ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Работы данного номера журнала, выполненные в математическом департаменте Государственного инженерного университета Армении, посвящены задаче Римана–Гильберта для аналитических функций и ее применениям. Здесь развиваются идеи и методы работ Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, М. А. Лаврентьева, Ф. Д. Гахова, А. В. Бицадзе и других. В работах указанных авторов краевые задачи для аналитичских функций, такие как задача Гильберта, задача Римана–Гильберта, задача Пуанкаре, задача Газемана и т.д., сведены к сингулярным интегральным уравнениям. Однако численная реализация нередко требует дальнейших шагов, таких как определение дефектных чисел, вопросы аналитического продолжения этих решений и т.д.

В работах настоящего выпуска разработаны эффективные методы решения задачи Римана–Гильберта в односвязных областях, ограниченных аналитическими кривыми, и исследованы вопросы аналитического продолженя этих решений. Полученные результаты применены для представления в виде простейших дробей конформных отображений односвязных областей с эллипсообразными границами, а также для решения некоторых классов нерегулярных эллиптических уравнений.

Ереван, декабрь 1997 В. С. Закарян

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

сбоник статей

под редакцией В. С. Закаряна

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. О. Бабаян, С. А. Папян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

В работе рассмотрена задача типа Римана для одного класса неправильно-эллиптических уравнений. Изучены вопросы разрешимости и количества линейно независимых решений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z\colon |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $\Gamma = \partial D = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = 1\}$ – граница этого круга. В области D рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + bu = 0. \tag{1}$$

Здесь a и b – постоянные, u – искомая дважды дифференцируемая в D функция, удовлетворяющая условию Гельдера вместе со своими производными первого порядка в $D \bigcup \Gamma$. На границе Γ функция $u(x,y)$ должна удовлетворять краевым условиям типа Римана

$$\operatorname{Re} u|_\Gamma = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_\Gamma = g(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{3}$$

где f и g – заданные непрерывные по Гельдеру вещественнозначные функции на Γ, N – внутренняя нормаль к Γ в точке (x,y).

Дифференциальные уравнения типа (1) с другими краевыми условиями рассматривались в монографии [1]. В случае, когда $a = b = 0$, в [2], [3] было доказано, что задача (1) — (3) нетерова, неоднородная задача всегда разрешима, а однородная задача ($f \equiv g \equiv 0$) имеет четыре линейно независимых решения. В [6] рассматривалась задача (1) — (3) в смысле L^1–сходимости, где была доказана нетеровость этой задачи и вычислен индекс. Целью настоящей работы является доказательство аналогичных результатов в пространствах функций, удовлетворяющих условию Гельдера при произвольных постоянных a и b.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2a\,\lambda + b = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Однородная задача (1) — (3) имеет четыре решения u_1, u_2, u_3, u_4, линейно независимые над полем действительных чисел. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то для $z = x + iy$*

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= i\,e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}, \quad u_2(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}\,(z + \overline{z}), \\ u_3(x,y) &= e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}\,(z - \overline{z}), \quad u_4(x,y) = e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}\,z\,\overline{z}. \end{aligned} \tag{5}$$

В случае, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} &u_1(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}, \; u_2(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_2 z + \lambda_2 \overline{z}}, \\ &u_3(x,y) = i\left(e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z} + e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_2 \overline{z}}\right), \; u_4(x,y) = e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z} - e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_2 \overline{z}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Общее решение однородной задачи (1) — (3) представляется в виде линейной комбинации функций u_1, ..., u_4 с вещественными коэффициентами.

Теорема 2. *Для произвольных a и b задача (1) — (3) нетерова и индекс этой задачи равен четырем.*

Из теорем 1 и 2 следует, что неоднородная задача (1) — (3) всегда разрешима.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет следующее представление :

$$u(x,y) = e^{\lambda_1 \overline{z}}\,(\overline{z}\,\varphi_1(z) + \varphi_2(z)), \qquad z = x + iy, \tag{7}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ – произвольные аналитические в D функции.

Делая замену

$$\varphi_1(z) = e^{\lambda_1 \overline{z}}\, \Psi_1(z), \qquad \varphi_2(z) = e^{\lambda_1 \overline{z}}\, \Psi_2(z), \quad z = x + iy,$$

после подстановки в (2) и (3) получим следующие уравнения для определения $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$:

$$\operatorname{Re}\left(\overline{z}\,\Psi_1(z) + \Psi_2(z)\right)\big|_\Gamma = f_1(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial N}\left(\overline{z}\,\Psi_1(z) + \Psi_2(z)\right)\Big|_\Gamma = g_1(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{9}$$

где

$$f_1(x,y) = e^{-(\lambda_1\overline{z} + \overline{\lambda}_1 z)}\, f(x,y),$$

$$g_1(x,y) = e^{-(\lambda_1\overline{z} + \overline{\lambda}_1 z)}\left[g(x,y) - \frac{\partial}{\partial N}\left(e^{\lambda_1\overline{z} + \overline{\lambda}_1 z}\right) f_1(x,y)\right], \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Уравнения (8) и (9) были исследованы в [3] и [4]. Используя полученные в этих работах результаты, мы завершаем доказательство теоремы 1 в случае $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть теперь $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет следующее представление :

$$u(x,y) = e^{\lambda_1\overline{z}}\varphi_1(z) + e^{\lambda_2\overline{z}}\varphi_2(z), \quad z = x + iy, \tag{10}$$

где функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ аналитичны в D. Из этого представления следует, что функции (6) – решения однородной задачи (1) — (3).

Пусть $u(x,y)$ – произвольное решение однородной задачи (1) — (3). Покажем, что

$$\operatorname{Re} u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D. \tag{11}$$

Для этого представим функцию $u(x,y)$ в виде

$$u(x,y) = e^{-a\overline{z} - \overline{a}z}\, V(x,y), \quad (x,y) \in D, \quad z = x + iy. \tag{12}$$

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + bu = e^{-a\overline{z} - \overline{a}z}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \overline{z}^2} + (b - a^2)\,V\right).$$

Таким образом, в D уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} + (b - a^2)\, V = 0, \quad (x, y) \in D. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (2) и (3), а также учитывая, что $e^{-a\bar{z}-\bar{a}z}$ – действительная функция, получим

$$\operatorname{Re} V|_\Gamma = 0, \qquad \operatorname{Re} \left.\frac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Введем оператор L, действующий в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций, и сопряженный с ним оператор L^* :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + (b - a^2)\, I, \qquad L^* = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\bar{b} - \bar{a}^2)\, I.$$

В этих обозначениях задача (13), (14) (эквивалентная однородной задаче (1) — (3)) примет вид

$$\begin{cases} (LV)(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ \operatorname{Re} V|_\Gamma = 0, & \operatorname{Re} \left.\dfrac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial N}$ – вещественный оператор, получим, что если V – решение задачи (15), то функция

$$W(x, y) = \operatorname{Re} V(x, y) \tag{16}$$

будет решением задачи

$$(L^* L)\, W(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D, \tag{17}$$

$$\operatorname{Re} W|_\Gamma = 0, \qquad \operatorname{Re} \left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{18}$$

Здесь W – четырежды непрерывно дифференцируемая в D искомая функция, удовлетворяющая условию Гельдера в $D \bigcup \Gamma$ вместе с производными первого порядка.

Покажем, что задача (17), (18) имеет только тривиальное решение. Пусть $W(x, y)$ – решение задачи (17), (18). Тогда из (17) имеем

$$\iint_D (L^* L) W(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}\, dx\, dy = 0. \tag{19}$$

Функция $W(x, y)$ аналитична в D (см. [7]). Следовательно, в (19) можно дважды применить формулу Грина. Учитывая (18), получим

$$\iint_D |L\,W(x,y)|^2\,dx\,dy = 0. \tag{20}$$

Так как $(LW)(x, y)$ непрерывна в D, то $(LW)(x, y) = 0$ при $(x, y) \in D$. Следовательно, функция $W(x, y)$ представляется в виде

$$W(x,y) = e^{-c\bar{z}}\,\Psi_1(z) + e^{c\bar{z}}\,\Psi_2(z), \tag{21}$$

где $c = \sqrt{a^2 - b}$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ – аналитические в D функции (ср. с (10)).

Из (18) для $(x, y) \in \Gamma$ получаем $e^{-c\bar{z}}\,\Psi_1(z) + e^{c\bar{z}}\,\Psi_2(z) = 0$. Поскольку $z\,\bar{z} = 1$ при $z \in \Gamma$, то

$$e^{-c/z}\,\Psi_1(z) + e^{c/z}\,\Psi_2(z) = 0, \qquad z \in \Gamma.$$

Функция $e^{-c/z}\,\Psi_1(z) + e^{c/z}\,\Psi_2(z)$ аналитична при $0 < |z| < 1$ и обращается в нуль при $|z| = 1$. Следовательно, по теореме единственности $e^{-c/z}\,\Psi_1(z) + e^{c/z}\,\Psi_2(z) = 0$ при $0 < |z| \le 1$, или

$$\Psi_1(z) = e^{2c/z}\,\Psi_2(z) \quad \text{при} \quad 0 < |z| \le 1. \tag{22}$$

Так как функция $\Psi_1(z)$ аналитична в нуле, то из (22) следует, что функция $\Psi_2(z)$ имеет нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$, следовательно, $\Psi_2(z) \equiv 0$ при $z \in D$. Из (22) мы также имеем, что $\Psi_1(z) \equiv 0$ при $z \in D$. Окончательно, из (21) получаем, что однородная задача (17), (18) имеет только тривиальное решение и, используя (16) и (12), получаем (11). Далее, из (10) и (11) имеем

$$\mathrm{Re}\,\left(e^{\lambda_1\bar{z}}\,\varphi_1(z) + e^{\lambda_2\bar{z}}\,\varphi_2(z)\right) = 0, \qquad z \in D.$$

Введем функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ по формулам

$$\varphi_1(z) = e^{\overline{\lambda}_1 z}\,\Psi_1(z), \qquad \varphi_2(z) = e^{\overline{\lambda}_2 z}\,\Psi_2(z). \tag{23}$$

Аналитические в D функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ однозначно определяются по φ_1 и φ_2. Из (23) имеем

$$\mathrm{Re}\,\left(e^{\lambda_1\bar{z}+\overline{\lambda}_1 z}\,\Psi_1(z) + e^{\lambda_2\bar{z}+\overline{\lambda}_2 z}\,\Psi_2(z)\right) = 0, \qquad z \in D.$$

Используя вещественность функции $\exp(\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_1 z)$, получим

$$\operatorname{Re}\left(\Psi_1(z) + e^{(\lambda_2-\lambda_1)\overline{z}+(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1)z}\,\Psi_2(z)\right) = 0, \qquad z \in D \tag{24}$$

или

$$\Psi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)} + e^{(\lambda_2-\lambda_1)\overline{z}+(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1)z}\left(\Psi_2(z) + \overline{\Psi_2(z)}\right) = 0, \qquad z \in D.$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial \overline{z}\,\partial z}$, получим

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)\overline{z}+(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1)z}\times$$

$$\times\left[|\lambda_2-\lambda_1|^2\left(\Psi_2(z)+\overline{\Psi_2(z)}\right) + (\lambda_2-\lambda_1)\Psi_2'(z) + \left(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1\right)\overline{\Psi_2'(z)}\right] = 0.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re}\left(|\lambda_2-\lambda_1|^2\,\Psi_2(z) + (\lambda_2-\lambda_1)\,\Psi_2'(z)\right) = 0, \qquad z \in D. \tag{25}$$

Учитывая аналитичность $\Psi_2(z)$, из (25) получим дифференциальное уравнение

$$\Psi_2'(z) + \left(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1\right)\Psi_2(z) = iC_1\left(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1\right),$$

где C_1 – вещественная постоянная. Решая это уравнение находим $\Psi_2(z)$:

$$\Psi_2(z) = A\,e^{-(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1)z} + i\,C_1, \tag{26}$$

где A – произвольная комплексная постоянная. После подстановки найденной функции в (24) находим

$$\Psi_1(z) = -\overline{A}\,e^{(\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_1)z} + i\,C_2,$$

где C_2 – вещественная постоянная. Из (23) находим

$$\varphi_1(z) = -\overline{A}\,e^{\overline{\lambda}_2 z} + i\,C_2\,e^{\overline{\lambda}_1 z}, \qquad \varphi_2(z) = A\,e^{\overline{\lambda}_1 z} + i\,C_1\,e^{\overline{\lambda}_2 z}. \tag{27}$$

Наконец, подставляя функции (27) в (10), получим общее решение однородной задачи (1) — (3) :

$$u(x,y) = iC_2\,e^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_1\overline{z}} + iC_1\,e^{\overline{\lambda}_2 z+\lambda_2\overline{z}} + A\,e^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_2\overline{z}} - \overline{A}\,e^{\lambda_1\overline{z}+\overline{\lambda}_2 z}.$$

Разделяя действительные и мнимые части $e^{\lambda_1\overline{z}+\lambda_2\overline{z}}$, завершаем доказательство теоремы 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Как было показано в предыдущем параграфе, случай кратных корней ($\lambda_1 = \lambda_2$) сводится к случаю $a = b = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если $u(x,y)$ - решение задачи (1) — (3), то для этой функции справедливо представление (10). Обозначим

$$\Psi_1(z) = \varphi_1(z)\, e^{-\overline{\lambda}_2 z}, \qquad \Psi_2(z) = -\varphi_2(z)\, e^{-\overline{\lambda}_1 z}. \tag{28}$$

Используя (28), получим представление

$$u(x,y) = e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z}\, \Psi_1(z) - e^{\lambda_2 \overline{z} + \overline{\lambda}_1 z}\, \Psi_2(z), \tag{29}$$

где $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ - аналитические в D функции. Для сокращения записи будем использовать обозначение $a(z) = e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z}$. Тогда равенство (29) примет вид

$$u(x,y) = a(z)\, \Psi_1(z) - \overline{a(z)}\, \Psi_2(z). \tag{30}$$

Функция (30) должна удовлетворять граничному условию (2). Прежде чем подставить функцию (30) в (2), представим правую часть (2) в виде ,

$$f(x,y) = \mathrm{Re}\,(a(z)\, F(z)), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{31}$$

где $F(z)$ - функция, аналитическая в D. Индекс функции $a(z)$ равен нулю, следовательно (см. [5], стр. 254)

$$F(z) = e^{-i\Psi(z)} \left(\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma e^{-\mathrm{Im}\,\Psi(t)} \frac{f(t)}{|a(t)|\,(t-z)}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\mathrm{Im}\,\Psi(t)} \frac{f(t)}{|a(t)|\, t}\, dt \right),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\arg \dfrac{a(t)}{|a(t)|}}{t-z}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{t} \arg \frac{a(t)}{|a(t)|}\, dt.$$

Учитывая (30) и (31), граничное условие (2) представим в виде

$$\mathrm{Re}\,(a(z)\, \Psi_1(z) - \overline{a(z)}\, \Psi_2(z)) = \mathrm{Re}\,(a(z)\, F(z)), \qquad |z| = 1$$

или

$$\mathrm{Re}\, \Big(a(z)\,(\Psi_1(z) - F(z)) - a(z)\, \overline{\Psi_2(z)} \Big) = 0, \qquad |z| = 1. \tag{32}$$

Так как $z\overline{z}=1$ при $z\in\Gamma$, то

$$\operatorname{Re}\left(a(z)\left(\Psi_1(z)-F(z)-\overline{\Psi_2(1/\overline{z})}\right)\right)=0.$$

Таким образом, получаем граничную задачу для $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$:

$$\Psi_1(z)-F(z)-\overline{\Psi_2(1/\overline{z})}=i\,d(z)\,\overline{a(z)},\quad x+iy\in\Gamma,\tag{33}$$

где $d(z)$ – неизвестная вещественнозначная функция на Γ. В (33) функция $\Psi_1(z)-$ $-F(z)$ аналитична при $|z|<1$, а $\overline{\Psi_2(1/\overline{z})}$ аналитична при $|z|>1$. Следовательно, эти функции определяются интегралом типа Коши :

$$\Psi_1(z)-F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,\overline{a(t)}}{t-z}\,dt,\ |z|<1\quad\text{и}\quad\overline{\Psi_2(1/\overline{z})}=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,\overline{a(t)}}{t-z}\,dt,\ |z|>1.$$

Так как функция $d(t)$ вещественна, то

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,\overline{a(t)}}{t-z}\,dt+F(z)\quad\text{и}\quad\Psi_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,a(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,a(t)}{t}\,dt.\tag{34}$$

После подстановки (34) в (30) для решения $u(z)$ задачи (1) — (3) получаем представление

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d(t)\,\frac{a(z)\,\overline{a(t)}-\overline{a(z)}\,a(t)}{t-z}\,dt+\frac{\overline{a(z)}}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,a(t)}{t}\,dt+a(z)\,F(z),\quad |z|<1.\tag{35}$$

Полагая

$$z=r\,e^{i\theta}\in D,\quad t=e^{i\tau}\in\Gamma,\quad r\in[0,1),\quad \theta,\tau\in[0,2\pi],$$

запишем (35) в виде

$$u(r\,e^{i\theta})=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}d(e^{i\tau})\,\frac{a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})}{1-re^{i(\theta-\tau)}}\,d\tau+\frac{i\,\overline{a(r\,e^{i\theta})}}{2\pi}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d(e^{i\tau})\,a(e^{i\tau})\,d\tau+a(r\,e^{i\theta})\,F(r\,e^{i\theta}).$$

Из равенства

$$\frac{2-2r\cos(\theta-\tau)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}=1+\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}\tag{36}$$

получаем

$$\operatorname{Re} u(r\,e^{i\theta}) =$$
$$= \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,\frac{2-2r\cos(\theta-\tau)}{1+r^2-2r\,\cos(\theta-\tau)}\,d\tau-$$
$$-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,d\tau+\operatorname{Re}\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,F(r\,e^{i\theta})\right)=$$
$$= \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\theta-\tau)}\,d\tau+$$
$$+\operatorname{Re}\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,F(r\,e^{i\theta})\right). \tag{37}$$

Для определения неизвестной функции $d(t)$ используем граничное условие (3). Поскольку оператор $\dfrac{\partial}{\partial N}$ действительный, то условие (3) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial N}\operatorname{Re} u(t)\Big|_{\Gamma} = g(x,y), \qquad t = x+iy\in\Gamma.$$

После представления (37) получим

$$\lim_{r\to1-0}\left(\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}a(e^{i\tau})\right)'_r\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}\,d\tau+\right.$$
$$+\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,\left(-\frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)\,d\tau\right)=\Psi(e^{i\theta}), \tag{38}$$

где

$$\Psi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to1-0}\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,F(e^{i\theta})\right)-g(\cos\theta,\sin\theta)$$

– известная функция. Обозначим

$$K(r\,e^{i\theta},e^{i\tau}) = a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})$$

и рассмотрим первое слагаемое в левой части (38). Имеем

$$\left(K(r\,e^{i\theta},e^{i\tau})\right)'_r = \left(\lambda_1\,e^{-i\theta}+\overline{\lambda_2}\,e^{i\theta}\right)a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\left(\overline{\lambda_1}\,e^{i\theta}+\lambda_2\,e^{-i\theta}\right)\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau}).$$

Эта функция равномерно по $\theta\in[0,2\pi]$ стремится к $K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})$ при $r\to1-0$. Следовательно, используя свойства ядра Пуассона, получим

$$\lim_{r\to1-0}\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(K\left(r\,e^{i\theta},e^{i\tau}\right)\right)'_r\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\theta-\tau)}\,d\tau=$$
$$=\frac{i}{2}\,d(e^{i\tau})\,K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau}) = -|a(e^{i\theta})|^2\,d(e^{i\tau})\,\operatorname{Im}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right). \tag{39}$$

Для оценки второго слагаемого в (38), отметим, что

$$
\begin{gathered}
-\int_0^{2\pi} \frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}\,d\tau = -\frac{4\pi}{1-r^2}, \\
\int_0^{2\pi} \frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\,d\tau = \frac{4\pi}{1-r^2}.
\end{gathered}
\tag{40}
$$

Следовательно второе слагаемое представляется в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,K(r\,e^{i\theta},e^{i\tau})\times \\
\times\left(-\frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau = I_1+I_2,
\end{gathered}
\tag{41}
$$

где

$$
\begin{gathered}
I_1 = \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,K(e^{i\theta},e^{i\tau})\times \\
\times\left(-\frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau, \\
I_2 = \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\left(\frac{K(re^{i\theta},e^{i\tau})-K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{r-1}-K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})\right)\times \\
\times\left(\frac{2(1-r)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}-\frac{2(1-r)^3(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau.
\end{gathered}
\tag{42}
$$

При $r\to 1$

$$
\frac{K(r\,e^{i\theta},e^{i\tau})-K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{r-1}-K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})\to 0
$$

равномерно по θ и τ, а из (40) следует, что интеграл (42) равномерно ограничен при $r\to 1$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$
\lim_{r\to 1-0} I_2 = 0. \tag{43}
$$

Рассмотрим слагаемое I_1. Имеем

$$
-\lim_{\tau\to\theta}\frac{K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{\sin(\theta-\tau)} = K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})\big|_{\tau=\theta} = 2\,i\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right)\,|a(e^{i\theta})|^2, \tag{44}
$$

откуда вытекает

$$
\begin{gathered}
I_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(\frac{i\,K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{\sin(\tau-\theta)}+2|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right)\right)\times \\
\times\left(-\frac{2\sin(\tau-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))\,\sin(\theta-\tau)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau+ \\
+\frac{1}{2\pi}\,|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right)\times \\
\times\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(\frac{2\sin(\tau-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}-\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))\,\sin(\theta-\tau)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau.
\end{gathered}
$$

Учитывая (44) и предельное соотношение

$$\lim_{r\to 1}\left[\frac{2\sin(\tau-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))\,\sin(\theta-\tau)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right]=$$

$$=\frac{\sin(\theta-\tau)}{1-\cos(\theta-\tau)},\quad \theta\neq\tau,$$

получим

$$\lim_{r\to 1} I_1=\frac{1}{2\pi}|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\;e^{-i\theta}\right)\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\frac{\sin(\theta-\tau)}{1-\cos(\theta-\tau)}d\tau+ \tag{45}$$
$$+\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,R(\tau,\theta)\,d\tau,$$

где функция

$$R(\tau,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i\,K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{\sin(\tau-\theta)}+2|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\;e^{-i\theta}\right)\right)\frac{\sin(\theta-\tau)}{1-\cos(\theta-\tau)}$$

удовлетворяет условию Гельдера на Γ, а интеграл (45) понимается в смысле главного значения.

Окончательно, из (38), (39) (41), (43) и (45) получаем следущее сингулярное интегральное уравнение для функции $d(e^{i\,\tau})$:

$$|a(\zeta)|^2\,\mathrm{Im}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)\,d(\zeta)+i\mathrm{Re}\,\left((\dot{\overline{\lambda_1}}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)\,|a(\zeta)|^2\,\frac{1}{\pi i}\int_{|t|=1} d(t)\,\frac{dt}{t-\zeta}+ \tag{46}$$
$$+\int_{|t|=1} d(t)\,T(t,\zeta)\,dt=\Psi(\zeta),$$

где $t=e^{i\,\tau}$, $\zeta=e^{i\,\theta}$, а $T(t,\zeta)=R(\tau,\theta)+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)\,|a(\zeta)|^2\,\bar{t}$ удовлетворяет условию Гельдера.

Коэффициенты этого уравнения

$$A(\zeta)=|a(\zeta)|^2\,\mathrm{Im}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right),\quad B(\zeta)=i\,|a(\zeta)|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)$$

удовлетворяют условию

$$A^2(\zeta)-B^2(\zeta)=|a(\zeta)|^2\,\left|\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2}\right|^2\neq 0,\qquad \zeta\in\Gamma.$$

Следовательно, задача (46) (а значит и исходная задача (1) — (3)) нетерова (см. [1]), а индекс вычисляется по формуле

$$n=\frac{1}{\pi}\left[\arg\frac{A(\zeta)-B(\zeta)}{A(\zeta)+B(\zeta)}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\arg\frac{-i(\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\,\zeta}{i(\lambda_1-\lambda_2)\,\overline{\zeta}}\right]_\Gamma=4.$$

Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper considers Riemann type boundary value problem for a class of improperly elliptic differential equations. The questions of solvability and the number of linearly independent solutions is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Джураев, Метод сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1987.
2. Н. Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для неправильно-эллиптических уравнений высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 1, стр. 78 — 81, 1992.
3. А. А. Закарян, "Краевые задачи для неправильно-эллиптических уравнений", Диссертация, Ереван, 1989.
4. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, Наука, М., 1968.
5. А. В. Бицадзе, Основы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1984.
6. Г. М. Айрапетян, "Задача типа Римана для неправильно-эллиптических уравнений в классе L^1", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 71 — 79, 1993.
7. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, ГИТТЛ, М., 1948.

5 декабря 1997

Армянский государственный инженерный университет

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

В работе рассматривается проблема аналитического продолжения аналитической функции через эллипсообразные дуги при условии, что либо действительная часть, либо модуль функции постоянны. Мы изучаем случая полуплоскости и круга. Полученные результаты применяются к разложению на простейшие дроби конформных отображений, отображающих области с эллипсообразными границами на круг или полуплоскость. В случае эллипса мы доказываем, что конформные отображения являются мероморфными функциями со счетным числом простых полюсов или полюсов второго порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – образ окружности

$$|t-d|=R, \quad d\geq 0, \quad R>1+d \tag{1.1}$$

при отображении Жуковского (см. [1], стр. 29)

$$z=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\equiv\alpha_1(t), \tag{1.2}$$

где $z=x+iy$, $t=\zeta+i\eta$. Обозначим через D область, ограниченную контуром Γ. Если $d=0$, то Γ является эллипсом (см. [1], стр. 29).

В §§1,2 исследуются вопросы аналитического продолжения функций $\varphi(z)$, аналитических в D и непрерывных в $D\bigcup\Gamma$, через открытые дуги $\gamma\subset\Gamma$. Предполагается, что $\varphi(z)$ удовлетворяет одному из следующих условий :

$$\operatorname{Re}\varphi(z)=0 \quad \text{или} \quad |\varphi(z)|=1, \qquad z\in\gamma.$$

В §§3 — 6 полученные результаты используются для разложения конформных отображений области D на круг и полуплоскость на простейшие дроби. Случай, когда Г – эллипс, вопросы аналитического продолжения исследованы в работе [2].

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Результаты данного параграфа имеют вспомогательный характер. Они используются для построения аналитического продолжения и разложения конформного отображения на простейшие дроби.

Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая в комплексной плоскости. Кривая L является границей двух областей D^+ и D^-, где D^+ – ограниченная, а D^- – неограниченная и содержит в себе окрестность бесконечно удаленной точки. Область D^+ будем называть внутренностью, а D^- – внешностью L. Если L – отрезок, то дополнение L до расширенной комплексной плоскости будем называть внешностью L.

Мы будем говорить, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, если $f(1/z)$ аналитична в окрестности нуля. Пусть G_0 – кольцо

$$r_0 < |z| < R_0, \tag{1.3}$$

и пусть γ_0 и I_0 – открытые дуги на окружностях $|z| = R_0$ и $|z| = r_0$, соответственно, а Γ_0 и L_0 – их соответствующие дополнения до полных окружностей.

Пусть функция $\Psi(z)$ аналитична в кольце G_0, непрерывна в $G_0 \bigcup \gamma_0 \bigcup I_0$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_0 \bigcup I_0. \tag{1.4}$$

Обозначим через G_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ кольцо

$$\frac{R_0^k}{r_0^{k-1}} < |z| < \frac{R_0^{k+1}}{r_0^k},$$

и пусть открытые дуги γ_k, I_k и замкнутые дуги Γ_k, L_k являются образами γ_0, I_0, Γ_0 и L_0, соответственно, при отображении

$$\zeta = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k}} z.$$

Пусть ω_0 – совокупность контуров Γ_k и L_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ точки 0 и бесконечно удаленной точки. Обозначим через Ω_0 дополнение ω_0 до расширенной комплексной плоскости (Ω_0 – область в комплексной плоскости, содержащая кольцо G_0).

Лемма 1. *Функция $\Psi(z)$ аналитически продолжается через дуги γ_0 и I_0 в область Ω_0.*

Доказательство. Согласно принципу симметрии аналитического продолжения (см. [1], стр. 158) $\Psi(z)$ аналитически продолжается через γ_0 и I_0 в кольца G_1 и G_{-1} по формулам

$$\Psi(z) = \overline{\Psi(R_0^2/\bar{z})}, \quad z \in G_1 \bigcup \gamma_0, \tag{1.5}$$

$$\Psi(z) = -\overline{\Psi(r_0^2/\bar{z})}, \quad z \in G_{-1} \bigcup I_0 \tag{1.6}$$

(черта означает комплексное сопряжение). Из (1.4), (1.5) и (1.6) имеем

$$\operatorname{Re}\Psi(z) = 0, \qquad z \in \gamma_1 \bigcup I_{-1}.$$

Поэтому $\Psi(z)$ можно аналитически продолжить через γ_1 и I_1 в кольца G_2 и G_{-2}. Аналогично мы докажем справедливость леммы 1.

Пусть теперь $\Psi_0(z)$ – аналитическая функция в кольце G_0, непрерывная в $G_0 \bigcup \gamma_0 \bigcup I_0$ и удовлетворяющая условию

$$|\Psi_0(z)| = 1, \qquad z \in \gamma_0 \bigcup I_0. \tag{1.7}$$

Множество ω нулей функции $\Psi_0(z)$ в G_0 либо пустое, либо состоит из конечного или счетного числа точек (см. [1]). Множество

$$\omega_1 = \left\{ z\colon\ z = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}} \frac{1}{\bar{\zeta}}, \quad \zeta \in \omega, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

либо пустое, либо состоит из конечного или счетного числа точек. Пусть Ω_1 – дополнение $\omega_0 \bigcup \omega_1$ до расширенной комплексной плоскости (Ω_1 – область комплексной плоскости, содержащая кольцо G_0).

Лемма 2. *Функция $\Psi_0(z)$ аналитически продолжается через дуги γ_0 и I_0 в область Ω_1.*

Доказательство. Согласно принципу симметрии аналитического продолжения (см. [1], стр. 158) функция $\Psi_0(z)$ аналитически продолжается через γ_0 и I_0 в кольца G_1 и G_{-1} по формуле

$$\Psi_0(z) = \left[\overline{\Psi_0\left(\frac{R_0^2}{\bar{z}}\right)} \right]^{-1}, \qquad z \in G_1 \bigcup \gamma_0, \tag{1.8}$$

$$\Psi_0(z) = \left[\overline{\Psi_0\left(\frac{r_0^2}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1}, \qquad z \in G_{-1} \bigcup I_0. \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что функция $\Psi_0(z)$ аналитична в $G_0 \bigcup G_1 \bigcup G_{-1} \bigcup I_0 \bigcup \gamma_0$ за исключением множества

$$\left\{z:\ z = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}} \frac{1}{\bar{\zeta}}, \quad \zeta \in \omega, \qquad k = 0, 1\right\}.$$

Из (1.7), (1.8) и (1.9) следует, что $|\Psi_0(z)| = 1$ при $z \in I_{-1} \bigcup \gamma_1$. Аналогично мы докажем справедливость леммы 2.

Пусть G_0 – кольцо (1.3), а γ_0 и I_0 – окружности $|z| = R_0$ и $|z| = r_0$ без точек $z = R_0$ и $z = r_0$, соответственно, и пусть $\Psi(z)$ аналитична в кольце G_0, непрерывна в $G_0 \bigcup I_0 \bigcup \gamma_0$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \gamma_0 \bigcup I_0,$$

$$\lim_{z \to r_0} \Psi(z)\,(z - r_0) = c_{-1}, \qquad \lim_{z \to R_0} \Psi(z)\,(z - R_0) = c_0, \quad z \in G_0, \tag{1.10}$$

где c_{-1} и c_0 – заданные вещественные постоянные. Пусть

$$c_k = \begin{cases} c_0 \dfrac{R_0^k}{r_0^k} & \text{при} \quad k = 0, 2, \dots, \\ c_{-1} \dfrac{R_0^{k+1}}{r_0^{k+1}} & \text{при} \quad k = 1, 3, \dots. \end{cases} \tag{1.11}$$

Лемма 3. *Функция $\Psi(z)$ аналитически продолжается через контур I_0 вне окружности $|z| = R_0$ кроме множества точек*

$$z_k = \frac{R_0^{k+1}}{r_0^k}, \quad k = 0, 1, 2\dots \tag{1.12}$$

и бесконечно удаленной точки. Существует предел

$$\lim_{z \to z_k} \Psi(z)\,(z - z_k) = c_k, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{1.13}$$

где c_k определяются формулами (1.11).

Доказательство. Первая часть утверждения леммы 3 следует из леммы 1. Теперь докажем справедливость равенства (1.13). При $k = 0$ это равенство седует из (1.5) и второго условия в (1.10). Теперь докажем равенство (1.13) при

$k = 2m$, где m – натуральное число. Из принципа симметрии аналитического продолжения (см. доказательство леммы 1)

$$\operatorname{Re}\Psi(z) = 0 \quad \text{при} \quad |z| = z_m, \quad z \neq z_m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

$$\text{и} \quad \Psi(z) = -\overline{\Psi\left(z_m^2/\overline{z}\right)} \quad \text{при} \quad z_m < |z| < \frac{z_m^2}{r_0}.$$

Следовательно

$$\lim_{z \to z_{2m}} \Psi(z)\,(z - z_{2m}) = -\lim_{z \to z_{2m}} \overline{\Psi\left(z_m^2/\overline{z}\right)}\,(z - z_{2m}). \tag{1.14}$$

Из (1.12) следует

$$\frac{z_m^2}{\overline{z}} \to \frac{z_m^2}{z_{2m}} = R_0 \quad \text{при} \quad z \to z_{2m}.$$

Поэтому из (1.13) при $k = 0$ имеем

$$\lim_{z \to z_{2m}} \Psi\left(z_m^2/\overline{z}\right)\left(\frac{z_m^2}{\overline{z}} - R_0\right) = c_0. \tag{1.15}$$

Так как c_0 и z_m вещественны, то из (1.15) получаем

$$\lim_{z \to z_{2m}} \overline{\Psi\left(z_m^2/\overline{z}\right)}\left(\frac{z_m^2}{R_0} - z\right)\frac{R_0}{z} = c_0. \tag{1.16}$$

Из (1.12) имеем

$$\frac{z_m^2}{R_0} = z_{2m}. \tag{1.17}$$

Из (1.14), (1.16) и (1.17) следует равенство (1.13) при $k = 2m$. Это равенство при $k = 2m + 1$ доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

Пусть $\Psi_0(z)$ аналитична в кольце G_0 (см. (1.3)), непрерывна в замыкании G_0 и удовлетворяет условиям

$$|\Psi_0(z)| = 1 \quad \text{при} \quad |z| = r_0 \quad \text{и} \quad |z| = R_0,$$

$$\Psi_0(z_0) = 0, \quad \Psi_0(\overline{z_0}) = 0, \quad \Psi_0'(z_0) = c_0, \quad \Psi_0'(\overline{z_0}) = \overline{c_0},$$

$$\Psi_0(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in G_0, \quad z \neq z_0, \overline{z_0},$$

где $z_0 \in G_0$ – фиксированная точка, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, а c_0 – постоянная, не равная нулю.

Пусть

$$z_k = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}\,\overline{z_0}}, \qquad a_k = -\frac{R_0^{2k}}{\overline{c_0}\,r_0^{2k-2}\,\overline{z_0}^{\,2}}.$$

Лемма 4. *Функция $\Psi_0(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R_0$ в область $|z| > R_0$ за исключением точек*

$$z = z_k, \quad z = \overline{z_k}, \quad k = 1, 2...$$

и бесконечно удаленной точки. Имеют место равенства

$$\lim_{z \to z_k} \Psi_0(z)(z - z_k) = a_k, \qquad \lim_{z \to \overline{z}_k} \Psi_0(z)(z - \overline{z_k}) = \overline{a_k}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Первая часть утверждения следует из леммы 2. Теперь докажем справедливость равенства (1.18). Из принципа симметрии аналитического продолжения следует, что

$$|\Psi_0(z)| = 1 \quad \text{при} \quad |z| = \rho_k, \qquad k = 0, 1, ...,$$

$$\Psi_0(z) = \left[\overline{\Psi_0(\rho_k^2/\overline{z})}\right]^{-1} \quad \text{при} \quad \rho_k < |z| < \frac{\rho_k^2}{r_0}, \quad k = 0, 1, ..., \tag{1.19}$$

где $\rho_k = R_0^{k+1} r_0^{-k}$. Остается использовать доказательство равенства (1.13). Лемма 4 доказана.

Пусть $\varphi(z)$ – аналитическая функция в области $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ и

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z)(z - z_0) = c_0, \tag{1.20}$$

где ε, z_0, c_0 – некоторые постоянные, $\varepsilon > 0$, $c_0 \neq 0$.

Пусть, далле, функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ аналитичны в окрестности ζ_0 и бесконенчо удаленной точки, соотвественно, и удовлетворяют условиям

$$\delta_1(\zeta_0) = z_0, \quad \delta_1'(\zeta_0) \neq 0, \tag{1.21}$$

$$\delta_2(\zeta) \to z_0, \quad (\delta_2(z) - z_0)\, z \to c_1 \neq 0 \quad \text{при} \quad |z| \to +\infty. \tag{1.22}$$

Лемма 5. *Имеют место равенства*

$$\lim_{z \to \zeta_0} \varphi(\delta_1(z))(z - \zeta_0) = \frac{c_0}{\delta_1'(\zeta_0)}, \quad \lim_{|z| \to \infty} \frac{\varphi(\delta_2(z))}{z} = \frac{c_0}{c_1}.$$

Доказательство непосредственно следует из равенств (1.20) — (1.22).

Пусть D – область, рассмотренная во введении, и пусть $\zeta = \varphi(z)$ – функция, отображающая область D на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{z\to a} |\varphi(z)| = +\infty, \qquad z \in D. \tag{1.23}$$

Пусть, далее, $\Psi(z)$ – аналитична в D, непрерывна в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$ и удопвлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}\Psi(z) = -\operatorname{Re}\frac{1}{a-\bar z}, \qquad z \in \Gamma, \tag{1.24}$$

$$\operatorname{Im}\Psi(b) = 0, \tag{1.25}$$

$$2a = R + d + \frac{1}{R+d}, \qquad 2b = -R + d + \frac{1}{d-R}. \tag{1.26}$$

Лемма 6.

$$\varphi(z) = c_0\left(\frac{1}{a-z} + \Psi(z)\right) + ic_1, \tag{1.27}$$

где $c_0 > 0$ и c_1 – вещественные постоянные.

Доказательство. Так как $\operatorname{Re}(a-z)^{-1}$ непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то задача (1.24), (1,25) имеет единственное решение (см. [3], стр. 245).

Как показано в [1], стр. 113, $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \varphi_1(\varphi_0(z)), \tag{1.28}$$

где $t = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на круг $|t| < 1$ и $\varphi_0(a) = 1$, а $\zeta = \varphi_1(t)$ конформно отображает круг $|t| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и

$$\lim_{t\to 1} |\varphi(t)| = +\infty, \qquad |t| < 1.$$

Известно (см. [1], стр. 137, 163), что функция $\varphi_1(t)$ дробно–линейная, а $\varphi_0(z)$ аналитична в окрестности контура Γ и $\varphi_0'(z) \neq 0$ при $z \in D\bigcup\Gamma$. Поэтому из (1.28) следует, что функция $\varphi(z)$ представляется в виде

$$\varphi(z) = \frac{c_0}{a-z} + \Psi_1(z), \tag{1.29}$$

где $\Psi_1(z)$ аналитична в D и непрерывна в $D\bigcup\Gamma$, а $c_0 \neq 0$ – некоторая постоянная.

Ясно, что

$$\operatorname{Re}\varphi(z) = 0, \qquad z \in \Gamma, \quad z \neq a, \tag{1.30}$$

$$\operatorname{Re}\varphi(z) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < a. \tag{1.31}$$

Из (1.30) и (1.31) следует, что в представлении (1.29) постоянная c_0 положительна. Подставляя $\varphi(z)$ из (1.29) в (1.30), получим

$$\operatorname{Re}\Psi_1(z) = -c_0 \operatorname{Re}\frac{1}{a-z}, \qquad z \in \Gamma, \quad z \neq a. \tag{1.32}$$

Так как левые и правые части (1.32) непрерывны на Γ, то равенство (1.32) имеет место также и в точке $z = a$. Из (1.24) и (1.32) имеем $\operatorname{Re}[\Psi_1(z) - c_0\,\Psi(z)] = 0$ при $z \in \Gamma$. Поэтому (см. [3], стр. 174) мы можем написать

$$\Psi_1(z) = c_0\,\Psi(z) + i\,c_1, \tag{1.33}$$

где c_1 – некоторая вещественная постоянная.

Подставляя $\Psi_1(z)$ из (1.33) в (1.29), получаем (1.27). Таким образом, функция $\varphi(z)$ представляется в виде (1.27), где $c_0 > 0$ и c_1 – некоторые постоянные. Из (1.27) имеем

$$\frac{1}{a-z} + \Psi(z) = \frac{\varphi(z)}{c_0} - i\,\frac{c_1}{c_0}. \tag{1.34}$$

Так как $\varphi(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и $c_0 > 0$, то из (1.34) следует, что функция $\zeta = (a-z)^{-1} + \Psi(z)$ также конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Поэтому любая функция вида (1.27) – также конформно отображающая функция. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Существует единственная конформно отображающая функция $\zeta = \varphi(z)$ области D на полуплоскость $Re\,\zeta > 0$, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{z\to a}\varphi(z)\,(z-a) = 1, \qquad \varphi(b) = 0, \tag{1.35}$$

она определяется формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{z-a} + \Psi(z),$$

где $\Psi(z)$ решение задачи (1.24), (1.25).

Доказательство. Подставляя $z = b$ в (1.24), получим $\operatorname{Re}\Psi(b) = -(a-b)^{-1}$. Отсюда и из (1.25) имеем

$$\Psi(b) = -\frac{1}{a-b}. \tag{1.36}$$

Согласно лемме 6 функция вида (1.27) конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Подставляя $\varphi(z)$ из (1.27) в (1.35) и используя (1.36), получим $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Лемма 7 доказана.

Пусть D_0 – область, ограниченная окружностями

$$|z + d_1| = \mu_0 \quad \text{и} \quad |z - d_2| = \nu_0, \tag{1.37}$$

где

$$d_1 \geq 0, \quad d_2 \geq 0, \quad d_1 + d_2 > 0, \quad \nu_0 > \mu_0 + d_1 + d_2. \tag{1.38}$$

Обозначим

$$d_3 = d_1 + d_2, \quad x_2 = \frac{\nu_0^2 - \mu_0^2 + d_3^2 + \sqrt{(\nu_0^2 - \mu_0^2 + d_3^2)^2 - 4\,\nu_0\,d_3}}{2\,d_3},$$

$$x_0 = x_2 - d_2, \qquad x_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - \nu_0^2}, \tag{1.39}$$

$$r_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 - \mu_0 - d_1} - \frac{1}{x_0 + \mu_0 - d_1}\right], \quad R_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 - \nu_0 + d_2} - \frac{1}{x_0 + \nu_0 + d_2}\right]. \tag{1.40}$$

Из (1.38) следует, что

$$x_2 > \nu_0, \quad 0 < r_0 < R_0, \quad x_1 > R_0, \quad x_0 > \nu_0 - d_2. \tag{1.41}$$

Лемма 8. *Функция*

$$t = x_1 - \frac{1}{z + x_0} \tag{1.42}$$

отображает область D_0 на кольцо $r_0 < |t| < R_0$.

Доказательство. Пусть $x_0 > \nu_0 - d_2$. Тогда функция (1.42) аналитична в области D_0. Образы окружностей (1.37) являются окружностями с центрами

$$t_1 = x_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 - \mu_0 - d_1} + \frac{1}{x_0 + \mu_0 - d_1}\right],$$

$$t_2 = x_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 - \nu_0 + d_2} + \frac{1}{x_0 + \nu_0 + d_2}\right],$$

где r_0 и R_0 определяются формулами (1.40). Мы берем x_0 и x_1 так, чтобы

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = 0. \tag{1.43}$$

Из условия (1.43) получаем формулу (1.39). Лемма 8 доказана.

Система контуров $\{\Gamma_n\}$ называется правильной, если

1) существует фиксированная точка a_0, находящаяся во внутренности каждого контура Γ_n ;

2) каждый контур Γ_n содержится в области, ограниченной контуром Γ_{n-1} ;

3) расстояние $d_n = \operatorname{dist}(a_0, \Gamma_n)$ и длина s_n контура Γ_n стремятся к нулю при $n \to \infty$ и $s_n/d_n \le A$.

Лемма 9. *Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в комлексной плоскости кроме счетного числа полюсов z_n $(n = 1, 2, ...)$ и точки a_0, причем $z_n \to a_0$ при $n \to \infty$ и $f(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Если для некоторой правильной системы контуров $\{\Gamma_n\}$ функция $f(z)$ равномерно ограничена на $\{\Gamma_n\}$, то она представляется в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n(z), \tag{1.44}$$

где $g_n(z)$ – главные части $f(z)$ в полюсах z_n. Ряд в (1.44) равномерно сходится в каждой области, не содержащей z_1, z_2,... и малую окрестность точки a_0.

Доказательство. В случае, когда функция $f(z)$ мероморфна, т.е. $|z_n| \to +\infty$ при $n \to +\infty$, аналогичная теорема доказана в [1], стр. 426.

§2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПСООБРАЗНЫЕ ДУГИ

1. В этом параграфе контуры Γ, γ и область D те же, что и во введении $(d > 0)$. Пусть $\varphi(z)$ - аналитическая в D функция, непрерывная в $D \bigcup \Gamma$ и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Re}\varphi(z) = 0, \qquad z \in \gamma. \tag{2.1}$$

В этом параграфе мы описываем область аналитического продолжения через аналитическую дугу γ. Рассмотрим образ окружности (1.1) при отображении $\tau = t^{-1}$:

$$|\tau + d_0| = \rho_0, \tag{2.2}$$

где

$$d_0 = \frac{d}{R^2 - d^2}, \qquad \rho_0 = \frac{R}{R^2 - d^2}. \tag{2.3}$$

Пусть D_0 – область, ограниченная окружностями (1.1) и (2.2). Поскольку $d > 0$, $R > 1 + d$, $\rho_0 > d_0$, то точка $t = 0$ не принадлежит D_0. Поэтому функция Жуковского $\alpha_1(t)$ аналитична в D_0 и $z = \alpha_1(t)$ отображает D_0 на D. Следовательно, функция

$$\Psi(t) \equiv \varphi(\alpha_1(t)), \qquad t \in D_0 \tag{2.4}$$

аналитична в области D_0.

Известно (см. [1]), что функция Жуковского (1.2) конформно отображает внешность круга $|z| = 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$. Обратное отображение

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} \equiv \beta_1(z), \tag{2.5}$$

где $\sqrt{z^2 - 1}$ – непрерывная ветвь этого корня вне отрезка $[-1, 1]$, принимающая положительные значения при $z = x > 1$. Функция (2.5) конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность круга $|t| = 1$.

Пусть $\widetilde{\gamma}$ – образ γ, а $\widetilde{l}$ – образ $\widetilde{\gamma}$ при отображениях $t = \beta_1(z)$ и $\tau = t^{-1}$, соответственно. Дуги $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{l}$ являются открытыми. Из (2.1) следует, что

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = 0, \qquad t \in \widetilde{\gamma} \bigcup \widetilde{l}. \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} d_3 = d + d_0, \quad x_0 = x_2 - d, \quad x_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - R^2}, \\ x_2 = \frac{R^2 - \rho^2 + d_3^2 + \sqrt{(R^2 - \rho^2 + d_3^2)^2 - 4R^2 d_3}}{2d_3}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$r_0 = \frac{\rho_0}{(x_0 - d_0)^2 - \rho_0^2}, \qquad R_0 = \frac{R}{(x_0 + d)^2 - R^2}. \tag{2.8}$$

Как и в (1.41), мы можем показать, что

$$x_2 > R, \quad 0 < r_0 < R_0, \quad x_1 > R_0, \quad x_0 > R - d. \tag{2.9}$$

Согласно лемме 8 функция

$$\tau = x_1 - \frac{1}{t + x_0} \equiv \beta_2(t) \tag{2.10}$$

конформно отображает область D_0 на кольцо (1.3). Пусть открытые дуги γ_0 и I_0 являются образами $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{l}$ при отображении $\tau = \beta_2(t)$. Из (2.10) имеем

$$t = \frac{1}{x_1 - \tau} - x_0 \equiv \alpha_2(\tau). \tag{2.11}$$

Функция

$$\Psi_0(\tau) = \Psi(\alpha_2(\tau)) \tag{2.12}$$

аналитична в кольце (1.3) и непрерывна в $G_0 \bigcup \gamma_0 \bigcup I_0$. Из (2.6) имеем, что $\operatorname{Re}\Psi_0(\tau) = 0$ при $z \in \gamma_0 \bigcup I_0$.

Пусть r_0 и R_0 определены формулами (2.8), а γ_k, I_k, Γ_k и L_k – контуры и Ω_0 – область, построенные в начале §1. Согласно лемме 1 $\Psi_0(\tau)$ имеет аналитическое продолжение через дуги γ_0 и I_0 в Ω_0. Обозначим

$$\alpha(\tau) = \alpha_1(\alpha_2(\tau)), \qquad \beta(z) = \beta_2(\beta_1(z)), \tag{2.13}$$

где $\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$, $\beta_1(z)$ и $\beta_2(z)$ определяются формулами (1.2), (2.11), (2.5) и (2.10). Так как $R > 1 + d$, $d > 0$, то $|t| > 1$, $|t^{-1}| < 1$ при $|t - d| = R$. Поэтому окружность (1.1) лежит во внешности, а (2.2) – во внутренности окружности $|t| = 1$. Следовательно, окружность $|t| = 1$ содержится в D_0. Обозначим через δ образ окружности $|t| = 1$ при отображении $\tau = \beta_2(t)$. Ясно, что δ – окружность в кольце (1.3).

Функция $z = \alpha(\tau)$ и $\tau = \beta(z)$ конформно отображает внешность кольца δ на внешность отрезка $[-1, 1]$, а обратное отображение $\tau = \beta(z)$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность окружности δ.

Из определения контуров Γ_k и L_k следует, что

$$|\tau| = \frac{R_0^{2k+1}}{r_0^{2k}} \quad \text{при} \quad \tau \in \Gamma_k, \tag{2.14}$$

$$|\tau| = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-1}} \quad \text{при} \quad \tau \in L_k. \tag{2.15}$$

Следовтаельно, контуры Γ_k и L_j при $k = 0, 1, ..., j = 1, 2, ...$ находятся вне, а при $k = -1, -2, ..., j = 0, -1, ...$ – внутри окружности δ.

Пусть $\widetilde{\Gamma_k}$ и $\widetilde{L_j}$ – образы Γ_k и L_j $(k = 0, 1, ..., j = 1, 2, ...)$ при отображении $z = \alpha(\tau)$. Контуры $\widetilde{\Gamma_k}$ и $\widetilde{L_j}$ при $k = 0, 1, ..., j = 1, 2, ...$ принадлежат внешности Γ. Из (2.13), (2.14) и (2.15) следует, что при $k \to \infty$ контуры $\widetilde{\Gamma_k}$ и $\widetilde{L_j}$ стягиваются к точке

$$a_0 = -\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right). \tag{2.16}$$

Так как $x_0 > R - d$, то точки $-x_0$ и a_0 находятся во внешности окружности (1.1) и Γ, соответственно. Следовательно, функция

$$\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z)) \tag{2.17}$$

аналитична вне отрезка $[-1, 1]$ кроме, быть может, совокупности контуров $\widetilde{\Gamma_k}$ и $\widetilde{L_j}$ $(k = 0, 1, ..., j = 1, 2, ...)$ и точки a_0. Из (2.4), (2.12) и (2.17) имеем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) \quad \text{при} \quad z \in D. \tag{2.18}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. *Если $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в $D \bigcup \gamma$ и удовлетворяет условию (2.1), то она по формуле (2.18) аналитически продолжается через γ всюду в комплексную плоскость, за исключением, быть может, совокупности контуров $\widetilde{\Gamma_k}$ и $\widetilde{L_j}$ при $k = 0, 1, ..., j = 1, 2, ...$ и точки a_0.*

2. Пусть теперь условие (2.1) заменено условием

$$|\varphi(z)| = 1, \qquad z \in \gamma. \tag{2.19}$$

Рассмотрим множетсва

$$\omega_1 = \{z: \quad \varphi(z) = 0,\ z \in D\}, \qquad \omega_2 = \{t: \quad t = z \pm \sqrt{z^2 - 1},\ t \in \omega_1\},$$

$$\omega_3 = \{\tau: \quad \tau = \beta_2(t),\ t \in \omega_2\}, \qquad \omega_4 = \{\zeta: \quad \zeta = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k}\,\overline{\tau}},\ \tau \in \omega_3,\ k = 1, 2, ...\},$$

$$\omega_5 = \{z: \quad z = \alpha(\zeta),\ \zeta \in \omega_4\}.$$

Если функция $\varphi(z)$ не имеет нулей в D, то все множества $\omega_j = \emptyset$. Если в области D функция $\varphi(z)$ имеет конечное число нулей, то множетсва ω_1, ω_2 и ω_3 содержат конечное, а множества ω_4 и ω_5 – счетное число точек.

Пусть Ω – объединение множеств $(\widetilde{\Gamma_k})^c \cap (\widetilde{L_j})^c$ при $k = 0, 1, ..., j = 1, 2, ...$ и $(\omega_5)^c \cap (a_0)^c$, где $(.)^c$ обозначает дополнение в расширенной комплексной плоскости.

Теорема 2. *Если $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в $D \bigcup \gamma$ и удовлетворяет условию (2.19), то она аналитически продолжается в область Ω.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, с той лишь разницей, что вместо леммы 1 нужно использовать лемму 2.

§3. ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ И ОТОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИПСА НА КРУГ

Образ Γ окружности $|t| = R$, $R > 1$ при отображении Жуковского (1.2) является эллипсом с фокусами в $z = \pm 1$. Изменяя R от 1 до ∞, мы получим всевозможные эллипсы с фокусами $z = \pm 1$.

Не ограничивая общности, мы будем рассматривать только эллипсы с фокусами $z = \pm 1$.

Пусть $\varphi(z)$ конформно отображает внутренность D эллипса Γ на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(z_0) = 0, \qquad \varphi'(z_0) > 0, \tag{3.1}$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка из D.

В книге [1] (стр. 170) $\varphi(z)$ представлена через суперпозицию элементарных функций и эллиптические интегралы. В случае, когда точка z_0 совпадает с центром эллипса, в [2], $\varphi(z)$ разложена на простейшие дроби вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z_0 - z_k} \right), \tag{3.2}$$

где $c_k \neq 0$, точки z_k лежат вне Γ и $|z_k| \to +\infty$ при $k \to \infty$. Ряд (3.2) сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек z_1, z_2,... . Для произвольной точки z_0 метод, приведенный в [2], существенно осложняется.

Поэтому мы разлагаем $\varphi(z)$ на простейшие дроби для произвольной точки z_0 другим методом.

Разложение $\varphi(z)$ на простейшие дроби существенно зависит от z_0. Если z_0 не совпадает с каким-либо фокусом эллипса, то $\varphi(z)$ имеет вид (3.2), где полюсы z_k $(k = 1, 2, \ldots)$ зависят не только от параметров эллипса, но и от точки z_0. Если z_0 совпадает с одним из фокусов эллипса, то функция $\varphi(z)$ разлагается в ряд вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} \left(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z_0 - z_k} \right) + c_{2k} \left(\frac{1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{(z_0 - z_k)^2} \right) \right],$$

где $c_{2k} \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $|z_k| \to +\infty$ при $k \to \infty$ и характер сходимости этого ряда такой же, что и у ряда (3.2).

Это означает, что конформно отображающая функция $\varphi(z)$ является мероморфной функцией со счетным числом полюсов. Все они являются полюсами второго порядка, если z_0 совпадает с одним из фокусов, и простыми полюсами – противном случае.

Пусть $\Psi(t)$ аналитична в окрестности $t = 1$ и удовлетворяет условию

$$\Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0, \quad \Psi''(1) = 2\,c_2 \neq 0, \quad \Psi'''(1) = 6\,c_3. \tag{3.3}$$

Пусть

$$\Psi_0(t) = \left[\overline{\Psi\left(\frac{\rho^2}{\bar{t}} \right)} \right]^{-1}, \tag{3.4}$$

где ρ – некоторая положительная постоянная.

Из (3.3) и (3.4) следует, что ρ^2 – полюс второго порядка для функции $\Psi_0(t)$.

Лемма 10. *Главная часть $g(t)$ функции $\Psi_0(t)$ в точке ρ^2 определяется формулой*

$$g(t) = \frac{\rho^4}{c_2\,(t - \rho^2)^2} + \frac{(2c_2 + c_3)\,\rho^2}{c_2^2\,(t - \rho^2)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Согласно условиям (3.3) в окрестности $t = 1$

$$\Psi(t) = c_2\,(t-1)^2 + c_3\,(t-1)^3 + (t-1)^4\,\Psi_1(t), \tag{3.6}$$

где $\Psi_1(t)$ аналитична в окрестности $t = 1$.

Если z изменяется в окрестности ρ^2, то $\rho^2(\overline{z})^{-1}$ изменяется в окрестности 1. Поэтому из (3.6) мы имеем

$$\overline{\Psi(\rho^2/\overline{t})} = c_2\left(\frac{\rho^2}{t}-1\right)^2 + c_3\left(\frac{\rho^2}{t}-1\right)^3 + \left(\frac{\rho^2}{t}-1\right)^4\overline{\Psi_1(\rho^2/\overline{t})} \qquad (3.7)$$

при $|t-\rho^2| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно мало. Из (3.4) и (3.7) следует справедливость формулы (3.5). Лемма 10 доказана.

Пусть функция $\Phi(t)$ аналитична в окрестности $t_0 \neq 0$ и удовлетворяет условию

$$\Phi(t_0) = 0, \qquad \Phi'(t_0) = c_0, \qquad (3.8)$$

где $c_0 \neq 0$ – некоторая комплексная постоянная.

Пусть для некоторой положительной постоянной ρ

$$\Phi_0(t) = \left[\overline{\Phi\left(\frac{\rho^2}{\overline{t}}\right)}\right]^{-1}. \qquad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что точка $\zeta_0 = \rho^2/\overline{t}_0$ является простым полюсом функции $\Phi_0(t)$.

Лемма 11. *Главная часть $g_0(t)$ функции $\Phi_0(t)$ в точке ζ_0 определяется формулой*

$$g_0(t) = -\frac{\rho^2}{\overline{c}_0\,\overline{t}_0\,(t-\zeta_0)}.$$

Доказательсвто аналогично доказательсвту леммы 10.

Пусть функция $\Psi_1(t)$ аналитична в окрестности точки t_0 ($|t_0| > 1$) кроме точки t_0 и главная часть $g_1(t)$ функции $\Psi_1(t)$ в точке t_0 определяется формулой

$$g_1(t) = \frac{c_{-1}}{t-t_0} + \frac{c_{-2}}{(t-t_0)^2}, \qquad (3.10)$$

где c_{-1} и c_{-2} – некоторые постоянные, $|c_{-1}| + |c_{-2}| \neq 0$.

Пусть

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(t_0 + \frac{1}{t_0}\right).$$

Так как $|t_0| > 1$, то точка z_0 находится во внешности отрезка $[-1,1]$ и $\beta_1(z_0) = t_0$ (см. (2.5)). Поэтому точка z_0 является изолированной особой точкой для функции $\Psi_1(\beta_1(z))$.

Лемма 12. *Главная часть* $g_2(t)$ *функции* $\Psi_1(\beta_1(z))$ *в точке* z_0 *определяется формулой*

$$g_2(t) = \frac{c_1}{z - z_0} + \frac{c_2}{(z - z_0)^2},$$

где

$$c_1 = \frac{c_{-1}\sqrt{z_0^2 - 1}}{t_0} + \frac{c_{-2}}{t_0^3}, \qquad c_2 = \frac{c_{-2}\,(z_0^2 - 1)}{t_0^2}.$$

Доказательство. Так как $\beta_1(z_0) = t_0$, то из (2.5) имеем

$$(\beta_1(z) - t_0)^{-1} = (\beta_1(z) - \beta_1(z_0))^{-1} = \frac{\Psi_2(z)}{z - z_0}, \tag{3.11}$$

$$\Psi_2(z) = \left[1 + \frac{z + z_0}{\sqrt{z^2 - 1} + \sqrt{z_0^2 - 1}}\right]^{-1}.$$

Ясно, что функция $\Psi_2(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 и

$$\Psi_2(z) = \Psi_2(z_0) + \Psi_2'(z_0)\,(z - z_0) + \Psi_3(z)\,(z - z_0)^2, \tag{3.12}$$

где

$$\Psi_2(z_0) = \frac{\sqrt{z_0^2 - 1}}{t_0}, \qquad \Psi_2'(z_0) = \frac{1}{2\,t_0^2\sqrt{z_0^2 - 1}}, \tag{3.13}$$

а $\Psi_3(z)$ аналитична в окрестности точки z_0. Из (3.10) имеем

$$\Psi_1(t) = \frac{c_{-1}}{t - t_0} + \frac{c_{-2}}{(t - t_0)^2} + \Psi_4(t), \tag{3.14}$$

где $\Psi_4(z)$ аналитична в окрестности точки t_0.

Если точка z изменяется в окрестности точки z_0 $(z \neq z_0)$, то $\beta_1(z)$ изменяется в окрестности точки t_0 $(\beta_1(z) \neq t_0)$. Поэтому, из (3.14) имеем

$$\Psi_1(\beta_1(z)) = \frac{c_{-1}}{\beta_1(z) - t_0} + \frac{c_{-2}}{(\beta_1(z) - t_0)^2} + \Psi_4(\beta_1(z)), \tag{3.15}$$

где функция $\Psi_4(\beta_1(z))$ аналитична в окрестности точки z_0.

Из соотношений (3.11) — (3.13) и (3.15) следует справедливость леммы 12.

Пусть $\varphi(t)$ аналитична в кольце

$$R^{-1} < |t| < R, \qquad R > 1 \tag{3.16}$$

и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &|\varphi(1)| = 0, \quad |\varphi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R, \\ &\text{и} \quad |t| = R^{-1}, \quad |\varphi(t)| \neq 0 \quad \text{при} \quad t \neq 1, \quad R^{-1} \leq |t| \leq R. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Обозначим через G_k кольцо

$$R^{2k-1} < |t| < R^{2k+1}, \qquad k = 0, 1, ..., \tag{3.18}$$

через $\overline{G}_k$ – замкнутое кольцо $R^{2k-1} \le t \le R^{2k+1}$, а через γ_k – окружност $|t| = R^{2k+1}$.

Лемма 13. *Функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| =$. во внешность этой окружности за исключением точек $t_k = R^{4k-2}$, $k = 1, 2, ..$ причем аналитическое продолжение осуществляется функцией*

$$\varphi(z) = \varphi(z\, R^{-2k}) \quad \textit{при} \quad z \in \overline{G}_k, \quad k = 0, 2, 4, ..., \tag{3.19}$$

$$\varphi(z) = \left[\overline{\varphi(R^{2k}/\overline{z})}\right]^{-1} \quad \textit{при} \quad z \in \overline{G}_k, \quad k = 1, 3, ... \tag{3.20}$$

Доказательство. Согласно принципу симметрии аналитического продолжени (см. [1], стр. 158) (3.20) при $k = 1$ представляет собой аналитическое продолжени функции $\varphi(z)$ через окружность $|z| = R$ в кольцо G_1. Из (3.17) и (3.20) следует что при $k = 1$ функция $\varphi(z)$ аналитична в $G_0 \bigcup \gamma_0 \bigcup G_1$ за исключением точк $z = R^2$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} |\varphi(z)| = 1 \quad \text{при} \quad |z| = R^3, \\ |\varphi(z)| \ne 0 \quad \text{при} \quad z \in \overline{G}_1, \quad z \ne R^2, \quad \lim_{z \to R^2} |\varphi(z)| \to +\infty. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Из (3.21) следует, что функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R^3$ в кольцо G_2 по формуле

$$\varphi(z) = \left[\overline{\varphi(R^6/\overline{z})}\right]^{-1}, \quad z \in G_2. \tag{3.22}$$

Пусть $z \in G_2$. Тогда $R^6 z^{-1} \in G_1$. Подставляя $R^6 z^{-1}$ в (3.20) (при $k = 1$) вместо z, получим

$$\overline{\varphi(R^6/\overline{z})} = \left[\varphi(z\, R^{-4})\right]^{-1}, \qquad z \in G_2. \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) получим формулу (3.19) при $k = 2$. Аналогично мы докажем справедливость леммы 13.

Пусть функция $\Psi(t)$ аналитична в кольце (3.16), непрерывна в замкнутом кольце $\overline{G}_0$ и удовлетворяет условиям

$$|\Psi(t_{10})| = 0, \quad |\Psi(t_{20})| = 0, \quad |\Psi(t)| = 1 \text{ при } |t| = R \quad \text{и} \quad |t| = R^{-1},$$

$$|\Psi(t)| \ne 0 \text{ при } t \ne t_{10}, t_{20} \text{ и } R^{-1} \le |t| \le R,$$

где t_{10} и t_{20} – фиксированные точки в кольце (3.16). Пусть G_k – кольцо (3.18).

Лемма 14. *Функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|t| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек*

$$t_{1k} = \frac{R^{4k-2}}{\bar{t}_{10}}, \qquad t_{2k} = \frac{R^{4k-2}}{\bar{t}_{20}}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

причем аналитическое продолжение осуществляется по формулам (3.19) и (3.20).

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

Пусть функция $\Psi(t)$ аналитична в кольце $G_0 : r_0 < t < R_0$, непрерывна в замкнутом кольце $\overline{G}_0$ и удовлетворяет условиям

$$\Psi(t) = 1 \quad \text{при} \quad |t| = r_0, \quad |t| = R_0 \quad \text{и} \quad \Psi(t_0) = 0, \quad \Psi'(t_0) = 0,$$

$$\Psi''(t_0) = 2\mu_2, \quad \Psi'''(t_0) = 6\mu_3, \quad \Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in G_0, \quad t \neq t_0,$$

где $t_0 \in G_0$, $\operatorname{Im} t_0 = 0$, а $\mu_2 \neq 0$, μ_3 – вещественные постоянные.

Аналогично леммам 10 и 13 доказывается

Лемма 15. *Функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|t| = R_0$ во внешность этой окружности $|t| > R_0$ за исключением точек $t_k = R_0^{2k} r_0^{-2k+2} t_0^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Главная часть $g_k(t)$ этой функции в точке t_k определяется формулой*

$$g_k(t) = \frac{c_{k1}}{t - t_k} + \frac{c_{k2}}{(t - t_k)^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$c_{k1} = \frac{2t_k\mu_2 + t_k\mu_1 t_0}{\mu_2^2 t_0^2}, \qquad c_{k2} = \frac{t_k^2}{\mu_2 t_0^2}.$$

Пусть $\Psi(t)$ аналитична в окрестности точки $t = \rho$ (без этой точки), а главная часть $g(t)$ функции $\Psi(t)$ в точке $t = \rho$ определяется формулой

$$g(t) = \frac{c_1}{t - \rho} + \frac{c_2}{(t - \rho)^2}, \tag{3.24}$$

где c_1 и $c_2 \neq 0$ – постоянные.

Пусть $\alpha_0(z)$ и $\delta_0(z)$ аналитичны в окрестности точки z_0 и бесконечно удаленной точки, соответственно, и удовлетворяют условиям

$$\alpha_0(z_0) = \rho, \quad \alpha_0'(z_0) \neq 0, \quad \lim_{|z| \to \infty} \delta_0(z) = \rho.$$

Пусть в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\delta_0(z) = \rho + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{\delta_1(z)}{z^3}, \tag{3.25}$$

где $c_{-1} \neq 0$ и c_{-2} – постоянные, а $\delta_1(z)$ аналитична и ограничена.

Ясно, что точка z_0 и бесконечно удаленная точка являются полюсами второго порядка для функций $\Psi(\alpha_0(z))$ и $\Psi(\delta_0(z))$, соответственно.

Лемма 16. *Главная часть $g_1(z)$ функции $\Psi(\delta_0(z))$ в бесконечно удаленной точке определяется формулой $g_1(z) = c_{11}z + c_{12}z^2$, где*

$$c_{11} = \frac{c_1}{c_{-1}} - \frac{2c_2 c_{-2}}{c_{-1}^3}, \qquad c_{12} = \frac{c_2}{c_{-1}^2}.$$

Доказательство. Согласно (3.24) имеем

$$\Psi(t) = \frac{c_1}{t-\rho} + \frac{c_2}{(t-\rho)^2} + \Psi_0(t) \qquad \text{при} \quad 0 < |t-\rho| < \varepsilon, \tag{3.26}$$

где $\Psi_0(t)$ аналитична и ограничена в окрестности точки ρ, а ε – положительное число.

Пусть точка $|z|$ изменяется в окрестности бесконенчости. Тогда $\delta_0(z)$ изменяется в окрестности ρ ($\delta_0(z) \neq \rho$), см. (3.25). Поэтому из (3.26) имеем

$$\Psi(\delta_0(z)) = \frac{c_1}{\delta_0(z)-\rho} + \frac{c_2}{(\delta_0(z)-\rho)^2} + \Psi_0(\delta_0(z)) \qquad \text{при} \quad 0 < |t-\rho| < \varepsilon, \tag{3.27}$$

где $\Psi_0(\delta_0(z))$ аналитична и ограничена в окрестности бесконечности.

Из (3.25) следует

$$\frac{c_1}{\delta_0(z)-\rho} = \frac{z}{c_{-1}} + \delta_2(z), \qquad \frac{1}{(\delta_0(z)-\rho)^2} = -\frac{2c_{-2}z}{c_{-1}^3} + \frac{z^2}{c_{-1}^2} + \delta_3(z), \tag{3.28}$$

где $\delta_2(z)$ и $\delta_3(z)$ аналитичны и ограничены в окрестности бесконечности. Из (3.27) и (3.28) следует справедливость леммы 16.

Лемма 17. *Главная часть $g_2(z)$ функции $\Psi(\alpha_0(z))$ в ее полюсе z_0 определяется формулой*

$$g_2(z) = \frac{c_{21}}{z-z_0} + \frac{c_{22}}{(z-z_0)^2},$$

где

$$c_{21} = \frac{c_1}{\alpha'(z_0)} - \frac{c_2\,\alpha''(z_0)}{(\alpha'(z_0))^3}, \qquad c_{22} = \frac{c_2}{(\alpha'(z_0))^2}.$$

Доказательство. При $\alpha_0(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ утверждение леммы 17 совпадает с утверждением леммы 12. Для произвольной функции $\alpha_0(z)$ лемма 17 доказывается аналогично.

§4. РАЗЛОЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Пусть D – внутренность эллипса Γ с фокусами $z = \pm 1$, а функция $\varphi(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(1) = 0, \tag{4.1}$$

$$\varphi'(1) > 0. \tag{4.2}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)), \tag{4.3}$$

где $\alpha_1(t)$ – функция Жуковского (см. (1.2)). Функция $\zeta = \alpha_1(t)$ отображает кольцо (3.16) на область D. Так как $\alpha_1(t)$ аналитична всюду кроме точки $t = 0$, а $\varphi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $D \bigcup \Gamma$, то функция $\Psi(t)$ аналитична в кольце (3.16) и непрерывна в ее замыкании.

Из определения $\varphi(z)$ имеем

$$|\varphi(z)| = 1 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma, \quad \varphi(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in D, \quad z \neq 1. \tag{4.4}$$

Из (4.1) — (4.4) следует

$$|\Psi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R \quad \text{и} \quad |t| = R^{-1}, \tag{4.5}$$

$$\Psi(1) = 0, \qquad \Psi'(1) = 0, \tag{4.6}$$

$$\Psi'(1) = \varphi'(1), \qquad \Psi''(1) = -3\,\varphi'(1), \tag{4.7}$$

$$\Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad R^{-1} \leq |t| \leq R, \quad t \neq 1. \tag{4.8}$$

Согласно лемме 13 функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек $t_k = R^{4k-2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как точка t_k принадлежит кольцу G_{2k-2} (см. (3.18)), то согласно формуле (3.20) имеем

$$\Psi(t) = \left[\overline{\Psi\left(\frac{R^{4k-2}}{\bar{t}}\right)}\right]^{-1} \quad \text{при} \quad |t - t_k| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon < 1$ - положительное число.

Следовательно, функция $\Psi(t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 10. В нашем случае постоянные ρ, c_2 и c_3 в лемме 10 определяются формулами

$$\rho^2 = R^{4k-2} = t_k, \qquad c_2 = \frac{1}{2}\varphi'(1), \qquad c_3 = -\frac{1}{2}\varphi'(1).$$

Поэтому, согласно (3.5), главная часть $g_k(t)$ функции $\Psi(t)$ в ее полюсах t_k определяется формулой

$$g_k(t) = \frac{2t_k^2}{\varphi'(1)(t-t_k)} + \frac{2t_k}{\varphi'(1)(t-t_k)^2}. \tag{4.9}$$

Из (4.3) имеем

$$\varphi(z) = \Psi(\beta_1(z)), \qquad z \in D, \tag{4.10}$$

где $\beta_1(z)$ определяется формулой (2.5).

Следовательно, при помощи формулы (4.10) функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается всюду в комплексную плоскость, кроме точек

$$z_k = \frac{1}{2}\left(t_k + \frac{1}{t_k}\right) = \frac{1}{2}\left(R^{4k-2} + R^{2-4k}\right), \quad k = 1, 2, ... \tag{4.11}$$

Согласно формулам (4.9), (4.10) и лемме 12 главная часть $f_k(z)$ функции $\varphi(z)$ в точке z_k определяется формулой

$$f_k(z) = \omega_k(z)\frac{1}{\varphi'(1)}, \tag{4.12}$$

где

$$\omega_k(z) = \frac{c_{1k}}{z-z_k} + \frac{c_{2k}}{(z-z_k)^2}, \tag{4.13}$$

$$c_{1k} = \frac{2}{t_k^2} + 2t_k\sqrt{z_k^2-1}, \qquad c_{2k} = \frac{2(z_k^2-1)}{t_k}.$$

Пусть γ_k ($k = 1, 2, ...$) – образ окружности $|t| = R^{2k+1}$ при отображении $z = \alpha_1(t)$. Из формул (4.5), (3.19) и (3.20) следует, что

$$|\Psi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R^{2k+1}, \quad k = 0, 1, ...,$$

$$|\varphi(z)| = |\Psi(\beta_1(z))| = 1 \quad \text{при} \quad z \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, ...$$

Применяя теорему 2 из [1] (стр. 426) и формулу (4.12), получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\varphi'(1)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\omega_k(z) - \omega_k(1)\right), \tag{4.14}$$

где $\omega_k(z)$ определяется формулой (4.13), причем ряд в (4.14) сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек z_k $(k = 1, 2, ...)$. В частности, из (4.14) следует, что функция $\varphi(z)$ мероморфна со счетным числом полюсов второго порядка z_k. Из (4.11) следует, что полюсы z_k находятся на положительной оси x и монотонно стремятся к $+\infty$ при $k \to +\infty$. Дифференцируя обе части (4.14) в точке $z = 1$, получим

$$[\varphi'(1)]^2 = A, \tag{4.15}$$

где $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k'(1)$. Отсюда следует, что

$$\varphi'(1) = \sqrt{A}. \tag{4.16}$$

Таким образом, завершается разложение на простейшие дроби (4.14).

2. Пусть $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условиям $\varphi_0(-1) = 0$ и $\varphi_0'(-1) > 0$. Легко проверить, что

$$\varphi_0(z) = -\varphi(-z). \tag{4.17}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (4.14) в (4.17), получим

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k(-z) + \omega_k(1)).$$

Таким образом, функция $\varphi_0(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ всюду в комплексную плоскость за исключением точек $-z_k$, где z_k определяются формулой (4.11). Эти точки также являются полюсами второго порядка и монотонно стремятся к $-\infty$ при $k \to +\infty$.

3. Покажем, что если точка z_0, где $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$, отлична от фокусов эллипса, то разложение на простейшие дроби существенно отличается от предыдущего случая. Пусть

$$t_{10} = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}, \qquad t_{20} = z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1} = \frac{1}{t_{10}}.$$

Если $z_0 \in [-1, 1]$, то

$$\sqrt{z_0^2 - 1} = i\sqrt{1 - z_0^2}, \qquad \sqrt{1 - z_0^2} \geq 0.$$

Так как $z_0 \in D$, $z_0 \neq +1$, то $1 < |t_{10}| < R$ и $R^{-1} < |t_{20}| < 1$. Аналогично (4.5) — (4.8) получим, что функция $\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t))$ аналитична в кольце (3.16), непрерывна в его замыкании и удовлетворяет условиям

$$|\Psi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R \quad \text{и} \quad |t| = R,$$

$$\Psi(t_{10}) = 0, \qquad \Psi(t_{20}) = 0, \tag{4.18}$$

$$\Psi'(t_{10}) = \varphi'(z_0)\left(1 - \frac{1}{t_{10}^2}\right), \qquad \Psi'(t_{20}) = \varphi'(z_0)\left(1 - \frac{1}{t_{20}^2}\right), \tag{4.19}$$

$$\Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad R^{-1} \leq |t| \leq R, \quad t \neq t_{10}, t_{20}.$$

Согласно лемме 14, функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек t_{1k} и t_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$t_{1k} = \frac{R^{4k-4}}{\bar{t}_{10}}, \qquad t_{2k} = \frac{R^{4k-4}}{\bar{t}_{20}}.$$

Поэтому аналитическое продолжение функции $\Psi(t)$ в окрестностях точек t_{1k} и t_{2k} определяется формулой

$$\Psi(t) = \left[\overline{\Psi\left(\frac{R^{4k-4}}{\bar{t}}\right)}\right]^{-1}. \tag{4.20}$$

Применяя лемму 11 для функции (4.20) и учитывая условия (4.18), (4.19), мы находим главные части функции $\Psi(t)$ в точках t_{1k} и t_{2k} :

$$g_{1k}(t) = \frac{R^{4k-4}}{\varphi'(z_0)\,(1 - \bar{t}_{10}^2)\,(t - t_{1k})}, \qquad g_{2k}(t) = \frac{R^{4k-4}}{\varphi'(z_0)\,(1 - \bar{t}_{20}^2)\,(t - t_{2k})}. \tag{4.21}$$

Следовательно, функция $\Psi(\beta_1(z))$ аналитична всюду в комплексной плоскости за исключением точек

$$z_{1k} = \frac{1}{2}\left(t_{1k} + \frac{1}{t_{1k}}\right), \qquad z_{2k} = \frac{1}{2}\left(t_{2k} + \frac{1}{t_{2k}}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.22}$$

и совпадает с $\varphi(z)$ в области D.

Согласно лемме 12 и формуле (4.21) главные части функции $\varphi(z) = \Psi(\beta_1(z))$ в точках z_{1k} и z_{2k} определяются формулами

$$f_{1k}(z) = \frac{\omega_{1k}(z)}{\varphi'(z_0)}, \qquad f_{2k}(z) = \frac{\omega_{2k}(z)}{\varphi'(z_0)}, \tag{4.23}$$

где

$$\omega_{jk}(z) = \frac{R^{4k-4}\sqrt{z_{jk}^2-1}}{(1-\bar{t}_{j0}^2 t_{jk}(z-z_{jk})}, \quad j=1,2, \quad k=1,2,.... \tag{4.24}$$

Используя (4.23), аналогично формуле (4.14) получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{k=1}^{\infty}(\omega_{1k}(z)+\omega_{2k}(z)-\omega_{1k}(z_0)-\omega_{2k}(z_0)), \tag{4.25}$$

где $\omega_{1k}(z)$ и $\omega_{2k}(z)$ определяются формулами (4.24) и

$$A = \sum_{k=1}^{\infty}(\omega_{1k}'(z_0)+\omega_{2k}'(z_0)), \qquad A > 0.$$

Ряд в (4.25) равномерно сходится в любой ограниченной области, не содержащей z_{1k} и z_{2k}. Точки z_{1k} и z_{2k} находятся вне контура Г и $|z_{1k}| \to \infty$, $|z_{2k}| \to \infty$ при $k \to +\infty$, т.е. функция $\varphi(z)$ мероморфна со счетным числом простых полюсов.

Пусть теперь условие $\varphi'(z_0) > 0$ заменено условием

$$\arg \varphi'(z_0) = \theta.$$

Тогда очевидно, что функция $\varphi(z)\exp(i\theta)$ является искомым конформным отображением, где $\varphi(z)$ – построенное выше конформное отображение при $\theta = 0$.

Таким образом, конформное отображение внутренности эллипса на круг всегда является мероморфной функцией со счетным числом простых полюсов, причем все они являются полюсами второго порядка, если отображение переводит один из фокусов эллипса в центр круга, в противном случае все полюсы простые.

4. Опишем расположение полюсов функции $\varphi(z)$. Возможны следующие случаи :

Случай 1. z_0 вещественно и $z_0 \geq 1$. Тогда все полюсы функции $\varphi(z)$ положительны.

Случай 2. z_0 вещественно и $z_0 \leq 1$. Тогда все полюсы функции $\varphi(z)$ отрицательны.

Случай 3. z_0 чисто мнимое или $z_0 = 0$. Тогда все полюсы функции $\varphi(z)$ чисто мнимые, причем существует счетное число полюсов с положительными и отрицательными мнимыми частями.

Случай 4. z_0 вещественно и $0 < z_0 < 1$, или $\operatorname{Re} z_0 > 0$ и $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Тогда полюсы функции $\varphi(z)$ находятся на правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{A_0^2} - \frac{y^2}{B_0^2} = 1, \tag{4.26}$$

где

$$A_0 = \frac{\operatorname{Re} t_0}{|t_0|^2}, \qquad B_0 = \frac{\operatorname{Im} t_0}{|t_0|^2}, \qquad t_0 = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}. \tag{4.27}$$

Случай 5. z_0 вещественно и $-1 < z_0 < 0$, или $\operatorname{Re} z_0 < 0$ и $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Тогда полюсы функции $\varphi(z)$ находятся на левой ветви гиперболы (4.26).

§5. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ

1. Пусть D – область, рассмотренная в начале работы, а Γ – ее граница ($d > 0$). Пусть, далее, $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на поуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{z\to a} \varphi(z)\,(a - z) = 1, \qquad \varphi(b) = 0, \tag{5.1}$$

где a и b определяются формулами (1.26).

Согласно лемме 7 такое конформное отображение существует и единственно. Ясно, что

$$\operatorname{Re}\varphi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma, \quad z \neq a. \tag{5.2}$$

Пусть постоянные d_0, ρ_0, x_0, x_1, r_0, R_0 и функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ определяются из равенств (2.3), (2.7), (2.8) и (2.13). Положим

$$\tau_k = \frac{R_0^{k+1}}{r_0^k}, \quad k = 0, 1, ..., \tag{5.3}$$

$$z_k = \alpha(\tau_k), \quad k = 0, 1, ... \tag{5.4}$$

Согласно теореме 1 функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается всюду в комплексной плоскости кроме последовательности точек z_k, $k = 0, 1, ...$ и точки $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$ (см. (2.16)). Докажем, что точки z_k являются простыми полюсами функции $\varphi(z)$ и напишем главные части этой функции в ее полюсах. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)), \tag{5.5}$$

где $a_1(t)$ – функция Жуковского (1.2). $\Psi(t)$ аналитична в области D_0, ограниченной окружностями (1.1) и (2.2). Из (5.5) следует, что $\Psi(t)$ непрерывна в замкнутой области D_0 кроме точек $R+d$ и $\dfrac{1}{R+d}$. Из (5.1) и (5.2) имеем

$$\operatorname{Re}\Psi(t)=0 \quad \text{при} \quad |t-d|=R \quad \text{и} \quad |t+d_0|=\rho_0, \quad t\neq(R+d), \quad \frac{1}{R+d}, \tag{5.6}$$

$$\lim_{t\to R+d}\Psi(t)\,(t-R-d)=-\frac{2\,(R+d)^2}{(R+d)^2-1}, \tag{5.7}$$

$$\lim_{t\to(R+d)^{-1}}\Psi(t)\,(t-(R+d)^{-1})=-\frac{2}{(R+d)^2-1}. \tag{5.8}$$

Пусть γ_0 и I_0 – окружности $|\tau|=R_0$ и $|\tau|=r_0$, соответственно. Согласно лемме 8 функция $t=\alpha_2(\tau)$ (см. (2.11)) конформно отображает кольцо (1.5) в область D_0, а точки $\tau=R_0$ и $\tau=r_0$ – в точки $t=R+d$ и $t=\dfrac{1}{R+d}$, соответственно. Поэтому функция

$$\Psi_0(\tau)=\Psi(\alpha_2(\tau)) \tag{5.9}$$

аналитична в кольце (1.3) и непрерывна в ее замыкании кроме точек r_0 и R_0. Так как $\alpha_2(\tau)$ – обратная к $\beta_2(t)$ функция (см. (2.10)), то

$$\frac{1}{\alpha'(R_0)}=\beta_2'(R+d)=(R+d+x_0)^2, \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{\alpha'(r_0)}=\beta_2'\left(\frac{1}{R+d}\right)=((R+d)^{-1}+x_0)^2. \tag{5.11}$$

Из (5.6) и (5.9) имеем

$$\operatorname{Re}\Psi_0(\tau)=0 \quad \text{при} \quad |\tau|=R_0 \quad \text{и} \quad |\tau|=r_0, \quad \tau\neq R_0, r_0.$$

Из леммы 5 и соотношений (5.7) — (5.11) следует

$$\lim_{\tau\to R_0}\Psi_0(\tau)\,(\tau-R_0)=c_0, \qquad \lim_{\tau\to r_0}\Psi_0(\tau)\,(\tau-r_0)=c_{-1},$$

где

$$c_0=\frac{2\,(R+d)^2}{((R+d)^2-1)\,(R+d+x_0)^2}, \qquad c_{-1}=\frac{2\,(R+d)^2}{((R+d)^2-1)\,(1+x_0(R+d))^2}.$$

Функция $\Psi_0(\tau)$ удовлетворяет всем условиям леммы 14. Поэтому она аналитически продолжается в область $|z|>R_0$ кроме множетсва точек (5.3), причем

$$\lim_{\tau\to\tau_k}\Psi_0(\tau)\,(\tau-\tau_k)=c_k, \qquad k=0,1,..., \tag{5.12}$$

где

$$c_k = \begin{cases} c_0 \dfrac{R_0^k}{\tau_0^k}, & \text{если} \quad k = 0, 2, \dots, \\ c_{-1} \dfrac{R_0^{k+1}}{\tau_0^{k+1}}, & \text{если} \quad k = 1, 3, \dots. \end{cases} \tag{5.13}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z)), \tag{5.14}$$

где $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ определяются формулой (2.13).

Функция $\varphi_0(z)$ аналитична всюду в комплексной плоскости кроме точек (5.4), причем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \qquad z \in D. \tag{5.15}$$

Так как $x_1 > R_0 = \tau_0$ и последовательность τ_k монотонно стремится к ∞ при $k \to +\infty$, то возможны следующие два случая :

$$1) \tau_k \neq x_1 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots; \tag{5.16}$$

$$2) \tau_k \neq x_1 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots, \quad k \neq m, \quad \tau_m = x_1,$$

где m – некоторое натуральное число.

Функция $\alpha(\tau)$ аналитична в области $|\tau| \geq R_0$ кроме точки x_1 и

$$\lim_{\tau \to x_1} |\alpha(\tau)| = +\infty, \qquad \lim_{\tau \to x_1} \alpha(\tau)\,(\tau - x_1) = -1, \tag{5.17}$$

$$\alpha(\tau) \to a_0 \quad \text{при} \quad |\tau| \to +\infty,$$

где a_0 определяется формулой (2.16).

В обоих случаях 1) и 2) все особые точки z_k конечны кроме точки z_m, которая в случае 2) является бесконечно удаленной точкой. В обоих случаях $z_k \to a_0$ при $k \to +\infty$.

Пусть выполняется условие (5.16). Применяя лемму 5 для функции $\varphi_0(z) \equiv \equiv \Psi_0(\beta(z))$ и используя предел (5.12), получим

$$\lim_{z \to z_k} \varphi_0(z)\,(z - z_k) = \frac{c_k}{\beta'(z_k)} = c_k\,\alpha'(\tau_k), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

где c_k определяются формулами (5.13). Таким образом, главная часть функции $\varphi(z)$ в ее полюсах z_k определяется формулой

$$g_k(z) = \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{z - z_k}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{5.18}$$

Легко убедиться, что

$$\lim_{|z|\to+\infty} \beta(z) = x_1. \tag{5.19}$$

Поэтому при условии (5.16) существует предел $c = \lim\limits_{|z|\to\infty} \varphi_0(z) = \Psi_0(x_1)$, и главные части функции $\varphi_0(z) - c$ в ее полюсах z_k также определяются формулой (5.18). Согласно принципу симметрии аналитического продолжения имеем

$$\operatorname{Re}\Psi_0(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| = \tau_k, \quad \tau \neq \tau_k,$$

$$\Psi_0(\tau) = -\overline{\Psi_0(\tau_k^2\,\overline{\tau}^{-1})} \quad \text{при} \quad r_0 < \tau < \frac{\tau_k^2}{r_0}. \tag{5.20}$$

Из (5.20) получим

$$\max_{|\tau|=b_k} |\Psi_0(\tau)| = B_0, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$b_k = \frac{2\,\tau_k^2}{R_0 + r_0}, \qquad B_0 = \max|\Psi_0(\tau)| \quad \text{при} \quad |\tau| = \frac{1}{2}\,(r_0 + R_0).$$

Пусть γ_k – образ окружности $|\tau| = b_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ при отображении $z = \alpha(\tau)$. Так как $\beta(z)$ – функция, обратная к функци $\alpha(\tau)$, то из (5.14) следует

$$\max_{z\in\gamma_k}|\varphi_0(z)| = \max_{z\in\gamma_k}|\Psi_0(\beta(z))| = \max_{|\tau|=b_k}|\Psi_0(\tau)| = B_0.$$

Отметим, что контуры γ_k стягиваются к a_0 при $k \to +\infty$. Применяя лемму 9, получим

$$\varphi_0(z) - c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{z - z_k}. \tag{5.21}$$

Подставляя $z = b$ в (5.21), и учитывая, что $\varphi_0(b) = \varphi(b) = 0$, полчуим

$$c = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{b - z_k}. \tag{5.22}$$

Из (5.15), (5.21) и (5.22) имеем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{z - z_k} + c. \tag{5.23}$$

Пусть $\zeta_m = x_1$ для некоторого натурального числа m. Из (5.14), (5.19), (5.12) и (5.17) получим

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{\varphi_0(z)}{z} = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{\Psi_0(\beta(z))}{z} = \lim_{\tau\to x_1} \frac{\Psi_0(\tau)}{\alpha(\tau)} = \lim_{\tau\to x_1} \frac{\Psi_0(\tau)\,(\tau-\tau_m)}{\alpha(\tau)\,(\tau-x_1)} := -c_m. \tag{5.24}$$

Так как $z_k \to a_0$ при $k \to +\infty$, $k > m$, то бесконечно удаленная точка является особой точкой. Из (5.24) следует, что эта точка является простым полюсом и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\varphi_0(z) = -c_m\, z + c + \varphi_1(z),$$

где c – некоторая постоянная, $\varphi_1(z)$ аналитична в окрестности бесконечности и $\varphi_1(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$.

Точки z_k $(k = 0, 1, ..., k \neq m)$ являются полюсами $\varphi_0(z) + c_m z - c$, а соответсвующие главные части определяются формулой (5.18). Поэтому, аналогично формуле (5.21), получим

$$\varphi_0(z) + c_m z - c = \sum_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{\infty} \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{z - z_k}. \tag{5.25}$$

Подставляя $z = b$ в (5.25) и учитывая условие $\varphi_0(b) = \varphi(b) = 0$, получим

$$c = -\sum_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{\infty} \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{b - z_k} + c_m\, b. \tag{5.26}$$

Следовательно

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) = c - c_m z + \sum_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{\infty} \frac{c_k\,\alpha'(\tau_k)}{z - z_k}. \tag{5.27}$$

Таким образом, получили теорему.

Теорема 3. *Если выполнено условие (5.16), то конформное отображение $\varphi(z)$ определяется формулой (5.23). Если же для некоторого натурального числа m $\tau_m = x_1$, то $\varphi(z)$ определяется формулой (5.27).*

2. Пусть теперь функция $\zeta = \varphi_1(z)$, конформно отображающая D на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$, удовлетворяет условиям

$$\lim_{z\to a} |\varphi_1(z)| = +\infty, \qquad \varphi_1(z_0) = \zeta_0, \tag{5.28}$$

где $z_0 \in D$ и ζ_0 – фиксированные точки, $\operatorname{Re}\zeta_0 > 0$.

Функцию $\varphi_1(z)$ ищем в виде

$$\varphi_1(z) = c_0\,\varphi(z) + i\,c_1, \tag{5.29}$$

где $\varphi(z)$ – построенное выше конформное отображение, а $c_0 > 0$ и c_1 – вещественные постоянные. Функция (5.29) удовлетворяет первому условию в (5.28). Подставляя $\varphi_1(z)$ из (5.29) во второе равенство в (5.28), получим

$$c_0 = \frac{\operatorname{Re}\zeta_0}{\operatorname{Re}\varphi(z_0)}, \qquad c_1 = \operatorname{Im}\zeta_0 - c_0 \operatorname{Im}\varphi(z_0).$$

Так как $\operatorname{Re}\zeta_0 > 0$ и $\operatorname{Re}\varphi(z_0) > 0$, то $c_0 > 0$. Аналогично можно построить конформное отображение области D на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$, если первое условие в (3.28) заменить условием

$$\lim_{z\to z_1} |\varphi_1(z)| = +\infty,$$

где z_1 – фиксированная точка на Γ.

§6. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА КРУГ

1. Пусть $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| = 1$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) > 0. \tag{6.1}$$

Пусть постоянные d_0, ρ_0, x_0, x_1, r_0, R_0, a_0 и функции $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(\tau)$, $\beta_1(z)$, $\beta_2(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ те же, что и в §2. Положим

$$\zeta_k = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k}\,\overline{\beta_2(i)}}, \qquad z_k = \alpha(\zeta_k), \quad k = 1, 2, \dots . \tag{6.2}$$

Согласно теореме 2 функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается всюду в комплексную плоскость за исключением точек z_k, $\overline{z}_k$ и точки $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k = \lim\limits_{k\to\infty} \overline{z_k}$. Теперь определим главные части $\varphi(z)$ в ее особых точках z_k и $\overline{z}_k$. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)). \tag{6.3}$$

Ясно, что

$$|\varphi(z)| = 1, \qquad z \in \Gamma, \tag{6.4}$$

$$\varphi(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0, \quad z \in D \bigcup \Gamma. \tag{6.5}$$

Из (6.1), (6.3) — (6.5) следует, что функция $\Psi(t)$ аналитична в области D_0, ограниченной окружностями (1.1), (2.2), непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_0$ и удовлетворяет условиям

$$|\Psi(t)| = 1 \quad \text{на окружностях (1.1) и (2.2)},$$

$$\Psi(\pm i) = 0, \qquad \Psi'(\pm i) = \varphi'(0), \qquad \Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in D_0, \quad t \neq \pm i.$$

Тогда функция $\Psi_0(\tau) \equiv \Psi(\alpha_2(\tau))$ аналитична в кольце (1.3), непрерывна в ее замыкании и удовлетворяет условиям

$$|\Psi_0(\tau)| = 1 \quad \text{при} \quad |\tau| = r_0 \quad \text{и} \quad |\tau| = R_0,$$

$$\Psi_0(\tau_0) = 0, \quad \Psi_0(\overline{\tau}_0) = 0, \quad \Psi_0'(\tau_0) = c_0, \quad \Psi_0'(\overline{\tau}_0) = \overline{c}_0,$$

$$\Psi_0(\tau) \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau \in G_0, \quad \tau \neq \tau_0, \overline{\tau}_0,$$

где

$$\tau_0 = \beta_2(i), \qquad c_0 = \frac{\Psi'(0)}{\beta_2'(i)} = \varphi'(0)\,(x_0 + i)^2.$$

Согласно лемме 4 функция $\Psi_0(\tau)$ аналитически продолжается в область $|\tau| > R_0$ за исключением точек ζ_k, $\overline{\zeta}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ и бесконечно удаленной точки, существуют пределы

$$\lim_{\tau \to \zeta_k} \Psi_0(\tau)\,(\tau - \zeta_k) = a_k \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \to \overline{\zeta}_k} \Psi_0(\tau)\,(\tau - \overline{\zeta}_k) = \overline{a}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.6}$$

где ζ_k определяется формулой (6.2)

$$a_k = -\frac{R_0^{2k}}{\varphi'(0)\,(x_0 - i)^2\, r_0^{2k-2}\, \overline{\tau}_0^2}.$$

Пусть

$$z_k = \alpha(\zeta_k), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{6.7}$$

Функция

$$\varphi_0(z) = \Psi_0(\beta(z)) \tag{6.8}$$

аналитична всюду в комплексной плоскости кроме точек z_k, $\overline{z}_k$, a_0, $k = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(z) = \varphi_0(z)$ при $z \in D$. Из (6.7) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = \lim_{k\to+\infty} \overline{z}_k = a_0.$$

Применяя лемму 5, из (6.6) получим

$$\lim_{z\to z_k} \varphi_0(z)\,(z - z_k) = \frac{b_k}{\varphi'(0)}, \quad \lim_{z\to \overline{z}_k} \varphi_0(z) = \frac{\overline{b}_k}{\varphi'(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.9}$$

где

$$b_k = -\frac{R_0^{2k}\,\alpha'(\zeta_k)}{(z - i)^2\, r_0^{2k-2}\overline{r}_0^{-2}}.$$

Так как $\operatorname{Im}\beta_2(i) \neq 0$, то из (6.2) следует, что $\operatorname{Im}\zeta_k \neq 0$, $\operatorname{Im}\overline{\zeta}_k \neq 0$. Поэтому $\zeta_k \neq x_1$, $\overline{\zeta}_k \neq x_1$, где x_1 – вещественное число, определенное формулой (1.39). С другой стороны, $|\zeta_k| \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Поэтому функция $\Psi_0(z)$ аналитична в окрестности точки x_1. Из (5.19) и (6.8) имеем

$$\lim_{|z|\to+\infty} \varphi_0(z) = \Psi_0(x_1). \tag{6.10}$$

Таким образом, $\varphi_0(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. Из (6.9) и (6.10), аналогично формуле (5.23), получим

$$\varphi(z) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z - z_k} + \frac{\overline{b}_k}{z - \overline{z}_k} + c\right] \frac{1}{\varphi'(0)}, \tag{6.11}$$

где

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{z_k} + \frac{\overline{b}_k}{\overline{z}_k}\right).$$

Дифференцируя обе части (6.11) в точке $z = 0$, получим

$$[\varphi'(0)]^2 = A, \tag{6.12}$$

где

$$A = -2\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\frac{b_k}{z_k^2}.$$

Из (6.12) и неравенства $\varphi'(0) > 0$ следует, что $A > 0$ и $\varphi'(0) = \sqrt{A}$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *Конформно отображающая функция $\varphi(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$, удовлетворяющая условиям (6.1), определяется формулой (6.11), где $\varphi'(0) = \sqrt{A}$.*

Пусть условия (6.1) заменены условиями $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$, где $z_0 \neq \pm 1$ – фиксированная точка в области D. Тогда аналогично доказывается, что функция $\varphi(z)$ представляется в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - B_k} + A_0, \tag{6.13}$$

где $B_k \to z_1$ при $k \to +\infty$.

2. Цель данного пункта – показать, что в частном случае $z_0 = \pm 1$ функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается через Γ всюду в комплексную плоскость за исключением некоторой последовательности точек z_k и ее предела $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$, $|a_0| < \infty$. В этом случае изолированные особые точки z_k являются полюсами второго порядка, а функция допускает разложение вида (6.13), содержащее слагаемые вида $b_k\,(z - z_k)^{-2}$, где $b_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть Γ и область D – те же, что и в начале §5 ($d > 0$), и пусть функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на единичный круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условиям (4.1), (4.2).

Рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)), \tag{6.14}$$

где $\alpha_1(t)$ – функция Жуковского (1.2).

Ясно, что

$$|\varphi(z)| = 1, \qquad z \in \Gamma, \qquad \varphi(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}, \quad z \neq 1. \tag{6.15}$$

Рассмотрим окружность

$$|\tau + d_0| = \rho_0, \tag{6.16}$$

где

$$d_0 = \frac{d}{R^2 - d^2}, \qquad \rho_0 = \frac{R}{R^2 - d^2}. \tag{6.17}$$

Так как $d > 0$, $R > 1 + d$, то $d_0 > 0$, $\rho_0 > d_0$, $\rho_0 + d_0 < 1$. Окружность (6.16) является образом окружности (1.1) при отображении $\tau = t^{-1}$. Пусть D_0 –

область, ограниченная окружностями (1.1) и (6.16). Из условий $d > 0$, $R > 1 + d$, $\rho_0 > d_0$ следует, что точка $t = 0$ не принадлежит замкнутой области $\overline{D}_0$. Поэтому функция Жуковского $\alpha_1(t)$ аналитична в области $\overline{D}_0$. Следовательно, $z = \alpha_1(t)$ отображает D_0 на D. Поэтому функция $\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t))$ аналитична в области D_0 и непрерывна в $\overline{D}_0$. Из (4.1), (4.2), (6.14) и (6.15) следует, что

$$\Psi(t) = 1 \quad \text{на окружностях (1.1) и (6.16)}, \tag{6.18}$$

$$\begin{gathered}\Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0, \quad \Psi''(1) = \varphi'(1), \\ \Psi'''(1) = -3\,\varphi'(1), \quad \Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in \overline{D}_0, \quad t \neq 1.\end{gathered} \tag{6.19}$$

Пусть

$$d_1 = d + d_0, \quad x_2 = \frac{R^2 - \rho_0^2 + d_1^2 + \sqrt{(R^2 - \rho_0^2 + d_1^2)^2 - 4R^2 d_1}}{2d_1}, \tag{6.20}$$

$$x_0 = x_2 - d, \quad x_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - R^2}, \quad r_0 = \frac{\rho_0}{(x_0 - d_0)^2 - \rho_0^2}, \quad R_0 = \frac{R}{x_2^2 - R^2}. \tag{6.21}$$

Имеем (см. (2.9)) $x_2 > R$, $0 < r_0 < R_0$, $x_1 > R_0$.

Рассмотрим отображение

$$\tau = x_1 - \frac{1}{x_0 + t} \equiv \beta_2(t).$$

В §2 (Лемма 8, (2.10)) показано, что функция $\zeta = \beta_2(t)$ конформно отображает область D_0 на кольцо

$$r_0 < |\tau| < R_0, \tag{6.22}$$

причем

$$\beta_2\,(R + d) = R_0, \quad \beta_2\,(\rho_0 - d) = r_0. \tag{6.23}$$

Пусть

$$\tau_0 \equiv \beta_2(1) = x_1 - \frac{1}{x_0 + 1}. \tag{6.24}$$

Так как $\beta_2(t)$ – возрастающая функция на полуоси $t \geq 0$ и $0 < \rho_0 - d_0 < 1 < R + d$, то

$$\beta_2\,(\rho_0 - d_0) < \beta_2(1) < \beta_2\,(R + d). \tag{6.25}$$

Из (6.24) и (6.25) имеем $r_0 < \tau_0 < R_0$. Отображение, обратное к отображению $\zeta = \beta_2(t)$, определяется формулой

$$t = \frac{1}{x_1 - \tau} - x_0 \equiv \alpha_2(\tau). \tag{6.26}$$

Функция $t = \alpha_2(\tau)$ конформно отображает кольцо (1.3) на область D_0 и $\alpha_2(\tau_0) = 1$, где τ_0 определяется формулой (6.24). Обозначим

$$\Psi_0(\tau) = \Psi(\alpha_2(\tau)). \tag{6.27}$$

Из (6.18), (6.19) и (6.27) следует, что функция $\Psi_0(\tau)$ аналитична в кольце (1.3), непрерывна в замыкании этого кольца и удовлетворяет условиям

$$|\Psi_0(\tau)| = 1 \quad \text{при} \quad |\tau| = R_0 \quad \text{и} \quad |\tau| = r_0, \tag{6.28}$$

$$\Psi_0(\tau_0) = 0, \qquad \Psi_0'(\tau_0) = 0,$$

$$\Psi_0''(\tau_0) = \varphi'(1)\,(\alpha_2'(\tau_0))^2, \tag{6.29}$$

$$\Psi_0'''(\tau_0) = -3\varphi'(1)\,(\alpha_2'(\tau_0))^3 + 3\varphi'(1)\,\alpha_2'(\tau_0)\,\alpha_2''(\tau_0), \tag{6.30}$$

$$\Psi_0(\tau) \neq 0 \quad \text{при} \quad r_0 \leq \tau \leq R_0, \quad \tau \neq \tau_0.$$

Из (6.24) и (6.26) имеем

$$(x_1 - \tau_0)^{-1} = x_0 + 1, \quad \alpha_2'(\tau_0) = (x_1 - \tau_0)^{-2} = (x_0 + 1)^2,$$

$$\alpha_2''(\tau_0) = 2\,(x_1 - \tau_0)^{-3} = 2\,(x_0 + 1)^3.$$

Следовательно, условия (6.29) и (6.30) запишутся в виде

$$\Psi_0''(\tau_0) = \varphi'(1)\,(x_0 + 1)^4, \qquad \Psi_0'''(\tau_0) = 3\,(x_0 + 1)^5(1 - x_0)\,\varphi'(1).$$

Согласно лемме 15 функция $\Psi_0(\tau)$ аналитически продолжается в область $|\tau| > R_0$ за исключением точек

$$\tau_k = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}\,\tau_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.31}$$

причем главная часть этого аналитического продолжения в точке τ_k определяется формулой

$$g_k(\tau) = \frac{1}{\varphi'(1)} \left[\frac{c_{k1}}{\tau - \tau_k} + \frac{c_{k2}}{(\tau - \tau_k)^2} \right], \tag{6.32}$$

где

$$c_{k1} = \frac{2\,\tau_k\,(2 + (1 - x_0^2)\,\tau_0)}{(x_0 + 1)^4}, \qquad c_{k2} = \frac{2\,\tau_k^2}{(x_0 + 1)^4\,\tau_0^2}. \tag{6.33}$$

Из принципа симметрии и условия (6.28) следует, что аналитическое продолжение $\Psi_0(t)$ удовлетворяет условиям (см. [1], стр. 158)

$$|\Psi_0(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |\tau| = \frac{R_0^{2k}}{r^{2k-2}}, \quad k = 1, 2, ... \tag{6.34}$$

Так как $d_0 > 0$, $R > 1 + d$ и $d_0 < \rho_0$, $\rho_0 + d_0 < 1$, то единичная окружность $|t| = 1$ принадлежит области D_0, ограниченной окружностями (1.1) и (6.16). Теперь рассмотрим отображение (2.5). Известно (см. [1], стр. 30), что функция $t = \beta_1(z)$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на область $|t| > 1$. Отображение $z = \alpha_1(t)$, обратное к отображению $t = \beta_1(z)$, конформно отображает область $|t| > 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$.

Образ γ окружности $|t| = 1$ при отображении $\tau = \beta_2(t)$ является окружностью в кольце G_0. Функция $\tau = \beta_2(t)$ конформно отображает область $|t| > 1$ на внешность окружности γ. Пусть $\alpha_2(\tau)$ – обратное отображение. Тогда

$$z = \alpha_1(\alpha_2(\tau)) \equiv \alpha(\tau) \tag{6.35}$$

конформно отображает внешность окружности γ на внешность отрезка $[-1, 1]$, а функция $z = \beta_2(\beta_1(z)) \equiv \beta(z)$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность окружности γ и является обратным к отображению $z = \alpha(\tau)$. Положим

$$z_k = \alpha(\tau_k), \tag{6.36}$$

$$a_0 = \lim_{k\to\infty} z_k = -\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right). \tag{6.37}$$

Из (6.36) следует, что $\tau_k = \beta(z_k)$, $k = 1, 2, ...$ Следовательно, функция

$$\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z)) \tag{6.38}$$

аналитична вне отрезка $[-1, 1]$ за исключением последовательности точек z_k и предела $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$. Из (6.14) и (6.27) имеем

$$\Psi_0(\tau) = \varphi(\alpha(\tau)) \quad \text{при} \quad \tau \in G_0.$$

Отсюда получим

$$\Psi_0(\beta(z)) = \varphi(z) \quad \text{при} \quad z \in D_1, \tag{6.39}$$

где $D_1 = D \setminus [-1,1]$. Из (6.38) и (6.39) имеем

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) \quad \text{при} \quad z \in D_1. \tag{6.40}$$

Из (6.40) следует, что функция $\varphi_0(z)$ аналитически продолжается на отрезок $[-1,1]$. Следовательно, она аналитична всюду в комплексной плоскости за исключением последовательности z_k, предела a_0 этой последовательности, и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) \quad \text{при} \quad z \in D. \tag{6.41}$$

Таким образом, при помощи этой формулы осуществляется разложение функции $\varphi(z)$ на простейшие дроби. Так как контур Γ является аналитической кривой, то конформно отображающая функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность Γ (см. [1], стр. 163). Поэтому из равенства (6.40) следует, что особые точки z_k и a_0 функции $\varphi_0(z)$ находятся вне замкнутой области $D\bigcup\Gamma$.

Пусть $d > 0$, $R > 1 + d$. Из формул (6.17) и (6.20) имеем

$$d_0 \to 0, \quad \rho_0 \to \frac{1}{R}, \quad d_1 \to 0, \quad x_2 \to +\infty \quad \text{при} \quad d \to 0\,(d > 0).$$

Следовательно

$$\lim_{d\to 0} \frac{x_2\left[(1-d)\,x_2 + R^2\right]}{x_2 + 1 - d} = +\infty.$$

Поэтому при достаточно малых положительных значениях d имеет место неравенство

$$\frac{x_2\left[(1-d)\,x_2 + R^2\right]}{x_2 + 1 - d} \geq R^2. \tag{6.42}$$

Неравенство (6.42) можно записать в виде

$$x_1 \geq \frac{R_0^2}{\tau_0} = \tau_1, \tag{6.43}$$

где x_1, R_0, τ_0 и τ_k определяются из (6.21), (6.24) и (6.31). Поскольку неравенство (6.43) имеет место при достаточоно малых положительных значениях d, то возможны следующие два случая :

$$\tau_k \neq x_1, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{6.44}$$

или

$$\tau_m = x_1, \tag{6.45}$$

где m – некоторое натуральное число.

Пусть сначала имеет место условие (6.44). Тогда из формулы (6.36) следует, что $|z_k| < \infty$. Так как точки τ_k являются полюсами второго порядка для функции $\Psi_0(\tau)$ и $\beta'(z_k) \neq 0$, то точки z_k являются полюсами второго порядка для функции $\varphi(z) = \Psi_0(\beta(z))$.

Теперь напишем главную часть $f_k(z)$ функции $\varphi(z)$ в ее полюсах z_k. Согласно лемме 17 и формуле (6.32) имеем

$$f_k(z) = \left[\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2}\right] \frac{1}{\varphi'(1)}, \qquad k = 1, 2, ..., \tag{6.46}$$

где

$$a_{k1} = \frac{c_{k1}}{\beta'(z_k)} - \frac{c_{k2}\,\beta''(z_k)}{(\beta'(z_k))^3}, \qquad a_{k2} = \frac{c_{k2}}{(\beta'(z_k))^2}. \tag{6.47}$$

Так как функция $\alpha(\tau)$ – обратная к функции $\beta(z)$ и $z_k = \alpha(\tau_k)$, то

$$\beta'(z_k) = [\alpha'(\tau_k)]^{-1}, \tag{6.48}$$

$$\beta(\alpha(\tau)) = \tau. \tag{6.49}$$

Дифференцируя обе части (6.49) дважды по τ и подставляя $\tau = \tau_k$, получим

$$\beta''(z_k) = -\frac{\beta'(z_k)\,\alpha''(\tau_k)}{(\alpha'(\tau_k))^2} = -\frac{\alpha''(\tau_k)}{[\alpha'(\tau_k)]^3}. \tag{6.50}$$

Подставляя $\beta'(z_k)$ и $\beta''(z_k)$ из (6.48) и (6.50) в (6.47), получим

$$a_{k1} = c_{k1}\,\alpha'(\tau_k) + c_{k2}\,\alpha''(\tau_k), \qquad a_{k2} = c_{k2}\,[\alpha'(\tau_k)]^2, \tag{6.51}$$

где c_{k1} и c_{k2} определяются формулами (6.33). Пусть

$$t_k = \alpha_2(\tau_k) = \frac{1}{x_1 - \tau_k} - x_0. \tag{6.52}$$

Из (1.2), (6.26) и (6.35) имеем

$$\alpha'(\tau_k) = \frac{1}{2}(1 - t_k^{-2})\,(x_1 - \tau_k)^{-2}, \quad \alpha''(\tau_k) = t_k^{-3}\,(x_1 - t_k)^{-4}) + (1 - t_k^{-2})\,(x_1 - \tau_k)^{-3}. \tag{6.53}$$

Таким образом, функция $f_k(z)$ определяется формулой (6.46), где a_{k1}, a_{k2}, c_{k1}, c_{k2}, $\alpha'(\tau_k)$, $\alpha''(\tau_k)$ и t_k определяются формулами (6.33), (6.51) — (6.53). Пусть γ_k – образ окружности

$$|\tau| = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}}$$

при отображении $z = \alpha(\tau)$. Контуры γ_k стягиваются к точке a_0 при $k \to +\infty$ (см. (6.37)). Из (6.34) и (6.38) следует, что

$$|\varphi_0(z)| = 1 \quad \text{при} \quad z \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6.54}$$

Так как $\beta(z) \to x_1$ при $|z| \to +\infty$, то из условия (6.44) следует, что $\Psi(\tau)$ аналитична в окрестности x_1 и

$$\lim_{|z|\to+\infty} \varphi_0(z) = \lim_{|z|\to+\infty} \Psi_0(\beta(z)) = \Psi_0(x_1). \tag{6.55}$$

Из (6.46), (6.54) и (6.55) следует, что функция $\varphi_0(z) - c$ ($c = \Psi_0(x_1)$) удовлетворяет всем условиям леммы 9. Поэтому имеем

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2} \right) \frac{1}{\varphi'(1)} + c. \tag{6.56}$$

Дифференцируя обе части (6.56) и подставляя $z = 1$, получим

$$[\varphi'(1)]^2 = A, \tag{6.57}$$

где

$$A = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{(1 - z_k)^2} + \frac{2\, a_{k2}}{(1 - z_k)^3} \right). \tag{6.58}$$

Из (6.57) и неравенства $\varphi'(1) > 0$ имеем $A > 0$ и $\varphi'(1) = \sqrt{A}$. Подставляя $z = 1$ в (6.56) и учитывая неравенство $\varphi_0(1) = \varphi(1) = 0$, получим

$$c = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{1 - z_k} + \frac{a_{k2}}{(1 - z_k)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{A}}. \tag{6.59}$$

Из (6.41) и (6.56) окончательно получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{A}} + c, \tag{6.60}$$

где A и c определяются формулами (6.58) и (6.59).

Пусть теперь имеет место условие (6.45). Так как последовательность τ_k возрастает, то из (6.45) следует, что $\tau_k \neq x_1$, $k = 1, 2, ...$, $k \neq m$. В этом случае $|z_m| = +\infty$. Поэтому особыми точками функции $\varphi_0(z)$ являются последовательность z_k, точка $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$ и бесконечно удаленная точка.

Главные части $f_m(z)$ функции $\varphi_0(z)$ в точке z_k при $k \neq m$ определяются формулой (6.46). Теперь определим главную часть $f_m(z)$ функции $\varphi_0(z)$ в бесконечно удаленной точке. Имеем

$$\beta(z) = x_1 - \frac{1}{2z} + \frac{x_0}{4z^2} + \frac{1}{z^3}\beta_0(z), \tag{6.61}$$

где $\beta_0(z)$ аналитичмна и ограниочена в окрестности бесконечности.

Так как $x_1 = \tau_m$ и τ_m является полюсом функции $\Psi_0(\tau)$, то

$$\lim_{\tau\to x_1} |\Psi_0(\tau)| = +\infty.$$

Применяя лемму 16 для функции $\varphi_0(z) = \Psi_0(\beta(z))$ и учитывая формулу (6.32) при $k = m$ и представление (6.61), получим

$$f_m(z) = \left(a_{m1}z + a_{m2}z^2\right)\frac{1}{\varphi'(1)},$$

где $a_{m1} = -2c_{m1} + 4c_{m2}x_0$, $a_{m2} = 4c_{m2}$.

Следовательно, функция $\varphi_0(z) - f_m(z)$ имеет конечный предел c при $|z| \to \to +\infty$. Функция $\varphi_0(z) - f_m(z) - c$ имеет полюсы второго порядка в точках z_k при $k \neq m$ и стремится к нулю при $|z| \to +\infty$. Применяя лемму 9, получим

$$\varphi_0(z) - f_m(z) - c = \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty} f_k(z). \tag{6.62}$$

Используя формулу (6.62), аналогично формуле (6.60) получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty}\left(\frac{a_{k1}}{z-z_k} + \frac{a_{k2}}{(z-z_k)^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{A}}(a_{m1}z + a_{m2}z^2) + c, \tag{6.63}$$

где

$$A = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty}\left(\frac{a_{k1}}{(1-z_k)^2} + \frac{a_{k2}}{(1-z_k)^3}\right) + a_{m1} + 2a_{m2},$$

$$c = -\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{\infty}\left(\frac{a_{k1}}{1-z_k} + \frac{a_{k2}}{(1-z_k)^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{A}}(a_{m1} + a_{m2}).$$

Согласно лемме 9, ряды (6.60) и (6.63) сходятся равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек z_k и малую окрестность точки a_0.

3. Пусть теперь конформно отображающая функция $\varphi_1(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(1) = 0, \qquad \arg \varphi_1'(1) = \theta.$$

Тогда очевидно, что эта функция допускает представление $\varphi_1(z) = \varphi(z)\, e^{i\,\theta}$, где $\varphi(z)$ – выше построенная конформно отображающая функция при $\theta = 0$.

4. Пусть, наконец, конформно отображающая функция $\Psi(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$ удовлетворяет условиям $\Psi(-1) = 0$, $\arg \Psi(-1) = \theta$. Тогда $\Psi(z) = -\varphi(-z)\, e^{i\,\theta}$, где $\varphi(z)$ – выше построенная конформно отображающая функция.

Полученные результаты остаются в силе, если R – произвольное положительное число, d – произвольное комплексное число, $R > 1 + |d|$ и $\varphi_1(z_0) = 0$, где $z_0 = 1$ или $z_0 = -1$.

Таким образом, конформно отображающая функция $\varphi(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$, удовлетворяющая одному из условий $\varphi(1) = 0$ или $\varphi(-1) = 0$, аналитически продолжается в расширенную комплексную плоскость за исключением некоторой последовательности точек z_k и предела $a_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$ этой последовательности, причем точки z_k являются полюсами второго порядка для $\varphi(z)$.

ABSTRACT. The paper considers a problem of analytic continuation of analytic function beyond ellipse type arcs, provided that either the real part or the modulus of function in question is constant. We study the cases of a half–plane and a disk. The results are applied to obtain decompositions into partial fractions for conformal mappings which map domains with elliptical boundaries onto the disk or half–plane. In the case of an ellipse we prove that the conformal mappings are meromorphic functions with a countable number of second order or simple poles.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
2. Н. Е. Товмасян, "Принцип аналитического продолжения через дугу эллипса и его применения", Изв. НАН Армении, т. 26, № 2, стр. 108 — 119, 1991.
3. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.

12 декабря 1997

Армянский государственный инженерный университет

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КОНФОРМНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

В статье приводится новый метод конформного отображения односвязных областей, условия которого легко проверяемы и являются более слабыми, чем условия соответствия границ.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D и G – односвязные ограниченные области с гладкими границами Γ и L, соответственно. В книгах [1] и [2] приведен следующий критерий конформности отображения (принцип соответствия границ) : если функция $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ и взаимнооднозначно отображает контур Γ на контур L, сохраняя ориентацию, то $\varphi(z)$ конформно отображает область D на область G.

Пусть $z = \alpha(t)$ – параметрическое уравнение контура Γ, где параметром t является точка единичной окружности $|t| = 1 : t = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Под гладкостью контура Γ мы понимаем следующее : 1) контур Γ простой, т.е. не пересекает сам себя ; 2) существует производная $\dfrac{d\alpha(t)}{dt} \neq 0$, удовлетворяющая условию Гельдера на окружности $|t| = 1$.

В данной работе приводятся новые критерии конформности отображения односвязных областей, где условие взаимнооднозначного отображения границ заменяется более простым условием, проверка которого во многих случаях не представляет особой трудности.

§1. ОТОБРАЖЕНИЕ НА ВЕРХНЮЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ И КРУГ

1. Пусть $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая область D на полуплоскость $\mathrm{Im}z > 0$, а точку $z_1 \in \Gamma$ переводит в бесконечность. Тогда существует (см. [1]) конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{z\to z_1} \varphi(z)(z - z_1) = c, \qquad z \in \overline{D}. \tag{1}$$

Из определения конформного отображения следует, что

$$\mathrm{Im}\varphi(z) = 0, \qquad z \in \Gamma, \quad z \neq z_1, \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}\varphi(z_0) > 0, \tag{3}$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка в области D.

Следующая теорема устанавливает, что необходимые условия (1) — (3) являются также достаточными для того, чтобы отображение было конформным.

Теорема 1. *Если функция $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, кроме точки z_1 и удовлетворяет условиям (1) — (3), то $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\mathrm{Im}\zeta > 0$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $z_1 = 0$ и ось x–ов является касательной к кривой Γ в начале координат. Тогда условия (1) и (2) запишутся в виде

$$\lim_{z\to 0} \varphi(z)z = c, \qquad z \in \overline{D}, \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\varphi(z) = 0, \qquad z \in \Gamma, \quad z \neq 0. \tag{5}$$

Уравнение контура Γ в окрестности начала координат запишется в виде

$$y = \alpha(x), \tag{6}$$

где $\alpha(x)$ – непрерывная функция в окрестности точки $x = 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x} = 0. \tag{7}$$

Сначала покажем, что из условий (4) и (5) следует, что постоянная c – вещественное число.

Из (6) следует, что параметрическое уравнение контура Γ в окрестности начала координат в комплексной форме запишестя в виде

$$z = x + i\alpha(x), \quad -\varepsilon \leq x < \varepsilon, \tag{8}$$

где ε – достаточно малое положительное число.

Подставляя (8) в (5) и умножая обе части (5) на x, получим

$$\operatorname{Im}\left[\frac{x}{x + i\alpha(x)}\,(x + i\alpha(x))\,\varphi(x + i\alpha(x))\right] = 0. \tag{9}$$

Переходя в (9) к пределу при $x \to 0$ и имея в виду пределы (4) и (7), получим

$$\operatorname{Im} c = 0. \tag{10}$$

Пусть теперь $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ и переводит начало координат в бесконечно удаленную точку. Тогда, как указано выше

$$\lim_{z\to 0} \varphi_0(z)\, z = c_0, \tag{11}$$

$$\operatorname{Im}\varphi_0(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{Im}\varphi_0(z_0) > 0, \tag{13}$$

где c_0 – постоянная, не равная нулю.

Обозначим

$$\Psi(z) = \varphi(z) - \frac{c}{c_0}\,\varphi_0(z).$$

Ясно, что $\Psi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, кроме, быть может, точки $z = 0$. Из (4), (5), (11) и (12) имеем

$$\lim_{z\to 0} \Psi(z)\, z = 0, \quad z \in \overline{D}, \tag{14}$$

$$\operatorname{Im}\Psi(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq 0. \tag{15}$$

Из (15) следует, что аналитическая функция $\Psi(z)$ в точке $z = 0$ имеет слабую особенность. Поэтому, из (15) следует (см. [2]), что $\Psi(z) = c_1$, где c_1 – некотороая вещественная постоянная. Следовательно

$$\varphi(z) = \frac{c}{c_0}\varphi_0(z) + c_1. \tag{16}$$

Так как постоянные c_1, c_2 и c действительны, то из (16) имеем

$$\operatorname{Im}\varphi(z_0) = \frac{c}{c_0}\operatorname{Im}\varphi_0(z_0).$$

Отсюда и из условий (3) и (13) имеем

$$\frac{c}{c_0} > 0. \tag{17}$$

Так как $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, то из (16) и (17) следует, что $\zeta = \varphi(z)$ – конформно отображающая функция. Теорема 1 доказана.

2. Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} |\varphi(z)| = 1 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma; \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi(z) \neq 0, \\ \text{если} \quad z \in D, \quad z \neq z_0 \quad \text{и} \quad \varphi'(z_0) \neq 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$.*

Доказательство. Пусть аналитическая в области D функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям (18), а $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$ и $\varphi_0(z_0) = 0$. Тогда очевидно, что функция $\varphi_0(z)$ также удовлетворяет условиям (18). Следовательно, отношение

$$\Psi(z) \equiv \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$$

аналитично в области D и удовлетворяет условиям

$$\Psi(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}, \quad |\Psi(z)| = 1 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma. \tag{19}$$

Из (19) мы заключаем, что $\Psi_0(z) = \ln\Psi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\Psi_0(z) = 0, \quad z \in \Gamma. \tag{20}$$

Из (20) имеем (см. [1]), что $\Psi_0(z) = i\theta_0$, где θ_0 – некоторая вещественная постоянная. Следовательно, $\Psi_0(z) = \exp(i\theta_0)$ и

$$\varphi(z) = \varphi_0(z)\exp(i\theta_0). \tag{21}$$

Из (21) непосредственно следует, что $\zeta = \varphi(z)$ также конформно отображает область D на единичный круг. Теорема 2 доказана.

§2. КРИТЕРИЙ КОНФОРМНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

1. Теорема 3. *Пусть D и G – односвязные ограниченные области с гладкими границами Γ и L, соответственно. Любая аналитическая в D функция $\varphi(z)$, непрерывно диффенецируемая в $\overline{D}$ и удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(z) \in L \quad \text{при} \quad z \in \Gamma, \quad \varphi(z_0) = \zeta_0, \quad \varphi(z_1) = \zeta_1,$$

$$\varphi'(z_1) \neq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(z) \neq \zeta_1 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma,\ z \neq z_1,$$

где $z_0 \in D$, $\zeta_0 \in G$, $z_1 \in \Gamma$ и $\zeta_1 \in L$ – некоторые фиксированные точки, конформно отображает D на G.

Доказательство. Пусть $\zeta = \Psi(t)$ конформно отображает G на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ и переводит точку ζ в бесконечность. Рассмотрим отображение

$$\zeta = \Psi(\varphi(z)) \equiv \omega(z). \tag{22}$$

Функция $\omega(z)$ аналитична в D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением точки $z = z_1$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому $\zeta = \omega(z)$ конформно отображает D не полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Из (22) имеем

$$\varphi(z) = \Psi^{-1}(\omega(z)),$$

где $\Psi^{-1}(t)$ – функция, обратная к функции $\Psi(t)$. Ясно, что $t = \Psi^{-1}(\omega(z))$ конформно отображает D на G. Теорема 3 доказана.

2. Пусть теперь $\varphi_0(z)$ аналитична в области D, непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(z) \in L \quad \text{при} \quad z \in \Gamma; \quad \varphi_0(z_0) = \zeta_0, \quad \varphi_0'(z_0) \neq 0$$

$$\text{и} \quad \varphi_0(z) \neq \zeta_0 \quad \text{при} \quad z \in D,\ z \neq z_0,$$

где $z_0 \in D$, $\zeta_0 \in G$ – некоторые фиксированные точки. Тогда имеет место

Теорема 4. *Функция $t = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на G.*

Доказательство. Пусть $\zeta = \Psi_0(t)$ конформно отображает G на единичный круг $|\zeta| < 1$ и $\Psi_0(\zeta_0) = 0$. Тогда отображение $\zeta = \Psi_0(\varphi_0(z)) \equiv \omega_0(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому $\zeta = \omega(z)$ конформно отображает область D на единичный круг $|\zeta| < 1$, а $t = \Psi_0^{-1}(\omega_0(z)) = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на G. Теорема 4 доказана.

§3. ДРУГИЕ КРИТЕРИИ КОНФОРМНОСТИ

Пусть D – односвязная ограниченная область с гладкой границей Γ, и пусть $\varphi(z)$ – аналитичная в области D функция, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$. Пусть G и L – образы D и Γ, соответственно, при отображении $\zeta = \varphi(z)$. Известно, что G также является односвязной областью. Обозначим через L_0 границу области G. Возникает естественный вопрос : при каких условиях на функцию $\varphi(z)$ контуры L и L_0 совпадают и функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на область G ?

Лемма 1. *Контур L_0 принадлежит контуру L.*

Доказательство. Пусть $\zeta_0 \in L_0$. Докажем, что $\zeta_0 \in L$. Так как G – область, то ζ_0 не принадлежит области G, существует последовательность $\zeta_n \in G$ $(n = 1, 2, ...)$ и $\zeta_n \to \zeta_0$. Так как $\zeta_n \in G$, то $\zeta_n = \varphi(z_n)$, где $z_n \in D$ – один из прообразов точки ζ_n при отображении $\zeta = \varphi(z)$. Так как последовательность z_n ограничена, то существует подпоследовательность z_{m_k} $(k = 1, 2, ...)$, которая сходится к некоторой точке $z_0 \in \overline{D}$. Следовательно

$$\varphi(z_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi(z_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} \zeta_{m_k} = \zeta_0.$$

Таким образом, точка $\varphi(z_0)$ не принадлежит области G. Это означает, что точка z_0 не принадлежит области D. Следовательно, $z_0 \in \Gamma$ и, по определению, $\zeta_0 = \varphi(z_0) \in L$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Контур L_0 совпадает с контуром L тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию*

$$\varphi(z) \neq \varphi(t) \quad \text{при} \quad z \in D, \quad t \in \Gamma. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (23), и пусть $\zeta_0 \in L$. Докажем, что $\zeta_0 \in L_0$. По определению контура L существует точка $t_0 \in \Gamma$ такая, что $\zeta_0 = \varphi(t_0)$. Из неравенства (23) при $z \in D$ и $t = t_0$ следует, что точка ζ_0 не принадлежит области G. Пусть $z_n \in D$ – последовательность точек такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = t_0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \varphi(t_0) = \zeta_0.$$

По определению области G точка $\varphi(z_n) \in G$. Следовательно, точка ζ_0 не принадлежит G. Поскольку ζ_0 является пределом точек из G, то $z_0 \in L_0$. Отсюда и из леммы 1 следует, что контуры L и L_0 совпадают.

Пусть теперь для некоторой пары точек $z_0 \in D$ и $t_0 \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\varphi(z_0) = \varphi(t_0). \tag{24}$$

По определению G и L, имеем $\varphi(z_0) \in G$, $\varphi(t_0) \in L$. Из (24) следует, что $\zeta_0 \equiv \varphi(t_0) = \varphi(z_0)$ одновременно принадлежит и контуру L и области D. Поэтому $\zeta_0 \in L$ и $\zeta_0 \notin L_0$. Но если условие (23) нарушается хотя бы для пары точек $z_0 \in D$ и $t_0 \in \Gamma$, то $L_0 \neq L$. Лемма 2 доказана.

Следующий пример показывает, что оба случая леммы 2 возможны.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = z - \alpha z^2, \tag{25}$$

где α – положительная постоянная.

В качестве области D берем единичный круг $|z| < 1$. Очевидно, что границей Γ является единичный круг $|z| = 1$. Тогда неравенство (23) для функции (25) запишется в виде

$$\alpha(z + t) \neq 1, \quad |z| < 1, \quad |t| = 1. \tag{26}$$

При $0 < \alpha < 1/2$ неравенство (26) всегда выполняется. Поэтому, согласно лемме 2, контуры L и L_0 совпадают.

Пусть $\alpha > 1/2$. Тогда условие (26) нарушается хотя бы для пары точек $t = 1$ и $z = \alpha^{-1} - 1$. Поэтому в этом случае L_0 принадлежит контуру L, но не совпадает с L.

Пусть $\varphi(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi'(z_0) \neq 0, \quad \varphi(z) \neq \varphi(z_0) \quad \text{при} \quad z \in D, \quad z \neq z_0;$$

$$\varphi(z) \neq \varphi(t) \quad \text{при} \quad z \in D, \quad t \in \Gamma,$$

где z_0 – фиксированная точка в D.

Пусть G и L – те же, что и выше. Тогда имеет место следующая

Теорема 5. *Если контур L – гладкий, то функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на область G.*

Доказательство. Согласно лемме 2 границей области G является контур L. Пусть $\zeta_0 = \varphi(z_0)$. Согласно определению области G и контура L имеем $\zeta_0 \in G$ и $\varphi(z) \in L$ при $z \in \Gamma$. Поэтому функция $\varphi(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Отсюда следует справедливость теоремы 5.

Пусть теперь хотя бы для одной пары точек $z_0 \in D$ и $t_0 \in \Gamma$ имеет место равенство (24). Тогда граница L_0 области G принадлежит контуру L, но не совпадает с ним.

Задача. Какой частью L является граница L_0 области G.

Пусть $\varphi(z) = z - z^2$, D является единичным кругом $|z| < 1$. Функция $\varphi(z)$ принимает одинаковые значения на окружности $|z| = 1$ только в паре точек

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \overline{z}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \text{где} \quad \varphi(z_1) = \varphi(\overline{z}_1) = 1.$$

Пусть γ_1 – дуга окружности $|z| = 1$ между точками z_1 и $\overline{z}_1$ (обход против часовой стрелки), и пусть γ_2 – остальная часть окружности $|z| = 1$. Точки z_1 и $\overline{z}_1$ будем включать как в γ_1, так и в γ_2.

Обозначим через L_1 и L_2 образы γ_1 и γ_2, соответственно, при отображении $\zeta = \varphi(z)$. Так как $\varphi(z_1) = \varphi(\overline{z}_1)$, то L_1 и L_2 являются замкнутыми кривыми (без концов). Графики контуров L_1 и L_2 показывают, что контур L_1 обхватывает контур L_2 и они имеют только одну общую точку $\zeta = 1$. Имеем $L = L_1 \bigcup L_2$. Легко проверить, что граница L_0 области G совпадает с контуром L_1.

ABSTRACT. The paper describes a new method of conformal mapping of simply connected domains, under conditions weaker than those imposed in the principle of correspondence of boundaries and that can be easily verified.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
2. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 1, Наука, М., 1968.

6 апреля 1997

Армянский государственный инженерный университет

ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

В работе представлен новый метод решения задачи Римана–Гильберта в областях, ограниченных образом окружности $(x-d)^2+y^2=R^2$, $d \geq 0$, $R > 1+d$ при отображении Жуковского.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть γ – окружность $|t-d| = R$, $d \geq 0$, $R > 1+d$, а Γ – образ этой окружности при отображении Жуковского

$$z = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \equiv \omega(t), \tag{1}$$

где $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$.

Пусть D – область, ограниченная контуром Γ. Если $d = 0$, то область D – внутренность эллипса.

Задача Римана–Гильберта формулируется следующим образом : найти аналитическую в области D функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замкнутой области $D \bigcup \Gamma$ и удовлетворяющую граничному условию

$$\mathrm{Re}[a(z)\,\varphi(z)] = f(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{2}$$

где $a(z)$ и $f(z)$ – заданные на Γ функции, $a(z) \neq 0$ и $f(z)$ вещественнозначна. Предполагается, что $a(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гельдера на контуре Γ.

В монографии [1] (стр. 174) задача Римана–Гильберта сведена к сингулярным интегральным уравнениям и получены дефектные числа, а в случае круга – явная формула для решения этой задачи. Цель данной работы – свести решение этой задачи к функциональным уравнениям в классе аналитических функций и записать решение в виде равномерно сходящихся рядов. Полученные результаты мы используем для построения конформного отображения области D на единичный круг.

§1. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ПРИ $a \equiv 1$

В этом параграфе исследуем задачу Римана–Гильберта, когда граничное уравнение имеет вид

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = f(z), \qquad z \in \Gamma. \tag{3}$$

Известно [1], что задача (3) всегда имеет решение и оно определяется единственным образом с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. Подставляя $z = \omega(t)$ в (3), получим

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = f_0(t), \quad t \in \gamma, \tag{4}$$

где

$$\Psi(t) = \varphi(\omega(t)), \tag{5}$$

$$f_0(t) = f(\omega(t)). \tag{6}$$

Пусть γ_0 – единичная окружность $|t| = 1$, а G_0 – двусвязная область, ограниченная окружностями γ и γ_0. Так как область $|t| > 1$ содержит окружность γ, то по определению контура Γ следует, что функция Жуковского (2) конформно отображает область G_0 на область D с разрезом $[-1, 1]$. Поэтому функция $\Psi(t)$ аналитична в G_0, непрерывна в $G_0 \bigcup \gamma \bigcup \gamma_0$ и, следовательно, представляется в виде

$$\Psi(t) = \Psi_0(t) + \Psi_1(t), \qquad t \in G_0 \bigcup \gamma \bigcup \gamma_0, \tag{7}$$

где $\Psi_0(t)$ аналитична в круге $|t - d| < R$, непрерывна в замкнутом круге, а $\Psi_1(t)$ аналитична в области $|t| > 1$, непрерывна в замкнутой области $|t| \geq 1$ и исчезает на бесконечности.

Из (2) и (5) имеем

$$\Psi(t) = \Psi(1/t) \quad \text{при} \quad |t| = 1. \tag{8}$$

Подставляя $\Psi(t)$ из (7) в (8), получим

$$\Psi_0(t) - \Psi_1(1/t) = \Psi_0(1/t) - \Psi_1(t), \quad |t| = 1. \tag{9}$$

Так как $\Psi_0(t) - \Psi_1(1/t)$ аналитична в круге $|t| < 1$, $\Psi_0(1/t) - \Psi_1(t)$ аналитична в области $|t| > 1$ и стремится к $\Psi_0(0)$ при $|t| \to +\infty$, то из (9) имеем (см. [1], стр. 148)

$$\Psi_0(t) - \Psi_1(1/t) = \Psi_0(0) \quad \text{при} \quad |t| < 1, \tag{10}$$

$$\Psi_0(1/t) - \Psi_1(t) = \Psi_0(0) \quad \text{при} \quad |t| > 1. \tag{11}$$

Легко заметить, что равенства (10) и (11) эквивалентны, поэтому будем рассматривать только равенство (11). Подставляя $\Psi_1(t)$ из (11) в (7), получим

$$\Psi(t) = \Phi(t) + \Phi(1/t), \qquad t \in G_0 \bigcup \gamma \bigcup \gamma_0, \tag{12}$$

где $\Phi(t) = \Psi_0(t) - \dfrac{1}{2}\Psi_0(0)$.

Подставляя $\Psi(t)$ из (12) в граничное условие (4), получим

$$\operatorname{Re}\,[\Phi(t) + \Phi(1/t)] = f_0(t), \quad t \in \gamma, \tag{13}$$

где $\Phi(t)$ – искомая функция, аналитичная в круге $|t - d| < R$ и непрерывная в замкнутом круге $|t - d| \le R$.

Рассмотрим отображение, обратное к отображению Жуковского $t = z + \sqrt{z^2 - 1} \equiv \delta(z)$, где под $\sqrt{z^2 - 1}$ понимается ветвь корня, непрерывная вне отрезка $[-1, 1]$, принимающая положительные значения при $z = x > 1$.

Функция $t = \delta(z)$ конформно отображает область D без отрезка $[-1, 1]$ на область G_0. Подставляя $t = \delta(z)$ в (12), учитывая обозначение (5) и равенство $[\delta(z)]^{-1} = z - \sqrt{z^2 - 1}$, получим

$$\varphi(z) = \Phi(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \Phi(z - \sqrt{z^2 - 1}). \tag{14}$$

Пусть $\Psi^+(x)$ и $\Psi^-(x)$ – предельные значения функции $\Psi(z)$ при $z \to x$, $\operatorname{Im} z > 0$ и $z \to x$, $\operatorname{Im} z < 0$, соответственно, где $-1 \le x \le 1$. Из (14) имеем

$$\varphi^+(x) = \varphi^-(x), \qquad -1 \le x \le 1, \tag{15}$$

а также, что функция $\varphi(z)$ аналитична в области $D\setminus[-1,1]$, а из (15) следует, что она аналитически продолжается всюду в области D.

Таким образом, решение задачи (3) определяется формулой (14), где $\Phi(z)$ – общее решение задачи (13). Граничное условие (13) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left(\Phi(t)+\overline{\Phi(1/\bar{t})}\right)=f_0(t), \quad t\in\gamma, \tag{16}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Пусть $|t-d|=R$. Тогда

$$(t-d)(\bar{t}-d)=R^2, \quad t=\frac{R^2}{\bar{t}-d}+d, \quad \frac{1}{t}=\frac{\bar{t}-d}{R^2-d^2+d\bar{t}}.$$

Следовательно, условие (16) запишется в виде

$$\operatorname{Re}\left[\Phi(t)+\overline{\Phi(\overline{\alpha_1(t)})}\right]=f_0(t), \quad t\in\gamma, \tag{17}$$

где $\alpha_1(t)=(t-d)(R^2-d^2+dt)^{-1}$.

Подставляя $t-d=\tau$ в (17), получим

$$\operatorname{Re}\left[\Phi(\tau+d)+\overline{\Phi(\overline{\alpha_2(t)})}\right)=g(\tau), \quad |\tau|=R, \tag{18}$$

где

$$\alpha_2(\tau)=\frac{\tau}{R^2+d\tau}, \qquad g(\tau)=f_0(\tau+d). \tag{19}$$

Обозначим

$$\Phi_0(\tau)=\Phi(\tau+d). \tag{20}$$

Тогда граничное условие (18) запишется в виде

$$\operatorname{Re}\left[\Phi_0(\tau)+\overline{\Phi_0(\overline{\alpha(\tau)})}\right]=g(\tau), \quad |\tau|=R, \tag{21}$$

где

$$\alpha(\tau)=\frac{\tau}{R^2+d\tau}-d. \tag{22}$$

Из (20) имеем

$$\Phi(t)=\Phi_0(t-d). \tag{23}$$

Так как $\Phi(t)$ аналитична в круге $|t-d|<R$, то из (20) следует, что $\Phi_0(\tau)$ аналитична в круге $|\tau|<R$. Следовательно, функция $\Phi(t)$ определяется формулой

(23), где $\Psi_0(t)$ аналитична в круге $|t| < R$, непрерывна в замкнутом круге $|t| \leq R$ и удовлетворяет граничному условию (21). Из (22) имеем

$$|\alpha(\tau)| \leq \frac{R}{R^2 - dR} + d = \frac{1}{R-d} + d < 1 + d < R \quad \text{при} \quad |t| \leq R. \tag{24}$$

Поэтому выражение в квадратных скобках в (21) аналитично в круге $|\tau| < 1$. Следовательно, из условия (21) имеем (см. [2], стр. 223)

$$\left[\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\overline{\alpha(\tau)})}\right] = g_0(\tau) + ic_0, \quad |\tau| < 1, \tag{25}$$

где c_0 – произвольная постоянная

$$g_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + \tau}{\zeta - \tau} g(\zeta)\, d\theta, \qquad \zeta = R e^{i\theta}. \tag{26}$$

Так как $\alpha(\tau)$ аналитична в круге $|\tau| < R$ и удовлетворяет условию (24), то по теореме Руше (см. [2], стр. 454) функция $\alpha(\tau)$ в этом круге имеет единственную неподвижную точку τ_0. При $d > 0$

$$\tau_0 = -\frac{(R^2 + d^2 - 1) + \sqrt{(R^2 + d^2 - 1)^2 - 4d^2R^2}}{2d}. \tag{27}$$

Из (27) следует, что неподвижная точка τ_0 действиетльна и удовлетворяет неравенству $-R < \tau_0 \leq 0$. При $d = 0$ неподвижной точкой функции $\alpha(\tau)$ является $\tau_0 = 0$. Пусть функция $\Phi_1(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$, а c – число. Подставляя в (25) функцию

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z)\,(z - \tau_0) + c, \tag{28}$$

получим

$$c + \overline{c} + \Phi_1(\tau)\,(\tau - \tau_0) + (\alpha(\tau) - \tau_0)\, \overline{\Phi_1\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)} = g_0(\tau) + i\,c_0. \tag{29}$$

Подставляя $\tau = \tau_0$ в (29), учитывая, что $\alpha(\tau_0) = \tau_0$, получим $2\mathrm{Re}\,c - ic_0 = g_0(\tau_0)$. Следовательно

$$\mathrm{Re}\, c = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, g_0(\tau), \qquad c_0 = \mathrm{Im} g_0(\tau_0). \tag{30}$$

Имеем

$$\alpha(\tau) - \tau_0 = \alpha(\tau) - \alpha(\tau_0) = \frac{\tau}{R^2 - \tau d} - \frac{\tau_0}{R^2 - \tau_0 d} = \frac{R^2(\tau - \tau_0)}{(R^2 - \tau d)(R^2 - \tau_0 d)}.$$

Подставляя $c+\bar{c}$ и c_0 из (30) в (29) и разделив обе части (29) на $\tau-\tau_0$, получим

$$\Phi_1(\tau)=\beta(\tau)\,\overline{\Phi_1\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)}+g_1(\tau),\quad |\tau|<R, \tag{31}$$

где

$$\beta(\tau)=\frac{-R^2}{(R^2-\tau d)(R^2-\tau_0 d)},\qquad g_1(\tau)=\frac{g_0(\tau)-g_0(\tau_0)}{\tau-\tau_0}. \tag{32}$$

Так как $-R<\tau_0\le 0$ и $R>1+d$, то из (32) получим

$$|\beta(z)|\le\frac{1}{R(R-d)}\equiv q<1\quad\text{при}\quad |z|\le R. \tag{33}$$

Это неравенство показывает, что норма оператора

$$k(\Phi_1)\equiv\beta(\tau)\,\overline{\Phi_1\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)} \tag{34}$$

меньше 1. Следовательно, уравнение (31) имеет единственное решение и оно запишется в виде ряда Неймана (см. [3], стр. 47)

$$\Phi_1(\tau)=g_1(\tau)+K(g_1(\tau))+K^2(g_1(\tau))+\ldots, \tag{35}$$

где $K^n(g_1(\tau))=K(K^{n-1}(g_1(\tau)))$ при $n>1$. Из (33) и (34) имеем

$$|K^n(g_1(\tau))|\le q^n\max_{|\tau|\le R}|g_1(\tau)|=q^n\,||g_1||.$$

Таким образом, ряд (35) равномерно сходится в круге $|\tau|\le R$. Теперь запишем ряд (35) в явном виде. Обозначим

$$\begin{gathered}\alpha_1(\tau)=\alpha(\tau),\quad \alpha_2(\tau)=\alpha(\alpha(\tau)),\quad\ldots\quad,\alpha_n(\tau)=\alpha_{n-1}(\alpha(\tau)),\\ \beta_1(\tau)=\beta(\tau),\quad\ldots\quad,\beta_n(\tau)=\beta(\tau)\,\beta(\alpha_1(\tau))\ldots\beta(\alpha_{n-1}(\tau)),\quad n=2,3,..\end{gathered} \tag{36}$$

Из (22) и (23) следует, что $\overline{\alpha(t)}=\alpha(\bar{t})$, $\overline{\beta(t)}=\beta(\bar{t})$. Отсюда имеем

$$\overline{\alpha_n(t)}=\alpha_n(\bar{t}),\qquad \overline{\beta_n(t)}=\beta_n(\bar{t}),\qquad n=1,2,\ldots. \tag{37}$$

Из (34) и (37) вытекает, что

$$K^n(g_1(\tau))=\begin{cases}\beta_n(\tau)\,\overline{g_1(\alpha_n(\overline{\tau}))} & \text{при}\quad n=1,3,5,\ldots,\\ \beta_n(\tau)\,g_1(\alpha_n(\tau)) & \text{при}\quad n=2,4,6,\ldots.\end{cases}$$

Поэтому ряд (35) можно записать в виде

$$\Phi_1(\tau) = g_1(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_{2k}(\tau)\, g_1(\alpha_{2k}(\tau)) + \beta_{2k-1}(\tau)\, \overline{g_1(\alpha_{2k-1}(\overline{\tau}))}\right]. \tag{38}$$

Из (33) и (36) имеем

$$|\beta_k(\tau)| \le q^n \quad \text{при} \quad |\tau| \le R,\ |g_1(\alpha_{2k}(\tau))| \le \|g_1\|,\ |g_1(\alpha_{2k-1}(\overline{\tau}))| \le \|g_1\|,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, решение задачи (3) определяется формулой (14), где $\Phi(t) = \Phi_0(\tau - d)$, $\Phi_0(\tau) = \Phi_1(\tau)(\tau - \tau_0) + c_1 + ic_2$,

$$c_1 = \operatorname{Re} c = \frac{1}{2} g_0(\tau_0), \tag{39}$$

$c_2 = \operatorname{Im} c$ – произвольная вещественная постоянная, а $\Phi_1(\tau)$ определяется формулой (38).

В формулах (38) и (39) функции $g_0(\tau)$ и $g_1(\tau)$ определяются через $f(z)$ при помощи формул (6), (19), (26) и (32).

§2. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Обозначим через m индекс функции $\alpha(z)$ на контуре Γ, т.е. приращение функции $\alpha(z)$, деленное на 2π, когда точка z обходит контур Γ в положительном направлении. Так как функция $\alpha(z)$ непрерывна на Γ и $\alpha(z) \neq 0$ на Γ, то индекс m является целым числом. Используя метод, предложенный в [4], рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $m = 0$. Тогда функция $\arg \alpha(z)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера на Γ. В §1 указан метод решения этой задачи. Имеем

$$\operatorname{Re} \Psi_0(z) = \arg \alpha(z), \quad z \in \Gamma, \tag{40}$$

где $\Psi_0(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $D \bigcup \Gamma$. Пусть $\Psi_0(z)$ – одно из решений задачи (40). Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= |\alpha(z)| \exp\left(i \arg \alpha(z)\right) = |\alpha(z)| \exp\left(i \operatorname{Re} \Psi_0(z)\right) = \\ &= |\alpha(z)| \exp\left(i\Psi_0(z) + \operatorname{Im} \Psi_0(z)\right) = b(z)\, \varphi_0(z), \quad z \in \Gamma, \end{aligned} \tag{41}$$

где

$$b(z) = |\alpha(z)| \exp\left(\operatorname{Im} \Psi_0(z)\right), \qquad \varphi_0(z) = \exp\left(i\Psi_0(z)\right).$$

При сделанных предположениях любое решение задачи Римана–Гильберта (2) удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$ (см. [4]). Поэтому $\varphi_0(z)$ аналитична в области D и удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$, а $b(z)$ – вещественная функция, $b(z)>0$ при $z\in\Gamma$ и удовлетворяет условию Гельдера на Γ. Ясно, что $\varphi_0(z)\neq 0$ при $z\in D\bigcup\Gamma$. Подставляя $\alpha(z)$ из (41) в (2), получим

$$\operatorname{Re}\Psi(z)=\frac{f(z)}{b(z)},\quad z\in\Gamma,$$

где $\Psi(z)=\varphi(z)\,\varphi_0(z)$.

Таким образом, задачу (2) мы свели к задаче (3). Пусть $m\neq 0$, а $\Psi_m(z)$ аналитична в области D и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\Psi_m(z)=\arg\left(z^{-m}\,\alpha(z)\right),\qquad z\in\Gamma.$$

Так как индекс функции $z^{-m}\,\alpha(z)$ равен нулю, то аргумент также удовлетворяет условию Гельдера на Γ. Тогда, аналогично (41), получим

$$z^{-m}\,\alpha(z)=b_m(z)\,\varphi_m(z),\tag{42}$$

где $b_m(z)=|\alpha(t)\,z^{-m}|\,\exp\left(\operatorname{Im}\Psi_m(z)\right)$, $\varphi_m(z)=\exp\left(i\,\Psi_m(z)\right)$.

Подставляя $\alpha(z)$ из (42) в (2), получим

$$\operatorname{Re}\left[z^m\,\Psi(z)\right]=f_m(z),\tag{43}$$

где

$$\Psi(z)=\varphi(z)\,\varphi_m(z),\qquad f_m(z)=\frac{f(z)}{b_m(z)}.\tag{44}$$

Случай 2. Пусть $m\geq 1$. Тогда $z^m\,\Psi(z)$ является аналитической функцией в области D. Рассмотрим дополнительную задачу, решенную в §1 :

$$\operatorname{Re}\Phi(z)=f_m(z),\quad z\in\Gamma,\tag{45}$$

где $\Phi(t)$ – искомая аналитическая функция в области D. Пусть $\Phi(z)$ – одно из решений задачи (45). Из (43) и (45) имеем

$$\operatorname{Re}\left[z^m\,\Psi(z)-\Phi(z)\right]=0,\quad z\in\Gamma.\tag{46}$$

Так как $z^m\,\Psi(z) - \Phi(z)$ аналитична в области D, то из (46) получим

$$z^m\,\Psi(z) = \Phi(z) + ic_0, \tag{47}$$

где c_0 – произвольная вещественная постоянная.

Поскольку левая часть (47) имеет нуль порядка m, то и правая часть (47) обладает тем же свойством. Следовательно

$$\Phi(0) + ic_0 = 0, \tag{48}$$

$$\Phi^{(j)}(0) = 0, \qquad j = 1, ..., m-1. \tag{49}$$

Из (48) имеем

$$\operatorname{Re}\Phi(0) = 0, \tag{50}$$

$$c_0 = -\operatorname{Im}\Phi(0). \tag{51}$$

Таким образом, условия (49) и (50) необходимы для разрешимости задачи (2). Пусть эти условия выполнены. Тогда из (47) имеем

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z) + ic_0}{z^m}, \tag{52}$$

где c_0 определяется формулой (51).

Из условий (49) и (50) следует, что функция $\Psi(z)$, определенная формулой (52), аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$. Так как $\Phi(z)$ – решение задачи (45), то очевидно, что $\Psi(z)$ – решение задачи (43). Из (44) и (52) получаем

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z) + ic_0}{z^m\,\varphi_m(z)}.$$

Случай 3. Пусть $m \le 1$. Тогда решение $\Psi(z)$ задачи (43) можно представить в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k + ib_k)\,z^k + z^n\,\Psi_n(z), \tag{53}$$

где $n = -m$, a_k и b_k $(k = 0, ..., n-1)$ – вещественные постоянные, а $\Psi_n(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$.

Подставляя $\Psi(z)$ из (53) в (43), получаем

$$\operatorname{Re}\Psi_n(z) = f_m(z) + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\,g_{1k}(z) + b_k\,g_{2k}(z)\right], \quad z \in \Gamma, \tag{54}$$

где $g_{1k}(z) = -\operatorname{Re} z^{k-n}$, $g_{2k}(z) = \operatorname{Im} z^{k-n}$ $(k = 1, ..., n)$.

Известно, что задача (54) относительно аналитической функции $\Psi_n(z)$ имеет решение (см. §1) при произвольных вещественных постоянных a_k и b_k и оно определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. Пусть аналитические в области D и непрерывные в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$ функции $\Phi_0(z)$, $\Phi_{1k}(z)$ и $\Phi_{2k}(z)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\operatorname{Re}\Phi_0(z) = f_m(z),\ \operatorname{Re}\Phi_{1k}(z) = g_{1k}(z),\ \Phi_{2k}(z) = g_{2k}(z),\ \text{при } z \in \Gamma,\ k = 0, ..., n-1.$$

Тогда решение задачи (54) задается формулой

$$\Psi_n(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\,\Phi_{1k}(z) + b_k\,\Phi_{2k}(z)\right] + i\,c_0, \tag{55}$$

где c_0 – произвольная вещественная постоянная.

Общее решение в этом случае определяется формулой

$$\varphi(z) = \frac{\Psi(z)}{\varphi_m(z)},$$

где $\Psi(z)$ определяется формулами (53) и (55). Таким образом, и здесь общий случай сводится к решению задачи Римана (2) при $a \equiv 1$.

§3. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА КРУГ

Пусть D – область, рассмотренная в начале работы, а $\varphi(z)$ – конформное отображение области D на круг $|t| < 1$, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) > 0. \tag{56}$$

Из (56) следует, что конформно отображающую функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = z\cdot\varphi_0(z), \tag{57}$$

где $\varphi_0(z)$ аналитична в D, непрерывна в замкнутой области $D\bigcup\Gamma$ и удовлетворяет условиям

$$|z\cdot\varphi_0(z)| = 1, \quad z\in\Gamma, \qquad \varphi_0(z) \neq 0, \quad z \in D\bigcup\Gamma, \tag{58}$$

$$\varphi_0(0) > 0. \tag{59}$$

Из условий (57) — (59) следует, что функция

$$\varphi_1(z) \equiv \ln \varphi_0(z) \tag{60}$$

аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $D \bigcup \Gamma$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \varphi_1(z) = -\ln |z|, \qquad z \in \Gamma, \tag{61}$$

$$\operatorname{Im} \varphi_1(0) = 0. \tag{62}$$

Из (57) и (60) имеем

$$\varphi(z) = z \cdot \exp\left(\varphi_1(z)\right), \qquad z \in D. \tag{63}$$

Таким образом, задачу построения конформного отображения мы свели к задаче (61), (62), которая имеет единственное решение (см. [2], стр. 223). Используя методы, предложенные в §1, мы запишем решение задачи (61), (62) при помощи равномерно сходящихся рядов. Из-за частного вида правой части (61) здесь удается записать решение в более простом и компактном виде и избежать использования интеграла Шварца (26).

В §1 мы показали, что решение задачи (61) определяется формулой.

$$\varphi_1(z) = \Phi\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) + \Phi\left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{64}$$

где

$$\Phi(t) = \Phi_0(t - d), \tag{65}$$

а $\Phi_0(\tau)$ аналитична в круге $|\tau| < R$, непрерывна в замкнутом круге $|\tau| \leq R$ и удовлетворяет граничным условиям (см. (21))

$$\operatorname{Re}\left(\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)}\right) = -\ln\left[\frac{1}{2}\left|\tau + d + \frac{1}{\tau + d}\right|\right], \quad |\tau| = R. \tag{66}$$

Пусть $|\tau| = R$. Тогда $\overline{\tau} = R^2 \tau^{-1}$ и

$$\left|\tau + d + \frac{1}{\tau + d}\right| = \left|\overline{\tau} + d + \frac{1}{\overline{\tau} + d}\right| = \left|R^2\tau^{-1} + d + \frac{1}{R^2\tau^{-1} + d}\right| = \frac{|(R^2 + d\tau)^2 + \tau^2|}{R|R^2 + d\,\tau|}.$$

Следовательно, условие (66) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left[\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)} + \Psi_0(\tau)\right] = 0, \quad |\tau| = R, \tag{67}$$

где

$$\Psi_0(\tau) = \ln\left[\frac{(R^2+d\tau)^2+\tau^2}{2R(R^2+d\tau)}\right]. \tag{68}$$

Так как $R > 1 + d$, $d \geq 0$, то функция под знаком логарифма аналитична в замкнутом круге $|\tau| \leq R$ и не обращается в нуль. Поэтому функция $\Psi_0(\tau)$ аналитична в замкнутом круге $|\tau| \leq R$. Из (67) мы имеем (см. [2], стр. 223)

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)} + \Psi_0(\tau) = ic_0, \qquad |\tau| \leq R, \tag{69}$$

где c_0 – произвольная вещественная постоянная.

Из условия (68) следует, что функция $\Psi_0(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\Psi_0(\tau)} = \Psi_0(\overline{\tau}), \qquad |\tau| \leq R.$$

Исходя из решения (69) при $c_0 = 0$, мы будем требовать выполнения условия

$$\overline{\Phi_0(\tau)} = \Phi_0(\overline{\tau}), \qquad |\tau| \leq R. \tag{70}$$

Тогда очевидно, что

$$\overline{\Phi_0\left(\overline{\alpha(\tau)}\right)} = \Phi_0(\alpha(\tau)), \qquad |\tau| \leq R$$

и уравнение (69) при $c_0 = 0$ примет вид

$$\Phi_0(\tau) + \Phi_0(\alpha(\tau)) + \Psi_0(\tau) = 0, \qquad |\tau| \leq R. \tag{71}$$

Пусть τ_0 определяется формулой (27). В (70) делаем замену

$$\Phi_0(\tau) = \Phi_1(\tau)\,(\tau - \tau_0) + c, \tag{72}$$

где $\Phi_1(\tau)$ аналитична в круге $|\tau| < R$, непрерывна в замкнутом круге $|\tau| \leq R$, а c – неизвестная постоянная.

Подставляя $\Phi_0(\tau)$ из (72) в (71), аналогично (30) и (31) получим

$$c = -\frac{1}{2}\Psi_0(\tau_0), \tag{73}$$

$$\Phi_1(\tau) = \beta(\tau)\,\Phi_1(\alpha(\tau)) - \Psi_1(\tau), \tag{74}$$

где

$$\Psi_1(\tau) = \frac{\Psi_0(\tau) - \Psi_0(\tau_0)}{\tau - \tau_0}, \tag{75}$$

а $\beta(\tau)$ определяется формулой (32).

Так как функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет неравенству (33), то уравнение (74) имеет единственное решение и оно представляется рядом Неймана :

$$\Phi_1(\tau) = -\Psi_1(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\tau)\,\Psi_1(\alpha_k(\tau)), \tag{76}$$

где $\alpha_k(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ определяются формулами (36).

Легко заметить, что $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\Psi_1(\tau)$ также удовлетворяют условию $\overline{\alpha(\tau)} = \alpha(\overline{\tau})$, $\overline{\beta(\tau)} = \beta(\overline{\tau})$ и $\overline{\Psi(\tau)} = \Psi_1(\overline{\tau})$. Следовательно, этому условию удовлетворяют также функции $\alpha_k(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ при $k = 1, 2, \ldots$, а также $\Phi_1(\tau)$, определенная формулой (76). Так как в (72) постоянные c и τ_0 вещественны (см. (27) и (73)), то $\Phi_0(\tau)$ также удовлетворяет условию (70).

Пусть теперь $\Phi_0(\tau)$ и $\Phi_1(\tau)$ определены формулами (72), (76), а $\Phi(\tau) = \Phi_0(\tau - d)$. Тогда функция $\varphi_1(z)$, определенная формулой (64), удовлетворяет условию (61). Действительно, из (64), (65) и (70) имеем

$$\operatorname{Im}\varphi_1(0) = \operatorname{Im}[\Phi(i) + \Phi(-i)] = \operatorname{Im}[[\Phi_0(i-d) + \Phi_0(-i-d)]] =$$

$$= \operatorname{Im}[[\Phi_0(i-d) + \overline{\Phi_0(i-d)}] = 0,$$

откуда следует, что $\varphi_1(z)$ удовлетворяет условию (62). Следовательно, конформно отображающая функция $\varphi(z)$ определяется из формул (63) — (65), (72), (73) и (76).

§4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ФАБЕРА

Пусть γ – окружность $|t| = R$, $R > 1$, а Γ – образ окружности γ при отображении Жуковского (1). Как мы уже сказали, контур Γ является эллипсом. Меняя R от 1 до $+\infty$, получим всевозможные эллипсы с расстоянием между фокусами, равными 2. При помощи линейного отображения $\zeta = k\,z$ любой эллипс можно конформно отобразить на такой эллипс.

Пусть D – область, ограниченная эллипсом Γ, и пусть $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая облатсь D на круг $|\zeta| < 1$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$.

В работе [2] (стр. 170) функция $\varphi(z)$ представлена через эллиптические интегралы, а в §3 – равномерно сходящимся функциональным рядом. Цель данного параграфа – представить функцию $\varphi(z)$ через полиномы Фабера.

Аналогично §2 (формулы (63) — (65), (68) и (71) при $d = 0$), получаем

$$\varphi(z) = z \cdot \exp(\varphi_1(z)), \quad z \in D, \tag{77}$$

где

$$\varphi_1(z) = \Phi(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \Phi(z - \sqrt{z^2 - 1}), \tag{78}$$

а $\Phi(\tau)$ аналитична в круге $|\tau| < R$ и удовлетворяет условию

$$\Phi(\tau) + \Phi\left(\frac{\tau}{R^2}\right) = -\ln\left(1 + \frac{\tau^2}{R^4}\right) - \ln\frac{R}{2}. \tag{79}$$

Разложим функции $\Phi(\tau)$ и $\ln(1 + \tau^2 R^{-4})$ в ряд Тейлора :

$$\Phi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k, \quad |\tau| < R,$$

$$\ln\left(1 + \frac{\tau^2}{R^4}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\tau^{2k}}{R^{4k}}, \qquad |\tau| = R.$$

Подставляя эти разложения в уравнение (79), получим

$$\Phi(\tau) = -\frac{1}{2}\ln\frac{R}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^{2k}}{1 + R^{4k}}. \tag{80}$$

Подставляя же в (78), получим

$$\varphi_1(z) = -\ln\frac{R}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{P_{2k}(z)}{1 + R^{4k}}, \tag{81}$$

где

$$P_{2k}(z) = (z + \sqrt{z^2 - 1})^{2k} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{2k},$$

а $P_{2k}(z)$ – полином Фабера порядка $2k$.

Для контура Γ имеем

$$\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right| = R \quad \text{при} \quad z \in \Gamma,$$

$$\left|z - \sqrt{z^2 - 1}\right| = \frac{1}{\left|z + \sqrt{z^2 - 1}\right|} = \frac{1}{R} \quad \text{при} \quad z \in \Gamma.$$

Следовательно

$$|P_{2k}(z)| \leq R^{2k} + R^{-2k}, \qquad z \in D \bigcup \Gamma. \tag{82}$$

Так как $R > 1$, то из (82) следует, что ряд (81) равномерно сходится в замкнутой области $D \bigcup \Gamma$. Таким образом, конформно отображающая функция $\varphi(z)$ определяется формулой (77), где $\varphi_1(z)$ – это ряд (81).

ABSTRACT. The paper describes new methods for resolution of Riemann–Hilbert problem in domains bounded by the image of the circle $(x-d)^2 + y^2 = R^2$, $d \geq 0$, $R > 1 + d$ under the Zhukowski mapping.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Москва–Ленинград, 1951.
4. И. Н. Векуа, "Об одной линейной граничной задаче Римана", Тр. Тбилисского матем. ин-та АН Груз. ССР, т. XI, стр. 109 — 139, 1942.

12 декабря 1997

Армянский государственный
инженерный университет

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

С. А. Папян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + 2\,a\,\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + b\,u = 0, \tag{1}$$

где a, b – постоянные.

Мы будем искать решения u уравнения (1) в односвязной области D комплексной плоскости. Не умаляя общности будем считать, что $O \in D$. Пусть граница Γ области D удовлетворяет условию Ляпунова. Мы предполагаем, что u принадлежит классу дважды дифференцируемых в D функций, удовлетворяющих вместе со своими производными первого порядка условию Гельдера в $D \bigcup \Gamma$. На границе Γ $u(x, y)$ должна удовлетворять краевым условиям типа Римана

$$\mathrm{Re}u\big|_{\Gamma} = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{\Gamma} = g(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{3}$$

где $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(0,\alpha)}(\Gamma)$ – заданные вещественнозначные функции на Γ, N – внутренняя нормаль к Γ в точке (x, y).

Задача (1) — (3) называется однородной, если $f \equiv g \equiv 0$ на Γ.

Задачи с дифференциальными уравнениями типа (1), но с другими краевыми условиями рассматривались в монографии [1]. Краевые условия (2), (3) изучались в [2] — [4]. В случае, когда $a = b = 0$, задача (1) — (3) исследована в [2], [3]. Задача (1) — (3) рассматривалась в [5] в смысле L^1–сходимости, где была доказана нетеровость этой задачи и вычислен ее индекс.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2a\,\lambda + b = 0.$$

В настоящей работе доказывается

Теорема. *Задача (1) — (3) всегда разрешима и соответствующая однородная задача имеет четыре решения u_1, u_2, u_3, u_4, линейно независимые над полем вещественных чисел. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то при $z = x + iy$*

$$u_1(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}, \quad u_2(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}\,(z+\overline{z}),$$

$$u_3(x,y) = e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}\,(z-\overline{z}), \quad u_4(x,y) = e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}\,z\,\overline{z}.$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$u_1(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_1\overline{z}},\ u_2(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_2 z+\lambda_2\overline{z}},$$

$$u_3(x,y) = i\left(e^{\lambda_1\overline{z}+\overline{\lambda}_2 z} + e^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_2\overline{z}}\right),\ u_4(x,y) = e^{\lambda_1\overline{z}+\overline{\lambda}_2 z} - e^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_2\overline{z}}.$$

Общее решение однородной задачи (1) — (3) представляется в виде линейной комбинации функций u_1, ..., u_4 с вещественными коэффициентами.

Доказательство. Введем новую функцию $V(x,y)$ по формуле

$$u(x,y) = e^{-a\,\overline{z}-\overline{a}\,z}\,V(x,y), \qquad z = x+iy, \quad (x,y)\in D. \tag{4}$$

Подставляя в (1), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \overline{z}^2} - c^2\,V = 0, \quad (x,y)\in D, \tag{5}$$

где $c^2 = a^2 - b$.

Подставляя (4) в (2), (3) и учитывая, что функция $e^{-a\overline{z}-\overline{a}z}$ вещественнозначна, получим

$$\operatorname{Re} V|_\Gamma = f_1, \qquad \operatorname{Re}\left.\frac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = g_1, \tag{6}$$

где

$$f_1 = e^{a\,\overline{z}+\overline{a}\,z}\, f, \qquad g_1 = g\, e^{a\,\overline{z}+\overline{a}\,z} + 2\, f_1 \operatorname{Re}\left(\overline{a}\, e^{i\tau}\right), \qquad z = r\, e^{i\tau}. \tag{7}$$

Введем оператор L, действующий в просранстве дважды непрерывно дифференцируемых функций, и сопряженный оператор L^* :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2} - c^2 I, \qquad L^* = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \overline{c}^2 I. \tag{8}$$

В этих обозначениях задача (5), (6), эквивалентная задаче (1) — (3), примет вид :

$$\begin{cases} (LV)(x,y) \cdot = 0, & (x,y) \in D, \\ \operatorname{Re} V|_\Gamma = f_1, & \operatorname{Re} \left.\dfrac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = g_1. \end{cases} \tag{9}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial N}$ – вещественный оператор, получим, что если V – решение задачи (9), то функция $W(x,y) = \operatorname{Re} V(x,y)$ будет решением задачи

$$(L^* L)\, W(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D, \tag{10}$$

$$\operatorname{Re} W|_\Gamma = f_1, \qquad \operatorname{Re} \left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_\Gamma = g_1. \tag{11}$$

Решение W четырежды непрерывно дифференцируемо в D и вместе со своими производными первого порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы.

Лемма 1. *Любое действительное решение задачи (10), (11) можно представить в виде*

$$W(x,y) = Re\, V(x,y), \tag{12}$$

где V – решение задачи (9).

Доказательство. Уравнение (10) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \overline{c}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \overline{c}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - c\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + c\right) W = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$W(x,y) = e^{c\overline{z}}\, \varphi_1(z) + e^{-c\overline{z}}\, \varphi_2(z) + e^{\overline{c}\,z}\, \varphi_3(\overline{z}) + e^{-\overline{c}\,z}\, \varphi_4(\overline{z}), \tag{13}$$

где φ_1, φ_2 аналитичны в D, φ_3, φ_4 аналитичны в $\overline{D} = \{z\colon\ \overline{z} \in D\}$.

Нас интересует действительное решение задачи (10), (11), следовательно, $W = \operatorname{Re} W$ при $z \in D$, т.е

$$W = \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\varphi_1(z) + e^{-c\bar{z}}\varphi_2(z) + e^{\bar{c}z}\varphi_3(\bar{z}) + e^{-\bar{c}z}\varphi_4(\bar{z})\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\varphi_1(z) + e^{-c\bar{z}}\varphi_2(z) + e^{c\bar{z}}\overline{\varphi_3(\bar{z})} + e^{-c\bar{z}}\overline{\varphi_4(\bar{z})}\right) = \tag{14}$$

$$= \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\left(\varphi_1(z) + \overline{\varphi_3(\bar{z})}\right) + e^{-c\bar{z}}\left(\varphi_2(z) + \overline{\varphi_4(\bar{z})}\right)\right).$$

Так как функции $\omega_1(z) = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_3(\bar{z})}$ и $\omega_2(z) = \varphi_2(z) + \overline{\varphi_4(\bar{z})}$ аналитичны в D, то с учетом (14) получим

$$W = \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\omega_1(z) + e^{-c\bar{z}}\omega_2(z)\right). \tag{15}$$

Общее решение уравнения (9) допускает представление

$$V = e^{c\bar{z}}\omega_1(z) + e^{-c\bar{z}}\omega_2(z), \tag{16}$$

где ω_1, ω_2 аналитичны в D. Из (15) и (16) следует (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Однордная задача (10), (11) имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть $W(x, y)$ – решение однородной задачи (10), (11). Из (10) имеем

$$\iint_D (L^* L)\, W(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}\, dx\, dy = 0. \tag{17}$$

Известно (см. [6]), что функция $W(x, y)$ аналитична по x и y. Учитывая однородные условия (11) и дважды применяя формулу Грина в (17), получим

$$\iint_D |L\, W(x, y)|^2\, dx\, dy = 0.$$

Так как $(L\, W)(x, y)$ непрерывна в D, то

$$(L\, W)(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D.$$

Таким образом, функция W – решение уравнения (10), следовательно

$$W(x, y) = e^{-c\bar{z}}\omega_1(z) + e^{c\bar{z}}\omega_2(z), \tag{18}$$

где $c = \sqrt{a^2 - b}$ и $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ – аналитические в D функции. Из (18) имеем

$$W(z) = e^{-c\bar{z}}\chi(z), \tag{19}$$

где

$$\chi(z) = \omega_1(z) + e^{2c\,\bar{z}}\,\omega_2(z). \tag{20}$$

Подставляя (19) в (11), получим

$$\chi(z)|_\Gamma = 0, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Из (21) следует, что

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial S}\right|_\Gamma = 0, \tag{23}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial S}$ – оператор дифференцирования по длине дуги Γ.

Учитывая (20) и (21), имеем

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial y} = 0, \qquad z \in \Gamma. \tag{24}$$

Дифференцируя (20) по x и y, из (24) получим

$$\begin{aligned} &\Psi_1'(z) + 2\,c\,e^{2c\,\bar{z}}\,\Psi_2(z) + e^{2c\,\bar{z}}\,\Psi_2'(z) = 0,\\ &i\,\Psi_1'(z) - 2\,c\,i\,e^{2c\,\bar{z}}\,\Psi_2(z) + e^{2c\,\bar{z}}\,i\,\Psi_2'(z) = 0, \qquad z \in \Gamma. \end{aligned} \tag{25}$$

Из (25) следует, что

$$\Psi_2(z)|_\Gamma = 0. \tag{26}$$

Далее, из (22), (23) и (26) имеем

$$\Psi_1(z)|_\Gamma = 0. \tag{27}$$

Функции Ψ_1, Ψ_2 аналитичны в области D, следовательно, из условий (26) и (27) получаем

$$\chi(z) = \Psi_1(z) + e^{2c\bar{z}}\,\Psi_2(z) = 0, \qquad z \in D. \tag{28}$$

Таким образом, однородная задача (10), (11) имеет только тривиальное решение. Лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Известно [6], что если задача (10), (11) имеет единственное решение, то она разрешима для произвольных f_1 и g_1. В силу леммы 2 задача (10), (11) имеет действительное решение W, которое, согласно лемме 1, представляется в виде $W = \mathrm{Re}\,V$, где V – решение задачи (9). Таким образом, задача (9) разрешима.

Если V_1, V_2 – решения задачи (9), для которых $W = \mathrm{Re}\,V_1$, $W = \mathrm{Re}\,V_2$, то $\mathrm{Re}\,(V_1 - V_2) = 0$. Из [4] следует, что

$$V_1 - V_2 = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + C_4 u_4,$$

где C_i, $i = 1, ..., 4$ – вещественные постоянные. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Н. Е. Товмасяну за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Джураев, Метод сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1987.
2. Н. Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для неправильно–эллиптических уравнений высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 1, стр. 78 — 81, 1992.
3. А. А. Закарян, "Краевые задачи для неправильно–эллиптических уравнений", Диссертация, Ереван, 1989.
4. А. О. Бабаян, С. А. Папян, "О краевой задаче типа Римана для одного класса неправильно эллиптических дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 33, № 2, стр. 5 — 16, 1998.
6. Г. М. Айрапетян, "Задача типа Римана для неправильно-эллиптических уравнений в классе L^1", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 71 — 79, 1993.
7. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, ГИТТЛ, М., 1948.

15 января 1998

Армянский государственный инженерный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 33 НОМЕР 2 1998

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Сборник статей

CONTENTS

VOLUME 33 NUMBER 2 1998

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

ANALYTICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Collection of Papers

PAGES