[1]=0}^{2} \sum_{u[2]=0}^{2} \sum_{v[1]=0}^{2} \sum_{v[2]=0}^{2} a_{u[1]u[2]v[1]v[2]} s[1]^{u[1]} s[2]^{u[2]} \zeta(hv[1], hv[2]),$$

$$q_h(v[1], v[2]) = \zeta(hv[1], hv[2]), \quad v[1] = 0, 1, \quad v[2] = 0, 1.$$

Следовательно

$$a_{0000} = a_{1100} = a_{0101} = a_{1010} = a_{1111} = 1,$$

$$a_{0001} = a_{0011} = a_{0010} = a_{0110} = a_{0111} = a_{1001} = a_{1011} = 0,$$

$$a_{0100} = a_{1000} = a_{1101} = a_{1110} = -1,$$

приводят к (8). Согласно Теореме 2, пункт (ii), имеем

$$\sigma_1^2(s[1], s[2]) = 2\left\{(s[1]^2 + s[2]^2)^{\alpha/2}(1 - s[1])(1 - s[2]) + \right.$$

$$+ (s[1]^2 + (1 - s[2])^2)^{\alpha/2} s[2])(1 - s[1]) + (s[2]^2 + (1 - s[1])^2)^{\alpha/2} s[1])(1 - s[2]) +$$

$$+ ((1 - s[1])^2 + (1 - s[2])^2)^{\alpha/2} s[1]) s[2] + 2(2 - 2^{\alpha/2}) s[1] s[2] (1 - s[1])(1 - s[2]) -$$

$$\left. - s[1](1 - s[1]) - s[2](1 - s[2])\right\},$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2^{-\alpha/2+1} - 2^{\alpha/2-2} - 2^{-1},$$

откуда следует (9).

Замечание 6. Утверждение Теоремы 4 является аналогом утверждения (a) Теоремы 3. Утверждения, подобные (b) и (c) можно получить аналогично, используя точные формулы из Теоремы 2.

Замечание 7. Случайные поля в Теореме 4 – недифференцируемы в среднем квадратическом. Формулы для $q_h(s)$ и $\sigma_1^2(s)$ в Теореме 3 для одномерного случая легко выводятся из формул $q_h(s[1], s[2])$ и $\sigma_1^2(s[1], s[2])$ подстановкой $s[2] = 0$.

Замечание 8. При $m = 0$ наилучший алгоритм для оценивания $\zeta(hs[1], hs[2])$, $(s[1], s[2]) \in C_2)$, основанный на $\zeta(0,0), \zeta(0,h), \zeta(h,0), \zeta(h,h)$ будет функцией регрессии $E\{\zeta(hs[1], hs[2]) | \zeta(0,0), \zeta(0,h), \zeta(h,0), \zeta(h,h)\}$. Он более сложен с вычислительной точки зрения, чем $q_h(s[1], s[2])$. Для гауссовского случая и регрессионной оценки МСКО $= b^2 h^\alpha \sigma_1^2$, см. [9], с той же σ_1^2 как и при оценивании посредством $q_h(s[1], s[2])$. Интерполяционные многочлены дают требуемую оптимальность и имеют более простой вид (8).

Замечание 9. По индукции (или непосредственным вычислением), для $\zeta(t)$, $t \in \mathbb{R}^3$ и $k = 1$ имеем

$$q_h(s[1], s[2], s[3]) = (1 - s[1])(1 - s[2])(1 - s[3])\zeta(0,0,0)+$$

$$+(1 - s[1])(1 - s[2])s[3]\zeta(0,0,h) + (1 - s[1])(1 - s[3])s[2]\zeta(0,h,0)+$$

$$+(1 - s[1])s[2]s[3]\zeta(0,h,h) + (1 - s[2])(1 - s[3])s[1]\zeta(h,0,0)+$$

$$+(1 - s[2])s[1]s[3]\zeta(h,0,h) + (1 - s[3])s[1]s[2]\zeta(h,h,0) + s[1]s[2]s[3]\zeta(h,h,h).$$

§5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ “МАССИВНОСТИ” ОПТИМАЛЬНОЙ ВЫБОРОЧНОЙ СЕТИ

Займемся теперь некоторыми соотношениями, связанными с метрической энтропией по Колмогорову [7]. Напомним некоторые определения. Ниже X – метрическое пространство.

Определение 3. Множество $\widehat{T} \subset X$ называется ε-сетью для $T \subset X$, если для каждого $x \in T$ существует по крайней мере один $y \in \widehat{T}$ на расстоянии от x, не превосходящем $\varepsilon > 0 : \rho(x,y) \leq \varepsilon$.

Если T – компактное множество, то оно содержит конечную ε-сеть для каждого $\varepsilon > 0$. С этого момента всегда будем предполагать, что T компактно. Для заданного T и $\varepsilon > 0$ пусть $N_\varepsilon(T, \rho)$ есть минимальное значение n, при котором существует ε-сеть для T, состоящая из n точек, или что тоже, минимальное число ρ-шаров радиуса ε, которые покрывают T. ε-сеть, содержащая $N_\varepsilon(T, \rho)$ точек, называется минимальной ε-сетью. Натуральный логарифм от $N_\varepsilon(T, \rho)$, т.е.

$$H_\varepsilon(T, \rho) = H_\varepsilon(T, \rho)_X = \log N_\varepsilon(T, \rho) \tag{10}$$

является ε-энтропией по Колмогорову (или метрической энтропией) множества T в X, которая характеризует "массу" множества T посредством H. Ступенчатая функция $H_\varepsilon(T,\rho)$ убывает, непрерывна справа по $\varepsilon > 0$ и быстро возрастает к бесконечности при $\varepsilon \downarrow 0$. Она также монотонно возрастает по T. Если множество T допускает ε-сеть из n элементов, то согласно (10), двоичные "кодовые слова" длины $\sim \log_2 n$ достаточны для восстановления $x \in T$ с ошибкой $\leq \varepsilon$. В частности, для каждого фиксированного d и любого d-мерного параллелепипеда $T \subset \mathbb{R}^d$ имеем

$$H_\varepsilon(T,\rho) = d\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) имеет место для каждого ограниченного подмножества $T \in \mathbb{R}^d$, имеющего внутренние точки. Пусть

$$\sigma_h^2 = \sigma_{h,k}^2 = \max_{s\in C_d}\sigma_{h,k}^2(s) = \sup_{s\in C_d} E\left(\widehat{\zeta}_h(s)^2\right) = b^2h^{m+\alpha}\sigma_k^2,$$

где σ_k^2 как в Теореме 2. Рассмотрим псевдометрику Дадли

$$\rho_\zeta(t,s) = \left\{E\left|\zeta(t) - \zeta_h(s)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Определение 4. Если $T \subset \mathbb{R}^d$, то сеть $S = S(\varepsilon, T)$ точек квантования в T называется **ε-оптималной выборочной сетью**, если $|S| = card\, S$ минимально и удовлетворяет условию $\sigma_h \leq \varepsilon$. По Определению 2. $\sigma_{h_{opt}} = \varepsilon$ и S_{opt} определяется по h_{opt}.

Определение 5. κ **называется точной метрической размерностью** T **(или размерностью по Колмогорову)**, см. [7], если

$$\kappa = \inf\left\{\kappa' \geq 0: \ H_\varepsilon(T,\rho) \leq H_0 + \kappa'\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon \leq 1\right\}. \tag{12}$$

В частности, если ρ – обычная евклидова метрика в $\mathbb{R}^d$, то $k = d$ (следует также из (11)). С другой стороны, если T – ограниченное выпуклое подмножество из $\mathbb{R}^d$, $\zeta(t)$ – изотропное случайное поле с ковариационной функцией

$$r(t) = 1 - b^2|t|^\alpha + o\left(|t|^\alpha\right), \quad t \to 0, \quad \alpha \in (0,2],$$

а ρ – псевдометрика Дадли, то $\rho_\zeta(t,s) \leq C|t-s|^{\alpha/2}$ и (12) имеет место при $\kappa = 2d/\alpha$. Более того, нетрудно проверить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(T,\rho_\zeta)\left(\frac{2d}{\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = 1, \quad 0 < \alpha \leq 2. \tag{13}$$

Напомним, что оценка поля $\zeta(t)$, $t \in [0,T]^d$ интерполяционными многочленами индивидуальной степени k требует $(k+1)^d|S(\varepsilon,[0,T]^d)|$ выборочных точек, так что разбиение пространства должно быть осуществлено шагом $\ll h$.

Теорема 5. Если $\zeta(t)$, $t \in [0,T]^d$ удовлетворяет условиям Теоремы 2, то из условия $m+\alpha \geq d \geq 1$ и при $h_{opt} < \delta_0 d^{-1/2}$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\log((k+1)^d|S(\varepsilon,[0,T]^d)|)=1, \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log((k+1)^d|S(\varepsilon,[0,T]^d)|)}{H_\varepsilon([0,T]^d,\rho_\zeta)}=\begin{cases}1 & \text{для} \quad m=0,\ d=1,\ 1\leq\alpha<2,\\ \frac{2}{m+\alpha} & \text{– в противном случае.}\end{cases} \tag{15}$$

Доказательство : По Теореме 2, если $h_0 < \delta_0 d^{-1/2}$, то имеем

$$|S(\varepsilon,[0,T]^d)| \leq \left(\left[\frac{T}{h_{opt}}\right]+1\right)^d \leq \left(T(|b|\sigma_k)^{2/(m+\alpha)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/(m+\alpha)}+1\right)^d, \quad \text{и}$$

$$\log|S(\varepsilon,[0,T]^d)| \leq d\log\left(T(|b|\sigma_k)^{2/(m+\alpha)}\right)+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}+o(1), \quad \varepsilon\to 0.$$

Имея также, что

$$|S(\varepsilon,[0,T]^d)| \geq \left(\frac{T}{h_{opt}}-1\right)^d$$

получаем

$$\log|S(\varepsilon,[0,T]^d)| \sim \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon\to 0,$$

т.е. (14). Из (13) и (14) следует (15).

Замечание 10. Из (15) вытекает, что если средняя квадратическая гладкость $\zeta(t)$ возрастает, то число ε-оптимальных выборочных точек убывает. Для недифференцируемого случайного процесса $\zeta(t)$, $t \in [0,T]$, число точек в ε-оптимальном выборочном множестве и минимальной ε-сети асимптотически эквивалентны. Таким образом, Теорема 5 показывает преимущество использования интерполяционных многочленов индивидуальной степени.

Теорема 6. Если $\zeta(t)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2, то для поля ошибок $\hat{\zeta}_{h_{opt}}(s)$

(i) $$P\left(\left|\hat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right|\geq a\right)\leq\frac{\varepsilon^2\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 a^2}, \quad s\in C_d, \quad a>0,$$

где $\sigma_k^2(s)$, σ_k^2 определяются как и в Теореме 2.

(ii) Если $\gamma\in(0,1)$, то $100(1-\gamma)\%$ - предел ошибки оценивания интерполяционными многочленами индивидуальной степени k будет $a_\gamma=\pm\dfrac{\varepsilon\sigma_k(s)}{\sigma_k\sqrt{\gamma}}$.

(*iii*) **Если функция** $A(\varepsilon) > 0$ **удовлетворяет условиям :**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A(2^{-n}))^{-2} < \infty, \quad (A(\varepsilon))^{-2} \text{ не возрастает, при } \varepsilon \to 0,$$

то

$$P\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \geq A(\varepsilon) + \frac{1}{A(\varepsilon)}\right) \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 A^2(\varepsilon)}.$$

(*iv*) $\displaystyle\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\varepsilon A(\varepsilon)}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \leq 1$ **почти наверное для каждого** $s \in C_d$.

Доказательство : (i) По неравенству Маркова имеем

$$P\left(\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{a^2}\sigma^2_{h_{opt}}(s) = \frac{1}{a^2}b^2 h_{opt}^{m+\alpha}\sigma_k^2(s) = \frac{\varepsilon^2\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 a^2}.$$

(ii) следует из (i), если взять $\gamma = \frac{\varepsilon^2\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 a^2}$.

(iii) Из (i) имеем

$$P\left(\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \geq A(\varepsilon) + \frac{1}{A(\varepsilon)}\right) \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2}\left(A(\varepsilon) + \frac{1}{A(\varepsilon)}\right)^{-2} \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2 A^2(\varepsilon)}.$$

(iv) Если взять $0 < \varepsilon_n < 2^{-n}$, то согласно (iii) получаем

$$P\left(\frac{\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right|}{\varepsilon_n A(\varepsilon_n)} - 1 \geq \frac{1}{A^2(2^{-n})}\right) \leq P\left(\frac{\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right|}{\varepsilon_n A(\varepsilon_n)} - 1 \geq \frac{1}{A^2(\varepsilon_n)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2(A(\varepsilon_n))^2} \leq \frac{\sigma_k^2(s)}{\sigma_k^2(A(2^{-n}))^2} \leq \frac{1}{(A(2^{-n}))^2}.$$

Остается применить лемму Бореля–Кантелли.

Следствие 1. В частности, в качестве $A(\varepsilon)$ можно взять скорость возрастания "массивности" параметрического пространства, заданного формулой (10) или, что эквивалентно, скорость возрастания длины двоичных "кодовых слов", так что СКО $\leq \varepsilon$. Таким образом, если $A(\varepsilon) = \log(1/\varepsilon)$, то

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\varepsilon\log(1/\varepsilon)}\left|\widehat{\zeta}_{h_{opt}}(s)\right| \leq 1.$$

§6. ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГАУССОВСКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛЕЙ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ

Целью этого параграфа является изучение максимума поля ошибок при полиномиальной интерполяции гауссовского изотропного поля с нулевым средним при условиях (6), приведенных в §4.

Лемма 4. **Если $\zeta(hs)$, $s \in C_d$ – изотропное случайное поле, удовлетворяющее условиям (6), и $\widehat{\zeta}_{h_0}(s)$ – поле ошибок при интерполяции многочленами с основным шагом h_0 для ε-квантования (см. (iii) Теоремы 2), то для $0 < \delta < \varepsilon$ имеем**

$$H_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le H_0 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\delta}, \tag{16}$$

где H_0 определяется через h_0, b, σ_k, m и α из Теоремы 2. $\rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}$ –размерность по Колмогорову (12) для параметрического пространства $[0,h_0]^d$ будет $\kappa = \frac{2d}{m+\alpha}$ и $\kappa \le 2$.

Доказательство : Согласно Теореме 2 дисперсия поля ошибок $\sigma^2_{h,k}(s)$ удовлетворяет неравенству

$$\sigma^2_{h,k}(s) \le b^2\sigma_k^2 h^{m+\alpha}, \quad s \in C_d.$$

По неравенству Минковского, если $t, s \in C_d$, имеем

$$\rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}(t,s) = \sqrt{Var\left[\widehat{\zeta}_h(t) - \widehat{\zeta}_h(s)\right]} \le \sqrt{Var\,\widehat{\zeta}_h(t)} + \sqrt{Var\,\widehat{\zeta}_h(s)} =$$
$$= \sigma_{h,k}(t) + \sigma_{h,k}(s) \le 2|b|\sigma_k h^{(m+\alpha)/2}.$$

Для $\delta = 2|b|\sigma_k h^{(m+\alpha)/2}$ мощность δ-сети будет

$$N_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le \left(\frac{h_0}{h}+1\right)^d = \left(h_0 2^{2/(m+\alpha)}|b|^{2/(m+\alpha)}\sigma_k^{2/(m+\alpha)}\delta^{-2/(m+\alpha)}+1\right)^d.$$

Следовательно, при $\delta \to 0$ для $\log N_\delta$ получаем

$$H_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \le d\log\left(h_0 2^{2/(m+\alpha)}|b|^{2/(m+\alpha)}\sigma_k^{2/(m+\alpha)}\right) + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\delta} + o(1),$$

что соответствует неравенству (16). Лемма 4 доказана.

Замечание 11. Аналогичными рассуждениями получаем, что для $0 < \delta < \varepsilon$ существует H_1 такое, что

$$H_\delta\left([0,h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \ge H_1 + \frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\delta}. \tag{17}$$

Введем следующие обозначения : $B_\Delta(t)$ есть $\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}$ –шар радиуса Δ в точке t и $H_\delta\left(t, \Delta, \rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)$ является δ-энтропией шара $B_\Delta(t)$. Пусть

$$\psi(t,\Delta,\delta) = \int_0^\delta H_x^{1/2}\left(t,\Delta,\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)dx, \quad \psi(\delta) = \int_0^\delta H_x^{1/2}\left([0,h_0]^d, \rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)dx,$$
$$\psi(\Delta,\delta) = \sup_{t\in[0,h_0]^d}\psi(t,\Delta,\delta),$$

так что $\psi(\delta)$ является интегралом Дадли.

Теорема 7. **Пусть $\zeta(h_0 s)$, $s \in C_d$ – гауссовское изотропное случайное поле с нулевым средним, удовлетворяющее условиям Леммы 4. Существует постоянная $C(d, m, \alpha)$ такая, что из неравенства**

$$a \geq \left(\sqrt{1 + \frac{2d}{m+\alpha} \log 2} + \sqrt{\frac{d\pi}{2(m+\alpha)}} \right) 4\sqrt{2} + 1$$

следует, что

$$P\left(\sup_{s \in C^d} \frac{1}{\varepsilon} \left| \widehat{\zeta}_{h_0}(s) \right| \geq a \right) \leq C(d, m, \alpha) a^{\frac{2d}{m+\alpha} - 1} \varepsilon^{-\frac{2d}{m+\alpha}} e^{(1+4\sqrt{2}) H_0 - a^2/2}, \tag{18}$$

где $C(d, m, \alpha) = 9.6 \exp\left(2 + 4\sqrt{\frac{d\pi}{m+\alpha}}\right)$.

Доказательство : Согласно Теореме 2 гауссовское поле ошибок $\widehat{\zeta}_{h_0}(s)$, $s \in C_d$ удовлетворяет условию

$$E\left(\frac{1}{\varepsilon} \widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right) = 0, \quad E\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{\zeta}^2_{h_0}(s)\right) \leq 1$$

и $\psi(1) < \infty$. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ согласно (16) имеем

$$\psi(1) = \int_0^1 H^{1/2}_{\varepsilon x}\left([0, h_0]^d, \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right) dx \leq \int_0^1 \sqrt{H_0 + \frac{2d}{m+\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon x}}\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \int_0^1 \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon x}}\, dx \leq \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} x^{-2} \sqrt{\log x}\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{\infty} x^{-2} \sqrt{\log x}\, dx = \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{\varepsilon} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{H_0} + \sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}} \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\pi} < \infty,$$

где $\Gamma(y)$ – функция Эйлера. При этих условиях поле $\varepsilon^{-1} \widehat{\zeta}_{h_0}(s)$ с вероятностью 1 будет непрерывным. Здесь было использовано, что

$$\rho_{\varepsilon^{-1} \widehat{\zeta}_{h_0}}(t, s) = \varepsilon^{-1} \rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}(t, s), \quad t, s \in C_d,$$

и (см. Лемму 4)

$$H_\delta\left([0, h_0]^d, \rho_{\varepsilon^{-1} \widehat{\zeta}_{h_0}}\right) \leq H_0 + \frac{2d}{m+\alpha} \log \frac{1}{\varepsilon \delta}. \tag{19}$$

Согласно [5] для $a \geq 1 + 4\sqrt{2}\psi(1)$ имеет место следующее неравенство :

$$P\left(\sup_{s \in C^d} \frac{1}{\varepsilon} \left| \widehat{\zeta}_{h_0}(s) \right| \geq a \right) \leq 9.6 \exp\left[-\frac{a^2}{2} + \theta(a) \right], \tag{20}$$

где

$$\theta(a)=\inf_{\Delta>0}\left\{2a^2\Delta^2+4\sqrt{2}a\psi(\Delta,\Delta)+H_\Delta\left([0,h_0]^d,\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)+\log\Delta\right\}.$$

Теперь необходимо оценить $\theta(a)$. В силу (19)

$$H_\delta\left(t,\Delta,\rho_{\varepsilon^{-1}\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)=H_{\varepsilon\delta}\left(t,\varepsilon\Delta,\rho_{\widehat{\zeta}_{h_0}}\right)\leq H_0+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{\Delta}{\delta},$$

так что

$$\psi(\Delta,\Delta)\leq H_0\Delta+\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\int_0^\Delta\sqrt{\log\frac{\Delta}{x}}\,dx=$$

$$=H_0\Delta+\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\Delta\int_0^1\sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx=H_0\Delta+\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\Delta\frac{\sqrt{\pi}}{2}=c_1\Delta, \qquad (21)$$

где $c_1=H_0+\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Наконец, из (19) и (21) для $\Delta=1/a$ получим

$$\theta(a)\leq 2+e\sqrt{2}c_1+H_0+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{a}{\varepsilon}+\log a\leq$$

$$\leq 2+(1+4\sqrt{2})H_0+4\sqrt{\frac{\pi d}{m+\alpha}}+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{a}{\varepsilon}+\log a.$$

Таким образом, теперь из (20) получаем (18). Из доказательства Леммы 4 имеем

$$H_0\leq d\log\left(h_0 2^{2/(m+\alpha)}|b|^{2/(m+\alpha)}\sigma_k^{2/(m+\alpha)}\right)+1.$$

Согласно Теореме 2, $h_0=\left(\frac{\varepsilon}{b\sigma_k}\right)^{2/(m+\alpha)}$, и поэтому

$$H_0\leq 1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2+\frac{2d}{m+\alpha}\log\varepsilon, \qquad (22)$$

$$\psi(1)\leq\int_0^1\sqrt{1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2+\frac{2d}{m+\alpha}\log\varepsilon+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{\varepsilon x}}\,dx=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2+\frac{2d}{m+\alpha}\log\frac{1}{x}}\,dx\leq$$

$$\leq\sqrt{1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2}+\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\int_0^1\sqrt{\log\frac{1}{x}}\,dx=\sqrt{1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2}+\sqrt{\frac{d\pi}{2(m+\alpha)}}.$$

Для получения неравенства $a\geq 1+4\sqrt{2}\psi(1)$ достаточно взять a как в условии Теоремы 7.

Теорема 8. **В условиях Теоремы 7**

$$P\left(\sup_{s\in C^d}\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\geq a\right)\leq C_1(d,m,\alpha)a^{\frac{2d}{m+\alpha}-1}\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}4\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2}{2}},\tag{23}$$

где

$$C_1(d,m,\alpha)=C(d,m,\alpha)\exp\left[(1+4\sqrt{2})(1+\frac{2d}{m+\alpha}\log 2)\right].$$

Доказательство : непосредственно следует из Теоремы 7 и (22).

Теорема 9. **В условиях Теоремы 8**

(a) если $2d>m+\alpha$, то

$$P\left(\sup_{s\in C^d}\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\geq A(\varepsilon)+\frac{z}{A(\varepsilon)}\right)\leq$$

$$\leq C_1(d,m,\alpha)(1+z)^{\frac{2d}{m+\alpha}-1}\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}(1+4\sqrt{2})}\exp\left[-z-\frac{z^2}{2A^2(\varepsilon)}\right],\tag{24}$$

(b) если $2d\leq m+\alpha$, то

$$P\left(\sup_{s\in C^d}\frac{1}{\varepsilon}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\geq A(\varepsilon)+\frac{z}{A(\varepsilon)}\right)\leq C_1(d,m,\alpha)\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}(1+4\sqrt{2})}\exp\left[-z-\frac{z^2}{2A^2(\varepsilon)}\right],\tag{25}$$

где $A(\varepsilon)$ – максимальный корень уравнения

$$A^{\frac{2d}{m+\alpha}-1}\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right)=\varepsilon^{\frac{2d}{m+\alpha}}.$$

Достаточно взять

$$A(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}\sqrt{|\log\varepsilon|}+\frac{\left(\frac{2d}{m+\alpha}-1\right)\log|\log\varepsilon|}{2\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}|\log\varepsilon|}.$$

Доказательство : следует из Теоремы 8, если положить $a=A(\varepsilon)+\frac{z}{A(\varepsilon)}$.

Следствие 2. С вероятностью 1

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}}\sup_{s\in C^d}\left|\widehat{\zeta}_{h_0}(s)\right|\right)\leq\sqrt{\frac{2d}{m+\alpha}}.$$

Следствие вытекает из Теоремы 9 и леммы Бореля–Кантелли.

Замечание 12. Оценки из предыдущих теорем можно использовать для получения доверительных интервалов для ошибки интерполяции гауссовского изотропного случайного поля многочленами индивидуальной степени.

Авторы блогадарны профессору Роберту Адлеру за указание на статью [6].

ABSTRACT. Results on the precision of polynomial estimation of real-valued isotropic random fields on $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ are obtained using delicate approximation by polynomials of suitably high degree as estimators. A simple condition on the covariance function ensures the existence of a continuous version of the random field and provides guidance for the choice of the optimal quantization step for regular sampling designs with the appropriate reconstruction algorithm. Upper exponential bounds for tail probabilities for the error fields are given. The methods are illustrated by examples with entropy conditions on parameter space.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. J. Adler, The Geometry of Random Fields, Wiley, Chichester, 1981.
2. Ю. К. Беляев, А. Х. Симонян, "Асимптотические свойства уклонений реализации гауссовского процесса от аппроксимирующей ломаной, при уменьшении шага квантования", Случайные Процессы и Поля (под редакцией Ю. К. Беляева), МГУ, стр. 9 – 21, 1979.
3. Ю. К. Беляев, А. Х. Симонян, В. А. Красавкина, "Квантование по времени реализаций недифференцируемых гауссовских процессов", Изв. АН СССР, Тех. Кибернетика, том 4, стр. 139 — 147, 1976.
4. Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер, Стационарные Случайные Процессы. Свойства Выборочных Функций и их Приложения, Мир, Москва, 1969.
5. В. А. Дмитровский, "Оценки распределения максимума гауссовского поля", Случайные Процессы и Поля (под редакцией Ю. К. Беляева), МГУ, стр. 22 – 31, 1979.
6. J. T. Kent, "Continuity properties for random fields", The Annals of Probab., vol. 17, no. 4, pp. 1432 – 1440, 1989.
7. А. Н. Колмогоров, Теория Информации и Теория Алгоритмов, Наука, Москва, 1987.
8. О. В. Селезнев, "Приближение периодических гауссовских процессов тригонометрическими многочленами", ДАН СССР, том 21, № 1, стр. 29 — 33, 1980.
9. А. Х. Симонян, "О квантовании реализаций гауссовских случайных полей", Тезисы докладов Конф. по Применению Стат. Методов в Производстве и Управлении, Пермь, том 1, стр. 81 – 82, 1990.
10. А. Х. Симонян, "Квантование по времени и по уровню реализаций дифференцируемых стационарных гауссовских случайных процессов", Тезисы Докладов Конф. "Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов", Новосибирск, стр. 171 – 172, 1991.
11. А. Х. Симонян, В. Р. Фаталов, "Квантование по времени реализаций дифференцируемых гауссовских процессов", Уч. Записки ЕГУ (Естеств. Науки), том 1, стр. 17 – 24, 1991.
12. А. Х. Симонян, Е. И. Островский, "Точность аппроксимации гауссовского поля регрессионными сплайнами", ДАН Арм. ССР, том 90, № 3, стр. 104 – 109, 1990.

5 октября 1998

Ереванский государственный университет,

Университет Северной Каролины
Чапел Хилл, США

О МНОЖИТЕЛЯХ ВЕЙЛЯ ДЛЯ БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Л. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

Последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega(0) \leq \omega(1) \leq \ldots$ называется множителем Вейля для почти всюду (п.в.) безусловной сходимости рядов по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, если условие $\sum a_n^2\, \omega(n) < +\infty$ гарантирует п.в. безусловную сходимость ряда $\sum a_n\, \varphi_n(t)$. В 1963 году П. Л. Ульянов доказал следующую теорему (см. [1] и [6], стр. 116).

Теорема 1. (П. Л. Ульянов). Условие сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\omega(n)} < +\infty \tag{1}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $1 \leq \omega(1) \leq \omega(2) \leq \ldots$ являлась бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе Хаара.

В 1987 году Г. Г. Геворкян обобщил этот результат на ряды по системе Франклина (см. [2]) : найденное условие (1) остается необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega\,(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega\,(0) \leq \omega\,(1) \leq \ldots$ являлась бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе Франклина.

В этой заметке будет обобщен вышеназванный результат Г. Г. Геворкяна на ряды по общей системе Франклина ([3], [4]), удовлетворяющей некоторому условию регулярности.

Напомним определение общей системы Франклина, приведенное в [4]. Рассмотрим разбиение отрезка $[0,1]$, определенное следующим образом : $\mathcal{P}_0 = \{0,1\}$; $\mathcal{P}_j = \{t_{ji} : 0 \leq i \leq 2^j\}$, $0 = t_{j0} < t_{j1} < \ldots < t_{j2^j} = 1$, $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1}$ и

$t_{j+1,2k} = t_{jk}$, $j \geq 0$, $0 \leq k \leq 2^j$. Обозначим $I_{jk} = [t_{j,k-1}; t_{jk}]$, $1 \leq k \leq 2^j$ и $\mathcal{I}_j = \{I_{jk}\}_{k=1}^{2^j}$. Нам понадобится разбиение $\mathcal{P}^n$, определенное следующим образом. $\mathcal{P}^{2^\mu} = \mathcal{P}_\mu$, $\mu \geq 0$. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $(n > 1)$, $\mu \geq 0$, $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Обозначим $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{2^\mu} \bigcup \{t_{\mu+1,2k-1}\}_{k=1}^{\nu}$. Точки деления $\mathcal{P}^n$ обозначим через $\{t_k^n\}_{k=0}^n$. В порядке возрастания, $t_k^n = t_{\mu+1,k}$ для $0 \leq k \leq 2\nu$, и $t_k^n = t_{\mu,k-\nu}$ для $2\nu + 1 \leq k \leq n$. Обозначим $[n] = \mu$, $I_k^n = [t_{k-1}^n; t_k^n]$, $1 \leq k \leq n$ и $\mathcal{I}^n = \{I_k^n\}_{k=1}^n$. Возьмем $f_0(t) \equiv 1$ и $f_1(t) = 2\sqrt{3}\,(t - \frac{1}{2})$. Для $f_n(x)$ возьмем непрерывную на [0,1] функцию, которая линейна на каждом I_k^n и удовлетворяет условиям :

(1) f_n ортогональна функциям $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ в $L_2[0,1]$ и $\|f_n\|_{L_2} = 1$;

(2) $f_n(t_{2\nu-1}^n) > 0$.

Полученную ортонормальную систему функций $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ назовем общей системой Франклина.

Обозначим $\{n\} = [t_{2\nu-2}^n; t_{2\nu}^n]$. Общая система Франклина $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ называется слабо регулярной (WR), если порождающая последовательность разбиений $\{\mathcal{P}_j\}_{j=0}^\infty$ удовлетворяет условию

$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{|I_{j,2k-1}|}{|I_{j,2k}|} \leq \gamma$ для некоторого $\gamma \geq 1$, всех $j > 0$ и $1 \leq k \leq 2^{j-1}$.

Она называется сильно регулярной (SR), если

$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{|I_{j,k-1}|}{|I_{jk}|} \leq \gamma$ для некоторого $\gamma \geq 1$, всех $j > 0$ и $1 \leq k \leq 2^j$.

Нам понадобятся следующие результаты из [4] : если $\{f_n(t)\}_{n=0}^\infty$ – WR–система, то существует постоянная C_1 такая, что

$$C_1^{-1}\,|\{n\}|^{\frac{1}{2}} \leq \|f_n\|_1 \leq C_1|\{n\}|^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$C_1^{-1}|\{n\}|^{-\frac{1}{2}} \leq \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \leq C_1\,|\{n\}|^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Обозначим $\lambda_k^n := t_k^n - t_{k-1}^n = |I_k^n|$, $a_k^n := f_n(t_k^n)$. Известно (см. [4]), что

$$\begin{aligned} &a_{2\nu-1}^n > 0; \quad \operatorname{sgn}(a_k^n) = -\operatorname{sgn}(a_{k-1}^n), \quad 1 \leq k \leq n; \\ &a_1^n = -2a_0^n; \quad 2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_k^n}{\lambda_{k+1}^n} \leq \left|\frac{a_{k+1}^n}{a_k^n}\right| \leq 2 + 2\frac{\lambda_k^n}{\lambda_{k+1}^n}, \quad 1 \leq k \leq 2\nu - 3; \\ &a_{n-1}^n = -2a_n^n; \quad 2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_{k+1}^n}{\lambda_k^n} \leq \left|\frac{a_{k-1}^n}{a_k^n}\right| \leq 2 + 2\frac{\lambda_{k+1}^n}{\lambda_k^n}, \quad 2\nu + 1 \leq k \leq n - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Также (см. [4]), существует постоянная C_2 такая, что

$$C_2^{-1} \leq \left|\frac{a_{2\nu-1}^n}{a_{2\nu-2}^n}\right| \leq C_2, \qquad C_2^{-1} \leq \left|\frac{a_{2\nu-1}^n}{a_{2\nu}^n}\right| \leq C_2. \tag{5}$$

Следующая теорема доказана в [5].

Теорема 2. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – SR–система Франклина. Для любого подмножества $E \subset [0,1]$ положительной лебеговой меры безусловная сходимость п.в. ряда $\sum a_n f_n(t)$ на E эквивалентна абсолютной сходимости п.в. этого ряда на E.

Основным результатом этой работы являются следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – WR–система. Условие сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)} < +\infty \tag{6}$$

является достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \le \omega(0) \le \omega(1) \le \dots$ была бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство : Предположим, что выполнено условие (6) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\, \omega(n) < +\infty$. Достаточно доказать, что ряд $\sum a_n f_n(t)$ абсолютно сходится п.в. на $[0,1]$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, |\{n\}|^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sqrt{\omega(n)}\, \frac{|\{n\}|^{1/2}}{\sqrt{\omega(n)}} \le$$
$$\le \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\, \omega(n)\right\}^{1/2} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)}\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Учитывая (2), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |a_n\, f_n(t)|\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, \|f_n\|_1 \le C_1 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |\{n\}|^{1/2} < +\infty. \tag{7}$$

Отсюда следует п.в. абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, f_n(t)$.

Теорема 4. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – SR–система. Условие сходимости (6) является необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$ была множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказательство : Достаточность устанавливается аналогично вышеприведенному доказательству Теоремы 3. Докажем необходимость. Имеем

$$\sum_{n=2^{\mu}+1}^{2^{\mu+1}} |\{n\}| = 1, \quad \mu \ge 1.$$

Допустим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\{n\}|}{\omega(n)} = +\infty. \tag{8}$$

Тогда
$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\omega(2^{\mu})}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\omega(2^{\mu})}\sum_{n=2^{\mu}+1}^{2^{\mu+1}}|\{n\}|\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\{n\}|}{\omega(n)}=+\infty.$$
Можно выбрать монотонно возрастающие положительные числа q_μ такие, что
$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\omega(2^{\mu+1})\,q_\mu}=+\infty,\quad \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\omega(2^{\mu+1})\,q_\mu^2}<+\infty. \tag{9}$$
Для $2^{\mu}+1\leq n\leq 2^{\mu+1}$ положим $A_\mu=\dfrac{1}{\omega(2^{\mu+1})\,q_\mu}$ и $a_n=A_\mu|\{n\}|^{1/2}$. Имеем
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\,\omega(n)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{n=2^{\mu}+1}^{2^{\mu+1}}\frac{\omega(n)\,|\{n\}|}{\omega(2^{\mu+1})^2\,q_\mu^2}\leq\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\omega(2^{\mu+1})\,q_\mu^2}<+\infty.$$
В силу Теоремы 2 достаточно показать, что $\sum|a_n f_n(t)|=+\infty$, $t\in[0,1]$.

Обозначим через $[a,b]^-$ и $[a,b]^+$ соответственно левую и правую половины отрезка $[a,b]$. Легко проверить, что если $y(x)$ линейная функция на $[a,b]$, $y(a)y(b)<0$ и либо $|y(b)|<\dfrac{1}{2}\,|y(a)|$ и $x\in[a,b]^-$, либо $|y(a)|<\frac{1}{2}|y(b)|$ и $x\in[a,b]^+$, то имеем
$$|y(x)|\geq\frac{1}{4}\,|y(a)|\quad\text{или}\quad|y(x)|\geq\frac{1}{4}\,|y(b)|. \tag{10}$$

Лемма. Для любого $x\in[0,1]$ существует μ_x такое, что для любого $\mu>\mu_x$ существует n такая, что $2^{\mu}<n<2^{\mu+2}$ и $|f_n(x)|>C_3\,\|f_n\|_\infty$, где C_3 – абсолютная постоянная.

Доказательство : Если $x=0$ или $x=1$, то возьмем $n=2^{\mu}+1$ или $n=2^{\mu+1}$, соответственно. Тогда, учитывая (3) – (5), получим $|f_n(x)|=\frac{1}{2}\,|f_n(t^n_{2\nu-1})|>\frac{1}{2C_1C_2}\,\|f_n\|_\infty$. Пусть $x\in(0,1)$ и μ настолько большое, что $x\in[t_{\mu,i-1};t_{\mu i}]$, где $2\leq i\leq 2^{\mu}-1$. Рассмотрим возможные расположения точки x в $[t_{\mu,i-1};t_{\mu i}]$ и возьмем соответствующие значения n. Возможны следующие случаи :

(a) $x\in[t_{\mu,i-1};t_{\mu i}]^-$. Тогда $n=2^{\mu}+i-1$.

(b) $x\in[t_{\mu,i-1};t_{\mu i}]^+$. Тогда имеем подслучаи :

(b1) $x\in[t_{\mu+1,2i-2};t_{\mu+1,2i-1}]$, (b2) $x\in[t_{\mu+1,2i-1};t_{\mu+1,2i}]^+$,

(b3) $x\in[t_{\mu+1,2i-1};t_{\mu+1,2i}]^-$.

В случаях (b1) и (b2) возьмем $n=2^{\mu}+i+1$, а в случае (b3) возьмем $n=2^{\mu+1}+2i-1$. Из (10) и (4) следует, что $|f_n(x)|\geq\frac{1}{4}|f_n(t^n_{2\nu})|$ в случаях (a) и (b3), $|f_n(x)|\geq\frac{1}{4}\,|f_n(t^n_{2\nu-3})|$ в случае (b1) и $|f_n(x)|\geq\frac{1}{4}\,|f_n(t^n_{2\nu-2})|$ в случае (b2). Учитывая (4) и (5) и свойство сильной регулярности заключаем, что существует постоянная C_3 такая, что $|f_n(x)|>C_3\,\|f_n\|_\infty$. Лемма доказана.

Теперь можем завершить доказательство Теоремы 4. Из (3) следует, что $\left\| |\{n\}^{1/2}| \, |f_n| \right\|_\infty \geq \frac{1}{C_1}$. Тогда учитывая Лемму, получим

$$\sum_{n=2^\mu+1}^{2^{\mu+2}} \left|\{n\}^{1/2}\right| \, |f_n(t)| > \frac{C_3}{C_1}, \quad t \in [0,1].$$

Имеем

$$\sum |a_n f_n(t)| = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \sum_{n=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}} |\{n\}^{1/2}| \, |f_n(t)| \geq$$

$$\geq \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{2\mu} \sum_{n=2^{2\mu-1}+1}^{2^{2\mu+1}} \left|\{n\}^{1/2}\right| \, |f_n(t)| \geq \frac{C_3}{C_1} \sum_{\mu=\mu_1}^{\infty} A_{2\mu+1} = +\infty.$$

Теорема 4 доказана.

Следствие. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – WR–система. Для того, чтобы последовательность $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $1 \leq \omega(0) \leq \omega(1) \leq \ldots$ была бы множителем Вейля для п.в. безусловной сходимости рядов по системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log_2(1+\frac{1}{\gamma})} \, \omega(n)} < +\infty.$$

Доказательство следует из Теоремы 3 и очевидного неравенства

$$C_4^{-1} \frac{1}{n^{\log_2(1+\gamma)}} \leq |\{n\}| \leq C_4 \frac{1}{n^{\log_2(1+\frac{1}{\gamma})}} \tag{11}$$

выполняемого для всех n и некоторой постоянной C_4. Неравенство (11) показывает, что для классической системы Франклина (SR–система с $\gamma = 1$) Теорема 4 приводит к результату, полученному в [2].

Автор выражает благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постановку задачи и обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Ульянов, "О множителях Вейля для безусловной сходимости", Мат. Сборник, том 60 (102), № 1, стр. 39 — 62, 1967.
2. Г. Г. Геворкян, "О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, том 41, № 6, стр. 789 — 797, 1987.
3. Z. Ciesielski, A.Kamont, "Projections onto piecewise linear functiones, Funct. Approx. Comment. Math., vol. 25, pp. 129 — 143, 1997.
4. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissert. Math., vol. 374, Warsaw, 1998.
5. Г. Г. Геворкян, Г. Л. Микаелян, "О безусловной и абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина" (в печати).
6. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Наука, 1984.

24 октября 1998 Ереванский государственный университет

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Г. Р. Оганесян, Е. А. Тароян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 6, 1998

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Физическая величина, мало меняющаяся при медленном изменении параметров системы, называется адиабатическим инвариантом физической системы. Иными словами, адиабатический инвариант есть приближенный первый интеграл системы. В [1] была установлена связь между приближенными интегралами энергии и вронскианами приближенных решений. Используя это, в настоящей заметке мы находим адиабатический инвариант для линейного осциллятора во внешнем переменном поле и оцениваем его изменения. Величина

$$J(t,\varepsilon) = \frac{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}{2\omega} = \frac{E}{\omega},$$

где x – решение уравнения с данными Коши, не зависящими от ε, есть адиабатический инвариант для линейного гармонического осциллятора (см., например, [2])

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Полное изменение $J(t,\varepsilon)$ можно оценить следующим образом : $J(\varepsilon) = J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon) = O(\varepsilon^m)$, $\quad \varepsilon \to 0$, где m – натуральное число зависящее от ω. Заметим, что $m = \infty$, если ω голоморфная функция в некоторой окрестности вещественной оси.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение линейного осциллятора во внешнем переменном поле :

$$\ddot{x} + \omega_1^2(\varepsilon t)x = \cos\int_0^t \omega_2(\varepsilon s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Для уравнения (1.1) рассмотрим адиабатические инварианты вида

$$J(t,\varepsilon) = |W(x-x',\varphi)|^2 = \left|(x-x')\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\frac{d(x-x')}{dt}\right|^2,$$

где x и x' – точные решения уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши, а φ – асимптотическое решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть частоты ω_1, ω_2 удовлетворяют следующим условиям :

1°. $\omega_1(\tau) \in C^4(R)$, $\omega_1(\tau) > 0$, и существуют пределы $\omega_1(\pm\infty) > 0$.

2°. $\omega_2(\tau) \in C^2(R)$, $\omega_2^2(\tau) \neq \omega_1^2(\tau)$, $\tau \in R$, существуют пределы $\omega_2(\pm\infty)$, и $\omega_2^2(\pm\infty) \neq \omega_1^2(\pm\infty)$.

$$3°. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^{(k)}(\tau)\,d\tau < \infty, \quad k = 1,\ldots,4, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\,\omega_2^{(k)}(\tau)\,|\,d\tau < \infty, \quad k = 1,2,$$

где $\omega_1^{(k)}(\tau) = \dfrac{d^k\omega_1(\tau)}{d\tau^k}$.

Ниже докажем, что

$$J(t,\varepsilon) = \frac{E}{\omega_1\left(1 - \dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)} \tag{1.2}$$

является адиабатическим инвариантом, где

$$\begin{aligned} E = {} & \left(\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)\dot{x} + \frac{\omega_2}{\omega_1^2}\sin\int_0^t \omega_2(\varepsilon s)\,ds\right)^2 + \\ & + \omega_1^2\left(\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)x - \frac{1}{\omega_1^2}\cos\int_0^t \omega_2(\varepsilon s)\,ds\right)^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

и $x = x(t,\varepsilon)$ - решение уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши. Изменения этого адиабатического инварианта удовлетворяют следующим оценкам :

1) существуют C, ε' такие, что

$$|J(t_1,\varepsilon) - J(t_2,\varepsilon)| \leq C\varepsilon \tag{1.4}$$

для любых $t_1, t_2 \in (-\infty;\infty)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon'$;

$$2) \qquad J(\varepsilon) = J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.5}$$

Очевидно, что величина E является первым интегралом уравнения (1.1), когда частоты $\omega_m = \text{const}$. Покажем также, что полное изменение $J(t,\varepsilon)$, $J(\varepsilon) =$

$J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon)$ экспоненциально мало, если выполнены следующие дополнительные условия :

4°. функция $\omega_1(\tau)$ голоморфна и $\omega_1(\tau) \neq 0$ в односвязной области D комплексной плоскости τ, содержащей вещественную ось. Функция $S(0,\tau) = \int_0^\tau \omega_1(s)\,ds$ взаимно однозначно отображает область D на полосу H_a : $|\mathrm{Im} S| < a$.

$$5^\circ. \qquad \int_l (|\,\dot\omega_1(t)\,|^2 + |\ddot\omega_1(t)|)\,|dt| < \infty,$$

где интегралы берутся по линиям $\mathrm{Im}\, S(0,t) = c$, $c \in (-a,a)$.

§2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Перепишем уравнение (1.1), используя переменную $\tau = \varepsilon t$

$$\ddot v + \frac{\omega_1^2(\tau)}{\varepsilon^2} v = \frac{1}{\varepsilon^2}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2(s)\,ds\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $v = v(\tau,\varepsilon) = x(t,\varepsilon)$ и $\ddot v = \dfrac{d^2 v}{d\tau^2}$. Сначала рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\ddot z + \frac{\omega_1^2(\tau)}{\varepsilon^2} z = \frac{1}{\varepsilon^2}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2(s)\,ds\right), \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения

$$Pu = \ddot u + \frac{\omega_1^2(\tau)}{\varepsilon^2} u = 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

со своими производными могут быть представлены в следующем виде (см., например, [3]) :

$$u_j^{\pm,(k-1)} = \widetilde u_j^{(k-1)}(1 + \varepsilon^2 \rho_{j,k}^{\pm}), \quad j,k = 1,2,$$

где

$$\widetilde u_j = \omega_1^{-1/2}\exp\left(\int_0^\tau \left(\pm i\frac{\omega_1}{\varepsilon} + \varepsilon\frac{3\dot\omega_1^2 - 2\omega_1\ddot\omega_1}{8\omega_1^3}\right) ds\right),$$

$\rho_{jk}^{\pm}(\tau,\varepsilon)$ ограничены для $\tau \in (-\infty;\infty)$, $\varepsilon > 0$ и $\rho_{jk}^{\pm} \to 0$ при $\tau \to \pm\infty$ для любого фиксированного ε. Функции

$$z_0^{\pm} = \int_0^\tau \frac{u_1^{\pm}(s,\varepsilon)u_2^{\pm}(\tau,\varepsilon) - u_1^{\pm}(\tau,\varepsilon)\,u_2^{\pm}(s,\varepsilon)}{\varepsilon^2 W(s,u_1^{\pm},u_2^{\pm})}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \omega_2(l)\,dl\right) ds$$

суть решения уравнения (2.2). Здесь, $W(s,u_1^{\pm},u_2^{\pm}) = u_1^{\pm}\dot u_2^{\pm} - u_2^{\pm}\dot u_1^{\pm}$ – вронскианы решений $u_1^{\pm}(s,\varepsilon)$ и $u_2^{\pm}(s,\varepsilon)$. Используя 1°–3° и выражения (см. [3]) $W(s,u_1^{\pm},u_2^{\pm}) = -\dfrac{2i}{\varepsilon}$,

$$c\,|\,\varepsilon^2\rho_{jk}^{\pm}(\tau,\varepsilon)\,| \le \left\{\exp\int_\tau^\infty \sum_{q,r=1}^{2} |\,\widetilde u_r P\widetilde u_q W^{-1}(s,\widetilde u_1,\widetilde u_2)\,|\,ds\right\} - 1, \qquad c > 0,$$

$$P\widetilde{u}_q = \left[\pm i\varepsilon\frac{d}{ds}\left(\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3}\right) \pm \varepsilon\frac{\dot{\omega}_1}{i\omega_1}\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3} - \varepsilon^2\left(\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3}\right)^2\right]\widetilde{u}_q,$$

$$\int_0^\tau \exp(\theta_j)ds = \left.\frac{\exp\theta_j}{\dot{\theta}_j}\right|_0^\tau + \left.\frac{\ddot{\theta}_j\exp\theta_j}{\dot{\theta}_j^3}\right|_0^\tau - \int_0^\tau \frac{d}{ds}\left(\frac{\ddot{\theta}_j}{\dot{\theta}_j^3}\right)\exp(\theta_j)\,ds$$

и

$$\theta_j = \frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \omega_2\,dl - \frac{1}{2}\ln\omega_1 \pm i\int_0^s\left(\frac{\omega_1}{\varepsilon} + \varepsilon\frac{3\dot{\omega}_1^2 - 2\omega_1\ddot{\omega}_1}{8\omega_1^3}\right)dl,$$

$$z_0^\pm = \frac{i}{2\varepsilon}u_2^\pm(\tau,\varepsilon)\left[\int_0^\tau \exp\theta_1\,ds + \varepsilon^2\left(\int_0^\infty - \int_\tau^\infty\right)\widetilde{u}_1(s,\varepsilon)\rho_{11}^\pm(s,\varepsilon)\,ds\right] -$$

$$-\frac{i}{2\varepsilon}u_1^\pm(\tau,\varepsilon)\left[\int_0^\tau \exp\theta_2\,ds + \varepsilon^2\left(\int_0^\infty - \int_\tau^\infty\right)\widetilde{u}_2(s,\varepsilon)\rho_{21}^\pm(s,\varepsilon)\,ds\right],$$

получим

$$z_0^\pm = a_1^\pm u_1^\pm + a_2^\pm u_2^\pm + \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon q_1^\pm,$$

$$\varepsilon\dot{z}_0^\pm = \varepsilon a_1^\pm\dot{u}_1^\pm + \varepsilon a_2^\pm\dot{u}_2^\pm + \frac{i\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon q_2^\pm,$$

где $a_i^\pm$ зависят от ε, а q_j^-, q_j^+ ограничены при $\tau \in (-\infty,\infty)$, $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} q_j^\pm(\tau,\varepsilon) = 0$. Следовательно, существуют решения уравнения (2.1), имеющие следующий вид :

$$v_0^\pm = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon\mathrm{Re}q_1^\pm,$$

$$\varepsilon\dot{v}_0^\pm = -\frac{\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_2\,ds\right) + \varepsilon\mathrm{Re}q_2^\pm.$$

§3. ОЦЕНКИ

Решения v уравнения (2.1) можно записать в виде

$$v = a^- u_1^- + b^- u_2^- + v_0^- = a^+ u_1^+ + b^+ u_2^+ + v_0^+, \tag{3.1}$$

где коэффициенты $a^\pm, b^\pm$ зависят от ε. Дифференцируя (3.1) и решая относительно a^+, b^+ или a^-, b^-, легко проверить, что эти коэффициенты ограничены для решения уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши.

Теорема. Пусть в (1.2) x есть решение уравнения (1.1) с ограниченными по ε данными Коши $x_0 = x(0,\varepsilon)$, $x_1 = \dot{x}(0,\varepsilon)$. Если выполнены условия $1^\circ - 3^\circ$, то величина (1.2) является адиабатическим инвариантом уравнения (1.1) и удовлетворяет оценкам (1.4), (1.5). Если дополнительно потребовать выполнение условий $4^\circ - 5^\circ$, то $J(\varepsilon) = J(\infty,\varepsilon) - J(-\infty,\varepsilon) = O(\exp(-b\varepsilon^{-1}))$, где b – произвольное число такое, что $0 < b < a$.

Доказательство : Из (3.1) имеем

$$\frac{i\varepsilon}{2}W(v-v_0^{\pm},u_2^{\pm})=\frac{\widetilde{u}_2^{\pm}}{2}\left[\omega_1\left(v-\frac{1}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cos\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2\,ds\right)-\right.$$

$$\left.-i\left(\varepsilon\dot{v}+\frac{\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2 ds\right)\right]+\varepsilon h_2^{\pm}=a^{\pm},$$

$$\frac{i\varepsilon}{2}W(u_1^{\pm},v-v_0^{\pm})=\frac{\widetilde{u}_1^{\pm}}{2}\left[\omega_1\left(v-\frac{1}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cos\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2\,ds\right)+\right.$$

$$\left.+i\left(\varepsilon\dot{v}+\frac{\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega_2\,ds\right)\right]+\varepsilon h_1^{\pm}=b^{\pm},$$

где $h_j^-(\tau,\varepsilon), h_j^+(\tau,\varepsilon)$ ограничены при $\tau\in(-\infty;\infty)$, $\varepsilon>0$ и $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty}h_j^{\pm}(\tau,\varepsilon)=0$. Следовательно, имеем

$$J(t,\varepsilon)=a^-b^-+\varepsilon h^-=a^+b^++\varepsilon h^+, \tag{3.2}$$

где $h^{\pm}(t,\varepsilon)$ ограничены и $\lim\limits_{t\to\pm\infty}h_j^{\pm}(t,\varepsilon)=0$. Оценка (1.4) сразу следует из (3.2). Как уже сказано выше, коэффициенты $a^{\pm},b^{\pm}$ ограничены. Из результатов работы [4] следует, что $a^+b^+-a^-b^-=O(\varepsilon)$, если выполнены условия $1^\circ-3^\circ$, и $a^+b^+-a^-b^-=O(\exp(-b\varepsilon^{-1}))$, если выполнены условия $1^\circ-5^\circ$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Р. Оганесян, "О единственности решений задачи Коши и новая формула энергии", Изв. АН Армении, Математика, том 26, № 5, стр. 15 — 25, 1991.
2. В. И. Арнольд, Математические Методы Классической Механики, Москва, Наука, 1979.
3. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, том 31, № 1, 1996.
4. М. В. Федорюк, "Адиабатический инвариант системы линейных осциляторов и теория рассеивания", Дифференциальные Уравнения, Минск, том 12, № 6, стр. 1012 — 1018, 1976.
5. А. С. Бакай, Ю. Г. Степановский, Адиабатические Инварианты, Киев, Наукова Думка, 1981.
6. Г. М. Заславский, В. П. Мейтлиц, Н. Н. Филоненко, Взаимодействие Волн в Неоднородной Среде, Новосибирск, Наука, 1982.

17 августа 1998

Институт математики
НАН Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 33 НОМЕР 6 1998

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

CONTENTS

VOLUME 33 NUMBER 6 1998

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 33 НОМЕРА 1 — 6 1998

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика