

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Յ. Առաքելյան

Գ.Գ. Գևորգյան

Վ.Ս. Ջաքարյան

Ա.Ա. Թալալյան

Ն.Ե. Թովմասյան

Վ.Ա. Մարտիրոսյան

Ս.Ն. Մերգելյան

Բ.Ս. Նահապետյան

Ա.Բ. Ներսիսյան

Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян

Г.Г. Геворкян

В.С. Закарян

А.Г. Камалян

В.А. Мартиросян

С.Н. Мергелян

Б.С. Нагапетян

А.Б. Нерсисян

А.А. Талалян

Н.Е. Товмасын

Р.Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь

М.А. Оганесян

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
КОМБИНАТОРНОЙ
ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, III**

сборник статей

под редакцией Р. В. Амбарцумяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Журнал "Известия Академии Наук Армении" (серия Математика) публикует специальные выпуски под общим названием "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии" (два предыдущих специальных выпуска : том 29, № 4 (1994) и том 31, № 4 (1996)). Первый из них был посвящен проблемам порождения мер валлоациями (конечно-аддитивными функционалами) определенными в классических пространствах интегральной геометрии. Второй выпуск и две статьи настоящего сборника (Г. С. Сукиасяна и А. Н. Давтяна) принадлежат тому же направлению. Статья Р. В. Амбарцумяна содержит приложение к стереологии и дает решение проблемы Вискела для рандомизированных шейпов. Совместная статья Р. В. Амбарцумяна и В. К. Оганяна содержит приложение разложений комбинаторной интегральной геометрии к теории случайных процессов прямых. Статья "Инвариантное вложение в стохастической геометрии" впервые была опубликована в "Докладах" Академии наук Армении и воспроизведена здесь с разрешения редакции "Докладов".

Ереван, Август 1998

Р. В. Амбарцумян

ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ¹

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 33, No. 4, 1998

В настоящей статье метод инвариантного вложения применяется к одной задаче стохастической геометрии. В рамках теории трансляционно-инвариантных случайных процессов прямых второго порядка на плоскости, при некоторых предположениях факторизации, получены дифференциальные уравнения, описывающие распределение числа пересечений тестового отрезка прямыми процесса. Показано, что при дополнительном условии "достаточного перемешивания" уравнения имеют только пуассоновские решения.

ВВЕДЕНИЕ

Академик В. А. Амбарцумян часто указывал на то, что разновидности "принципа инвариантности", который он использовал в своих работах по рассеиванию света, могут быть эффективными и в других математических задачах (см. [1], Эпилог). Р. Белман и его последователи [2] развили и систематически использовали этот математический аппарат в ряде задач математической физики. Полностью признавая приоритет В. А. Амбарцумяна, они предложили называть этот метод методом "Инвариантного Вложения". Вне математической физики аналитическая процедура инвариантного вложения применялась в интегральной геометрии [3], где помогла раскрыть основные комбинаторные соотношения между мерами в

¹Перепечатано из Докладов Национальной Академии Наук Армении, том 98, no. 3, 1998, который посвящен 90-летию академика В. А. Амбарцумяна

пространстве прямых и метриками.

В настоящей статье инвариантное вложение применяется в родственной области — стохастической геометрии. При некоторых предположениях факторизации получены дифференциальные уравнения для вероятностных распределений числа пересечений тестового отрезка прямыми случайного процесса прямых. Результат имеет место для случайных процессов прямых, трансляционно-инвариантных и обладающих первой и второй моментными мерами. Делаются также некоторые предположения гладкости.

§1 содержит необходимые предпосылки из теории трансляционно-инвариантных случайных процессов прямых. Доказательства свойств, приведенных в этом параграфе, могут быть получены с помощью "метода фиксированных реализаций" (см. [4]).

В §2 методом инвариантного вложения получены дифференциальные соотношения, содержащие вероятностные распределения типа Пальма для процессов прямых. В §3 рассматриваются маркированные точечные процессы пересечений, импудированные на тестовой прямой прямыми процесса. Марки суть углы, под которыми происходят пересечения. Доказано, что если выполняется определенное условие независимости между точечным процессом пересечений и последовательностью углов пересечений, то эти соотношения преобразуются в дифференциальные уравнения. Как утверждается в заключительной Теореме, при дополнительных предположениях "достаточного перемешивания" и отсутствия корреляции между котангенсами углов пересечений, решением этих уравнений, для случайного числа пересечений на тестовом отрезке, получается пуассоновское распределение. В изотропном случае подобные вопросы рассматривались другими методами в [5], [4], Глава 10 и [6].

§1. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ

Рассмотрим случайный процесс прямых на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Он определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых (см. [4]). Через g будем обозначать прямую в $\mathbb{R}^2$, а через $\{g_i\}$ — случайный процесс прямых — счетное случайное множество прямых. Буквой M обозначаем пространство

реализаций процессов прямых, $m \in M$. Через P будем обозначать вероятностное распределение $\{g_i\}$ (вероятностная мера на M). Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ , если $\gamma \cap g$ есть внутренняя точка отрезка γ .

Для заданного "тестового отрезка" γ рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для двух тестовых отрезков γ_1 и γ_2 и двух неотрицательных целых чисел k_1, k_2 пишем $\binom{\gamma_1 \quad \gamma_2}{k_1 \quad k_2} = \binom{\gamma_1}{k_1} \cap \binom{\gamma_2}{k_2}$. Это обозначение обобщается на любое число тестовых отрезков. Для вероятностей таких событий используется обозначение вида $P\left(\binom{\gamma}{k}\right)$. Единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых, инвариантную относительно евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$, обозначаем dg .

Определение 1. Процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу $Ti2$, если его вероятностное распределение P инвариантно относительно группы параллельных переносов плоскости (трансляционно-инвариантно) и первые и вторые моментные меры процесса прямых $\{g_i\}$ имеют вид $f_1 dg$ и $f_2 dg_1 dg_2$ (если $g_1 \neq g_2$) соответственно, с непрерывными плотностями f_1 и f_2 .

Перечислим свойства процессов прямых из класса $Ti2$, используемые в методе инвариантного вложения в §2. Их доказательства опускаются, так как их можно легко получить методом "фиксированных реализаций" (см. [4]).

Пусть γ — произвольный отрезок на плоскости. Пусть он служит осью прямоугольника R (Рис. 1), v_1 и v_2 — его боковые стороны (так называемые *вертикальные окна*). Два отрезка h_1 и h_2 , составляющие продолжение γ , назовем *горизонтальными окнами*. Длины окон, вертикальных и горизонтальных, равны l , и мы будем предполагать, что l стремится к нулю.

Свойство P1 : для каждого окна w , вертикального или горизонтального

$$P\left(\binom{w}{1}\right) = O(l), \quad P\left(\binom{w}{2}\right) = O(l^2) \text{ и } P\left(\binom{w}{k}\right) = o(l^2) \text{ для } k > 2.$$

Будем использовать следующие краткие обозначения

$$H = \binom{h_1}{1} \quad \text{и} \quad V = \binom{v_1}{1}.$$

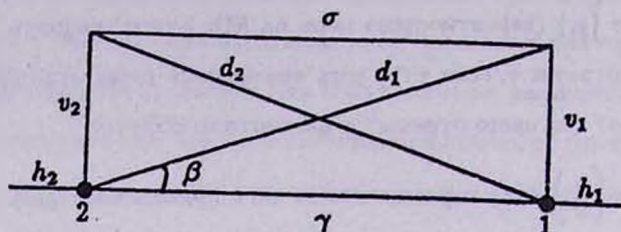


Рис. 1

Интенсивность точечного процесса пересечений индуцированного прямыми $\{g_i\}$ на горизонтальных (λ_H) или вертикальных (λ_V) тестовых прямых определяются следующим образом :

$$\lambda_H = \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} P(H) \text{ и } \lambda_V = \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} P(V).$$

Свойство P2 : существуют следующие пределы :

$$\lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P(HH) = c_{HH}, \quad \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P(A) = c_A \text{ и } \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P(B) = c_B,$$

где $HH = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Событие $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет место, если v_1 и v_2 пересекаются одной и той же прямой из $\{g_i\}$, B есть дополнение к A относительно $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. B выполняется, когда пересечения производятся двумя различными прямыми из $\{g_i\}$.

Свойство P3 :

$$\sum_{j_1 + j_2 \geq 3} P \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \alpha(l^2).$$

Нам понадобятся понятия распределений типа Пальма Π_V , Π_H , Π_B и Π_{HH} процесса прямых $\{g_i\}$ (о геометрической теории распределений Пальма см. [4]). Каждое из этих распределений Π_Z определяется при $l \rightarrow 0$, как предельное условное распределение $\{g_i\}$, при соответствующем условии $Z \in \{H, V, B, HH\}$. Существует процесс прямых, распределение которого есть Π_Z .

Отметим, что Π_B и Π_{HH} сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через концы 1 и 2 отрезка γ . Последние две прямые параметризуем углами ψ_1 и ψ_2 , измеряемыми как показано на Рис. 2.

Поэтому Π_V и Π_H суть вероятностные меры в пространстве $(0, \pi) \times (0, \pi) \times M$. В частности, можно говорить об их значениях на событиях типа $\binom{\gamma}{k} \cap \{\theta_1\} \cap \{\theta_2\}$, где $\theta_1, \theta_2 \subset (0, \pi)$, $\{\theta_i\}$ обозначает событие $\psi_i \in \theta_i$ в точке i . Вероятностные распределения Π_H и Π_V сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой проходящей через конец 1 отрезка γ , т.е. определены на $(0, \pi) \times M$. В частности, значения Π_H и Π_V определены на событиях типа $\binom{\gamma}{k} \cap \{\theta_1\}$.

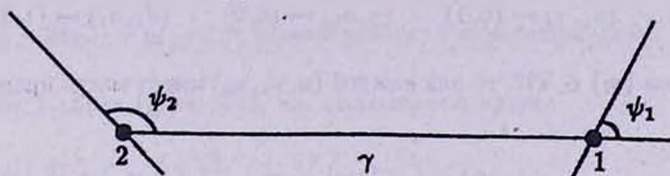


Рис. 2

Обозначим через E_Z математическое ожидание относительно вероятностной меры Π_Z .

Свойство Р4. Пусть $F(\Psi_1, m)$ — ограниченная функция, определенная на $(0, \pi) \times M$. Если $\{g_i\} \in \text{Ti}2$, тогда для любого отрезка γ

$$\lambda_H E_H [F(\psi_1, m) | \cot \psi] = \lambda_V E_V F(\psi_1, m).$$

Свойство Р5. Пусть $F(\Psi_1, \Psi_2, m)$ — ограниченная функция, определенная на $(0, \pi) \times (0, \pi) \times M$. Если $\{g_i\} \in \text{Ti}2$, то для любого отрезка γ

$$c_{HH} E_{HH} [F(\psi_1, \psi_2, m) | \cot \psi_1 \cot \psi_2] = c_{VV} E_V F(\psi_1, \psi_2, m).$$

Для стороны u прямоугольника R , $u \neq v_1$, определим событие

$$\binom{v_1}{u} = \{ \text{существует только одна прямая в } \{g_i\}, \text{ которая пересекает } v_1 \\ \text{и выходит из } R \text{ через } u \} \subset \binom{v_1}{1},$$

которое обобщается и на пересечения таких событий. Через S_1 обозначим интервал $(0, \pi/2)$, а через S_2 интервал $(\pi/2, \pi)$. Вместе со сторонами γ и σ рассмотрим две диагонали d_1 и d_2 прямоугольника R на Рис. 1.

Свойство Р6. Если $\{g_i\} \in \text{Ti2}$, то для каждой (u, u_1) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P \begin{pmatrix} u & v_1 \\ k & u_1 \end{pmatrix} = c_V \Pi_V \left[\begin{pmatrix} \gamma \\ k - r \end{pmatrix} \cap \{S_i\} \right].$$

Отображение

$$(u, u_1) \mapsto (r, i)$$

определяется следующим образом :

$$(\gamma, \gamma) \mapsto (1, 1) \quad (d_1, \gamma) \mapsto (0, 1) \quad (\gamma, d_1) \mapsto (0, 2) \quad (d_1, d_1) \mapsto (1, 2).$$

Свойство Р7. Если $\{g_i\} \in \text{Ti2}$, то для каждой (u, u_1, u_2) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P \begin{pmatrix} u & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} = c_B \Pi_B \left[\begin{pmatrix} \gamma \\ k - r \end{pmatrix} \cap \{S_i\} \cap \{S_j\} \right].$$

Отображение

$$(u, u_1, u_2) \mapsto (r, i, j)$$

задается таблицей

$$\begin{aligned} (\gamma, \gamma, \gamma) &\mapsto (2, 1, 2) & (\gamma, \gamma, \sigma) &\mapsto (1, 1, 1) & (\gamma, \sigma, \gamma) &\mapsto (1, 2, 2) & (\gamma, \sigma, \sigma) &\mapsto (0, 2, 1) \\ (\sigma, \gamma, \gamma) &\mapsto (0, 1, 2) & (\sigma, \gamma, \sigma) &\mapsto (1, 1, 1) & (\sigma, \sigma, \gamma) &\mapsto (1, 2, 2) & (\sigma, \sigma, \sigma) &\mapsto (2, 2, 1) \\ (d_1, \gamma, \gamma) &\mapsto (1, 1, 2) & (d_1, \gamma, \sigma) &\mapsto (0, 1, 1) & (d_1, \sigma, \gamma) &\mapsto (2, 2, 2) & (d_1, \sigma, \sigma) &\mapsto (1, 2, 1) \\ (d_2, \gamma, \gamma) &\mapsto (1, 1, 2) & (d_2, \gamma, \sigma) &\mapsto (2, 1, 1) & (d_2, \sigma, \gamma) &\mapsto (0, 2, 2) & (d_2, \sigma, \sigma) &\mapsto (1, 2, 1) \end{aligned}$$

Предельное условие, получаемое из события A , имеет специальный статус. Фактически, из метода фиксированных реализаций следует существование распределения Пальма Π_A только для процессов прямых, которые инвариантны относительно группы евклидовых движений (параллельные переносы и вращения). Для $\{g_i\} \in \text{Ti2}$ существование предела

$$x_k = \lim_{l \rightarrow 0} [P(A)]^{-1} P \left(\begin{pmatrix} \chi \\ k \end{pmatrix} \cap A \right) = c_A^{-1} \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P \left(\begin{pmatrix} \chi \\ k \end{pmatrix} \cap A \right) \quad (1)$$

вытекает из Предложения 2 следующего параграфа. В (1) отрезок χ определяется следующим образом : если событие A произошло, то $\{g_i\}$ содержит прямую, пересекающую прямые v_1 и v_2 , и в качестве χ мы берем отрезок этой прямой между вертикальными окнами.

§2. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ

Настоящий параграф содержит два предложения для процессов прямых из класса $Ti2$. Доказательство Предложения 1, основанное на свойствах $P1$ и $P4$, мы оставляем читателю, т.к. это доказательство есть упрощенная ("первого порядка") версия доказательства Предложения 2, которое мы приводим полностью. Используем обозначение

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ для первой и}$$

$$\Delta^2 y_k = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2} \text{ для второй разности относительно } k.$$

Предложение 1. Если $\{g_i\} \in Ti2$, то существует предел

$$\lim_{l \rightarrow 0} (\lambda_V l)^{-1} \left[P \left(\begin{smallmatrix} d_1 \\ k \end{smallmatrix} \right) - P \left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \right] = \Pi_V \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k-1 \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_2\} \right) + \\ + \Pi_V \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_1\} \right) - \Pi_V \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_2\} \right) - \Pi_V \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k-1 \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_1\} \right), \quad (2)$$

где S_1 — интервал $(0, \pi/2)$, S_2 — интервал $(\pi/2, \pi)$.

Предложение 2. Если $\{g_i\} \in Ti2$ и существует предел

$$L_k(\gamma) = \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} \left[P \left(\begin{smallmatrix} d_1 \\ k \end{smallmatrix} \right) - P \left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) - P \left(\begin{smallmatrix} \sigma \\ k \end{smallmatrix} \right) + P \left(\begin{smallmatrix} d_2 \\ k \end{smallmatrix} \right) \right],$$

то существуют (1), причем

$$L_k(\gamma) = -2c_A \Delta x_k + c_B \Delta^2 y_k, \quad (3)$$

где

$$y_k = \Pi_B \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_1\} \cap \{S_1\} \right) + \Pi_B \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_2\} \cap \{S_2\} \right) - \\ - \Pi_B \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_1\} \cap \{S_2\} \right) - \Pi_B \left(\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ k \end{smallmatrix} \right) \cap \{S_2\} \cap \{S_1\} \right), \quad (4)$$

S_1 и S_2 как в Предложении 1.

Доказательство : Для удобства записи мы иногда используем обозначение (см.

Рис. 1) $\gamma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$. Для каждого выбора τ из совокупности $\{\sigma_1, \sigma_2, d_1, d_2\}$ представим $\left(\begin{smallmatrix} \tau \\ k \end{smallmatrix} \right)$ как объединение несовместных событий

$$\left(\begin{smallmatrix} \tau \\ k \end{smallmatrix} \right) = \bigcup_{j_1, j_2 \geq 0} \left(\begin{smallmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{smallmatrix} \right).$$

Из свойства P3, при $l \rightarrow 0$

$$\sum_{j_1+j_2 \geq 3} P \begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix} = o(l^2),$$

и следовательно

$$P \begin{pmatrix} \tau \\ k \end{pmatrix} = \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq 2} P \begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix} + o(l^2). \quad (5)$$

Прямая, которая входит в треугольник через одну из сторон, выходит из треугольника через одну из остальных сторон. Следовательно, имеют место тождества

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & v_1 & v_2 \\ k & 0 & j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & v_1 & v_2 \\ k & 0 & j_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

и аналогичные тождества для σ_2 . В выражении

$$D = P \begin{pmatrix} d_1 \\ k \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} \sigma \\ k \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} d_2 \\ k \end{pmatrix}$$

заменяем вероятности на их разложения (5). Далее, вероятность каждого события $\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix}$, где либо $j_1 = 0$, либо $j_2 = 0$, заменим, используя (6) (или аналог (6) для σ_2). В полученной сумме вероятности каждого из событий $\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix}$, где хотя бы один из индексов j_1 или j_2 равен нулю, встречаются дважды с противоположными знаками. Таким образом, эти слагаемые сокращаются и мы получим

$$D = - \sum_{i=1,2} P \begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1,2} P \begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} + o(l^2). \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} = \bigcup_{(u_1, u_2) \in U} \begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $U = \{v_2, \gamma, \sigma\} \times \{v_1, \gamma, \sigma\}$, причем события в объединении несовместны.

Следовательно, используя (8), вероятности в (7) могут быть заменены суммами вероятностей событий. Из свойства P3 для пар $(u_1, u_2) = (v_2, \gamma)$, (v_2, σ) , (γ, v_1) и (σ, v_1) имеем

$$P \begin{pmatrix} \gamma & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} = o(l^2),$$

и (7) принимает вид

$$D = - \sum_{i=1,2} P \begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1,2} P \begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} + \\ + \sum_{i=1,2} \left[\sum_{(u_1, u_2) \in U_1} \left[-P \begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} \right] \right] + o(l^2), \quad (9)$$

где в последней сумме $U_1 = \{\gamma, \sigma\} \times \{\gamma, \sigma\}$. Отметим, что $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} = A$.

Разделим (9) на l^2 и перейдем к пределу при $l \rightarrow 0$. Используя P7, легко проверить, что

$$\lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} \sum_{i=1,2} \left[\sum_{(u_1, u_2) \in U_1} \left[-P \begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} \right] \right] = c_B \Delta^2 y_k.$$

Согласно определению отрезка χ

$$\begin{pmatrix} \sigma_i \\ k \end{pmatrix} \cap A = \begin{pmatrix} \chi \\ k \end{pmatrix} \cap A \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} d_i \\ k \end{pmatrix} \cap A = \begin{pmatrix} \chi \\ k-1 \end{pmatrix} \cap A.$$

Существование пределов, $i = 1, 2$

$$\lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P \begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} = c_A x_k \quad \text{and} \quad \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P \begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} = c_A x_{k-1}$$

следует из существования пределов $L_k(t, \alpha)$ (сначала для x_0 , потому что $x_{-1} = 0$ и затем последовательно для всех x_k). Предложение 2 доказано.

§3. ФАКТОРИЗАЦИЯ И УСЛОВИЕ ДОСТАТОЧНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Согласно требованию трансляционной инвариантности, вероятности $P \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix}$ зависят только от длины t и направления α отрезка γ . Таким образом, можно использовать "функциональное" обозначение

$$P \begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} = p_k(t, \alpha)$$

и левая часть (2) приводится к виду

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{p_k(\sqrt{t^2 + l^2}, \alpha + \beta) - p_k(t, \alpha)}{l} = t^{-1} \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial \alpha},$$

а для (3), применяя разложение Тейлора, находим

$$L_k(\gamma) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_k(\sqrt{t^2 + l^2}, \alpha + \beta) - 2p_k(t, \alpha) + p_k(\sqrt{t^2 + l^2}, \alpha - \beta)}{l^2} = \\ = t^{-1} \cdot \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t} + t^{-2} \cdot \frac{\partial^2 p_k(t, \alpha)}{\partial \alpha^2}. \quad (10)$$

Справедливость (10) требует *предположения гладкости*, см. Теорему. Возвращаясь к правым частям (2) и (3), преобразуем их, используя свойства P4 и P5.

Имеет место замечательное свойство

$$\lambda_V \Pi_V \left(\left(\frac{\gamma}{k} \right) \cap \{S_1\} \right) - \lambda_V \Pi_V \left(\left(\frac{\gamma}{k} \right) \cap \{S_2\} \right) = \lambda_H E_H I \left(\frac{\gamma}{k} \right) \cot \psi_1, \quad (11)$$

где I — индикаторная функция соответствующего события (зависимость от $m \in M$ явно не указывается). Аналогично, для величин y_k в (8) имеем

$$y_k = E_{HH} I \left(\frac{\gamma}{k} \right) \cot \psi_1 \cot \psi_2.$$

Рассмотрим следствия некоторых факторизационных предположений F1, F2 и F3. Последние выражаются в терминах вероятностного распределения случайного маркированного точечного процесса пересечений $\{P_i, \psi_i\}_g$, индуцированного прямыми из $\{g_i\}$ на тестовой прямой g . Здесь $P_i = g \cap g_i$, а марка ψ_i есть угол, под которым происходит пересечение в точке P_i . Отметим, что Условия F1, F2 и F3 вместе существенно слабее, чем хорошо известная в стохастической геометрии *независимость Кокса* (см. [5]). Говорим, что $\{P_i, \psi_i\}_g$ обладает независимостью Кокса, если для тестовой прямой g любого направления α , последовательность углов $\{\psi_i\}$ не зависит от точечного процесса $\{P_i\}$, и $\{\psi_i\}$ есть последовательность независимых углов. Все дважды стохастические пуассоновские процессы прямых $\{g_i\}$ управляемые случайной мерой вида $\xi \cdot f_1(\phi) dg$, (ξ — случайный множитель), обладают этим свойством.

Условие F1 : для любого направления α , любых t и k случайные величины $\cot \psi_1$ и $I \left(\frac{\gamma}{k} \right)$ некоррелированы, т.е.

$$E_H I \left(\frac{\gamma}{k} \right) \cot \psi_1 = \Pi_H \left(\frac{\gamma}{k} \right) E_H \cot \psi_1.$$

Имеем

$$\lambda(\alpha) = \int \sin \psi f_1(\phi) d\psi,$$

где f_1 — плотность первой моментной меры прямых $\{g_i\}$ (из условия трансляционной инвариантности следует, что f_1 зависит только от направления ϕ прямой g), ψ — угол между направлениями ϕ и α . Следовательно, плотность случайного угла ψ_1 есть $(\lambda(\alpha))^{-1} \sin \psi f_1(\phi) d\psi$. Таким образом

$$E_H \cot \psi_1 = (\lambda(\alpha))^{-1} \cdot \int \cos \psi f_1(\phi) d\psi = -(\lambda(\alpha))^{-1} \lambda'(\alpha),$$

где $\lambda'(\alpha)$ обозначает первую производную по α . Используя так называемые формулы Пальма для точечных процессов в одномерном случае (см. [4]) получаем

$$\lambda(\alpha) \left[\Pi_H \left(\frac{\gamma}{k-1} \right) - \Pi_H \left(\frac{\gamma}{k} \right) \right] = \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t}. \quad (12)$$

Итак, при Условии F1, соотношение (2) преобразуется к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial \alpha} = t \cdot (\lambda(\alpha))^{-1} \lambda'(\alpha) \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t}. \quad (13)$$

Уравнение (13) легко решается стандартным методом характеристик. Его общее решение имеет вид

$$p_k(t, \alpha) = q_k(\lambda(\alpha)t), \quad (14)$$

где $q_k(\cdot)$ — некоторая функция от одного аргумента.

Условие F2 : для любого α , любых t и k случайные переменные $\cot \psi_1$ $\cot \psi_2$ и $I \left(\frac{\gamma}{k} \right)$ некоррелированы, т.е.

$$E_{HH} I \left(\frac{\gamma}{k} \right) \cot \psi_1 \cot \psi_2 = \Pi_{HH} \left(\frac{\gamma}{k} \right) E_{HH} \cot \psi_1 \cot \psi_2.$$

Легко получить второго порядка аналог (12) :

$$c_{HH} \Delta^2 \Pi_{HH} \left(\frac{\gamma}{k} \right) = \frac{\partial^2 p_k(t, \alpha)}{\partial t^2}.$$

Таким образом, при Условии F2, (3) сводится к виду

$$t \cdot \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial^2 p_k(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} = -2 c_A t^2 \Delta x_k + t^2 a(t, \alpha) \frac{\partial^2 p_k(t, \alpha)}{\partial t^2}, \quad (15)$$

где $a(t, \alpha) = E_{HH} \cot \psi_1 \cot \psi_2$.

Заметим [4], что $c_A(\gamma) = t^{-1} f_1(\alpha)$ и $2f_1(\alpha) = \lambda(\alpha) + \lambda''(\alpha)$. Подставляя (14) в (15), получим

$$(\lambda + \lambda'') q'_k + t[(\lambda')^2 - \lambda^2 \cdot a(t, \alpha)] q''_k = -(\lambda + \lambda'') \Delta x_k. \quad (16)$$

Условие F3 : для любого направления α и любого t

$$E_{HH} \cot \psi_1 \cot \psi_2 = E_H \cot \psi_1 E_H \cot \psi_2 = [\lambda'(\alpha)]^2 [\lambda(\alpha)]^{-2}.$$

При Условии F3 уравнение (16) преобразуется к виду

$$q'_k = -\Delta x_k. \quad (17)$$

Эта бесконечная система уравнений легко решается при дополнительном предположении

$$x_k = P \left(\frac{\gamma}{k} \right) = p_k(t, \alpha), \quad (18)$$

которое означает, что в пределе события A и $\left(\frac{\chi}{k} \right)$ независимы. Назовем (18) предположением *достаточного перемешивания*. Грубо говоря, (18) означает, что условие, что χ лежит на одной из прямых из $\{g_i\}$, может быть игнорировано. В пределе, когда $l \rightarrow 0$, χ получает длину t и направление α .

При условии (18) решениями уравнения (17), удовлетворяющими начальным условиям $q_0(0) = 1$ и $q_k(0) = 0$ для $k > 0$, являются пуассоновские вероятности с единичным параметром $q_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$. Этот результат сформулируем особо.

Теорема. Пусть $\{g_i\} \in \text{Ti2}$ обладает гладкими вероятностями пересечений $p_k(t, \alpha)$. Если для каждого направления α и $t > 0$ удовлетворяются факторизационные Условия F1, F2 и F3, и выполняется условие достаточного перемешивания, то $p_k(t, \alpha)$ суть пуассоновские вероятности с параметром $\lambda(\alpha)t$, где $\lambda(\alpha)$ есть $\sin$ -преобразование плотности первой моментной меры.

Заметим в заключение, что если условие достаточного перемешивания не выполнено, то Теорема не верна, так как любой коксовский процесс прямых $\{g_i\} \in \text{Ti2}$ со случайным множителем ξ имеет вероятности $p_k(t, \alpha)$ вида смеси пуассоновских распределений. Последние сводятся к пуассоновским вероятностям, когда ξ

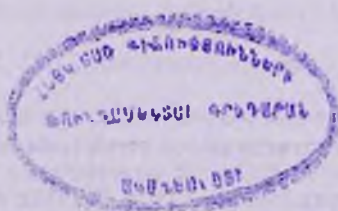
не случайно. Но в этом случае процесс прямых $\{g_i\}$ будет пуассоновским. Для пуассоновского $\{g_i\}$ условие достаточного перемешивания удовлетворяется.

ABSTRACT. In the present paper the invariant imbedding is applied to a problem from Stochastic Geometry. Under certain factorization assumptions, we derive differential equations for the probabilities which describe distribution of the number of intersections of a test segment by the lines from translation invariant random line process in the plane. It is shown that under additional "sufficient mixing" condition the equations have only Poisson solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. A Life in Astrophysics, Selected works by V. A. Ambartsumian, Editor R. V. Ambartsumian, Allerton Press, New York, 1998.
2. R. E. Bellman, R. E. Calaba and M. C. Prestrud, "Invariant Imbedding & Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness", published by Elsevier, 1963.
3. R. V. Ambartsumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, "Введение в стохастическую геометрию" Москва, Наука, 1989.
5. R. Davidson, "Construction of line processes : second order properties", In : "Stochastic Geometry", E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), J. Wiley & Sons, London, New York, Toronto, 1974.
6. V. K. Oganian, " Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", Acta Appl. Math., Holland, vol. 9, no. 1 — 2, ст. 71 — 81, 1987.

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am



ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА В СТЕРЕОЛОГИИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 33, № 4, 1998

Задача Вискела — одна из старейших в стереологии. На плоскости имеется совокупность дисков случайного радиуса, центры которых образуют трансляционно инвариантный точечный процесс. Пересечение “тестовой прямой” с этими дисками порождает одномерный случайный процесс хорд. Задача Вискела : по заданному вероятностному распределению длины типичной хорды определить распределение длины радиуса типичного круга. В такой постановке задача сводится к интегральному уравнению Абеля. Если области суть гомотетичные копии некоторой области отличной от круга, глобальная изотропия сохраняется при применении к областям независимых равномерных вращений. Однако, в этой постановке удовлетворительное решение отсутствует. В настоящей статье рассматриваются равносторонние N -угольники случайных размеров, изотропно разбросанные на плоскости. Шейпы многоугольников случайны и подчиняются вероятностному распределению S , заданному в соответствующем пространстве шейпов. Показано, что при определенных условиях на S , нахождение распределения размеров может быть сведено к решению интегрального уравнения Вольтерра с ограниченным ядром, зависящем только от S . Равносторонние треугольники и ромбы выпадают, однако существуют конкретные случайные модели равносторонних пятиугольников, удовлетворяющих всем перечисленным условиям.

ВВЕДЕНИЕ

Ряд результатов в стохастической геометрии получается при помощи тождеств Плейеля и их модификаций, см. [1] и [2]. Для ограниченного выпуклого многоугольника D на плоскости и дважды непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функции $F(x)$ со свойством $F(0) = 0$ имеет место тождество Плейеля

$$\int_{[D]} F'(x) dg = \int_{[D]} F''(x) x \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg + \sum_i F(a_i), \quad (0.1)$$

где dg – мера в пространстве G прямых на плоскости, инвариантная относительно евклидовых движений и нормированная так, что ее значение на множестве

$$[D] = \{g \in G : \text{прямая } g \text{ пересекает } D\}$$

равно длине периметра многоугольника D . В (0.1) χ означает длину хорды $D \cap g$, порожденную прямой g , а ψ_1 и ψ_2 – углы, возникающие в двух точках пересечения g с границей D , оба угла берутся внутри D и в одной полуплоскости относительно g , a_i – длины сторон многоугольника D .

В настоящей статье в качестве функции F в *усредненной версии* тождества (0.1) выбирается дельта-функция Дирака. Это приводит к решению *стереологической задачи*, поставленной для случайных многоугольных шейпов.

Напомним суть классической стереологической задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ имеется случайное счетное множество выпуклых областей $\{D_i\}$. Предполагаем, что $D_i = M_i h_i D$, где D – некоторая ограниченная выпуклая область, MhD – область, получающаяся из D гомотетией с коэффициентом $h > 0$ и евклидовым движением M . Предполагаем, что $\{M_i, h_i\}$ является *случайным точечным процессом* на группе $\mathbb{M}$ евклидовых движений плоскости с марками h_i из $(0, \infty)$. Распределение P процесса $\{M_i, h_i\}$ берется инвариантным относительно группы евклидовых движений, а $\{M_i\}$ предполагается имеющим конечную интенсивность. Тогда (см. [3]) определено распределение V *типичной марки* h .

Простейший пример процесса $\{M_i, h_i\}$, удовлетворяющего упомянутым условиям: $\{M_i\}$ – пуассоновский точечный процесс, управляемый мерой, пропорциональной мере Хаара на группе $\mathbb{M}$, $\{h_i\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с вероятностным распределением V .

Пусть g_0 – некоторая прямая на плоскости $\mathbb{R}^2$. Она пересекает некоторые области из случайного счетного набора $\{D_i\}$. Случайное множество интервалов $I_i = D_i \cap g_0$ обозначаем через $\{I_i\}$. Распределение множества $\{I_i\}$ инвариантно относительно сдвигов, отображающих g_0 в себя. Если интенсивность случайного множества $\{I_i\}$ конечна, то можно говорить [3] о распределении W *длины типичного интервала* в $\{I_i\}$. В приведенном выше примере центры интервалов из

$\{I_i\}$ образуют пуассоновский точечный процесс, а их длины образуют последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое вероятностное распределение W .

Задача стереологии : по заданному W найти V .

Мы будем рассматривать рандомизированную версию указанной задачи. Пусть D имеет случайный шейп. Для D = равносторонний выпуклый N -угольник (рассматриваются только такие области), шейп s описывается с помощью $N - 3$ угловых параметров. В качестве размерного параметра выбираем длину стороны. Таким образом, $D = (s, 1)$, длина каждой стороны D равна 1. Полагаем $D_i = M_i h_i(s_i, 1) = M_i(s_i, h_i)$, где $\{s_i\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных шейпов, полученных из некоторого вероятностного распределения S . Формулировка задачи Вискела далее не меняется.

Нашей целью является получение общих условий, при которых плотность вероятностного распределения V удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра с ограниченным ядром, зависящим только от вероятностного распределения S , и со свободным членом, пропорциональным производной от плотности W . Приводятся конкретные модели случайных шейпов для равносторонних пятиугольников, удовлетворяющих всем достаточным условиям. Выписан явный алгоритм для вычисления ядра.

§1. УСРЕДНЕНИЕ

Предположим, что вероятность S сосредоточена на шейпах равносторонних выпуклых N -угольников. Через $hD = (s, h)$ обозначаем равносторонний N -угольник с шейпом s и длинной стороной h .

Рассмотрим следующую стохастическую конструкцию :

Шаг 1 : Выбираем случайный шейп s из вероятностного распределения S и строим многоугольник $D = (s, 1)$.

Шаг 2 : Независимо выбираем значение h из вероятностного распределения $(H)^{-1}h V(dh)$, где $H = \int h V(dh)$ и строим многоугольник hD .

Шаг 3 : Выбираем случайную прямую g с равномерным вероятностным распределением на $[hD]$.

Напомним, что для заданных s и h равномерное вероятностное распределение на $[hD]$ пропорционально сужению меры dg на множество $[hD]$, с соответствующей нормировкой. $I_{[hD]}(g)$ обозначает индикаторную функцию множества $[hD]$. Так как для каждого $h > 0$

$$\int I_{[hD]}(g) dg = Nh,$$

то нормирующим множителем является $(Nh)^{-1}$.

Результатом стохастической конструкции является случайная фигура (hD, g) , состоящая из области hD и прямой $g \in [hD]$. Ясно, что вероятностное распределение (hD, g) имеет вид

$$(NH)^{-1} V(dh) S(ds) I_{[hD]}(g) dg. \quad (1.1)$$

Величины χ = длина $hD \cap g$, $\cot \psi_1$ и $\cot \psi_2$, определенные в (0.1), при заданном (hD, g) становятся случайными. Их совместное распределение индуцировано из (1.1).

Доказательство следующей теоремы может быть легко получено, используя теорию распределения типичной марки [3].

Теорема 1. *Вероятностное распределение случайной переменной χ совпадает с W .*

Задавая шейп s и величину h , запишем тождество (0.1) для hD и проинтегрируем его относительно вероятностного распределения $V \times S$. Так как для каждой функции f , определенной на $(0, \infty)$

$$(HN)^{-1} \int \int \int f(\chi) V(dh) S(ds) dg = \int W(x) f(x) dx,$$

$$\int \int f(h) V(dh) S(ds) = \int V(x) f(x) dx,$$

где $W(x)$ и $V(x)$ плотности вероятностных распределений W и V , получаем

$$\begin{aligned} \int W(x) F'(x) dx &= H^{-1} \int V(x) F(x) dx + \\ &+ (HN)^{-1} \int V(h) dh \int S(ds) \int_{[hD]} F''(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Мы будем рассматривать (1.2) для функции $F(x) = \delta(x - y)$, где $\delta(x - y)$ есть дельта функция Дирака в точке $y > 0$. Для каждой $u(x) \in C^{(2)}$ имеем

$$\int u(x)\delta(x - y)dx = u(y) \quad \text{и} \quad \int u(x)\delta'(x - y)dx = -u'(y). \quad (1.3)$$

Однако, подстановка $\delta''(x - y)$ вместо F'' в кратный интеграл в (1.2) требует обоснования.

Для прояснения ситуации, вернемся к стандартному определению δ -функции и рассмотрим семейство функций $F(x) = F_\epsilon(x)$, для которых $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(x) = \delta(x - y)$ в смысле слабой сходимости (такое семейство назовем $\delta(x - y)$ -семейством). В §2 и §3 приводятся условия на шейповое распределение S , при которых следующее соотношение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int V(h)dh \int S(ds) \int_{[hD]} F''_\epsilon(x) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \int V(h) K(h, y) dh \quad (1.4)$$

выполняется для каждой вероятностной плотности $V(h)$ на $(0, \infty)$ с конечным средним H , и дается явный алгоритм для вычисления функции $K(h, y)$. Из (1.2), (1.3) следует, что $K(h, y)$ служит ядром в интегральном уравнении

$$-W'(y) = H^{-1}V(y) + (HN)^{-1} \int V(h) K(h, y) dh. \quad (1.5)$$

При выполнении одного из условий, наложенных на S , уравнение (1.5) становится уравнением Вольтерра.

§2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЖДЕСТВА ПЛЕЙЕЛА

Начнем с $D = (s, 1)$ и $F(x) \in C^{(2)}$. Для всех s

$$\int_{[D]} F'''(x) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \sum_{i < j} \int_{[a_i] \cap [a_j]} F'''(x) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg, \quad (2.1)$$

где $[a_i] \cap [a_j]$ обозначает множество прямых пересекающих стороны a_i и a_j многоугольника D . Предполагая, что

A1: многоугольник D не имеет параллельных сторон,

каждое слагаемое может быть вычислено следующим образом. На множестве $[a_i] \cap [a_j]$ рассмотрим координаты $g = (\chi, \phi)$, где χ как и выше, а $\phi \in (0, \pi)$ является направлением прямой g .

Имеет место соотношение (см. [3], стр. 157)

$$dg = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\sin \alpha_{ij}} d\chi d\phi,$$

где α_{ij} угол между сторонами a_i и a_j . Получаем

$$\int_{[a_i] \cap [a_j]} F''(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \int_{\langle ij \rangle} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\sin \alpha_{ij}} d\phi \int_{b_{ij}}^{c_{ij}} F''(\chi) \chi d\chi,$$

где $\langle ij \rangle = \{ \phi : \text{для некоторого } \chi > 0 \text{ существует прямая } (\chi, \phi) \in [a_i] \cap [a_j] \}$, а интервал (b_{ij}, c_{ij}) есть множество значений χ для семейства параллельных прямых из $[a_i] \cap [a_j]$, имеющих фиксированное направление ϕ . Таким образом, $b_{ij} = b_{ij}(\phi)$, $c_{ij} = c_{ij}(\phi)$ и всегда $b_{ij} < c_{ij}$.

Производя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{b_{ij}}^{c_{ij}} F''(\chi) \chi d\chi &= c_{ij} F'(c_{ij}) - b_{ij} F'(b_{ij}) - \int_{b_{ij}}^{c_{ij}} F'(\chi) d\chi = \\ &= c_{ij} F'(c_{ij}) - b_{ij} F'(b_{ij}) + F(b_{ij}) - F(c_{ij}), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \int_{[a_i] \cap [a_j]} F''(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg &= \\ = \int_{\langle ij \rangle} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\sin \alpha_{ij}} [c_{ij} F'(c_{ij}) - b_{ij} F'(b_{ij}) + F(b_{ij}) - F(c_{ij})] d\phi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть V_k — вершина многоугольника D . Через $[V_k]$ обозначим пучок прямых, проходящих через V_k , пересекающих внутренность D (т.е. опорные прямые исключаются). Через g_k обозначаем прямые из $[V_k]$. Прямым g_k приписываем направление от V_k внутрь D . Пусть a_r и a_l — две стороны, которые пересекаются в вершине V_k , причем a_r лежит справа, а a_l слева относительно g_k . На $[V_k]$ определим отображения

$$g_k \mapsto j, \quad g_k \mapsto (\psi_1^{(r)}, \psi_2^{(r)}), \quad g_k \mapsto (\psi_1^{(l)}, \psi_2^{(l)}), \quad g_k \mapsto z, \quad g_k \mapsto (\alpha^{(r)}, \alpha^{(l)}), \quad (2.3)$$

где

j — индекс стороны a_j , через которую g_k оставляет D ;

$\psi_1^{(r)}$ — угол внутри D между лучами g_k и a_r , исходящими из V_k ;

$\psi_2^{(r)}$ — угол между g_k и a_j , лежащий внутри D , в правой полуплоскости ограниченной g_k ;

$\psi_1^{(l)}$ и $\psi_2^{(l)}$ определяются аналогично, заменой "правый" на "левый";

z — длина хорды $g_k \cap D$;

$\alpha^{(r)} = \alpha_{rj}$, $\alpha^{(l)} = \alpha_{lj}$.

Для каждой g_k имеем: или $z = b_{rj}$ или $z = c_{rj}$, а также или $z = b_{lj}$ или $z = c_{lj}$. Будем использовать индикаторные функции $I_b^{(r)}(g_k) = 1 - I_c^{(r)}(g_k)$ и $I_b^{(l)}(g_k) = 1 - I_c^{(l)}(g_k)$, соответственно, событиям $z = b_{rj}$, $z = c_{rj}$ и $z = b_{lj}$, $z = c_{lj}$. Вклады опорных прямых многоугольника D при ограничении $F(0) = 0$ равны нулю.

Подставляя (2.2) в (2.1), используем индикаторные функции $I_{<ij>}(\phi)$ множеств $<ij>$. После естественной группировки слагаемых

$$\begin{aligned} & \int_{[D]} F''(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \\ & = \sum_{i < j} \int_0^\pi I_{<ij>}(\phi) \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\sin \alpha_{ij}} [c_{ij} F'(c_{ij}) - b_{ij} F'(b_{ij}) + F(b_{ij}) - F(c_{ij})] d\phi = \\ & = \sum_{V_k} \int_{[V_k]} \frac{\cos \psi_1^{(r)} \cos \psi_2^{(r)}}{\sin \alpha^{(r)}} [z F'(z) - F(z)] [I_c^{(r)}(g_k) - I_b^{(r)}(g_k)] d\phi + \\ & + \sum_{V_k} \int_{[V_k]} \frac{\cos \psi_1^{(l)} \cos \psi_2^{(l)}}{\sin \alpha^{(l)}} [z F'(z) - F(z)] [I_c^{(l)}(g_k) - I_b^{(l)}(g_k)] d\phi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где интегрирование проводится по угловой мере $d\phi$ на каждом пучке $[V_k]$.

Следующий шаг состоит в переходе к интегрированию в пространстве длин z , см. (2.3).

Для каждого V_k соответствующую область значений z разбиваем на ветви B_{km} , $m = 1, 2, \dots$ следующим образом. Обозначим через $[V_k]_j$ ту часть $[V_k]$, которую первое отображение в (2.3) переводит в j . Существуют две возможности:

I) $[V_k]_j$ содержит прямую, перпендикулярную к a_j и II) не содержит.

В случае II), $[V_k]_j$ есть отдельная ветвь, идентичная интервалу (d_{kj}, d'_{kj}) , где $d_{kj} < d'_{kj}$ длины двух диагоналей, соединяющих V_k с концами a_j .

В случае I) область изменения z на $[V_k]_j$ разбивается на две ветви, идентичные интервалам (q_{kj}, d_{kj}) и (q_{kj}, d'_{kj}) , где q_{kj} — длина перпендикуляра из V_k , опущенная на прямую, содержащую a_j . На каждой ветви B_{km} отображение $\phi \rightarrow z$ взаимно-однозначно. Внутри каждой B_{km} полученные функции и их производные d/dz не имеют разрывов.

На каждой ветви имеем

$$d\phi = z^{-1} \tan \psi dz,$$

где $\psi < \pi/2$ — угол пересечения g_k с a_j , см. (2.3). Выбирая $\psi < \pi/2$, получаем

$$\cos \psi_2^{(r)} \tan \psi = S(\psi_2^{(r)}) \sin \psi,$$

где

$$S(\psi_2^{(r)}) = 1, \text{ если } \cos \psi_2^{(r)} > 0, \text{ и } -1, \text{ если } \cos \psi_2^{(r)} < 0.$$

Аналогичное соотношение имеет место, если заменить r на l .

На каждой ветви B_{km} величины $S(\psi_2^{(r)})$, $I_c^{(r)}(g_k) - I_b^{(r)}(g_k)$ и $\sin \alpha^{(r)}$ остаются постоянными. Обозначим

$$Z_{km}^{(r)} = \frac{S(\psi_2^{(r)})[I_c^{(r)} - I_b^{(r)}]}{\sin \alpha^{(r)}}.$$

Величина $Z_{km}^{(l)}$ определяется аналогично. Используя эти замечания, (2.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{[D]} F''(x) x \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \\ = \sum_{V_k} \sum_m Z_{km}^{(r)} \int_{B_{km}} z^{-1} \cos \psi_1^{(r)} \sin \psi [z F'(z) - F(z)] dz + \\ + \sum_{V_k} \sum_m Z_{km}^{(l)} \int_{B_{km}} z^{-1} \cos \psi_1^{(l)} \sin \psi [z F'(z) - F(z)] dz. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для того, чтобы подставить $F(z) = \delta(z - y)$ в (2.5), сделаем следующее предположение относительно шейпа s .

A2 : для $D = (s, 1)$, ни одна из длин q_{km} или d_i не равна y .

Имеем элементарные формулы :

$$\sin \psi = \frac{q_{km}}{z}, \quad \cos \psi_i^{(r)} = \frac{q_{km}}{z} u_1^{(r)} + \frac{\sqrt{z^2 - q_{km}^2}}{z} u_2^{(r)},$$

где $u_1^{(r)}$ и $u_2^{(r)}$ совпадают, с точностью до знаков, с $\sin$ и $\cos$ угла между a_r и $q_{k,m} = q_{k,j}$, и являются постоянными на B_{km} . Аналогичное выражение имеется для $\cos \psi_2^{(l)}$. Из A2 следует, что с вероятностью $S = 1$ точка y не совпадает с границей какого-либо B_{km} , и следовательно (1.3) становится применимым.

Обратимся к многоугольнику $hD = (z, h)$. При A1, (2.5) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \int_{[hD]} F''(x) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \\ & = \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(r)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(r)}(z, h) [z F'(z) - F(z)] dz + \\ & + \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(l)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(l)}(z, h) [z F'(z) - F(z)] dz, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где hB_{km} — гомотетичный образ B_{km} и

$$X_{km}^{(r/l)}(z, h) = \frac{h^2 q_{km}^2}{z^2} u_1^{(r/l)} + h q_{km} \frac{\sqrt{z^2 - h^2 q_{km}^2}}{z^2} u_2^{(r/l)}$$

значение произведения $\sin \psi \cos \psi_1^{(r/l)}$, записанного для hD и z . В (2.6) можно подставить $F(z) = \delta(z - y)$, если выполняется :

A2*: для hD ни одна из длин $h q_{km}$ или $h d_i$ не равна y .

Теорема 2. *Предположим, что вероятностное распределение S имеет плотность в пространстве $N - 3$ угловых параметров, описывающих шейпы равно- сторонних N -угольников. Тогда для каждого $\delta(x - y)$ -семейства $F_\delta(x) \in C^{(2)}$ и для любых y и h , с вероятностью $S = 1$ существует предел*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{[hD]} F''_\delta(x) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \int_{[hD]} \delta''(x - y) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg.$$

Независимо от выбора $\delta(x - y)$ -семейства

$$\begin{aligned} & \int_{[hD]} \delta''(x - y) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = \\ & = - \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(r)} \left[y^{-1} X_{k,m}^{(r)}(y, h) + \frac{d}{dy} X_{k,m}^{(r)}(y, h) \right] I_{km}(y, h) - \\ & - \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(l)} \left[y^{-1} X_{km}^{(l)}(y, h) + \frac{d}{dy} X_{km}^{(l)}(y, h) \right] I_{km}(y, h), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $I_{km}(y, h) = 1$ если $y/h \in B_{km}$, и 0 — в противном случае.

Доказательство : Для каждого h и y предположение о существовании плотности влечет с вероятностью $S = 1$ свойства A1 и A2*. Предполагая, что s принадлежит соответствующему множеству шейпов, можно вычислить предел, формально подставляя $F(z) = \delta(z - y)$ и применяя правила (1.3).

Следствие. Рассмотрим множество шейпов, удовлетворяющих условию

A3 : для каждой вершины V_k многоугольника $D = (s, 1)$ и каждой прямой $g_k \in [V_k]$, всегда имеем $z > 1$.

Для шейпов $s \in A3$

$$\int_{[hD]} \delta''(\chi - y) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg = 0 \text{ при } y < h. \quad (2.8)$$

§3. ОЦЕНКИ

В этом параграфе мы вычисляем ядро $K(h, y)$ в (1.4) при некоторых дополнительных условиях (предположения A4–A6) на распределение S . Отметим, что

$$K(h, y) \neq \text{математическому ожиданию левой части (2.7).}$$

Для конкретности, выберем $\delta(x - y)$ -семейство в (1.4) следующим образом :

$$F_\varepsilon(x) = (2\varepsilon)^{-1} \text{ для } y - \varepsilon < x < y + \varepsilon, 0 \text{ --- в противном случае.}$$

При этом выборе Теорема 2 остается справедливой, если под $F'_\varepsilon(z)$ понимать следующее :

$$F'_\varepsilon(z) = (2\varepsilon)^{-1} \delta(z - y + \varepsilon) - (2\varepsilon)^{-1} \delta(z - y - \varepsilon).$$

Подставим в (2.6) таким образом определенные $F_\varepsilon(z)$ и $F'_\varepsilon(z)$. Для применения теоремы Лебега нам понадобятся оценки. Через E обозначим математическое ожидание относительно S . Всюду в этом параграфе значение $y > 0$ рассматривается как фиксированный параметр.

Рассмотрим члены, содержащие $F_\varepsilon(z)$, т.е.

$$\begin{aligned} U_1 = & - \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(r)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(r)}(z, h) F_\varepsilon(z) dz - \\ & - \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(l)} \int_{hB_{km}} z^{-1} X_{km}^{(l)}(z, h) F_\varepsilon(z) dz. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A4 : Существует константа $c > 0$ такая, что с вероятностью $S = 1$ в $D = (s, 1)$ для каждого α_{ij} (= угол между сторонами a_i и a_j) имеем $\sin \alpha_{ij} > c$.

Оценка 1. При Условии A4 сумма (3.1) равномерно ограничена на множестве $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$.

Доказательство : На $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$, когда $z \in hB_{km} \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, имеем $z^{-1} < 2y^{-1}$. При Условии А4, $Z_{km}^{(l/r)}$ и $X_{km}^{(l/r)}(z, h)$ ограничены, и $\int_{hB_{km}} F_\varepsilon(z) dz \leq 1$.

По теореме Лебега

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} EU_1 = E \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_1 = E \left[- \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(r)} y^{-1} X_{km}^{(r)}(y, h) I_{km}(y, h) - \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(l)} y^{-1} X_{km}^{(l)}(y, h) I_{km}(y, h) \right]. \quad (3.2)$$

Сумму слагаемых, содержащих $F'_\varepsilon(z)$ (см. (2.5)) разделим на две суммы :

$$U_2 = \sum_{V_h} \sum_m \left[Z_{km}^{(r)} \int_{hB_{km}} X_{km}^{(r)}(z, h) F'_\varepsilon(z) dz + Z_{km}^{(l)} \int_{hB_{km}} X_{km}^{(l)}(z, h) F'_\varepsilon(z) dz \right] = U_{21} + U_{22}.$$

По определению, $U_{21} = \sum_{km} a_{km} b_{km}$, где a_{km} -члены в квадратных скобках, а

$$b_{km} = b_{km}(s) = 1, \text{ если } (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset hB_{km}, \quad 0 \text{ --- в противном случае}$$

$$\text{и } U_{22} = \sum_{km} a_{km} (1 - b_{km}).$$

Рассмотрим асимптотическое поведение (при $\varepsilon \rightarrow 0$) члена EU_{21} . Имеем

$$\begin{aligned} b_{km} \int_{hB_{km}} X_{km}^{(r/l)}(z, h) F'_\varepsilon(z) dz &= (2\varepsilon)^{-1} \left[X_{km}^{(r/l)}(y - \varepsilon, h) - X_{km}^{(r/l)}(y + \varepsilon, h) \right] b_{km} = \\ &= (2\varepsilon)^{-1} \left[\frac{h^2 q_{km}^2}{(y - \varepsilon)^2} u_1^{(r/l)} - \frac{h^2 q_{km}^2}{(y + \varepsilon)^2} u_1^{(r/l)} \right] b_{km} + \\ &+ (2\varepsilon)^{-1} \left[h q_{km} \frac{\sqrt{(y - \varepsilon)^2 - h^2 q_{km}^2}}{(y - \varepsilon)^2} u_2^{(r/l)} - h q_{km} \frac{\sqrt{(y + \varepsilon)^2 - h^2 q_{km}^2}}{(y + \varepsilon)^2} u_2^{(r/l)} \right] b_{km}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Оценка 2. Для шейпов $s \in A3$ разность во второй строке (3.3) ограничена на множестве $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$.

Доказательство : следует из

$$(2\varepsilon)^{-1} \left| \frac{1}{(y - \varepsilon)^2} - \frac{1}{(y + \varepsilon)^2} \right| < \frac{2}{(y - \varepsilon)^3} < \frac{16}{y^3}$$

и того факта, что для шейпов $s \in A3$, из $b_{km}(s) = 1$ следует $h < y/2$.

Оценим разность в третьей строке формулы (3.3).

Оценка 3. На множестве

$$\{(q, \varepsilon) : 0 < q < y - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < y/2\} \quad (3.4)$$

имеем

$$(2\varepsilon)^{-1} \left| q \frac{\sqrt{(y+\varepsilon)^2 - q^2}}{(y+\varepsilon)^2} - q \frac{\sqrt{(y-\varepsilon)^2 - q^2}}{(y-\varepsilon)^2} \right| < C_1(y-q)^{-1/2},$$

где C_1 — константа не зависящая от ε и q .

Доказательство : Рассмотрим функцию

$$(2\varepsilon)^{-1} \sqrt{y-q} \left| q \frac{\sqrt{(y+\varepsilon)^2 - q^2}}{(y+\varepsilon)^2} - q \frac{\sqrt{(y-\varepsilon)^2 - q^2}}{(y-\varepsilon)^2} \right|. \quad (3.5)$$

По формуле Тейлора

$$q \frac{\sqrt{(y+\varepsilon)+q}}{(y+\varepsilon)^2} = q \frac{\sqrt{y+q}}{y^2} + \varepsilon \theta_1 \quad \text{и} \quad q \frac{\sqrt{(y-\varepsilon)+q}}{(y-\varepsilon)^2} = q \frac{\sqrt{y+q}}{y^2} + \varepsilon \theta_2,$$

где обе функции θ_1 и θ_2 ограничены на множестве (3.4). Таким образом, (3.5)

запишется в виде

$$\begin{aligned} & (2\varepsilon)^{-1} \sqrt{y-q} \frac{\sqrt{y+q}}{y^2} q [\sqrt{y+\varepsilon-q} - \sqrt{y-\varepsilon-q}] + \frac{1}{2} \sqrt{y-q} (\theta_1 + \theta_2) = \\ & = (2\varepsilon)^{-1} (y-q) q \frac{\sqrt{y+q}}{y^2} \left[\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{y-q}} - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{y-q}} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{y-q} (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Так как для любого $0 \leq x \leq 1$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2} x,$$

предыдущая функция ограничена выражением $\frac{1}{\sqrt{2}} q \frac{\sqrt{y+q}}{y^2} \frac{1}{\sqrt{y}}$. Утверждение доказано.

Так как $b_{km} \leq I_{km}(y, h)$ и $hq_{km} \leq y$, то используя оценки 2 и 3 получаем

$$U_{21} \leq \frac{16}{y^3} 2N(N-2) + C_1 y \sum_{B_{km}} \frac{I_{km}(y, h)}{\sqrt{y - hq_{km}}}.$$

А5 : Существует константа $C < \infty$, не зависящая от h , такая что для каждого $h > 0$

$$\mathbb{E} \sum_{B_{km}} \frac{I_{km}(y, h)}{\sqrt{y - hq_{km}}} \leq C.$$

Используя теорему Лебега и Условие А5 получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} U_{21} &= \mathbb{E} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_{21} = \\ &= \mathbb{E} \left[- \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(r)} \frac{d}{dy} X_{k,m}^{(r)}(y, h) I_{km}(y, h) - \sum_{V_h} \sum_m Z_{km}^{(l)} \frac{d}{dy} X_{k,m}^{(l)}(y, h) I_{km}(y, h) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.2) и (3.6) вместе с Теоремой 2 дают

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} U_1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} U_{21} = \mathbb{E} \int_{[hD]} \delta''(\chi - y) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg. \quad (3.7)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение (при $\varepsilon \rightarrow 0$) слагаемого $\mathbb{E} U_{22}$.

На действительной оси рассмотрим случайную совокупность точек $\{hd_i\} \cup \{hq_{km}\}$ (множество концов ветвей hB_{km} , за исключением точки h). Через $n_h(y, \varepsilon)$ обозначим число точек из множества $\{hd_i\} \cup \{hq_{km}\}$, лежащих внутри интервала $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, так что n_1 относится к $h = 1$.

А6: В случайном множестве $\{d_i\} \cup \{q_{km}\}$ никакие две точки не совпадают с вероятностью $S = 1$. Для каждого y существуют пределы

$$\lambda(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} S(n_1(y, \varepsilon) = 1) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} S(n_1(y, \varepsilon) = l) = 0 \text{ для } l > 1.$$

Отношение $(2\varepsilon)^{-1} \mathbb{E} n_1(y, \varepsilon)$ равномерно ограничено.

Из предположения А6 следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} U_{22} = h^{-1} \lambda(h^{-1} y) \Pi(y, h), \quad (3.8)$$

где величина $\Pi(y, h)$ определяется как предел (когда $\varepsilon \rightarrow 0$) условного математического ожидания величины

$$\sum \pm [Z_{km}^{(r)} X_{k,m}^{(r)}(y \mp \varepsilon, h) + Z_{km}^{(l)} X_{k,m}^{(l)}(y \mp \varepsilon, h)], \quad (3.9)$$

при условии $n_h(y, \varepsilon) = 1$. В (3.9) суммирование проводится по ветвям B_{km} , имеющим конец в интервале $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Знак перед квадратными скобками "+", если внутренность B_{km} покрывает $y - \varepsilon$, и "-", если B_{km} покрывает $y + \varepsilon$. Из вида (3.9) следует, что $\Pi(y, h)$ равномерно ограничена.

Оценка 4. При Условии А6 отношение $(2\varepsilon)^{-1}En_h(y, \varepsilon)$ равномерно ограничено на множестве $\{\varepsilon < y/2, h > 0\}$.

Доказательство : Поскольку

$$En_h(y, \varepsilon) = En_1(h^{-1}y, h^{-1}\varepsilon),$$

получаем

$$(2h^{-1}\varepsilon)^{-1}En_h(y, \varepsilon) = (2h^{-1}\varepsilon)^{-1}En_1(h^{-1}y, h^{-1}\varepsilon).$$

Таким образом, Условие А6 приводит к оценке

$$(2\varepsilon)^{-1}En_h(y, \varepsilon) < h^{-1}C,$$

где C — некоторая константа. С вероятностью $S = 1$ множество $\{hd_i\} \cup \{hq_{km}\}$ принадлежит интервалу $(0, hN/2)$. Следовательно, если $h < y/N$ и $\varepsilon < y/2$, то $En_h(y, \varepsilon) = 0$. Из предыдущего неравенства, для $h > y/N$ имеем

$$(2\varepsilon)^{-1}En_h(y, \varepsilon) < NC/y.$$

Равенства (3.7) и (3.8) позволяют найти $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(U_1 + U_2)$. Наши оценки равномерны по h , так что по теореме Лебега, для каждой вероятностной плотности $V(h)$ имеем

$$\int V(h) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(U_1 + U_2) dh = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int V(h) E(U_1 + U_2) dh.$$

Получаем следующую теорему (вместо математического ожидания E пишем интеграл относительно S).

Теорема 3. Пусть S — вероятностное распределение в пространстве равно-
сторонних N -угольных шейпов, обладающих плотностью в соответствующем
параметрическом пространстве, $V(h)$ и $W(y)$ — плотности вероятностных
распределений V и W , $H = \int h V(h) dh < \infty$.

Если S сосредоточено на $A3$ и имеет свойства $A4 - A6$, то $H^{-1}V(h)$ удовле-
творяет интегральному уравнению типа Вольтерра

$$-W'(y) = H^{-1}V(y) + N^{-1} \int_0^y H^{-1}V(h) K(h, y) dh$$

с ограниченным ядром

$$K(h, y) = h^{-1} \lambda(h^{-1} y) \Pi(y, h) + \int S(ds) \int_{[hD]} \delta''(\chi - y) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg,$$

 где $\int_{[hD]} \delta''(\chi - y) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg$ определяется из (2.7).

Подчеркнем, что свойство Вольтерра следует из (2.8) и из того факта, что для распределений S , сосредоточенных на A_3 , имеем $\lambda(x) = 0$ для $x < 1$.

§4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом параграфе укажем два новых Условия A_7 и A_8 , из которых следует Условие A_5 .

Пусть многоугольник D^{kr} получается из D евклидовым движением; в D^{kr} вершина V_k совпадает с началом координат O , и соответствующая сторона a_r совпадает с отрезком $(0, 1)$ на оси x в некоторой координатной системе в $\mathbb{R}^2$. Многоугольник D^{kl} определяется аналогично, заменой a_r на a_l .

A_7 : на каждом многоугольнике D^{kr} или D^{kl} , любая сторона a_j , которая не имеет общей вершины с a_r (соответственно, a_l) продолжается до случайной прямой g_j , с вероятностным распределением $\rho_j(g)dg$, а плотность $\rho_j(g)$ ограничена, где dg -инвариантная относительно евклидовых движений, мера в пространстве G прямых на плоскости.

A_8 : случайный внутренний угол многоугольника D в каждой вершине V_k тупоугольный и с вероятностью $S = 1$ превосходит $\pi/2 + \nu$ для некоторого постоянного $\nu > 0$.

Лемма. Из Условий A_7 и A_8 следует Свойство A_5 .

Доказательство: На окружности $C(y, O)$ радиуса y с центром в O рассмотрим случайные множества $\{t_j\}_{y,h}^{kr}$. По определению, $\{t_j\}_{y,h}^{kr}$ есть множество точек, в которых продолжения $\{g_j\}$ $N-2$ сторон многоугольника hD^{kr} пересекают $C(y, O)$. Исключены стороны, которые пересекаются в точке O . С каждой случайной точкой t_j связываем случайный угол ξ_j между g_j и касательной к $C(y, O)$ в точке t_j . Другими словами, на $C(y, O)$ рассматриваем семейство маркированных точек $\{t_j, \xi_j\}_{y,h}^{kr}$. Маркированные точки $\{t_j, \xi_j\}_{y,h}^{kl}$ определяются аналогично.

Так как

$$\sin \xi_j = y^{-1} \sqrt{y^2 - h^2 q_{kj}^2},$$

то если математическое ожидание

$$\int S(ds) \sum \frac{1}{\sin \xi_j} \quad (4.1)$$

существует и ограничено на $0 < h < y$, получим А5. Ясно, что (4.1) равно сумме вкладов каждой случайной прямой g_j . Каждый из этих вкладов определяется вероятностным распределением соответствующей прямой. Из Условия А8 следует, что вклад прямой, содержащей сторону с вершиной в $z = 1$, ограничен. Используя

$$dg = \sin \xi_j d\xi_j dl,$$

где dl — мера длины на $C(y, O)$, вклад в (4.1) прямой g_j из числа оставшихся равен

$$\int \frac{1}{\sin \xi_j} h^{-1} \rho_j(h^{-1}g) dg = h^{-1} \int_0^\pi \int_{C(y,0)} \rho_j(h^{-1}g) d\xi_j dl < \infty,$$

где $h^{-1}g$ обозначает прямую, полученную из g с помощью гомотетии плоскости с коэффициентом h^{-1} . Замечая, что $\rho_j(h^{-1}g)$ концентрирована на прямых, пересекающих внутренность $C(hN, O)$, т.е. что область интегрирования по $d\xi_j$ имеет порядок h , получаем равномерную оценку. Лемма доказана.

Примеры вероятностных распределений S , удовлетворяющих условиям Теоремы 3, существуют начиная с $N = 5$. Построение для $N = 5$ можно провести следующим образом. Опишем шейп равностороннего пятиугольника парой γ_1, γ_2 внутренних углов, прилежащих к фиксированной стороне a_1 единичной длины. Множество γ_1, γ_2 , удовлетворяющее "геометрическим условиям" А3, А4 и А8 содержит окрестность правильного пятиугольного шейпа и, следовательно, имеет не нулевую $d\gamma_1 d\gamma_2$ -меру. Для того, чтобы удовлетворить "аналитическим условиям" А6 и А7 (и, следовательно, по Лемме, Условию А5), достаточно взять любое вероятностное распределение на множестве, обладающем *ограниченной плотностью* относительно $d\gamma_1 d\gamma_2$. Последнее утверждение следует из чисто качественного рассмотрения и имеет место для равносторонних N -угольников с $N > 5$.

ABSTRACT. One of the oldest stereology problems is the so called Wicksell problem. In the plane we have a collection of circular discs of random radii whose centers form a translation invariant point process. The intersections of a "test line" with these discs generate a random segment process in one dimension. The problem asks, given the probability distribution of the length of typical intersection segment, to determine the probability distribution of the typical disc radius. The problem has a well known solution by reduction to Abel integral equation. If the domains are homothetic copies of a single domain that no longer is a circular disc, the global isotropy is saved by subjecting the individual domains to independent uniform rotations. However, no solution seems to exist for the same problem in this more general setting. In the present paper, the domains of random size isotropically scattered in the plane are equilateral N-gons. Additionally, we require that the shapes of the polygons be random and sampled from a probability distribution S in the corresponding space of shapes. We show that under certain conditions as regards S , determination of size distribution can be reduced to solving a Volterra integral equation with bounded kernel depending solely on S . The equilateral triangles and rhombi fall out, but there exist concrete random models of equilateral pentagons satisfying the complete set of the outlined conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Convex polygons and random tessellations", In : "Stochastic Geometry", Editors : E. F. Harding and D. G. Kendall, John Wiley, 1974.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Москва, Наука, 1989.

15 августа 1998

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАЛЬМА В АНАЛИЗЕ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 33, No. 4, 1998

Статья изучает однородные процессы прямых второго порядка на плоскости, а именно, маркированные точечные процессы пересечений, индуцированные на тестовой прямой. Марками служат углы, под которыми происходят пересечения с тестовой прямой. Методами "Инвариантного Вложения" и интегрирования Комбинаторной формулы из Интегральной геометрии получаем два дифференциальных соотношения между совместными вероятностями числа пересечений на системе непересекающихся интервалов на тестовой прямой и вероятностями Пальма первого и второго порядка тех же событий. Анализом этих соотношений получены условия пуассоновости n -мерных распределений для любого $n \geq 1$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Изучение случайных точечных процессов, индуцированных на тестовых прямых случайными геометрическими процессами на плоскости $\mathbb{R}^2$, одна из основных тем стохастической геометрии (см. [1]; [3], глава 10; [4], глава 10; [6] — [10]). В этих работах важным инструментом исследования являются формулы комбинаторной интегральной геометрии, впервые примененные в контексте стохастической геометрии в [3]. Однако, эти исследования ограничивались в основном случайными геометрическими процессами, инвариантными относительно группы M_2 евклидовых движений плоскости.

Недавняя статья Р. В. Амбарцумяна [12] (представленная и в настоящем выпуске) открывает путь для замены сильного условия M_2 -инвариантности геометрических процессов на более слабое условие его T_2 -инвариантности (T_2 — группа параллельных переносов плоскости, T_2 -инвариантные геометрические про-

цессы иначе называются однородными). Статья [12] изучает T_2 -инвариантные случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости и маркированный точечный процесс $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$, индуцированный на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α : $\{x_i\}_\alpha = \{g_i\} \cap g(\alpha)$ — точечный процесс пересечений, а марки $\{\Psi_i\}$ суть углы, под которыми прямые из реализации пересекают тестовую прямую $g(\alpha)$ в точках $\{x_i\}_\alpha$. При некоторых условиях, наложенных на вероятностное распределение $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$, методом "Инвариантного Вложения" получены два дифференциальных уравнения. Этими условиями являются:

- а) для каждого направления α последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{x_i\}_\alpha$,
- б) последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ есть последовательность некоррелированных случайных величин,
- с) $\{g_i\}$ удовлетворяет так называемому условию "достаточного перемешивания", а именно, точечные процессы, индуцированные на тестовой прямой направления α и на "типичной" прямой из $\{g_i\}$ с тем же направлением, имеют одно и то же распределение.

Как показано в [12], если выполнены Условия а), б) и с), то решая эти два уравнения получаем пуассоновость одномерных распределений

$p_k(t, \alpha)$ = вероятность иметь k точек из $\{x_i\}_\alpha$ на интервале длины t .

Настоящая статья исследует многомерные вероятности $p_{\vec{k}}(\vec{\gamma}, \alpha)$. В этих обозначениях $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — система непересекающихся интервалов на $g(\alpha)$, $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$ — последовательность неотрицательных целых чисел,

$p_{\vec{k}}(\vec{\gamma}, \alpha)$ = совместная вероятность иметь k_j точек из $\{x_i\}_\alpha$ на каждом интервале γ_j , $j = 1, \dots, n$.

Так как вероятностное распределение случайного точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\vec{k}}(\vec{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [13]), изучение величин $p_{\vec{k}}(\vec{\gamma}, \alpha)$ приводит к утверждениям единственности, касающихся вероятностных распределений точечных процессов $\{x_i\}_\alpha$ или даже $\{g_i\}$.

Мы выводим два дифференциальных уравнения для n -мерного вероятностного распределения $p_{\vec{k}}(\vec{\gamma}, \alpha)$, справедливых при тех же предположениях а) — с),

для случайных процессов прямых, T_2 -инвариантных и обладающих первой и второй моментными мерами. Также накладываются некоторые предположения гладкости. Решая эти уравнения приходим к утверждению, что для каждого направления α точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский. В некотором смысле эта статья завершает исследование, начатое в [12]. Однако, имеется существенная методологическая разница между настоящей статьей и [12]: анализ второго порядка основывается не на инвариантном вложении, а на разложениях комбинаторной интегральной геометрии (см. [3] и [16]).

Статья организована следующим образом. §1 содержит необходимые предпосылки из теории трансляционно-инвариантных случайных процессов прямых (см. также [3], [4], [12]). В §2 мы развиваем важную тему, обобщенные формулы Пальма. Отметим, что систематическое использование формул Пальма в стохастической геометрии начато в [4]. В §3 метод инвариантного вложения и предположение а) применяются в так называемом анализе первого порядка. Необходимые факты из комбинаторной интегральной геометрии представлены в §4. Анализ второго порядка (§5) содержит интегрирование комбинаторного разложения параграфа 4, которое приводит к дифференциальному тождеству для $p_{\bar{E}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ (аналогичное разложение в $\mathbb{M}_2$ -инвариантном случае использовалось в [4] и [8]). При предположениях а), b) и c) последнее тождество сводится к дифференциальному уравнению для $p_{\bar{E}}(\bar{\gamma}, \alpha)$, которое полностью решается. Наконец, в §7 приводятся условия пуассоновости точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$.

§1. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ

Случайный процесс прямых определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbf{G}$ на плоскости (стандартная литература по точечным процессам — [3], [4], [9], [13]). Прямую $g \in \mathbf{G}$ можно задавать полярными координатами (φ, p) основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g (φ — точка на единичной окружности S_1 , $p \in [0, +\infty)$). Естественная топология в $\mathbf{G}$ есть топология листа Мебиуса.

Обозначим через dg единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых, инвариантную относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^2$

(см. [3], [4]).

Определение процесса прямых следующее. Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство реализаций процессов прямых

$$\mathcal{M} = \{m \subset G : m \text{ не имеет точек сгущения в пространстве } G\}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную σ -алгебру подмножеств $\mathcal{M}$, относительно которой функции

$$N(m, B) = \text{card}(m \cap B)$$

измеримы для всех борелевских $B \subset G$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$. Любое измеримое отображение $m(\omega): \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ называется случайным точечным процессом в G . Вместо m мы часто используем символ $\{g_i\}$, подчеркивая факт, что процесс прямых есть счетное случайное множество прямых. Через P обозначим вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$). Группа T_2 параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ индугирует группу преобразований множества реализаций $\mathcal{M}$ (группа параллельных переносов множества $\mathcal{M}$). $\{g_i\}$ называется однородным, если его распределение P инвариантно относительно этой группы (T_2 -инвариантно).

Примером T_2 -инвариантного случайного процесса прямых является пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $f(\varphi) \cdot d\varphi$.

Ниже нам понадобятся понятия первой и второй моментных мер процесса прямых.

Будем говорить, что $\{g_i\}$ — случайный процесс прямых первого порядка, если существует первая моментная мера $m_1(\cdot)$:

$$m_1(B) = E_P N(m, B) < \infty \quad \text{для } B \in \mathcal{B}_0(G),$$

где E_P — математическое ожидание относительно P , $\mathcal{B}_0(G)$ — кольцо всех ограниченных борелевских подмножеств.

Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ второго порядка, если существует вторая моментная мера $m_2(\cdot)$:

$$m_2(B_1 \times B_2) = E_P [N(m, B_1) \cdot N(m, B_2)] < \infty \quad \text{для } B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(G).$$

Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ , если $\gamma \cap g$ есть точка *внутренности* отрезка γ .

Задавая "тестовый отрезок" γ , рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для заданных n тестовых отрезков $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$ будем обозначать $\binom{\gamma_1 \dots \gamma_n}{k_1 \dots k_n} = \bigcap_{i=1}^n \binom{\gamma_i}{k_i} = \binom{\bar{\gamma}}{k}$. Для вероятностей этих событий используем обозначения

$$P\left(\binom{\gamma}{k}\right) \quad \text{и} \quad P\left(\binom{\gamma_1 \dots \gamma_n}{k_1 \dots k_n}\right) = P\left(\binom{\bar{\gamma}}{k}\right).$$

Определение 1. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу $Ti2$, если его вероятностное распределение P инвариантно относительно группы T_2 и первые и вторые моментные меры $\{g_i\}$ имеют форму $f dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2 dg_1 dg_2$ соответственно, с непрерывными (трансляционно-инвариантными) плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

Приведем некоторые свойства процессов из класса $Ti2$, которые нам понадобятся в параграфах 3 и 5. Их строгие доказательства легко получаются методом, описанным в [4].

1. Для случайного процесса прямых из класса $Ti2$ с вероятностью 1 в реализации нет параллельных прямых.

2. Отрезки, принадлежащие $g(\alpha)$, будем называть горизонтальными, а отрезки, ортогональные к $g(\alpha)$ — вертикальными. Горизонтальные отрезки обозначаем через h , а вертикальные — через v . Если $|h| = l \rightarrow 0$, то имеем

$$P\left(\binom{h}{1}\right) = \lambda(\alpha)l + o(l), \quad P\left(\binom{h}{2}\right) = O(l^2) \quad \text{и} \quad P\left(\binom{h}{k}\right) = o(l^2), \quad \text{если } k > 2, \quad (1.1)$$

где $\lambda(\alpha)$ — интенсивность точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$. Аналогичные утверждения справедливы для вертикальных отрезков v , при $|v| \rightarrow 0$.

3. Рассмотрим последовательность событий $\binom{h_1 \ h_2}{1 \ 1}$ или $\binom{v_1 \ v_2}{1 \ 1}$, предполагая, что отрезки h_i и v_i при $l \rightarrow 0$ стягиваются к некоторым фиксированным точкам $y_i \in g(\alpha)$, $i = 1, 2$. Для пары вертикальных отрезков v_1, v_2 имеем

$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \cup B$, где $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ происходит, когда одна и та же прямая из $\{g_i\}$ пересекает отрезки v_1 и v_2 , а B — дополнение события A в $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. B обозначает событие, когда отрезки v_1 и v_2 пересекаются двумя разными прямыми из $\{g_i\}$. Существуют следующие пределы :

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left[l^{-2} P \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = c_{y_1, y_2, hh}, \quad \lim_{l \rightarrow 0} [l^{-2} P(A)] = c_A, \quad \lim_{l \rightarrow 0} [l^{-2} P(B)] = c_{y_1, y_2, vv}. \quad (1.2)$$

Заметим, что существуют версии формул (1.2) для окон не обязательно одинаковых длин. В этом случае l^2 заменяется произведением длин окон. Окна v_1, v_2 могут находиться или в одной или в разных полуплоскостях относительно $g(\alpha)$.

4. Распределения типа Пальма $\Pi_{y,h}$, $\Pi_{y,v}$, $\Pi_{y_1, y_2, hh}$, $\Pi_{y_1, y_2, vv}$ и Π_g определены. Грубо говоря, каждое из этих распределений типа Пальма есть предел условного вероятностного распределения процесса $\{g_i\}$, при условиях $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B и A соответственно. Наши обозначения указывают на зависимость вероятностей Пальма от позиции предельных точек. Можем говорить о процессе прямых, который соответствует каждому из вышеупомянутых распределений Пальма.

Оба вероятностных распределения $\Pi_{y,h}$ и $\Pi_{y,v}$ определены на $\mathcal{M} \times (0, \pi)$, т.е. сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой, проходящей через точку $y \in g(\alpha)$. Рассмотрим события типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ \kappa_1 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} \times \Theta_1$, где $\Theta_1 \subset (0, \pi)$ обозначает событие $\Psi \in \Theta_1$. Через Ψ обозначим угол между $g(\alpha)$ и случайной прямой проходящей через точку y . На этих множествах величины $\Pi_{y,h}$ и $\Pi_{y,v}$, вообще говоря, не совпадают (см. Лемму 1).

$\Pi_{y_1, y_2, vv}$ и $\Pi_{y_1, y_2, hh}$ сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через точки $y_1, y_2 \in g(\alpha)$. Параметризируем последние две прямые углами Ψ_1 и Ψ_2 . Таким образом, $\Pi_{y_1, y_2, hh}$ и $\Pi_{y_1, y_2, vv}$ суть вероятностные меры на пространстве $\mathcal{M} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. В частности, $\Pi_{y_1, y_2, hh}$ и $\Pi_{y_1, y_2, vv}$ определены (и имеют разные значения, см. Лемма 2) на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ \kappa_1 & \dots & \kappa_n \end{pmatrix} \times \Theta_1 \times \Theta_2$, $\Theta_1, \Theta_2 \subset (0, \pi)$.

В [4] существование распределения Пальма Π_g доказывается только для $\mathbb{M}_2$ -инвариантных процессов прямых. Можно дать нестрогое определение распределения Π_g , как условное вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$, при условии, что одна прямая из $\{g_i\}$ совпадает с неслучайной прямой g . Одно из точных определений распределения Пальма Π_g для $\{g_i\} \in \text{Ti2}$ состоит в следующем :

$$\Pi_g \left(\frac{\gamma}{k} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} [P(A)]^{-1} P \left(\left(\frac{\gamma}{k} \right) \cap A \right) = c_A^{-1} \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} P \left(\left(\frac{\gamma}{k} \right) \cap A \right), \quad (1.3)$$

где $g = g(\alpha)$ — горизонтальная прямая.

Будем писать E_Z для математического ожидания относительно вероятностной меры Π_Z .

Лемма 1. (см. [12]). Пусть $F(m, \Psi_1)$ — ограниченная функция, определенная на $M \times (0, \pi)$. Если $\{g_i\} \in \text{Ti2}$, то для каждого направления α и точки $y \in g(\alpha)$ имеем

$$\lambda(\alpha) E_{y,h} F(m, \Psi_1) \cdot |\cot \Psi_1| = \lambda(\alpha + \pi/2) E_{y,v} F(\Psi_1, m).$$

Лемма 2 (см. [12]). Пусть $F(m, \Psi_1, \Psi_2)$ — ограниченная функция, определенная на $M \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. Если $\{g_i\} \in \text{Ti2}$, то для каждого направления α и точек $y_1, y_2 \in g(\alpha)$

$$c_{y_1, y_2, h, h} E_{y_1, y_2, h, h} F(m, \Psi_1, \Psi_2) |\cot \Psi_1 \cot \Psi_2| = c_{y_1, y_2, v, v} E_{y_1, y_2, v, v} F(m, \Psi_1, \Psi_2).$$

§2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ПАЛЬМА

Если случайный процесс прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2 , то соответствующий процесс пересечений $\{x_i\}_\alpha$ на тестовой прямой $g(\alpha)$ инвариантен относительно сдвигов вдоль $g(\alpha)$ и имеет конечную интенсивность $\lambda(\alpha)$. Для отрезка $\gamma \subset g(\alpha)$ длины t имеем классическую формулу Пальма (см. [4])

$$\frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t} = \lambda(\alpha) \left[\Pi_{y,h} \left(\frac{\gamma}{k-1} \right) - \Pi_{y,h} \left(\frac{\gamma}{k} \right) \right], \quad \text{где } p_k(t, \alpha) = P \left(\frac{\gamma}{k} \right). \quad (2.1)$$

Эта формула справедлива для обоих концов y отрезка γ .

Здесь и ниже $\Pi_{y,h} \left(\frac{\gamma}{-1} \right) = 0$. Не оговаривая особо, в дальнейшем мы будем следовать аналогичной практике относительно отрицательных чисел пересечений.

Ниже нам понадобятся некоторые обобщения формулы Пальма для вероятностей $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ с несколькими интервалами γ_i , разделенными непустыми пробелами. Заметим, что вероятность $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ на самом деле есть функция от $2n$ переменных

$$p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) = p_{k_1, \dots, k_n}(t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_{n-1}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

где $t_1, \dots, t_n$ — длины отрезков γ_i , а u_i — длина пробела между γ_i и γ_{i+1} (см. Рис. 1).

Возьмем один из отрезков γ_i и в его правом конце дадим приращение на отрезок ε_i длины $|\varepsilon_i|$. Пробел между приращенным отрезком и γ_{i+1} становится $u_i - |\varepsilon_i|$. По формуле Тейлора

$$\lim_{|\varepsilon_i| \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + |\varepsilon_i|, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - |\varepsilon_i|, \dots, u_n, \alpha) - p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{|\varepsilon_i|} = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i}. \quad (2.2)$$

С другой стороны, из формулы полной вероятности, получаем

$$\begin{aligned} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i \cup \varepsilon_i}{k_i}\right)\right) &= \\ &= P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cap \left(\frac{\varepsilon_i}{0}\right)\right) + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i \quad \varepsilon_i}{k_i - 1 \quad 1}\right)\right) + o(|\varepsilon_i|), \\ P\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) &= P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cap \left(\frac{\varepsilon_i}{0}\right)\right) + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cap \left(\frac{\varepsilon_i}{1}\right)\right) + o(|\varepsilon_i|), \end{aligned}$$

где

$$\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_i = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_{i-1} & k_{i+1} & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти формулы в (2.2), получим

$$\lambda(\alpha) \Delta_i \Pi_{iR, h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i}, \quad (2.3)$$

где iR обозначает правый конец отрезка γ_i . Здесь и ниже

$$\Delta_i Y_{\bar{k}} = Y_{(k_1, \dots, k_{i-1}, \dots, k_n)} - Y_{(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)}. \quad (2.4)$$

Если дадим приращение отрезка γ_i слева, то получим следующую версию формулы (2.3):

$$\lambda(\alpha) \Delta_i \Pi_{iL, h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1}}, \quad (2.5)$$

где iL — левый конец отрезка γ_i .

Ниже нам понадобятся формулы для распределений Пальма второго порядка.

Возьмем два отрезка γ_i, γ_j и дадим приращения отрезками ε_i и ε_j слева и справа, соответственно. Длины отрезков ε_i и ε_j совпадают и равны l . Пробел между приращенными отрезками γ_i и γ_{i+1} будет $u_i - l$, а между γ_j и γ_{j-1} станет $u_{j-1} - l$. По формуле Тейлора предел выражения

$$\begin{aligned} & p_k(t_1, \dots, t_i + l, \dots, t_j + l, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - l, \dots, u_{j-1} - l, \dots, u_n, \alpha) - \\ & - p_k(t_1, \dots, t_i + l, \dots, t_j, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - l, \dots, u_{j-1}, \dots, u_n, \alpha) - \\ & - p_k(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j + l, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{j-1} - l, \dots, u_n, \alpha) + p_k(\bar{\gamma}, \alpha) \end{aligned} \quad (2.6)$$

умноженный на l^{-2} имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial l_i \partial l_j} - \frac{\partial^2 p_k}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_k}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_k}{\partial u_i \partial u_{j-1}}.$$

С другой стороны, можно разлагать вероятности в (2.6), применяя формулу полной вероятности. Используя обозначение $\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} = \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_i\right)_j$, получим

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \varepsilon_i & \gamma_j \cup \varepsilon_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \\ & = \sum_{0 \leq s_1 + s_2 \leq 2} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - s_1 & k_j - s_2 & s_1 & s_2 \end{pmatrix}\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \varepsilon_i & \gamma_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - 1 & k_j & 1 & s \end{pmatrix}\right) + \\ & + \sum_{s=0,1,2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \begin{pmatrix} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - 2 & k_j & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) + o(l^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j \cup \varepsilon_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i & k_j - 1 & s & 1 \end{pmatrix}\right) + \\ & + \sum_{s=0,1,2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \begin{pmatrix} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ s & 0 \end{pmatrix}\right) + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i & k_j - 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Наконец,

$$P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \sum_{s_1 + s_2 \leq 2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \begin{pmatrix} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}\right) + o(l^2).$$

Подставляя в (2.6), получим

$$c_{iR,jL,h,h} \Delta_{ij}^2 \Pi_{iR,jL,h,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}}, \quad (2.7)$$

где

$$\Delta_{ij}^2 Y_{\bar{k}} = Y_{\bar{k}_{ij}} - Y_{\bar{k}_i} - Y_{\bar{k}_j} + Y_{\bar{k}}, \quad \bar{k}_i = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_n), \quad (2.8)$$

$$\bar{k}_{ij} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j - 1, \dots, k_n).$$

В частности, для $j = i + 1$, в (2.7) имеем $\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}} = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i^2}$. Аналогично

$$c_{iL,jR,h,h} \Delta_{ij}^2 \Pi_{iL,jR,h,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1} \partial u_j}. \quad (2.9)$$

В случае $i = 1$ или $j = n$ должны подставить $\frac{\partial}{\partial u_0} \equiv 0$ и $\frac{\partial}{\partial u_n} \equiv 0$. В частности, для $i = 1$ и $j = n$ имеем

$$c_{1L,nR,h,h} \Delta_{1n}^2 \Pi_{1L,nR,h,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_1 \partial t_n}. \quad (2.10)$$

Ниже мы будем использовать формулы для распределений Пальма $\Pi_{y,h}^{(2)}$ второго порядка в смысле горизонтальных окон, определенные условием, что две прямые из реализации процесса $\{g_i\}$ содержат точку $y \in g(\alpha)$. Например, используя формулу Тейлора, получим

$$c_{iR,h}^{(2)} \Delta_{ii}^2 \Pi_{iR,h}^{(2)} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i^2}, \quad (2.11)$$

где $c_{iR,h}^{(2)}$ — постоянная, iR — правый конец отрезка γ_i , а Δ_{ii}^2 — обычная вторая разность по i . Аналогичная формула существует и для $\Pi_{iL,h}^{(2)}$.

§3. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для заданной системы непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$ рассмотрим треугольник, показанный на Рис. 1.

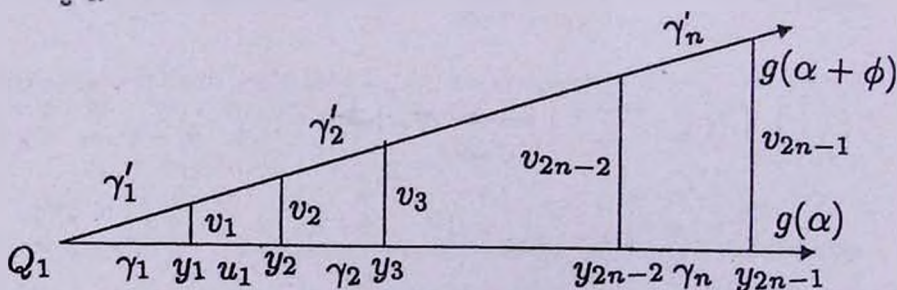


Рис. 1.

На прямой $g(\alpha + \phi)$ рассмотрим n отрезков $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$, чьи перпендикулярные проекции на $g(\alpha)$ суть начальные отрезки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Длины γ'_i пусть будут t'_i , а пробелы между γ'_i и γ'_{i+1} обозначим через u'_i . Так как при $\phi \rightarrow 0$, $t'_i - t_i = o(\phi)$ и $u'_i - u_i = o(\phi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$), имеем

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(\bar{t}', \bar{u}', \alpha + \phi) - p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\phi} = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha}. \quad (3.1)$$

Вычислим те же пределы, используя разложения

$$\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}}\right) \cap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix} \right), \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix} \right). \quad (3.3)$$

Лемма 3.

$$\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right) \cap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) - P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}}\right) \cap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right]. \quad (3.4)$$

Доказательство : следует из (1.1) и (1.2).

Очевидно, имеем разложение

$$\begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \cap R \cup \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \cap L, \quad (3.5)$$

где R — событие $\{\Psi \in (0, \pi/2)\}$, а $L = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$.

Замечание. Обозначения R и L имеют смысл возможной кинематической интерпретации углов как скоростей точек, движущихся вдоль прямой $g(\alpha)$. Таким образом, R соответствует движению *вправо*, а L — *влево*.

Используя (3.4), (3.5) и

$$P \left(\begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda(\alpha + \pi/2) y_i \phi + o(\phi), \quad i = 1, \dots, 2n-1, \quad (3.6)$$

где y_i — координата основания v_i на $g(\alpha)$ (см. Рис. 1), получим

$$\begin{aligned} [\lambda(\alpha + \pi/2)]^{-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n y_{iL} \left[\Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i}\right) \cap R \right) + \Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i}\right) \cap L \right) - \right. \\ &- \Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}_i}\right) \cap R \right) - \Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}_i}\right) \cap L \right) \Big] + \sum_{i=1}^n y_{iR} \left[\Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i}\right) \cap R \right) + \right. \\ &+ \Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}_i}\right) \cap L \right) - \Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}_i}\right) \cap R \right) - \Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}_i}\right) \cap L \right) \Big]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В (3.7) сумма распространяется на отрезки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$; как и выше iL — левый, а iR — правый концы отрезка γ_i . Наконец, $\bar{k}_i = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_n)$.

Следующий шаг состоит в вычислении (3.7) при Условии а) (см. Введение).

Заменяем вертикальные окна горизонтальными. Очевидно

$$\Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap L \right) - \Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap R \right) = E_{iL,v} \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) [I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \right),$$

где I — индикаторная функция соответствующего события. Применяя Лемму 1

для $F(m, \Psi) = I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) [I_R(\Psi) - I_L(\Psi)]$ и соотношение $[I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \cdot |\cot \Psi| = \cot \Psi$, получим (сравни с [12])

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \pi/2) \left[\Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap L \right) - \Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap R \right) \right] = \\ = -\lambda(\alpha) E_{iL,h} \left[I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot \cot \Psi \right]. \end{aligned}$$

При Условии а) оно равно

$$-\lambda(\alpha) \cdot E_{iL,h} \left[I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot \cot \Psi \right] = -\lambda(\alpha) \cdot \Pi_{iL,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot E_\alpha \cot \Psi.$$

Стационарность дает нам возможность использования упрощенной записи

$E_{iL,h} \cot \Psi = E_\alpha \cot \Psi$. Аналогично, при Условии а)

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \pi/2) \left[\Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap R \right) - \Pi_{iL,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap L \right) \right] = \\ = \lambda(\alpha) \cdot \Pi_{iL,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cdot E_\alpha \cot \Psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \pi/2) \left[\Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap R \right) - \Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap L \right) \right] = \\ = \lambda(\alpha) \cdot \Pi_{iR,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot E_\alpha \cot \Psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \pi/2) \left[\Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap L \right) - \Pi_{iR,v} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap R \right) \right] = \\ = -\lambda(\alpha) \cdot \Pi_{iR,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cdot E_\alpha \cot \Psi. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (3.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \lambda(\alpha) \sum_{i=2}^n \left\{ y_{iL} \left[\Pi_{iL,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) - \Pi_{iL,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \right] + \right. \\ \left. + y_{iR} \left[\Pi_{iR,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) - \Pi_{iR,h} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \right] \right\} E_\alpha \cot \Psi. \end{aligned}$$

Из (2.1), (2.3) и (2.5), получим

$$\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \left\{ \sum_{i=2}^n y_{iL} \left[\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1}} \right] - \sum_{i=1}^{n-1} y_{iR} \left[\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} \right] - y_{nR} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_n} \right\} E_{\alpha} \cot \Psi. \quad (3.8)$$

Для полноты приведем доказательство соотношения

$$E_{\alpha} \cot \Psi = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}, \quad (3.9)$$

содержащегося в [12]. Существует интегральное соотношение [4] между $\lambda(\alpha)$ и плотностью первой моментной меры $f(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= \int_0^{\pi} |\cos(\varphi - \alpha)| f(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} \cos(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \cos(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим

$$\lambda'(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi.$$

Используя $\Psi = \varphi - \alpha - \pi/2$, имеем

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \cot \Psi &= E_{\alpha} \cot(\varphi - \alpha + \pi/2) = -E_{\alpha} \tan(\varphi - \alpha) = \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^{\pi} \tan(\varphi - \alpha) |\cos(\varphi - \alpha)| f(\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^{\pi} \sin(\varphi - \alpha) \operatorname{sign}[\cos(\varphi - \alpha)] f(\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \left[\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi \right] = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}. \end{aligned}$$

Так как $y_{iR} - y_{iL} = t_i$ и $y_{(i+1)R} - y_{iR} = u_i$, то (3.8) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = 0. \quad (3.10)$$

Первые интегралы этого однородного в частных производных дифференциального уравнения первого порядка (см. [14]) суть

$$\lambda(\alpha) t_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda(\alpha) u_j = b_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, мы пришли к первому заключению:

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u}), \quad (3.11)$$

где $q_{\bar{k}}$ суть некоторые функции от $2n-1$ переменных. Мы вернемся к этим функциям в §7.

§4. КОМБИНАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для дальнейшего анализа нам понадобится следующая основная теорема комбинаторной интегральной геометрии (см. [1], [3], [15] и [16]).

Предположим, что на плоскости задано конечное множество точек $\{P_i\}$. Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j , а через $|\rho_{ij}|$ его длину. Положим $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbf{G} : g \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $B\tau\{P_i\}$ — минимальное (конечное) кольцо (кольцо Бюффона) подмножеств $\mathbf{G}$, содержащее все множества $[\rho_{ij}]$. Две точки P_i и P_j называются соседними, если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре P_i, P_j соседей соответствует прямая

$$g_{ij} = \text{прямая проходит через } P_i \text{ и } P_j$$

и четыре локально непересекающихся подмножества $\mathbf{G}$:

$$1 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$2 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$3 = \{g \in \mathbf{G} : \text{точка } P_i \text{ лежит в правой, а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

$$4 = \{g \in \mathbf{G} : \text{точка } P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

Так как прямые $g \in \mathbf{G}$ ненаправленные, то говоря о левой или правой полуплоскостях, ограниченных прямой $g \in \mathbf{G}$, мы подразумеваем следующее : каждой прямой g_{ij} мы приписываем направление, скажем от P_i к P_j , если $i < j$. По непрерывности, оно однозначно определяет направление прямых g из окрестности прямой g_{ij} .

Как обычно $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0, в противном случае. Через μ обозначим $\mathbb{M}_2$ -инвариантную меру в $\mathbf{G}$.

Теорема. (Р. В. Амбарцумян [3], [16]). Значение меры $\mu(C)$ для каждого подмножества $C \in B\tau\{P_i\}$ представимо в виде линейной комбинации расстояний ρ_{ij} между соседними точками P_i и P_j , с целочисленными коэффициентами :

$$\mu(C) = \sum_{i < j} c_{ij}(C) |\rho_{ij}|, \quad (4.1)$$

где сумма $\sum_{i < j}$ берется по всем парам соседних точек из множества $\{P_i\}$. Целые числа c_{ij} вычисляются по "четырёх индикаторной" формуле :

$$c_{ij}(C) = I_C(\bar{i}, \bar{j}) + I_C(\bar{i}, \bar{j}^+) - I_C(\bar{i}, \bar{j}) - I_C(\bar{i}^+, \bar{j}). \quad (4.2)$$

В (4.2)

$$I_C(\bar{i}^+, \bar{j}^+) = I_{Cn1}(g), I_C(\bar{i}, \bar{j}) = I_{Cn2}(g), I_C(\bar{i}^+, \bar{j}) = I_{Cn3}(g), I_C(\bar{i}, \bar{j}^+) = I_{Cn4}(g).$$

Применим разложение (4.1), (4.2) в следующей постановке. Пусть задана система непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$. Рассмотрим прямоугольник R , основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, чье основание есть γ_i (см. Рис. 2), вертикальные стороны прямоугольников $D_1, \dots, D_n$ обозначим через $v_1, \dots, v_{2n}$, $|v_1| = \dots = |v_{2n}| = l$.

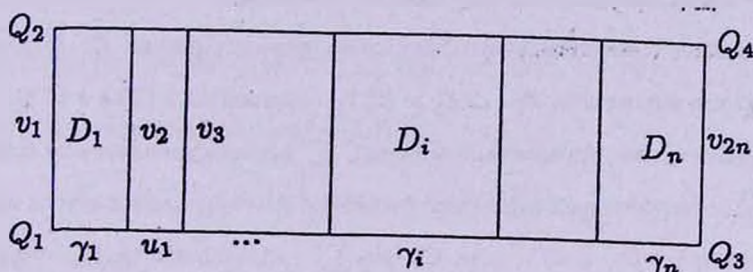


Рис. 2

Через τ_{ir} , $r = 1, 2, \dots$ обозначим случайные хорды прямоугольника D_i , образованные прямыми из $\{g_i\}$. Пусть $A = \bigcap_{i=1}^{2n} [v_i] = [v_1] \cap [v_{2n}]$, где $[v] = \{g \in \mathbb{G} : g \cap v \neq \emptyset\}$. Пусть $\chi_j(g) = g \cap D_j$, $j = 1, \dots, n$. Определим

$$B_{k_1, \dots, k_m} = B_{\bar{k}} = \{g \in \mathbb{G} : \text{точно } k_j \text{ хорды } \tau_{ir} \text{ пересекают } \chi_j(g), j = 1, \dots, n\}$$

и рассмотрим множества

$$\{P_j\} = \text{множество концов хорд } \tau_{ir} \text{ и } \{Q_m\} = \text{вершины прямоугольника } R.$$

Нетрудно доказать, что

$$A \cap B_{\bar{k}} \in Br\{\{P_j\} \cup \{Q_m\}\}.$$

Следовательно, разложение (4.1) можно записать для инвариантной меры множества $C = A \cap B_{\bar{k}}$. Для каждой реализации $m = \{g_i\}$, для которой $\{P_i\} \cap \{Q_m\} = \emptyset$, коллинеарными триадами в $\{P_i\} \cup \{Q_m\}$ могут быть или $\{P_i, P_j, P_k\} \subset g_s \in m$, или $\{Q_m, Q_j, P_k\}$. Результат имеет вид :

$$\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \sum_{i=1}^4 \xi_i(m), \quad (4.3)$$

где

$$\xi_1(m) = \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_4) + \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_4), \quad (4.4)$$

$$\xi_2(m) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{r \in A} |\tau_{ir}| \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(\tau_{ir}), \quad (4.5)$$

$$\xi_3(m) = \sum^* |P_i, P_j| \cdot [I_d(P_i, P_j) - I_s(P_i, P_j)] I_A(P_i, P_j) \Delta_{rq}^2 I_{\bar{k}}(P_i, P_j), \quad (4.6)$$

$$\xi_4(m) = \sum_{Q_m} \sum_{P_j} |Q_m, P_j| \cdot I_A(Q_m, P_j) [I_d(Q_m, P_j) - I_s(Q_m, P_j)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_m, P_j). \quad (4.7)$$

Выше мы использовали следующие обозначения :

T — длина горизонтального основания прямоугольника R ; $I_{\bar{k}}(g) = I_{B_{\bar{k}}}(g)$ — индикатор множества $B_{\bar{k}}$; $\Delta_i Y_{\bar{k}}$ и $\Delta_{ij}^2 Y_{\bar{k}}$ определены в (2.4) и (2.8).

В двойной сумме, определяющей $\xi_2(m)$, $\sum_{r \in A}$ распространяется по всем хордам τ_{ir} , продолжения которых пересекают отрезки v_1 и v_{2n} , вторая сумма распространяется по всем D_i , $i = 1, \dots, n$. Сумма $\sum^*$, определяющая ξ_3 , распространяется по 2-х элементным подмножествам $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}$, для которых P_i и P_j принадлежат разным прямым из $\{g_i\}$ и лежат на разных вертикальных окнах. Для определения индикаторов I_d и I_s в (4.6) рассмотрим хорды τ_{ri} и τ_{qm} , для которых точки P_i и P_j являются концами. По определению, $I_d(P_i, P_j) = 1$, если хорды τ_{ri} и τ_{qm} лежат в разных полуплоскостях, ограниченных прямой, проходящей через точки P_i и P_j ; $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$. Символ Δ_{rq}^2 относится к прямоугольникам D_r и D_q , на вертикальных сторонах которых лежат точки P_i и P_j .

В (4.7) индикаторы I_d и I_s имеют аналогичный смысл, отрезок, концом которого является точка Q_m , суть v_1 или v_{2n} . Символ Δ_i относится к прямоугольнику D_i , на вертикальной стороне которого лежит точка P_j . Пары точек или отрезков в аргументе индикаторов $I_{\bar{k}}$, I_A , I_d или I_s обозначают соответствующие прямые из G .

§5. АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для $P \in T_2$, комбинаторное разложение (4.3) выполняется с вероятностью $P = 1$. Таким образом, мы можем усреднить (4.3) относительно распределения P . Для математического ожидания относительно P будем использовать обозначение E_P . Величины $E_P \xi_i$ ($i = 1, \dots, 4$) зависят от параметра l и при $l \rightarrow 0$ их главные члены имеют порядок l^2 . Аналогичное утверждение справедливо для $\mu(A \cap B_k)$ из (4.3). В этом параграфе мы выводим дифференциальное тождество для $p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$, приравнявая члены, пропорциональные l^2 в правой и левой частях усредненного уравнения (4.3).

Анализ $E_P \mu(A \cap B_k)$. По теореме Фубини имеем

$$E_P \mu(A \cap B_k) = \int_A E_P I_k(g) dg = \int_A p_k(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g), \tilde{\alpha}) dg. \quad (5.1)$$

Здесь $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(g)$ — направление прямой g (так что при $l \rightarrow 0$ множество значений $\tilde{\alpha}$ стягивается к точке α) и

$$p_k(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g), \tilde{\alpha}) = E_P I_k(g) = P(g \in B_k) = p_k(\chi(g), \bar{u}(g), \tilde{\alpha}). \quad (5.2)$$

Используя (1.2), выделим главный член в (5.1) :

$$E_P \mu(A \cap B_k) = p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \cdot \frac{1}{T} \cdot l^2 + o(l^2). \quad (5.3)$$

Анализ $E_P \xi_1(m)$. Имеем

$$E_P \xi_1(m) = \sqrt{T^2 + l^2} \left[p_k\left(\frac{\bar{t}}{\cos \phi}, \frac{\bar{u}}{\cos \phi}, \alpha + \phi\right) + p_k\left(\frac{\bar{t}}{\cos \phi}, \frac{\bar{u}}{\cos \phi}, \alpha - \phi\right) \right] - 2T p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

где $\cos \phi = (1 + l^2/T^2)^{-1/2}$, откуда следует

$$E_P \xi_1(m) = p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \cdot \frac{l^2}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} \frac{t_i}{T} \cdot l^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} \frac{u_i}{T} \cdot l^2 + \frac{\partial^2 p_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{l^2}{T} + o(l^2). \quad (5.4)$$

Анализ $E_P \xi_2(m)$. Значение меры m_1 на множестве $[v_1] \cap [v_{2n}]$ равно $f(\alpha) \frac{l^2}{T} + o(l^2)$, следовательно

$$E_P \xi_2(m) = \frac{2f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2), \quad (5.5)$$

где $\pi_k(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \Pi_A\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right)$.

Анализ $\text{Er}\xi_3(\mathbf{m})$. Нам понадобится следующая простая лемма интегральной геометрии.

Лемма 4.

$$\int_{v_q} \int_{v_r} |P_i, P_j| I_A(g) dx_q dx_r = \frac{(y_q - y_r)^2}{T} l^2 + o(l^2),$$

где x_q, x_r — одномерные координаты точек P_i и P_j на v_q и v_r , соответственно, g — прямая, содержащая x_q и x_r .

Для $P_1 \in v_q$ и $P_2 \in v_r$, имеем

$$I_d(P_1, P_2) - I_s(P_1, P_2) = S(q, r) [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)],$$

где $S(q, r) = +1$, если y_q — левый конец γ_r , а y_r — правый конец γ_r , или наоборот, и $S(q, r) = -1$, в противном случае; $R = (0, \pi/2)$, $L = (\pi/2, \pi)$. По лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} \text{Er}\xi_3(\mathbf{m}) &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{q < r} (y_q - y_r)^2 c_{q,r,vv} S(q, r) \left[\Delta_{ij}^2 \Pi_{q,r,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \times (R \times R \cup L \times L) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \Delta_{rq}^2 \Pi_{i,j,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \times (L \times R \cup R \times L) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

где суммирование распространяется по упорядоченным парам концев $\{y_q\}$ интервалов из системы $\bar{\gamma}$. Здесь и ниже мы используем краткие обозначения

$$c_{y_q, y_r, vv} = c_{q,r,vv}, \quad \Pi_{y_q, y_r, vv} = \Pi_{q,r,vv}.$$

Анализ $\text{Er}\xi_4(\mathbf{m})$. Пусть

$$\xi_4(\mathbf{m}) = \sum_{q=1}^{2n} \eta_q(\mathbf{m}),$$

где

$$\eta_q(\mathbf{m}) = \sum_{m=1}^4 \sum_{P_j \in v_q} K(Q_m, P_j),$$

$$K(Q, P) = |Q, P| \cdot I_A(Q, P) [I_d(Q, P) - I_s(Q, P)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q, P),$$

а Δ_i соответствует отрезку γ_i с концом y_q . Рассмотрим события:

$\left(\begin{smallmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ k & 0 \end{smallmatrix} \right)$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все остальные вертикальные окна (т.е. окна из $\bar{v}_q$) не имеют пересечений;

$\begin{pmatrix} v_g \\ 1 \end{pmatrix}_A$ — вертикальное окно v_g пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\overline{v_g}$, и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон;

$\bigcup_{b \neq g} \begin{pmatrix} v_g & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — вертикальное окно v_g пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v_b \neq v_g$, которое пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Лемма 5. Пусть $\overline{Z}$ — событие, дополнительное к

$$Z = \bigcup_{g=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_g & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_g & \overline{v_g} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_g \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup \bigcup_{b \neq g} \begin{pmatrix} v_g & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Для $P \in \text{Ti2}$, $P(\overline{Z}) = o(l^2)$.

Доказательство следует из (1.1), (1.2).

С точностью до случайного слагаемого, математическое ожидание которого есть $o(l^2)$, имеем следующее представление (см. Лемму 5) :

$$\eta_g(m) = \eta_{g1}(m) + \sum_{m=1}^4 \eta_{g2}^{(m)}(m) + \eta_{gA}(m) + \sum_{m=1}^4 \sum_{b \neq g} \eta_{gb}^{(m)}(m), \quad (5.7)$$

где использованы индикаторные функции I следующих событий :

$$\eta_{g1}(m) = \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_g & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right); \quad \eta_{g2}^{(m)}(m) = \sum_{P_1, P_2 \in v_g} K(Q_m, P_j) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_g & \overline{v_g} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$\eta_{gA}(m) = \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_g \\ 1 \end{pmatrix}_A \right); \quad \eta_{gb}^{(m)}(m) = K(Q_m, P_1) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_g & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Анализ $E_P \eta_{g1}(m)$. Разделим v_g на три подинтервала $v_{g,1}$, $v_{g,2}$ и $v_{g,3}$ (см. Рис 3.). Если событие $\begin{pmatrix} v_{g,3} & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ произошло, то $I_{\overline{k}}(Q_3, P_j) = I_{\overline{k}}(Q_4, P_j)$, и выражения $[I_d(Q_3, P_j) - I_s(Q_3, P_j)]$ и $[I_d(Q_4, P_j) - I_s(Q_4, P_j)]$ имеют разные знаки. Так как $|Q_3, P_j| - |Q_4, P_j| = O(l^2)$ и $P \left(\begin{pmatrix} v_{g,3} & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = O(l)$, получаем

$$E_P \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) I \left(\begin{pmatrix} v_{g,3} & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = o(l^2). \quad (5.8)$$

Пусть g_1 — прямая из $m \in \begin{pmatrix} v_{g,1} & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, пересекающая $v_{g,1}$, $P_1 = v_{g,1} \cap g_1$.

Аналогично, пусть g_2 — прямая из $m \in \begin{pmatrix} v_{g,2} & \overline{v_g} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, пересекающая $v_{g,2}$, $P_2 =$

$v_{q,2} \cap g_2$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_P \left[|Q_1, P_1| I \left(\begin{smallmatrix} v_{q,1} & \overline{v}_q \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) [I_d(Q_1, P_1) - I_s(Q_1, P_1)] \cdot \Delta_i I_{\overline{k}}(Q_1, P_1) + \right. \\
 & \left. + |Q_2, P_2| I \left(\begin{smallmatrix} v_{q,2} & \overline{v}_q \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) [I_d(Q_2, P_2) - I_s(Q_2, P_2)] \cdot \Delta_i I_{\overline{k}}(Q_2, P_2) \right] = \\
 & = \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)} |Q_1, x| [I_d(Q_1, x) - I_s(Q_1, x)] \times \\
 & \times \mathbb{E}_{x,\psi} \left[I \left(\begin{smallmatrix} \overline{v}_q \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \Delta_i I_{\overline{k}}(Q_1, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi + \\
 & + \int_{v_{q,2}} dx \int_{\Psi(x)} |Q_2, x| [I_d(Q_2, x) - I_s(Q_2, x)] \times \\
 & \times \mathbb{E}_{x,\psi} \left[I \left(\begin{smallmatrix} \overline{v}_q \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \Delta_i I_{\overline{k}}(Q_2, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $\mathbb{E}_{x,\psi}$ — математическое ожидание относительно распределения Пальма Π_g для $g = (x, \psi)$. Множество направлений $\Psi(x)$ зависит от x и соответствует условию $\{g_{x,\psi} \text{ не пересекает окна } \overline{v}_q\}$.

Заменяя $|Q_1, x|$ и $|Q_2, x|$ общим предельным значением y_q и используя трансляционную инвариантность, перепишем (5.9) в виде (обозначения Q'_2 и $v'_{q,1}$ показаны на Рис. 3)

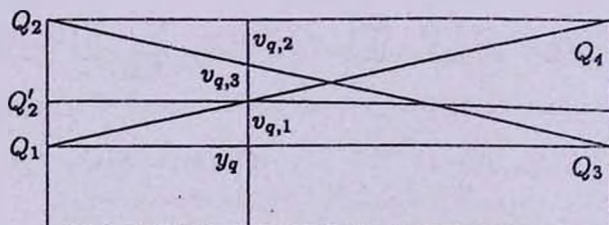


Рис. 3. Прямоугольник R' получается из R с помощью сдвига вниз.

В R' верхняя горизонтальная сторона содержит верхний конец $v_{q,1}$.

$$\begin{aligned}
 & y_q \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)} [I_d(Q_1, x) - I_s(Q_1, x)] \mathbb{E}_{x,\psi} \left[I \left(\begin{smallmatrix} \overline{v}_q \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \Delta_i I_{\overline{k}}(Q_1, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi + \\
 & + y_q \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi'(x)} [I_d(Q'_2, x) - I_s(Q'_2, x)] \times \\
 & \times \mathbb{E}_{x,\psi} \left[I \left(\begin{smallmatrix} \overline{v}'_q \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \Delta_i I_{\overline{k}}(Q'_2, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi + o(l^2),
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $\Psi'(x) = \Psi(x')$, и $x' = x + |Q'_2 Q_2|$. Интервалы v'_g суть образы v_g при том же сдвиге.

На множестве $\Psi(x) \cap \Psi'(x)$ имеем $[I_d(Q_1, x) - I_s(Q_1, x)] = -[I_d(Q'_2, x) - I_s(Q'_2, x)]$.

Таким образом, (5.10) имеет вид (знак последнего слагаемого неважен)

$$\begin{aligned} & y_g \int_{v_{g,1}} dx \int_{\Psi(x) \cap \Psi'(x)^c} [I_d(Q_1, x) - I_s(Q_1, x)] \times \\ & \times E_{x,\psi} \left[I \left(\frac{\overline{v_g}}{0} \right) \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_1, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi + \\ & + y_g \int_{v_{g,1}} dx \int_{\Psi'(x) \cap \Psi(x)^c} [I_d(Q'_2, x) - I_s(Q'_2, x)] \times \\ & \times E_{x,\psi} \left[I \left(\frac{\overline{v'_g}}{0} \right) \Delta_i I_{\bar{k}}(Q'_2, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi \pm \\ & \pm y_g \int_{v_{g,1}} dx \int_{\Psi(x) \cap \Psi'(x)} E_{x,\psi} \left[I \left(\frac{\overline{v_g}}{0} \right) \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_1, x) - \right. \\ & \left. - I \left(\frac{\overline{v'_g}}{0} \right) \Delta_i I_{\bar{k}}(Q'_2, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi + o(l^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Рассмотрим последнее слагаемое. На событии $\left(\frac{\overline{v'_g}}{0} \right) \cap \left(\frac{\overline{v_g}}{0} \right) = \left(\frac{\overline{v'_g \cup v_g}}{0} \right)$ имеем $I_{\bar{k}}(Q_1, x) = I_{\bar{k}}(Q'_2, x)$, и подынтегральное выражение равно нулю. С другой стороны

$$\begin{aligned} & \int_{v_{g,1}} dx \int_{(0,\pi)} E_{x,\psi} \left[I \left(\frac{\overline{v_g}}{0} \right) I \left(\frac{\overline{v'_g}}{0} \right)^c \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_1, x) \right] f(\psi) \sin \psi d\psi = \\ & = c_1 l^2 \sum_r \Delta_i \Pi_{g,r,vv} \left(\frac{\overline{\gamma}}{\bar{k}} \right) + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где c_1 не зависит от l .

По замечанию в §1 получаем тот же результат для $\left(\frac{\overline{v_g}}{0} \right) \cap \left(\frac{\overline{v'_g}}{0} \right)^c \Delta_i I_{\bar{k}}(Q'_2, x)$. Таким образом, последняя сумма в (5.11) есть $o(l^2)$.

Вернемся к первым двум интегралам в (5.11). Так как каждое множество интегрирования стягивается к точке $(0, \alpha)$ на x, ψ -плоскости, которая соответствует горизонтальной прямой $g(\alpha)$, для каждого интеграла главный член пропорционален $l^2 \Delta_i \Pi_{g(\alpha)} \left(\frac{\overline{\gamma}}{\bar{k}} \right) = l^2 \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$. Важно отметить, что коэффициент пропорциональности зависит только от расположения отрезков на Рис. 2 и не зависит от выбора вероятностного распределения $P \in \Pi_2$.

Приходим к аналогичному заключению для

$$\begin{aligned} E_P \left[|Q_3, P_1| I \left(\begin{smallmatrix} v_{q,1} & \bar{v}_q \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) [I_d(Q_3, x) - I_s(Q_3, x)] \cdot \Delta_i I_k(Q_3, P_1) + \right. \\ \left. + |Q_4, P_2| I \left(\begin{smallmatrix} v_{q,2} & \bar{v}_q \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) [I_d(Q_4, x) - I_s(Q_4, x)] \cdot \Delta_i I_k(Q_4, P_2) \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

как и для $E_P \eta_{q',1}(m)$, предполагая, что $y_{q'}$ — конец отрезка γ_i , отличный от y_q .

Приходим к следующей лемме.

Лемма 6.

$$E_P \sum_{q=1}^{2n} \eta_{q1}(m) = 2 \frac{f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n C'_i \Delta_i \pi_k(\bar{l}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2), \quad (5.14)$$

где C'_i — константы, зависящие только от взаимного расположения точек $y_1, \dots, y_{2n}$.

Анализ $E_P \eta_{qA}(m)$. Очевидно, что $E_P \left(\begin{smallmatrix} v_q \\ 1 \end{smallmatrix} \right)_A = O(l^2)$ (см. §1) и предельное положение прямой из $\{g_i\}$, пересекающей v_q есть тестовая прямая $g(\alpha)$. Следовательно, $E_P \sum_{q=1}^{2n} \eta_{qA}(m)$ имеет вид (5.14) с некоторыми новыми коэффициентами C''_i . Этот результат вместе с (5.14) приводит к следующей лемме.

Лемма 7.

$$E_P \sum_{q=1}^{2n} (\eta_{q1}(m) + \eta_{qA}(m)) = 2 \frac{f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i \pi_k(\bar{l}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2), \quad (5.15)$$

где C_i — константы, зависящие только от взаимного расположения точек $y_1, \dots, y_{2n}$.

Точные значения постоянных C_i будут вычислены в конце этого параграфа.

Анализ $E_P \eta_{q0}^{(m)}(m)$. Начнем с Q_1 (т.е. $m = 1$). Случайные точки $x \in v_q$ и $z \in v_b$, в которых происходят пересечения, асимптотически независимы и каждая из них равномерно распределена на v_q или v_b . Для выполнения $I_A = 1$ точка x должна принадлежать интервалу $I \subset v_q$ (см. Рис. 4). Пусть для соответствующих углов пересечения имеем $\Psi_q \in R$ и $\Psi_b \in R$. Тогда область изменения $I \times v_b$ разбивается на два подмножества. На одном из двух условное математическое ожидание I_k равно $\Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\begin{smallmatrix} \gamma_i & \gamma_j \\ k_i - 1 & k_j - 1 \end{smallmatrix} \right) \times R \times R \right)$, а на другом оно равно

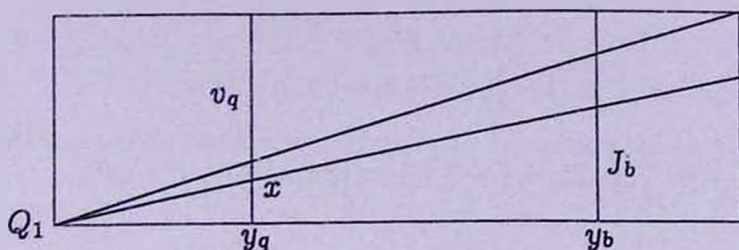


Рис. 4.

$\Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j - 1} \right) \times R \times R \right)$. Вероятности упомянутых множеств пусть будут $p^{(1)}(R, R)$ и $1 - p^{(1)}(R, R)$. Ситуация для случаев $\Psi_1 \in L$ и $\Psi_2 \in L$, $\Psi_1 \in L$ и $\Psi_2 \in R$ и наконец $\Psi_1 \in R$ и $\Psi_2 \in L$ аналогична, поэтому имеем

$$\begin{aligned} E_P \eta_{qb}^{(m)}(m) = & \\ = -S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_i & \left[p^{(1)}(R, R) \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j} \right) \times R \times R \right) + \right. \\ + (1 - p^{(1)}(R, R)) & \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j} \right) \times R \times R \right) - \\ - p^{(1)}(L, L) \Pi_{q,b,vv} & \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j - 1} \right) \times L \times L \right) - \\ - (1 - p^{(1)}(L, L)) & \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j - 1} \right) \times L \times L \right) - \\ - p^{(1)}(L, R) \Pi_{q,b,vv} & \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j} \right) \times L \times R \right) - \\ - (1 - p^{(1)}(L, R)) & \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j} \right) \times L \times R \right) + \\ + p^{(1)}(R, L) \Pi_{q,b,vv} & \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j - 1} \right) \times R \times L \right) + \\ + (1 - p^{(1)}(R, L)) & \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \frac{\gamma_j}{k_j - 1} \right) \times R \times L \right) \Big]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$p^{(1)}(R, R) = 1 - p^{(1)}(L, L) = p^{(1)}(L, R) = 1 - p^{(1)}(R, L) = \frac{1}{|I|} \int_I \int_I dx dz = \frac{y_b y_q^2 l^2}{2T^2}$$

(отрезки $I \subset v_q$, $J = J_b(x) \subset v_b$ показаны на Рис. 4). После суммирования находим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \left[\eta_{qb}^{(1)}(m) \right] = & -S(q, b) \left\{ \frac{y_q^2}{T} \left[1 - \frac{y_b}{2T} \right] [\mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j - 1) - \right. \\ & \left. - \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j - 1)] - \frac{y_b y_q^2}{2T^2} [\mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j) - \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j)] \right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q, b, r, s) = & c_{q,b,vv} \left[\Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{r} \quad \gamma_j}{s} \right) \times (R \times R) \cup (L \times L) \right) - \right. \\ & \left. - \Pi_{q,b,vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_{ij} \cap \left(\frac{\gamma_i}{r} \quad \gamma_j}{s} \right) \times (R \times L) \cup (L \times R) \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, для вершин Q_2, Q_3, Q_4 имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \left[\eta_{qb}^{(2)}(m) I \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = & -S(q, b) \left\{ \frac{y_q^2}{T} \left[1 - \frac{y_b}{2T} \right] [\mathcal{E}(q, b, k_i, k_j) - \right. \\ & \left. - \mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j)] - \frac{y_b y_q^2}{2T^2} [\mathcal{E}(q, b, k_i, k_j - 1) - \mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j - 1)] \right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \left[\eta_{qb}^{(3)}(m) I \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = & -S(q, b) \left\{ \frac{(T - y_q)^2}{T} \left[1 - \frac{T - y_b}{2T} \right] [\mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j - 1) - \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j - 1)] - \right. \\ & \left. - \frac{(T - y_b)(T - y_q)^2}{2T^2} [\mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j) - \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j)] \right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \left[\eta_{qb}^{(4)}(m) I \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = & -S(q, b) \left\{ \frac{(T - y_q)^2}{T} \left[1 - \frac{T - y_b}{2T} \right] [\mathcal{E}(q, b, k_i, k_j) - \mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j)] - \right. \\ & \left. - \frac{(T - y_b)(T - y_q)^2}{2T^2} [\mathcal{E}(q, b, k_i, k_j - 1) - \mathcal{E}(q, b, k_i - 1, k_j - 1)] \right\} l^2 + o(l^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Используя (5.16) — (5.19), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P \sum_{m=1}^4 \eta_{qb}^{(m)}(m) = & -\frac{S(q, b) l^2}{T} \Delta_{ij}^2 \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j) \left\{ y_q^2 - \frac{y_b y_q^2}{T} + \right. \\ & \left. + (T - y_q)^2 - \frac{(T - y_q)^2 (T - y_b)}{T} \right\} + o(l^2) = \\ = & -\frac{S(q, b) l^2}{T} \Delta_{ij}^2 \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j) \{ y_q^2 (T - y_b) + (T - y_q)^2 y_b \} + o(l^2) = \\ = & -\frac{S(q, b) l^2}{T} \Delta_{ij}^2 \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j) \{ (y_q - y_b)^2 + T y_b - y_b^2 \} + o(l^2). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Вместе с дуальным результатом

$$E_P \sum_{m=1}^4 \eta_{bq}(m) = -\frac{S(q, b) l^2}{T} \Delta_{ij}^2 \mathcal{E}(q, b, k_i, k_j) \{(y_q - y_b)^2 + T y_q - y_q^2\} + o(l^2) \quad (5.21)$$

приходим к следующей лемме. Используем следующее обозначение

$$\Omega(q, b) = \Pi_{q, b, vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \times (R \times R \cup L \times L) \right) - \Pi_{q, b, vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \times (L \times R \cup R \times L) \right).$$

Лемма 8.

$$\begin{aligned} E_P \sum_{q=1}^{2n} \sum_{m=1}^4 \sum_{b \neq q} \eta_{qb}^{(m)}(m) &= \\ &= -2E_P \xi_3(m) - \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q, b, vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) l^2 + o(l^2). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Анализ $E_P \eta_{q2}(m)$. Начнем с Q_1 (т.е. $m = 1$). Случайные точки $x_1, x_2 \in v_q$, в которых происходят пересечения, асимптотически независимы и каждая из них равномерно распределена на v_q . Для выполнения $I_A = 1$, x_1 должна принадлежать интервалу $I \subset v_q$ (см. Рис. 4). Пусть для соответствующих углов пересечения имеем $\Psi_1 \in R$ и $\Psi_2 \in R$. Тогда область изменения $I \times v_q$ разбивается на два подмножества. На одном из двух условное математическое ожидание индикатора $I_{\bar{k}}$ равно $\Pi_{q, q, vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i - 1} \right) \times R \times R \right)$, а на другом оно равно $\Pi_{q, q, vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \right) \times R \times R \right)$. Вероятности вышеупомянутых множеств пусть будут $p^{(1)}(R, R)$ и $1 - p^{(1)}(R, R)$. Ситуация для случаев $\Psi_1 \in L$ и $\Psi_2 \in L$, $\Psi_1 \in L$ и $\Psi_2 \in R$ и наконец $\Psi_1 \in R$ и $\Psi_2 \in L$ аналогична. Рассуждая как и в предыдущем случае, получим

$$\begin{aligned} E_P \left[\eta_{q2}^{(1)}(m) \right] &= \\ &= y_q \left\{ \frac{-y_q^2 l^2}{2T^2} \Delta_{ii}^2 \mathcal{E}(q, k_i, k_j) + \frac{y_q l^2}{T} [\mathcal{E}(q, k_i - 2) - \mathcal{E}(q, k_i - 1)] \right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q, k_i) &= c_{q, q, vv} \left[\Pi_{q, q, vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \right) \times (R \times R) \cup (L \times L) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \Pi_{q, q, vv} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i} \right) \times (R \times L) \cup (L \times R) \right) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, для вершин Q_2, Q_3, Q_4 получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P [\eta_{q2}^{(2)}(\mathbf{m})] = \\ = y_q \left\{ \frac{-y_q^2 l^2}{2T^2} \Delta_{ii}^2 \mathcal{E}(q, k_i, k_j) + \frac{y_q l^2}{T} [\mathcal{E}(q, k_i) - \mathcal{E}(q, k_i - 1)] \right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P [\eta_{q2}^{(3)}(\mathbf{m})] = (T - y_q) \left\{ \frac{-(T - y_q)^2 l^2}{2T^2} \Delta_{ii}^2 \mathcal{E}(q, k_i, k_j) + \right. \\ \left. + \frac{(T - y_q) l^2}{T} [\mathcal{E}(q, k_i - 2) - \mathcal{E}(q, k_i - 1)] \right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P [\eta_{q2}^{(4)}(\mathbf{m})] = (T - y_q) \left\{ \frac{-(T - y_q)^2 l^2}{2T^2} \Delta_{ii}^2 \mathcal{E}(q, k_i, k_j) + \right. \\ \left. + \frac{(T - y_q) l^2}{T} [\mathcal{E}(q, k_i) - \mathcal{E}(q, k_i - 1)] \right\} l^2 + o(l^2). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Лемма 9.

$$\mathbb{E}_P \sum_{q=1}^{2n} \eta_{q2}(\mathbf{m}) = \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,uv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q) l^2 + o(l^2). \quad (5.27)$$

Таким образом, анализ математических ожиданий случайных величин в (4.3) закончен. Приравнивая коэффициенты порядка l^2 , из (5.3) – (5.6), (5.14), (5.17), (5.22), (5.23) и (5.27) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = \\ = -2 f(\alpha) \sum_{i=1}^n (t_i + C_i) \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) + \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,uv} S(i, j) \Delta_{ij}^2 \Omega(i, j) - \Xi, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где

$$\Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,uv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,uv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q). \quad (5.29)$$

Остается вычислить значения постоянных C_i . Умножим (5.28) на k_i и просуммируем по $\bar{k}$.

Так как $\sum_{\bar{k}} k_i p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \lambda(\alpha) t_i$ и все члены, содержащие вторую разность, обращаются в нуль, получаем

$$\lambda(\alpha) t_i + \lambda''(\alpha) t_i = -2 f(\alpha) (t_i + C_i).$$

Используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2 f(\alpha)$ (см. [4]), получим $C_i = -2 t_i$.

§6. УСЛОВИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ

Используя Лемму 2 для

$$F(m, \Psi_1, \Psi_2) = I\left(\frac{\gamma}{k}\right) \cdot [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)],$$

произведения $c_{i,j,uv} \Omega(i, j)$ в (5.28), (5.29) можно записать в терминах горизонтальных окон. Получим

$$c_{i,j,uv} \Omega(i, j) = c_{i,j,hh} \left[E_{i,j,hh} \left(I\left(\frac{\gamma}{k}\right) [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)] \right) \cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2 \right]. \quad (6.1)$$

Вместе с элементарным тождеством

$$[I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)] \cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2 = \cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2,$$

из (6.1) следует

$$c_{i,j,uv} \Omega(i, j) = c_{i,j,hh} \left[E_{i,j,hh} \left(I\left(\frac{\gamma}{k}\right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) \right]. \quad (6.2)$$

Рассмотрим следствия из факторизационных Условий а) и б) (см. (3.9)). При выполнении Условий а) и б), получаем

$$\begin{aligned} E_{i,j,hh} \left(I\left(\frac{\gamma}{k}\right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) &= \\ &= \Pi_{i,j,hh} \left(\frac{\gamma}{k} \right) E_{i,j,hh} (\cot \Psi_1 \cot \Psi_2) = \frac{\lambda'(\alpha)^2}{\lambda(\alpha)^2} \Pi_{i,j,hh} \left(\frac{\gamma}{k} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Докажем, что при выполнении Условий а) и б) выражение $\Xi = 0$. Действительно, используя обобщенные формулы Пальма, получаем

$$\begin{aligned} \Xi &= - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) \left[\frac{\partial^2 p_k^-}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_k^-}{\partial t_i \partial u_u} - \frac{\partial^2 p_k^-}{\partial t_j \partial u_v} + \frac{\partial^2 p_k^-}{\partial u_u \partial u_v} \right] + \\ &+ \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \left[\frac{\partial^2 p_k^-}{\partial t_i^2} - \frac{\partial^2 p_k^-}{\partial t_i \partial u_i} - \frac{\partial^2 p_k^-}{\partial t_i \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_k^-}{\partial u_i \partial u_{i-1}} \right], \end{aligned}$$

где в двойных суммах $u = i$, если $q = iR$ и $u = i - 1$, если $q = iL$ (см. §2).

Аналогично, $v = j$, если $q = jR$ и $v = j - 1$, если $q = jL$.

Для любого $i \neq j$ наличие множителя $S(q, b)$ обращает в нуль члены, соответствующие $b = jL$ и $b = jR$. Также и в двойной сумме, если $i = j$, то y_q и y_b суть

концы одного и того же интервала γ_i , поэтому $S(q, b) = S(b, q) = +1$. Так как частные производные в первой и во второй строчках выражения Ξ встречаются с разными знаками, то получаем $\Xi = 0$.

Остается преобразовать слагаемое (см. (5.28))

$$\begin{aligned} & \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,vv} S(i, j) \Delta_{r,q}^2 \Pi_{i,j,hh} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \\ & = \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i, \gamma_j \\ i < j}} \left[(y_{iL} - y_{jR})^2 c_{iL,jR,hh} \Delta_{ij}^2 \Pi_{iL,jR,hh} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) + \right. \\ & + (y_{iR} - y_{jL})^2 c_{iR,jL,hh} \Delta_{ij}^2 \Pi_{iR,jL,hh} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \Big] - \\ & - \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i, \gamma_j \\ i < j}} \left[(y_{iR} - y_{jR})^2 c_{iR,jR,hh} \Delta_{ij}^2 \Pi_{iR,jR,hh} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) + \right. \\ & + (y_{iL} - y_{jL})^2 c_{iL,jL,hh} \Delta_{ij}^2 \Pi_{iL,jL,hh} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \Big] + \\ & + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i=1}^n t_i^2 c_{iL,iR,hh} \Delta_{ii}^2 \Pi_{iL,iR,hh} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right). \end{aligned}$$

Используя (2.7), (2.9) — (2.11) и

$$-(y_{iL} - y_{jL})^2 - (y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iR} - y_{jL})^2 + (y_{iL} - y_{jR})^2 = 2 t_i t_j,$$

$$-(y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iL} - y_{jR})^2 - (y_{iL} - y_{(j+1)L})^2 + (y_{iR} - y_{(j+1)L})^2 = -2 t_i u_j,$$

$$-(y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iR} - y_{(j+1)L})^2 + (y_{(i+1)L} - y_{jR})^2 - (y_{(i+1)L} - y_{(j+1)L})^2 = 2 u_i u_j,$$

вышеупомянутое слагаемое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таким образом, при выполнении Условий а), б) формула (5.28) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = \\ & = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

§7. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

В этом параграфе к Условиям а) и б) мы добавляем "условие достаточного перемешивания" в). Следовательно, в (6.5) можем подставить

$$\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

что приводит (6.5) к дифференциальному уравнению с начальным условием

$$p_{\bar{0}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 1 \quad \text{и} \quad p_{\bar{k}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 0, \quad \text{если} \quad \bar{k} \neq \bar{0}.$$

Теорема. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса $Ti2$ маркированный точечный процесс $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет Условию а). Если для некоторого направления α выполнены Условия б) и с), то для того же значения α точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский, т. е.

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda(\alpha) t_i]^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(\alpha) t_i}.$$

Доказательство : Используя $p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u})$ (см (3.11)) находим

$$\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} = \lambda(\alpha) \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} \quad (7.1)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} &= \lambda''(\alpha) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i \right] + \\ &+ [\lambda'(\alpha)]^2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Подставляя (7.1) и (7.2) в (6.5) и используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2 f(\alpha)$ (см. [4]), получим уравнение для функций $q_{\bar{k}}$:

$$[\lambda(\alpha)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i \right] = - \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i q_{\bar{k}}. \quad (7.3)$$

Это уравнение не содержит производных по α . В терминах производящих функций

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u}) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$$

(7.3) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \left[\sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \Phi \right]. \quad (7.4)$$

Решим (7.4) для начальных условий

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0; u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 1.$$

Для пуассоновского $\{z_i\}_n$

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \exp \left[\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \right], \quad (7.5)$$

и легко проверить, что это выражение удовлетворяет (7.4). Следовательно, функция

$$\begin{aligned} \exp \left[-\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \right] \Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \\ = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

удовлетворяет

$$\sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial F}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \quad (7.7)$$

и начальным условиям

$$F(z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0; u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 1.$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера для однородных функций порядка 0.

Каждое решение (7.7) имеет свойство

$$F(z_1, \dots, z_n; k t_1, \dots, k t_n; k u_1, \dots, k u_{n-1}) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}), \quad k > 0.$$

Среди них только $F(\bar{t}, \bar{x}) \equiv 1$ удовлетворяет (7.8). Теорема доказана.

ABSTRACT. The paper studies second order homogeneous line processes in the plane, especially the marked point processes of intersections that they induce on test lines, the marks being the angles at which the intersections with a test line occur. By the methods of "Invariant Imbedding" and integration of a formula from Combinatorial Integral geometry, we obtain two differential relations between the joint probabilities for numbers of intersections that occur in a system of disjoint intervals on a test line, and the first and the second order Palm probabilities of the same events. Analyzing these relations, conditions of Poissonity of n -dimensional distributions for any $n \geq 1$ are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян (Редактор), "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии (Сборник Статей), Изд. Академии Наук Арм. ССР, Ереван, 1980.
2. В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных процессов отрезков, в [1], стр. 81 — 106, 1980.
3. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, "Введение в стохастическую геометрию" Москва, Наука, 1989.
5. R. V. Ambartzumian, W. Weil (editors), *Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology*, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, 1984.
6. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane", in [5], pp. 124 — 132, 1984.
7. V. K. Oganian, "Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", *Acta Appl. Math.*, Holland, vol. 9, no. 1 — 2, pp. 71 — 81, 1987.
8. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых на плоскости", *Изв. НАН Армении, Математика* том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1993.
9. D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications*, John Wiley, Chichester, 1987.
10. E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), *Stochastic Geometry*, J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974.
11. В. К. Оганян, "О распределении длины "типичной" стороны случайной мозаики", *Изв. АН Армении, Математика*, том 19, стр. 248 — 256, 1984.
12. R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in stochastic geometry", *Dokl. Akad. Nauk Armenii*, vol. 98, no. 3, pp. 185 — 196, 1998; Перепечатано в этом номере *Известий АН Армении, Математика*.
13. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делаемые точечные процессы*, Москва, Наука, 1982.
14. В. В. Степанов, *Дифференциальные уравнения*, Москва, Физ. Мат. ГИЗ., 1950.
15. R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," *Adv. Appl. Prob.*, vol. 9, pp. 792 — 823, 1977.
16. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ ", *Известия НАН Армении, Математика*, том 27, № 5, стр. 1 — 21, 1992.
17. R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," *Teubner Texte zur Mathematik*, in [5], pp. 14 — 33, 1984.
18. O. Kallenberg, *Random Measures*, Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983.
19. Л. А. Сантало, *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*, Москва, Наука, 1983.

22 июля 1998

Институт математики
НАН Армении
Ереванский государственный университет
E-mails : rhambart@aua.am
victo@aua.am

ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^3$

А. Н. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 33, No. 4, 1998

Используя разложение Комбинаторной Интегральной Геометрии, мы определяем класс валюаций в пространстве Γ евклидовых прямых в $\mathbb{R}^3$. Статья изучает возможность продолжения валюаций до знакопеременных мер и неотрицательных мер в пространстве Γ . Полученные результаты используются для описания метрик в $\mathbb{R}^3$, для которых евклидовы прямые суть геодезические.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Валюации (конечно-аддитивные функционалы) в пространствах интегральной геометрии впервые рассматривались в книге [1]. Там валюации использовались главным образом с целью вычисления значений мер на множествах из "колец Сильвестра" в соответствующих пространствах. В недавних статьях на эту тему основной задачей являлось нахождение условий, которые гарантируют существование знакопеременных мер, чьи значения на множествах из кольца Сильвестра совпадают со значениями валюаций на тех же множествах. Прежде всего сошлемся на статью [5], в которой рассматривались валюации в пространстве прямых на евклидовой плоскости и на статью [8], где изучались валюации в пространствах так называемых прегеодезических кривых на двумерных многообразиях. Статьи [3], [9], [10] касаются валюаций в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Первая попытка рассмотрения валюаций в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ сделана Р. В. Амбарцумяном в [4].

Много интересных геометрических результатов было получено этим путем, в частности результаты, касающиеся проблемы описания метрик в стиле четвертой проблемы Гильберта. В настоящей статье рассматривается аналогичная про-

блематика.

Валюации Ψ_F , которые мы рассматриваем, определены на кольце Сильвестра в пространстве Π прямых в $\mathbb{R}^3$ и зависят от линейно-аддитивных сегментных функций $F(\nu)$. Такие валюации рассматривались Р. В. Амбарцумяном в [1], стр. 186 и в [4].

В параграфах 2 — 4 подробно строятся кольцо Сильвестра в пространстве Π и валюация Ψ_F (см. [4]). Параграфы 5 и 6 содержат основной результат статьи. Рассмотрим сегментные функции $F(\nu)$ вида

$$F(\nu) = \int_{\nu} \rho(P, \Omega) dl, \quad (1.1)$$

где $\rho(P, \Omega)$ — "флаговая функция", зависящая от $P \in \mathbb{R}^3$ и пространственного направления Ω . Сегмент ν есть интегрирование по P , т.е. $P \in \nu$ и dl — мера длины на ν . В интеграле (1.1) параметр Ω совпадает с направлением ν . В этом классе, при некоторых предположениях гладкости на ρ , находим необходимое и достаточное условие для продолжения Ψ_F до знакопеременной меры на борелевских множествах пространства Π . Это условие, имеющее вид дифференциального уравнения, аналог результата для плоскости, полученного в [5]. Следующее дополнительное условие на ρ гарантирует неотрицательность знакопеременной меры : для каждого фиксированного P функция ρ как функция от Ω должна быть выпуклой. В случае, когда и дифференциальное уравнение и условие выпуклости удовлетворяются, $F(\nu)$ оказывается метрикой в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовы прямые суть геодезические. Согласно этому замечанию результаты настоящей статьи относятся к четвертой проблеме Гильберта в $\mathbb{R}^3$.

§2. КОЛЬЦО СИЛЬВЕСТРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^3$

В статье используются следующие обозначения :

Π = пространство прямых в $\mathbb{R}^3$;

γ = прямая в $\mathbb{R}^3$ (элемент пространства Π) ;

π = *пластина* = ограниченное выпуклое подмножество на плоскости из $\mathbb{R}^3$;

$\partial\pi$ = граница пластины π ;

$[\pi] = \{\gamma \in \Pi : \gamma \text{ не пересекает } \partial\pi, \text{ но пересекает внутренность } \pi\}$;

$$[\partial\pi] = \partial[\pi] = \{\gamma \in \Pi : \gamma \text{ пересекает } \partial\pi\};$$

$$\{\pi_i\} = \text{конечная совокупность пластин в } \mathbb{R}^3.$$

Любая конечная совокупность $\{\pi_i\}$ пластин в $\mathbb{R}^3$ порождает отношение эквивалентности в Π : прямые $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi$, не пересекающие $\partial\pi_i$, назовем эквивалентными, если они пересекают одни и те же пластины.

Множество эквивалентных прямых назовем *атомом*, если его замыкание компактно.

Для заданной совокупности $\{\pi_i\}$ через $\text{Sr}\{\pi_i\}$ (кольцо Сильвестра) обозначим минимальное кольцо подмножеств Π , содержащее все атомы.

Два множества $A_1, A_2 \subset \Pi$ назовем эквивалентными, если их симметричная разность $A_1 \Delta A_2$ принадлежит $\cup_i [\partial\pi_i]$ для некоторой конечной системы пластин $\{\pi_i\}$.

Для заданного $A \subset \Pi$ обозначим через A^* класс множеств эквивалентных множеству A .

Лемма 1. Пусть $\{\pi_i\}$ и $\{\delta_i\}$ — два конечных множества пластин в $\mathbb{R}^3$. Для каждого $A \in \text{Sr}\{\pi_i\}$ существует эквивалентное множество в $\text{Sr}(\{\pi_i\} \cup \{\delta_i\})$.

Доказательство: Достаточно рассмотреть случай, когда множество $\{\delta_i\}$ содержит единственную пластину δ_1 . Так как $A \in \text{Sr}\{\pi_i\}$ можно представить как объединение атомов, то достаточно доказать лемму для случая, когда A есть атом. Но в этом случае A эквивалентно объединению двух атомов $\text{Sr}(\{\pi_i\} \cup \delta_1)$: $A_1 = A \cap [\delta_1]$, $A_2 = A \cap [\delta_1]^c$ (c обозначает дополнение). Лемма доказана.

Определим $\text{Sr}^*\{\pi_i\} = \{A^* : A \in \text{Sr}\{\pi_i\} \text{ и положим } U_{\Pi}^* = \cup \text{Sr}^*\{\pi_i\}$, где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{\pi_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Лемма 2. U_{Π}^* есть кольцо относительно операций объединения и разности, определяемые как

$$A^* \cup B^* = (A \cup B)^*, \quad A^* \setminus B^* = (A \setminus B)^*.$$

Доказательство: Из $A^*, B^* \in U_{\Pi}^*$ следует существование конечных множеств $\{\pi_i\}, \{\delta_i\} \subset \mathbb{R}^3$ таких, что $A \in \text{Sr}\{\pi_i\}$ и $B \in \text{Sr}\{\delta_i\}$. Согласно Лемме 1

существуют $A', B' \in \text{Sr}(\{\pi_i\} \cup \{\delta_i\})$, $A' \in A^*$, $B' \in B^*$. Из свойства кольца

$$A' \cup B', A' \setminus B' \in \text{Sr}(\{\pi_i\} \cup \{\delta_i\}).$$

Утверждение леммы следует из соотношений

$$(A' \cup B')^* = (A \cup B)^*, \quad (A' \setminus B')^* = (A \setminus B)^*.$$

В следующих параграфах мы не отличаем классы из U_{Γ}^* и элементы из этих классов.

§3. ВАЛЮАЦИЯ Ψ_F

Наше построение валюации Ψ_F основывается на понятии валюации Φ , определенной для пространства прямых на плоскости в [4] и [5]. Начнем с некоторых основных обозначений, а затем напомним факты, относящиеся к валюации Φ .

Пусть

$\mathbb{E}$ = пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $e \in \mathbb{E}$;

de = мера в $\mathbb{E}$, инвариантная относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^3$;

$d\gamma$ = мера в $\mathbb{L}$, инвариантная относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^3$;

G_e = пространство прямых на плоскости e в $\mathbb{R}^3$;

$d_e g$ = мера в G_e , инвариантная относительно евклидовых движений, которые оставляют плоскость e неподвижной;

ν = *игла* (прямолинейный отрезок) в $\mathbb{R}^3$.

Флаг f в $\mathbb{R}^3$ — пара (P, γ) , содержащая точку $P \in \mathbb{R}^3$ и прямую γ с пространственным направлением Ω , проходящую через точку P . Также будем писать $f = (P, \Omega)$, $P \in \mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_2$ — проективная (эллиптическая) плоскость. Для заданной флаговой функции $\rho(f) = \rho(P, \Omega)$ рассмотрим семейство сегментных функций, определенных для отрезков $\nu \subset \mathbb{R}^3$

$$F(\nu) = \int_{\nu} \rho(l, \Omega) dl. \quad (3.1)$$

В этом интеграле l обозначает одномерную координату точки $P \in \nu$, Ω — направление ν , а dl — мера Лебега на ν . Используем также обозначение $F(\nu) = F(P_1, P_2)$, где $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ — концы отрезка ν .

Пусть $\{P_i\}_e$ — конечное множество точек на плоскости e . Через $[P_i, P_j]_e$ обозначим множество прямых в e , отделяющие (внутри e) P_i от P_j . Рассмотрим кольцо

$\text{Sr}\{P_i\}_e$ = минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{G}_e$, содержащее все множества вида $[P_i, P_j]_e$.

Определим кольцо $U_e = \cup \text{Sr}\{P_i\}_e$. Объединение берется по всем возможным конечным множествам из $\{P_i\}_e$ (строгое говоря, каждое $A \in U_e$ определяется некоторым классом эквивалентности множеств, см. [4]). Для каждого $A \in U_e$ определим функционал

$$\Phi_e(A) = \sum_{i < j} c_{ij}(A) F(P_i, P_j), \quad (3.2)$$

где коэффициенты $c_{ij}(A)$ вычисляются с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм (см. [4]) :

Шаг 1. Из $A \in U_e$ следует, что существует конечное множество $\{P_i\}_e$ такое, что $A \in \text{Sr}\{P_i\}_e$. Выберем одно из таких множеств $\{P_i\}_e$ (выбор не единственный).

Шаг 2. Пусть $g_{ij} \in \mathbb{G}_e$ — прямая, проходящая через точки $P_i, P_j \in \{P_i\}_e$. Будем говорить, что 2-х элементное множество $\{P_i, P_j\}$ принадлежит классу *Sep*, если существует точка $P_s \in \{P_i\}_e$, лежащая на прямой g_{ij} между точками P_i и P_j .

Предположим, что $\{P_i, P_j\}$ не принадлежит *Sep*. Рассмотрим четыре атома, которые обозначим через $\{i^+, j^-\}$, $\{i^-, j^+\}$, $\{i^+, j^+\}$ и $\{i^-, j^-\}$. По определению, прямая g_{ij} принадлежит границе всех четырех выше упомянутых атомов; оба атома $\{i^+, j^-\}$ и $\{i^-, j^+\}$ суть подмножества $[P_i, P_j]_e$; оба атома $\{i^+, j^+\}$ и $\{i^-, j^-\}$ суть подмножества $[P_i^*, P_j^*]_e$, где P_i^* и P_j^* суть две экстремальные точки из $\{P_i\}_e$, лежащие на прямой g_{ij} . Если $\{P_i, P_j\}$ не принадлежат *Sep*, то две пары атомов однозначно определены. Для каждого $A \in \text{Sr}\{P_i\}_e$, его индикаторная функция $I_A(g)$, $g \in \mathbb{G}_e$ остается постоянной на атомах. Через $I_A(i^+, j^-)$, $I_A(i^-, j^+)$, $I_A(i^+, j^+)$ и $I_A(i^-, j^-)$ обозначим значения $I_A(g)$ на соответствующих атомах из 4-х элементного множества, описанного выше.

Шаг 3. Положим

$$c_{ij}(A) = \begin{cases} 0, & \{P_i, P_j\} \in \text{Sep}, \\ \frac{1}{2} [I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+) - I_A(i^+, j^+) - I_A(i^-, j^-)], & \{P_i, P_j\} \notin \text{Sep}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Как показано в [5], если интегралы (3.1) существуют, то функционал Φ_e совместно определяется валюацией на U_e , т.е. $\Phi_e(A)$ не зависит от результата Шага 1.

Используем Φ_e для определения функционала на U_Γ . Для каждого $B \in U_\Gamma$ положим

$$\Psi_F(B) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{IE}} \Phi_e(B \cap e) de. \quad (3.4)$$

Теорема 1. Если для флаговой функции ρ сегментные функции (3.1) определены, то функционал $\Psi_F(B)$ — валюация на U_Γ . Если для каждой $e \in \mathbb{IE}$ валюация Φ_e продолжается до знакопеременной меры в G_e , обладающей непрерывной плотностью $h_e(g)$, то Ψ_F продолжается до знакопеременной меры в Γ .

Доказательство : Для почти всех плоскостей e множество $B \cap e$ принадлежит кольцу $\text{Sr}\{U_i \partial \pi_i \cap e\}_e$. Следовательно, первое утверждение следует из факта, что Φ_e является валюацией на U_e и линейности операции интегрирования (3.4). Второе утверждение следует из уравнения

$$h_e(g) ded_e g = h_\phi(\gamma) d\gamma d\phi.$$

Функция $h_\phi(\gamma)$ нуждается в определении. Для пары (e, g) , где $e \in \mathbb{IE}$ и $g \in G_e$, рассмотрим дуальное представление $(e, g) = (\gamma, \phi)$. Определим прямую $\gamma \in \Gamma$, совпадающую с $g \in G_e$, а ϕ — угол вращения e вокруг γ . Эта двойственное соотношение взаимно-однозначно. Далее, положим $h_\phi(\gamma) = h_e(g)$ для $(e, g) = (\gamma, \phi)$.

При дополнительных предположениях гладкости, необходимое и достаточное условие для порождения знакопеременной меры с помощью функционала Φ_e в пространстве G_e может быть записано для каждой $e \in \mathbb{IE}$, см. [5], [6]. Это условие имеет вид дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \rho(P, \Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho(P, \Omega)}{\partial_n P \partial_e \Omega}, \quad (3.5)$$

которое должно выполняться для всех точек $P \in \mathbb{IE}$ и направлений Ω , лежащих в e . В (3.5) n — направление, перпендикулярное к Ω , лежащее внутри плоскости e , а $\frac{\partial}{\partial_e \Omega}$ обозначает производную по аргументу Ω внутри направлений, ограниченных плоскостью e .

Следствие 1. Если $\rho(P, \Omega)$ — гладкая (три раза непрерывно дифференцируемая по обоим аргументам) и удовлетворяет уравнению (3.5) для всех флагов (P, Ω) , тогда валюация Ψ_F порождает знакопеременную меру в пространстве Π .

В §6 доказано, что уравнение (3.5) является также и *необходимым* условием для порождения меры по Ψ_F .

§4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАЛЮАЦИИ Ψ_F

Этот параграф по существу обобщает результат, полученный в [1], стр. 186. Начнем с некоторых дальнейших обозначений, определений и свойств из интегральной геометрии.

Клин есть пара $w = (\nu, V)$, где $\nu \subset \gamma$ — игла, V — замкнутая дуга окружности $\mathcal{E}_1(\nu) = \mathcal{E}_1(\gamma) = \mathcal{E}_1(\Omega)$ длины π , которая представляет пространство плоских направлений, ортогональных к γ . Каждому клину w соответствуют две бесконечные двугранные области, каждая из которых ограничена двумя плоскостями, проходящими через отрезок ν , ориентации которых соответствуют концам V . Задавая *флаговую функцию* $\rho(f)$, рассмотрим *функции клина*

$$W(w) = \int_V \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 F(\nu) d\phi, \quad (4.1)$$

где функция F определена по (3.1) и $d\phi$ — мера на $\mathcal{E}_1(\nu)$, инвариантная относительно вращений; λ_1 и λ_2 — углы между $\phi \in V$ и концами дуги V .

Используем следующие геометрические конструкции, связанные с парой пластин π_1, π_2 в общем расположении в $\mathbb{R}^3$. С каждой $(l_1, l_2) \in \partial\pi_1 \times \partial\pi_2$ связываем две плоскости $e_1(l_1, l_2)$ и $e_2(l_1, l_2)$. По определению, $e_i(l_1, l_2)$ содержит прямую (l_1, l_2) и прямую касательную к $\partial\pi_i$ в точке l_i , $i = 1, 2$. Также, с каждой $(l_1, l_2) \in \partial\pi_1 \times \partial\pi_2$ связываем два клина $w^+ = (\nu, V^+)$ и $w^- = (\nu, V^-)$. Эти два клина имеют общую иглу ν , концами которой являются l_1 и l_2 , а концы дуг V^+, V^- соответствуют плоскостям $e_1(l_1, l_2)$ и $e_2(l_1, l_2)$.

Пусть (π_i) обозначает множество плоскостей, пересекающих π_i . Для описания плоскостей из $(\pi_1) \cap (\pi_2)$ будем *локально* использовать параметры $e = (l_1, l_2, \phi)$, где $l_i = e \cap \partial\pi_i$, $i = 1, 2$, и ϕ — угол вращения плоскости e вокруг прямой, проходящей через l_1 и l_2 . В терминах этих параметров мера de имеет вид (см.

(2))

$$de = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{|l_1, l_2|} \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 d\phi dl_1 dl_2, \quad (4.2)$$

где dl_1, dl_2 — меры длины на $\partial\pi_1$ и $\partial\pi_2$; ψ_1, ψ_2 — углы между прямой, проходящей через l_1 и l_2 и направлениями касательных прямых к $\partial\pi_1$ и $\partial\pi_2$ в точках l_1 и l_2 , соответственно; $|l_1, l_2|$ — евклидово расстояние между l_1 и l_2 ; λ_1, λ_2 — плоские углы между плоскостью $e(\phi)$ и плоскостями $e_1(l_1, l_2)$ и $e_2(l_1, l_2)$. В случае, когда пластины π_1, π_2 совпадают с единственной пластиной π , (4.2) сводится к

$$de = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{|l_1, l_2|} \sin^2 \lambda d\phi dl_1 dl_2, \quad (4.3)$$

где $l_1, l_2 \in \partial\pi$ и λ — плоский угол между плоскостью e и плоскостью пластины π . В этом случае один из двух клинов w^+, w^- имеет угловую меру π , а другой 0.

Вернемся к получению желаемого эквивалентного представления для Ψ_F .

Для каждого $B \in U_{\mathbb{H}}$ выберем множество пластин $\{\pi_i\}$ такое, что $B \in \text{Sr}\{\pi_i\}$.

Легко убедиться, что множество $B \cap e$ принадлежит кольцу $\text{Sr}\{\partial\pi_i \cap e\}_e$, определенному в G_e . Подставим значение Φ_e :

$$\Phi_e(B \cap e) = \sum_I c(\nu_i) F(\nu_i) + \sum_{II} c(\nu_i) F(\nu_i), \quad (4.4)$$

где ν_i — иглы, концы которых принадлежат множеству $\{\partial\pi_i \cap e\}$. Сумма $\sum_I$ распространяется на все иглы ν_i , концы которых принадлежат одной и той же пластине, $\sum_{II}$ — по дополнительному множеству игл. Из (4.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{E}} de \sum_I c(\nu_i) F(\nu_i) &= \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{\partial\pi_i \neq \emptyset} c(\nu_i) F(\nu_i) de = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{\partial\pi_i} \int_{\partial\pi_i} \int_0^\pi c_B(l_1, l_2, \phi) \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{|l_1, l_2|} \sin^2 \lambda F(l_1, l_2) dl_1 dl_2 d\phi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

а из (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{E}} de \sum_{II} c(\nu_i) F(\nu_i) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i < j} \int_{\partial\pi_i} \int_{\partial\pi_j} \int_0^\pi c_B(l_1, l_2, \phi) \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{|l_1, l_2|} \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 F(l_1, l_2) dl_1 dl_2 d\phi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Прямое использование Алгоритма доказывает, что для почти всех l_1, l_2 значение $c_B(l_1, l_2, \phi)$ в (4.5) независит от λ . Аналогично, коэффициенты $c_B(l_1, l_2, \phi)$ в (4.6), которые вычисляются по (3.3) для плоскости $e = (l_1, l_2, \phi)$ остаются постоянными на множествах $\phi \in V^+$ и $\phi \in V^-$:

$$c_B(l_1, l_2, \phi) = \begin{cases} c_B^+(l_1, l_2), & \text{если } \phi \in V^+ \\ c_B^-(l_1, l_2), & \text{если } \phi \in V^-. \end{cases}$$

Следовательно, разумно рассмотреть функцию клина

$$\begin{aligned} W(w) &= \int_V \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 F(\nu) d\phi = \int_V \sin \phi \sin(V - \phi) F(\nu) d\phi = \\ &= \frac{F(\nu)}{2} (\sin V - V \cos V). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Результат интегрирования (4.4) представляется в виде

$$\Psi_F(B) = \sum_{i \leq j} \frac{1}{\pi} \int_{\partial \pi_i} \int_{\partial \pi_j} \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{|l_1, l_2|} [c_B^+(l_1, l_2) W(w^+) + c_B^-(l_1, l_2) W(w^-)] dl_1 dl_2. \quad (4.8)$$

Важное следствие этого выражения состоит в том, что в левой части зависимость от флаговой функции ρ входит только через функцию клина W .

§5. ПОРОЖДЕНИЕ МЕРЫ ПО Ψ_F

В этом параграфе покажем, что если функционал Ψ_F , заданный по (4.8), допускает продолжение до знакопеременной меры в Π , тогда флаговая функция ρ необходимо удовлетворяет условию (3.5).

По симметрии $\rho(P, -\Omega) = \rho(P, \Omega)$, $\Omega \in \mathcal{E}_2$ продолжим заданную гладкую флаговую функцию $\rho(P, \Omega)$ на пространство S^2 (единичная сфера) направленных лучей в $\mathbb{R}^3$.

Пусть π_i , $i = 1, 2$ — две центрально-симметричные пластины в $\mathbb{R}^3$ с центром в точке P_i , $P_1 \in \pi_1$, $P_2 \in \pi_2$ и $\Omega \in S^2$ — пространственное направление от P_1 к точке P_2 . Пусть e_i — плоскость, содержащая пластину π_i , $i = 1, 2$. Предположим, что плоскость e_i не пересекает и не содержит пластину π_j , $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Положительное вращение вокруг $\Omega \in S^2$ (определенное по правилу буравчика) определяет ориентацию каждой пластины π_i , $i = 1, 2$. Соответственно, определим направления касательных прямых к $\partial \pi_i$ как точек в S^2 . Ниже используем обозначения:

S_i = площадь пластины π_i , $i = 1, 2$;

$(\cdot \wedge \cdot)$ = угол между двумя пространственными направлениями;

l_i = точка на $\partial\pi_i$, $i = 1, 2$;

dl_i = мера длины на $\partial\pi_i$, $i = 1, 2$;

$\varphi_i = \varphi_i(l_i)$ = направление касательной к π_i в точке $l_i \in \partial\pi_i$, $\varphi_i \in S^2$, $i = 1, 2$;

$\psi_i = \psi_i(l_1, l_2)$ = угол между φ_i и направлением $\nu = (l_1, l_2)$, от l_1 к l_2 , $i = 1, 2$;

Ω_i = направление нормали к π_i , согласованное с ориентацией π_i , $\Omega_i \in S^2$;

α_i^* = пространственное направление иглы (P_i, l_i) от P_i к l_i , $l_i \in \partial\pi_i$, $i = 1, 2$;

(P_i, x_i, y_i) = правая координатная система на e_i с началом координат в P_i ;

ω_i, ξ_i = пространственные направления осей x_i, y_i , соответственно, в координатной системе (P_i, x_i, y_i) , $i = 1, 2$;

$(h_i, r_i(\alpha_i), \alpha_i)$ = полярные координаты точки $l_i \in \partial\pi_i$ на плоскости e_i с полюсом в P_i и углом $\alpha_i \in [0, 2\pi]$, измеряемым от оси x_i согласно правилу буравчика. Здесь h_i , $i = 1, 2$ — параметр гомотетии, а функция $r_i(\alpha)$ определяет шейп пластины π_i , $i = 1, 2$.

Величины $e, \omega, \xi, r(\alpha), \alpha^*, \varphi, S$ определены для любой пластины π с некоторой заданной точкой $P \in \pi$ в качестве центра пластины. Докажем лемму, которую будем использовать ниже.

Лемма 3. Для любой (выпуклой) пластины π

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha^* \wedge \omega) \cos(\varphi \wedge \xi) r^2}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} d\alpha = S, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha^* \wedge \xi) \cos(\varphi \wedge \omega) r^2}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} d\alpha = -S,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha^* \wedge \omega) \cos(\varphi \wedge \omega) \frac{r^2}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha^* \wedge \xi) \cos(\varphi \wedge \xi) r^2}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} d\alpha = 0.$$

Доказательство : Используя стандартные формулы из дифференциальной геометрии, находим

$$\frac{\cos(\varphi \wedge \omega)}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} = \frac{r'(\alpha) \cos(\alpha) - r(\alpha) \sin(\alpha)}{r(\alpha)},$$

$$\frac{\cos(\varphi \wedge \xi)}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} = \frac{r'(\alpha) \sin(\alpha) + r(\alpha) \cos(\alpha)}{r(\alpha)}.$$

Так как $\cos(\alpha^* \wedge \omega) = \cos \alpha$ и $\cos(\alpha^* \wedge \xi) = \sin \alpha$, получим

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha^* \wedge \omega) \cos(\varphi \wedge \xi) \frac{r^2}{|\sin(\varphi \wedge \alpha^*)|} d\alpha = \int_0^{2\pi} [r'(\alpha) r(\alpha) \cos \alpha \sin \alpha +$$

$$+r^2(\alpha) \cos^2 \alpha] d\alpha = \int_0^{2\pi} [r^2(\alpha) \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} r^2(\alpha) \cos 2\alpha] d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{r^2(\alpha)}{2} d\alpha = S.$$

Аналогично доказываются оставшиеся три интегральных соотношения.

Используем лемму, принадлежащую Р. В. Амбарцумяну [4]. Эта лемма рассматривает предел

$$\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{\Psi([\pi_1] \cap [\pi_2])}{\mu_0([\pi_1] \cap [\pi_2])} = H(\Omega_1, P_1, \Omega_2, P_2), \quad \text{где} \quad \mu_0([\pi_1] \cap [\pi_2]) = \int_{[\pi_1] \cap [\pi_2]} d\gamma, \quad (5.1)$$

вычисленный для фиксированных позиций $P_1 \neq P_2$, фиксированных ориентаций Ω_1 и Ω_2 и фиксированных шейпов пластин π_1 и π_2 , а h_1 и h_2 стремятся к нулю. Имеем следующее асимптотическое выражение (см. [2]) :

$$\mu_0([\pi_1] \cap [\pi_2]) = \frac{\cos(\Omega_1 \wedge \Omega_2) \cos(\Omega_1 \wedge \Omega_2)}{|P_1 P_2|^2} S_1 S_2 + o(h_1^2 h_2^2). \quad (5.2)$$

Обозначим через Z множество в пространстве $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$, где коэффициент при $S_1 S_2$ в (5.2) определен и не равен нулю. Пусть

$$Z_R = Z \cap [Y_R \times Y_R \times S^2 \times S^2],$$

где $Y_R \subset \mathbb{R}^3$ обозначает шар радиуса R с центром в начале координат.

Лемма 4. Пусть Ψ — валюация, определенная на U_Γ . Предположим, что предел (5.1) существует и функция $H(\Omega_1, P_1, \Omega_2, P_2)$ непрерывна и ограничена на каждом Z_R . Тогда функция H зависит только от прямой $\gamma_0 \in \Gamma$, проходящей через P_1, P_2 , и существует знакпеременная мера μ на Γ , для которой H является плотностью. Мера μ совпадает с Ψ на U_Γ .

Вычислим значение Ψ_F на множестве $[\pi_1] \cap [\pi_2]$. Из предположения, что плоскость e_i не пересекает или не содержит π_j , $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, следует, что $c_B^\pm(l_1, l_2) = 0$ для $(l_1, l_2) \in \partial\pi_i \times \partial\pi_i$. Следовательно

$$\begin{aligned} \Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\partial\pi_1} \int_{\partial\pi_2} \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{|l_1, l_2|} [c_B^+(l_1, l_2) W(w^+) + c_B^-(l_1, l_2) W(w^-)] dl_1 dl_2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для заданных l_1 и l_2 , дуги V^+ и V^- определим следующим образом : $\phi \in V^+$, если две иглы $\pi_i \cap e(l_1, l_2, \phi)$, $i = 1, 2$, лежат в разных полуплоскостях $e(l_1, l_2, \phi)$,

порождающих прямой проходящей, через точки l_1 и l_2 , в противном случае $\phi \in V^-$.

Непосредственное применение Алгоритма дает

$$c_B^+(l_1, l_2) = \frac{1}{2}, \quad c_B^-(l_1, l_2) = -\frac{1}{2}.$$

Так как $V^- = \pi - V^+$, получим

$$c_B^+(l_1, l_2) W(w^+) + c_B^-(l_1, l_2) W(w^-) = -\frac{F(\nu)}{4} \pi \cos V^+. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получаем

$$\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) = -\frac{1}{4} \int_{\partial\pi_1} \int_{\partial\pi_2} \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos V^+ F(\nu)}{|\nu|} dl_1 dl_2. \quad (5.5)$$

Для того, чтобы вычислить кратный интеграл в правой части (5.5) сделаем замену переменных $l_i \rightarrow \alpha_i$, $i = 1, 2$.

Используя в (5.5) стандартные соотношения (см. Рис. 1.)

$$dl_i = \frac{r_i(\alpha_i) h_i}{|\sin(\varphi_i \wedge \alpha_i^*)|} d\alpha_i,$$

$$\sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos V^+ = \cos(\varphi_1 \wedge \varphi_2) - \cos \psi_1 \cos \psi_2,$$

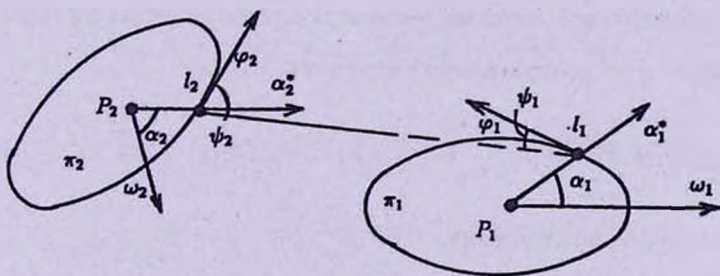


Рис. 1.

получим

$$\begin{aligned} \Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) &= \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \psi_1 \cos \psi_2 - \cos(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \right) \frac{F(\nu)}{|\nu|} \frac{r_1 r_2 h_1 h_2}{|\sin(\alpha_1^* \wedge \varphi_1) \sin(\alpha_2^* \wedge \varphi_2)|} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

По формуле из сферической тригонометрии

$$\cos \psi_i = \frac{1}{|\nu|} \left[|P_1 P_2| \cos(\varphi_i \wedge \Omega) - r_1 h_1 \cos(\alpha_1^* \wedge \varphi_i) + r_2 h_2 \cos(\alpha_2^* \wedge \varphi_i) \right]. \quad (5.7)$$

Запишем разложения Тейлора для функций $\frac{F(\nu)}{|\nu|}$ и $\frac{F(\nu)}{|\nu|^3}$:

$$\begin{aligned} \frac{F(\nu)}{|\nu|} &= \frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} + r_1 h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1^* P_1} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right) + r_2 h_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right) + \\ &+ \frac{h_1^2 r_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_1^* P_1} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right) + \frac{h_2^2 r_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^* P_2 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right) + \\ &+ h_1 h_2 r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right) + o(h_1 h_2), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{F(\nu)}{|\nu|^3} &= \frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} + r_1 h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1^* P_1} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) + r_2 h_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) + \\ &+ \frac{h_1^2 r_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_1^* P_1} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) + \frac{h_2^2 r_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^* P_2 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) + \\ &+ h_1 h_2 r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) + o(h_1 h_2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя (5.7) – (5.9) в (5.6), получим следующее разложение Тейлора:

$$\begin{aligned} \Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) &= \frac{h_1 h_2}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (K_0(\alpha_1, \alpha_2) + K_1(\alpha_1, \alpha_2) h_1 + K_2(\alpha_1, \alpha_2) h_2 + \\ &+ K_{21}(\alpha_1, \alpha_2) h_1^2 + K_{12}(\alpha_1, \alpha_2) h_2^2 + K(\alpha_1, \alpha_2) h_1 h_2) d\alpha_1 d\alpha_2 + o(h_1^2 h_2^2). \end{aligned}$$

Из вышеизложенного вытекает алгоритм для вычисления функции K . Так как пластины π_1 и π_2 центрально-симметричны, имеем

$$r_i(\alpha_i + \pi) = r_i(\alpha_i), \quad \varphi_i(\alpha_i + \pi) = -\varphi_i(\alpha_i), \quad (\alpha_i + \pi)^* = -(\alpha_i)^*.$$

Отсюда следует, что функция

$$K_0(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{r_1 r_2 F(P_1, P_2)}{|\sin(\alpha_1^* \wedge \varphi_1) \sin(\alpha_2^* \wedge \varphi_2)| |P_1 P_2|} [\cos(\Omega \wedge \varphi_1) \cos(\Omega \wedge \varphi_2) - \cos(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]$$

удовлетворяет условию

$$K_0(\alpha_1 + \pi, \alpha_2) = -K_0(\alpha_1, \alpha_2) = K_0(\alpha_1, \alpha_2 + \pi).$$

Следовательно, $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_0(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$. Аналогично, интегралы от

$K_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $K_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $K_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$, $K_{21}(\alpha_1, \alpha_2)$ равны нулю. Получаем

$$\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) = \frac{h_1^2 h_2^2}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 + o(h_1^2 h_2^2).$$

Прямым вычислением находим

$$\begin{aligned} K(\alpha_1, \alpha_2) \frac{|\sin(\alpha_1^* \wedge \varphi_1) \sin(\alpha_2^* \wedge \varphi_2)|}{r_1^2 r_2^2} = \\ = |P_1 P_2|^2 \cos(\Omega^* \wedge \varphi_1) \cos(\Omega^* \wedge \varphi_2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) - \\ - |P_1 P_2| (\cos(\Omega^* \wedge \varphi_1) \cos(\alpha_1^* \wedge \varphi_2) + \cos(\Omega^* \wedge \varphi_2) \cos(\alpha_1^* \wedge \varphi_1)) \frac{\partial}{\partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) + \\ + |P_1 P_2| (\cos(\Omega^* \wedge \varphi_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \varphi_2) + \cos(\Omega^* \wedge \varphi_2) \cos(\alpha_2^* \wedge \varphi_1)) \frac{\partial}{\partial \alpha_1^* P_1} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) - \\ - (\cos(\alpha_1^* \wedge \varphi_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \varphi_2) + \cos(\alpha_1^* \wedge \varphi_2) \cos(\alpha_2^* \wedge \varphi_1)) \frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} - \\ - \cos(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для вычисления интеграла от $K(\alpha_1, \alpha_2)$ используем стандартные формулы из следующего списка :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1(P_1, P_2) F_2(P_1, P_2)}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1^* P_1} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2^* P_2} + \\ + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1^* P_1} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2^* P_2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} F_1, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial |P_1 P_2|}{\partial \alpha_1^* P_1} = -\cos(\Omega^* \wedge \alpha_1^*), \quad \frac{\partial |P_1 P_2|}{\partial \alpha_2^* P_2} = \cos(\Omega^* \wedge \alpha_2^*), \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial^2 |P_1 P_2|}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} = \frac{1}{|P_1 P_2|} [\cos(\Omega^* \wedge \alpha_1^*) \cos(\Omega^* \wedge \alpha_2^*) - \cos(\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*)], \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\alpha_1^* \wedge \omega_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \omega_2) + \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\alpha_1^* \wedge \omega_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \xi_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\alpha_1^* \wedge \xi_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \omega_2) + \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\alpha_1^* \wedge \xi_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \xi_2), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i^* P_i} = \frac{\partial F}{\partial \omega_i P_i} \cos(\alpha_i^* \wedge \omega_i) + \frac{\partial F}{\partial \xi_i P_i} \cos(\alpha_i^* \wedge \xi_i), \quad (5.15)$$

$$\cos(\Omega^* \wedge \varphi_i) = \cos(\varphi_i \wedge \omega_i) \cos(\Omega^* \wedge \omega_i) + \cos(\varphi_i \wedge \xi_i) \cos(\Omega^* \wedge \xi_i), \quad (5.16)$$

$$\cos(\Omega \wedge \alpha_i^*) = \cos(\alpha_i^* \wedge \omega_i) \cos(\Omega \wedge \omega_i) + \cos(\alpha_i^* \wedge \xi_i) \cos(\Omega \wedge \xi_i), \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*) &= \cos(\alpha_1^* \wedge \omega_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \omega_2) \cos(\omega_1 \wedge \omega_2) + \\ &+ \cos(\alpha_1^* \wedge \omega_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \xi_2) \cos(\omega_1 \wedge \xi_2) + \cos(\alpha_1^* \wedge \xi_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \omega_2) \cos(\xi_1 \wedge \omega_2) + \\ &+ \cos(\alpha_1^* \wedge \xi_1) \cos(\alpha_2^* \wedge \xi_2) \cos(\xi_1 \wedge \xi_2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Рассмотрим первый член в правой части уравнения (5.10). Используя (5.11) — (5.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 P_1 \partial \alpha_2 P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1 P_1 \partial \alpha_2 P_2} \frac{1}{|P_1 P_2|^3} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_1 P_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2 P_2} \left(\frac{1}{|P_1 P_2|^3} \right) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2 P_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1 P_1} \left(\frac{1}{|P_1 P_2|^3} \right) + F \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 P_1 \partial \alpha_2 P_2} \left(\frac{1}{|P_1 P_2|^3} \right) = \frac{1}{|P_1 P_2|^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1 P_1 \partial \alpha_2 P_2} - \\ &- \frac{3}{|P_1 P_2|^4} \cos(\Omega \wedge \alpha_2^*) \frac{\partial F}{\partial \alpha_1 P_1} + \frac{3}{|P_1 P_2|^4} \cos(\Omega \wedge \alpha_1^*) \frac{\partial F}{\partial \alpha_2 P_2} + (3 \cos(\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*) - \\ &- 15 \cos(\Omega \wedge \alpha_1^*) \cos(\Omega \wedge \alpha_2^*)) \frac{F}{|P_1 P_2|^5}. \end{aligned}$$

Из (5.16) — (5.18) и Леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha_i^* \wedge \Omega) \cos(\varphi_i \wedge \Omega) \frac{r_i^2}{|\sin(\varphi_i \wedge \alpha_i^*)|} d\alpha_i &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha_1^* \wedge \alpha_2^*) \cos(\varphi_1 \wedge \Omega) \cos(\varphi_2 \wedge \Omega) r_1^2 r_2^2}{|\sin(\varphi_1 \wedge \alpha_1^*) \sin(\varphi_2 \wedge \alpha_2^*)|} d\alpha_1 d\alpha_2 &= S_1 S_2 M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M &= \cos(\omega_1 \wedge \omega_2) \cos(\Omega \wedge \xi_1) \cos(\Omega \wedge \xi_2) + \cos(\xi_1 \wedge \xi_2) \cos(\Omega \wedge \omega_1) \cos(\Omega \wedge \omega_2) - \\ &- \cos(\xi_1 \wedge \omega_2) \cos(\Omega \wedge \omega_1) \cos(\Omega \wedge \xi_2) - \cos(\omega_1 \wedge \xi_2) \cos(\Omega \wedge \xi_1) \cos(\Omega \wedge \omega_2). \end{aligned}$$

Из формулы (5.14) и Леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|P_1 P_2|} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial \alpha_1 P_1 \partial \alpha_2 P_2} \frac{\cos(\Omega \wedge \varphi_1) \cos(\Omega \wedge \varphi_2) r_1^2 r_2^2}{|\sin(\alpha_1^* \wedge \varphi_1) \sin(\alpha_2^* \wedge \varphi_2)|} d\alpha_1 d\alpha_2 &= \\ = \frac{S_1 S_2}{|P_1 P_2|} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\Omega \wedge \xi_1) \cos(\Omega \wedge \xi_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\Omega \wedge \xi_1) \cos(\Omega \wedge \omega_2) - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\Omega \wedge \omega_1) \cos(\Omega \wedge \xi_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\Omega \wedge \omega_1) \cos(\Omega \wedge \omega_2) \right]. \end{aligned}$$

Из последних трех соотношений следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) \frac{r_1^2 r_2^2 |P_1 P_2|^2 \cos(\Omega^{\wedge} \varphi_1) \cos(\Omega^{\wedge} \varphi_2)}{|\sin(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1) \sin(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2)|} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \frac{3F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} S_1 S_2 M + \frac{S_1 S_2}{|P_1 P_2|} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\Omega^{\wedge} \xi_1) \cos(\Omega^{\wedge} \xi_2) - \right. \\ & - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\Omega^{\wedge} \xi_1) \cos(\Omega^{\wedge} \omega_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\Omega^{\wedge} \omega_1) \cos(\Omega^{\wedge} \xi_2) + \\ & \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\Omega^{\wedge} \omega_1) \cos(\Omega^{\wedge} \omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Интегралы от остальных членов в (5.10) могут быть вычислены аналогично. В частности

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^2 r_2^2 |P_1 P_2|}{|\sin(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1) \sin(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2)|} (\cos(\Omega^{\wedge} \varphi_1) \cos(\alpha_1^{\wedge} \varphi_2) + \\ & + \cos(\Omega^{\wedge} \varphi_2) \cos(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1)) \frac{\partial}{\partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = - \frac{3F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} S_1 S_2 M + \\ & + \frac{S_1 S_2}{|P_1 P_2|^2} \left[\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \omega_2 P_2} (\cos(\xi_1^{\wedge} \xi_2) \cos(\Omega^{\wedge} \omega_1) - \cos(\omega_1^{\wedge} \xi_2) \cos(\Omega^{\wedge} \xi_1)) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \xi_2 P_2} (\cos(\omega_1^{\wedge} \omega_2) \cos(\Omega^{\wedge} \xi_1) - \cos(\xi_1^{\wedge} \omega_2) \cos(\Omega^{\wedge} \omega_1)) \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^2 r_2^2 |P_1 P_2|}{|\sin(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1) \sin(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2)|} (\cos(\Omega^{\wedge} \varphi_1) \cos(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2) + \\ & + \cos(\Omega^{\wedge} \varphi_2) \cos(\alpha_2^{\wedge} \varphi_1)) \frac{\partial}{\partial \alpha_1^* P_1} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = - \frac{3F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} S_1 S_2 M - \\ & - \frac{S_1 S_2}{|P_1 P_2|^2} \left[\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \omega_1 P_1} (\cos(\xi_1^{\wedge} \xi_2) \cos(\Omega^{\wedge} \omega_2) - \cos(\xi_1^{\wedge} \omega_2) \cos(\Omega^{\wedge} \xi_2)) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \xi_1 P_1} (\cos(\omega_1^{\wedge} \omega_2) \cos(\Omega^{\wedge} \xi_2) - \cos(\omega_1^{\wedge} \xi_2) \cos(\Omega^{\wedge} \omega_2)) \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^2 r_2^2}{|\sin(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1) \sin(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2)|} (\cos(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1) \cos(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2) + \\ & + \cos(\alpha_1^{\wedge} \varphi_2) \cos(\alpha_2^{\wedge} \varphi_1)) \frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} 2S_1 S_2 (\cos(\xi_1^{\wedge} \xi_2) \cos(\omega_1^{\wedge} \omega_2) - \cos(\xi_1^{\wedge} \omega_2) \cos(\omega_1^{\wedge} \xi_2)), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^2 r_2^2 \cos(\varphi_1^{\wedge} \varphi_2)}{|\sin(\alpha_1^{\wedge} \varphi_1) \sin(\alpha_2^{\wedge} \varphi_2)|} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^* P_1 \partial \alpha_2^* P_2} \left(\frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} S_1 S_2 M + \frac{S_1 S_2}{|P_1 P_2|^2} \left[\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \omega_1 P_1} (\cos(\xi_1 \wedge \xi_2) \cos(\Omega \wedge \omega_2) - \right. \\
&\quad - \cos(\xi_1 \wedge \omega_2) \cos(\Omega \wedge \xi_2)) + \frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \xi_1 P_1} (\cos(\omega_1 \wedge \omega_2) \cos(\Omega \wedge \xi_2) - \\
&\quad - \cos(\omega_1 \wedge \xi_2) \cos(\Omega \wedge \omega_2)) - \frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \omega_2 P_2} (\cos(\xi_1 \wedge \xi_2) \cos(\Omega \wedge \omega_1) - \\
&\quad - \cos(\omega_1 \wedge \xi_2) \cos(\Omega \wedge \xi_1)) - \frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial \xi_2 P_2} (\cos(\omega_1 \wedge \omega_2) \cos(\Omega \wedge \xi_1) - \\
&\quad - \cos(\xi_1 \wedge \omega_2) \cos(\Omega \wedge \omega_1)) \left. \right] - \frac{F(P_1, P_2)}{|P_1 P_2|^3} 2S_1 S_2 (\cos(\xi_1 \wedge \xi_2) \cos(\omega_1 \wedge \omega_2) - \\
&\quad - \cos(\xi_1 \wedge \omega_2) \cos(\omega_1 \wedge \xi_2)) + \frac{S_1 S_2}{|P_1 P_2|} \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\xi_1 \wedge \xi_2) + \right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\xi_1 \wedge \omega_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} \cos(\omega_1 \wedge \xi_2) - \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} \cos(\omega_1 \wedge \omega_2) \right].
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Таким образом, используя (5.19) — (5.23), находим

$$\begin{aligned}
\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) &= \frac{S_1 S_2 h_1^2 h_2^2}{4|P_1 P_2|} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} (\cos(\Omega \wedge \xi_1) \cos(\Omega \wedge \xi_2) - \right. \\
&\quad - \cos(\xi_1 \wedge \xi_2)) + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} (\cos(\Omega \wedge \omega_1) \cos(\Omega \wedge \omega_2) - \cos(\omega_1 \wedge \omega_2)) - \\
&\quad - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \xi_2 P_2} (\cos(\Omega \wedge \xi_1) \cos(\Omega \wedge \omega_2) - \cos(\xi_1 \wedge \omega_2)) - \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \omega_2 P_2} (\cos(\Omega \wedge \omega_1) \cos(\Omega \wedge \xi_2) - \cos(\omega_1 \wedge \xi_2)) \right] + o(h_1^2 h_2^2).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

После некоторых элементарных преобразований, которые мы опускаем, (5.24)

можно написать в виде

$$\begin{aligned}
\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) &= \frac{h_1^2 h_2^2 S_1 S_2}{4|P_1 P_2|} \left[\cos(\Omega \wedge \Omega_1) \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega P_2 \partial \Omega_2 P_1} + \cos(\Omega \wedge \Omega_2) \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega P_1 \partial \Omega_1 P_2} - \right. \\
&\quad - \cos(\Omega \wedge \Omega_1) \cos(\Omega \wedge \Omega_2) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_1 P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_1 P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_1 P_1 \partial \Omega_1 P_2} \right) - \\
&\quad \left. - \cos(\Omega_1 \wedge \Omega_2) \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega P_1 \partial \Omega P_2} \right] + o(h_1^2 h_2^2).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Используя (5.2), имеем

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2])}{\mu_0([\pi_1] \cap [\pi_2])} &= \frac{|P_1 P_2|}{4 \cos(\Omega \wedge \Omega_2)} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega P_2 \partial \Omega_2 P_1} + \frac{|P_1 P_2|}{4 \cos(\Omega \wedge \Omega_1)} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega P_1 \partial \Omega_1 P_2} - \\
&\quad - \frac{|P_1 P_2|}{4} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega_1 P_1 \partial \omega_1 P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 P_1 \partial \xi_1 P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega_1 P_1 \partial \Omega_1 P_2} \right) - \\
&\quad - \frac{|P_1 P_2| \cos(\Omega_1 \wedge \Omega_2)}{4 \cos(\Omega \wedge \Omega_1) \cos(\Omega \wedge \Omega_2)} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega P_1 \partial \Omega P_2}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Полученное выражение симметрично, что следует из факта, что дифференциальный оператор

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1 P_1} \partial_{\omega_1 P_2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1 P_1} \partial_{\xi_1 P_2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1 P_1} \partial_{\Omega_1 P_2}}$$

не зависят от выбора $(\omega_1, \xi_1, \Omega_1)$. Это утверждение следует из стандартных выражений для $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_2 P_1} \partial_{\omega_2 P_2}}, \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_2 P_1} \partial_{\xi_2 P_2}}, \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_2 P_1} \partial_{\Omega_2 P_2}}$ в терминах $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1 P_1} \partial_{\omega_1 P_2}}, \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1 P_1} \partial_{\xi_1 P_2}}, \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1 P_1} \partial_{\Omega_1 P_2}}$. Следующая лемма раскрывает связь (5.26) с Леммой 4.

Лемма 5. Пусть $F(\nu) = F(P_1, P_2)$ задана по (3.1) с флаговой функцией $\rho \in C^{(3)}$. Тогда функция $H(\Omega_1, P_1, \Omega_2, P_2)$, равная левой части (5.26), непрерывна и ограничена на каждом Z_R , тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_{\Omega P_1} \partial_{\Omega P_2}} = 0 \quad (5.27)$$

имеет место для каждого направления Ω , перпендикулярного направлению Ω от P_1 к P_2 .

Доказательство : Из интегрального представления (3.1) следует

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega P_1} \partial_{\Omega P_2}} = 0 \quad \text{для } P_1 \neq P_2.$$

Отсюда выводим, что (5.26) непрерывна и ограничена на каждом Z_R тогда и только тогда, когда коэффициенты перед $\frac{1}{\cos(\Omega \wedge \Omega_1)}$ и $\frac{1}{\cos(\Omega \wedge \Omega_2)}$ равны нулю. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega P_1} \partial_{\Omega_1 P_2}} = \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega P_2} \partial_{\Omega_2 P_1}} = 0.$$

Из (3.1) вытекает, что эти два условия эквивалентны условию (5.27).

Используя Леммы 4 и 5 получаем следующий критерий.

Теорема 2. Валюация Ψ_F , определенная на кольце U_Γ с помощью флаговой функции $\rho(P, \Omega) \in C^{(3)}$ посредством формул (3.1), (4.1) и (4.8), порождает знакопеременную меру μ на кольце Γ тогда и только тогда, когда функция F , определенная по (3.1), удовлетворяет условию (5.27). Плотность $H(\gamma)$ меры μ дается по следующей формуле :

$$H(\gamma) = -\frac{|P_1 P_2|}{4} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1 P_1} \partial_{\omega_1 P_2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1 P_1} \partial_{\xi_1 P_2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1 P_1} \partial_{\Omega_1 P_2}} \right). \quad (5.28)$$

§6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Целью настоящего параграфа является преобразование условия (5.27) и представление плотности H в терминах флаговой функции $\rho(P, \Omega)$. Для этой цели вычислим производную $\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_\beta P_2}$ для некоторого $\beta \in S^2$. Обозначим через P_2^* точку, полученную из P_2 сдвигом b в направлении β ; через r и r_2 — длины отрезков (P_1, P_2) , (P_1, P_2^*) соответственно, а через Ω_2^* — направление отрезка (P_1, P_2^*) . Ясно, что $r_2 - r = \cos(\Omega \wedge \beta)b + o(b)$ и, следовательно

$$F(P_1, P_2^*) - F(P_1, P_2) = \int_0^r [\rho(l, \Omega_2^*) - \rho(l, \Omega)] dl + \int_r^{r_2} \rho(l, \Omega_2^*) dl + o(b). \quad (6.1)$$

Из (6.1) следует, что

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_\beta P_2} = \frac{\sin(\Omega \wedge \beta)}{r} \int_0^r \left[\frac{\partial \rho}{\partial_n P} l + \frac{\partial \rho}{\partial_n \Omega} \right] dl + \rho(P_2, \Omega) \cos(\Omega \wedge \beta), \quad (6.2)$$

где n — направление, перпендикулярное к Ω и компланарное с β и Ω , $\frac{\partial \rho}{\partial_n P}$ — производная флаговой функции ρ в направлении n относительно P , а $\frac{\partial \rho}{\partial_n \Omega}$ — производная функции ρ в направлении n относительно Ω . Так как β перпендикулярна к Ω ($\beta = n$), то из (6.2) получаем

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_n P_2} = \frac{1}{r} \int_0^r \left[\frac{\partial \rho}{\partial_n P} l + \frac{\partial \rho}{\partial_n \Omega} \right] dl. \quad (6.3)$$

В правой части (6.3) сделаем замену переменной $l = r - t$:

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_n P_2} = \frac{1}{r} \int_0^r \left[\frac{\partial \rho}{\partial_n P} (r - t) + \frac{\partial \rho}{\partial_n \Omega} \right] dt, \quad (6.4)$$

где интеграл берется по отрезку (P_2, P_1) .

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_n P_1 \partial_n P_2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \left[\frac{\partial \rho}{\partial_n P} (r - t) + \frac{\partial \rho}{\partial_n \Omega} \right] dt \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \int_0^r \left[\frac{\partial \rho}{\partial_n P} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial_n P \partial_n \Omega} \right] t dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие (5.27) эквивалентно дифференциальному тождеству

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_n P \partial_n \Omega}, \quad (6.5)$$

которое имеет место для каждого направления n , перпендикулярного направлению Ω (ср. с (3.5)).

Перейдем к вычислению плотности $H(\gamma)$. Так как значение $H(\gamma)$ не зависит от выбора $(\omega_1, \xi_1, \Omega_1)$, можем использовать любую ортогональную тройку направлений вида (n_1, n_2, Ω) . Используя (6.5), из (6.2) получаем

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_{n_1} P_2} = \frac{\partial \rho(P_2, \Omega)}{\partial_{n_1} \Omega},$$

$$\frac{\partial F(P_1^*, P_2)}{\partial_{n_1} P_2} = \frac{\partial \rho(P_2, \Omega_1^*)}{\partial_{n_1} \Omega} \sin(\Omega_1^* \wedge n_1) + \rho(P_2, \Omega_1^*) \cos(\Omega_1^* \wedge n_1),$$

где P_1^* — точка, полученная из P_1 сдвигом b в направлении n_1 , а Ω_1^* — направление отрезка (P_1^*, P_2) . Из последних двух уравнений имеем

$$\frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_{n_1} P_1 \partial_{n_1} P_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \rho}{(\partial_{n_1} \Omega)^2} - \frac{\rho}{r}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_{n_2} P_1 \partial_{n_2} P_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \rho}{(\partial_{n_2} \Omega)^2} - \frac{\rho}{r}.$$

Теперь из последних двух уравнений и того, что $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega} P_1 \partial_{\Omega} P_2} = 0$, получим

$$H(\gamma) = \frac{1}{4} [2\rho + \Delta_2 \rho], \quad (6.6)$$

где Δ_2 — лапласиан на S^2 .

Таким образом, из Теоремы 2, Следствия 1 и уравнений (6.5), (6.6) получаем следующий результат :

Теорема 3. Следующие три утверждения эквивалентны :

1) флаговая функция $\rho(P, \Omega) \in C^{(3)}$ порождает знакпеременную меру μ в Π с помощью формул (3.1), (4.1), (4.8);

2) для каждой плоскости e сужение $\rho(P, \Omega)$ на плоскость e порождает с помощью (3.2) знакпеременную меру μ_e в пространстве G_e прямых на плоскости e ;

3) для любых $P, \Omega, \rho(P, \Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \rho(P, \Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho(P, \Omega)}{\partial_{\Omega} P \partial_n \Omega}, \quad (6.7)$$

тождественно для любого направления n , ортогонального к Ω .

Определение. Флаговая функция называется выпуклой, если $2\rho + \Delta_2\rho \geq 0$ для каждой точки $P \in \mathbb{R}^3$.

Следствие 2. Выпуклая функция $\rho(P, \Omega) \in C^{(3)}$ удовлетворяет условию (6.7) для каждого направления n , ортогонального к Ω тогда и только тогда, когда $F(\nu)$, заданная по (3.1), есть метрика в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовы прямые суть геодезические. Тогда $\rho(P, \Omega)$ называется финслеровой плотностью метрики $F(\nu)$, см. [7].

Доказательство : Если $\rho(P, \Omega)$ — выпуклая и удовлетворяет уравнению (6.7), то μ является неотрицательной мерой. Это утверждение справедливо для каждой μ_ϵ . Следовательно, на каждой ϵ сегментная функция $\mu_\epsilon([\nu]_\epsilon)$ — непрерывная метрика, для которой геодезические суть обычные евклидовы прямые (см. [5]). Доказательство первого утверждения следует из замечания, что сегментная функция $\mu_\epsilon([\nu]_\epsilon) = F(\nu)$ не зависит от ϵ . Если ρ — финслерова плотность метрики в $\mathbb{R}^3$, для которой геодезическими являются обычные евклидовы прямые, то сужение ρ на плоскость ϵ — финслерова плотность метрики на плоскости ϵ , для которой геодезическими являются евклидовы прямые. Следовательно, ρ удовлетворяет уравнению (6.7) и является выпуклой (см. [7]).

ABSTRACT. Guided by a decomposition of Combinatorial Integral Geometry, we define a class of valuations in the space Π of Euclidean lines in $\mathbb{R}^3$. The paper studies the possibility of extension of the valuations to signed measures and nonnegative measures in Π . The results are applied to obtain a description of metrics in $\mathbb{R}^3$ for which the Euclidean lines are the geodesics.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, John Wiley and Sons, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, "Введение в стохастическую геометрию" Москва, Наука, 1989.
3. Р. В. Амбарцумян, "Конечно-аддитивные функционалы в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том 28, № 2, ст. 51 — 60, 1993.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1 — 21, 1992.
5. R. V. Ambartzumian (with the Appendix by V. K. Oganian), "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
6. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых

- финслеровыми метриками", Известия НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 69 — 80, 1992.
7. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, pp. 41 — 65, 1998.
8. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 5 — 53, 1996.
9. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей Γ ", Известия НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 1 — 57, 1994.
10. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей Π ", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 44 — 74, 1996.

16 января 1998

Институт математики
НАН Армении

ИЕРАРХИЯ ПРОСТЫХ ВАЛЮАЦИЙ В $\mathbb{R}^3$

Г. С. Сукнасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 4, 1998

В работе рассмотрены валюации на выпуклых ограниченных многогранниках в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассматривается иерархия $M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset M_0$, где M_k – класс валюаций, представимых в виде k -мерных интегралов ($k = 0, 1, 2, 3$) от фреймовых плотностей. Получены некоторые необходимые и достаточные условия принадлежности валюаций классам M_k ($k = 0, 1, 2, 3$).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим класс $\mathcal{D}$ выпуклых компактных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Под *многогранником* понимаем пересечение конечного числа замкнутых подпространств. *Валюацией* называется отображение $m : \mathcal{D} \rightarrow (-\infty, \infty)$, аддитивное в следующем смысле : для любых $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ таких, что $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{D}$, имеет место

$$m(D_1 \cup D_2) + m(D_1 \cap D_2) = m(D_1) + m(D_2).$$

Валюация называется *простой*, если равна нулю на многогранниках, имеющих нулевой объем. *Плоским* называем многогранник $D \in \mathcal{D}$, имеющий нулевой объем, но ненулевую площадь поверхности. Мы полагаем, что плоские многогранники состоят из двух конгруэнтных граней, у которых внешние нормали противоположно направлены. *Вырожденным* называем многогранник, имеющий нулевую площадь поверхности. Чтобы валюация была простой достаточно, чтобы она была равна нулю на плоских многогранниках, так как всякий вырожденный многогранник можно представить в виде пересечения двух плоских многогранников, лежащих в одной плоскости.

В настоящей работе рассматриваются простые валюации, зависящие от функций, определенных в пространстве "фреймов" (см. §2). Флаговые (фреймовые) функции и образованные с их помощью валюации рассматривались в работах Р. В. Амбарцумяна [1] – [3], В. К. Оганяна [3], [4], Р. Г. Арамяна [5], Г. Ю. Паниной [6] и оказались чрезвычайно полезными для задач интегральной геометрии. В [1] – [6] изучались в основном валюации, заданные в пространстве прямых на плоскости и плоскостей в $\mathbb{R}^3$, и исследовалась задача нахождения условий, при которых эти валюации порождают локально конечные знакопеременные меры в соответствующих пространствах. Естественно ставить подобные вопросы и в евклидовых пространствах, и первые результаты в этом направлении получены в [7] для евклидовой плоскости, а в [8] – для многомерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

В работах Р. Шнайдера [9] и Д. Клейна [10] предложен несколько иной подход. Они изучали непрерывные трансляционно-инвариантные простые валюации, заданные на множестве $\mathcal{K}$ всех выпуклых компактных тел (не обязательно многогранников) в $\mathbb{R}^n$. Для случая $n = 3$ ими получены следующие результаты.

Теорема 1.1. (Р. Шнайдер [9]) *Каждая трансляционно-инвариантная простая непрерывная (в метрике Хаусдорфа) на $\mathcal{K}$ валюация m представима в виде*

$$m(K) = L(K) + \iint_{\partial K} u(\omega) \, ds, \quad K \in \mathcal{K}, \quad (1.1)$$

где L – мера Лебега (объем), ∂K – граница тела K , ω – направление внешней нормали тела K в точке $z \in \partial K$, $u(\omega)$ – некоторая нечетная функция на единичной сфере S_2 .

Теорема 1.2. (Д. Клейн [10]) *Если трансляционно-инвариантная простая непрерывная (в метрике Хаусдорфа) на $\mathcal{K}$ валюация m однородна, т.е. для любого числа λ имеет место*

$$m(\lambda K) = \lambda m(K), \quad K \in \mathcal{K}, \quad (1.2)$$

то m тождественно равна нулю.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные задачи для класса $\mathcal{D}$ вместо $\mathcal{K}$. Условие инвариантности относительно сдвигов оказывается не столь

важным для исследования фреймовых валютаций. Построена иерархия классов $M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset M_0$, где M_k – класс простых валютаций, представимых в виде k -мерных интегралов ($k = 0, 1, 2, 3$) от фреймовых плотностей из подходящих классов. Получены некоторые необходимые и достаточные условия принадлежности валютаций классам M_k .

Связи с Теоремами 1.1 и 1.2 становятся яснее, когда в §7 мы рассматриваем случай инвариантности относительно параллельных переносов. Применяя теорию, представленную в §2 – §6, мы строим пример валютации, непрерывной лишь на $\mathcal{D}$ и удовлетворяющей остальным условиям Теоремы 1.1, для которой представление (1.1) невозможно. В силу Теоремы 1.1, это есть пример валютации на $\mathcal{D}$, которую нельзя непрерывно продолжить на $\mathcal{K}$.

В §7 также построен пример ненулевой валютации, непрерывной лишь на $\mathcal{D}$ и удовлетворяющей остальным условиям Теоремы 1.2. Следовательно, в результатах Р. Шнайдера [9] и Д. Клейна [10] нельзя ослабить условия, заменив $\mathcal{K}$ множеством $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}$.

Закljučают работу два следствия, относящиеся к теории равносоставленных многогранников.

§2. ФЛАГИ И ФРЕЙМЫ

Флагом называется тройка (P, g, e) , где P – точка, g – прямая, e – плоскость, лежащие в $\mathbb{R}^3$, причем $P \in g \subset e$. Точку P мы называем вершиной, g – древком, e – полотнищем флага. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано начало координат O . Рассмотрим флаг (P, g, e) , опустим из O перпендикуляр на плоскость e , полученную проекцию обозначим через Q . Затем спроектируем Q ортогонально на древко g , получим точку Q' . Выпуклая оболочка точек O, Q, Q', P называется [11] *симплексом Шлефли* флага (P, g, e) .

Фреймом называется упорядоченная четверка

$$f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in S_2,$$

причем направления $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ должны быть взаимно-ортогональными. Точка P называется *вершиной* фрейма. Каждому фрейму $f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ поставим в

соответствие флаг (P, γ, e) , где γ — прямая, проходящая через P по направлению ω_3 , e — плоскость, проходящая через P ортогонально ω_1 . Заметим, что это отображение неоднозначно : каждому флагу соответствуют $2^3 = 8$ фреймов. Иногда (см. [7]) фреймы называют также *направленными флагами*.

Симплексом Шлефли фрейма называют симплекс Шлефли соответствующего флага. Каждому фрейму $f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ соответствует декартова система координат S_f , у которой начало в точке P , а координатные оси имеют направления ω_i . В дальнейшем под пространством фреймов понимаем произведение $\mathbb{R}^3 \times S_2 \times S_2 \times S_2$ с его обычной топологией.

Пусть F — функция, определенная в пространстве фреймов (фреймовая функция). Пусть у двух фреймов $f = (P, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $f' = (P, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$ с общей вершиной совпадают ровно два из трех направлений ω_i (очевидно, несовпадающие направления взаимно-противоположны). Если для всех таких пар фреймов имеет место

$$F(f) = -F(f'), \quad (2.1)$$

то фреймовая функция F называется *антисимметричной*.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПО ВЕРШИНАМ

В настоящем параграфе с помощью функций, определенных на фреймах, мы построим класс валютаций M_0 . Эти валютации представимы в виде конечной суммы фреймовых функций, причем суммирование ведется по вершинам многогранника.

Для данного многогранника $D \in \mathcal{D}$ обозначим через $V(D)$ множество вершин, а через $E(P, D)$ — множество ребер, выходящих из вершины $P \in V(D)$. Каждому ребру $\nu \in E(P, D)$ соответствуют две грани $S(\nu)$ и $S^*(\nu)$, примыкающие к ν . Пусть P, P' — концы ребра ν , направление от P к P' назовем *направлением ребра ν , исходя из P* . Рассмотрим в пространстве фреймов функцию $F(f)$, и построим в $\mathcal{D}$ следующий функционал :

$$\Psi_F(D) = \sum_{P \in V(D)} \sum_{\nu \in E(P, D)} [F(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) + F(P, \omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3)], \quad D \in \mathcal{D}, \quad (3.1)$$

где ω_1 — направление внешней нормали к грани $S(\nu)$, направление ω_2 лежит в плоскости, содержащей грань $S(\nu)$, и совпадает с направлением внешней

нормали к стороне ν многоугольника $S(\nu)$, ω_3 — направление ребра ν , исходя из P . Направления $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ определяются аналогично для грани S^* . Очевидно, $\omega_3 = \omega_3^*$. Для вырожденных D полагаем $\Psi_F(D) = 0$.

Лемма 3.1. (см. [8]) *Если фреймовая функция $F(f)$ антисимметрична, то функционал Ψ_F является простой валюацией.*

Обозначим через M_0 множество простых валюаций, допускающих представление (3.1) с некоторой фреймовой функцией F . Если $m \in M_0$, мы также говорим, что m допускает представление по вершинам. В [8] доказано, что M_0 совпадает с классом всех простых валюаций, а именно :

Теорема 3.1. (см. [8]) *Для всякой простой валюации $m(D)$ существует антисимметричная фреймовая функция F такая, что для любого многогранника $D \in \mathcal{D}$ имеет место*

$$m(D) = \Psi_F(D) = \sum_{P \in V(D)} \sum_{\nu \in B(P, D)} [F(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) + F(P, \omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)]. \quad (3.2)$$

В частности, в качестве F можно взять

$$F(f) = (-1)^{N(f)} m(T(f)), \quad (3.3)$$

где $N(f)$ — число положительных координат точки O в декартовой системе координат $\mathbb{C}_f$ (см. §2), $T(f)$ — симплекс Шлефли, соответствующий фрейму f .

Заметим, что $T(f)$ зависит от выбора начала координат O , следовательно представление (3.2) не единственно.

Пример 1. Объем симплекса Шлефли $T(f)$ равен $\frac{1}{6}|x_O y_O z_O|$, где (x_O, y_O, z_O) — координаты точки O в координатной системе $\mathbb{C}_f$, в частности $|x_O|$ равно длине $|OQ|$ ребра OQ симплекса $T(f)$, $|y_O| = |QQ'|$ и $|z_O| = |Q'P|$. Согласно (3.3), трехмерная мера Лебега имеет представление по вершинам с фреймовой функцией $F_O(f) = \frac{1}{6}x_O y_O z_O$.

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПО РЕБРАМ

Рассмотрим класс $\mathcal{F}_3$ непрерывных фреймовых функций $\rho(f)$, симметричных относительно последнего аргумента, т.е.

$$\rho(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \rho(P, \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_3) \equiv \rho(P, \omega_1, \omega_2),$$

где $\bar{\omega} \in S_2$ – направление, противоположное ω . Функцию $\rho(P, \omega_1, \omega_2) \in \mathcal{F}_3$ назовем антисимметричной, если для всех точек $P \in \mathbb{R}^3$ имеет место

$$\rho(P, \omega_1, \omega_2) = -\rho(P, \bar{\omega}_1, \omega_2) = -\rho(P, \omega_1, \bar{\omega}_2) = \rho(P, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2). \quad (4.1)$$

Имея антисимметричную функцию $\rho(f) \in \mathcal{F}_3$, построим функционал

$$\Phi_\rho(D) = \sum_{S \in S(D)} \int_{\partial S} \rho(l, \omega_1, \omega_2) dl, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (4.2)$$

где $S(D)$ – множество граней многогранника D , ∂S – граница многоугольника S в плоскости, содержащей S , ω_1 – направление внешней нормали к грани S , направление ω_2 лежит в плоскости, содержащей грань S , и совпадает с направлением внешней нормали к многоугольнику S в точке $l \in \partial S$, $\int_{\partial S} \cdot dl$ – криволинейный интеграл второго рода по границе ∂S многоугольника S в плоскости, содержащей грань S . Для вырожденных D полагаем $\Phi_\rho(D) = 0$.

Обозначим через $E(D)$ множество ребер многогранника D . Как и в §3, обозначим через $S(\nu)$ и $S^*(\nu)$ две примыкающие к $\nu \in E(D)$ грани, а через ω_1^*, ω_2^* – соответствующие направления для грани S^* . Тогда (4.2) можно представить в другом виде, оправдывающем название “представления по ребрам”:

$$\Phi_\rho(D) = \sum_{\nu \in E(D)} \int_\nu [\rho(l, \omega_1, \omega_2) + \rho(l, \omega_1^*, \omega_2^*)] dl, \quad D \in \mathcal{D}. \quad (4.3)$$

Очевидно, что функционал Φ_ρ является простой валюацией. Обозначим через M_1 множество простых валюаций допускающих представление (4.2) или (4.3) с некоторой фреймовой функцией $\rho(f) \in \mathcal{F}_3$. Если $m \in M_1$, то мы говорим, что m имеет представление по ребрам. Если $m = \Phi_\rho$, то функцию $\rho(f)$ называем *реберной плотностью* валюации m .

Согласно Теореме 3.1 имеем $M_1 \subset M_0$. В отличие от представления по вершинам, не всякая простая валюация имеет представление по ребрам, т.е. вышеприведенное включение строгое. Приведем пример валюации $m \in M_0 \setminus M_1$. Рассмотрим флаг $\hat{f}$, ему соответствуют 8 фреймов $\{f_1, \dots, f_8\}$. Определим фреймовую функцию F следующим образом: $F(f) = 0$ при $f \notin \{f_1, \dots, f_8\}$, и $F(f_i) = \pm 1$. Знак выберем так, чтобы выполнялось условие антисимметричности

(2.1). Подставим F в (3.1). Согласно Лемме 3.1 получим простую валюацию Ψ_F . Очевидно, $\Psi_F \notin M_1$.

Связь между фреймовыми функциями F и ρ и достаточное условие представимости по ребрам можно получить следующим образом. Пусть антисимметричная (в смысле (2.1)) фреймовая функция $F(f)$ имеет непрерывную производную $\rho(f) = \frac{\partial F}{\partial_{\omega_3} P}$ по направлению ω_3 , определяемую как следующий предел :

$$\rho(P, \omega_1, \omega_2) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [F(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) + F(P', \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_3)], \quad (4.4)$$

где точка P' получается из P сдвигом длиной δ в направлении ω_3 . Из антисимметричности функции F следует, что ρ не зависит от ω_3 и антисимметрична (но уже в смысле (4.2)). В силу классической формулы Ньютона-Лейбница, для ребра $\nu = PP'$ с концами $P, P' \in V(D)$ имеем

$$F(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) + F(P', \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_3) = \int_{\nu} \rho(l, \omega_1, \omega_2) dl. \quad (4.5)$$

Подставляя эти суммы в (3.1), получим представление по ребрам для Ψ_F . Следовательно $\Psi_F(D) = \Phi_\rho(D)$ для всех $D \in \mathcal{D}$. Из Теоремы 3.1 и формул (3.3), (4.4) получим следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Чтобы простая валюация $m(D)$ имела представление по ребрам $m(D) = \Phi_\rho(D)$ достаточно, чтобы для всех фреймов существовала производная по направлению древка соответствующего флага $\frac{\partial m(T(f))}{\partial_{\omega_3} P}$, где $T(f)$ — симплекс Шлефли фрейма f . При этом $m = \Phi_\rho$ с реберной плотностью*

$$\rho(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (-1)^{N(f)} \frac{\partial m(T(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3))}{\partial_{\omega_3} P}, \quad (4.6)$$

где $N(f)$ — число положительных координат точки O в декартовой системе координат $\mathbb{C}_f$.

Заметим, что из свойства нечетности производной по направлению следует, что (4.6) меняет знак при замене ω_3 на $\bar{\omega}_3$, и из определения числа $N(f)$ получим $\rho(P, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \rho(P, \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_3)$. Следовательно, $\rho(f) \in \mathcal{F}_3$.

Открытая задача : Подчеркивая зависимость от начала координат O и от валюации m , обозначим реберную плотность (4.6) через $\rho_{O,m}(f)$. Легко видеть,

что для любой вероятностной меры $\mathbb{P}$ на $\mathbb{R}^3$ фреймовая функция

$$\rho(f) = \int \rho_{O,m}(f) \mathbb{P}(dO)$$

порождает посредством (4.2) первоначальную валюацию m . Совпадает ли класс

$$\left\{ \rho(f) \in \mathcal{F}_3 : \text{для некоторой вероятностной меры } \mathbb{P}, \rho(f) = \int \rho_{O,m}(f) \mathbb{P}(dO) \right\} \quad (4.7)$$

с классом всех фреймовых функций из $\mathcal{F}_3$, порождающих посредством (4.2) валюацию m ? Отметим, что класс (4.7) участвует в одном из утверждений следующего параграфа.

Пример 2. В координатной системе $\mathbf{C}_f$ (см. Пример 1) имеем $\frac{\partial}{\partial_{\omega_3} P} = \frac{\partial}{\partial z}$. Следовательно, трехмерная мера Лебега имеет представление по ребрам с плотностью $\rho_O(f) = \frac{1}{6} x_O y_O$.

§5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПО ГРЯНЯМ

Пусть $\mathcal{F}_2$ – класс непрерывных фреймовых функций $u(f)$, не зависящих от последних двух аргументов, т.е. $u(f) = u(P, \omega_1)$. Рассмотрим функционал

$$\mu_u(D) = \iint_{\partial D} u(s, \omega) ds, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (5.1)$$

где $\omega \in S_2$ – направление внешней нормали к многограннику D в точке $s \in \partial D$, $\iint_{\partial D} \cdot ds$ – поверхностный интеграл по граням многогранника D .

Очевидно, что функционал μ_u является валюацией (не обязательно простой), (5.1) называем *представлением валюации по граням*, а функцию $u(f)$ называем *граневой плотностью* валюации μ_u . Валюация μ_u является простой тогда и только тогда, когда выполнено условие нечетности: для всех $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in S_2$ имеет место

$$u(P, \omega) = -u(P, \bar{\omega}). \quad (5.2)$$

Обозначим через M_2 множество простых валюаций, допускающих представление по граням с некоторой нечетной граневой плотностью $u(f) \in \mathcal{F}_2$. Заменяя в (5.1) по классической формуле Грина двойной интеграл на криволинейный, получим (4.2). Следовательно

$$M_2 \subset M_1 \subset M_0. \quad (5.3)$$

Эти включения строгие, что показывает следующая Теорема 5.2. Рассмотрим плоскость $e(P, \omega)$, проходящую через точку $P \in \mathbb{R}^3$ и имеющую направление нормали ω . На плоскости e выберем декартовую систему координат $\{x, y\}$. "Усеченную" фреймовую функцию $\rho(P, \omega, \omega_2) \in \mathcal{F}_3$ будем записывать в виде $\rho(P, \omega, \varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$ – угол между направлением $\omega_2 \in S_2$ и осью абсцисс в плоскости e . Заметим, что из условия ортогональности аргументов фрейма (т.е. $\cos(\widehat{\omega\omega_2}) = 0$) следует, что направление ω_2 лежит в плоскости e . Символ $\frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P}$ понимаем, как производную фреймовой функции $\rho(f)$, когда вершина P меняется вдоль оси абсцисс, оставаясь в плоскости e . В [8] доказана теорема, трехмерный случай которой представлен ниже.

Теорема 5.1. (см. [8]) Пусть m – простая валюация из M_1 с реберной плотностью ρ . Если для любого $\omega \in S_2$ плотность $\rho(f)$ имеет вид

$$\rho(P, \omega, \varphi) = \rho(P, \omega, 0) \cos \varphi + \rho(P, \omega, \pi/2) \sin \varphi, \quad (5.4)$$

то $m \in M_2$. Если выполнено (5.4), то выражение

$$u(P, \omega) = \frac{\partial}{\partial_x P} \rho(P, \omega, 0) + \frac{\partial}{\partial_y P} \rho(P, \omega, \pi/2) \quad (5.5)$$

не зависит от выбора системы координат на плоскости $e(P, \omega)$ и $m = \mu_u$.

Что касается необходимости, мы имеем лишь частичный результат.

Теорема 5.2. Пусть m – простая валюация из M_1 с реберной плотностью ρ . Если $m \in M_2$ и ρ принадлежит классу (4.7), то ρ необходимо имеет вид (5.4). Доказательство основано на понятии "центрированных валюаций", предложенного в [8].

Рассмотрим плоскость e , имеющую направление нормали ω . Обозначим через Q проекцию начала координат O на плоскость e . На плоскости e выберем какую-нибудь декартовую систему координат $\{x, y\}$ с началом в Q . Обозначим через $H_e(P, P')$ выпуклую оболочку точек O, Q, P, P' , где $P, P' \in e$. Для произвольной простой валюации $m(D)$ положим

$$h_{e,P}(P') = m(H_e(P, P')).$$

Пусть φ – направление на плоскости e от P к P' . Из аддитивности валлюации $m(D)$ следует, что производная $\frac{\partial m(H_e(P, P'))}{\partial_\varphi P}$ зависит лишь от направления φ и не зависит от расстояния $|PP'|$. Из свойств производной по направлению имеем

$$\frac{\partial m(H_e(P, P'))}{\partial_\varphi P} = \frac{\partial h_{e,P}(P')}{\partial x} \Big|_P \cos \varphi + \frac{\partial h_{e,P}(P')}{\partial y} \Big|_P \sin \varphi, \quad (5.6)$$

Из Теорем 4.1, 5.1 и формул (5.5), (5.6) получим следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Чтобы простая валлюация $m(D)$ имела представление по граням достаточно, чтобы в каждой плоскости e для любой точки $P \in e$ функция $h_{e,P}(x, y)$ была дважды дифференцируемой по всем направлениям. Если это выполнено, то смешанная производная*

$$u(P, \omega) = \frac{\partial}{\partial_\omega P} \left[\frac{\partial h_{e,P}(P')}{\partial y} \Big|_P \right] + \frac{\partial}{\partial_\omega P} \left[\frac{\partial h_{e,P}(P')}{\partial x} \Big|_P \right] \quad (5.7)$$

не зависит от выбора системы координат и равна соответствующей гранивой плотности, т.е. $m = \mu_u$.

Отметим, что всякую валлюацию, заданную на $\mathcal{D}$ и допускающую представление по граням, можно непрерывно (в метрике Хаусдорфа) продолжить на множество $\mathcal{K}$ всех выпуклых тел. Это продолжение осуществляется посредством (ср. (5.1))

$$\mu_u(K) = \iint_{\partial K} u(s, \omega) \, ds, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Пример 3. Рассмотрим представление меры Лебега по ребрам с реберной плотностью $\rho_O(f) = \frac{1}{6} x_O y_O$ (см. Пример 2). Пусть (x, y) – декартовы координаты точки $P \in \mathbb{R}^3$ на плоскости $e(P, \omega)$, проходящей через P ортогонально ω . Запишем каноническое уравнение прямой, имеющей на плоскости e направление нормали φ и удаленной на расстояние y_O от начала:

$$y_O = x \cos \varphi + y \sin \varphi. \quad (5.8)$$

В силу (5.8), для фрейма $f = (P, \omega, \varphi) \in \mathcal{F}_3$ имеем

$$\rho_O(P, \omega, \varphi) = \frac{1}{6} x_O (x \cos \varphi + y \sin \varphi).$$

Следовательно, выполнено (5.4) и применяя (5.5), получаем, что трехмерная мера Лебега имеет представление по граням с гранивой плотностью $u_O(P, \omega) = 1/3 x_O$, где x_O – расстояние (со знаком) от начала координат O до плоскости $e(P, \omega)$.

§6. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ МЕРЫ

Обозначим через M_3 множество валюаций $m(D)$, допускающих представление в виде тройного интеграла :

$$m(D) = \iiint_D g(P) dP, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (6.1)$$

где $g(P)$ — некоторая функция, определенная в $\mathbb{R}^3$, dP — мера Лебега в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, всякая валюация вида (6.1) является простой (более того она является знакопеременной мерой). Заменяя в (6.1) по классической формуле Гаусса-Остроградского тройной интеграл на поверхностный, получим (5.1). Следовательно, имеем иерархию классов простых валюаций :

$$M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset M_0. \quad (6.2)$$

В [8] доказана теорема, трехмерный случай которой представлен ниже.

Теорема 6.1. *Простую валюацию $\mu_u \in M_2$ с граничной плотностью $u(P, \omega)$ можно продолжить до знакопеременной меры $m \in M_3$ тогда и только тогда, когда для любого $\omega \in S_2$ плотность u имеет вид*

$$u(P, \omega) = \sum_{i=1}^3 u(P, \omega_i) \cos(\widehat{\omega \omega_i}), \quad (6.3)$$

где ω_i , $i = 1, 2, 3$ — направления осей координат. Если выполнено (6.3), то выражение

$$g(P) = \frac{\partial}{\partial x} u(P, \omega_1) + \frac{\partial}{\partial y} u(P, \omega_2) + \frac{\partial}{\partial z} u(P, \omega_3) \quad (6.4)$$

не зависит от выбора системы координат в $\mathbb{R}^3$ и представляет из себя плотность знакопеременной меры m относительно меры Лебега.

§7. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим важный частный случай, когда фреймовые плотности не зависят от положения вершины фрейма (трансляционно-инвариантны). Порожденные ими валюации будут инвариантными относительно группы параллельных переносов. Пусть простая валюация Φ_r имеет представление (4.2) по ребрам с

трансляционно-инвариантной реберной плотностью $\rho(\omega_1, \omega_2)$, удовлетворяющей условию антисимметричности (ср. (4.1))

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = -\rho(\bar{\omega}_1, \omega_2) = -\rho(\omega_1, \bar{\omega}_2) = \rho(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2). \quad (7.1)$$

Из (4.3) имеем

$$\Phi_\rho(D) = \sum_{\nu \in E(D)} |\nu| [\rho(\omega_1, \omega_2) + \rho(\omega_1^*, \omega_2^*)], \quad D \in \mathcal{D}, \quad (7.2)$$

где $|\nu|$ — длина ребра ν . Из (7.1) и (7.2) легко получать следующее утверждение.

Следствие 7.1. Для всякой прямой призмы D и любой антисимметричной (в смысле (7.1)) трансляционно-инвариантной реберной плотности ρ имеет место $\Phi_\rho(D) = 0$.

Пример 4. Инвариантная мера λ плоскостей, пересекающих данный многогранник $D \in \mathcal{D}$, имеет вид (см. [12])

$$\lambda(D) = \sum_{\nu \in E(D)} |\nu| \alpha_\nu, \quad D \in \mathcal{D}, \quad (7.3)$$

где α_ν — внешний двугранный угол при ребре ν . Функционал (7.3) является непрерывной по Хаусдорфу валлюацией, инвариантной относительно группы евклидовых движений. Однако валлюация λ не является простой.

Теорема 7.1. Всякая простая валлюация $\Phi_\rho \in M_1$ с реберной плотностью ρ , имеющей непрерывные производные по всем аргументам, непрерывна по Хаусдорфу.

Доказательство : Пусть имеем последовательность $D_n \in \mathcal{D}$, $n \rightarrow \infty$ многогранников, сходящуюся к $D \in \mathcal{D}$, пусть ε_n — расстояние по Хаусдорфу между D_n и D . Обозначим через $E'(D_n)$ множество “ложных” ребер многогранника D_n , т.е. тех ребер, хаусдорфова ε_n -окрестность которых не пересекается с ребрами предельного многогранника D . Нам достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu \in E'(D_n)} \int_\nu [\rho(l, \omega_1, \omega_2) + \rho(l, \omega_1^*, \omega_2^*)] dl = 0. \quad (7.4)$$

Из гладкости ρ следует оценка

$$\left| \sum_{\nu \in E'(D_n)} \int_{\nu} [\rho(l, \omega_1, \omega_2) + \rho(l, \omega_1^*, \omega_2^*)] dl \right| \leq C \sum_{\nu \in E'(D_n)} |\nu| \alpha_{\nu}, \quad (7.5)$$

где C — некоторая постоянная. С другой стороны, для меры λ , определенной по (7.3) имеем

$$\lambda(D_n) = \sum_{\nu \in E'(D_n)} |\nu| \alpha_{\nu} + \sum_{\nu \in E(D_n) \setminus E'(D_n)} |\nu| \alpha_{\nu}.$$

Учитывая, что λ непрерывна по Хаусдорфу, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(D_n) = \lambda(D)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu \in E(D_n) \setminus E'(D_n)} |\nu| \alpha_{\nu} = \lambda(D),$$

из (7.5) получаем (7.4). Теорема 7.1 доказана.

Заметим, что валюация (7.2) однородна (в смысле (1.2)). Для построения примера ненулевой валюации, непрерывной по Хаусдорфу на $\mathcal{D}$ и удовлетворяющей остальным условиям Теоремы 1.2, достаточно построить гладкую фреймовую плотность $\rho(\omega_1, \omega_2)$, порождающую посредством (7.2) ненулевую валюацию. Для этого рассмотрим гладкую нечетную функцию $W_{\alpha}(\omega)$ на сфере, равную нулю всюду, кроме малой окрестности U фиксированной точки $\alpha \in S_2$, а также, разумеется, соответствующей окрестности $\bar{U}$ точки $\bar{\alpha}$. Построим фреймовую плотность ρ в виде произведения

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = W_{\alpha}(\omega_1) W_{\beta}(\omega_2), \quad (7.6)$$

где направление β ортогонально α , т.е. $\cos(\alpha, \beta) = 0$. Рассмотрим правильный тетраэдр T , у которого нормаль к одной из граней имеет направление α , а нормаль к одному из ребер этой грани имеет направление β . Если окрестность U достаточно мала, то направления нормалей к остальным граням не попадут в U . Следовательно, для тетраэдра T в (7.2) ровно одно слагаемое будет отлично от нуля, и мы получим $\Phi_{\rho}(T) \neq 0$. Из Теоремы 1.2 следует, что такую валюацию (непрерывную на многогранниках) нельзя непрерывно продолжить на множество $\mathcal{K}$ всех выпуклых компактных тел.

Пусть гладкая антисимметричная (в смысле (7.1)) трансляционно-инвариантная реберная плотность ρ не имеет вида (5.4), например (7.6). Каждая такая

ρ порождает посредством (7.2) простую валюацию $\Phi_\rho(D)$. В силу Теоремы 5.2, валюация $\Phi_\rho(D)$ не имеет представления по граням и является примером валюации, непрерывной лишь на $\mathcal{D}$ и удовлетворяющей остальным условиям Теоремы 1.1, для которой представление (1.1) невозможно. Из Теоремы 1.1 следует, что такую валюацию нельзя непрерывно продолжить на множество $\mathcal{K}$ всех выпуклых компактных тел.

Два многогранника D_1 и D_2 называются *равносоставленными* (относительно группы параллельных переносов), если их можно разбить на конечное число частей $D_i = \cup D_i^j$, $D_i^j \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2$, так что D_1^j и D_2^j взаимно-конгруэнтны. Из конечной аддитивности и трансляционной инвариантности валюации Φ_ρ вида (7.2) следует, что для равносоставленности многогранников D_1 и D_2 необходимо, чтобы

$$\Phi_\rho(D_1) = \Phi_\rho(D_2). \quad (7.7)$$

В теории равносоставленных фигур (см. [13]) известен класс валюаций, называемых функционалами Хадвигера. Каждый функционал Хадвигера имеет представление по ребрам (7.2) с дискретной трансляционно-инвариантной реберной плотностью $\rho(\omega_1, \omega_2)$, равной нулю всюду, кроме конечного числа фреймов. В [13] показано, что для функционалов Хадвигера условие (7.7) является достаточным для равносоставленности многогранников D_1 и D_2 . Приближая дискретные реберные плотности непрерывными типа (7.6), получим следующее утверждение.

Следствие 7.2. *Чтобы два многогранника $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ были равносоставленными относительно группы сдвигов, необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной трансляционно-инвариантной антисимметричной реберной плотности ρ имело место равенство (7.7).*

Известно [13], что зонотопы равносоставлены с прямыми призмами. Из Следствий 7.1 и 7.2 получаем.

Следствие 7.3. *Для всякого зонотопа Z и любой трансляционно-инвариантной антисимметричной реберной плотности ρ имеет место $\Phi_\rho(Z) = 0$, где Φ_ρ определяется по (7.2).*

В заключение укажем задачу, предложенную Р. В. Амбарцумяном : описать

валюации из $M_1 \setminus M_2$, допускающие непрерывное продолжение на класс всех *зоноидов*.

ABSTRACT. The paper considers valuations that live on bounded convex polyhedrons in Euclidian space $\mathbb{R}^3$. A hierarchy $M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset M_0$ is considered, where M_k is a class of valuations defined by means of k -dimensional integrals ($k = 0, 1, 2, 3$) of so-called frame densities. Some necessary and sufficient conditions for the inclusion of a valuation in M_k ($k = 0, 1, 2, 3$) are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том. 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 1 – 57, 1994.
4. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей II", Изв. НАН Армении, Математика, том. 31, № 4, стр. 53 – 89, 1996.
5. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
6. Г. Ю. Панина, "О клиновых плотностях в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 1, стр. 76 – 82, 1994.
7. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 75 – 89, 1994.
8. Г. С. Сукиасян, "О многомерных простых фреймовых валюациях", Изв. НАН Армении, Математика, том. 31, № 4, стр. 90 – 104, 1996.
9. R. Schneider, "Simple valuations on convex bodies", Mathematika, 1997.
10. D. A. Klain, G.- C. Rota, Introduction to Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, 1997.
11. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., Наука, 1967.
12. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology. J.Wiley, Chichester, 1982.
13. В. Г. Болтянский, Третья проблема Гильберта, М., Наука, 1977.

2 декабря 1997

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 33

НОМЕР 4

1998

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, III Сборник статей

	Страницы
Предисловие редактора.....	4
Инвариантное вложение в стохастической геометрии Р. В. Амбардумян	5
Интегральное уравнение Вольтерра в стереологии многоугольников Р. В. Амбардумян	18
Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости Р. В. Амбардумян, В. К. Оганян.....	35
Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ А. Н. Давтян	66
Иерархия простых валюаций в $\mathbb{R}^3$ Г. С. Сукиасян	88

CONTENTS

VOLUME 33

NUMBER 4

1998

JOURNAL OF
CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

ANALYTICAL IMPLICATIONS OF COMBINATORIAL
INTEGRAL GEOMETRY, III

Collection of Papers

	PAGES
Editor's Preface	1
Invariant imbedding in stochastic geometry R. V. Ambartzumian	2
Volterra integral equation in stereology of polygons R. V. Ambartzumian	15
Palm distributions in the analysis of homogeneous random line processes in the plane R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian	31
Valuations in the space of lines in $\mathbb{R}^3$ A. N. Davtian	59
A hierarchy of simple valuations in $\mathbb{R}^3$ H. S. Sukiasian	79

©1999 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.