

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Առաքելյան

Գ.Գ. Գևորգյան

Վ.Ս. Ջաջարյան

Ա.Ա. Թալալյան

Ն.Ե. Թովմասյան

Վ.Ա. Մարտիրոսյան

Ս.Ն. Մերգելյան

Բ.Ս. Նահապետյան

Ա.Բ. Ներսիսյան

Ռ.Լ. Շահբաղյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян

Г.Г. Геворкян

В.С. Закарян

А.Г. Камалян

В.А. Мартиросян

С.Н. Мергелян

Б.С. Нагапетян

А.Б. Нерсисян

А.А. Талалян

Н.Е. Товмасын

Р.Л. Шахбагян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь

М.А. Оганесян

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасын, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 3, 1998

В работе рассматриваются интегральные уравнения типа Вольтерра, а также обыкновенные дифференциальные уравнения типа Эйлера. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности аналитических решений этих уравнений. Полученные результаты применяются к исследованию краевой задачи Пуанкаре для правильно эллиптических уравнений второго порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – единичный круг $|z| < 1$ ($z = x + iy$), Γ – единичная окружность $|z| = 1$, $\overline{D}$ – замкнутый круг $|z| \leq 1$. Мы изучаем интегральные уравнения

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1} K_1(z, t) \varphi(t) dt + f_1(z), \quad (1)$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2} K_2(z, t) \overline{\varphi(\overline{t})} dt + f_2(z), \quad (2)$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1} K_1(z, t) \varphi(t) dt + \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2} K_2(z, t) \overline{\varphi(\overline{t})} dt + f_3(z), \quad (3)$$

где n_1, n_2 – неотрицательные постоянные, K_1, K_2 – функции комплексных переменных z, t , аналитичные в $|z| < 1$ и $|t| < 1$, непрерывные при $|z| \leq 1$ и $|t| \leq 1$. Во всех трех случаях решение $\varphi(z)$ будем искать в классе аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ функций. Черта над комплексным числом (или комплексной функцией) означает переход к комплексно сопряженным величинам.

Если $K_1(0, 0) = K_2(0, 0) = 0$, то уравнения (1) – (3) являются уравнениями Вольтерра и, следовательно, имеют единственное решение (см. [1]). В §1 получено условие однозначной разрешимости уравнений (1) – (3) и указан метод ее

решения. В §2 мы рассматриваем аналитические решения уравнений типа Эйлера. В §3 полученные в §1 и §2 результаты применяются к исследованию краевой задачи Пуанкаре для правильно эллиптических уравнений второго порядка.

§1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ

УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

1. Обозначим через M_n оператор

$$M_n \varphi = \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^z t^n K_1(z, t) \varphi(t) dt,$$

$$\|K_1\| = \max_{|z| \leq 1, |t| \leq 1} |K_1(z, t)|, \quad \|\varphi\| = \max_{|z| \leq 1} |\varphi(z)|.$$

Тогда

$$|M_n \varphi| \leq \frac{\|K_1\|}{n+1} \|\varphi\|. \quad (4)$$

Если $\|K_1\| < n+1$, то уравнение (1) однозначно разрешимо и его можно решить методом последовательных приближений (см. [2])

$$\varphi(z) = f_1(z) + \sum_{j=1}^{\infty} M_n^j f_1, \quad (5)$$

где M_n^j — j -я степень оператора M_n , т.е. $M_n^{j+1} f = M_n^j M_n f$.

Пусть теперь $\|K_1\| \geq n+1$. Представим функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m \varphi_0(z), \quad (6)$$

где c_k — комплексные постоянные, а $\varphi_0(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (6) в (1), получим

$$\begin{aligned} z^m \left[\varphi_0(z) - \frac{1}{z^{n_1+m+1}} \int_0^z t^{n_1+m} K_1(z, t) \varphi_0(t) dt \right] = \\ = f_1(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1+k} K_1(z, t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) искомыми являются аналитическая функция $\varphi_0(z)$ и постоянные $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$. Уравнение (7) можно записать в виде

$$z^m [\varphi_0(z) - M_{n_1+m} \varphi_0] = f_1(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k F_k(z), \quad (8)$$

где

$$F_k(z) = \frac{1}{z^{n_1+k+1}} \int_0^z t^{n_1+k} K_1(z, t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (9)$$

Отметим, что функции $\varphi_0(z) - M_{n_1+m}\varphi_0$ и $F_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ аналитичны в D и непрерывны в $\bar{D}$. Поскольку производные до порядка $m-1$ левой части (8) равны нулю в точке $z = 0$, то для разрешимости уравнения (8) необходимо выполнение условий

$$f_1(0) - c_0 + c_0 F_0(0) = 0, \quad (10)$$

$$f_1^{(j)}(0) - j!c_j + j!c_j F_j(0) + \sum_{k=0}^{j-1} c_k a_{jk} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (11)$$

$$a_{jk} = \psi_k^{(j)}(0), \quad \psi_k(z) = z^k F_k(z).$$

Система (10), (11) однозначно разрешима относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ тогда и только тогда, когда $F_k(0) \neq 1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Из (9) следует, что

$$\frac{K_1(0, 0)}{n_1 + k + 1} \neq 1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (12)$$

Пусть условие (12) выполнено для всех неотрицательных целых k . Тогда система (10), (11) однозначно разрешима. Подставляя решение $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ этой системы в (8), получим

$$\varphi_0(z) = M_{n_1+m}\varphi_0 + f_m(z), \quad (13)$$

где

$$f_m(z) = \frac{1}{z^m} \left[f_1(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k F_k(z) \right].$$

Из (10) и (11) следует, что $f_m(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Аналогично неравенству (4) получим

$$|M_{n_1+m}\varphi_0| \leq \frac{\|K_1\|}{n_1 + m + 1} \|\varphi_0\|. \quad (14)$$

Выберем m таким, чтобы $\|K_1\| < n_1 + m + 1$. Тогда уравнение (13) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений.

Таким образом, получена

Теорема 1.1. Если выполнено условие (12) для всех неотрицательных целых чисел k , то уравнение (1) однозначно разрешимо.

Пусть теперь для некоторого неотрицательного целого числа m_0

$$\frac{K_1(0, 0)}{n_1 + m_0 + 1} = 1. \quad (15)$$

Тогда

$$\frac{K_1(0,0)}{n_1+k+1} \neq 1, \quad \text{для } k=0,1,\dots, k \neq m_0.$$

Поэтому система (10), (11) при $j=0,1,\dots,m_0-1$ однозначно разрешима относительно $c_0, c_1, \dots, c_{m_0-1}$. Подставляя $c_0, c_1, \dots, c_{m_0-1}$ в уравнение (11) при $j=m_0$, получим

$$f_1^{(m_0)}(0) + \sum_{k=0}^{m_0-1} b_k f^{(k)}(0) = 0, \quad (16)$$

где b_k — некоторые постоянные, не зависящие от $f(z)$. Таким образом, условие (16) необходимо для разрешимости уравнения (1). Покажем, что оно является также достаточным условием разрешимости уравнения (1), а соответствующее однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение.

Пусть выполнено условие (16). Подставляя решение системы (10), (11) в (8), получим уравнение вида (13), однозначно разрешимое относительно аналитической функции $\varphi_0(z)$. Таким образом, условие (16) обеспечивает разрешимость неоднородного уравнения (1).

Теперь рассмотрим однородное уравнение (1). Из системы (10), (11) получим

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m_0-1} = 0, \quad c_k = \alpha_k c, \quad k = m_0, \dots, m-1, \quad (17)$$

где α_k — некоторые постоянные, $\alpha_{m_0} = 1$ и c — произвольные комплексные постоянные. Подставляя c_k из (17) в (8) при $f_1 = 0$, получим уравнение в виде (13), в котором функцию $f_m(z)$ можно представить в виде $f_m(z) = c g_m(z)$, где g_m — определенная аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$ функция. Решая это уравнение, получим $\varphi_0(z) = c \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ — решение уравнения (13) с $g_m(z)$ в правой части. Из (6) имеем

$$\varphi(z) = \sum_{k=m_0}^{m-1} c \alpha_k z^k + c z^{m_0} \varphi_1(z),$$

где c — произвольная комплексная постоянная. Следовательно, однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение (в поле комплексных чисел). Мы получили следующую теорему.

Теорема 1.2. Если для некоторого целого неотрицательного числа m_0 имеет место равенство (15), то однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение. Условие (16) необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (1).

2. Рассмотрим уравнение (2). Обозначим через P_n оператор

$$P_n \varphi = \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^z t^n K_2(z, t) \overline{\varphi(\bar{t})} dt.$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (6) в (2), получим

$$z^m [\varphi_0(z) - P_{n_2+m} \varphi_0] = f_2(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k z^k \Phi_k(z), \quad (18)$$

где

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{z^{n_2+k+1}} \int_0^z t^{n_2+k} K_2(z, t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (19)$$

Для разрешимости уравнения (2) необходимо выполнение условий

$$f_2(0) - c_0 + \bar{c}_0 \Phi_0(0) = 0, \quad (20)$$

$$f_2^{(j)}(0) - j! c_j + \bar{c}_j \Phi_j(0) + \sum_{k=0}^{j-1} \bar{c}_k b_{jk} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (21)$$

$$b_{jk} = \omega_k^{(j)}(0), \quad \omega_k(z) = z^k \Phi_k(z).$$

Для определения постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ получим систему уравнений (20), (21), которая однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$|\Phi_k(0)| \neq 1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (22)$$

Из (19) следует, что

$$\Phi_k(0) = \frac{K_2(0, 0)}{n_2 + k + 1}.$$

Поэтому уравнение (22) запишется в виде

$$\frac{|K_2(0, 0)|}{n_2 + k + 1} \neq 1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (23)$$

Пусть условие (23) выполнено для всех целых неотрицательных k . Решая систему (20), (21) относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ и подставляя в уравнение (18), получим

$$\varphi_0(z) = P_{n_2+m} \varphi_0 + g_m(z), \quad (24)$$

где

$$g_m(z) = \frac{1}{z^m} \left[f_2(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k z^k \Phi_k(z) \right]. \quad (25)$$

Так как постоянные $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ удовлетворяют условиям (20), (21), то функция $g_m(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Аналогично неравенству (4) получим

$$|P_{n_2+m}\varphi_0| \leq \frac{\|K_2\|}{n_2+m+1} \|\varphi_0\|.$$

Берем m так, чтобы имело место неравенство $\|K_2\| < n_2+m+1$. Тогда уравнение (24) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. Получили теорему.

Теорема 1.3. Если выполнено условие (23) для всех целых неотрицательных k , то уравнение (2) однозначно разрешимо.

Рассмотрим случай, когда для некоторого целого неотрицательного m_0 имеет место равенство

$$\frac{|K_2(0, 0)|}{n_2 + m_0 + 1} = 1. \quad (26)$$

Покажем, что в этом случае нарушается однозначная разрешимость уравнения (2). Предварительно рассмотрим уравнение

$$c - a\bar{c} = b, \quad (27)$$

где a и b — комплексные постоянные. Если $|a| \neq 1$, то

$$c = \frac{b + a\bar{b}}{1 - |a|^2}. \quad (28)$$

При $|a| = 1$ неоднородное уравнение (27) имеет решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(b\sqrt{a}) = 0$. В этом случае

$$c = \frac{1}{2}b + \frac{d}{\sqrt{a}}, \quad (29)$$

где d — произвольная вещественная постоянная. Исходя из формул (28), (29), получим, что неоднородная система уравнений (20), (21) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{m_0} a_k f_2^{(k)}(0) \right) = 0, \quad (30)$$

где a_k — некоторые вполне определенные постоянные и

$$a_{m_0} = \sqrt{\frac{K_2(0, 0)}{n_2 + m_0 + 1}}.$$

Пусть выполнено условие (30). Подставляя решение системы (20), (21) в (25), получим, что функция $g_m(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$. Поэтому уравнение (24) в этом случае также однозначно разрешимо. Следовательно, условие (30) необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (2).

Теперь рассмотрим однородное уравнение (2). Из системы (20), (21) получим

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m_0-1} = 0, \quad c_k = \beta_k c, \quad k = m_0, \dots, m-1, \quad (31)$$

где β_k — некоторые вполне определенные постоянные, $\beta_{m_0} \neq 0$, а c — произвольная вещественная постоянная. Подставляя c_k из (31) в (25) при $f_2(z) \equiv 0$, получим $g_m(z) = c\psi_m(z)$, где $\psi_m(z)$ — определенная функция, аналитичная в D и непрерывная в $\bar{D}$. Поэтому решение уравнения (24) можно записать в виде $\varphi_0(z) = c\varphi_2(z)$, где $\varphi_2(z)$ — решение этого же уравнения, но с правой частью, равной $\psi_m(z)$. Из (6) имеем

$$\varphi(z) = \sum_{k=m_0}^{m-1} c\beta_k z^k + cz^m \varphi_2(z),$$

где c — произвольная вещественная постоянная. Следовательно, однородное уравнение (2) имеет одно линейно независимое решение (в поле вещественных чисел). Мы доказали следующее.

Теорема 1.4. Если для некоторого целого неотрицательного m_0 имеет место равенство (26), то однородное уравнение (2) имеет одно линейно независимое решение (в поле вещественных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения (2) необходимо и достаточно выполнение условия (30).

3. Рассмотрим уравнение (3). Подставляя $\varphi(z)$ из (6) в (3), получим

$$z^m [\varphi_0(z) - M_{n_1+m} \varphi_0 - P_{n_2+m} \varphi_0] = f_3(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k F_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \bar{c}_k z^k \bar{\Phi}_k(z), \quad (32)$$

где функции $F_k(z)$ и $\bar{\Phi}_k(z)$ определены в (9) и (19), соответственно. Аналогично уравнениям (10) и (11) получим, что для разрешимости уравнения (32) необходимо выполнение условия

$$f_3(0) - c_0 + c_0 F_0(0) + \bar{c}_0 \bar{\Phi}_0(0) = 0, \quad (33)$$

$$f_3^{(j)}(0) - j!c_j + j!c_j F_j(0) + j!\bar{c}_j \bar{\Phi}_j(0) + \sum_{k=0}^{j-1} (a_{jk} c_k + \bar{c}_k b_{jk}) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (34)$$

где a_{jk} и b_{jk} — постоянные, входящие в уравнения (11) и (21), соответственно. Исходя из (28), (29), имеем, что система уравнений (33), (34) относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$|1 - F_k(0)| \neq |\Phi_k(0)|, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (35)$$

Условие (35) можно записать в виде

$$\left| 1 - \frac{K_1(0, 0)}{n_1 + k + 1} \right| \neq \left| \frac{K_2(0, 0)}{n_2 + k + 1} \right|, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (36)$$

Пусть условие (36) выполнено для всех целых неотрицательных k . Подставляя решение системы (33), (34) в (32), получим

$$\varphi_0(z) - M_{n_1+m} \varphi_0 - P_{n_2+m} \varphi_0 = g_m(z), \quad (37)$$

где $g_m(z)$ — функция, полученная умножением правой части уравнения (32) на z^{-m} . Функция $g_m(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Аналогично неравенству (4) получим

$$|M_{n_1+m} \varphi_0 + P_{n_2+m} \varphi_0| \leq \left(\frac{\|K_1\|}{n_1 + m + 1} + \frac{\|K_2\|}{n_2 + m + 1} \right) \|\varphi_0\|.$$

Берем m таким, чтобы имело место неравенство

$$\frac{\|K_1\|}{n_1 + m + 1} + \frac{\|K_2\|}{n_2 + m + 1} < 1.$$

Тогда уравнение (37) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. Таким образом, если выполнено условие (36) для всех целых неотрицательных k , то уравнение (3) однозначно разрешимо.

Пусть теперь условие (36) нарушается для некоторого целого неотрицательного m . Пусть m_0 — наибольшее целое неотрицательное число, для которого имеет место равенство

$$\left| 1 - \frac{K_1(0, 0)}{n_1 + m_0 + 1} \right| = \left| \frac{K_2(0, 0)}{n_2 + m_0 + 1} \right|. \quad (38)$$

Покажем, что при условии (38) уравнение (3) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Для этого решение однородного уравнения (3) будем искать в виде

$$\varphi(z) = cz^{m_0} + z^{m_0+1} \varphi_0(z). \quad (39)$$

Подставляя в (3) при $f_3(z) \equiv 0$, получим

$$cz^{m_0} + z^{m_0+1}\varphi_0(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1+m_0+1} K_1(z, t) \varphi_0(t) dt + \\ + \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2+m_0+1} K_2(z, t) \overline{\varphi_0(t)} dt + cz^{m_0} F_{m_0}(z) + \bar{c}z^{m_0} \Phi_{m_0}(z). \quad (40)$$

Деля обе части уравнения (40) на z^{m_0} и переходя к пределу при $z \rightarrow 0$, получим

$$c = cF_{m_0}(0) + \bar{c}\Phi_{m_0}(0). \quad (41)$$

Условие (38) можно записать в виде $|1 - F_{m_0}(0)| = |\Phi_{m_0}(0)|$. Если $1 - F_{m_0}(0) \neq 0$, то

$$c - a\bar{c} = 0, \quad a = \frac{\Phi_{m_0}(0)}{1 - F_{m_0}(0)}. \quad (42)$$

Согласно формуле (29) $c = d/\sqrt{a}$, где d — произвольная вещественная постоянная.

Подставляя ненулевое решение уравнения (41) в (40) и деля обе его части на z^{m_0+1} , получим

$$\varphi_0(z) = M_{n_1+m_0+1}\varphi_0 + P_{n_2+m_0+1}\varphi_0 + g(z), \quad (43)$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z} [cF_{m_0}(z) + \bar{c}\Phi_{m_0}(z) - c].$$

Так как c удовлетворяет уравнению (41), то $g(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Достаточное условие однозначной разрешимости уравнения (43) имеет вид (36) с $k \geq m_0 + 1$. Согласно выбору m_0 это условие выполнено. Следовательно, уравнение (43) имеет единственное решение $\varphi_0(z)$. Подставляя это решение в (39), получим нетривиальное решение однородного уравнения (3). Таким образом, мы доказали следующее.

Теорема 1.5. Условие (36) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (3).

4. Пусть теперь $\alpha_1(z)$ и $\alpha_2(z)$ аналитичны в круге D , непрерывны в замкнутом круге $\bar{D}$ и удовлетворяют условиям

$$|\alpha_j(z)| \leq 1, \quad \text{при } |z| < 1, \quad \alpha_j(0) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (44)$$

Рассмотрим следующие уравнения :

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1} K_1(z, t) \varphi(\alpha_1(t)) dt + f_1(z), \quad (45)$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2} K_2(z, t) \overline{\varphi(\alpha_2(t))} dt + f_2(z), \quad (46)$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1} K_1(z, t) \varphi(\alpha_1(t)) dt + \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2} K_2(z, t) \overline{\varphi(\alpha_2(t))} dt + f_3(z), \quad (47)$$

где величины n_1, n_2, K_1, K_2 те же, что и в уравнениях (1) – (3). Уравнения (45) – (47) исследуются аналогично уравнениям (1) – (3), соответственно. Поэтому мы приведем только результаты.

Теорема 1.6. Если выполнено условие

$$\frac{K_1(0, 0)}{n_1 + k + 1} (\alpha'_1(0))^k \neq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (48)$$

то уравнение (45) однозначно разрешимо. Если же для некоторого целого неотрицательного k условие (48) нарушается, то однородное уравнение (45) имеет одно линейно независимое решение (в поле вещественных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения (45) необходимо и достаточно выполнение условия (16) для одного m_0 .

Теорема 1.7. Если выполнены условия

$$\frac{|K_2(0, 0) \cdot (\alpha'_2(0))^k|}{n_2 + k + 1} \neq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (49)$$

то уравнение (46) однозначно разрешимо. Если же условие (49) нарушается для некоторого целого неотрицательного k , то однородное уравнение (4) имеет одно линейно независимое решение (в поле комплексных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения (46) необходимо и достаточно выполнение условия (30) для одного m_0 .

Теорема 1.8. Условие

$$\left| \frac{K_1(0, 0)}{n_1 + k + 1} (\alpha'_1(0))^k - 1 \right| \neq \left| \frac{K_2(0, 0)}{n_2 + k + 1} (\alpha'_2(0))^k \right|, \quad k = 0, 1, \dots$$

необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (47).

Замечание 1.1. Теоремы 1.1 – 1.3 остаются в силе, если единичный круг заменить произвольной односвязной областью с достаточно гладкой границей, звездной относительно начала координат.

§2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА

1. В этом параграфе рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$z^n \varphi^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} z^k a_k(z) \varphi^{(k)}(z) = f(z), \quad (50)$$

где $a_k(z)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $f(z)$ аналитичны в круге D и непрерывны в замкнутом круге $\bar{D}$. Если $f(z) \equiv 0$, то уравнение (50) называется *однородным*. В случае, когда функции $a_k(z)$ постоянные, уравнение (50) совпадает с известным уравнением Эйлера (см. [1]). Решение $\varphi(z)$ будем искать в классе аналитических в D и непрерывных в $\bar{D}$ функций. Норму аналитической функции $\varphi(z)$ определим следующим образом:

$$\|\varphi\| = \max_{|z| \leq 1} |\varphi(z)|.$$

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (50) *фредгольмово*, если однородное уравнение (50) имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородное уравнение (50) разрешимо тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет такому же числу условий вида $L_j(f) = 0$, $j = 1, \dots, k_0$, где $L_1, \dots, L_{k_0}$ — некоторые линейно независимые ограниченные и линейные функционалы (линейная независимость и линейность понимается в поле комплексных чисел).

В этом параграфе указан эффективный метод решения уравнения (50) и доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. Уравнение (50) фредгольмово.

Рассмотрим следующий полином порядка n :

$$P_n(\lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-(n-1)) + a_0(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-(k-1)) a_k(0). \quad (51)$$

При $n = 1$ положим $P_1(\lambda) = \lambda + a_0(0)$.

Теорема 2.2. Условие

$$P_n(k) \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (52)$$

необходимо и достаточно для однозначной разрешимости уравнения (50).

Теорема 2.3. Если условие (52) нарушается только для одного целого неотрицательного $k = m_0$, то однородное уравнение (50) имеет одно линейно независимое решение. Неоднородное уравнение (50) разрешимо тогда и только тогда,

когда

$$f^{(m_0)}(0) + \sum_{k=0}^{m_0-1} \gamma_k f^{(k)}(0) = 0, \quad (53)$$

где γ_k , $k = 0, 1, \dots, m_0 - 1$ — вполне определенные постоянные, зависящие только от производных функций $a_k(z)$ до порядка m_0 в точке $z = 0$.

Теорема 2.4. Пусть условие (52) нарушается для целых неотрицательных чисел $m_1, \dots, m_\nu$. Тогда число μ линейно независимых решений однородного уравнения (50) удовлетворяет неравенству $1 \leq \mu \leq \nu$.

Примеры показывают, что при заданном ν число μ может принимать любое значение в $[1, \nu]$, в зависимости от $a_k(z)$. В этом параграфе получена формула для μ в терминах производных функций $a_k(z)$ до порядка m_ν в точке $z = 0$.

Замечание 2.1. Полином порядка n имеет не более n целых неотрицательных корней, так что $\nu \leq n$.

Замечание 2.2. Так как $|P_n(k)| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то условие (52) автоматически выполняется для больших значений k .

2. Доказательство теоремы 2.2. Для простоты рассмотрим уравнение (50) при $n = 2$ (общий случай исследуется аналогично). При $n = 2$ уравнение (50) и полином (51) примут вид

$$z^2 \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} + z a_1(z) \frac{d\varphi(z)}{dz} + a_0(z) \varphi(z) = f(z), \quad (54)$$

$$P_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda a_1(0) + a_0(0).$$

Пусть $P_2(k) \neq 0$, $k = 0, 1, \dots$. Покажем, что уравнение (54) имеет единственное решение. Это решение будем искать в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m \varphi_0(z), \quad (55)$$

где c_k — комплексные постоянные, $m \geq 2$ — натуральное число, а $\varphi_0(z)$ — аналитическая в круге D и непрерывная в замкнутом круге $\bar{D}$ функция. Подставляя $\varphi(z)$ из (55) в (54), получим

$$z^2 \frac{d^2 (z^m \varphi_0(z))}{dz^2} + z a_1(z) \frac{d(z^m \varphi_0(z))}{dz} + a_0(z) z^m \varphi_0(z) =$$

$$= f(z) - \sum_{k=2}^{m-1} k(k-1)c_k z^k - a_1(z) \sum_{k=1}^{m-1} k c_k z^k - a_0(z) \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k. \quad (56)$$

Поскольку производные левой части уравнения (56) до порядка $(m-1)$ равны нулю в точке $z = 0$, то обозначая через $F(z)$ правую часть этого уравнения, получим

$$F^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (57)$$

Условия (57) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(0) - c_0 a_0(0) &= 0, \\ f(0) - c_1 a_1(0) - c_1 a_0(0) - c_0 a'_0(0) &= 0, \\ f^{(k)}(0) - (k-1)k k! c_k - k k! c_k a_1(0) - k! c_k a_0(0) - \sum_{j=1}^{k-1} j c_j b_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j d_{kj} &= 0, \end{aligned} \quad (58)$$

$k = 2, \dots, m-1$, где

$$b_{kj} = \psi_{1j}^{(k)}(0), \quad d_{kj} = \psi_{0j}^{(k)}(0), \quad \psi_{1j}(z) = z^j a_1(z), \quad \psi_{0j}(z) = z^j a_0(z).$$

Условия (52) запишем в виде

$$\begin{aligned} a_0(0) &\neq 0, \quad a_1(0) + a_0(0) \neq 0, \\ (k-1)k + k a_1(0) + a_0(0) &\neq 0, \quad k = 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что система (58) однозначно разрешима относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$. Таким образом, можно считать, что правая часть уравнения (56) известна и удовлетворяет условиям (57). Поэтому функция $F(z)$ представляется в виде $F(z) = z^m F_0(z)$, где $F_0(z)$ — аналитическая в круге D и непрерывная в замкнутом круге $\bar{D}$ функция. Следовательно, уравнение (56) запишется в виде

$$z^2 \frac{d^2(z^m \varphi_0(z))}{dz^2} + z a_1(z) \frac{d(z^m \varphi_0(z))}{dz} + a_0(z) z^m \varphi_0(z) = z^m F_0(z). \quad (59)$$

Если функция $\psi(z)$ аналитична в круге D и удовлетворяет условиям $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$, то

$$\psi(z) = \int_0^z (z-t) \psi''(t) dt.$$

Следовательно

$$z^m \varphi_0(z) = \int_0^z (z-t) \frac{d^2(t^m \varphi_0(t))}{dt^2} dt.$$

Таким образом, справедливо представление

$$z^m \varphi_0(z) = \int_0^z (z-t) \psi(t) dt, \quad (60)$$

где $\psi(z)$ — аналитическая в круге D и непрерывная в замкнутом круге $\bar{D}$ функция.

Она имеет нуль порядка $(m-2)$ в точке $z=0$. Поэтому

$$\psi(t) = t^{m-2} \psi_0(t), \quad (61)$$

где $\psi_0(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$. Подставляя $\psi(t)$ из (61) в (60), получим

$$z^m \varphi_0(z) = \int_0^z (z-t) t^{m-2} \psi_0(t) dt. \quad (62)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^2(z^m \varphi_0(z))}{dz^2} = z^{m-2} \psi_0(z), \quad \frac{d(z^m \varphi_0(z))}{dz} = \int_0^z t^{m-2} \psi_0(t) dt. \quad (63)$$

Подставляя $z^m \varphi_0(z)$ из (62) в (59) и учитывая (63), получим

$$z^m \psi_0(z) + z a_1(z) \int_0^z t^{m-2} \psi_0(t) dt + a_0(z) \int_0^z (z-t) t^{m-2} \psi_0(t) dt = z^m F_0(z). \quad (64)$$

Деля обе части на z^m , получим

$$\psi_0(z) = K \psi_0 + F_0(z), \quad (65)$$

где

$$K \psi_0 = -\frac{a_1(z)}{z^{m-1}} \int_0^z t^{m-2} \psi_0(t) dt - \frac{a_0(z)}{z^m} \int_0^z (z-t) t^{m-2} \psi_0(t) dt.$$

Имеют место следующие оценки :

$$\left| \frac{a_1(z)}{z^{m-1}} \int_0^z t^{m-2} \psi_0(t) dt \right| \leq \frac{\|a_1\| \cdot \|\psi_0\|}{m-1},$$

$$\left| \frac{a_0(z)}{z^m} \int_0^z (z-t) t^{m-2} \psi_0(t) dt \right| \leq \frac{\|a_0\| \cdot \|\psi_0\|}{m-1}.$$

Берем m таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\|a_1\| + \|a_0\| < m-1. \quad (66)$$

Тогда уравнение (65) однозначно разрешимо, и его можно решить методом последовательных приближений [2] :

$$\psi_0(z) = F_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} K^j F_0, \quad (67)$$

где K^j — j -я степень оператора K . Как показано в [2], ряд (67) сходится равномерно и

$$\|K^j F_0\| \leq q^j \|F_0\|, \quad q = \frac{\|a_0\| + \|a_1\|}{m-1}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.2.

3. Доказательство теоремы 2.3. Пусть условие (52) нарушается только при $k = m_0$. Тогда очевидно, что

$$m_0(m_0 - 1) + a_1(0)m_0 + a_0(0) = 0,$$

$$(k - 1)k + ka_1(0) + a_0(0) \neq 0, \quad k \neq m_0.$$

В этом случае первые $m_0 - 1$ уравнений системы (58) однозначно разрешимы относительно постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m_0-1}$. Подставляя эти решения в (58) при $k = m_0$, получим (53), где γ_k — вполне определенные постоянные, не зависящие от $f(x)$, но зависящие от производных функций $a_1(z)$ и $a_0(z)$ до порядка m_0 в точке $z = 0$. Следовательно, условие (53) необходимо для разрешимости уравнения (54).

Пусть выполнено условие (53). Тогда берем $c_{m_0} = 0$ и видим, что система (58) при $k = m_0 + 1, \dots, m - 1$ решается однозначно относительно постоянных c_k , $k \neq m_0$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Подставляя полученное частное решение в (56), аналогично предыдущему случаю построим решение уравнения (56). В этом случае также m выбирается так, чтобы выполнялось условие (66). Следовательно, условие (53) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (54).

Рассмотрим теперь однородное уравнение (54). Решая однородную систему (58) ($f^{(k)}(0) = 0$), получим

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m_0-1} = 0, \quad c_{m_0} = c, \quad c_k = \beta_k c, \quad k = m_0 + 1, \dots, m - 1,$$

где β_k — вполне определенные постоянные, c — произвольная комплексная постоянная. Подставляя это решение в (56), получим уравнение вида (59), где $F_0(z) = cF_1(z)$, а $F_1(z)$ — вполне определенная аналитическая функция в круге D . Пусть $\varphi_1(z)$ является решением уравнения (59) при $F_0(z) = F_1(z)$. Тогда решение уравнения (59) при $F_0(z) = cF_1(z)$ определяется формулой $\varphi_0(z) = c\varphi_1(z)$. Подставляя значения c_k , $k = 0, 1, \dots, m - 1$ и $\varphi_0(z)$ в (55), получим

$$\varphi(z) = c[z^{m_0} + \beta_{m_0+1}z^{m_0+1} + \dots + \beta_{m-1}z^{m-1} + z^m\varphi_1(z)].$$

Следовательно, однородное уравнение (54) имеет одно линейно независимое решение. Теорема 2.3 доказана.

4. Доказательство теоремы 2.4. Пусть условие (52) нарушается при $k = m_1$ и $k = m_2$ ($m_1 < m_2$). Тогда

$$\begin{aligned} m_1(m_1 - 1) + a_1(0)m_1 + a_0(0) &= 0, \\ m_2(m_2 - 1) + a_1(0)m_2 + a_0(0) &= 0, \\ (k - 1)k + ka_1(0) + a_0(0) &\neq 0, \quad k \neq m_1, m_2. \end{aligned} \quad (68)$$

Пусть $m > m_2$ и имеет место неравенство (66). Рассмотрим однородную систему (58). Из первых $m_1 - 1$ уравнений этой системы получим $c_0 = c_1 = \dots = c_{m_1-1} = 0$. Подставляя $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ в уравнение (55), при $k = m_1$ получим $0 = 0$. Подставляя $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ в уравнение (58), при $k = m_1 + 1, \dots, m_2$ получим

$$\begin{aligned} k![(k - 1)k + ka_1(0) + a_0(0)]c_k + \sum_{j=m_1}^{k-1} c_j(jb_{kj} + d_{kj}) &= 0, \quad k = m_1 + 1, \dots, m_2 - 1, \\ \sum_{j=m_1}^{m_2-1} c_j(jb_{m_2j} + d_{m_2j}) &= 0, \quad \text{при } k = m_2. \end{aligned} \quad (69)$$

Итак, мы получили систему $m_2 - m_1$ уравнений с $m_2 - m_1$ неизвестными постоянными $c_{m_1}, \dots, c_{m_2-1}$. Пусть A — основная матрица системы (69), а r — ранг этой матрицы. Из условий (68) следует, что

$$m_2 - m_1 - 1 \leq r \leq m_2 - m_1.$$

Пусть $r = m_2 - m_1$. Тогда система (69) имеет только нулевое решение, т.е. $c_{m_1} = \dots = c_{m_2-1} = 0$. Подставляя $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m_2 - 1$ в остальные уравнения (58) при $k = m_2 + 1, \dots, m - 1$ и решая их относительно c_k , получим $c_k = \gamma_k c$, $k = m_2 + 1, \dots, m - 1$, где γ_k — вполне определенные постоянные, $c = c_{m_2}$ — произвольная постоянная. Подставляя это значение в уравнение (56), аналогично предыдущему случаю докажем, что однородное уравнение (50) имеет одно линейно независимое решение.

Можно аналогично доказать, что при $r = m_2 - m_1 - 1$ однородное уравнение (54) имеет два линейно независимых решения. Теорема 2.4 доказана.

5. Доказательство теоремы 2.1. Утверждение теоремы 2.1 при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ следует из теорем 2.2 и 2.3, соответственно. Пусть $\nu = 2$. Из теоремы

2.4 следует, что число μ линейно независимых решений однородного уравнения (54) не превышает 2. Применяя рассуждения доказательства теоремы 2.3, можно показать, что при $\mu = 1$ для разрешимости неоднородного уравнения (54) необходимо и достаточно выполнение одного условия вида (53), а при $\mu = 2$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$f^{(m_j)}(0) + \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{jk} f^{(k)}(0) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где β_{1k} и β_{2k} — вполне определенные постоянные, зависящие от $f(z)$. Теорема 2.1 доказана.

Приведем примеры, в которых условие (52) нарушается для двух целых неотрицательных чисел.

Пример 2.1. Для уравнения

$$z^2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - z \frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad (70)$$

условие (52) принимает вид

$$k(k-1) - k \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (71)$$

Условие (71) нарушается при $k = 0$ и $k = 2$. Здесь функции $\varphi_1(z) = 1$ и $\varphi_2(z) = z^2$ — линейно независимые решения уравнения (70).

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение

$$z^2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - z \frac{d\varphi}{dz} + z\varphi = 0. \quad (72)$$

В этом случае условие (52) имеет вид (71). Определитель системы (69) здесь отличен от нуля и $r = 2$. Поэтому уравнение (72) имеет одно линейно независимое решение.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение (50) при $n = 1$:

$$z\varphi'(z) + a_0(z)\varphi(z) = f(z). \quad (73)$$

Применяя теоремы 2.2 и 2.3 к уравнению (73), получим

Следствие 2.1. Если $a_0(0) \neq 0, -1, -2, \dots$, то уравнение (73) однозначно разрешимо. В остальных случаях однородное уравнение (73) имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости неоднородного уравнения (73) необходимо и достаточно выполнение условия

$$f^{(k)}(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j f^{(j)}(0) = 0,$$

где $k = -a_0(0)$ и γ_j — однозначно определяются через производные функции $a_0(z)$ до порядка k в точке $z = 0$.

Замечание 2.3. Если $a_0(z) = \text{const}$ — целое неположительное число, то условие разрешимости уравнения (73) имеет вид $f^{(k)}(0) = 0$, $k = -a_0(0)$.

§3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре.

Задача А. В круге D найти непрерывно дифференцируемое в $\bar{D}$ решение эллиптического уравнения

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (74)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} = \alpha u(z) + f(z), \quad |z| = 1, \quad (75)$$

где A, B, C и $\alpha \neq 0$ — комплексные постоянные, $f(z)$ — комплекснозначная функция, заданная на окружности $\Gamma : \{|z| = 1\}$ и удовлетворяющая условию Гельдера, $\frac{\partial u}{\partial r}$ — радиальная производная. Если $f(z) = 0$, то задачу А назовем *однородной*. Предполагается, что $C \neq 0$ и корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0 \quad (76)$$

удовлетворяют условиям $\text{Im } \lambda_1 > 0$, $\text{Im } \lambda_2 < 0$. Известно (см. [4]), что общее решение уравнения (74) имеет вид

$$u(x, y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y), \quad (77)$$

где $\varphi_1(x + \lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x + \lambda_2 y)$ — аналитические функции по аргументам $x + \lambda_1 y$ и $x + \lambda_2 y$, соответственно, при $(x, y) \in D$ и непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{D}$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что $\varphi_2(0) = 0$. Тогда в представлении (77) функции $\varphi_1(x + \lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x + \lambda_2 y)$ определяются по $u(x, y)$ единственным образом. Подставляя $u(x, y)$ из (77) в граничное условие (75), получим

$$\begin{aligned} (x + \lambda_1 y)\varphi_1'(x + \lambda_1 y) + (x + \lambda_2 y)\varphi_2'(x + \lambda_2 y) = \\ = \alpha[\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y)] + f_2(z), \quad |z| = 1. \end{aligned} \quad (78)$$

Обозначим

$$V(x, y) = (x + \lambda_1 y)\varphi_1'(x + \lambda_1 y) + (x + \lambda_2 y)\varphi_2'(x + \lambda_2 y) - \alpha[\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y)]. \quad (79)$$

Граничное условие (78) запишется в виде

$$V(x, y) = f(z), \quad |z| = 1. \quad (80)$$

Из обозначения (79) также следует, что $V(x, y)$ является решением уравнения (74), т.е.

$$A \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (81)$$

Таким образом, для определения функции $V(x, y)$ получили задачу Дирихле (80), (81) в круге D . Известно (см. [4], стр. 143), что эта задача имеет единственное решение

$$V(x, y) = \psi_1(x + \lambda_1 y) + \psi_2(x + \lambda_2 y), \quad (82)$$

где $\psi_1(x + \lambda_1 y)$ и $\psi_2(x + \lambda_2 y)$ — аналитические функции по $x + \lambda_1 y$ и $x + \lambda_2 y$, соответственно, непрерывные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие дополнительному условию $\psi_2(0) = 0$. Подставляя $V(x, y)$ из (82) в (79), получим

$$W_1(x + \lambda_1 y) + W_2(x + \lambda_2 y) = 0, \quad (83)$$

где

$$W_j(x + \lambda_j y) = (x + \lambda_j y)\varphi_j'(x + \lambda_j y) - \alpha\varphi_j(x + \lambda_j y) - \psi_j(x + \lambda_j y), \quad j = 1, 2. \quad (84)$$

Из условий $\psi_2(0) = 0$ и $\varphi_2(0) = 0$ следует, что $W_2(0) = 0$. Из условия (83) и единственности представления (77)

$$W_1(x + \lambda_1 y) = 0, \quad W_2(x + \lambda_2 y) = 0, \quad \text{при } |z| < 1. \quad (85)$$

Следовательно, из (84) и (85) имеем

$$(x + \lambda_j y) \varphi_j'(x + \lambda_j y) - \alpha \varphi_j(x + \lambda_j y) - \psi_j(x + \lambda_j y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad j = 1, 2. \quad (86)$$

Пусть D_j — образ круга D при отображении $\zeta = x + \lambda_j y$, $j = 1, 2$. Тогда уравнение (86) можно записать в виде

$$z \varphi_j'(z) = \alpha \varphi_j(z) + \psi_j(z), \quad z \in D_j, \quad j = 1, 2. \quad (87)$$

Подставляя $z = 0$ в (87), получим $\varphi_1(0) = -\psi_1(0)/\alpha$. Так как $\varphi_2(0) = 0$, то отсюда имеем

$$\varphi_1(z) = \int_0^z \omega_1(t) dt - \frac{1}{\alpha} \psi_1(0), \quad \varphi_2(z) = \int_0^z \omega_2(t) dt, \quad (88)$$

где $\omega_j(z)$ аналитичны в D_j и непрерывны в $\overline{D}_j$, $j = 1, 2$. Подставляя $\varphi_j(z)$ из (88) в (87), получим

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{\alpha}{z} \int_0^z \omega_1(t) dt + \frac{\psi_1(z) - \psi_1(0)}{z}, \quad z \in D_1, \\ \omega_2(z) &= \frac{\alpha}{z} \int_0^z \omega_2(t) dt + \frac{\psi_2(z)}{z}, \quad z \in D_2. \end{aligned} \quad (89)$$

Так как $\psi_2(0) = 0$, то функция $\psi_2(z)/z$ аналитична в D . Таким образом, задачу А свели к интегральным уравнениям (89), которые являются частным случаем уравнения (1). Используя теоремы 1.1 и 1.2, для уравнений (89), получим

Следствие 3.1. Если α не является натуральным числом, то задача А однозначно разрешима; если α — натуральное число, то однородная задача А имеет два линейно независимых решения (в поле комплексных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение условий $\psi_1^{(\alpha)}(0) = 0$, $\psi_2^{(\alpha)}(0) = 0$.

Легко проверить, что если α — натуральное число, то линейно независимые функции $(x + \lambda_1 y)^\alpha$ и $(x + \lambda_2 y)^\alpha$ — решения задачи А. Отсюда и из следствия 3.1 получим

Следствие 3.2. Если α – натуральное число, то общее решение однородной задачи А определяется формулой

$$u(x, y) = c_1(x + \lambda_1 y)^\alpha + c_2(x + \lambda_2 y)^\alpha,$$

где c_1, c_2 – произвольные комплексные постоянные.

Рассмотрим теперь обобщение задачи А. Граничное условие (75) заменим условием вида

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} = \alpha u(\beta z) + f(z), \quad |z| = 1, \quad (90)$$

где β – вещественная постоянная, $|\beta| \leq 1$. Задача (74), (90) исследуется аналогично задаче (74), (75) с той лишь разницей, что в этом случае уравнения (89) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{\alpha\beta}{z} \int_0^z \omega_1(\beta t) dt + \frac{\psi_1(z) - \psi_1(0)}{z}, \\ \omega_2(z) &= \frac{\alpha\beta}{z} \int_0^z \omega_2(\beta t) dt + \frac{\psi_2(z)}{z}. \end{aligned} \quad (91)$$

Применяя теоремы 1.6 и 1.7, получаем

Следствие 3.3. Если

$$\frac{\alpha\beta^{k+1}}{k+1} \neq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (92)$$

то задача (74), (90) однозначно разрешима. Если для некоторого целого неотрицательного числа $k = m_0$ условие (92) нарушается, то однородная задача (74), (90) имеет два линейно независимых решения и общее решение определяется формулой

$$u(x, y) = c_1(x + \lambda_1 y)^{m_0+1} + c_2(x + \lambda_2 y)^{m_0+1},$$

где c_1 и c_2 – произвольные комплексные постоянные.

2. В круге D рассмотрим задачу Пуанкаре

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (93)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 \frac{\partial u(z)}{\partial r} + a_2 u(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \quad (94)$$

где a_1 и a_2 – вещественные постоянные, $f(z)$ – вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на окружности Γ , $\frac{\partial u}{\partial r}$ – радиальная производная в точке $z \in \Gamma$. Решение $u(x, y)$ будем искать в классе дважды непрерывно

дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функций. При $f(z) = 0$ задачу (93), (94) будем называть *однородной*. Известно (см. [3], стр. 202), что решения уравнения (94) допускают представление

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \varphi(z), \quad (95)$$

где $\varphi_1(z)$ — аналитическая в D , дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Im} \varphi(0) = 0$. Подставляя $u(x, y)$ из (95) в (94), получим

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \quad (96)$$

где

$$\Phi(z) = z^2 \varphi''(z) + a_1 z \varphi'(z) + a_2 \varphi(z). \quad (97)$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. С учетом граничного условия (96) функция $\Phi(z)$ определяется формулой Шварца (см. [3], стр. 223)

$$\Phi(z) = F(z) + ic, \quad (98)$$

где c — произвольная вещественная постоянная и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t+z}{t-z} f(t) d\theta, \quad t = e^{i\theta}.$$

Подставляя $\Phi(z)$ из (98) в (97), получим дифференциальное уравнение

$$z^2 \varphi''(z) + a_1 z \varphi'(z) + a_2 \varphi(z) = F(z) + ic, \quad z \in D. \quad (99)$$

Подставляя $z = 0$ в (99), получим $a_2 \varphi(0) = F(0) + ic$. Приравнявая действительные и мнимые части и имея в виду, что a_2 и $\varphi(0)$ вещественны, получим

$$a_2 \varphi(0) = \operatorname{Re} F(0), \quad c = -\operatorname{Im} F(0). \quad (100)$$

Рассмотрим два возможных случая: $a_2 \neq 0$ и $a_2 = 0$. Пусть $a_2 \neq 0$. Тогда из (100) получим

$$\varphi(0) = \operatorname{Re} \left[\frac{F(0)}{a_2} \right] \equiv \alpha_0.$$

Следовательно

$$\varphi(z) = \alpha_0 + z\psi(z), \quad (101)$$

где $\psi(z)$ аналитична в D и дважды непрерывно дифференцируема в $\bar{D}$. Подставляя $\varphi(z)$ и c из (100) и (101) в (99), получим

$$z^2 \psi''(z) + (a_1 + 2)z\psi'(z) + (a_1 + a_2)\psi(z) = F_0(z), \quad z \in D, \quad (102)$$

где $F_0(z) = \frac{1}{z}[F(z) - F(0)]$. Таким образом, задачу (93), (94) мы свели к дифференциальному уравнению (102) в D . Применяя результаты §2 к уравнению (102) при $a_2 \neq 0$, получим

Следствие 3.4. Задача (93), (94) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$k(k-1) + (a_1 + 2)k + a_1 + a_2 \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (103)$$

Следствие 3.5. Если условие (103) нарушается только для одного целого неотрицательного k , то однородная задача (93), (94) имеет два линейно независимых (в поле вещественных чисел) решения; если же условие (103) нарушается для двух целых неотрицательных k_1 и k_2 , то однородная задача (93), (94) имеет четыре линейно независимых (в поле вещественных чисел) решений.

Пусть теперь $a_2 = 0$. Тогда из (100) получим $\operatorname{Re} F(0) = 0$, т.е.

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (104)$$

Далее мы предполагаем, что выполнено условие (104). Подставляя c из (100) в (99) и деля обе его части на z , получим

$$z\psi'(z) + a_1\psi(z) = F_0(z), \quad (105)$$

где $\psi(z) = \varphi'(z)$. Из (95) имеем

$$\varphi(z) = \int_0^z \psi(t) dt + \varphi(0) = \int_0^z \psi(t) dt + c,$$

где c — произвольная вещественная постоянная. Следовательно, формула (95) примет вид

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int_0^z \psi(t) dt \right] + c.$$

Таким образом, задача (93), (94) свелась к уравнению (105). Применяя следствие 2.1 к уравнению (105), получим

Следствие 3.6. Пусть $a_2 = 0$ и имеет место необходимое условие (104). Тогда если $a_1 \neq 0, -1, -2, \dots$, то неоднородная задача (93), (94) всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое решение $u(z) = 1$. В остальных случаях неоднородная задача (93), (94) разрешима тогда и только тогда, когда $F^{(-a_1+1)}(0) = 0$, а соответствующая однородная задача имеет три линейно независимых (в поле вещественных чисел) решений.

ABSTRACT. The paper investigates Volterra type integral equations with singularities as well as Euler type ordinary differential equations. We obtain necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of analytical solutions of these equations. The results we apply for effective solution of Poincare boundary value problem for second order proper elliptic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1970.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Физматгиз, Ленинград, 1951.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
4. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1994.

21 апреля 1997

Армянский государственный инженерный университет,
Мелитопольский педагогический институт, Украина
E-mail : hterzian@seua.am

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ И СДВИГАМИ

Н. Е. Товмасын, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 3, 1998

В работе рассмотрены дифференциальные уравнения первого порядка с особенностями высокого порядка и сдвигами. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих уравнений, а также формулы для решений. Полученные результаты применены к задаче Пуанкаре.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D^+ – единичный круг $|z| < 1$, Γ – окружность $|z| = 1$, D^- – область $|z| > 1$, $z = x + iy$. В D^+ рассмотрим уравнение

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) = f(z), \quad z \in D^+, \quad (0.1)$$

где функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ аналитичны в D^+ , $n \geq 2$ – натуральное число.

Мы предполагаем, что $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \cup \Gamma$ и

$$\beta(z) \in \overline{D^+} \quad \text{при} \quad z \in \overline{D^+}, \quad (0.2)$$

$$\beta(0) = 0, \quad (0.3)$$

$$\beta'(0) \neq 0. \quad (0.4)$$

Не ограничивая общности предположим, что

$$\alpha(0) \neq 0. \quad (0.5)$$

Решение уравнения (0.1) ищем в классе функций, аналитичных в D^+ и непрерывно дифференцируемых в $\overline{D^+}$. Уравнение (0.4) при $f \equiv 0$ называется однородным.

Замечание 1. При $n = 0, 1$, делая замену переменной

$$\varphi(z) = \int_0^z \Psi(t) dt + c,$$

уравнение (0.1) можно свести к интегральному уравнению типа Вольтерра, рассмотренному в [1]. Поэтому эти случаи не рассматриваются.

В работе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 0.1. Однородное уравнение (0.1) имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородного уравнения (0.1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{\Gamma} f(z) \Psi_j(z) dz = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (0.6)$$

где $\Psi_1(z), \dots, \Psi_{n-1}(z)$ — некоторые линейно независимые аналитические функции в D^- , исчезающие на бесконечности. Эти функции зависят от натурального числа n и функций $\alpha(z), \beta(z)$, но не зависят от $f(z)$.

Будем говорить, что функция $\Psi(z)$ исчезает на бесконечности, если $\Psi(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow +\infty$. Если особо не отмечено, линейную зависимость или независимость будем понимать в поле комплексных чисел.

Работа состоит из шести параграфов. В §1 мы доказываем теорему 0.1. В §2 предложен простой метод решения уравнения (0.1). В §3 и §5 дается явная формула для решения уравнения (0.1) и более общего уравнения без сдвигов. В §4 рассмотрен случай $\beta'(0) = 0$. В §6 полученные результаты применяются к уравнению Лапласа в задаче Пуанкаре.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1

Пусть $\varphi(z)$ — решение однородного уравнения

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) = 0. \quad (1.1)$$

Докажем, что если

$$\varphi^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (1.2)$$

то

$$\varphi^{(m)}(0) = 0. \quad (1.3)$$

Из (1.2) имеем

$$\varphi(z) = z^m \Psi(z), \quad (1.4)$$

где $\Psi(z)$ аналитична в D^+ .

Подставляя $\varphi(z)$ из (1.4) в (1.1), получим

$$z^{m+n} \Psi'(z) + m z^{m+n-1} \Psi(z) - \alpha(z) \beta^m(z) \Psi(\beta(z)) = 0, \quad z \in D^+. \quad (1.5)$$

Разделив обе части (1.5) на z^m и переходя к пределу при $z \rightarrow 0$, имеем

$$\Psi(0) = 0. \quad (1.6)$$

Из (1.4) и (1.6) следует (1.3). Подставляя в (1.1) $z = 0$, получим $\varphi(0) = 0$. Из (1.2) и (1.3) следует, что $\varphi'(0) = 0$. Аналогично, $\varphi^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$.

Для доказательства второй части теоремы 0.1 рассмотрим следующую краевую задачу Гильберта (задача сопряжения, [2], стр. 146) :

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) = \omega(z) + g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (1.7)$$

где $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ — искомые функции, аналитичные в D^+ и D^- , соответственно, а $g(z)$ — заданная функция на окружности $|z| = 1$. Предполагаем, что $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируема в области $\overline{D}^+$, $\omega(z)$ исчезает на бесконечности и непрерывна в $\overline{D} = D^- \cup \Gamma$, а $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ ([2], стр. 20).

Имеет место тождество

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \int_0^z (\zeta \varphi'(\zeta) + \varphi(\zeta)) d\zeta. \quad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что аналитическую функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \Psi(\zeta) d\zeta, \quad (1.9)$$

где $\Psi(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}^+$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (1.9) в (1.7), получим

$$z^{n-1} \Psi(z) - z^{n-2} \int_0^z \Psi(\zeta) d\zeta - \alpha(z) \frac{1}{\beta(z)} \int_0^{\beta(z)} \Psi(\zeta) d\zeta = \omega(z) + g(z), \quad z \in \Gamma. \quad (1.10)$$

Таким образом, задача (1.7) сводится к задаче Гильберта (1.10), не содержащей производных искомой функции. Такие задачи полностью изучены в [2] при помощи сингулярных интегральных уравнений. Мы будем использовать некоторые результаты этой работы. Сначала докажем, что однородная задача (1.10) (при $g \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Пусть $(\Psi(z), \omega(z))$ – решение однородной задачи (1.10). Тогда $(\varphi(z), \omega(z))$ – решение задачи (1.7) (при $g \equiv 0$), где $\varphi(z)$ определяется формулой (1.9). Из (1.7) следует, что при $g \equiv 0$ функция $\omega(z)$ является аналитическим продолжением аналитической функции $z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z))$ вне окружности $|z| = 1$ на всю комплексную плоскость. Так как функция $\omega(z)$ исчезает на бесконечности, то согласно теореме Лиувилля $\omega(z) = 0$, $z \in D^-$ и

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) = 0, \quad z \in D^+. \quad (1.11)$$

Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$ – единственное решение (1.11) и однородная задача (1.10) имеет только нулевое решение. Индекс задачи (1.10) равен $1 - n$ (см. [2]). Отсюда следует, что для разрешимости неоднородной задачи (1.10), $n-1$ условий вида (см. [2])

$$\int_{|z|=1} g(z) \omega_j(z) dz = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (1.12)$$

являются необходимыми и достаточными, где $\omega_1(z), \dots, \omega_{n-1}(z)$ – некоторые линейно независимые функции на Γ , не зависящие от $g(z)$.

Используя (1.12), покажем, что функции $\omega_j(z)$ – граничные значения функций, аналитичных в D^- и исчезающих на бесконечности. Возьмем в качестве $g(z)$ функцию

$$g(z) = \omega_0(z), \quad (1.13)$$

где $\omega_0(z)$ аналитична в D^- , непрерывна в замкнутой области $\overline{D^-}$ и исчезает на бесконечности. Ясно, что для такого $g(z)$ задача (1.10) имеет решение $\varphi(z) = 0$, $\omega(z) = -\omega_0(z)$. Следовательно, функция $g(z) = \omega_0(z)$ удовлетворяет условиям (1.12), т.е.

$$\int_{|z|=1} \omega_0(z) \omega_j(z) dz = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что $\omega_j(z)$ – граничные значения функций, аналитичных в D^- и исчезающих на бесконечности ([2]).

Теперь докажем, что условия (1.12) при $g(z) = f(z)$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (0.1). Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (0.1). Тогда задача (1.7) при $g(z) = f(z)$ имеет решение $(\varphi(z), 0)$. Следовательно, функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условиям (1.12). Пусть теперь функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условию (1.12). Тогда задача (1.7) имеет решение $(\varphi(z), \omega(z))$. Из (1.7) следует, что при $g(z) = f(z)$ функция $\omega(z)$ является аналитическим продолжением в область D^- аналитической в круге $|z| < 1$ функции

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) - f(z).$$

Отсюда и из теоремы Лиувилля следует, что

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) - f(z) = 0, \quad z \in D^+.$$

Следовательно, уравнение (0.1) имеет решение. Теорема 0.1 доказана. Мы также доказали, что при $g(z) = f(z)$ уравнение (0.1) эквивалентно задаче (1.7).

§2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (0.1)

Если в (1.7) функция $g(z)$ совпадает с $f(z)$ в (0.1), то уравнение (0.1) эквивалентно задаче (1.7). Поэтому делая замену переменной (1.9), уравнение (0.1) можно свести к задаче (1.10) и решить методом сингулярных интегральных уравнений (см. [2], стр. 511). В этом параграфе мы предлагаем более простой метод. Решение уравнения (0.1) ищем в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + \Phi(z), \quad (2.1)$$

где $m \geq n$ – натуральное число, $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ – постоянные, а $\Phi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывна в $|z| \leq 1$ и

$$\Phi^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.2)$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (2.1) в (0.1), получим

$$z^n \Phi'(z) - \alpha(z) \Phi(\beta(z)) = F(z), \quad (2.3)$$

где

$$F(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m-1} k c_k z^{n+k-1} + \alpha(z) \sum_{k=0}^{m-1} c_k \beta^k(z). \quad (2.4)$$

Поскольку $\beta(0) = 0$ и функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (2.2), то левая часть формулы (2.4) также удовлетворяет этим условиям. Следовательно, из (2.3) имеем

$$F^{(k)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.5)$$

Подставляя функцию $F(z)$ из (2.4) в (2.5), для постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ получим систему алгебраических уравнений

$$\alpha_0(0) c_0 = f(0), \quad (2.6)$$

$$\alpha(0) (\beta'(0))^j c_j + \sum_{k=0}^{j-1} a_{jk} c_k = -\frac{f^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (2.7)$$

где

$$a_{jk} = \frac{1}{j!} \Psi_k^{(j)}(0), \quad (2.8)$$

$$\Psi_k(z) = -k z^{n+k-1} + \alpha(z) \beta^k(z). \quad (2.9)$$

Так как $\alpha(0) \neq 0$, $\beta'(0) \neq 0$, то можно считать, что функция $F(z)$ и постоянные $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ известны, условия (2.5) — (2.7) выполнены. Решение системы (2.6), (2.7) имеет вид

$$c_j = \sum_{k=0}^j b_{jk} f^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.10)$$

где b_{jk} — постоянные, не зависящие от $f(z)$.

Обозначим через $\Phi_0(z)$ функцию

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + \sum_{j=m-n+1}^{m-1} c_j z^j. \quad (2.11)$$

Из (2.2) и (2.11) имеем

$$\Phi_0^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-n, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{k!} \Phi_0^{(k)}(0) = c_k, \quad k = m-n+1, \dots, m-1. \quad (2.13)$$

Из (2.1), (2.11) и (2.13) получим

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-n} z^{m-n} + \Phi_0(z), \quad (2.14)$$

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} c_k z^k, \quad (2.15)$$

$$\Phi(\beta(z)) = \Phi_0(\beta(z)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \beta^k(z). \quad (2.16)$$

Подставляя $\Phi(z)$ и $\Phi(\beta(z))$ из (2.15) и (2.16) в уравнение (2.3), получим

$$z^n \Phi'_0(z) - \alpha(z) \left[\Phi_0(\beta(z)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \beta^k(z) \right] = F_0(z), \quad (2.17)$$

где

$$F_0(z) = F(z) + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} k c_k z^{k+n-1}. \quad (2.18)$$

Так как $F(z)$ удовлетворяет условию (2.5), то

$$F_0^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.19)$$

Разделив обе части (2.17) на z^n и интегрируя от 0 до z , получим

$$\Phi_0(z) = K(\Phi_0) + F_1(z), \quad (2.20)$$

где K — оператор, действующий в классе аналитических в $|z| < 1$ функций, удовлетворяющих условию (2.12) и

$$K(\Phi_0) = \int_0^z \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta^n} \left[\Phi_0(\beta(\zeta)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \beta^k(\zeta) \right] d\zeta, \quad (2.21)$$

$$F_1(z) = \int_0^z \frac{F_0(\zeta) d\zeta}{\zeta^n}. \quad (2.22)$$

Решение уравнения (2.20) будем искать в пространстве функций, аналитичных в D^+ , непрерывных в $\overline{D}^+$ и удовлетворяющих условию (2.12). Определим норму функции $\Phi_0(z)$ в этом классе формулой

$$\|\Phi_0\| = \max_{|z| \leq 1} |\Phi_0(z)|. \quad (2.23)$$

Из (2.19) следует, что $F_1^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, \dots, m-n$. Если $\Phi_0(z)$ удовлетворяет условию (2.12), то $K(\Phi_0)$ также удовлетворяет этому условию. Уравнение (0.1) имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (2.20) имеет решение, удовлетворяющее условию (2.13). Для обоих решений справедливо (2.14), где $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ — постоянные, определенные формулой (2.10). При таком выборе $m \geq n$

и

$$\frac{n \|\alpha\|}{m-n+1} < 1, \quad (2.24)$$

покажем, что уравнение (2.20) при дополнительных условиях (2.12) имеет единственное решение. Для этого оценим норму оператора $K(\Phi_0)$ в классе аналитических функций, удовлетворяющих условию (2.12). Пусть $\Phi_0(z)$ — аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывна в $|z| \leq 1$ и удовлетворяет условию (2.12). Тогда функция

$$\omega_0(z) = \frac{\alpha(z)}{z^m} \left[\Phi_0(\beta(z)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \beta^k(z) \right] \quad (2.25)$$

аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в $|z| \leq 1$. Согласно принципу максимума модуля (см. [3]) имеем

$$|\omega_0(z)| \leq \max_{|\zeta|=1} |\omega_0(\zeta)| = \|\alpha\| \left(\|\Phi_0\| + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{|\Phi_0^{(k)}(0)|}{k!} \right). \quad (2.26)$$

Из неравенства Коши имеем (см. [3], стр. 64)

$$\frac{|\Phi_0^{(k)}(0)|}{k!} \leq \|\Phi_0\|. \quad (2.27)$$

Из (2.26) и (2.27) следует, что

$$|\omega_0(z)| \leq n \|\alpha\| \|\Phi_0\|, \quad (2.28)$$

$$|z^{m-n} \omega_0(z)| \leq n |z|^{m-n} \|\alpha\| \|\Phi_0\|. \quad (2.29)$$

В (2.21) присутствует функция $z^{m-n} \omega_0(z)$. Поэтому из (2.29) имеем

$$|K(\Phi_0)| \leq \frac{|z|^{m-n+1}}{m-n+1} n \|\alpha\| \|\Phi_0\|, \quad |z| \leq 1. \quad (2.30)$$

Следовательно, для нормы оператора K справедлива оценка

$$\|K\| \leq \frac{n \|\alpha\|}{m-n+1} < 1. \quad (2.31)$$

Таким образом, уравнение (2.20) в классе аналитических функций имеет единственное решение, которое задается рядом Неймана ([4], стр. 47)

$$\Phi_0(z) = F_1(z) + K(F_1) + K^2(F_1) + \dots, \quad (2.32)$$

где $K^j(F_1)$ — j -я степень K .

Ряд (2.32) сходится равномерно в замкнутом круге $|z| \leq 1$ как убывающая геометрическая прогрессия и

$$\|\Phi_0\| \leq c \|F_1\|, \quad \|K^j(F_1)\| \leq q^j \|F_1\|, \quad (2.33)$$

где

$$q = \frac{n \|\alpha\|}{m - n + 1}, \quad c = \frac{1}{1 - q}. \quad (2.34)$$

Из (2.17) следует, что $\Phi_0(z)$ непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Условия (2.13) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\Phi_0(z)}{z^{k+1}} dz = c_k, \quad k = m - n + 1, \dots, m - 1. \quad (2.35)$$

Подставляя $\Phi_0(z)$ из (2.32) в (2.35), получим

$$I_j(f) = 0, \quad j = 1, \dots, n - 1, \quad (2.36)$$

где $I_j(f)$ — линейные ограниченные функционалы, определенные в классе аналитических функций.

Таким образом, условия (2.36) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (0.1). Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (2.36). Тогда решение уравнения (0.1) задается формулой (2.14), где $c_0, c_1, \dots, c_{m-n}$ и функция $\Phi_0(z)$ определяются формулами (2.10) и (2.32), соответственно. Согласно теореме 0.1 условия (2.36) линейно независимы, т.е. функционалы $I_1, \dots, I_{n-1}$ линейно независимы и их можно представить в виде (0.6).

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (0.1) С ОСОБЕННОСТЯМИ И БЕЗ СДВИГОВ

В этом параграфе мы получим явную формулу для решения уравнения (0.1) и условия разрешимости при $\beta(z) \equiv z$. Сначала рассмотрим уравнение

$$z^n \varphi'(z) - P_{n-1}(z) \varphi(z) = f(z), \quad (3.1)$$

где $P_{n-1}(z)$ — полином порядка не выше $n - 1$

$$P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}, \quad (3.2)$$

где $c_0 > 0$, $c_1, \dots, c_{n-1}$ — постоянные.

Пусть D_0 — круг $|z| < 1$ без отрезка $[-1, 0]$. Решение уравнения (3.1) в интервале $(0, 1)$ получено в работе [5]. Так как D_0 — односвязная область и $z^n \neq 0$ при $z \in D_0$, то та же формула справедлива для решения уравнения (3.1) в области D_0 . Мы выводим эту формулу для D_0 . Пусть

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{c_k z^{k+1-n}}{k+1-n} + c_{n-1} \ln z, \quad (3.3)$$

$$\Psi_0(z) = \exp(\varphi_0(z)), \quad (3.4)$$

где $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ и $-\pi < \arg z \leq \pi$.

В области D_0 решение уравнения (3.1) можно записать в виде

$$\varphi(z) = \Psi_0(z) \left[c + \int_1^z \frac{f(\zeta)}{\zeta^n \Psi_0(\zeta)} d\zeta \right], \quad z \in D_0, \quad (3.5)$$

где c — комплексная постоянная. Так как $c_0 > 0$, то имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} |\Psi_0(x)| = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^n \Psi_0(x)} = 0. \quad (3.6)$$

Пусть $\varphi(z)$ — решение уравнения (3.1) в круге $|z| < 1$ так, что оно задается в D_0 формулой (3.5). Разделив обе части (3.5) на $\Psi_0(z)$ и переходя к пределу при $z = x \rightarrow +0$, получим

$$c = \int_0^1 \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^n \Psi_0(\zeta)}. \quad (3.7)$$

Следовательно, если (3.1) имеет решение в $|z| < 1$, то оно единственно и определяется формулой (3.5). Пусть $\varphi(z)$ определена формулой (3.5). Обозначим

$$\varphi^+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} \varphi(x + iy), \quad \varphi^-(x) = \lim_{y \rightarrow -0} \varphi(x + iy), \quad -1 < x < 0$$

(эти пределы всегда существуют). Поскольку функция $\varphi(z)$ является решением уравнения (0.1) в D_0 , то оно является также решением этого уравнения в $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi(z)$ ограничена в D_0 и

$$\varphi^+(x) = \varphi^-(x), \quad -1 < x < 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, уравнение (0.1) имеет решение в $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда функция (3.5) ограничена в D_0 и выполнено условие (3.8).

Из теоремы 0.1 следует, что условие (0.6) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (3.1), где $\Psi_1(z), \dots, \Psi_{n-1}(z)$ — линейно независимые аналитические функции в $|z| > 1$, исчезающие на бесконечности. Так как коэффициенты уравнения (3.1) являются полиномами, то функции $\Psi_j(z)$ бесконечно дифференцируемы в $|z| \geq 1$ (см. [2]). Используя теорему 0.1, получим дифференциальное уравнение для $\Psi_j(z)$ ($j = 1, \dots, n-1$).

Пусть $\varphi_0(z)$ — аналитическая функция в $|z| < 1$, непрерывно дифференцируемая в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Рассмотрим аналитическую функцию

$$f_0(z) = z^n \varphi'_0(z) - P_{n-1}(z) \varphi_0(z).$$

Для $f(z) = f_0(z)$ уравнение (3.1) имеет решение $\varphi(z) = \varphi_0(z)$. Из теоремы 0.1 имеем

$$\int_{|z|=1} (z^n \varphi'_0(z) - P_{n-1}(z) \varphi_0(z)) \Psi_j(z) dz = 0. \quad (3.9)$$

Интегрируя по частям, из (3.9) получим

$$\int_{|z|=1} (z^n \Psi'_j(z) + n z^{n-1} \Psi_j(z) + P_{n-1}(z) \Psi_j(z)) \varphi_0(z) dz = 0. \quad (3.10)$$

Так как (3.10) выполнено для любой аналитической в $|z| < 1$ функции, то

$$z^n \Psi'_j(z) + (n z^{n-1} + P_{n-1}(z)) \Psi_j(z) = \omega_j(z), \quad |z| = 1, \quad (3.11)$$

где $\omega_j(z)$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leq 1$ (см. [2]).

Из (3.11) следует, что

$$\Phi_j(z) = z^n \Psi'_j(z) + (n z^{n-1} + P_{n-1}(z)) \Psi_j(z)$$

— аналитическое продолжение функции $\omega_j(z)$ во внешность окружности $|z| = 1$. Функция $\Psi_j(z)$ аналитична в области $|z| > 1$ и исчезает на бесконечности, так что

$$|\Phi_j(z)| \leq c |z|^{n-2}, \quad |z| \geq 1, \quad (3.12)$$

где c — постоянная. Поэтому из теоремы Лиувилля имеем

$$z^n \Psi'_j(z) + (n z^{n-1} + P_{n-1}(z)) \Psi_j(z) = Q_j(z), \quad |z| \geq 1, \quad (3.13)$$

где $Q_j(z)$ — полином порядка не выше $n-2$.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$z^n \Psi'(z) + (nz^{n-1} + P_{n-1}(z)) \Psi(z) = Q_{n-2}(z), \quad |z| > 1, \quad (3.14)$$

где $Q_{n-2}(z)$ — полином порядка не выше $n-2$. Любую аналитическую в $|z| > 1$ функцию $\Psi(z)$, убывающую на бесконечности и удовлетворяющую уравнению (3.14), назовем решением этого уравнения.

Теорема 3.1. Для разрешимости уравнения (3.1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|z|=1} f(z) \Psi(z) dz = 0 \quad (3.15)$$

для любого решения $\Psi(z)$ уравнения (3.14).

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (3.1) имеет решение $\varphi(z)$, и пусть $\Psi(z)$ — решение уравнения (3.14). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} f(z) \Psi(z) dz &= \int_{|z|=1} [z^n \varphi'(z) - P_{n-1}(z) \varphi(z)] \Psi(z) dz = \int_{|z|=1} \varphi(z) \times \\ &\times [-z^n \Psi'(z) - n z^{n-1} \Psi(z) - P_{n-1}(z) \Psi(z)] dz = - \int_{|z|=1} \varphi(z) Q_{n-2}(z) dz = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Последнее равенство в (3.16) следует из теоремы Коши (см. [3]).

Достаточность. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию (3.15). В (0.6) функция $\Psi_j(z)$ удовлетворяет уравнению (3.14) (см. (3.13)). Поэтому функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (0.6) и, согласно теореме 0.1, уравнение (3.1) имеет решение. Теорема 3.1 доказана.

Вернувшись к уравнению (3.14), сделаем замену

$$\omega(z) = \frac{1}{z} \Psi(1/z); \quad |z| < 1. \quad (3.17)$$

Ясно, что $\omega(z)$ аналитична в $|z| < 1$ и непрерывно дифференцируема в $|z| \leq 1$.

Из (3.17) следует, что

$$\Psi(z) = \frac{1}{z} \omega(1/z), \quad |z| > 1. \quad (3.18)$$

$$\Psi'(z) = -\frac{1}{z^2} \omega(1/z) - \frac{1}{z^3} \omega'(1/z). \quad (3.19)$$

Подставляя $\Psi(z)$ и $\Psi'(z)$ из (3.18) и (3.19) в (3.14) и заменив z на $1/z$, получим

$$z\omega'(z) - \gamma_{n-1}(z)\omega(z) = \delta_{n-2}(z), \quad |z| < 1, \quad (3.20)$$

где $\gamma_{n-1}(z) = n - 1 + z^{n-1}P_{n-1}(1/z)$, а $\gamma_{n-2}(z)$ — полином порядка не выше $n - 2$.

Так как $P_{n-1}(0) > 0$, то $\gamma_{n-1}(z)$ — полином порядка не выше $n - 2$.

Любую аналитическую в $|z| < 1$ функцию $\omega(z)$, удовлетворяющую уравнению (3.20) с некоторым полиномом $\delta_{n-2}(z)$ порядка не выше $n - 2$, назовем решением уравнения (3.20).

Подставляя $\Psi(z)$ из (3.18) в (3.15), получим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.1) :

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} \omega(1/z) f(z) dz = 0, \quad (3.21)$$

где $\omega(z)$ — решение уравнения (3.20). Приведем простой метод решения уравнения (3.20). Пусть

$$P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}, \quad m = n - 1 + c_{n-1},$$

$$R_{n-1}(z) = \frac{c_0}{n-1} z^{n-1} + \frac{c_1}{n-2} z^{n-2} + \dots + c_{n-2}, \quad \omega_0(z) = \exp(R_{n-1}(z)). \quad (3.22)$$

Поскольку $c_0 > 0$, то $R_{n-1}(z)$ — полином порядка $n - 1$. В (3.20) положим

$$\omega(z) = \Phi(z)\omega_0(z). \quad (3.23)$$

Тогда имеем

$$z\Phi'(z) - m\Phi(z) = \frac{\delta_{n-2}(z)}{\omega_0(z)}. \quad (3.24)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть

$$m \neq 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

Общее решение уравнения (3.24) является линейной комбинацией $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, ..., $\Phi_{n-2}(z)$, где $\Phi_k(z)$ — решение уравнения

$$z\Phi'_k(z) - m\Phi_k(z) = \frac{z^k}{\omega_0(z)}, \quad |z| < 1 \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (3.26)$$

Положим

$$\Phi_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj} z^j. \quad (3.27)$$

$$[\omega_0(z)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \quad (3.28)$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{-k-1} [\omega_0(\zeta)]^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=2} \zeta^{-k-1} [\omega_0(\zeta)]^{-1} d\zeta. \quad (3.29)$$

Справедливы неравенства Коши

$$|A_k| \leq \frac{1}{2^k} \max_{|\zeta|=2} |\omega_0(\zeta)|^{-1} \leq \frac{1}{2^k} \exp(B), \quad (3.30)$$

где

$$B = \frac{|c_0|}{n-1} 2^{n-1} + \frac{|c_1|}{n-1} 2^{n-2} + \dots + |c_{n-1}|. \quad (3.31)$$

Подставляя $\Phi_k(z)$ и $[\omega_0(z)]^{-1}$ в (3.24), получим

$$c_{kj} = 0, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad (3.32)$$

$$c_{kj} = \frac{A_{j-k}}{j-m}, \quad j = k, k+1, \dots \quad (3.33)$$

Из (3.33) и (3.30) следует, что в замкнутом круге $|z| \leq 1$ ряд (3.27) равномерно сходится как убывающая геометрическая прогрессия. Поэтому необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.21) можно записать в виде

$$\int_{|z|=1} f(z) \Phi_k(1/z) \omega_0(1/z) \frac{dz}{z} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (3.34)$$

где $\Phi_k(z)$ — решение уравнения (3.26).

Случай 2. Пусть $m \geq 0$ — целое число. Тогда производная порядка m функции $z \Phi'(z) - m \Phi(z)$ в точке $z = 0$ равна нулю. Следовательно, для разрешимости уравнения (3.24) необходимо выполнение условия

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\frac{\delta_{n-2}(z)}{\omega_0(z)} \right) = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (3.35)$$

Пусть

$$\delta_{n-2}(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-2} z^{n-2}, \quad (3.36)$$

где $b_0, \dots, b_{n-2}$ — произвольные постоянные.

Подставляя δ_{n-2} из (3.36) в (3.35), получим

$$\sum_{k=0}^{n-2} b_k \alpha_k^{(m)}(0) = 0, \quad (3.37)$$

где

$$\alpha_k(z) = \frac{z^k}{\omega_0(z)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (3.38)$$

Для того, чтобы решить уравнение (3.24), нам понадобится следующая

Лемма 3.1.

$$\sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k^{(j)}(0)| \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.39)$$

Доказательство приведено в конце этого параграфа.

Из (3.39) следует, что одно из чисел $\alpha_k^{(m)}(0)$ ($k = 0, \dots, m-1$) не равно нулю.

Для определенности, пусть $\alpha_{n-2}^{(m)}(0) \neq 0$. Тогда из (3.37) имеем $b_0 = 0$ при $n = 2$

и

$$b_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} b_k d_k \quad \text{при } n \geq 3, \quad (3.40)$$

где $d_k = -\frac{\alpha_k^{(m)}(0)}{\alpha_{n-2}^{(m)}(0)}$. Итак, в этом случае уравнение (3.24) запишется в виде

$$z \Phi'(z) - m \Phi(z) = 0 \quad \text{при } n = 2, \quad (3.41)$$

$$z \Phi'(z) - m \Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-3} b_k (\alpha_k(z) + d_k \alpha_{n-2}(z)) \quad \text{при } n \geq 3. \quad (3.42)$$

Решение уравнения (3.41) имеет вид

$$\Phi(z) = c z^m, \quad (3.43)$$

где c — постоянная. Мы ищем частное решение уравнения

$$z \Psi_k'(z) - m \Psi_k(z) = \alpha_k(z) + d_k \alpha_{n-2}(z), \quad (3.44)$$

имеющее вид

$$\Psi_k(z) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}} \alpha_{kj} z^j. \quad (3.45)$$

Коэффициенты α_{kj} разложения (3.45) можно определить так же, как и в предыдущем случае. Тогда общее решение уравнения (3.42) примет вид

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-3} b_k \Psi_k(z) + c z^m. \quad (3.46)$$

Таким образом, в этом случае для разрешимости уравнения (3.21) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|z|=1} f(z) \omega_0(1/z) z^m \frac{dz}{z} = 0, \quad (3.47)$$

$$\int_{|z|=1} \Psi_k(z) f(z) \omega_0(1/z) dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-3. \quad (3.48)$$

Рассмотрим теперь уравнение (0.1) в общем случае и покажем, что оно можно свести к уравнению (3.1). Согласно предположению имеем $\alpha(0) \neq 0$. Без потери общности можно считать, что $\alpha(0) > 0$.

Положим

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) \Phi(z), \quad (3.49)$$

где

$$\varphi_0(z) = \exp \left[\int_0^z \frac{1}{\zeta^n} \left(\alpha(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{(k)}(0) \frac{z^k}{k!} \right) d\zeta \right]. \quad (3.50)$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (3.49) в (0.1), получим

$$z^n \Phi'(z) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{(k)}(0) \frac{z^k}{k!} \right) \Phi(z) = \frac{f(z)}{\varphi_0(z)}. \quad (3.51)$$

Уравнение (3.51) имеет вид (3.1).

Доказательство леммы 3.1. Пусть $\omega_0(z)$ и $\alpha_k(z)$ определены формулами (3.22) и (3.38), соответственно. Из формулы Лейбница имеем

$$\alpha_m^{(n)}(0) = \frac{m!}{\omega_0(0)} \neq 0.$$

Следовательно, (3.39) выполняется для $m \leq n-2$. Пусть $m \geq n-1$ и

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left| \alpha_k^{(m)}(0) \right| = 0. \quad (3.52)$$

Это означает, что

$$\alpha_k^{(m)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (3.53)$$

Для функции (3.38) формула Лейбница дает

$$\alpha_k^{(m)}(0) = \frac{m!}{(m-k)!} \alpha_0^{(m-k)}(0), \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (3.54)$$

Из (3.53) и (3.54) имеем

$$\alpha_0^{(m-k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (3.55)$$

Из (3.22) и (3.38)

$$\alpha_0(z) = \exp(R_{n-1}(z)), \quad \alpha'_0(z) = \alpha_0(z) R'_{n-1}(z), \quad (3.56)$$

$$\alpha_0^{(m+1)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} (\alpha_0(z) R'_{n-1}(z)). \quad (3.57)$$

Так как $R'_{n-1}(z)$ — полином порядка $n-2$, то используя формулу Лейбница в (3.57) и учитывая (3.55), получим

$$\alpha_0^{(m+1)}(0) = 0. \quad (3.58)$$

Аналогично получим $\alpha_0^{(m+2)}(0) = 0$. Наконец, имеем

$$\alpha_0^{(j)}(0) = 0, \quad j = m-n+2, m-n+3, \dots \quad (3.59)$$

Следовательно, функция $\alpha_0(z)$ — полином, что противоречит формуле (3.56). Это противоречие доказывает формулу (3.39) для $j = n-1, n, \dots$. Лемма 3.1 доказана.

§4. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Если условия (0.3) и (0.4) заменить на

$$\beta^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \nu, \quad \beta^{(\nu+1)}(0) \neq 0 \quad (4.1)$$

для некоторого натурального ν , то получим так называемый исключительный случай уравнения (0.1). Снова $n \geq 2$ натурально и $\alpha(0) \neq 0$.

Теорема 4.1. Если $q = \frac{n-1}{\nu}$ — натуральное число и

$$\frac{\alpha(0)}{q} \left[\frac{\beta^{(\nu+1)}(0)}{(\nu+1)!} \right]^q = 1, \quad (4.2)$$

то однородное уравнение (0.1) имеет единственное линейно независимое решение.

Доказательство. Пусть уравнение

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z) \varphi(\beta(z)) = 0, \quad |z| < 1 \quad (4.3)$$

имеет ненулевое решение $\varphi(z)$. Подставляя $z = 0$ в (4.3), получим $\varphi(0) = 0$.

Следовательно

$$\varphi(z) = z^m \varphi_0(z), \quad (4.4)$$

где m — натуральное число, $\varphi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и $\varphi_0(0) \neq 0$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (4.4) в (4.3), получим

$$z^{n+m} \varphi_0'(z) + m z^{m+n-1} \varphi_0(z) - \alpha(z) \beta^m(z) \varphi_0(\beta(z)) = 0, \quad |z| < 1. \quad (4.5)$$

Из (4.1) следует, что

$$\beta(z) = \beta_0(z) z^{\nu+1}, \quad (4.6)$$

$$\beta^m(z) = \beta_0^m(z) z^{m(\nu+1)}, \quad (4.7)$$

где $\beta_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и

$$\beta_0(0) = \frac{\beta^{(\nu+1)}(0)}{(\nu+1)!} \neq 0. \quad (4.8)$$

Подставляя $\beta^m(z)$ из (4.7) в (4.5) и разделив обе части (4.5) на $z^{m(\nu+1)}$, получим

$$z^{n-m\nu-1} (z \varphi_0'(z) + m \varphi_0(z)) = \alpha(z) \beta_0^m(z) \varphi_0(\beta(z)), \quad |z| < 1, \quad |z| \neq 0. \quad (4.9)$$

Так как $\alpha(0) \neq 0$, $\beta_0(0) \neq 0$, $\varphi_0(0) \neq 0$, $\beta(0) = 0$, то из (4.9) имеем

$$n - m\nu - 1 = 0, \quad (4.10)$$

$$m = \frac{n-1}{\nu} = q. \quad (4.11)$$

Следовательно, q — натуральное число. Подставляя m из (4.11) в (4.9), получим

$$z \varphi_0'(z) + q \varphi_0(z) = \alpha(z) \beta_0^q(z) \varphi_0(\beta(z)), \quad |z| < 1. \quad (4.12)$$

Переходя к пределу в (4.12) при $z \rightarrow 0$ и учитывая, что $\beta(0) = 0$, $\varphi_0(0) \neq 0$, получим (4.2). Пусть q — натуральное число и выполнено условие (4.2). Представим решение уравнения (4.12) в виде

$$\varphi_0(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{\rho-1} z^{\rho-1} + z^\rho \varphi_1(z), \quad (4.13)$$

где ρ — некоторое натуральное число, $c_0, c_1, \dots, c_{\rho-1}$ — постоянные, а $\varphi_1(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Подставляя $\varphi_0(z)$ из (4.13) в (4.12), получим

$$z^{\rho+1} \varphi_1'(z) + (q + \rho) z^\rho \varphi_1(z) - \alpha(z) \beta_0^q(z) \beta^\rho(z) \varphi_1(\beta(z)) = \Phi(z), \quad |z| < 1, \quad (4.14)$$

где

$$\Phi(z) = \alpha(z) \beta_0^q(z) \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k \beta^k(z) - \sum_{k=0}^{\rho-1} (k + q) c_k z^k. \quad (4.15)$$

Производные (4.14) до порядка $\rho - 1$ в точке $z = 0$ равны нулю. Следовательно, для разрешимости уравнения (4.14) относительно $\varphi_1(z)$ необходимо выполнение условия

$$\Phi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \rho - 1. \quad (4.16)$$

Из (4.2) следует равенство (4.16) для $j = 0$. Подставляя $\Phi(z)$ из (4.15) в (4.16) при $k = 1, \dots, \rho - 1$, получим

$$j! (j + q) c_j - \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{jk} c_k = 0, \quad j = 1, \dots, \rho - 1, \quad (4.17)$$

где

$$\gamma_{jk} = \omega_k^{(j)}(0), \quad \omega_k(z) = \alpha(z) \beta_0^q(z) \beta^k(z). \quad (4.18)$$

Система уравнений (4.17) для всякого c_0 имеет единственное решение

$$c_j = b_j c_0, \quad j = 1, \dots, \rho - 1, \quad (4.19)$$

где b_j — некоторые постоянные.

Подставляя c_j из (4.19) в (4.15), получим

$$\Phi(z) = c_0 \Phi_0(z), \quad (4.20)$$

где $\Phi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию (4.16).

Разделив обе части (4.14) на z^ρ и учитывая формулы (4.6), (4.20), получим

$$z \varphi_1'(z) + (q + \rho) \varphi_1(z) - \alpha_0(z) \varphi_1(\beta(z)) = c_0 \Phi_1(z), \quad (4.21)$$

где $\Phi_1(z) = \Phi_0(z) z^{-\rho}$, $\alpha_0(z) = \alpha(z) \beta_0^{q+\rho}(z) z^{\nu \rho}$.

Поскольку $|\beta(z)| \leq 1$ для $|z| \leq 1$, то

$$\|\beta_0\| = \max_{|z|=1} \left| \frac{\beta(z)}{z^{\nu+1}} \right| = \|\beta\| \leq 1, \quad \|\alpha_0\| \leq \|\alpha\|. \quad (4.22)$$

Пусть

$$\frac{\|\alpha\|}{q + \rho} < 1. \quad (4.23)$$

Докажем, что условие (4.23) обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (4.21) с любой правой частью. Пусть $\Psi_1(z)$ — решение уравнения (4.21) при $c_0 = 1$.

Тогда оно определяется формулой

$$\varphi_1(z) = c_0 \Psi_1(z). \quad (4.24)$$

Из формул (4.4), (4.13) и (4.24) имеем

$$\varphi(z) = c_0 z^m (1 + b_1 z + \dots + b_{\rho-1} z^{\rho-1} + z^\rho \Psi_1(z)). \quad (4.25)$$

Таким образом, однородное уравнение (4.3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда q — натуральное число и имеет место условие (4.2). Тогда число линейно независимых решений равно 1. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (0.1) в исключительном случае. Представим решение в виде

$$\varphi_0(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m \varphi_0(z), \quad (4.26)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ — комплексные постоянные, m — натуральное число, $\varphi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и

$$m \geq q, \quad m > \|\alpha\|, \quad q = \frac{n-1}{\nu}. \quad (4.27)$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (4.26) в уравнение (0.1), получим

$$z^{m+n} \varphi_0'(z) + m z^{m+n-1} \varphi_0(z) - \alpha(z) \beta^m(z) \varphi_0(\beta(z)) = F(z), \quad (4.28)$$

где

$$F(z) = f(z) + \alpha(z) \sum_{k=0}^{m-1} c_k \beta^k(z) - \sum_{k=0}^{m-1} k c_k z^{k+n-1}. \quad (4.29)$$

Из условия $m \geq q$ следует, что производные до порядка $n+m-2$ левой части (4.29) в точке $z = 0$ равны нулю. Следовательно, этому условию должна удовлетворять функция $F(z)$, т.е.

$$F^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m+n-2. \quad (4.30)$$

Подставляя $F(z)$ из (4.29) в (4.30), получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} A_{jk} c_j = f^{(j)}(0), \quad j = 0, \dots, m+n-2, \quad (4.31)$$

где $\Psi_k(z) = \alpha(z) \beta^k(z) - k z^{k+n-1}$ и

$$A_{jk} = \Psi_k^{(j)}(0). \quad (4.32)$$

Пусть постоянные $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ удовлетворяют системе (4.31). Разделив обе части (4.28) на z^{m+n-1} , получим

$$z \varphi'_0(z) + m \varphi_0(z) - \alpha_0(z) \varphi_0(\beta(z)) = F_0(z), \quad (4.33)$$

где

$$F_0(z) = \frac{F(z)}{z^{m+n-1}}, \quad \alpha_0(z) = \alpha(z) z^{m+n-1-n} \beta_0^m(z). \quad (4.34)$$

Из соотношений (4.22), (4.27) и (4.30) следует, что функции $\alpha_0(z)$ и $F_0(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$ и

$$\|\alpha_0\| = \|\alpha\|. \quad (4.35)$$

Теперь докажем, что уравнение (4.33) имеет единственное решение. Обозначим

$$z \varphi'_0(z) + m \varphi_0(z) = \Psi(z). \quad (4.36)$$

Имеем

$$\frac{d}{dz} (z^m \varphi_0(z)) = z^{m-1} \Psi(z), \quad (4.37)$$

$$\varphi_0(z) = z^{-m} \int_0^z \zeta^{m-1} \Psi(\zeta) d\zeta, \quad (4.38)$$

$$\varphi_0(\beta(z)) = \beta^{-m} \int_0^{\beta(z)} \zeta^{m-1} \Psi(\zeta) d\zeta. \quad (4.39)$$

Так как

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[z^{-m} \int_0^z \zeta^{m-1} \Psi(\zeta) d\zeta \right] = \frac{\Psi(0)}{m}, \quad (4.40)$$

то (4.38) и (4.39) аналитичны в круге $|z| < 1$. Уравнение (4.33) запишется в виде

$$\Psi(z) = K_0(\Psi) + F_0(z), \quad (4.41)$$

где

$$K_0(\Psi) = \frac{\alpha_0(z)}{\beta^m(z)} \int_0^{\beta(z)} \zeta^{m-1} \Psi(\zeta) d\zeta. \quad (4.42)$$

Из (4.35) и (4.42) имеем

$$|K_0(\Psi)| \leq \frac{\|\alpha\|}{m} \|\Psi\|, \quad |z| \leq 1. \quad (4.43)$$

Из неравенств (4.27) и (4.43) следует, что норма оператора K_0 меньше 1. Таким образом, уравнение (4.41) имеет единственное решение и оно определяется рядом Неймана

$$\Psi(z) = F_0(z) + K_0(F_0) + K_0^2(F_0) + \dots \quad (4.44)$$

Итак, мы получили следующие результаты.

Теорема 4.2. Общее решение $\varphi(z)$ уравнения (0.1) определяется формулами (4.26), (4.38) и (4.44), где $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ — общее решение алгебраического уравнения (4.31).

Следствие 4.1. Уравнение (0.1) для заданной правой части $f(z)$ имеет решение тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений (4.31) для этой же функции $f(z)$ имеет решение, причем числа линейно независимых решений однородного уравнения (0.1) и однородной системы уравнений (4.31) (при $f \equiv 0$) совпадают.

Следствие 4.2. Если q — натуральное число и имеет место условие (4.2), то однородная система уравнений (4.31) (при $f \equiv 0$) имеет единственное линейно независимое решение и $\text{rank} \|A_{jk}\| = m - 1$. В остальных случаях однородное уравнение (4.31) имеет только нулевое решение и $\text{rank} \|A_{jk}\| = m$.

Следствие 4.3. Уравнение (0.1) имеет решение тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет линейно независимым условиям $\sum_{k=0}^{m+n-2} b_{jk} f^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, \dots, k_0$, где b_{jk} — некоторые постоянные, зависящие только от n и производных функций $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ до порядка $m+n-2$ в точке $z=0$, причем $k_0 = n$, если однородное уравнение имеет только нулевое решение и $k_0 = n-1$ в противном случае.

§5. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Пусть D^+ , D^- и Γ — те же, что и в начале этой работы. Рассмотрим уравнение

$$\alpha(z) \varphi'(z) - \beta(z) \varphi(z) = f(z), \quad z \in D^+, \quad (5.1)$$

где $\varphi(z)$ — искомая аналитическая функция в D^+ . Предполагаем, что $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \cup \Gamma$ и $\alpha(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Без потери общности можно предположить, что $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ не имеют общих нулей в области D^+ . Если $\alpha(z) \neq 0$ при $z \in \overline{D^+}$, то решение уравнения (5.1) принимает вид

$$\varphi(z) = \Phi(z) + c \Psi(z), \quad (5.2)$$

где c — произвольная постоянная, а

$$\Psi(z) = \exp \left(\int_{z_0}^z \frac{\beta(\zeta)}{\alpha(\zeta)} d\zeta \right), \quad \Phi(z) = \Psi(z) \int_{z_0}^z \frac{f(\zeta) d\zeta}{\alpha(\zeta) \Psi(\zeta)}. \quad (5.3)$$

1. Если функция $\alpha(z)$ имеет нули в области D^+ , то существуют функции $f(z)$, для которых уравнение (5.1) не имеет решений. Более того, функция $\varphi(z) = \Phi(z) + c \Psi(z)$, вообще говоря, не аналитична в D^+ .

Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$\alpha(z) \varphi_0'(z) - \beta(z) \varphi_0(z) = 0, \quad z \in D^+. \quad (5.4)$$

Пусть $z_1, \dots, z_m$ — нули функции $\alpha(z)$ в области D^+ , $n_1, \dots, n_m$ — их кратности. Так как функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ не имеют общих нулей, то

$$\beta(z_k) \neq 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.5)$$

При $n_j = 1$ ($j = 1, \dots, m$) обозначим

$$b_k = \frac{\beta(z_k)}{\alpha'(z_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.6)$$

Теорема 5.1. Если $n_j = 1$ и b_j — натуральные числа ($j = 1, \dots, m$), то уравнение (5.4) имеет одно линейно независимое решение. В остальных случаях это уравнение имеет только нулевое решение.

Доказательство. Пусть уравнение (5.4) имеет ненулевое решение $\varphi_0(z)$. Ясно, что

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)(z - z_1)^n, \quad \alpha(z) = \alpha_0(z)(z - z_1)^{n_1}, \quad (5.7)$$

где $\varphi_1(z)$, $\alpha_0(z)$ аналитичны в D^+ , n и n_1 — натуральные числа и

$$\alpha_0(z_1) \neq 0, \quad \varphi_1(z_1) \neq 0. \quad (5.8)$$

Подставляя $\varphi(z)$ и $\alpha(z)$ из (5.7) в (5.4) и разделив обе части на $(z - z_1)^n$, получим

$$\alpha_0(z)(z - z_1)^{n_1} \varphi_1'(z) + n \alpha_0(z)(z - z_1)^{n_1-1} \varphi_1(z) - \beta(z) \varphi_1(z) = 0, \quad z \in D^+. \quad (5.9)$$

Подставляя $z = z_1$ в (5.9), получим

$$\beta(z_1) \varphi_1(z_1) = 0 \quad \text{при} \quad n_1 \geq 2, \quad (5.10)$$

$$(n \alpha_0(z_1) - \beta(z_1)) \varphi_1(z_1) = 0 \quad \text{при} \quad n_1 = 1. \quad (5.11)$$

Так как $\beta(z_1) \neq 0$, $\varphi_1(z_1) \neq 0$ и $\alpha_0(z_1) \neq 0$, то из (5.10), (5.11) имеем

$$n_1 = 1, \quad (5.12)$$

$$n = \frac{\beta(z_1)}{\alpha_0(z_1)} \neq 0. \quad (5.13)$$

Из (5.12) и второго равенства (5.7) получим

$$\alpha'(z_1) = \alpha_0(z_1). \quad (5.14)$$

Из (5.6), (5.13) и (5.14) имеем

$$n = b_1 \neq 0. \quad (5.15)$$

Следовательно, $n_1 = 1$ и $b_1 \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом докажем, что $n_j = 1$ и b_j — натуральные числа для всех индексов j . Таким образом, условия теоремы 5.1

необходимы для существования ненулевого решения уравнения (5.4). Обратно, в этих условиях имеем

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{z - z_k} + \gamma(z), \quad (5.16)$$

где $\gamma(z)$ — аналитична в D^+ .

Следовательно, уравнение (5.4) примет вид

$$\varphi'_0(z) = \left(\sum_{k=1}^m \frac{b_k}{z - z_k} + \gamma(z) \right) \varphi_0(z), \quad z \in D^+. \quad (5.17)$$

Общее решение уравнения (5.17) определяется формулой

$$\varphi_0(z) = c(z - z_1)^{b_1} \dots (z - z_n)^{b_m} \exp \left(\int_0^z \gamma(\zeta) d\zeta \right), \quad (5.18)$$

где c — постоянная.

Таким образом, условия теоремы 5.1 необходимы и достаточны для существования ненулевого решения уравнения (5.4). В этих условиях уравнение имеет единственное линейно независимое решение. Теорема 5.1 доказана.

2. В этом пункте мы получим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (5.1). Для этого сначала рассмотрим частный случай этого уравнения:

$$P_n(z) \varphi'(z) - Q_{n-1}(z) \varphi(z) = g(z), \quad z \in D^+, \quad (5.19)$$

где $P_n(z)$ — полином порядка n , все корни которого находятся в D^+ , $Q_{n-1}(z)$ — полином порядка не выше $n - 1$, $g(z)$ — заданная аналитическая функция в D^+ , непрерывная в замкнутой области $\overline{D}^+$.

Наряду с уравнением (5.19) рассмотрим уравнение

$$P_n(z) \Psi'(z) + (Q_{n-1}(z) + P'_n(z)) \Psi(z) = \omega_{n-2}(z), \quad z \in D^-, \quad (5.20)$$

где $\omega_{n-2}(z)$ — полином порядка не выше $n - 2$.

Мы ищем решение уравнения (5.20) в классе аналитических в D^- функций, исчезающих на бесконечности и удовлетворяющих уравнению (5.20) при некотором полиноме $\omega_{n-2}(z)$ порядка не выше $n - 2$.

Теорема 5.2. Уравнение (5.19) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} g(z) \Psi(z) dz = 0, \quad (5.21)$$

где $\Psi(z)$ решение уравнения (5.20).

Теорема 5.3. Число линейно независимых решений уравнения (5.20) равно $n - 1 + \nu$, где ν — число линейно независимых решений однородного уравнения (5.19).

Доказательства теорем 5.2 и 5.3 опускаются, так как они аналогичны доказательствам теорем 0.1 и 3.1.

Согласно теореме 5.1 число ν линейно независимых решений однородного уравнения (5.4) равно 1 или 0, в зависимости от того, выполняются или нет условия теоремы 5.1. Уравнение (5.20) можно решить аналогично уравнению (3.14).

Теперь покажем, что общий случай уравнения (5.1) можно свести к решению уравнения (5.19). Обозначим через $g_k(z)$ главную часть функции

$$\delta(z) \equiv \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$$

в точке z_k ($k = 1, \dots, m$), а через $\gamma(z)$ функцию

$$\gamma(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} - \sum_{k=1}^m g_k(z). \quad (5.22)$$

Функция $\gamma(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в $\overline{D}^+$. Пусть

$$\Psi_0(z) = \exp \left(\int_0^z \gamma(\zeta) d\zeta \right).$$

Делая в (5.1) замену

$$\varphi(z) = \Psi_0(z) \Phi(z),$$

получим уравнение вида (5.19) относительно функции $\Phi(z)$. Следовательно, можно определить также необходимое и достаточное условие на функцию $f(z)$, обеспечивающее разрешимость уравнения (5.1). Тогда общее решение уравнения (5.1) имеет вид $\varphi(z) = \omega(z) + \varphi_0(z)$, где $\omega(z)$ — частное его решение, а $\varphi_0(z)$ — общее решение однородного уравнения (5.4). Учитывая теорему 5.1 и формулу (5.18), достаточно найти частное решение уравнения (5.1). Ниже мы укажем простой метод его нахождения.

3. Построим частное решение уравнения (5.1), предполагая, что это уравнение имеет решение для заданного $f(z)$. Пусть $z_1, \dots, z_m$ — нули функции $\alpha(z)$ в области D^+ , $n_1, \dots, n_m$ — их кратности. Пусть L_k — отрезок прямой, соединяющей точки z_k и $\zeta_k \in \Gamma$.

Обозначим $D_0 = D^+ \setminus \{L_1, \dots, L_m\}$. Пусть отрезки $L_1, \dots, L_m$ не имеют общих точек так, что область D_0 односвязна. Уравнение (5.1) в области D_0 является уравнением без особенностей. Поэтому в этой области общее решение уравнения (5.1) определяется формулой (5.2), где $z_0 \in D_0$ — фиксированная точка, а c — постоянная. В (5.3) интегрирование проводится по кривой, принадлежащей области D_0 . Пусть теперь $\varphi(z)$ — решение уравнения (5.1) в области D^+ . Ясно, что оно является решением этого уравнения в области D_0 . Поэтому оно представляется в виде (5.2) при некотором $c = c_0$, т.е.

$$\varphi(z) = \Phi(z) + c_0 \Psi(z). \quad (5.23)$$

Следовательно, вопрос сводится к определению постоянной c_0 . Для этого рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть условия теоремы 5.1 выполнены. Тогда $\Psi(z)$ определяется формулой (5.18) при $c = 1$. Поэтому $c_0 \Psi(z)$ является решением однородного уравнения (5.1). Отсюда следует, что функция (5.23) является решением неоднородного уравнения (5.1) при произвольной постоянной c_0 .

Случай 2. Пусть $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 1$ и одно из чисел b_k — целое отрицательное. Пусть для определенности $k = 1$. Тогда точка z_0 является полюсом для функции $\Psi(z)$. Напомним, что формула (5.23) является частным решением уравнения (5.1) в области D^+ . Разделив обе части уравнения (5.23) на $\Psi(z)$ и переходя к пределу при $z \rightarrow z_1$, получим

$$c_0 = \int_{z_1}^{z_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\alpha(\zeta) \Psi(\zeta)}. \quad (5.24)$$

Так как точка z_1 является простым нулем функции $\alpha(z)$ и полюсом функции $\Psi(z)$, то подынтегральное выражение в (5.24) является аналитической функцией в окрестности z_1 . В (5.24) интегрирование идет от z_1 до z_0 по гладкой кривой, принадлежащей области D_0 .

Случай 3. Пусть $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 1$ и одно из чисел b_k не является целым. Пусть $k = 1$, и пусть ζ_0 — точка на отрезке L_1 (отлична от концов L_1). Если $\omega(z)$ аналитична в D_0 , то через $\omega^+(\zeta_0)$ и $\omega^-(\zeta_0)$ обозначим пределы $\omega(z)$ при $z \rightarrow \zeta_0$ слева и справа отрезка L_1 .

Из формулы (5.3) следует, что пределы $\Psi^+(\zeta_0)$, $\Psi^-(\zeta_0)$, $\Phi^+(\zeta_0)$, $\Phi^-(\zeta_0)$ существуют и

$$\Psi^+(\zeta_0) \neq \Psi^-(\zeta_0). \quad (5.25)$$

При получении неравенства (5.25) мы использовали нецелочисленность b_1 . Из равенства (5.23) и непрерывности $\varphi(z)$ в точке ζ_0 имеем

$$\Phi^+(\zeta_0) + c_0 \Psi^+(\zeta_0) = \Phi^-(\zeta_0) + c_0 \Psi^-(\zeta_0). \quad (5.26)$$

Отсюда

$$c_0 = \frac{\Phi^-(\zeta_0) - \Phi^+(\zeta_0)}{\Psi^+(\zeta_0) - \Psi^-(\zeta_0)}.$$

Случай 4. Пусть функция $\alpha(z)$ имеет кратные корни в области D^+ , и пусть, для определенности, точка z_1 является кратным корнем. Пусть в (5.3) точка z_0 выбрана так, что $(z_1, z_0) \in D_0$ и

$$-\frac{\pi}{2} < \arg \frac{\beta_1(z_1)}{\alpha^{(n_1)}(z_1)} - n_1 \arg(z_1 - z_0) < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, аналогично формуле (3.7), можно показать, что в формуле (5.23) постоянная c_0 определяется формулой (5.24), где интегрирование проводится по отрезку $[z_1, z_0]$.

§6. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В круге $|z| < 1$ рассмотрим следующую задачу Пуанкаре для уравнения Лапласа.

Задача А.

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} + P(x, y) u(z) = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.2)$$

где $z = x + iy$, $P(x, y)$ — заданный полином относительно переменных x и y с вещественными коэффициентами, $g(z)$ — заданная вещественная функция на

окружности $|z| = 1$, $u(x, y)$ – искомое вещественное решение, $\frac{\partial u(z)}{\partial \tau}$ – производная функции $u(z)$ по направлению радиус-вектора в точке z ($|z| = 1$). Найти вещественное решение $u(z)$, непрерывно дифференцируемое в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Задача А называется однородной, если $g \equiv 0$.

Пусть $|z| = 1$. Тогда

$$x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad y = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Поэтому на окружности $|z| = 1$

$$P(x, y) = P_0(z) \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k z^k + \frac{\bar{a}_k}{z^k} \right), \quad (6.3)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ – постоянные, a_0 вещественно, $\bar{a}_k$ – комплексно сопряженное к a_k , $n \geq 2$ – натуральное число, $a_{n-1} \neq 0$.

Задачу Пуанкаре можно свести к сингулярному интегральному уравнению (см. [2]). Здесь мы указываем эффективный метод решения задачи А.

Решение уравнения (6.1) можно представить в виде ([3])

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{n-2} c_k z^k + z^{n-1} \varphi(z) \right], \quad (6.4)$$

где $c_0, \dots, c_{n-2}$ – постоянные, c_0 – вещественно, $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Подставляя $u(x, y)$ из (6.4) в граничное условие (6.2), получим

$$\operatorname{Re} \left[z^n \varphi'(z) + Q(z) \varphi(z) + \sum_{k=1}^{n-2} k c_k z^k + P_0(z) \sum_{k=0}^{n-2} c_k z^k \right] = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.5)$$

где

$$Q(z) = (n-1) z^{n-1} + z^{n-1} P_0(z). \quad (6.6)$$

Из (6.3) следует, что функция $Q(z)$ – полином порядка $2n-2$. Обозначим

$$c_0 = \alpha_0, \quad \operatorname{Re} c_k = \alpha_k, \quad \operatorname{Im} c_k = \beta_k \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (6.7)$$

Пусть b – комплексная постоянная, а k – натуральное число. Тогда

$$\operatorname{Re} \frac{b}{z^k} = \operatorname{Re} \bar{b} z^k \quad \text{при} \quad |z| = 1, \quad (6.8)$$

и соотношение (6.5) запишется в виде

$$\operatorname{Re} \left[z^n \varphi'(z) + Q(z) \varphi(z) + \sum_{j=0}^{n-2} a_j Q_{1j}(z) + \sum_{k=1}^{n-2} \beta_k Q_{2k}(z) \right] = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.9)$$

где $Q_{1j}(z)$ и $Q_{2j}(z)$ — полиномы порядка не выше $2n-2$.

Функция в квадратных скобках в (6.9) аналитична в $|z| < 1$ и непрерывна в $|z| \leq 1$. Поэтому она определяется формулой Шварца (см. [3])

$$z^n \varphi'(z) + Q(z) \varphi(z) + \sum_{j=0}^{n-2} a_j Q_{1j}(z) + \sum_{k=1}^{n-2} \beta_k Q_{2k}(z) = F(z) + i\beta_0, \quad |z| < 1, \quad (6.10)$$

где β_0 — вещественная постоянная и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\theta, \quad \zeta = e^{i\theta}. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.10) можно записать также в виде

$$z^n \varphi'(z) + Q(z) \varphi(z) = f(z), \quad |z| < 1, \quad (6.12)$$

где

$$f(z) = F(z) + i\beta_0 - \sum_{j=0}^{n-2} a_j Q_{1j}(z) - \sum_{k=1}^{n-2} \beta_k Q_{2k}(z). \quad (6.13)$$

Так как $n \geq 2$, то

$$Q(0) = \bar{a}_{n-2} \neq 0. \quad (6.14)$$

В §2 мы показали, что для разрешимости уравнения (6.12) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|z|=1} f(z) \Psi_j(z) dz = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (6.15)$$

где $\Psi_j(z)$ — линейно независимые аналитические функции в $|z| > 1$, исчезающие на бесконечности и не зависящие от функции $f(z)$ (см. §3).

Условия (6.15) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\int_{|z|=1} f(z) \Psi_j(z) dz \right] = 0, \quad \operatorname{Im} \left[\int_{|z|=1} f(z) \Psi_j(z) dz \right] = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (6.16)$$

Подставляя $f(z)$ из (6.13) в (6.16), получим

$$AC = b, \quad (6.17)$$

где C — $(2n-2)$ -мерный вектор-столбец с элементами $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2}, \beta_0, \dots, \beta_{n-2}$, A — квадратная матрица порядка $2n-2$ с вещественными элементами, а b — $(2n-2)$ -мерный вектор-столбец с вещественными элементами. Матрица A не зависит от C или $f(z)$, а вектор b имеет вид

$$b = \int_0^{2\pi} \Psi(t) g(t) dt, \quad t = e^{i\theta}, \quad (6.18)$$

где $\Psi(t)$ — $(2n-2)$ -мерный вектор-столбец, элементы которого — известные вещественные функции на окружности $|z| = 1$.

Таким образом, в системе (6.17) матрица A и вектор b известны, а C — искомый $(2n-2)$ -мерный вектор.

Теорема 6.1. Для однозначной разрешимости задачи A необходимо выполнение условия

$$\det A \neq 0. \quad (6.19)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (6.19). Тогда из (6.17) получим

$$C = A^{-1}b, \quad (6.20)$$

где A^{-1} — матрица, обратная к матрице A .

Подставляя C из (6.20) в левую часть (6.13), мы определим аналитическую функцию $f(z)$, удовлетворяющую (6.15). Поэтому, согласно теореме 0.1, уравнение (6.12) имеет единственное решение, приведенное в §3. Подставляя постоянные $c_0 = \alpha_0$ и $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 1, \dots, n-2$), а также функцию $\varphi(z)$ в (6.4), мы находим решение задачи A . Пусть

$$\det A = 0. \quad (6.21)$$

Тогда однородная система (6.17) (при $b = 0$) имеет ненулевое решение. Используя это решение, аналогично построим ненулевое решение однородной задачи A (при $g \equiv 0$). Следовательно, условие (6.19) необходимо и достаточно для однозначной разрешимости задачи A . Теорема 6.1 доказана.

В монографии [2] показано, что задача A фредгольмова. Поэтому справедлива следующая

Теорема 6.2. Если

$$\text{rang } A = r, \quad (6.22)$$

то однородная задача A имеет ровно $2n - 2 - r$ линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородной задачи A необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_0^{2\pi} g(t) \Psi_k(t) d\theta = 0, \quad t = e^{i\theta}, \quad k = 1, \dots, 2n - 2 - r,$$

где $\Psi_k(t)$ — некоторые вполне определенные линейно независимые вещественные функции, не зависящие от $g(t)$.

Задача В. Найти вещественную функцию $u(x, y)$ такую, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad (6.23)$$

$$\cos n\theta \frac{\partial u(z)}{\partial x} + \sin n\theta \frac{\partial u(z)}{\partial y} - \alpha_0 u(z) = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.24)$$

где $\theta = \arg z$, n — целое число. $\alpha_0 \neq 0$ — вещественное число, $g(z)$ — заданная вещественная функция на окружности $|z| = 1$.

Предполагается, что функции $g(z)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и в задаче А. Задача В при $g \equiv 0$ называется однородной.

В [2] выведена явная формула для решения задачи В при $\alpha_0 = 0$.

Наша цель — указать эффективный метод решения этой задачи при $\alpha_0 \neq 0$, получить необходимые и достаточные условия разрешимости на правую часть $g(z)$, а также условия однозначной разрешимости.

Пусть $n \geq 0$. Тогда решение уравнения (6.23) можно представить в виде (см. [3], стр. 202)

$$u(z) = \text{Re } \varphi(z), \quad (6.25)$$

где $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывно дифференцируема в замкнутой области $|z| \leq 1$ и удовлетворяет дополнительному условию

$$\text{Im } \varphi(0) = 0. \quad (6.26)$$

Условие (6.26) обеспечивает единственность представления (6.25). Подставляя $u(z)$ из (6.25) в (6.24), получим

$$\text{Re } (z^n \varphi'(z) - \alpha_0 \varphi(z)) = f(z), \quad |z| = 1. \quad (6.27)$$

или (ср. с (6.1))

$$z^n \varphi'(z) - \alpha_0 \varphi(z) = F(z) + i\beta_0, \quad |z| < 1, \quad (6.28)$$

где $F(z)$ определяется формулой (6.11), а β_0 — вещественная постоянная.

При $n = 0$ из (6.26) и (6.28) имеем

$$\varphi(z) = e^{\alpha_0 z} \int_0^z e^{-\alpha_0 \zeta} F(\zeta) d\zeta + c_0 e^{\alpha_0 z} - i \frac{\beta_0}{\alpha_0} (1 - e^{\alpha_0 z}), \quad (6.29)$$

где c_0 и β_0 — вещественные постоянные.

Подставляя $\varphi(z)$ из (6.29) в (6.25), получим, что в этом случае однородная задача В имеет два линейно независимых решения, а неоднородная задача В всегда разрешима.

Пусть $n \geq 1$. Подставляя в (6.28) $z = 0$, получим

$$-\alpha_0 \varphi(0) = F(0) + i\beta_0. \quad (6.30)$$

Так как α_0 , $\varphi(0)$ и $F(0)$ вещественны, то из (6.30) получим $\beta_0 = 0$. Следовательно, уравнение (6.28) имеет вид

$$z^n \varphi'(z) - \alpha_0 \varphi(z) = F(z), \quad |z| < 1. \quad (6.31)$$

Пусть $\varphi(z)$ — решение уравнения (6.31). Тогда, подставляя $z = 0$, получим, что $\varphi(0)$ — вещественно. Поэтому дополнительное условие (6.26) ненужно.

Пусть $n = 1$. Тогда уравнение (6.31) примет вид

$$z \varphi'(z) - \alpha_0 \varphi(z) = F(z), \quad |z| < 1. \quad (6.32)$$

Рассмотрим разложения Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad (6.33)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k, \quad (6.34)$$

где

$$A_k = \frac{1}{k!} F^{(k)}(0). \quad (6.35)$$

Подставляя $\varphi(z)$ и $F(z)$ из (6.33) и (6.34) в (6.32), получим

$$c_k = \frac{A_k}{k - \alpha_0}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{if } \alpha_0 \neq 1, 2, \dots \quad (6.36)$$

Если α_0 натурально, то

$$F^{(\alpha_0)}(0) = 0, \quad (6.37)$$

$$c_k = \frac{A_k}{k - \alpha_0}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad k \neq \alpha_0. \quad (6.38)$$

Условие (6.37) можно записать в виде:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos \alpha_0 \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(t) \sin \alpha_0 \theta d\theta = 0, \quad t = e^{i\theta}. \quad (6.39)$$

Итак, мы получили следующее.

Теорема 6.3. Для $n = 1$ и $\alpha_0 \neq 1, 2, \dots$ задача В однозначно разрешима, если же $n = 1$ и α_0 натурально, то однородная задача В имеет два линейно независимых решения

$$u_1(z) = \operatorname{Re} z^{\alpha_0}, \quad u_2(z) = \operatorname{Im} z^{\alpha_0},$$

а неоднородная задача В разрешима тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет условиям (6.39).

Уравнение (6.31) при $n \geq 2$ рассмотрено в параграфе 3. Из результатов этого параграфа имеем

Следствие 6.1. Однородная задача В имеет только нулевое решение, а неоднородная задача В разрешима тогда и только тогда, когда $F(z)$ удовлетворяет $n - 1$ условиям вида

$$\int_{|z|=1} \Psi_k(z) F_0(z) dz = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

где $\Psi_1(z), \dots, \Psi_{n-1}(z)$ — линейно независимые аналитические функции в области $|z| > 1$, исчезающие на бесконечности (см. §3).

Пусть $n = -m$, где m натурально. Тогда решение уравнения (6.31) представляется в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} (c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m + \varphi_0(z)), \quad (6.40)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_m$ — постоянные, $\varphi_0(z)$ вещественно, а $\varphi_0(z)$ аналитично в круге $|z| > 1$, непрерывно дифференцируемо в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (6.41)$$

Подставляя $u(z)$ из (6.40) в (6.24) и учитывая соотношение (6.8), получим

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{z^m} \varphi_0'(z) - \alpha_0 \varphi_0(z) + \sum_{k=0}^m (k \bar{c}_k z^{m+1-k} - \alpha_0 c_k z^k) \right] = g(z), \quad |z| = 1. \quad (6.42)$$

Так как функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условиям (6.41), то функция в квадратных скобках аналитична в $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Поэтому из граничного условия (6.42) эта функция определяется формулой Шварца

$$\frac{1}{z^m} \varphi_0'(z) - \alpha_0 \varphi_0(z) + \sum_{k=0}^m (k \bar{c}_k z^{m+1-k} - \alpha_0 c_k z^k) = F(z) + i\beta_0, \quad (6.43)$$

где $F(z)$ определяется формулой (6.11), а β_0 — произвольная вещественная постоянная.

Умножая обе части (6.42) на z^m , получим

$$\varphi_0'(z) - \alpha_0 z^m \varphi_0(z) = \Phi(z), \quad (6.44)$$

где

$$\Phi(z) = z^m \left[F(z) + i\beta_0 + \sum_{k=0}^m (k \bar{c}_k z^{m+1-k} - \alpha_0 c_k z^k) \right]. \quad (6.45)$$

Из (6.41) при $k = 0$ имеем

$$\varphi_0(0) = 0, \quad (6.46)$$

а из (6.44) и (6.46) имеем

$$\varphi_0(z) = \Psi(z) \int_0^z \frac{\Phi(\zeta)}{\Psi(\zeta)} d\zeta, \quad (6.47)$$

где

$$\Psi(z) = \exp \left(\alpha_0 \frac{z^{m+1}}{m+1} \right). \quad (6.48)$$

Из (6.45) следует, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условиям (6.41). Подставляя $\varphi_0(z)$ из (6.47) в (6.40), получим общее решение задачи В для целых отрицательных значений n , зависящее от $2m+2$ вещественных постоянных. Из вида общего

решения следует, что однородная задача В имеет ровно $2m + 2$ линейно независимых решений, а соответствующая неоднородная задача всегда разрешима. Таким образом, мы получили следующие теоремы.

Теорема 6.4. Задача В разрешима при любой правой части $g(z)$ тогда и только тогда, когда

$$n = 1 \text{ и } \alpha_0 \neq 0, 1, \dots \text{ или } n \leq 0.$$

Теорема 6.5. Задача В имеет единственное решение при любой правой части $g(z)$ тогда и только тогда, когда

$$n = 1 \text{ и } \alpha_0 \neq 0, 1, \dots \quad (6.49)$$

Теоремы 6.4 и 6.5 при $\alpha_0 = 0$ следуют из результатов работы [2].

Задача С. Рассмотрим следующую задачу :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad (6.50)$$

$$\cos n\theta \frac{\partial u(z)}{\partial x} + \sin n\theta \frac{\partial u(z)}{\partial y} - \alpha_0 u(z^{\nu+1}) = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.51)$$

где α_0 , θ , n и $g(z)$ те же, что в задаче В, а ν — натуральное число. При $g \equiv 0$ эта задача называется однородной. При $\nu = 0$ получаем задачу В.

Пусть сначала $n \geq 1$. Решение уравнения (6.50) представим в виде (6.25), где $\varphi(z)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая дополнительному условию (6.26).

Подставляя $u(z)$ из (6.25) в граничное условие (6.51), аналогично уравнению (6.31) получим

$$z^n \varphi'(z) - \alpha_0 \varphi(z^{\nu+1}) = F(z), \quad |z| < 1. \quad (6.52)$$

Отметим, что любое решение уравнения (6.52) удовлетворяет условию (6.26). Обозначим $q = (n - 1)/\nu$. Пусть q — натуральное число, $n \geq 2$ и $\alpha_0 = q$. Тогда легко проверить, что функция $\varphi(z) = z^q$ является решением однородного уравнения (6.52).

Пусть $n \geq 2$, тогда, применяя теорему 4.1 и следствие 4.3, получим

Следствие 6.2. Если q – натуральное число и $\alpha_0 = q$, то однородная задача С имеет два линейно независимых решения: $u_1(z) = \operatorname{Re} z^q$, $u_2(z) = \operatorname{Im} z^q$. В остальных случаях однородная задача С имеет только нулевое решение.

Следствие 6.3. Неоднородная задача С разрешима тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) P_j(\theta) d\theta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2k_0,$$

где $P_1(\theta), \dots, P_{2k_0}(\theta)$ – линейно независимые тригонометрические функции с вещественными коэффициентами, причем $k_0 = n$ или $k_0 = n - 1$ в зависимости от того, имеет ли однородная задача ненулевое решение или только нулевое.

Пусть теперь $n = 1$. Представим $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \int_{\gamma} \Psi(\zeta) d\zeta + c, \quad (6.53)$$

где c – постоянная, а $\Psi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (6.53) в (6.52), получим

$$c = -\frac{F(0)}{\alpha_0}, \quad (6.54)$$

$$\Psi(z) - \frac{\alpha_0}{z} \int_0^{2\pi} \Psi(\zeta) d\zeta = \frac{F(z) - F(0)}{z}. \quad (6.55)$$

Уравнение (6.55) изучено в работе [1], где доказана единственность решения.

Следовательно, при $n = 1$ задача С однозначно разрешима.

Аналогично можно показать, что при $n \leq 0$ однородная задача С имеет ровно $2 - 2n$ линейно независимых решений, а задача С всегда разрешима.

Теперь сформулируем задачу Пуанкаре, обобщающую задачи А, В и С.

Задача A_0 .

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad (6.56)$$

$$P(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - R(x, y) u(x, y) = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.57)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ – некоторые полиномы по вещественным переменным x, y с вещественными коэффициентами, а $g(z)$ – заданная вещественнозначная функция на окружности $|z| = 1$, удовлетворяющая условию Гельдера.

Предполагается, что

$$P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0, \quad |z| = 1. \quad (6.58)$$

Так как $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ — полиномы по x и y , то на окружности $|z| = 1$ имеем

$$P(x, y) + iQ(x, y) = \frac{\alpha(z)}{z^n}, \quad R(x, y) = \frac{\beta(z)}{z^n}, \quad (6.59)$$

где n — неотрицательное число, а $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — полиномы относительно комплексной переменной $z = x + iy$, $\alpha(z) \neq 0$ при $|z| = 1$.

Решение уравнения (6.56) представим в виде (6.25) и подставим в (6.57).

Учитывая (6.59), получим

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi(z)}{z^n} = g(z), \quad |z| = 1, \quad (6.60)$$

где

$$\Phi(z) = \alpha(z) \varphi'(z) - \beta(z) \varphi(z). \quad (6.61)$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}^+$.

Поэтому из граничного условия (6.60) она определяется формулой (см. [2])

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k z^k + z^n F(z), \quad |z| < 1, \quad (6.62)$$

где $F(z)$ определяется формулой (6.11), а c_k ($k = 0, \dots, 2n$) — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $c_{2n-2-k} = -\bar{c}_k$, $k = 0, \dots, n-1$.

Пусть $c_k = a_k + ib_k$ ($k = 0, \dots, 2n-2$), где a_k и b_k вещественны. Из (6.62) имеем

$$a_{2n-2-k} = -a_k, \quad b_{2n-2-k} = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (6.63)$$

Подставляя $\Phi(z)$ из (6.61) в (6.62) и учитывая (6.63), получим

$$\begin{aligned} & \alpha(z) \varphi'(z) - \beta(z) \varphi(z) = \\ & = z^n F(z) + i b_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} [a_k (z^k - z^{2n-2-k}) + i b_k (z^k + z^{2n-2-k})]. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Таким образом, решение задачи A_0 сводится к решению дифференциального уравнения (6.64).

ABSTRACT. The paper studies first order differential equations with high order singularities and shifts and derives necessary and sufficient conditions for their solvability. Formulae for solutions are obtained and the results applied in Poincare problem.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева. "Аналитические решения некоторых дифференциальных и интегральных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 33, № 3, стр. 2 — 25, 1998.
2. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, Физматгиз, Ленинград, 1951.
5. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1970.
6. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1968.

8 декабря 1997

Армянский государственный
инженерный университет

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Е. Товмасын, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 3, 1998

В статье выявлена связь между обычными и обобщенными задачами Римана-Гильберта и указаны эффективные методы решения обобщенной задачи. Полученные результаты применены к задаче Пуанкаре для уравнения Лапласа.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – двусвязная область, ограниченная контурами Γ_1 и Γ_2 , где Γ_1 – окружность $|z| = r_0$, $z = x + iy$, а Γ_2 – достаточно гладкая простая замкнутая кривая, охватывающая окружность Γ_1 . Обозначим

$$\Gamma_1^+ = \{z \in \Gamma_1 : \operatorname{Im} z \geq 0\}, \quad \Gamma_1^- = \{z \in \Gamma_1 : \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Рассмотрим следующую обобщенную задачу Римана-Гильберта : найти аналитическую в области D функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и удовлетворяющую следующим условиям :

$$\operatorname{Re} [a(z)\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (1.1)$$

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}) + g(z), \quad z \in \Gamma_1^+, \quad (1.2)$$

где $a(z)$ и $f(z)$ – заданные функции на Γ_2 , $f(z)$ вещественна, а $g(z)$ – заданная функция на Γ_1^+ , причем

$$a(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma_1, \quad (1.3)$$

$$g(r_0) = g(-r_0) = 0. \quad (1.4)$$

Предполагается, что функции $a(z)$, $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ_2 и Γ_1^+ , соответственно (см. [1]). В (1.2) и в дальнейшем $\bar{z}$ означает комплексно сопряженную z . Подставляя $z = \pm\tau_0$ в (1.2), получим условие (1.4). Это означает, что условие (1.4) необходимо для разрешимости задачи (1.1), (1.2). При $f = 0$ и $g = 0$ задачу (1.1), (1.2) называют *однородной*. В предельном случае, когда $\tau_0 = 0$, задача (1.1), (1.2) приводится к классической задаче Римана–Гильберта в односвязной области, ограниченной контуром Γ_2 (см. [1]).

Основная цель данной работы – выявить связь между обычными и обобщенными задачами Римана–Гильберта и указать эффективные методы решения обобщенной задачи. Полученные результаты используются при решении задачи Пуанкаре для уравнения Лапласа.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наряду с задачами (1.1), (1.2) рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача А. Найти функцию $\psi(z)$, аналитичную в области $|z| > 1$, непрерывную на Γ_1 , исчезающую на бесконечности (т.е. $\psi(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$) и удовлетворяющую граничному условию (см. (1.2))

$$\psi(z) = \psi(\bar{z}) + g(z), \quad z \in \Gamma_1^+. \quad (2.1)$$

Определим $g(z)$ на Γ_1^- по формуле

$$g(z) = -g(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^-, \quad (2.2)$$

и положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad |z| \neq 1. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. Задача А имеет единственное решение $\psi(z) = F(z)$.

Доказательство. Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\psi(z) = \psi\left(\frac{1}{z}\right) + g(z), \quad z \in \Gamma_1. \quad (2.4)$$

Функция $\psi(z^{-1})$ аналитична в круге $|z| < 1$. Поэтому функции $\psi(z)$ и $\psi(z^{-1})$ определяются из граничного условия (2.4) по формуле (см. [1])

$$\psi(z) = F(z), \quad |z| > 1, \quad (2.5)$$

$$\psi\left(\frac{1}{z}\right) = F(z), \quad |z| < 1. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) можно записать в виде

$$\psi(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1. \quad (2.7)$$

Из (2.2) следует, что $F(0) = 0$ и

$$F(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \neq 1. \quad (2.8)$$

Из (2.5), (2.7) и (2.8) следует справедливость леммы 2.1.

Пусть $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad |z| = 1. \quad (2.9)$$

Пусть G — односвязная область, ограниченная контуром Γ_2 .

Лемма 2.2. Существует единственная функция $\bar{\Phi}_0(z)$, аналитичная в G , непрерывная в замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma_2$ и такая, что

$$\varphi(z) = \bar{\Phi}_0(z) + \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{z}\right). \quad (2.10)$$

Доказательство. Согласно формуле Коши (см. [3], стр. 54) $\varphi(z)$ допускает представление

$$\varphi(z) = \bar{\Phi}_1(z) + \bar{\Phi}_2(z), \quad (2.11)$$

где $\bar{\Phi}_1(z)$ аналитична в G и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$, а $\bar{\Phi}_2(z)$ аналитична в $|z| > 1$, непрерывна в $|z| \geq 1$ и исчезает на бесконечности. Подставляя $\varphi(z)$ из (2.11) в (2.9), получим

$$\bar{\Phi}_1(z) + \bar{\Phi}_2(z) = \bar{\Phi}_1(\bar{z}) + \bar{\Phi}_2(\bar{z}), \quad |z| = 1. \quad (2.12)$$

Поскольку $\bar{z} = z^{-1}$ при $|z| = 1$, условие (2.12) принимает вид

$$\bar{\Phi}_1(z) - \bar{\Phi}_2\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{\Phi}_1\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{\Phi}_2(z), \quad |z| = 1. \quad (2.13)$$

Функция $\Phi_1(z) - \Phi_2(z^{-1})$ аналитична в круге $|z| < 1$, а $\Phi_1(z^{-1}) - \Phi_2(z)$ аналитична в области $|z| > 1$ и стремится к $\Phi_1(0)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Из (2.13) следует, что $\Phi_1(z^{-1}) - \Phi_2(z)$ является аналитическим продолжением $\Phi_1(z) - \Phi_2(z^{-1})$ через окружность Γ_1 . Поэтому, согласно теореме Лиувилля (см. [3]) имеем

$$\Phi_1(z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi_1(0), \quad |z| < 1, \quad (2.14)$$

$$\Phi_1\left(\frac{1}{z}\right) - \Phi_2(z) = \Phi_1(0), \quad |z| > 1. \quad (2.15)$$

Равенства (2.14) и (2.15) эквивалентны. Подставляя $\Phi_2(z)$ из (2.15) в (2.11), получим представление (2.10), где $\Phi_0(z) = \Phi_1(z) - \Phi_1(0)/2$.

Теперь докажем, что в представлении (2.10) функция $\Phi_0(z)$ определяется через $\varphi(z)$ единственным образом, т.е. если $\varphi(z) \equiv 0$, то $\Phi_0(z) \equiv 0$. Действительно, если $\varphi(z) \equiv 0$, то из (2.10) имеем $\Phi_0(z) = -\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right)$ при $|z| = 1$. Следовательно

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\Phi_0(0), \quad |z| < 1, \\ -\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right) &= -\Phi_0(0), \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно записать в виде $\Phi_0(z) = \Phi_0(0)$, $|z| < 1$. Следовательно, $\Phi_0(z) \equiv 0$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $a(z) \equiv 1$, $f(z) \equiv 0$, $g(z) \equiv 0$. Тогда общее решение задачи (1.1), (1.2) определяется формулой $\varphi(z) = ic_0$, где c_0 — произвольная вещественная постоянная.

Доказательство. Из условия (1.1) следует, что функции $(i\varphi(z))^n$ ($n = 1, 2, \dots$) принимают вещественные значения при $z \in \Gamma_2$. Поэтому функции $i(i\varphi(z))^n$ также удовлетворяют условиям (1.1), (1.2). Если $\varphi(z)$ не является постоянной, то эти функции линейно независимы. Следовательно, если $\varphi(z) \neq \text{const}$, то задача (1.1), (1.2) имеет, по крайней мере, счетную систему линейно независимых решений. Теперь докажем, что их число конечно. Согласно лемме 2.2 решение $\varphi(z)$ задачи (1.1), (1.2) можно представить в виде (2.10). Подставляя $\varphi(z)$ из (2.11) в (2.9), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \Phi_0\left(\frac{1}{z}\right) \right] = 0, \quad z \in \Gamma_2. \quad (2.16)$$

Согласно формуле Коши

$$\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt. \quad (2.17)$$

Так как $|t| > 1$ при $t \in \Gamma_2$, то функция $t - z^{-1} \neq 0$ при $t \in \Gamma_2, z \in \Gamma_2$. Подставляя $\Phi(z^{-1})$ из (2.17) в (2.16), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt \right] = 0, \quad z \in \Gamma_2. \quad (2.18)$$

Таким образом, для аналитической в G функции $\Phi_0(z)$ получим частный случай (2.18) задачи Римана-Гильберта-Пуанкаре (см. [1], стр. 285). Известно [1], что эта задача имеет только конечное число линейно независимых решений. Это означает, что если $\varphi(z)$ — решение задачи (1.1) — (1.2), то $\varphi(z) = c$, где c — постоянная. Подставляя $\varphi(z) = c$ в (1.1), получим $\varphi(z) = ic_0$, где c_0 — вещественная постоянная. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть функция $\Phi(z)$ представляется в виде (2.10) и $\Phi^{(k)}(i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда эта функция удовлетворяет также условиям $\Phi^{(k)}(-i) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Из (2.10) следует, что функция $\Phi(z)$ аналитична в некоторой ε -окрестности окружности $|z| = 1$ и имеет место равенство

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{1}{z}\right), \quad 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon. \quad (2.19)$$

Дифференцируя обе части (2.19) k раз ($k = 0, 1, \dots, n$) и подставляя $z = -i$, а затем используя равенства $\Phi^{(k)}(i) = 0$, получим $\Phi^{(k)}(-i) = 0$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Если функция

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^n c_k \left(z + \frac{1}{z}\right)^k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

удовлетворяет условиям $\omega^{(k)}(i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, то $c_k = 0$ и, следовательно, $\omega(z) \equiv 0$.

Доказательство. Подставляя $z = i$ в (2.20) и используя условие $\omega(i) = 0$, получим $c_0 = 0$. Дифференцируя $\omega(z)$ в $z = i$, получим $c_1 = 0$. Аналогично получим $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Лемма 2.5 доказана.

Пусть $\alpha(z)$ – дробно-линейная функция такая, что

$$|\alpha(z)| \leq q < 1, \quad \text{при } |z| \leq 1. \quad (2.21)$$

Рассмотрим уравнения

$$z = \overline{\alpha(z)}, \quad |z| < 1, \quad (2.22)$$

$$z = \beta(z) \equiv \overline{\alpha(\overline{\alpha(z)})}, \quad |z| < 1. \quad (2.23)$$

Ясно, что функция $\beta(z)$ также дробно-линейная и $|\beta(z)| \leq q, |z| \leq 1$. Из теоремы Руше (см. [3]) следует, что уравнение (2.23) в круге $|z| < 1$ имеет единственное решение.

Лемма 2.6. Уравнение (2.22) в круге $|z| < 1$ имеет единственное решение, совпадающее с решением уравнения (2.23).

Доказательство. Из условия (2.21) и принципа неподвижной точки Шаудера следует, что функция $\overline{\alpha(z)}$ имеет неподвижную точку z_0 в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Имеем $z_0 = \overline{\alpha(z_0)}$. Из (2.21) следует, что

$$z_0 = \beta(z_0), \quad |z_0| \leq q < 1. \quad (2.24)$$

Так как уравнение (2.23) в круге $|z| < 1$ имеет только одно решение, то из (2.24) следует, что уравнение (2.22) в этом круге также имеет одно решение и оно совпадает с решением уравнения (2.23). Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. Пусть $P(z) \neq \text{const}$ – многочлен, $P(0) \neq 0$. Тогда для любых натуральных чисел m_1 и m_2 функции $z^k, k = 0, 1, \dots, m_1, \frac{z^{j-1}}{P^j(z)}, j = 1, \dots, m_2$ линейно независимы в поле вещественных чисел.

Доказательство очевидно.

Из леммы 2.7 следует, что совокупность функций

$$z^k, \quad iz^k \quad (k = 0, 1, \dots, m_1); \quad \frac{z^{j-1}}{P^j(z)}, \quad \frac{iz^{j-1}}{P^j(z)} \quad (j = 1, \dots, m_2)$$

линейно независима в поле вещественных чисел. Из леммы 2.2 непосредственно следует

Лемма 2.8. Решение $\varphi(z)$ задачи (1.1), (1.2) при $g \equiv 0$ аналитично в некоторой окрестности окружности $|z| = 1$.

§3. ЗАДАЧА (1.1), (1.2)

1. Сначала исследуем обобщенную задачу Римана-Гильберта (1.1), (1.2), когда $a(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 0$. В этом случае, согласно лемме 2.3, однородная задача (1.1), (1.2) имеет одно линейно независимое решение $\varphi(z) = i$. Здесь линейную зависимость и независимость мы понимаем в поле вещественных чисел. Подставляя (2.10) в (1.1) и используя (2.17), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.1)$$

где $\Phi_0(z)$ аналитична в области G и непрерывна в $\bar{G}$. Так как однородная задача (1.1), (1.2) имеет одно линейно независимое решение, то однородная задача (3.1) также имеет одно линейно независимое решение $\Phi_0(z) = i$.

Известно (см. [1]), что индекс задачи (3.1) равен 1. Следовательно, неоднородная задача (3.1) всегда разрешима. Учитывая, что задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче (3.1), мы заключаем, что неоднородная задача (1.1), (1.2) также всегда разрешима.

2. Пусть граничные условия имеют вид

$$\operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^n \varphi(z) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.2)$$

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^+, \quad (3.3)$$

где $n \neq 0$ — некоторое целое число. Пусть $n \geq 1$. Обозначим

$$\varphi_n(z) = \varphi(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^n, \quad (3.4)$$

где $\varphi(z)$ — решение задачи (3.2), (3.3). Ясно, что функция $\varphi_n(z)$ аналитична в области D , непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет граничным условиям (1.1), (1.2). Таким образом, для аналитической функции $\varphi_n(z)$ получим рассмотренную выше задачу. Пусть $\varphi_0(z)$ — частное решение последней. Тогда общее решение определяется формулой $\varphi_n(z) = \varphi_0(z) + ic_0$, где c_0 — произвольная вещественная постоянная. Подставляя $\varphi_n(z)$ в (3.4), получим

$$\varphi(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^n = \varphi_0(z) + ic_0. \quad (3.5)$$

Подставляя $z = i$ в (3.5), получим $\varphi_0(i) + ic_0 = 0$. Отсюда $c_0 = -\operatorname{Im} \varphi_0(i)$ и

$$\operatorname{Re} \varphi_0(i) = 0. \quad (3.6)$$

Согласно лемме 2.8 функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ аналитичны в некоторой окрестности окружности $|z| = 1$. Поэтому из (3.5) и $\varphi_0(i) + ic_0 = 0$ имеем

$$\varphi_0^{(k)}(i) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

Таким образом, условия (3.6) и (3.7) необходимы для разрешимости задачи (3.2), (3.3). Если эти условия выполнены и $\psi_0(z) \equiv \varphi_0(z) - \varphi_0(i)$, то из (3.3) и (3.7) получим

$$\psi_0(z) = \psi_0(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^+ \quad \text{и} \quad \psi_0^{(k)}(i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.8)$$

Согласно леммам 2.2 и 2.4 имеем $\psi_0^{(k)}(-i) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$. Из (3.5) получим

$$\varphi(z) = \psi_0(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^{-n}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) следует, что функция $\varphi(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Таким образом, условия (3.6) и (3.7) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (3.2), (3.3). Более того, при выполнении этих условий задача (3.2), (3.3) имеет единственное решение, определяемое формулой (3.9).

3. Пусть $n = -m$, где m — натуральное число. Пусть $\varphi_0(z)$ — частное решение задачи (1.1), (1.2), где $a(z) \equiv 1, g(z) \equiv 0$. Тогда легко проверить, что функция $\varphi(z) = \varphi_0(z)(z + z^{-1})^m$ является частным решением задачи (3.2), (3.3). Следовательно, в этом случае неоднородная задача (3.2), (3.3) всегда разрешима. Теперь построим полную систему линейно независимых решений неоднородной задачи (3.2), (3.3). Пусть $\psi_{1k}(z)$ и $\psi_{2k}(z)$ — частные решения задачи (1.1), (1.2), когда

$$f = \operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^{n+k} \right] \quad \text{и} \quad f = \operatorname{Re} \left[i \left(z + \frac{1}{z} \right)^{n+k} \right],$$

соответственно, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Легко проверить, что система функций

$$\begin{aligned} \varphi_{1m}(z) &= i \left(z + \frac{1}{z} \right)^m, \\ \varphi_{1k}(z) &= \psi_{1k}(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^m - \left(z + \frac{1}{z} \right)^k, \\ \varphi_{2k}(z) &= \psi_{2k}(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^m - i \left(z + \frac{1}{z} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

является решением однородной задачи (3.2), (3.3). Докажем что эта система линейно независима в поле вещественных чисел. Пусть

$$\sum_{k=0}^m a_k \varphi_{1k} + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \varphi_{2k} \equiv 0, \quad (3.11)$$

где a_k и b_k — некоторые вещественные постоянные. Подставляя (3.10) в (3.11), получим $\omega(z) = \omega_0(z)(z + z^{-1})^m$, где

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{m-1} (a_k + ib_k) \left(z + \frac{1}{z} \right)^k,$$

$$\omega_0(z) = \sum_{k=0}^{m-1} (a_k \psi_{1k}(z) + ib_k \psi_{2k}(z)) + ia_m.$$

Следовательно, $\omega^{(k)}(i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Используя лемму 2.5, получим $a_k = b_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\omega(z) \equiv 0$. Из (3.11) имеем $a_m = 0$ и, следовательно, система функций (3.10) линейно независима.

Докажем, что (3.10) образует полную систему решений однородной задачи (3.2), (3.3). Подставляя (2.10) в (3.2), получим

$$\operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^n \left(\Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt \right) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2. \quad (3.12)$$

Задача (3.2), (3.3) эквивалентна задаче (3.12). Следовательно, задача (3.12) всегда разрешима. Известно (см. [1]), что индекс задачи (3.12) равен $2m + 1$. Следовательно, число линейно независимых решений однородных задач (3.12) и (3.2), (3.3) равно $2m + 1$. Это означает, что система (3.10) является поной.

4. Теперь рассмотрим граничные условия

$$\operatorname{Re} \left[a_0(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^n \varphi(z) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.13)$$

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^+, \quad (3.14)$$

где n — целое число, функция $a_0(z)$ удовлетворяет условию (1.3) и индекс этой функции на Γ_2 равен нулю. Без потери общности можно предположить, что $|a_0(z)| = 1$ при $z \in \Gamma_2$. Пусть $\varphi_0(z)$ — частное решение задачи (1.1), (1.2) при $f(z) = \operatorname{arg}(a_0(z))$, $a(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 0$. Так как функция $f(z) = \operatorname{arg}(a_0(z))$

непрерывна на Γ_2 и удовлетворяет условию Гёльдера, то для любого $z \in \Gamma_2$ имеем

$$a_0(z) = \exp(\ln a_0(z)) = \exp[i \arg(a_0(z))] = \exp[i \operatorname{Re} \varphi_0(z)] = \exp[i \varphi_0(z) + \operatorname{Im} \varphi_0(z)].$$

Следовательно

$$a_0(z) = \omega_0(z) \exp[\operatorname{Im} \varphi_0(z)], \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.15)$$

где $\omega_0(z) = \exp[i \varphi_0(z)]$. Подставляя (3.15) в (3.13), получим

$$\operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^n \psi(z) \right] = f_0(z),$$

где

$$\psi(z) = \omega_0(z) \varphi(z), \quad f_0(z) = f(z) \exp[-\operatorname{Im} \varphi_0(z)].$$

Поскольку $\omega_0(z) \neq 0$ при $z \in \overline{D}$ и $\omega_0(z) = \omega_0(\bar{z})$, то условие (3.14) можно записать в виде $\psi(z) = \psi(\bar{z})$. Таким образом, задача (3.13), (3.14) сводится к задаче (3.2), (3.3).

5. Теперь рассмотрим задачу (1.1), (1.2) в самом общем случае. Пусть $F(z)$ определяется формулой (2.3). Подставляя $\varphi(z) = \psi(z) + F(z)$ в (1.1) и (1.2), получим аналогичную задачу при $g \equiv 0$. Таким образом, решение обобщенной задачи Римана–Гильберта (1.1), (1.2) сводится к нахождению частного решения этой задачи при $a(z) = 1$, $g(z) = 0$.

§4. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Задачу (1.1), (1.2) при $a(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 0$ можно свести к интегральному уравнению Фредгольма. Подставляя (2.10) в (1.1), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \Phi_0 \left(\frac{1}{z} \right) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (4.1)$$

где $\Phi_0(z)$ аналитична в G и непрерывна в $\overline{G} = G \cup \Gamma_2$. Таким образом, задача (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ эквивалентна задаче (4.1). Мы показали (см. (2.16)), что неоднородная задача (4.1) всегда разрешима, а общее решение однородной задачи

(4.1) определяется формулой $\Phi_0(z) = ic$, где c — произвольная вещественная постоянная. Будем искать решение задачи (4.1) в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\mu(t)}{t-z} dt, \quad (4.2)$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на Γ_2 . Пусть $t, t_0 \in \Gamma_2$, n — внешняя нормаль к Γ_2 в точке t , (r, n) — угол между n и $\overrightarrow{tt_0}$, (R, n) — угол между n и $\overrightarrow{tt_0^{-1}}$. Подставляя (4.2) в (4.1) и переходя к пределу при $z \rightarrow t_0$, получим (см. [1])

$$\mu(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} K(t_0, t) \mu(t) ds = f(t_0), \quad (4.3)$$

где ds — элемент длины дуги Γ_2 и

$$K(t_0, t) = \frac{1}{r} \cos(r, n) + \frac{1}{R} \cos(R, n), \quad r = |t - t_0|, \quad R = \left| t - \frac{1}{t_0} \right|.$$

Если Γ_2 — достаточно гладкий контур, то $K(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по t и t_0 . Поэтому всякое непрерывное решение уравнения (4.3) удовлетворяет условию Гельдера, ибо мы подчиняем этому условию функцию $f(t)$.

Докажем, что однородное уравнение (4.3) имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $\mu(t)$ — какое-либо его решение. Тогда функция $\Phi_0(z)$, определенная формулой (4.2), является решением однородной задачи (4.1). Поэтому $\Phi_0(z) = ic$, где c — некоторая вещественная постоянная, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\mu(t)}{t-z} dt = ic, \quad z \in G. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что $\mu(t) \equiv 0$ (см. [1]). Следовательно, уравнение Фредгольма (4.3) имеет единственное решение.

§5. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА

В КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом параграфе мы укажем эффективные методы решения задачи (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ в некоторых классах кольцеобразных областей.

5.1. Пусть Γ_2 — окружность $|z| = R$, $R > 1$ и D — кольцо $1 < |z| < R$. В §4 при помощи подстановки (2.10) задачу (1.1), (1.2) мы свели к задаче (4.1), где

$\Phi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$. Если $|z| = R$, то $z^{-1} = \bar{z}R^{-2}$. Поэтому граничное условие (4.1) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} [\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z}R^{-2})}] = f(z), \quad |z| = R. \quad (5.1)$$

Ясно, что $\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z}R^{-2})}$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$. Из (5.1) имеем

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z}R^{-2})} = F(z) + id, \quad |z| < R, \quad (5.2)$$

где $F(z)$ – интеграл Шварца (см. [3])

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t+z}{t-z} f(t) \frac{dt}{t},$$

а d – произвольная вещественная постоянная. В дальнейшем будем считать, что $d = 0$. Делая в (5.2) замену $\Phi_0(z) = \Phi(z) + F(z)$, получим

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z}R^{-2})} = -\overline{F(\bar{z}R^{-2})}, \quad |z| < R. \quad (5.3)$$

Функция $F(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $|z| \leq R$, так как функция $f(t)$ удовлетворяет этому условию на окружности $|z| = R$ (см. [1], стр. 70). Пусть

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (5.4)$$

$$\Phi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

являются разложениями Тейлора функций F и Φ . Согласно неравенству Коши [3]

$$|a_n| \leq \frac{\|F\|}{R^n}, \quad \|F\| = \max_{|z| \leq R} |F(z)|. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$c_n + \bar{c}_n R^{-n} = -\bar{a}_n R^{-2n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6)$$

Так как $f(t)$ – вещественная функция, то a_0 – вещественная постоянная. При $n = 0$ уравнение (5.6) имеет решение $c_0 = -a_0/2$. При $n > 0$ (5.6) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$c_n = -\frac{\bar{a}_n - a_n R^{-n}}{R^{2n}(1 - R^{-2n})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Из (5.5) и (5.7) получим

$$|c_n| \leq \frac{R^{-3n}}{(1-R^{-1})} \|F\|. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.7) в (5.4), получим частное решение уравнения (5.3). Таким образом, частное решение задачи (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ определяется формулой

$$\varphi(z) = F(z) + F\left(\frac{1}{z}\right) + \Phi(z) + \Phi\left(\frac{1}{z}\right), \quad (5.9)$$

где $\Phi(z)$ — ряд (5.4), коэффициенты которого определяются формулой (5.7).

Полагая

$$\varphi_m(z) = F(z) + F\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k(z^k + z^{-k}),$$

с учетом (5.8) и (5.9), получим

$$|\varphi(z) - \varphi_m(z)| \leq \frac{R^{-3m}}{(1-R^{-1})(1-R^{-3})}, \quad z \in \bar{D}.$$

5.2. Пусть теперь D — область, ограниченная окружностями $|z| = 1$ и $|z - z_0| = R$, $z_0 \neq 0$, причем $R > 1 + |z_0|$. В этом случае задача (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ сводится к задаче (4.1), где $\Phi_0(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$. В (4.1) делая замену переменной $z = z_0 + R\zeta$, получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z_0 + R\zeta) + \Phi_0\left(\frac{1}{z_0 + R\zeta}\right) \right] = f_0(\zeta), \quad |\zeta| = 1, \quad (5.10)$$

где $f_0(\zeta) = f(z_0 + R\zeta)$. Ясно, что функция $\psi(z) = \Phi_0(z_0 + Rz)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Имеем

$$\Phi_0(z) = \psi\left(\frac{z - z_0}{R}\right), \quad |z - z_0| \leq R. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.10), получим

$$\operatorname{Re} [\psi(z) + \psi(\alpha(z))] = f_0(z), \quad |z| = 1, \quad (5.12)$$

где

$$\alpha(z) = \frac{1}{R(z_0 + Rz)} - \frac{z_0}{R}.$$

При $|z| = 1$ имеем $\bar{z} = 1/z$ и $\alpha(z) = \bar{\beta}(\bar{z})$, где

$$\beta(z) = \frac{z}{R(R + \bar{z}_0 z)} - \frac{\bar{z}_0}{R}.$$

Так как $R > 1 + |z_0|$, функция $\beta(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и

$$|\beta(z)| \leq \frac{1 + |z_0|}{R} < 1, \quad |z| \leq 1.$$

Следовательно, граничное условие (5.12) запишется в виде $\operatorname{Re} \Phi(z) = f_0(z)$, где

$$\Phi(z) = \psi(z) + \overline{\psi(\beta(z))}.$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Поэтому (см. (5.2))

$$\psi(z) + \overline{\psi(\beta(z))} = F_0(z) + id, \quad (5.13)$$

где F_0 — интеграл Шварца с $f = f_0$. Функции

$$\gamma_0(z) = \frac{z}{R(R + z_0 z)} - \frac{z_0}{R}, \quad \gamma(z) = \beta(\overline{\beta(z)}) = \gamma_0(\beta(z))$$

линейно независимы и удовлетворяют неравенствам

$$|\gamma_0(z)| \leq \frac{1 + |z_0|}{R} < 1, \quad |\gamma(z)| \leq \frac{1 + |z_0|}{R} < 1, \quad |z| \leq 1.$$

Если $z_0 \neq 0$, то функция $\gamma(z)$ имеет вид

$$\gamma(z) = \frac{Az + B}{z - C}, \quad |C| > 1, \quad (5.14)$$

где A, B и C — некоторые постоянные, зависящие от z_0 и R . Согласно лемме 2.6 уравнения $z = \overline{\beta(z)}$ и $z = \gamma(z)$ имеют одинаковые решения в круге $|z| < 1$.

Используя (5.14), перепишем уравнение $z = \gamma(z)$ в виде

$$z^2 - (A + C)z - B = 0. \quad (5.15)$$

Так как $|\gamma(z)| < 1$ при $|z| = 1$, то уравнение $z = \gamma(z)$ не имеет решения на окружности $|z| = 1$. Следовательно, уравнение (5.15) имеет одно решение в круге $|z| < 1$ и одно — вне замкнутого круга $|z| \leq 1$. Пусть ζ_0 , $|\zeta_0| < 1$ — решение уравнения (5.15). Согласно лемме 2.6 имеем $\zeta_0 = \overline{\beta(\zeta_0)}$. Решение уравнения (5.13)

ищем в виде

$$\psi(z) = c + (z - \zeta_0)\psi_0(z), \quad (5.16)$$

где c — вещественная постоянная, а $\psi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Подставляя (5.16) в (5.13), получим

$$2c + (z - \zeta_0)\psi_0(z) + (\beta(z) - \bar{\zeta}_0)\overline{\psi_0(\beta(z))} = F_0(z) + id. \quad (5.17)$$

Подстановка $z = \zeta_0$ дает

$$c = \frac{1}{2} \operatorname{Re} F_0(\zeta_0), \quad d = -\operatorname{Im} F_0(\zeta_0). \quad (5.18)$$

Из определения β и $\zeta_0 = \overline{\beta(\zeta_0)}$ имеем

$$\beta(z) - \bar{\zeta}_0 = \beta(z) - \beta(\zeta_0) = \frac{z - \zeta_0}{(R + \bar{z}_0 z)(R + \bar{z}_0 \zeta_0)}.$$

Подставляя c, d и $\beta(z) - \bar{\zeta}_0$ в (5.17), получим

$$\psi_0(z) = \delta(z)\psi_0(\overline{\beta(z)}) + F_1(z), \quad (5.19)$$

где

$$\delta(z) = -\frac{1}{(R + \bar{z}_0 z)(R + \bar{z}_0 \zeta_0)}, \quad F_1(z) = \frac{F_0(z) - F_0(\zeta_0)}{z - \zeta_0}.$$

Так как $R > 1 + |z_0|$ и $|\zeta_0| < 1$, то

$$|\delta(z)| \leq \frac{1}{(R - |z_0|)^2} < 1, \quad |z| \leq 1.$$

Поэтому норма оператора $K(\psi_0) = \delta(z)\psi_0(\overline{\beta(z)})$ меньше 1 и уравнение (5.19) имеет единственное решение, записываемое рядом Неймана (см. [4])

$$\psi_0(z) = F_1(z) + K(F_1) + K^2(F_1) + \dots, \quad (5.20)$$

где $K^n(F) = K(K^{n-1}(F))$ и

$$|K^n(F_1)| \leq \frac{1}{(R - |z_0|)^{2n}} \|F_1\|.$$

Ряд (5.20) сходится равномерно в замкнутом круге $|z| \leq 1$ как убывающая геометрическая прогрессия. Таким образом, частное решение задачи (1.1), (1.2) при $a = 1, g = 0$ определяется при помощи формул (2.10), (5.11), (5.16), (5.18) и (5.20).

5.3. Пусть теперь Γ_2 – эллипс, охватывающий окружность $|z| = 1$. Параметрическое уравнение этого эллипса можно записать в виде

$$z = \alpha(t) \equiv A \left(t + \frac{\mu}{t} \right) = A(t + \mu \bar{t}), \quad |t| = 1,$$

где A и μ – положительные постоянные такие, что $A(1 - \mu) > 1$. Выше мы показали, что задача (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ эквивалентна задаче (4.1), где $\Phi_0(z)$ аналитична в односвязной области G , ограниченной контуром Γ_2 и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$. Решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau) \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau + c, \quad z \in G, \quad (5.21)$$

где c – вещественная постоянная, функция $\psi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Пусть $|t| = 1$. Имеем $\alpha(t) \in \Gamma_2$. Переходя к пределу в (5.21) при $z \rightarrow \alpha(t)$ и используя формулы Сохоцкого–Племеля (см. [1]), получим

$$\Phi_0(\alpha(t)) = \frac{1}{2} t \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau) \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau + c, \quad (5.22)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Согласно формуле Коши имеем

$$z \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad |z| < 1.$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow t$, получим

$$t \psi(t) = \frac{1}{2} t \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad |t| = 1. \quad (5.23)$$

Из (5.22) и (5.23) имеем

$$\Phi_0(\alpha(t)) = t \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau K_1(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + c, \quad |t| = 1, \quad (5.24)$$

где

$$K_1(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}.$$

Функция $K_1(t, \tau)$ бесконечно дифференцируема по t и τ при $|\tau| = 1$, $|t| = 1$. Поэтому интеграл (5.24) можно понимать в смысле Римана. Подставляя $z = (\alpha(t))^{-1}$ в (5.21), получим

$$\Phi_0 \left(\frac{1}{\alpha(t)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau K_2(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + c, \quad |t| = 1, \quad (5.25)$$

где

$$K_2(z, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - (\alpha(t))^{-1}}.$$

Подставляя $\alpha(t) = A(t + \mu t^{-1})$, получим

$$K_1(z, \tau) = \frac{\mu \bar{t} \bar{\tau}^2}{1 - \mu \bar{t} \bar{\tau}}, \quad K_2(z, \tau) = \frac{A(1 - \mu \bar{\tau}^2)}{A(\tau + \mu \bar{\tau}) - \bar{t} A^{-1}(1 + \mu \bar{t}^2)^{-1}}. \quad (5.26)$$

Функция $K_3(z, \tau) = \overline{K_1(z, \tau)} + \overline{K_2(z, \tau)}$ аналитична по комплексным переменным t и τ при $|\tau| \leq 1$ и $|t| \leq 1$. Условие (4.1) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\bar{\Phi}_0(\alpha(t)) + \bar{\Phi}_0 \left(\frac{1}{\alpha(t)} \right) \right] = f(\alpha(t)), \quad |t| = 1. \quad (5.27)$$

Обозначим

$$\psi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau K_j(t, \tau) \psi(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} (\psi_j(t)) = \operatorname{Re} (\overline{\psi_j(t)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 \overline{K_j(t, \tau) \psi(\tau)} d\tau, \quad j = 1, 2.$$

Подставляя $\Phi_0(\alpha(t))$ из (5.24) и (5.25) в (5.27), получим

$$\operatorname{Re} \left[t\psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2c \right] = f(\alpha(t)), \quad |t| = 1. \quad (5.28)$$

Функция в квадратных скобках аналитична в круге $|t| < 1$ и определяется интегралом Шварца

$$t\psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2c = F_0(t) + ic_0, \quad |t| < 1, \quad (5.29)$$

где

$$F_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau + t}{\tau - \bar{t}} f(\alpha(t)) \frac{d\tau}{\tau},$$

а c_0 — произвольная вещественная постоянная. Подставляя $t = 0$ в (5.29), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(0, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2c = F_0(0) + ic_0. \quad (5.30)$$

Из (5.29) и (5.30) имеем

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_4(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2F_1(t), \quad |t| < 1, \quad (5.31)$$

где

$$K_4(t, \tau) = \frac{1}{t} [K_3(0, \tau) - K_3(t, \tau)], \quad F_1(t) = \frac{1}{t} [F_0(t) - F_0(0)].$$

Из (5.26) следует, что

$$K_4(t, \tau) = -\frac{\mu\tau^2}{1 - \mu t\tau} - \frac{\tau^2(1 - \mu\tau^2)(1 + \mu t^2)^{-1}}{A(1 + \mu\tau^2)[A(1 + \mu\tau^2) - A^{-1}t\tau(1 + \mu t^2)^{-1}]}. \quad (5.32)$$

Из (5.30) имеем

$$2c = F_0(0) - \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(0, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau \right], \quad (5.33)$$

$$c_0 = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(0, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau \right].$$

Таким образом, задачу (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ мы свели к решению интегрального уравнения Фредгольма (5.31).

Докажем, что однородная задача (5.31) имеет только тривиальное решение. Пусть $\psi(t)$ — решение однородного уравнения (5.31), и пусть c определяется формулой (5.33). Тогда $\Phi_0(z)$, определенная формулой (5.21), является решением однородной задачи (4.1) и, следовательно, общее решение однородной задачи (4.1) определяется формулой $\Phi_0(z) = ic_1$, где c_1 — вещественная постоянная. Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau\psi(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau + c = ic_1, \quad z \in G. \quad (5.34)$$

Из формулы Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau = 1, \quad z \in G.$$

Следовательно, равенство (5.34) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\omega(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau = 0, \quad z \in G, \quad (5.35)$$

где $\omega(t) = t\psi(t) + c - ic_1$ аналитична в круге $|t| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|t| \leq 1$. Из равенства (5.35) следует (см. [5]), что $\omega(t) = 0$ при $|t| < 1$. Поэтому $c = c_1 = 0$ и $\psi(t) \equiv 0$.

Теперь укажем простой метод решения уравнения (5.31). Из (5.32) имеем

$$|K_4(t, \tau)| \leq q = \frac{\mu}{1-\mu} + \frac{1+\mu}{[A^2(1-\mu)^2-1](1-\mu)}, \quad |t| < 1, \quad |\tau| < 1. \quad (5.36)$$

Определим оператор M формулой

$$M(\psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^3 K_4(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau.$$

Из (5.36) имеем $|M(\psi)| \leq q \|\psi\|$. Поэтому при $q < 1$

$$\psi(t) = F_1(t) + M(F_1) + M^2(F_1) + \dots$$

является решением уравнения (5.31). В качестве приближения возьмем сумму

$$\psi_n(t) = F_1(t) + M(F_1) + \dots + M^{n-1}(F_1).$$

Для погрешности приближения имеем оценку

$$|\psi(t) - \psi_n(t)| \leq \frac{q^n}{1-q} \|F_1\|, \quad |t| \leq 1.$$

Заметим, что $q < 1$, если $0 \leq \mu \leq 1/4$, $A \geq 8/3$. Пусть теперь $q \geq 1$. Используя тождество

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{m-1} t^k + \frac{t^m}{1-t}, \quad |t| \leq 1,$$

функцию K_4 , определенную формулой (5.32), можно представить в виде

$$K_4(t, \tau) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\tau) t^k + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_k(\tau) t^{k-1}}{(1+\mu t^2)^k} + K_5(t, \tau), \quad (5.37)$$

где

$$a_k(\tau) = -(\mu\tau)^{k+1}, \quad b_k(\tau) = -\frac{\tau^{k+1}(1-\mu\tau^2)}{A^{2k}(1+\mu\tau^2)^{k+1}},$$

$$K_5(t, \tau) = -\frac{(\mu\tau)^{m+1}t^m\tau}{1-\mu t\tau} - \frac{A^{-2n}t^{n-1}\tau^{n+1}(1-\mu\tau^2)(1-\mu t^2)^{-n}(1+\mu\tau^2)^{-n-1}}{1-t\tau[A^2(1+\mu\tau^2)(1+\mu t^2)]^{-1}}.$$

Имеет место оценка

$$|K_5(t, \tau)| \leq q_{mn} = \frac{\mu^{m+1}}{1-\mu} + \frac{A^2(1-\mu^2)}{A^{2n}(1-\mu)^{2n}[A^2(1-\mu)^2-1]}.$$

Ясно, что для достаточно больших m и n всегда имеем $q_{mn} < 1$: Из леммы 2.7 следует, что совокупность функций $\{t^k\}_0^{m-1}$, $\{t^{k-1}(1+\mu t^2)^{-k}\}_1^{n-1}$ линейно независима в поле комплексных чисел. Используя разложение (5.37), уравнение (5.31) можно решать по известной схеме, указанной в [6].

§6. МЕТОД СВЕДЕНИЯ

Пусть $z = \alpha_0(t)$ — функция, взаимнооднозначно отображающая единичную окружность $|t| = 1$ на некоторый контур Γ_0 , сохраняя ориентацию, и пусть $\alpha'_0(t) \neq 0$. Мы предполагаем, что контур Γ_0 охватывает точку $z = 0$. Обозначим $\rho = \min_{|t|=1} |\alpha_0(t)|$ и рассмотрим функцию

$$z = \beta(t) \equiv A\alpha_0(t) + \frac{B}{\alpha_0(t)}, \quad |t| = 1, \quad (6.1)$$

где A и B — ненулевые комплексные постоянные такие, что $|B| < |A|\rho^2$. Функция $z = \beta(t)$ взаимнооднозначно отображает единичную окружность $|t| = 1$ на некоторый замкнутый простой контур L , охватывающий точку 0, и $\beta'(t) \neq 0$. Уравнение (6.1) можно считать параметрическим уравнением контура L .

Пусть G — область, ограниченная контуром L . Рассмотрим в G следующую задачу Римана-Гильберта [1]: найти аналитическую в G функцию $\psi(z)$, непрерывную в замкнутой области $L \cup G$ и удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re} [b(z)\psi(z)] = g(z), \quad z \in L, \quad (6.2)$$

где $b(z)$ и $g(z)$ — заданные функции на L , $g(z)$ — вещественнозначна и $b(z) \neq 0$, $z \in L$. Предполагается, что $b(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условию Гельдера. Ниже мы сведем задачу (6.2) к некоторой обобщенной задаче Римана-Гильберта. Параметрическое уравнение (6.1) можно записать в виде

$$z = \frac{1}{2}B_0[A_0\alpha_0(t) + (A_0\alpha_0(t))^{-1}], \quad |t| = 1,$$

где $B_0 = 2\sqrt{AB}$, $A_0 = \sqrt{A/B}$. Из $|B| < |A|\rho^2$ имеем $|A_0|\rho > 1$. Обозначим через L_0 контур, параметрическое уравнение которого определяется формулой

$$z = \beta_0(t) \equiv \frac{1}{2}[A_0\alpha_0(t) + (A_0\alpha_0(t))^{-1}], \quad |t| = 1, \quad (6.3)$$

и пусть G_0 — область, ограниченная контуром L_0 . Область G_0 является образом области G при отображении $\zeta = B_0^{-1}z$ ($z \in G$, $\zeta \in G_0$). Так как $0 \in G$, то $0 \in G_0$. Перепишем (6.3) в виде

$$z = \beta_0(z) = \alpha(A_0\alpha_0(t)), \quad |t| = 1, \quad (6.4)$$

где $\alpha(z) = 1/2(z + z^{-1})$ — функция Жуковского (см. [3]), конформно отображающая внешность единичной окружности на внешность отрезка $[-1, 1]$. Так как

$$|A_0\alpha_0(t)| > |A_0|\rho > 1, \quad |t| = 1,$$

то из (6.4) следует, что L_0 не содержит точки отрезка $[-1, 1]$. С другой стороны, так как $O \in G_0$, то отрезок $[-1, 1]$ целиком лежит в G_0 . Функцию $\psi(z)$ можно представить в виде $\psi(z) = \psi_0(z/B_0)$, где $\psi_0(z)$ аналитична в G_0 и непрерывна в $\bar{G}_0 = L_0 \cup G_0$. Подставляя $\psi(z) = \psi_0(z/B_0)$ в (6.2) и делая замену $\zeta = B_0^{-1}z$, получим

$$\operatorname{Re} [b(B_0\zeta)\psi_0(\zeta)] = g(B_0\zeta), \quad \zeta \in L_0. \quad (6.5)$$

Пусть Γ — контур, параметрическое уравнение которого определяется формулой $z = A_0\alpha_0(t)$, $|t| = 1$. Так как $|A_0|\rho > 1$, то контур Γ охватывает единичную окружность $|z| = 1$. Из (6.4) следует, что $\zeta \in L_0$ тогда и только тогда, когда $\zeta = \alpha(z)$, $z \in \Gamma$. Подставляя $\zeta = \alpha(z)$ в (6.5), получим

$$\operatorname{Re} [b(B_0\alpha(z))\psi_0(\alpha(z))] = g(B_0\alpha(z)), \quad z \in \Gamma. \quad (6.6)$$

Пусть D — область, ограниченная контуром Γ и окружностью $|z| = 1$. Функция $\zeta = \alpha(z)$ отображает окружность $|z| = 1$ на отрезок $[-1, 1]$, а контур Γ на контур L_0 . Поэтому функция $\zeta = \alpha(z)$ взаимно однозначно отображает область D на область G_0 без отрезка $[-1, 1]$. Поэтому функция $\varphi(z) = \psi_0(\alpha(z))$ аналитична в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Граничное условие (6.6) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} [a(z)\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma, \quad (6.7)$$

где

$$a(z) = b(B_0\alpha(z)), \quad f(z) = g(B_0\alpha(z)).$$

Так как $\alpha(z) = \alpha(\bar{z})$ при $|z| = 1$, то

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad |z| = 1, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \quad (6.8)$$

Таким образом, аналитическая в области D функция $\varphi(z)$ является решением обобщенной задачи (6.7), (6.8). Из определения φ имеем

$$\psi_0(z) = \varphi\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad (6.9)$$

где под $\sqrt{z^2 - 1}$ понимаем ту ветвь, которая аналитична вне отрезка $[-1, 1]$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} = 1.$$

Ясно, что функция $\psi_0(z)$ аналитична в G_0 без отрезка $[-1, 1]$. Из (6.8) следует, что $\psi_0(z)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, аналитична всюду в G_0 . Из (6.9) имеем

$$\psi(z) = \varphi \left(\frac{z}{B_0} + \sqrt{\frac{z^2}{B_0^2} - 1} \right). \quad (6.10)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6.1. Задача Римана-Гильберта (6.2) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение обобщенная задача Римана-Гильберта (6.7), (6.8), причем общее решение задачи (6.2) определяется формулой (6.10), где $\varphi(z)$ — общее решение обобщенной задачи (6.7), (6.8).

Параметрическое уравнение контура Γ , как правило, более простое, чем параметрическое уравнение контура L . Поэтому во многих случаях удобно решать обобщенную задачу (6.7), (6.8) вместо задачи (6.2).

§7. ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Контур L называется *аналитическим*, если он может быть задан параметрическим уравнением $z = \alpha_0(t)$, $|t| = 1$, где $\alpha_0(t)$ — функция комплексной переменной t , аналитичная в некоторой окрестности окружности $|t| = 1$ и удовлетворяющая условию $\alpha'_0(t) \neq 0$ при $|t| = 1$. Пусть G — область, ограниченная контуром L . Не ограничивая общности, будем предполагать, что G содержит точку $z = 0$. Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре (см. [1]): найти в G решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7.1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$a_0(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_0(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in L, \quad (7.2)$$

где $a_0(x, y)$, $b_0(x, y)$ и $f(x, y)$ — заданные вещественные функции и $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$. Предполагается, что функции $a_0(x, y)$, $b_0(x, y)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют условию Гельдера на L . Как известно ([3]), любое решение уравнения Лапласа можно представить в виде $u(x, y) = \operatorname{Re} \varphi_0(z)$, где $z = x + iy$, а функция $\varphi_0(z)$ аналитична в G и удовлетворяет условию $\operatorname{Im} \varphi_0(0) = 0$. Следовательно

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \psi(\zeta) d\zeta + c, \quad (7.3)$$

где c — произвольная вещественная постоянная, а функция $\psi(z)$ аналитична в G и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$. Из (7.3) и $u = \operatorname{Re} \varphi_0$ имеем

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int_0^z \psi(\zeta) d\zeta \right] + c.$$

Подставляя $u(x, y)$ в (7.2), получим

$$\operatorname{Re} [a(z)\psi(z)] = f(z), \quad a(z) = a_0(x, y) + ib_0(x, y), \quad z \in L. \quad (7.4)$$

Таким образом, задача Пуанкаре (7.1), (7.2) сводится к задаче Римана-Гильберта (7.4). Для случая, когда G — круг или полуплоскость, в [1] указан простой метод ее решения. В общем случае задачу (7.4) можно свести к этим случаям при помощи конформного отображения G на круг или полуплоскость. В [2] задача (7.4) сводится к сингулярному интегральному уравнению. Применяя результаты §5 и §6, здесь мы укажем эффективные методы решения задачи Пуанкаре для некоторых областей, ограниченных аналитическими кривыми.

1. Пусть границей G является эллипс

$$x = A \cos \theta, \quad y = B \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (7.5)$$

Пусть $t = e^{i\theta}$. тогда

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

Следовательно, параметрическое уравнение (7.5) можно записать в виде

$$z = A \cos \theta + iB \sin \theta = \frac{A+B}{2} t + \frac{A-B}{2t}, \quad |t| = 1.$$

Согласно теореме 6.1 задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D , ограниченной окружностями $|z| = \sqrt{(A+B)(A-B)^{-1}}$ и $|z| = 1$. Эта задача полностью решена в §5, п. 1.

2. Пусть параметрическое уравнение контура L имеет вид

$$z = A(t - \mu) + \frac{B}{t - \mu}, \quad |t| = 1,$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$, $|\mu| < 1$ и $|A| > |B|(1 - \mu)^2$. Согласно теореме 6.1 задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D , ограниченной окружностями

$$\left| z + \mu \sqrt{\frac{A}{B}} \right| < \sqrt{\frac{|A|}{|B|}}$$

и $|z| = 1$ (см. §5, п. 2).

3. Пусть параметрическое уравнение контура Γ имеет вид

$$z = A \left(t + \frac{\mu}{t} \right) + B \left(t + \frac{\mu}{t} \right)^{-1}, \quad |t| = 1,$$

где A, B и μ — комплексные постоянные, не равные нулю и такие, что $|\mu| < 1$, $|A| > |B|(1 - |\mu|)^2$. Пусть область D ограничена окружностью $|z| = 1$ и эллипсом

$$z = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(t + \frac{\mu}{t} \right), \quad |t| = 1.$$

Согласно теореме 6.1 задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D (см. §5, п. 3).

4. Пусть параметрическое уравнение контура Γ имеет вид

$$z = A \left(t + \sum_{k=1}^m c_k t^{-k} \right) + B \left(t + \sum_{k=1}^m c_k t^{-k} \right)^{-1},$$

где A, B и c_k — комплексные постоянные такие, что

$$\sum_{k=0}^m |c_k| < 1, \quad \sum_{k=0}^m k |c_k| < 1, \quad |A| > |B| \left(1 - \sum_{k=0}^m |c_k| \right)^{-2}.$$

Пусть Γ_2 задано уравнением

$$z = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(t + \sum_{k=0}^m c_k t^{-k} \right), \quad |t| = 1.$$

Задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D между окружностью $|z| = 1$ и контуром Γ_2 .

ABSTRACT. A relationship between the classical and generalized Hilbert-Riemann problems is derived. Some effective methods of resolution of the generalized problem are presented. The results are applied in the Poincare problem for Laplace equation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1970.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Физматгиз, Ленинград, 1951.
5. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1994.
6. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1970.

29 марта 1997

Армянский государственный
инженерный университет
E-mail : htersian@seua.am

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 33

НОМЕР 3

1998

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, II

Сборник статей

Страницы

Аналитические решения некоторых дифференциальных
и интегральных уравнений

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева..... 5

Аналитические решения дифференциальных уравнений
с особенностями и сдвигами

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян..... 29

Обобщенная задача Римана-Гильберта и ее применение

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян..... 68

CONTENTS

VOLUME 33

NUMBER 3

1998

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

ANALYTICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS, II

Collection of Papers

PAGES

Analytical solutions of some differential and integral equations N. E. Tovmasian, T. M. Kosheleva	1
Analytical solutions of differential equations with singularities and shifts N. E. Tovmasian, V. S. Zakarian	25
Riemann-Hilbert generalized problem and applications N. E. Tovmasian, V. S. Zakarian	63

©1998 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.