

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ.Վ. Համբարձումյան

Ն.Հ. Առաքելյան

Գ.Գ. Գևորգյան

Վ.Ս. Ջաքարյան

Ա.Ա. Թալալյան

Ն.Ե. Թովմասյան

Վ.Ա. Մարտիրոսյան

Ս.Ն. Մերգելյան

Բ.Ս. Նահապետյան

Բ.Բ. Ներսեսյան

Ռ.Լ. Շահբազյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)

Ա.Գ. Քամալյան

Պատասխանատու քարտուղար

Մ.Ա. Հովհաննիսյան

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор Р.В. Амбарцумян

Н.У. Аракелян

Г.Г. Геворгян

В.С. Захарян

А.Г. Камалян

В.А. Мартиросян

С.Н. Мергелян

Б.С. Нахапетян

А.Б. Нерсесян

А.А. Талалян

Н.Е. Товмасын

Р.Л. Шахбазян (зам. главного редактора)

Ответственный секретарь

М.А. Оганесян

Заказ №3. Тираж 250.

Сдано в набор. Подписано к печати.

Печ. л. Бумага фирменная. Цена договорная.

Издательство "Гитутюн" НАН РА

Типография издательства "Гитутюн" НАН РА

375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ СПЕКТРА РАВНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Б. Т. Батикян, С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

В статье исследуются особые точки спектра равномерной алгебры. Показано, что кратные особые точки порождаются строго локальными точечными дифференцированиями, а приводимые особые точки — отождествлением в точку конечного подмножества спектра исходной алгебры. Доказана теорема о локальной нормализации особой точки.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе определяются и изучаются особые точки спектра $S(A)$ равномерной алгебры A . Мерой "особенности" точки $z \in S(A)$ будет служить целое число $\delta_A(z)$ — дефект точки z относительно алгебры A , которое определяется посредством алгебр ростков функций, A -голоморфных в (проколотой) окрестности точки z .

Показано, что если z — особая точка (тогда $z \in S(A) \setminus \partial A$ (теорема 4.3)), то алгебра A допускает такое расширение B , спектр $S(B)$ которого конечнолистно покрывает некоторую окрестность точки z , причем слой над z состоит из точек, регулярных относительно алгебры B (следствие 4.1). Другими словами, алгебра B осуществляет локальную нормализацию точки z . Мы покажем, что в процессе нормализации важную роль играют строго локальные точечные дифференцирования. С другой стороны, для одномерных аналитических множеств наше определение особой точки совпадает с обычным определением особой точки аналитического множества (теорема 5.1).

Однако, абстрактный случай существенно отличается от аналитического. В частности, могут существовать внутренние точки спектра, дефект которых

бесконечен (такие точки мы называем существенно особыми); множество особых точек может быть достаточно массивным.

Приведем схему изложения работы. В §1 изучаются спектры и границы Шилова алгебр A -голоморфных функций. В §2 описываются конструкции прямого предела алгебр A -голоморфных функций и обратного предела их спектров, приводятся основные определения, рассматриваются примеры. В следующих параграфах исследуются свойства особых точек (кратность, приводимость), описывается нормализирующее расширение алгебры A .

Напомним теперь некоторые определения и результаты теории равномерных алгебр, используемые в работе, и зафиксируем обозначения. (Подробности см. [1]).

Коммутативная банахова алгебра A с единицей называется равномерной алгеброй, если $\|f^2\| = \|f\|^2$ для любого $f \in A$. Пусть $S(A)$ – спектр алгебры A , т.е. совокупность всех комплексных гомоморфизмов этой алгебры. Спектр $S(A)$ является компактом в слабо* топологии сопряженного к A пространства, причем алгебру A можно реализовать в виде такой равномерно замкнутой подалгебры в $C(S(A))$, которая содержит постоянные функции и разделяет точки $S(A)$. В нашей работе дополнительно предполагается сепарабельность A , что равносильно метризуемости компакта $S(A)$. Спектром элемента $f \in A$ называется множество значений функции f на $S(A)$.

Каждый гомоморфизм $\rho : A \rightarrow B$ равномерных алгебр автоматически непрерывен и порождает непрерывное отображение $\pi : S(B) \rightarrow S(A)$ спектров этих алгебр, где $\pi(\varphi) = \rho \circ \varphi$, $\varphi \in S(B)$. Отображение π называется двойственным к гомоморфизму ρ .

Для произвольного замкнутого подмножества $E \subset S(A)$ через $A|E$ обозначается сужение алгебры A на компакт E , а через A_E – замыкание $A|E$ по норме $\|f\|_E = \sup_E |f|$. Спектр равномерной алгебры A_E содержится в $S(A)$ и называется A -выпуклой оболочкой множества E . Компакт E называется A -выпуклым, если $S(A_E) = E$. Каждая точка $z \in S(A)$ обладает базой замкнутых A -выпуклых окрестностей.

Через ∂A обозначается граница Шилова алгебры A , т.е. такое наименьшее замкнутое подмножество $S(A)$, что $\|f\| = \|f\|_{\partial A}$ для всех $f \in A$. Точка $y \in \partial A$ называется точкой пика, если существует такая функция $g \in A$, что $g(y) = 1$ и $|g| < 1$ на $S(A) \setminus \{y\}$. Множество точек пика есть плотное подмножество границы Шилова. Согласно локальному принципу максимума модуля (теорема Росси) $\partial A_{\overline{U}} \subset (\partial A \cap \overline{U}) \cup bU$, где U – открытое подмножество $S(A)$, bU – топологическая граница U .

Если h – ограниченная непрерывная функция на U , то через $[A, h]$ будет обозначаться равномерная алгебра, порожденная элементами A и функцией h . Всякая функция из алгебры $[A, h]$ есть равномерный предел на U элементов вида $\sum a_n h^n$, где $a_n \in A$.

Непрерывный линейный функционал d на алгебре A называется точечным дифференцированием, отвечающим точке $x \in S(A)$, если $d(fg) = d(f)g(x) + d(g)f(x)$ для всех $f, g \in A$. Точечное дифференцирование, отвечающее точке пика, тривиально. Точечное дифференцирование d называется локальным, если $d(g) = 0$ для всякой функции $g \in A$, обращающейся в нуль на некоторой окрестности точки x .

§1. A -ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть A – равномерная алгебра, и E – локально компактное подмножество спектра $S(A)$. Функция $h \in C(E)$ называется A -голоморфной в точке $y \in E$, если существует такая замкнутая окрестность $\overline{V}$ точки y , что $h \in A_{\overline{V} \cap E}$. Функция h называется A -голоморфной на E , если она A -голоморфна в каждой точке E . Совокупность всех ограниченных A -голоморфных на E функций мы будем обозначать через $H_A(E)$, а ее замыкание по вюр-норме на E – через $O_A(E)$. (Равномерный предел A -голоморфных функций не обязательно A -голоморфен [2]). Понятно, что $O_A(E)$ – равномерная алгебра, спектр которой, вообще говоря, не содержится в $S(A)$. Если E – замкнуто, то, очевидно, $A_E \subset O_A(E)$.

Зафиксируем произвольную неизолированную точку $x \in S(A)$; и пусть $\overline{U}$ – некоторая ее замкнутая окрестность, а $\overline{U}^* = \overline{U} \setminus \{x\}$ – соответствующая проколота окрестность. Сопоставим этим окрестностям равномерные алгебры

$\mathcal{O}_A(\bar{U})$, $\mathcal{O}_A(\bar{U}^*)$ и $\mathcal{O}_A^c(\bar{U}) = C(\bar{U}) \cap \mathcal{O}_A(\bar{U}^*)$. Ясно, что $H_A^c(\bar{U}) = C(\bar{U}) \cap H_A(\bar{U}^*)$ есть плотная подалгебра алгебры $\mathcal{O}_A^c(\bar{U})$. Кроме того

$$A_{\bar{U}} \subset \mathcal{O}_A(\bar{U}) \subset \mathcal{O}_A^c(\bar{U}) \subset \mathcal{O}_A(\bar{U}^*). \quad (1.1)$$

Прежде чем перейти к описанию границ Шилова алгебр $\mathcal{O}_A(\bar{U})$ и $\mathcal{O}_A^c(\bar{U})$ заметим, что поскольку их элементы суть непрерывные функции на $\bar{U}$, то спектры этих алгебр содержат $\bar{U}$, а границы Шилова содержатся в $\bar{U}$. Далее, из (1.1) вытекают включения $\partial A_{\bar{U}} \subset \partial \mathcal{O}_A(\bar{U}) \subset \partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U})$.

Теорема 1.1. $\partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U}) = \partial \mathcal{O}_A(\bar{U}) = \partial A_{\bar{U}}$.

Доказательство. Пусть y принадлежит $\bar{U} \setminus \partial A_{\bar{U}}$ и отлична от x . Тогда для всякого $f \in H_A^c(\bar{U})$ найдется такая окрестность V точки y , что $\bar{V} \cap \partial A_{\bar{U}} = \emptyset$ и $f \in A_{\bar{U}}$. Согласно локальному принципу максимума модуля $\partial A_{\bar{U}} \subset b\bar{V}$, т.е. $|f(y)| \leq \|f\|_{b\bar{V}}$. Это означает, что $\partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U})$ содержится в $\partial A_{\bar{U}} \cup \{x\}$.

Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $x \in \partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U}) \setminus \partial A_{\bar{U}}$. В этом случае x , являясь изолированной точкой $\partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U})$, будет точкой пика для $\mathcal{O}_A^c(\bar{U})$. Пусть g — функция из $\mathcal{O}_A^c(\bar{U})$, образующая пик в x . Тогда последовательность g^n равномерно на $\partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U})$ сходится к характеристической функции h точки x . Таким образом, $h \in \mathcal{O}_A^c(\bar{U})$ и x — изолированная точка $\bar{U}$ а, значит, и $S(A)$. Полученное противоречие доказывает, что $\partial \mathcal{O}_A^c(\bar{U}) = \partial A_{\bar{U}}$.

Предположим, что окрестность $\bar{U}$ A -выпукла, т.е. $S(A_{\bar{U}}) = \bar{U}$. Рассмотрим естественное непрерывное отображение $\pi : S(\mathcal{O}_A(\bar{U}^*)) \rightarrow \bar{U}$, вызванное вложением $A_{\bar{U}} \subset \mathcal{O}_A(\bar{U}^*)$. Поскольку каждая функция из алгебры $\mathcal{O}_A(\bar{U}^*)$ непрерывна на $\bar{U}^*$, то $S(\mathcal{O}_A(\bar{U}^*))$ содержит в себе $\bar{U}^*$, т.е. прообраз $\pi^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \bar{U}^*$ непуст. Однако, совсем не очевидно, что этот прообраз одноточечен, т.е. что комплексный гомоморфизм алгебры $A_{\bar{U}}$, соответствующий точке $y \in \bar{U}^*$, однозначно продолжается до комплексного гомоморфизма $\mathcal{O}_A(\bar{U}^*)$.

Теорема 1.2. Пусть $\bar{U}$ — A -выпуклая окрестность точки $x \in S(A)$, $h \in H_A(\bar{U}^*)$, $B = [A_{\bar{U}}, h]$ — равномерная алгебра, порожденная алгеброй $A_{\bar{U}}$ и функцией h . Тогда комплексный гомоморфизм алгебры $A_{\bar{U}}$, соответствующий любой точке $y \in \bar{U}^*$, однозначно продолжается до комплексного гомоморфизма алгебры B .

Доказательство. Предположим противное. Тогда, если обозначить через π_λ естественное отображение $S(B) \rightarrow \bar{U}$, найдется такая точка $y_0 \in \bar{U}^*$, что $\pi_\lambda^{-1}(y_0)$ — неодноточечно. В частности, множество $\Delta = S(B) \setminus (\bar{U}^* \cup \pi_\lambda^{-1}(x))$ непусто. Заметим прежде всего, что

- 1) множество Δ открыто в $S(B)$. Действительно, если $\lambda \in \Delta$, то найдется такая ее окрестность W , что $\bar{W} \cap \pi_\lambda^{-1}(x) = \emptyset$. Поэтому $\pi_\lambda(\bar{W}) \subset \bar{U}^*$ и $V = W \setminus \pi_\lambda(\bar{W})$ — открытая окрестность точки λ , содержащаяся в Δ ;
- 2) $\Delta \cap \partial B = \emptyset$. В самом деле, если бы $\lambda \in \Delta$ являлась p -точкой (обобщенной точкой пика) для B , то нашлась бы функция $f \in B$ такая, что $|f(\lambda)| > 1/2$ и $|f| < 1/2$ на $\bar{U}^*$. Но тогда $\|f\| = \sup_{\bar{U}^*} |f(y)| \leq 1/2$, что невозможно.

Положим $K = \bar{\Delta}$ и $D = B_K$. В силу локального принципа максимума модуля $\partial D \subset b\Delta \subset \bar{U}^* \cup \pi_\lambda^{-1}(x)$. Пусть $\xi \in \partial D$ — обобщенная точка пика алгебры D . Предположим, что $\xi \in \bar{U}^*$. Тогда найдется такая окрестность W точки ξ , что $h \in A_{\bar{W}}$, т.е. существует последовательность $\{g_n\} \subset A$, равномерно на $\bar{W}$ сходящаяся к h . С другой стороны, по определению p -точки найдется такая функция $f \in D$, что $\|f\|_K \leq 1$, $|f(\xi)| \geq 3/4$ и $|f| < 1/4$ всюду вне $\pi_\lambda^{-1}(W)$. Так как $\xi \in b\Delta$, то множество $E = \{\lambda \in K : |f(\lambda)| \geq 1/2\}$ обязано содержать точки из Δ . Пусть $\lambda_0 \in E \cap \Delta$, а σ — ее мера Йенсена на ∂D . Носитель этой меры имеет непустое пересечение с W (иначе $|f(\lambda_0)| \leq \int |f| d\sigma < 1/2$). Поэтому

$$\left| \int (h - g_n) d\sigma \right| = \exp \log \left| \int (h - g_n) d\sigma \right| \leq \exp \int \log |h - g_n| d\sigma \rightarrow 0,$$

откуда $h(\lambda_0) = \lim \int g_n d\sigma = \lim g_n(\pi_\lambda(\lambda_0)) = h(\pi_\lambda(\lambda_0))$, т.е. точки λ_0 и $\pi_\lambda(\lambda_0)$ не разделяются функцией h , что невозможно.

Таким образом, каждая p -точка алгебры D содержится в $\pi_\lambda^{-1}(x) \cap S(D)$. Но множество $\pi_\lambda^{-1}(x) \cap S(D)$ D -выпукло, а D -выпуклая оболочка ∂D совпадает, очевидно, с $S(D)$. Отсюда $\Delta \subset S(D) \subset \pi_\lambda^{-1}(x)$, что тоже невозможно. Итак, $\Delta = \emptyset$, и теорема доказана.

Следствие 1.1. Если окрестность $\bar{U}$ — A -выпукла, то

- 1) $S(\mathcal{O}_A(\bar{U}^*)) = \bar{U}^* \cup \pi^{-1}(x)$,
- 2) $\partial \mathcal{O}_A(\bar{U}^*) \subset \partial A_{\bar{U}} \cup \pi^{-1}(x)$.

Доказательство. По теореме 1.2 всякий комплексный гомоморфизм алгебры $A_{\overline{U}}$, отвечающий точке множества $\overline{U}^*$, однозначно продолжается до гомоморфизма алгебры, возникающей в результате присоединения заданной функции $h \in H_A(\overline{U}^*)$. Так как $H_A(\overline{U}^*)$ плотна в $\mathcal{O}_A(\overline{U}^*)$, то отсюда следует первое утверждение. Для доказательства утверждения 2) надо повторить рассуждения доказательства теоремы 1.1.

Следствие 1.2. ([2], [3]) Если в условиях теоремы 1.2 функция h принадлежит $H_A^c(\overline{U})$, то $S(B) = \overline{U}$.

Доказательство. Так как элементы алгебры B – непрерывные функции на $\overline{U}$, то множество $\Delta = S(B) \setminus \overline{U}$ открыто и, кроме того, не пересекается с $\partial B = \partial A_{\overline{U}}$ (теорема 1.1). Так же как и в теореме 1.2 предположение о непустоте Δ приводит к противоречию.

Следствие 1.3. $S(\mathcal{O}_A(\overline{U})) = S(\mathcal{O}_A^c(\overline{U})) = \overline{U}$.

§2. ПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ АЛГЕБР А-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ.

РЕГУЛЯРНЫЕ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Пусть A – равномерная алгебра, и z – произвольная неизолированная точка из $S(A)$. Рассмотрим счетную локальную базу A -выпуклых окрестностей $\{\overline{U}_i\}$ точки z , образующих направленное множество по включению, и сопоставим каждой окрестности $\overline{U}_i$ тройку равномерных алгебр $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i) \subset \mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i) \subset \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$. Всякой паре индексов i и j , связанных отношением $i < j$ (т.е. $\overline{U}_i \subset \overline{U}_j$), соотнесем отображение ρ_{ij} , сопоставляющее функции $f \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ ее сужение на $\overline{U}_j^*$. Очевидно, ρ_{ij} есть сохраняющий константы гомоморфизм из $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ в алгебру $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*)$ (а также из $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i)$ в $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}_j)$ и из $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i)$ в $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j)$). Легко проверить, что $\{\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*), \rho_{ij}\}$ образует прямую систему, так что мы можем рассмотреть прямой предел $\mathcal{O}_A^*(z) = \varinjlim \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ этой системы. Напомним, что прямой предел есть множество классов, образованных в объединении $\bigcup_i \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ следующим отношением эквивалентности: функция $f \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ считается эквивалентной функции $g \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*)$, если существует индекс $l > i, j$ такой, что $\rho_{il}(f) = \rho_{jl}(g)$. Множество классов эквивалентности наделяется естественной алгебраической структурой, превращающей $\mathcal{O}_A^*(z)$ в комплексную коммутативную

алгебру с единицей, причем каноническое отображение $\rho_i : \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*) \rightarrow \mathcal{O}_A^*(x)$, сопоставляющее любой функции алгебры $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ содержащий ее класс эквивалентности, есть гомоморфизм алгебр. Класс $\rho_i(f) = f$, содержащий функцию f , называется ростком функции f в точке x . (Подробнее о пределе прямой системы см. [4], стр. 263-278). Аналогично определяются алгебры $\mathcal{O}_A^c(x) = \varprojlim \mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i)$ и $\mathcal{O}_A(x) = \varinjlim \mathcal{O}_A(\overline{U}_i)$.

Теорема 2.1. Коммутативные алгебры $\mathcal{O}_A^c(x)$ и $\mathcal{O}_A(x)$ локальны, т.е. обладают единственным максимальным идеалом.

Доказательство. Пусть M_i^c – максимальный идеал алгебры $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i)$, отвечающий точке x . Тогда $\{M_i^c, \rho_{ij}\}$ образует прямую систему, причем предел M^c этой системы есть максимальный идеал коразмерности 1 алгебры $\mathcal{O}_A^c(x)$. Если $h \in \mathcal{O}_A^c(x) \setminus M^c$, то найдутся такие индекс i и функция $h \in \mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i)$, что $\rho_i(h) = h$ и $h(x) \neq 0$. В силу непрерывности h можно подобрать такую окрестность $\overline{U}_j$ точки x , что $\rho_{ij}(h)$ не обращается в нуль на $\overline{U}_j$. По следствию 1.3 функция $\rho_{ij}(h)$ обратима в $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}_j)$, а тем самым росток h обратим в $\mathcal{O}_A^c(x)$. Аналогично устанавливается локальность алгебры $\mathcal{O}_A(x)$.

Если $\pi_{ij} : S(\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*)) \rightarrow S(\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*))$ – непрерывное отображение, двойственное к гомоморфизму ρ_{ij} , то $\{S(\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)), \pi_{ij}\}$ – есть обратная система компактных множеств. Пусть $S^* = \varprojlim S(\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*))$ – обратный предел этой системы. Известно, что обратный предел компактных множеств непуст и компактен [4, стр.269], а обратный предел спектров прямой системы является спектром прямого предела [5]. Таким образом, S^* – непустое компактное множество, служащее спектром для коммутативной алгебры $\mathcal{O}_A^*(x)$.

Покажем, что компакту S^* можно придать и другой смысл, связанный с предельным множеством ограниченной A -голоморфной функции. Число s называется предельным значением функции $f \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ в точке x , если существует такая последовательность $\{y_k\} \subset \overline{U}_i^*$, что $y_k \rightarrow x$ и $f(y_k) \rightarrow s$. Множество всех предельных значений f в точке x обозначим через $Cl(f, x)$.

Теорема 2.2. Если $f \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$, то $Cl(f, x)$ совпадает со спектром ростка $\rho_i(f)$ в алгебре $\mathcal{O}_A^*(x)$.

Доказательство. Пусть $y_k \rightarrow x$ и $f(y_k) \rightarrow 0$. Обозначим через N_i замкнутый идеал всех тех функций $g \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$, для которых $\lim g(y_k) = 0$. Заметим, что $M_i^c \subset N_i$, поэтому оболочка K_i идеала N_i должна содержаться в $\pi^{-1}(x)$ (см. следствие 1.1). Далее, если $i < j$, то $\rho_{ij}(N_i) \subset N_j$, откуда $\pi_{ij}(K_j) \subset K_i$. Тем самым $\{K_i, \pi_{ij}\}$ образует обратную систему компактных множеств, причем ее предел K непуст и содержится в S^* . Теперь, если $\varphi \in K$, то найдутся индекс $j > i$ и комплексный гомоморфизм $\varphi_j \in K_j$ такие, что $\varphi(\rho_i(f)) = \varphi_j(\rho_{ij}(f)) = 0$.

Обратно, пусть число c не является предельным значением для f . Это означает, что при некотором $j > i$ функция $(f - c)^{-1}$ будет ограниченной на $\overline{U}_j^*$. Выберем $g_n \in H_A(\overline{U}_j^*)$ так, чтобы g_n равномерно сходилась к $f - c$ и $\|g_n\| \geq \delta > 0$. Ясно, что тогда и g_n^{-1} принадлежат $H_A(\overline{U}_j^*)$, причем $g_n^{-1} \rightarrow (f - c)^{-1}$ по суп-норме на $\overline{U}_j^*$. Таким образом, $f - c$ обратим в алгебре $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*)$, а потому росток $\rho_i(f - c) = \rho_i(f) - c$ обратим в $\mathcal{O}_A^*(x)$, и c не принадлежит спектру ростка $\rho_i(f)$.

Следствие 2.1. Алгебра $\mathcal{O}_A^c(x)$ состоит из всех тех элементов алгебры $\mathcal{O}_A^*(x)$, которые имеют одноточечный спектр.

Доказательство. Действительно, пусть росток $\rho_i(f)$ функции $f \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$ имеет одноточечный спектр. Согласно теореме 2.2 функция f имеет только одно предельное значение и потому принадлежит $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i)$.

Из определения прямого предела следует, что $\mathcal{O}_A(x) \subset \mathcal{O}_A^*(x) \subset \mathcal{O}_A^c(x)$, причем эти алгебры имеют общую единицу. Обозначим через $\delta_A(x)$ размерность фактор-пространства $\mathcal{O}_A^*(x)/\mathcal{O}_A(x)$. Если положить $m_A(x) = \dim \mathcal{O}_A^c(x)/\mathcal{O}_A(x)$ и $r_A(x) = \dim \mathcal{O}_A^*(x)/\mathcal{O}_A^c(x)$, то, очевидно, $\delta_A(x) = m_A(x) + r_A(x)$.

Определение. Неизолированную точку x назовем

- 1) регулярной, если $\delta_A(x) = 0$,
- 2) особой, если $0 < \delta_A(x) < \infty$,
- 3) существенно особой, если $\delta_A(x) = \infty$.

Число $\delta_A(x)$ будем называть дефектом точки x относительно алгебры A .

Поскольку определение особой точки использует понятие подалгебры конечной коразмерности, приведем некоторые результаты о таких подалгебрах (см. [6], [7]). Пусть $A \subset B$ — коммутативные комплексные алгебры с общей единицей

и $\dim B/A = k$. Тогда существует цепочка таких подалгебр

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A_k = B,$$

что $\dim A_{i+1}/A_i = 1$, $0 \leq i \leq k-1$. При этом либо существует точечное дифференцирование на A_{i+1} , ядром которого служит A_i , либо существуют такие $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A_{i+1})$, что $A_i = \{a \in A_{i+1} : \varphi_1(a) = \varphi_2(a)\}$.

Пусть x — особая точка. Согласно следствию 2.1 компакт S^* состоит из $r_A(x)+1$ точек $\varphi_1, \dots, \varphi_{r_A(x)+1}$ и $\mathcal{O}_A^c(x) = \{f \in \mathcal{O}_A^*(x) : \varphi_1(f) = \dots = \varphi_{r_A(x)+1}(f)\}$. В таких случаях говорят, что алгебра $\mathcal{O}_A^c(x)$ получается из $\mathcal{O}_A^*(x)$ отождествлением точек S^* .

Далее пусть $\mathcal{O}_A(x) = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{m_A(x)-1} \subset A_{m_A(x)} = \mathcal{O}_A^c(x)$ — цепочка подалгебр коразмерности 1, соединяющая $\mathcal{O}_A(x)$ с $\mathcal{O}_A^c(x)$. Поскольку алгебра $\mathcal{O}_A^c(x)$ локальна, то алгебра $A_{m_A(x)-1}$ является ядром дифференцирования d в отождествленной точке φ , соответствующей максимальному идеалу M^c . Но тогда и $A_{m_A(x)-1}$ — локальная алгебра, и $M^c \cap A_{m_A(x)-1}$ — ее единственный максимальный идеал. (Действительно, если $d(f) = 0$, но $\varphi(f) \neq 0$, то росток f обратим в $\mathcal{O}_A^c(x)$. Тогда $0 = d(ff^{-1}) = d(f^{-1})\varphi(f)$, т.е. $d(f^{-1}) = 0$.) Поэтому и $A_{m_A(x)-2}$ является ядром точечного дифференцирования и т.д. Таким образом, элементы алгебры $\mathcal{O}_A(x)$ принадлежат пересечению ядер $m_A(x)$ точечных дифференцирований. Учитывая все это, естественно число $m_A(x)$ назвать кратностью, а $r_A(x)$ — порядком приводимости особой точки x . В частности, если $m_A(x) > 0$, то x назовем кратной особой точкой, если же $r_A(x) > 0$ ($r_A(x) = 0$), то — приводимой (неприводимой) особой точкой.

1. Примеры простых особенностей.

а) Пусть G — открытый единичный диск в $\mathbb{C}$ и $A = A(\overline{G})$ — алгебра всех тех непрерывных на $\overline{G}$ функций, которые равномерно аппроксимируются функциями, голоморфными в окрестности $\overline{G}$. Ясно, что всякая точка G есть регулярная точка спектра $S(A) = \overline{G}$. Но если рассмотреть подалгебру $A_1 = \{f \in A(\overline{G}) : f'(0) = 0\}$, то $\delta_{A_1}(0) = m_{A_1}(0) = 1$. Остальные точки G регулярны.

б) Пусть $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ — непересекающиеся диски, ξ_1 и ξ_2 — их центры. Рассмотрим равномерную алгебру $A(\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2) = A(\overline{G}_1) \oplus A(\overline{G}_2)$ и ее замкнутую подалгебру

$D = \{f \in A(\overline{G}_1) \oplus A(\overline{G}_2) : f(\xi_1) = f(\xi_2)\}$. Спектр алгебры D представляет собой букет $\overline{G}_1 \bigvee_{\xi_1 \equiv \xi_2} \overline{G}_2$ двух дисков с отождествленными центрами. Если x обозначает эту отождествленную точку, то $\delta_D(x) = r_D(x) = 1$. Остальные внутренние точки $S(D)$ регулярны.

в) Пусть B — алгебра тех непрерывных функций на цилиндре $[0, 1] \times \overline{G}$, для которых при всяком фиксированном $t \in [0, 1]$ функция $f(t, \xi)$ голоморфна на G . Рассмотрим замкнутый идеал I , состоящий из тех $g \in B$, для которых $g(t, 0) = \frac{\partial g(t, 0)}{\partial \xi} = 0$, и образуем равномерную алгебру $A = I \oplus \mathbb{C}$. Спектр алгебры A получается из цилиндра отождествлением в точку отрезка $[0, 1] \times \{0\}$. Если x есть указанная точка $S(A)$, то $r_A(x) = \infty$, а $m_A(x) = 1$.

2. Пусть $\overline{U}_i$ принадлежит локальной базе точки x , и $B = A_{\overline{U}_i}$. Если $\overline{V} \subset \overline{U}_i$, то, очевидно, $A_{\overline{V}} = B_{\overline{V}}$. Отсюда следует, что $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j) = \mathcal{O}_B(\overline{U}_j)$, $\mathcal{O}_A^*(\overline{U}_j) = \mathcal{O}_B^*(\overline{U}_j)$ и $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*) = \mathcal{O}_B(\overline{U}_j^*)$ при всех $j \geq i$. В частности, $\delta_A(x) = \delta_B(x)$.

3. Естественно, что в окрестности регулярной точки спектра возникает эффект устранения особенности A -голоморфной функции. Так, если $r_A(x) = 0$, то согласно теореме 2.2 $\mathcal{O}_A(\overline{U}^*) = \mathcal{O}_A^*(\overline{U})$. Если же $m_A(x) = 0$, то для любой функции $f \in \mathcal{O}_A^*(\overline{U})$ найдется такая окрестность $\overline{V} \subset \overline{U}$, что $f \in \mathcal{O}_A(\overline{V})$.

4. Понятие дефекта мы определили пока только для неизолированных точек спектра. Пусть теперь x_0 — изолированная точка $S(A)$. Тогда x_0 — точка пика и, начиная с некоторого места, $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i) = \mathcal{O}_A^*(\overline{U}_i) = \mathbb{C}$, а $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*) = \emptyset$. Исходя из этого, мы будем считать, что $m_A(x_0) = 0$, а $\delta_A(x_0) = r_A(x_0) = -1$.

§3. КРАТНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Кратные особые точки тесно связаны с точечными дифференцированиями специального вида. Поэтому вначале мы укажем на одно простое свойство функционалов, ядра которых образуют равномерную алгебру.

Пусть $A \subset B$ — равномерные алгебры и $\dim B/A = 1$. Тогда $A = \ker \psi$, где, как уже отмечалось, ψ — либо непрерывное дифференцирование в некоторой точке из $S(B)$ (в этом случае $S(A) = S(B)$), либо $\psi = c(\varphi_y - \varphi_z)$, где c — константа, $y, z \in S(B)$, а φ_y, φ_z — соответствующие комплексные гомоморфизмы (в этом случае $S(A)$ получается из $S(B)$ отождествлением точек y и z).

Лемма 3.1. Для любого открытого множества $U \subset S(B)$ либо $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$, либо $\dim B_{\overline{U}}/A_{\overline{U}} = 1$. Последнее утверждение справедливо в том и только том случае, когда функционал ψ ограничен на $\overline{U}$, т.е. когда найдется такая константа $c > 0$, что $|\psi(f)| \leq c\|f\|_{\overline{U}}$ для всех $f \in B$.

Доказательство. Обозначим через I (соответственно, через J) идеал всех тех функций из B (соответственно, A), которые обращаются в нуль на $\overline{U}$. Алгебра $B|\overline{U}$ изоморфна фактор-алгебре B/I , а алгебра $A|\overline{U}$ – фактор-алгебре A/J . Если $I \neq J$, то $B|\overline{U} = A|\overline{U}$, если $I = J$, то функционал ψ продолжается на $B|\overline{U}$, а $A|\overline{U} = \ker \psi$. Теперь, если ψ не ограничен на $\overline{U}$, то $A|\overline{U}$ всюду плотно в $B|\overline{U}$, если же ψ ограничен на $\overline{U}$, то $\dim B_{\overline{U}}/A_{\overline{U}} = 1$.

В частности, если $\psi = c(\varphi_y - \varphi_x)$, а B -выпуклое множество $\overline{U}$ не содержит y или z , то $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$. Аналогично, если ψ – непрерывное точечное дифференцирование в x , и B -выпуклое множество $\overline{U}$ не содержит x , то $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$.

Точечное дифференцирование назовем *строго локальным*, если оно ограничено на каждой окрестности точки x . Оказывается, что каждое строго локальное дифференцирование автоматически порождает кратную особую точку.

Теорема 3.1. Пусть B – равномерная алгебра, d – непрерывное дифференцирование на B в точке x , и $A = \ker d$. Тогда

- 1) $r_A(y) = r_B(y)$ для всех $y \in S(B)$,
- 2) $m_A(y) = m_B(y)$ для всех $y \in S(B)$, отличных от x ,
- 3) если d не строго локально, то $m_A(x) = m_B(x)$,
- 4) если d строго локально, то $m_A(x) = m_B(x) + 1$.

Доказательство. Согласно лемме 3.1 для любого $y \in S(B)$ найдется такая окрестность $\overline{U}$, что $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}) = \mathcal{O}_B^c(\overline{U})$ и $\mathcal{O}_A(\overline{U}^*) = \mathcal{O}_B(\overline{U}^*)$, и для всякого $y \neq x$ существует такая окрестность $\overline{V}$, что $\mathcal{O}_A(\overline{V}) = \mathcal{O}_B(\overline{V})$. Следовательно, $\mathcal{O}_A(y) = \mathcal{O}_B(y)$ для всех $y \neq x$, и $\mathcal{O}_A^c(y) = \mathcal{O}_B^c(y)$, $\mathcal{O}_A^*(y) = \mathcal{O}_B^*(y)$ для всех $y \in S(B)$, что доказывает утверждения 1) и 2).

Если дифференцирование d не строго локально, то найдется такая окрестность $\overline{U}$ точки x , что $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$, т.е. $\mathcal{O}_A(x) = \mathcal{O}_B(x)$. Пусть теперь d строго

локально. Поскольку для любой функции $h \in H_B(\bar{U}_i)$ найдется такая окрестность $\bar{V}$ точки x , что $\bar{V} \subset \bar{U}_i$ и $h|_{\bar{V}} \in B_{\bar{V}}$, то мы можем продолжить d на h , полагая $d(h) = d(h|_{\bar{V}})$. При этом $|d(h)| \leq c\|h\|_{\bar{V}} \leq c\|h\|_{\bar{U}_i}$, и если $d(h) = 0$, то $h|_{\bar{V}} \in A_{\bar{V}}$. Таким образом, для любого индекса i дифференцирование d непрерывно продолжается на $\mathcal{O}_B(\bar{U}_i)$, ядром d служит алгебра $\mathcal{O}_A(\bar{U}_i)$, и если $j \geq i$, то $d(h) = d(\rho_{ij}(h))$. Отсюда $\dim \mathcal{O}_B(x)/\mathcal{O}_A(x) = 1$ и $m_A(x) = m_B(x) + 1$.

Следующая теорема в некотором смысле обратна к теореме 3.1. Кроме того, она гарантирует существование такого расширения равномерной алгебры, которое понижает кратность особой точки, а дефекты близких точек оставляет неизменными.

Теорема 3.2. Пусть A – равномерная алгебра, и x – особая точка $S(A)$ кратности 1. Тогда существуют открытая окрестность U точки x , равномерная алгебра B_0 , содержащая A , и непрерывное строго локальное дифференцирование d_0 на B_0 , отвечающее точке x , что

- 1) $S(B_0) = S(A)$ и $A \subset \{f \in B_0 : d_0(f) = 0\}$,
- 2) $\delta_{B_0}(y) = \delta_A(y)$ для всех $y \in U^*$,
- 3) $r_{B_0}(x) = r_A(x)$ и $m_{B_0}(x) = 0$.

Доказательство. Согласно условию теоремы существует такое точечное дифференцирование d на $\mathcal{O}_A^c(x)$, что $\ker d = \mathcal{O}_A(x)$. Выберем в связи с этим росток $g \in \mathcal{O}_A^c(x)$ так, чтобы $d(g) = 1$ и $g(x) = 0$. Для этого ростка найдутся такой индекс i и функция $g \in \mathcal{O}_A^c(\bar{U}_i)$, что $g^2, g^3 \in \mathcal{O}_A(\bar{U}_i)$, но $\rho_{ij}(g) \notin \mathcal{O}_A(\bar{U}_j)$ для всех $j \geq i$. Дифференцирование d естественным образом индуцирует дифференцирование $d_i = d \circ \rho_i$ на $\mathcal{O}_A^c(\bar{U}_i)$ в точке x , но а priori не ясно – непрерывен функционал d_i или нет.

Рассмотрим равномерную алгебру $D_i = [\mathcal{O}_A(\bar{U}_i), g]$, представляющую собой полиномиальное расширение алгебры $\mathcal{O}_A(\bar{U}_i)$. Легко видеть, что каждый элемент множества $\ker d_i \cap D_i$ можно представить в виде $f_1 + g f_0$, где f_0, f_1 принадлежат $\mathcal{O}_A(\bar{U}_i)$ причем $f_0(x) = 0$. Согласно лемме 2.3 работы [8] указанное множество замкнуто, следовательно, дифференцирование d_i непрерывно на подалгебре D_i . Более того, по лемме 3.1 d_i строго локально, так как $\rho_{ij}(g)$ не при-

надлежит $\mathcal{O}_\Lambda(\overline{U}_j)$ при $j \geq i$.

Поскольку $\dim \mathcal{O}_\Lambda^c(x)/\mathcal{O}_\Lambda(x) = 1$, то всякая функция из $\mathcal{O}_\Lambda^c(\overline{U}_i)$ принадлежит D_j при некотором $j \geq i$, т.е. $\mathcal{O}_\Lambda^c(\overline{U}_i) = \bigcup_{j \geq i} \rho_{ij}^{-1}(D_j)$. Но тогда по теореме Бэра о категориях найдется такой индекс $l \geq i$, что $\rho_{il}(\mathcal{O}_\Lambda^c(\overline{U}_i)) = D_l$. В частности, композиция $d_l \circ \rho_{il} = d_0$ будет непрерывным строго локальным дифференцированием на $\mathcal{O}_\Lambda^c(\overline{U}_i)$, отвечающим точке x .

В силу плотности $H_\Lambda^c(\overline{U}_i)$ в $\mathcal{O}_\Lambda^c(\overline{U}_i)$ выберем функцию $h \in H_\Lambda^c(\overline{U}_i)$ так, чтобы $d_0(h) = d(h) = 1$ и рассмотрим равномерную алгебру $B = [A_{\overline{U}_i}, h]$. Дифференцирование d_0 непрерывно и строго локально на B , а его ядро содержит $A_{\overline{U}_i}$. Отметим также, что по следствию 1.2 $S(B) = \overline{U}_i$. Так как $h \in H_\Lambda^c(\overline{U}_i)$, то $\mathcal{O}_B^c(\overline{U}_j) = \mathcal{O}_\Lambda^c(\overline{U}_j)$ и $\mathcal{O}_B(\overline{U}_j^*) = \mathcal{O}_\Lambda(\overline{U}_j^*)$ при $j \geq i$, т.е. $\tau_B(x) = \tau_\Lambda(x)$. Точно также $m_B(y) = m_\Lambda(y)$ и $\tau_B(y) = \tau_\Lambda(y)$ для любого $y \in U_i^*$. Покажем теперь, что $\mathcal{O}_B(x) = \mathcal{O}_\Lambda^c(x)$, откуда будет следовать равенство $m_B(x) = 0$. Если функция f B -голоморфна на $\overline{U}_j$, $j \geq i$, то, очевидно, $f \in H_\Lambda^c(\overline{U}_j)$. Обратно, если $f \in \mathcal{O}_\Lambda^c(x)$, то $f = f_0 + ch$, где $f_0 \in \mathcal{O}_\Lambda(x)$. Следовательно, $f \in \mathcal{O}_B(x)$. Завершая доказательство, положим $B_0 = \{f \in C(S(A)) : f|_{\overline{U}_i} \in B\}$.

§4. ПРИВОДИМЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Покажем сперва, что при отождествлении в точку конечного подмножества спектра возникает приводимая особая точка. На дефекте остальных точек спектра этот процесс отождествления не отражается.

Теорема 4.1. Пусть B — равномерная алгебра, $\{y_0, z_0\} \subset S(B)$,

$A = \{f \in B : f(y_0) = f(z_0)\}$, x — отождествленная точка $S(A)$. Тогда

- 1) $\delta_\Lambda(y) = \delta_B(y)$ для всех $y \in S(A)$, $y \neq x$,
- 2) $m_\Lambda(x) = m_B(y_0) + m_B(z_0)$,
- 3) $\tau_\Lambda(x) = \tau_B(y_0) + \tau_B(z_0) + 1$.

Доказательство. Утверждение 1) сразу следует из леммы 3.1. Обращаясь к остальным утверждениям заметим, что достаточно малая окрестность $\overline{U}_i$ точки x будет представлять собой букет $\bigvee_{y_0 \equiv z_0} \overline{V}_i \cup \bigvee \overline{W}_i$ непересекающихся окрестностей $\overline{V}_i$ точки y_0 и $\overline{W}_i$ точки z_0 , а алгебра $A_{\overline{U}_i}$ есть подалгебра коразмерности 1 алгебры $B_{\overline{U}_i} \cup \overline{W}_i$. Следовательно, $H_\Lambda(\overline{U}_i)$ (соответственно, $H_\Lambda^c(\overline{U}_i)$) образует

подалгебру коразмерности 1 в алгебре $H_B(\overline{V}_i \cup \overline{W}_i) = H_B(\overline{V}_i) \oplus H_B(\overline{W}_i)$ (соответственно, в $H_B^c(\overline{V}_i) \oplus H_B^c(\overline{W}_i)$). Далее, $\overline{U}_i^* = \overline{V}_i^* \cup \overline{W}_i^*$, откуда $H_A(\overline{U}_i^*) = H_B(\overline{V}_i^*) \oplus H_B(\overline{W}_i^*)$. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_A(x) & & \xrightarrow{m_A(x)} & & \mathcal{O}_A^c(x) & & \xrightarrow{r_A(x)} & & \mathcal{O}_A^*(x) \\ 1 \downarrow & & & & 1 \downarrow & & & & 0 \downarrow \\ \mathcal{O}_B(y_0) \oplus \mathcal{O}_B(z_0) & \xrightarrow{m_B(y_0) + m_B(z_0)} & & \mathcal{O}_B^c(y_0) \oplus \mathcal{O}_B^c(z_0) & \xrightarrow{r_B(y_0) + r_B(z_0)} & & \mathcal{O}_B^*(y_0) \oplus \mathcal{O}_B^*(z_0) \end{array}$$

где каждая стрелка есть вложение, а рядом со стрелкой указана коразмерность.

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает возможность понижения порядка приводимости особой точки (ср. с теоремой 3.2).

Теорема 4.2. Пусть A — равномерная алгебра, и x — приводимая особая точка $S(A)$ порядка 1. Тогда существуют такие открытая окрестность U точки x , равномерная алгебра B_0 и точки y_0, z_0 из $S(B_0)$, что

- 1) $S(A)$ получается из $S(B_0)$ отождествлением точек y_0 и z_0 в точку x , и $A \subset \{f \in B_0 : f(y_0) = f(z_0)\}$,
- 2) $\delta_{B_0}(y) = \delta_A(y)$ для всех $y \in U^*$,
- 3) $r_{B_0}(y_0) = r_{B_0}(z_0) = 0$ и $m_{B_0}(y_0) + m_{B_0}(z_0) \leq m_A(x)$.

Доказательство. Если $r_A(x) = 1$, то компакт S^* состоит из двух комплексных гомоморфизмов φ_1, φ_2 и $\mathcal{O}_A^c(x) = \ker \psi$, где $\psi = c(\varphi_1 - \varphi_2)$. Выберем окрестность $\overline{U}_i$ так, чтобы (непрерывный) функционал $\psi_i = \psi \circ \rho_i$ был нетривиален на $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*)$. Пусть точка $y_0 \in S(\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*))$ соответствует гомоморфизму $\varphi_1 \circ \rho_i$, а z_0 — гомоморфизму $\varphi_2 \circ \rho_i$. По теореме 2.2 $\mathcal{O}_A^c(\overline{U}_i) = \{f \in \mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*) : f(y_0) = f(z_0)\}$, и мы можем считать, что $\overline{U}_j = \overline{V}_j \bigvee_{y_0 \equiv z_0} \overline{W}_j$ для всех $j \geq i$, где $\overline{V}_j, \overline{W}_j$ — непересекающиеся окрестности точек y_0 и z_0 . (Заметим, что ни одна из точек y_0 или z_0 не может быть изолированной. Действительно, если окрестность $\overline{V}_j$ или $\overline{W}_j$ одноточечна, то $\overline{U}_j \subset S(\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*))$, откуда $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*) = \mathcal{O}_A^c(\overline{U}_j)$, т.е. $r_A(x) = 0$.)

Обозначим через h ограниченную A -голоморфную на $\overline{U}_i^*$ функцию, равную 1 на $\overline{V}_i$ и 0 на $\overline{W}_i$, и рассмотрим равномерную алгебру $B = [A_{\overline{U}_i}, h]$. Согласно теореме 1.2 $S(B) = \overline{U}_i^* \cup \pi_A^{-1}(x)$, и так как каждый комплексный гомоморфизм на

идемпотенте h может принимать значение 1 или 0, то $\pi_h^{-1}(x) = \{y_0, z_0\}$. Отсюда $S(B) = \bar{V}_i \cup \bar{W}_i$, и если $D = \ker \psi_i \cap B$, то $S(D) = \bar{U}_i$ и $A_{\bar{U}_i} \subset D$.

Любая точка $y \in U_i^*$ обладает такой окрестностью $\bar{V}$, что $\bar{V} \subset U_i^*$ и $A_{\bar{V}} = B_{\bar{V}}$, поэтому $m_A(y) = m_B(y)$ и $r_A(y) = r_B(y)$. Ясно также, что $\mathcal{O}_D^c(\bar{U}_j) = \mathcal{O}_A^c(\bar{U}_j)$ и $\mathcal{O}_D(\bar{U}_j^*) = \mathcal{O}_A(\bar{U}_j^*)$, а $\mathcal{O}_A(\bar{U}_j) \subset \mathcal{O}_D(\bar{U}_j)$ для всех $j \geq i$. Итак, $r_D(x) = r_A(x) = 1$, а по теореме 4.1 $r_B(y_0) = r_B(z_0) = 0$. Точно также $m_A(x) \geq m_D(x) = m_B(y_0) + m_B(z_0)$. Наконец, положим $X = (S(A) \setminus \bar{U}_i) \cup \bar{V}_i \cup \bar{W}_i$ и $B_0 = \{f \in C(X) : f|_{\bar{V}_i \cup \bar{W}_i} \in B\}$. Теорема доказана.

Комбинация теорем 3.2 и 4.2 приводит к следующему результату о существовании расширения равномерной алгебры, которое осуществляет локальную нормализацию особой точки.

Следствие 4.1. Пусть A — равномерная алгебра и x — особая точка $S(A)$. Тогда существуют такая открытая окрестность U точки x , равномерная алгебра B и регулярные точки $y_1, \dots, y_k$, $k \geq 1$, из $S(B)$, что

- 1) $S(A)$ получается из $S(B)$ отождествлением точек $y_1, \dots, y_k$ в точку x ,
- 2) на алгебре B имеются такие строго локальные непрерывные дифференцирования d_n порядка $q_n \geq 0$ в точке y_n , $1 \leq n \leq k$, что $A \subset \{f \in B : f(y_1) = \dots = f(y_k), d_n(f) = 0, 1 \leq n \leq k\}$,
- 3) $\delta_B(y) = \delta_A(y)$ для всех $y \in U^*$.

Покажем теперь, что всякая неизолированная точка границы Шилова является существенно особой точкой.

Теорема 4.3. Если x — неизолированная точка границы Шилова равномерной алгебры A , то $r_A(x) = \infty$.

Доказательство. Пусть $\{U_n\}$, $\bar{U}_{n+1} \subset U_n$ — фундаментальная последовательность открытых окрестностей точки x . Поскольку точки пика плотны в ∂A , мы можем выбрать в U_n точку пика x_n и ее открытую окрестность V_n так, чтобы $\bar{V}_n \subset U_n \setminus \bar{U}_{n+1}$. Для фиксированной константы c ($0 < c < 1/3$) и точки x_n найдется такая функция $f_n \in A$, что $f_n(x_n) = 1$ и $|f_n(y)| \leq c^n$ для всех $y \in S(A) \setminus V_n$. Ясно, что функция $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ принадлежит $H_A(S(A)^*)$. Если $y_n \in U_n \setminus \bar{V}_n$, то $y_n \rightarrow x$ и $|g(y_n)| \leq \frac{c}{1-c}$. Но и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x , причем

$|g(x_n)| \geq \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Таким образом, $Cl(g, x)$ содержит более двух значений, а потому $r_A(x) \geq 1$. Предположим, что $r_A(x) < \infty$, и пусть $z_1, \dots, z_k$ — те регулярные точки спектра алгебры B , которые согласно следствию 4.1 отождествляются в точку x . Поскольку $x \in \partial A$, то хотя бы одна из этих точек z_n должна принадлежать ∂B и по доказанному выше не может быть регулярной. Полученное противоречие завершает доказательство.

§5. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОМЕРНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА

Здесь мы покажем, что в случае одномерного аналитического множества и соответствующей алгебры голоморфных функций наше определение особой точки совпадает с обычным понятием особой точки аналитического множества.

Пусть X — одномерное неприводимое аналитическое подмножество гладкой ограниченной области в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что точка $x \in X$ называется регулярной точкой, если существует такая ее окрестность U в X , что U биголоморфно эквивалентна одномерному диску G . Всякая не регулярная точка называется особой точкой аналитического множества X . Множество всех регулярных точек открыто в X и связно, множество особых точек дискретно (подробнее см. [9]).

Обозначим через $H(\overline{X})$ совокупность всех тех функций, которые голоморфны в n -мерной окрестности компакта $\overline{X}$, а через $A = A(\overline{X})$ — замыкание $H(\overline{X})$ по $\|\cdot\|_\infty$ -норме на $\overline{X}$. Известно, что спектр равномерной алгебры A совпадает с $\overline{X}$, а граница Шилова с $\overline{X} \setminus X$ (см. [10]).

Теорема 5.1. *Точка x является особой точкой аналитического множества X тогда и только тогда, когда $\delta_A(x) > 0$.*

Доказательство. Если x — регулярная точка, то найдется такая ее окрестность U ($\overline{U} \subset X$), которая биголоморфна единичному диску G комплексной плоскости. Следовательно, $A_{\overline{U}} = A(\overline{G})$ и $\delta_A(x) = \delta_{A_{\overline{U}}}(x) = 0$.

Пусть x — особая точка. Тогда x обладает окрестностью $\overline{U}$, которая не содержит других особых точек и представляет собой букет одномерных дисков $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_r$ с отождествленными в точку x центрами $z_1, \dots, z_r$, $r \geq 1$. Рассмотрим равномерную алгебру $B = A(\overline{G}_1) \oplus \dots \oplus A(\overline{G}_r)$. Согласно результатам работы

[10] существуют такие целые числа n_k , $1 \leq k \leq r$, что совокупность функций $f \in B$, для которых $f(x_1) = \dots = f(x_r)$, а порядок нуля функции $f - f(x_k)$ не меньше n_k , содержится в $A_{\overline{U}}$. Это означает, что $A_{\overline{U}}$ есть подалгебра конечной коразмерности в B , причем все точечные дифференцирования (высших порядков) на B , в пересечении ядер которых содержится $A_{\overline{U}}$, отвечают точкам x_k и строго локальны. Но тогда согласно теоремам 3.1 и 4.1 $\delta_A(x) = \delta_{A_{\overline{U}}}(x) < \infty$.

Заметим, что в теореме 5.1 алгебра B , осуществляющая локальную нормализацию особой точки, является конечным расширением алгебры $A_{\overline{U}}$. Можно показать, что в общем случае (следствие 4.1) алгебра B является целым расширением $A_{\overline{U}}$.

ABSTRACT. The paper investigates singular points of the spectrum of a uniform algebra and proves a theorem about local normalization of singular points. It follows that the multiple singular points are generated by strictly local point derivations, while the reducible singular points are generated by mapping a finite subset of the spectrum of the initial algebra to a point.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Гамелин, Равномерные алгебры, Мир, Москва, 1973.
2. С. Е. Rickart, "The maximal ideal space of functions locally approximable in a function algebra", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 17, pp. 1320 – 1326, 1966.
3. J.-E. Bjork, "Extensions of the maximal ideal space of a function algebra", Pacif. J. Math., vol. 27, pp. 453 – 462, 1968.
4. Н. Стиврод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, ГИФХМ, Москва, 1958.
5. Н. L. Royden, "Function algebras", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69, pp. 281 – 289, 1963.
6. Е. А. Горин, "Подалгебры конечной коразмерности", Мат. заметки, т. 6, стр. 321 – 328, 1969.
7. Б. Т. Батикян, "Подалгебры коразмерности 1 (некоммутативный случай)", Известия АН Армении, Математика, т. 12, № 6, стр. 341 – 344, 1977.
8. С. А. Григорян, "Полиномиальные расширения коммутативных банаховых алгебр", Известия АН Армении, Математика, т. 20, № 2, стр. 112 – 130, 1985.
9. Е. М. Чирка, Комплексные аналитические множества, Наука, Москва, 1985.
10. Н. Rossi, "Algebras of holomorphic functions on one-dimensional varieties", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 100, pp. 439 – 458, 1961.

ДВУДОЛЬНЫЕ (d, λ) -ДИЗАЙНЫ

Г. С. Гаспарян, А. Э. Лазарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

Пусть $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ и $B = \{B_1, \dots, B_m\}$ — две системы подмножеств некоторого n -элементного множества S , где $|A_i \cap B_j| = \lambda$ для любых $i \neq j$ и $|A_i \cap B_i| \neq \lambda$. Нетрудно показать, что $m \leq n + 1$. В статье исследуется крайний случай, когда $m = n + 1$. В частности, полученные результаты обобщают известное неравенство Фишера о блок схемах.

Дан метод построения неограниченного класса таких пар систем подмножеств для $\lambda = 1$, но все они имеют вершину, принадлежащую точно двум подмножествам из A или B . Показано, что минимальный пример без таких вершин должен иметь не менее 19 подмножеств.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть даны разные m подмножества $\{S_1, \dots, S_m\}$ некоторого n -элементного множества S , и $|S_i \cap S_j| = \lambda$ при $i \neq j$. Каково наибольшее значение m ? В случае, когда все подмножества имеют одинаковое количество элементов, Фишер доказал [1], что $m \leq n$. Для произвольных систем подмножеств это неравенство было доказано Райзером [2], используя методы линейной алгебры. Метод, предложенный им, впоследствии стал одним из самых мощных методов в комбинаторике. Неравенство $m \leq n$, известное как неравенство Фишера, имело большое влияние в развитии теории дизайна.

Мы обобщаем неравенство Фишера для двух систем подмножеств $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ и $B = \{B_1, \dots, B_m\}$, где $|A_i \cap B_j| = \lambda$, $i \neq j$ и $|A_i \cap B_i| \neq \lambda$. Мы показываем, что $m \leq n + 1$ и исследуем случай, когда $m = n + 1$.

Случай, когда $m = n$ и $\lambda = 1$, хорошо изучен. В частности, Эрдеш и де Бройен доказали [3], что если вершинно-множественные матрицы инцидентности A и

В систем A и B совпадают, то $A = B$ соответствует матрице проективной (может быть вырожденной) плоскости. Другой интересный результат был получен Легманом (см. [4]), который доказал, что если $|A_i \cap B_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, то либо A и B имеют равное количество единиц во всех строках и столбцах (тотально регулярны), либо обе — матрицы вырожденной проективной плоскости, т.е.

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Недавно эти результаты были обобщены в [5], где рассмотрен общий случай $|A_i \cap B_i| \neq |A_j \cap B_j| = 1$ и найдены некоторые достаточные условия, при которых A и B тотально регулярны.

В настоящей статье употребляются следующие обозначения: маленькими жирными латинскими буквами обозначаются векторы, большими латинскими буквами — матрицы. В частности, 1 означает вектор соответствующей длины из одних единиц, а I и J означают, соответственно, единичную матрицу и матрицу, где все элементы единицы. Компоненты вектора d обозначаются через d_i , $i = 1, \dots, m$, d^{-1} есть вектор $(d_1^{-1}, \dots, d_m^{-1})$. Для матрицы A a_{ij} — ее (i, j) -ий элемент, $a_{i.}$ — i -ая строка, $a_{.j}$ — j -ий столбец.

Пусть даны два вектора x и y длины n , и пусть D — невырожденная $n \times n$ матрица. Определим D -произведение векторов x и y : $(x, y)_D = x D^{-1} y^T$. В случае, когда $D = I$, получаем скалярное произведение

$$(x, y)_I = (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Скажем, что x и y пересекаются, если $(x, y) \neq 0$, в противном случае x и y не пересекаются. Будем писать $x \leq y$, если $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$. Линейную оболочку векторов a_i , $i = 1, \dots, m$ обозначим $\text{span}(a_1, \dots, a_m)$. Мы не будем отличать матрицу от множества ее столбцов. Матрицу с элементами $\{0, 1\}$ назовем $\{0, 1\}$ -матрицей. Если A — система множеств, то A означает вершинно-множественную матрицу инцидентности этой системы и наоборот. D или $\text{diag}(d)$ означает диагональную матрицу, где диагональные элементы — компоненты вектора d . Скажем, что A — s -однородна (или r -регулярна), если $JA = sJ$ ($AJ = rJ$).

Определение 1.1. Пару $(n \times m)$ $\{0, 1\}$ -матриц (A, B) назовем *двудольным* (d, λ) -*дизайном* (или просто (d, λ) -дизайном), если

$$A^T B = \lambda J + \text{diag}(d), \quad d_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \lambda \geq 1.$$

Если (A, B) - (d, λ) -дизайн, то столбцы матриц A и B с номером i назовем d_i -*столбцами*. Если $d_i > 0$, то соответствующий столбец назовем *положительным*, в противном случае столбец *отрицательный*.

Определение 1.2. Будем говорить, что пара $(n \times m)$ $\{0, 1\}$ -матриц (A, B) d -*нормирована* ($d_i \neq 0, i = 1, \dots, m$), если

$$1) \quad (a_{i*}, b_{j*})_D = (a_{i*}, 1)_D = (b_{i*}, 1)_D = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j;$$

$$2) \quad (a_{i*}, b_{i*})_D = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $D = \text{diag}(d)$.

§2. СВОЙСТВА (d, λ) -ДИЗАЙНОВ

Пусть $A, B - (n \times m)$ $\{0, 1\}$ -матрицы. Обозначим через A_λ и B_λ следующие матрицы:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \cdot 1 \\ A \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda} \cdot 1 \\ B \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Лемма 2.1. Если (A, B) - (d, λ) -дизайн, то $m \leq n + 1$.

Доказательство. Легко убедиться, что $A_\lambda^T B_\lambda = D$. Так как $d_i \neq 0$, то матрица A_λ имеет m линейно независимых строк, т.е. $m \leq n + 1$.

В последующем мы будем изучать случай $m = n + 1$, т.е. A и $B - (n \times n + 1)$ $\{0, 1\}$ -матрицы и (A, B) - (d, λ) -дизайн.

Лемма 2.2. Пара (A, B) - (d, λ) -дизайн тогда и только тогда, когда она d -нормирована и $(1, 1)_D = -1/\lambda$.

Доказательство. Пусть (A, B) - (d, λ) -дизайн. Рассмотрим матрицы A_λ и B_λ , определенные в (1). Легко убедиться, что

$$A_\lambda^T B_\lambda = D \iff A_\lambda^T B_\lambda D^{-1} = I \iff B_\lambda D^{-1} A_\lambda^T = I.$$

Последнее равенство эквивалентно следующему:

1) $\sqrt{\lambda} b_{i*} D^{-1} 1^T = 0 \iff (b_{i*}, 1)_D = 0$, то же самое верно и для матрицы A .

т.е. $(a_{i*}, 1)_D = 0$, $i = 1, \dots, n$;

2) $b_{i*} D^{-1} a_{i*}^T = 1 \iff (a_{i*}, b_{i*})_D = 1$, $i = 1, \dots, n$;

3) $b_{j*} D^{-1} a_{i*}^T = 0 \iff (a_{i*}, b_{j*})_D = 0$, $i \neq j$;

4) $-\lambda 1 D^{-1} 1^T = -\lambda(1, 1)_D = 1 \iff (1, 1)_D = -\frac{1}{\lambda} \iff \sum_{i=1}^{n+1} d_i^{-1} = -\frac{1}{\lambda}$.

Лемма 2.2 доказана.

Легко проверяется, что условие $(1, 1)_D = -1/\lambda$ эквивалентно условию $\det(\lambda J + D) = 0$.

Теорема 2.1. Пусть (A, B) — (d, λ) -дизайн. Тогда не имеют места ни $a_{i*} \leq b_{i*}$, ни $b_{i*} \leq a_{i*}$, $i = 1, \dots, n$, т.е.

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} (A_i \setminus B_i) = \bigcup_{i=1}^{n+1} (B_i \setminus A_i) = S.$$

Доказательство. Если $a_{i*} \leq b_{i*}$, то $1 = (a_{i*}, b_{i*})_D = (a_{i*}, 1)_D = 0$ есть противоречие. Рассмотрим множества $A_i \setminus B_i$, $i = 1, \dots, n$, где A_i и B_i — подмножества из систем множеств A и B . Легко убедиться, что любой элемент базисного множества S принадлежит по меньшей мере одному из этих множеств, а это значит, что $\bigcup_{i=1}^{n+1} (A_i \setminus B_i) = S$. Аналогично получаем, что $\bigcup_{i=1}^{n+1} (B_i \setminus A_i) = S$. Теорема 2.1 доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает неравенство Фишера (см. [1]): пусть $A_1, \dots, A_m$ — разные подмножества некоторого n -элементного множества, и пусть для любых $i \neq j$ имеет место $|A_i \cap A_j| = \lambda$, где $1 \leq \lambda \leq n$. Тогда $m \leq n$.

Лемма 2.3. Если (A, B) — (d, λ) -дизайн, то матрицы A и B не могут быть λ -однородными.

Доказательство. Предположим, что матрица A — λ -однородна. Сложив все строки матрицы, получим $1 \in \text{span}(a_{1*}, \dots, a_{m*})$. С другой стороны, матрица A_λ невырожденная, т.е. $1 \notin \text{span}(a_{1*}, \dots, a_{m*})$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.3.

Теперь рассмотрим случай, когда A r -регулярна.

Лемма 2.4. Если (A, B) — (d, λ) -дизайн и A r -регулярна, то компоненты вектора d равны либо $-\lambda$, либо $r - \lambda$ и $n\lambda \equiv 0 \pmod{r}$.

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение А. Шебо (см. [6]) : если (A, B) — (d, λ) -дизайн и A r -регулярна, то $d_j \equiv -(n+1)\lambda \pmod{r}$, $j = 1, \dots, n+1$. Действительно

$$\lambda(n+1) + d_j = \sum_{i=1}^{n+1} (a_{*i}, b_{*j}) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{*i}, b_{*j} \right) = r(1, b_{*j}), \quad (2)$$

следовательно, $d_j \equiv -(n+1)\lambda \pmod{r}$, $j = 1, \dots, n+1$.

Предположим, что $d_j \equiv -k \pmod{r}$, $j = 1, \dots, n+1$. Тогда $d_j \leq -k$, если $d_j < 0$ и $d_j \geq r - k$, если $d_j > 0$. Кроме того, $(n+1)\lambda \equiv k \pmod{r}$. Так как (A, B) — d -нормирована, то для каждой строки матрицы A сумма всех чисел d_i^{-1} , соответствующих всем тем “положительным” столбцам, которые имеют единицу в этой строке, не меньше 1. Это также верно для “отрицательных” столбцов. Следовательно, каждая строка матрицы A имеет не менее k единиц в “отрицательных” столбцах и $r - k$ единиц в “положительных” столбцах. Так как A — r -регулярна, то она имеет ровно k единиц в “отрицательных” столбцах и $r - k$ единиц в “положительных” столбцах каждой строки. А это означает, что либо $d_j = -k$, либо $d_j = r - k$. Из того, что $(a_{i*}, b_{i*})_D = 1$ и a_{i*} имеет ровно $r - k$ единиц в “ $r - k$ столбцах”, следует, что a_{i*} и b_{i*} не имеют общих единиц в позициях, соответствующих “отрицательным” строкам : $(a_{*j}, b_{*j}) = 0$, если $d_j < 0$. Следовательно, $d_j = -\lambda$, если $d_j < 0$ и $d_j = r - \lambda$, если $d_j > 0$. Кроме того $(n+1)\lambda \equiv \lambda \pmod{r}$ и, следовательно, $n\lambda \equiv 0 \pmod{r}$. Лемма 2.4 доказана.

Итак, мы получили, что число $p = \frac{n\lambda}{r}$ целое.

Лемма 2.5. Если (A, B) — (d, λ) -дизайн и A r -регулярна, то

$$(b_{*j}, 1) = \begin{cases} p, & \text{если } d_j = -\lambda, \\ p+1, & \text{если } d_j = r - \lambda, \end{cases} \quad (a_{*j}, 1) = r, \quad \text{если } d_j = r - \lambda.$$

Более того, имеются ровно $p+1$ “ $-\lambda$ -столбцы”.

Доказательство. Из (2) легко получается, что если $d_j = -\lambda$, то $\lambda n = r(1, b_{*j})$. Следовательно, $(1, b_{*j}) = n\lambda/r = p$. Аналогично, если $d_j = r - \lambda$, то $(1, b_{*j}) =$

$= (n\lambda + r)/r = p + 1$. Рассмотрим $(n \times n + 1)$ матрицу C , где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Очевидно

$$(c_{\cdot j}, 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_j = -\lambda, \\ r, & \text{если } d_j = r - \lambda, \end{cases} \quad (c_{j\cdot}, 1) = r - \lambda, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $1^T C 1 = n(r - \lambda) = rx$, где x - число "положительных" столбцов. Следовательно, $x = n - (n\lambda)/r = n - p$, а число $-\lambda$ -столбцов равно $p + 1$. Кроме того, если j - " $r - \lambda$ -столбец", то $a_{\cdot j} \leq b_{j\cdot}$. Отсюда $a_{\cdot j} = c_{\cdot j}$, если j - " $r - \lambda$ -столбец". Следовательно, $(a_{\cdot j}, 1) = r$, если $d_j = r - \lambda$. Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. Пусть (A, B) - (d, λ) -дизайн, а A r -регулярна. Если наибольший общий делитель $\text{НОД}(\lambda, r) = 1$, то $\lambda = 1$, $r = 2$.

Доказательство. Предположим, что $\text{НОД}(\lambda, r) = 1$ и $\lambda \neq 1 \neq r - \lambda$. Мы уже доказали, что $d_i = -\lambda$ или $d_i = r - \lambda$. Первая строка A имеет r единиц: $r - \lambda$ - в " $r - \lambda$ -столбцах" и λ - в " $-\lambda$ -столбцах". Так как $(a_{1\cdot}, b_{j\cdot})_D = 0$, $j = 2, \dots, n$, то либо $(a_{1\cdot}, b_{j\cdot}) = 0$, либо $(a_{1\cdot}, b_{j\cdot}) = r$. Поскольку B не имеет равных столбцов, получаем, что $a_{1\cdot}$ имеет только две единицы. Первая - в " $-\lambda$ -столбце" и вторая - в " $r - \lambda$ -столбце". Итак $\lambda = 1$ и $r - \lambda = 1$, т.е. $r = 2$. Лемма 2.6 доказана.

Объединяя леммы 2.4 - 2.6, получаем следующую теорему:

Теорема 2.2. Пусть (A, B) - (d, λ) -дизайн, где A r -регулярна. Тогда d имеет ровно $p + 1$ отрицательных компонент, равных $-\lambda$ и $n - p$ положительных компонент, равных $r - \lambda$. Кроме того

$$(b_{\cdot j}, 1) = \begin{cases} p, & \text{если } d_j = -\lambda, \\ p + 1, & \text{если } d_j = r - \lambda, \end{cases} \quad (a_{\cdot j}, 1) = r, \quad \text{если } d_j = r - \lambda.$$

Более того, $\text{НОД}(\lambda, r) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$ и $r = 2$.

Лемма 2.7. Пусть (A, B) - (d, λ) -дизайн. Тогда число единиц в каждой строке матриц A и B не равно трем.

Доказательство. Докажем утверждение для матрицы A . Любая строка A содержит единицу в отрицательных столбцах. Если строка, скажем $a_{1\cdot}$, содержит точно одну такую единицу, то из условия $(a_{1\cdot}, b_{j\cdot})_D = 0$, $j = 2, \dots, n$ следует, что либо $(a_{1\cdot}, b_{j\cdot}) = 0$, либо $a_{1\cdot} \leq b_{j\cdot}$ и $a_{1j} \leq b_{1j}$, если j - положительный столбец. Так как B не имеет равных столбцов, то $a_{1\cdot}$ имеет две единицы: одна - в " -1 -столбце" и другая - в "+1-столбце". Если строка имеет больше двух единиц в

отрицательных столбцах, то аналогично получаем, что она также имеет не менее единиц в положительных столбцах. Следовательно, строка имеет по меньшей мере 4 единицы. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. Пусть (A, B) — (d, λ) -дизайн. Для любого $d_k > 0$ обозначим $f_{d_k} = \{i : d_i = d_k\}$. Если для всех i таких, что $d_i \neq d_k$, $\text{НОД}(d_i, d_k) = 1$, то $|f_{d_k}| > d_k^2/\lambda$.

Доказательство. Предположим, для простоты, что все " d_k -столбцы" находятся в начале матриц A и B , $(a_{\cdot 1}, 1) = q \geq d_k + \lambda$ и все q единицы столбца $a_{\cdot 1}$ находятся в первых q строках. Мы знаем, что $(a_{\cdot 1}, b_{\cdot 1}) = d_k + \lambda$. Рассмотрим матрицу B' , полученную от B строками $1, \dots, q$ и столбцами $2, \dots, |f_{d_k}|$. Каждый столбец в B' содержит ровно λ единиц. Из условия леммы и из того, что $(a_{j\cdot}, b_{j\cdot})_D = 1$, $j = 1, \dots, d_k + \lambda$ следует, что каждая из первых $d_k + \lambda$ строк матрицы B' содержит по меньшей мере $d_k - 1$ единиц, следовательно, B' имеет не менее $(d_k + \lambda)(d_k - 1)$ единиц. Отсюда получаем, что число " d_k -столбцов" не меньше

$$\frac{(d_k + \lambda)(d_k - 1)}{\lambda} + 1 = \frac{d_k^2}{\lambda} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} d_k.$$

Итак, если $\lambda > 1$, то $|f_{d_k}| > d_k^2/\lambda$. Легко проверяется, что если $\lambda = 1$, то строгое неравенство сохраняется. Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.8 показывает, что если, например, среди компонент вектора d имеется простое число (скажем, существует k такое, что $d_k = 11$ и $\lambda = 2$), то размеры этого дизайна большие (число " 11 -столбцов" не меньше 61) и, поэтому, построить такой пример трудно.

§3. ДВУДОЛЬНЫЕ $(d, 1)$ -ДИЗАЙНЫ

Очевидно, что когда A 2-регулярна, то $\lambda = 1$, $d_i = \pm 1$ и n четно. Введем еще несколько обозначений. Пусть дан граф $G = G(V, E)$ и вершина $v \in V(G)$. Обозначим через $G \setminus v$ граф, полученный от G удалением вершины v , а через G/v — граф, полученный от G удвоением вершины v , т.е. добавлением новой вершины v' , которая смежна со всеми вершинами, смежными с v .

Пусть (v_1, v_2) — ребро графа G . Граф, полученный от G подразбиением этого ребра, получается следующим образом: добавляется новая вершина u и вместо

(v_1, v_2) берутся ребра (v_1, v) и (v, v_2) .

Определение 3.1. Будем говорить, что граф G паросочетаемый, если для любой вершины $v \in V(G)$ либо $G \setminus v$ либо G/v имеет совершенное паросочетание.

(Очевидно, что число вершин паросочетаемого графа нечетно.

Лемма 3.1. Паросочетаемые графы связные.

Доказательство. Пусть G – паросочетаемый граф. Так как число его вершин нечетно, граф должен иметь связную компоненту с нечетным числом вершин. Для любой вершины v вне этой компоненты ни $G \setminus v$ ни G/v не имеют совершенного паросочетания. Следовательно граф G связный.

Мы будем связывать эти графы с $(d, 1)$ -дизайнами. Поэтому мы будем рассматривать паросочетаемые графы с $n + 1$ вершинами и n ребрами, т.е. паросочетаемые деревья.

Определение 3.2. Будем говорить, что дерево T – 2-дерево, если оно получено от некоторого дерева T' подразбиением всех его ребер. Причем, вершину $v \in V(T)$ назовем старой, если $v \in V(T')$ и новой – в противном случае.

Лемма 3.2. Пусть (A, B) – $(d, 1)$ -дизайн. A 2-регулярна тогда и только тогда, когда она – матрица инцидентности (реберно-вершинная) некоторого паросочетаемого графа.

Доказательство. Пусть (A, B) – $(d, 1)$ -дизайн и $AJ = 2J$. Предположим, что A – матрица инцидентности некоторого графа с $n + 1$ ребрами и n вершинами. Тогда легко проверить, что i -й столбец матрицы B соответствует вектору инцидентности совершенного паросочетания графа $G \setminus v$, если это “-1 столбец”, или G/v , если это “+1 столбец”. Следовательно, граф паросочетаемый. Достаточность очевидна. Лемма 3.2 доказана.

Паросочетаемые деревья могут характеризоваться следующим образом :

Лемма 3.3. Дерево T паросочетаемое тогда и только тогда, когда оно – 2-дерево.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по числу вершин. Случай $n = 3$ легко проверяется. Предположим, что лемма верна для деревьев с числом

вершин, не превосходящим n , и докажем, что она также верна для любого $(n+2)$ -вершинного дерева T .

Предположим теперь, что T – паросочетаемое дерево. Пусть v – лист дерева T . Обозначим через v' вершину, смежную с v . Очевидно, что совершенное паросочетание графа, полученного удалением или удвоением любой другой вершины, содержит ребро (v, v') . Следовательно, граф, полученный от T удалением вершин v и v' , паросочетаемый. Это значит, что $\deg(v') = 2$ и дерево $T \setminus \{v, v'\}$ – 2-дерево (применяем предположение индукции). Пусть v'' – вторая вершина, смежная с v' . Если v'' – “старая” вершина, то необходимость очевидна. Но v'' не может быть “новой” вершиной, потому что в этом случае совершенное паросочетание $T \setminus v$ содержит ребро (v', v'') , а вершина v'' делит дерево $T \setminus \{v, v'\}$ на две части, каждая из которых имеет нечетное число вершин, следовательно, не может иметь совершенного паросочетания.

Предположим теперь, что T – 2-дерево и покажем, что оно паросочетаемое. Возьмем любую вершину $v \in V(T)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. v – “старая” вершина. Пусть $C_1, \dots, C_p$ – связные компоненты графа $T \setminus v$. Каждая компонента C_i содержит “новую” вершину v_i , смежную с v . Через v'_i обозначим вторую вершину, смежную с v_i . Применяя индукцию получаем, что графы $C_i \setminus \{v_i, v'_i\}$, $i = 1, \dots, p$ имеют совершенное паросочетание. Добавляя к ним ребра (v_i, v'_i) , $i = 1, \dots, p$, получим совершенное паросочетание графа $T \setminus v$.

Случай 2. v – “новая” вершина. Очевидно, что $T \setminus v$ содержит две связные компоненты C_1 и C_2 . Пусть $v_1 \in C_1$ и $v_2 \in C_2$ – “старые” вершины, смежные с v . Применяя индукцию получаем, что совершенное паросочетание $T \setminus v$ получается следующим образом: берутся ребра (v, v_1) и (v, v_2) и совершенные паросочетания $C_i \setminus v_i$, $i = 1, 2$.

Итак, T – паросочетаемое дерево. Лемма 3.3 доказана.

Теперь предложим метод построения нового $(d, 1)$ -дизайна, $d_i = \pm 1$ композицией двух других $(d, 1)$ -дизайнов. Предположим, что (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – $(d, 1)$ -дизайны, $A_1 = [A'a]$ и $B_1 = [B'b]$, где a и b – последние столбцы матриц A_1 и B_1 , соответственно. В качестве базиса можно брать $(d, 1)$ -дизайны,

соответствующие паросочетаемым деревьям. Возьмем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A' & a \cdot 1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B' & b \cdot 1^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Последние столбцы матриц A_1 и B_1 повторяются вправо и последний столбец матрицы $A_1(B_1)$ находится над первым столбцом матрицы $A_2(B_2)$. Таким образом, мы получаем новый $(d, 1)$ -дизайн.

Легко убедиться, что если в качестве базиса брать паросочетаемые деревья, то полученные дизайны имеют строки с двумя единицами.

Теорема 3.1. Пусть (A, B) — $(d, 1)$ -дизайн, где A и B не имеют строки с двумя единицами. Тогда $n \geq 19$.

Доказательство. Сначала покажем что матрицы A и B имеют строки по меньшей мере с 3 единицами в позициях, соответствующих “-1 столбцам”. Предположим обратное: пусть все единицы первого столбца находятся в первых r строках. Рассмотрим матрицу B' , полученную от B первыми r строками и всеми “-1 столбцами” кроме, возможно, столбца $b_{\cdot 1}$. Каждая строка B' содержит точно 2 единицы и каждый столбец имеет одну 1, следовательно, число B' столбцов четно. Таким образом, если в качестве $a_{\cdot 1}$ взять положительный столбец, число всех “-1 столбцов” четно, в противном случае это число нечетно. Мы пришли к противоречию, следовательно, B имеет строку по меньшей мере с 3 единицами в “-1 столбцах”.

Так как вышесказанное верно для любой пары положительного и отрицательного столбцов, то имеются как минимум две такие строки. Следовательно, B имеет не менее $4n + 4$ единиц. А это значит, что B имеет столбец с не меньше чем 5 единицами. Если это “-1 столбец”, то мы имеем не меньше чем 11 “-1 столбцов” и 10 положительных столбцов. Следовательно, число столбцов больше или равно 21. Если этот столбец положительный, то мы имеем по меньшей мере 10 “-1 столбцов” и не менее чем 9 положительных столбцов. Таким образом, число столбцов самое меньшее 19. Теорема 3.1 доказана.

Получить пример $(d, 1)$ -дизайна без строк с двумя единицами кажется трудно. Поэтому предлагаем следующее.

Гипотеза. Если $(A, B) - (d, 1)$ -дизайн, то либо A , либо B имеет строку с двумя единицами.

ABSTRACT. Let $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ and $B = \{B_1, \dots, B_m\}$ be two systems of subsets of some n -element set S , such that $|A_i \cap B_j| = \lambda$ for any $i \neq j$ and $|A_i \cap B_i| \neq \lambda$. It is easy to show that $m \leq n + 1$. In this paper we investigate the extreme case when $m = n + 1$. In particular, our results generalize the well-known inequality of R. Fisher on block designs. We describe a method of construction of a class of such pairs A, B for $\lambda = 1$. However, pairs constructed by this method always have a vertex belonging to exactly two subsets from A or B . We show that a minimal example, where no such vertices occur should have at least 19 subsets.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Fisher, "An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks", *Ann. Eugenics*, vol. 10, pp. 52 - 75, 1940.
2. H. Ryser, "An extension of a theorem of De Bruijn and Erdős on combinatorial designs", *J. Algebra*, vol. 10, pp. 246 - 261, 1968.
3. N. G. De Bruijn, P. Erdős, "On a combinatorial problem", *Indag. Math.*, vol. 10, pp. 421 - 423, 1948.
4. A. Lehman, "On the width-length inequality", *Mathematical Programming*, vol. 17, pp. 403 - 413, 1979.
5. G. S. Gasparian, "Bipartite designs", *J. Combinatorics* (in press).
6. A. Sebo, "Characterizing noninteger polyhedra with 0 - 1 constraints", *J. Combinatorics* (in press).

1 ноября 1997

Ереванский государственный университет

Э. А. Даниелян, З. С. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

В настоящей работе мы доказываем некоторые аналоги известной тауберовой теоремы Караматы о преобразованиях Лапласа монотонных функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Измеримая на $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ функция $L(t) > 0$ называется медленно меняющейся на бесконечности ($t \rightarrow +\infty$), если для любого $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1. \quad (1)$$

Будем говорить, что функция $L(t)$ медленно меняется в нуле (при $t \rightarrow 0$), если $L(1/t)$ медленно меняется на бесконечности. Отметим, что сходимость в (1) равномерна на любом $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ (см. [1]).

Пусть $p(x)$ — монотонная функция на $\mathbb{R}^+$ с преобразованием Лапласа

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} p(x) dx, \quad s > 0. \quad (2)$$

Известная теорема Караматы гласит (см., например, [2], стр. 502) :

1) если $L(t)$ медленно меняется на бесконечности и $0 < \rho < +\infty$, то соотношения

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/s), \quad s \rightarrow 0, \quad s > 0 \quad (3)$$

и

$$p(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} t^{\rho-1} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (4)$$

равносильны ;

2) если $L(t)$ медленно меняется в нуле и $0 < \rho < +\infty$, то соотношения

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/s), \quad s \rightarrow +\infty$$

и

$$p(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} t^{\rho-1} \cdot L(t), \quad t \rightarrow 0, \quad t > 0 \quad (4a)$$

равносильны.

Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, а запись $f \sim g$ означает, что $f/g \rightarrow 1$. Простое доказательство теоремы Караматы предложено Феллером (см. [2]).

В настоящей работе мы обобщаем теорему Караматы на случай, когда в сходимости $s \rightarrow 0$ не требуется действительных (положительных) значений s .

Теорема 1.

а) Если $L(t)$ медленно меняется на бесконечности и $0 < \rho < +\infty$, то из (4) следует соотношение

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \quad s \rightarrow 0, \quad \text{Res} > 0. \quad (5)$$

б) Если $L(t)$ медленно меняется в нуле и $0 < \rho < +\infty$, то из (4a) следует соотношение

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \quad s \rightarrow \infty, \quad \text{Res} > 0.$$

Теорема 2. Если $L(t)$ медленно меняется на бесконечности и $0 < \rho < 1$, то из (4) следует соотношение

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \quad s \rightarrow 0, \quad \text{Res} \geq 0. \quad (5')$$

Теорема 3. Если $L(t)$ медленно меняется в нуле и $1 < \rho < +\infty$, то из (4a) следует соотношение

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \quad s \rightarrow \infty, \quad \text{Res} \geq 0. \quad (5'')$$

Отметим, что теоремы 2 и 3 включают важный случай преобразования Фурье.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В доказательствах теорем 1 — 3 существенно используется следующий результат (см. [3], стр. 62) :

Лемма 1. Пусть f – комплекснозначная функция, определенная на полуплоскости $\{s : \text{Res} \geq 0\}$, и пусть K – произвольное компактное подмножество множества $\{s : \text{Res} \geq 0\} \cap \{s : |s| > \tau > 0\}$, где $\tau > 0$ – некоторое фиксированное число.

Предположим, что для каждого $s \in G$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{s}{n}\right) = f_0 \quad (6)$$

и сходимость в (6) равномерна на любом компакте K . Тогда

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s \in G}} f(s) = f_0. \quad (7)$$

Для любого $\Psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ мы будем использовать символ $s \rightarrow 0$ для обозначения сходимости $s \rightarrow 0$, причем

$$s \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \arg s \rightarrow \Psi.$$

Лемма 2. Если монотонная на $(0, \infty)$ функция $p(t)$ имеет представление (4) для $1 < \rho < 1$, где $L(t)$ медленно меняется на бесконечности, то

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \quad s \rightarrow 0. \quad (8)$$

Если монотонная на $(0, \infty)$ функция $p(t)$ имеет представление (4) для $0 < \rho < +\infty$, где $L(t)$ медленно меняется в нуле, то

$$F(s) \sim s^{-\rho} L(1/|s|), \quad s \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \arg s \rightarrow \Psi_0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \Psi_0 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (8')$$

Доказательство леммы 2. Нетрудно увидеть, что утверждение леммы достаточно доказать для

$$p(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} t^{\rho-1} L(t), \quad t > 0. \quad (9)$$

Имеем

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{\rho-1} L(x) dx. \quad (10)$$

Запишем s в виде $s = |s| \exp(i\Psi(s))$, $\Psi(s) = \arg s$ и в (10) произведем замену переменной $x = \frac{t}{|s|}$, в результате чего получим

$$\Gamma(\rho) \cdot s^\rho \cdot F(s) = e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^\infty \exp(-e^{-i\Psi(s)} t) t^{\rho-1} L\left(\frac{t}{|s|}\right) dt. \quad (11)$$

Вычислим предел в (11) при $s \rightarrow 0$. Из (10) имеем

$$\frac{\Gamma(\rho) s^\rho F(s)}{L(1/|s|)} = g_1(s) + g_2(s), \quad (12)$$

где

$$g_1(s) = e^{i\varphi(s)\rho} \int_1^\infty \exp(-e^{i\varphi(s)}t) A(t, s) dt, \quad (13)$$

$$g_2(s) = e^{i\varphi(s)\rho} \int_0^1 \exp(-e^{i\varphi(s)}t) A(t, s) dt \quad (14)$$

и

$$A(t, s) = t^{\rho-1} \frac{L(t/|s|)}{L(1/|s|)}.$$

Принтегрируем (13) по частям, что дает

$$g_1(s) = e^{i\varphi(s)(1-\rho)} \left\{ \exp(-e^{i\varphi(s)}) + \int_1^\infty \exp(-e^{i\varphi(s)}t) dA(t, s) \right\}. \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} A(t, s) = t^{\rho-1}, \quad t > 0. \quad (16)$$

Так как в силу (9) функция $t^{\rho-1} L(t)$ монотонна, то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \bigvee_{t=R}^\infty A(t, s) = \lim_{R \rightarrow +\infty} A(R, s) = 0,$$

где $\bigvee_a^b$ — вариация на $[a, b]$.

Таким образом, выполнены условия замечания 3 из [4] (см. стр. 317). Поэтому, в правой части (15) можно перейти к пределу $s \rightarrow 0$ под знаком интеграла.

Применяя оператор обратного интегрирования по частям в предельном равенстве при $s \rightarrow 0$, получим

$$g_1(s) \sim e^{i\varphi(s)\rho} \int_1^\infty t^{\rho-1} \exp(-e^{i\varphi(s)}t) dt. \quad (17)$$

Покажем, что можно считать $L(t) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля. Действительно, для любого $\delta > 0$ и фиксированного $s_0 > 0$ при $s \rightarrow 0$, $\text{Res} \geq 0$ имеем

$$\left| \int_0^\delta e^{-sz} z^{\rho-1} L(z) dz \right| \leq \int_0^\delta z^{\rho-1} L(z) dz \leq e^{s_0\delta} \Gamma(\rho) F(s_0) < +\infty.$$

Поэтому, учитывая, что $F(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, $\text{Res} \geq 0$, мы заключаем, что соотношения

$$\frac{s^\rho F(s)}{L(1/|s|)} \rightarrow 1, \quad s \rightarrow 0, \quad \text{Res} > 0 \quad (18)$$

и

$$\frac{s^\rho}{L(1/|s|)} \int_0^\infty e^{-sz} z^{\rho-1} L(z) dz \rightarrow \Gamma(\rho), \quad s \rightarrow 0, \quad \text{Res} \geq 0$$

равносильны.

Пусть $L(t) = 0$ в некоторой окрестности $t = 0$. Так как для любого $\gamma > 0$ (см. [1], стр. 26)

$$L\left(\frac{t}{|s|}\right) < 2t^{-\gamma} L\left(\frac{1}{|s|}\right), \quad 0 < t \leq 1,$$

то устремляя $s \rightarrow 0$ в (14), получаем

$$g_2(s) \sim e^{i\Psi_0 \rho} \int_0^1 t^{\rho-1} \exp(-e^{i\Psi_0} t) dt.$$

Учитывая (12) — (14), (17) и равенство

$$e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^\infty \exp(-e^{i\Psi(s)} t) t^{\rho-1} dt = \Gamma(\rho), \quad 0 < \rho < +\infty, \quad (19)$$

(см. [5], стр. 322), получаем (18). Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 — 3

Доказательство теоремы 1. Для функции

$$f(s) = \frac{s^\rho \cdot F(s)}{L(1/|s|)} \quad (20)$$

соотношения (7) и (5) равносильны. Идея доказательства теоремы 1 заключается в проверке того, что функция $f(s)$, определенная формулой (20), удовлетворяет условиям леммы 1 с $f_0 = 1$.

Условие (6) в нашем случае означает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(s/n)^\rho \cdot F(s/n)}{L(n/|s|)} = 1 \quad (21)$$

для любого s , $\operatorname{Re} s > 0$.

Соотношение (21) следует из леммы 2. Теперь докажем, что сходимость в (21) равномерна на любом компактном подмножестве K множества $\{s: -\Psi_0 < \arg s < \Psi_0, R_1 < |s| < R_2\}$, где $0 < \Psi_0 < \pi/2$ и $0 < R_1 < R_2 < \infty$. Для любых $s \in K$ и $t > 0$ имеем

$$\left| \exp(e^{-\Psi(s)} t) \right| = \exp(-\cos \Psi(s) t) \leq e^{-at}, \quad (22)$$

где $a = \cos \Psi_0 > 0$.

Учитывая, что $\Psi(s) = \Psi(s/n)$ для всех $n \geq 1$, в силу (11) и (19) имеем

$$f(s/n) - 1 = \frac{1}{\Gamma(\rho)} e^{i\Psi(s)\rho} \int_0^\infty \exp(e^{-\Psi(s)} t) t^{\rho-1} \left[\frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right] dt, \quad n \geq 1, s \in K.$$

Из этого равенства и оценки (22) при всех $n \geq 1$ и $s \in K$ следует неравенство

$$f(s/n) - 1 \leq I_n(|s|, 0), \quad (23)$$

где

$$I_n(|s|, y) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1} \left| \frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right| dt, \quad y \geq 0.$$

По данному $\varepsilon > 0$ при малом $\delta > 0$ выберем $y > 0$ так, чтобы

$$\int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1} dt < \varepsilon \quad \text{и} \quad \int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1+\delta} dt < \varepsilon. \quad (24)$$

Поскольку

$$\frac{1}{R_2} \leq \frac{1}{|s|} \leq \frac{1}{R_1} \quad \text{для всех } s \in K,$$

то при фиксированном $y > 0$ множества чисел $\{y/|s|\}$ и $\{1/|s|\}$ ограничены и отделены от нуля. Имеем

$$L(ny/|s|) \sim L(n/|s|) \sim L(ny/R_i), \quad n \rightarrow +\infty, \quad i = 1, 2 \quad \text{равномерно по } s \in K \quad (25)$$

и, одновременно, для любого $y_0 \in (0, y)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right) = 0, \quad \text{равномерно по } t \in [y_0, y] \quad \text{и } s \in K. \quad (26)$$

Обозначим $x^{-\delta} \bar{L}(x) = \sup_{x \leq t < +\infty} t^{-\delta} L(t)$. Тогда (см. [1], стр. 27) $\bar{L}(x) \sim L(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и

$$R_1^\delta \bar{L}(ny/R_1) \leq |s|^\delta \bar{L}(ny/|s|) \leq R_2^\delta \bar{L}(ny/R_2), \quad \text{для всех } n \geq 1 \quad \text{и } s \in K. \quad (27)$$

Так как $\bar{L}(ny/R_i) \sim L(ny/R_i)$ при $n \rightarrow +\infty$ и $i = 1, 2$, то, согласно (25) и (27)

$$\bar{L}(ny/|s|) < 2 L(n/|s|) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^\delta, \quad \text{при всех } n \geq n_0 \quad \text{и } s \in K. \quad (28)$$

Далее, для любого $\gamma > 0$ (см. [1], стр. 26)

$$\frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} < 2 y^\gamma t^{-\gamma}, \quad \text{для всех } n \geq n_0, \quad t \in (0, y_0], \quad s \in K. \quad (29)$$

С помощью (24) и (28) оценим интеграл $I_n(|s|, y)$. Для всех $n \geq n_0$ и $s \in K$

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho) I_n(|s|, y) &\leq \frac{(n/|s|)^\delta}{L(n/|s|)} \int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1+\delta} \left(\frac{n}{|s|} t \right)^{-\delta} L(nt/|s|) dt + \int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1} dt \leq \\ &\leq \frac{\bar{L}(ny/|s|) y^{-\delta}}{L(n/|s|)} \int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1+\delta} dt + \int_y^\infty e^{-at} t^{\rho-1} dt < \left(2 \left(\frac{R_2}{y R_1} \right)^\delta + 1 \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу (26) и (29)

$$I_n(|s|, 0) - I_n(|s|, y) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^y e^{-at} t^{\rho-1} \left| \frac{L(nt/|s|)}{L(n/|s|)} - 1 \right| dt < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$ и $s \in K$.

Из (23), (30) и последнего неравенства мы заключаем, что

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |f(s/n) - 1| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } s \in K.$$

В силу произвольности ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $s_n \rightarrow 0$, причем $\operatorname{Re} s_n \geq 0$. Если последовательность $\{s_n\}$ содержит только конечное число элементов со стремящимися к нулю действительными частями, то подпадаем в условия теоремы 1. То же самое верно и при $\operatorname{Re} s_n > 0$ для бесконечно многих значений n . В противном случае $\{s_n\}$ распадается на две последовательности $\{s'_n\}$ и $\{s''_n\}$ с $\operatorname{Re} s'_n > 0$ и $\operatorname{Re} s''_n = 0$, соответственно. По теореме 1 и лемме 2 асимптотики $F(s'_n)$ и $F(s''_n)$ при $n \rightarrow \infty$ выражаются одинаковой формулой. Поэтому та же формула верна для $F(s_n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

ABSTRACT. In this paper we prove some analogs of a well-known Tauberian theorem of J. Karamata on Laplace transforms of monotone functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно меняющиеся функции, М., Наука, 1985.
2. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, 1984.
3. K. Nevels, On Stable Attraction and Tauberian Theorems, Groningen, 1974.
4. Г. Е. Шилов, Математический анализ. Специальный курс, издание второе, М., 1961.
5. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. Н. Маричев, Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., Наука, 1981.

19 ноября 1997

Ереванский государственный университет

О РЕШЕНИЯХ КЛАССА ЖЕВРЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

Для n -мерного многогранника $\mathcal{N}$ мы определяем мультианизотропное функциональное пространство Жевре $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ и доказываем, что решения гипозеллиптических уравнений с переменными коэффициентами из $\Gamma^{\mathcal{M}^{(l)}}(\Omega)$ принадлежат $\Gamma^{\mathcal{M}^{(l)}}(\Omega)$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Л. Хёрмандером введено понятие гипозеллиптичности и доказано, что решения гипозеллиптического уравнения $P(D)u = 0$ с постоянными коэффициентами принадлежат классам Жевре Γ^l , характеризуемым показателем гипозеллиптичности l оператора $P(D)$. В работе [2] Л. Катабрига получил условия, при которых отображение $P(D) : \Gamma^l \longrightarrow \Gamma^l$ является изоморфизмом.

В работах [3] – [5] доказано, что решения уравнений $P(x, D)u = f(x)$ с достаточно гладкими коэффициентами принадлежат классам Γ^l при любых $f \in \Gamma^l$. В этих и других работах рассмотрены лишь изотропные классы Жевре.

В работах [6] – [7] для одного класса гипозеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами доказаны оценки роста производных, улучшающие результаты выше перечисленных работ. В работе [8] для n -мерного многогранника $\mathcal{M}$ введено понятие мультианизотропного класса Жевре $\Gamma^{\mathcal{M}}$ и установлено, что решения определенного класса гипозеллиптических уравнений $P(x, D)u = 0$ с аналитическими коэффициентами принадлежат классам $\Gamma^{\mathcal{M}}$, где $\mathcal{M}$ является многогранником веса гипозеллиптичности оператора $P(x, D)$.

В настоящей работе для широкого класса гипозеллиптических уравнений

$P(x, D)u = 0$ с переменными коэффициентами (вообще говоря не аналитическими) доказывалась принадлежность слабых решений к определенному мультианизотропному классу Жевре. В §1 вводятся необходимые обозначения и определения. Доказываются некоторые свойства многогранников Ньютона изучаемых операторов. В §2 вводятся понятие дополняющего многогранника и связанные с этим мультианизотропные классы Жевре. В §3 в терминах дополняющих многогранников уточняются те классы Жевре, которым принадлежат слабые решения уравнения $P(x, D)u = 0$.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ

СВОЙСТВА МНОГОГРАННИКОВ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное вещественное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}_0^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdots x_n \neq 0\}, \quad \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Пусть N_0^n — множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми компонентами. Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |x|^\alpha = |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

$$\|\xi\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2}, \quad (x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

где

$$D_j = -i \frac{d}{dx_j} \quad (i^2 = -1), \quad \text{или} \quad D_j = \frac{d}{dx_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Мы будем рассматривать наборы

$$B = \{\lambda^j, d_j\}_{j=1}^k, \quad (1.1)$$

где

$$\lambda^j \in \mathbb{R}_+^n, \quad \min_{1 \leq l \leq n} \lambda_l^j = 1, \quad d_j > 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Определение 1.1. Характеристическим многогранником набора B называется множество

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(B) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq d_j, j = 1, \dots, k\}.$$

Полсжим

$$\mathcal{N}^t = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \frac{\nu}{t} \in \mathcal{N}\}, \quad t > 0,$$

$$\partial \mathcal{N} = \{\nu \in \mathcal{N} : (\nu, \lambda^j) = d_j, j = 1, \dots, k\},$$

$\Sigma(\mathcal{N})$ – множество вершин многогранника $\mathcal{N}$.

Пусть $A, B \in \mathbb{R}_+^n$ – ограниченные множества. Положим

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad A \ominus B = \{x : x + y \in A, \forall y \in B\}.$$

Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник этого набора. Положим

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathcal{N}) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq 1, j = 1, \dots, k\},$$

$$\mathcal{M}'_j = \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}^j, \quad \mathcal{M}_0 = \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}'_1, \quad \mathcal{M}_j = \mathcal{M}'_j \setminus \mathcal{M}'_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Легко доказать следующее

Предложение 1.1. Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник этого набора. Тогда

а) если $j \geq [d_0] + 1$ ($d_0 = \max_{1 \leq j \leq k} d_j$), то $\mathcal{M}'_j = \emptyset$;

б) $\mathcal{N} = \bigcup_{j=0}^{[d_0]} \mathcal{M}_j$;

в) для любого целого $j \geq 0$

$$A_j = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^i) \leq d_i - j, i = 1, \dots, k\} \subset \mathcal{M}'_j.$$

Рассмотрим множество $F = \{\mathcal{N} : \mathcal{N} \text{ – характеристический многогранник некоторого набора } B \text{ вида (1.1) и удовлетворяет условию : существует натуральное число } j_0 \text{ такое, что для любых } j \geq j_0 \text{ и } \alpha \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^j \text{ найдется мультииндекс } \beta \in \mathcal{N} \text{ такой, что } \beta \leq \alpha \text{ и } \alpha - \beta \in \mathcal{M}^j\}$. При $n = 2$ справедливы следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора $B = \{\lambda^j, d_j\}_{j=1}^k$, где

$$\lambda^j \in \mathbb{R}_+^2, \quad \lambda^1 > \dots > \lambda^k \geq (1, 1), \quad \min_{1 \leq i \leq 2} \lambda_i^j = 1, \quad d_j > 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_0^2$, то $\mathcal{N} \in F$.

Лемма 1.2. Пусть

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^2, \quad \lambda > (1, 1) < \mu, \quad \mu_1 = \lambda_2 = 1, \quad d, \rho > 0,$$

$$\mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^2 : (\nu, \lambda) \leq d, (\nu, \mu) \leq \rho\}.$$

Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_0^2$, то $\mathcal{N} \in F$.

Пусть k и n — натуральные числа

$$e_k = \{1, \dots, k\}, \quad \lambda^j \in \mathbb{R}_+^n, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^j = 1, \quad d > 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Обозначим

$$E_e = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) = d; j \in e, (\nu, \lambda^j) \leq d, j = 1, \dots, k\}, \quad \emptyset \neq e \subset e_k;$$

$$R_+^{n,m} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \nu_i = 0; i \in m\};$$

$$D_m(\varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in m} \nu_i \leq \varepsilon \right\}, \quad \emptyset \neq m \subset e_n, \quad \varepsilon > 0.$$

Предложение 1.2. Если для некоторого множества $e \subset e_k$ $E_e = \emptyset$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что система

$$\begin{cases} (\nu + \eta^i, \lambda^i) = d & \text{при } i \in e, \\ (\nu, \lambda^i) \leq d & \text{при } i \notin e \end{cases}$$

не имеет решения в $\mathbb{R}_+^n$ при любых $\eta^i \in \mathbb{R}^n$, $\|\eta^i\| \leq \varepsilon$, $i \in e$.

Доказательство. Положим

$$G_e = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) = d, j \in e\}, \quad \mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq d, j = 1, \dots, k\}.$$

Множество G_e замкнуто, а $\mathcal{N}$ замкнуто и ограничено (что следует из условия $\mathcal{N} \cap G_e = E_e = \emptyset$). Следовательно, существует окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$(G_e \oplus U) \cap (\mathcal{N} \oplus U) = \emptyset.$$

Предложение 1.2 доказано.

Через ε_0 обозначим то наибольшее число, для которого выполняется предложение 1.2 при всех $\emptyset \neq e \subset e_k$, для которых $E_e = \emptyset$.

Предложение 1.3. Если $E_e \cap \mathbb{R}_+^{n,m} = \emptyset$ при некоторых $\emptyset \neq e \subset e_k$ и $\emptyset \neq m \subset e_n$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $E_e \cap D_m(\varepsilon) = \emptyset$.

Доказательство следует из того, что множества E_e и $\mathbb{R}_+^{n,m}$ замкнуты, E_e ограничено и $D_m(\varepsilon) = \mathbb{R}_+^{n,m} \oplus U_\varepsilon$, где

$$U_\varepsilon = \left\{ \nu \in \mathbb{R}_+^n : \nu_j = 0, j \notin m, \sum_{j=1}^n \nu_j \leq \varepsilon \right\}.$$

Обозначим через ε_1 то наибольшее число, для которого выполняется утверждение 1.3 при любом $m \subset e_n$ таком, что $E_e \cap \mathbb{R}_+^{n,m} = \emptyset$.

Теорема 1.1. Пусть B - набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ - характеристический многогранник набора B . Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_0^n$ и $\mathcal{M}(\mathcal{N}) \sim \mathcal{N}$ (т.е. $\mathcal{M}_N^d = \mathcal{N}$ для некоторого $d > 0$), то $\mathcal{N} \in F$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon' = \min(\varepsilon_0/4, \varepsilon_1/4)$ ($\varepsilon_0, \varepsilon_1$ - числа, определенные выше), $j_0 \geq 4d^2/\varepsilon'$ - натуральное число и α - любой фиксированный мультииндекс такой, что

$$\alpha \in \mathcal{M}_N^{d+s} \setminus \mathcal{M}_N^{d+s-1} = (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_N^s) \setminus (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_N^{s-1}), \quad s > j_0.$$

Возможны следующие случаи :

а) $\alpha_i \geq l_i = \min_{1 \leq j \leq k} \frac{d}{\lambda_j^i}, \quad i = 1, \dots, n;$

б) существует множество $m = \{1, \dots, q\} \subset e_n$ такое, что $\alpha_i < l_i, i \notin m$.

В случае а) для некоторого $\delta \in [0, 1]$ имеем

$$\max_{1 \leq j \leq k} (\alpha, \lambda^j) = d + s - \delta = td, \quad t = \frac{d + s - \delta}{d}.$$

Пусть ради определенности грани $\mathcal{N}_i^{n-1}$ с внешними (относительно $\mathcal{N}$) нормальными $\lambda^i, i = 1, \dots, p, p \leq k$ имеют пересечение с шаром $U_{e'}(\alpha/t)$ радиуса ε' с центром в точке α/t . В силу предложения 1.2 имеем $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{N}_i^{n-1} \neq \emptyset$. Пусть β - вершина многогранника $\mathcal{N}$ такая, что $\beta \in \bigcap_{i=1}^p \mathcal{N}_i^{n-1}$. Так как $\alpha \geq \beta$, то $\alpha - \beta \in \mathcal{N}_0^n$. Поскольку $\alpha/t \in \partial \mathcal{N}$, то для некоторого $t' \in [1, t/(t-1)]$ имеем $t' \frac{\alpha - \beta}{t} \in \partial \mathcal{N}$. Используя это, получим

$$\left| t' \frac{\alpha - \beta}{t} - \frac{\alpha}{t} \right| \leq \frac{|\alpha|}{t} (t' - 1) + \frac{t'}{t} |\beta| \leq |\alpha| \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t-1} |\beta| \leq \frac{2d}{t-1} = \frac{2d^2}{s-\delta} \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

т.е.

$$t' \frac{\alpha - \beta}{t} \in U_{\epsilon'} \left(\frac{\alpha}{t} \right) \cap \partial N.$$

Так как шар $U_{\epsilon'}(\alpha/t)$ пересекается только с гранями N_i^{n-1} , $i = 1, \dots, p$, то существует индекс j , $1 \leq j \leq p$ такой, что $t' \frac{\alpha - \beta}{t}$ лежит на грани N_j^{n-1} и, следовательно, для любого индекса $i = 1, \dots, k$

$$\left(t' \frac{\alpha - \beta}{t}, \lambda^i \right) \leq \left(t' \frac{\alpha - \beta}{t}, \lambda^j \right).$$

Так как $(\beta, \lambda^i) = d$, то

$$(\alpha - \beta, \lambda^i) \leq (\alpha - \beta, \lambda^j) = (\alpha, \lambda^j) - (\beta, \lambda^j) \leq d + s - d = s, \quad i = 1, \dots, k,$$

следовательно, $\alpha - \beta \in M_{\mathcal{N}}^s$.

Рассмотрим случай б). Ради определенности предположим, что только грани N_i^{n-1} , $i = 1, \dots, p$, $p \leq k$ пересекаются с шаром $U_{\epsilon'}(\alpha/t)$. Тогда, в силу предложения 1.2, $\mathcal{N} \cap \bigcap_{i=1}^p N_i^{n-1} \neq \emptyset$. Так как $U_{\epsilon'}(\alpha/t) \subset D_m(\epsilon')$, то в силу предложения 1.3

$$\mathcal{N} \cap \bigcap_{i=1}^p N_i^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^{n,m} \neq \emptyset.$$

Пусть

$$\beta \in \Sigma(\mathcal{N}) \cap \bigcap_{i=1}^p N_i^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^{n,m}.$$

Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве случая а), получим, что $\alpha - \beta \in M_{\mathcal{N}}^s$, т.е. $\mathcal{N} \in F$.

§2. ДОПОЛНЯЮЩИЕ МНОГОГРАННИКИ И

МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫЕ КЛАССЫ ЖЕВРЕ

Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Положим

$$h_{\mathcal{N}}(\xi) = 1 + \sum_{\beta \in \Sigma(\mathcal{N})} |\xi|^\beta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Пусть B^* – другой набор вида (1.1), а $\mathcal{N}^*$ – соответствующий характеристический многогранник.

Определение 2.1. Говорят, что многогранник $\mathcal{N}^*$ дополняет многогранник $\mathcal{N}$, если при некоторой постоянной $C > 0$

$$h_{\mathcal{N}}(\xi - \eta) \leq C(h_{\mathcal{N}}(\xi) + h_{\mathcal{N}^*}(\eta)), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

и если для любого многогранника $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}^* \not\subset \mathcal{M}$ отношение $\frac{h_{\mathcal{N}}(\xi - \eta)}{h_{\mathcal{N}}(\xi) + h_{\mathcal{N}^*}(\eta)}$ не ограничено на $\mathbb{R}^n$.

Предложение 2.1. (см. [8]) Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Тогда многогранник $\mathcal{N}^* = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^0) \leq 1\}$, где

$$\lambda^0 = \left(\min_{1 \leq j \leq r} \left(\frac{\lambda_1^j}{d_j} \right), \dots, \min_{1 \leq j \leq r} \left(\frac{\lambda_n^j}{d_j} \right) \right),$$

дополняет $\mathcal{N}$.

Предложение 2.2. Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Если $\mathcal{N}^*$ дополняет $\mathcal{N}$, то для любого $t > 0$ многогранник $(\mathcal{N}^t)^*$ дополняет многогранник $\mathcal{N}^t$.

Доказательство. Так как для любого $t > 0$ имеем с некоторой постоянной $C = C(t) > 0$

$$C^{-1}h_{\mathcal{N}^t}(\xi) \leq h_{\mathcal{N}}^t(\xi) \leq Ch_{\mathcal{N}^t}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то доказательство следует из определения дополняющего многогранника.

Пусть B – набор вида (1.1), $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B и Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Через $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ обозначим множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C = C(K, f) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j, \quad \alpha \in \mathcal{N}^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

(описание свойств класса $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ см. в [8]).

Предложение 2.3. Для того, чтобы $f \in \Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $C = C(K, f) > 0$ такая, что для любого компакта $K \subset \Omega$

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^{j/t}, \quad \alpha \in \mathcal{N}^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Доказательство следует из определения множества $\Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega)$.

Предложение 2.4. Пусть B – набор вида (1.1), $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B и Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $t > 0$

$$\Gamma^{(\mathcal{N}')^*}(\Omega) \times \Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega) \subset \Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $t > 0$ – некоторое число и $g(x) \in \Gamma^{(\mathcal{N}^t)' }(\Omega)$, $f(x) \in \Gamma^{\mathcal{N}^t}(\Omega)$. Достаточно показать, что $g(x) \cdot f(x) \in \Gamma^{\mathcal{N}^t}(\Omega)$. Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathcal{N}^j$, $j = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_K |D^\alpha(gf)| &= \sup_K \left| \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta g \cdot D^{\alpha-\beta} f \right| \leq \sup_K \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta |D^\beta g| \cdot |D^{\alpha-\beta} f| \leq \\ &\leq \sup_K \sum_{l=0}^j \sum_{l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1} C_\alpha^\beta |D^\beta g| \cdot |D^{\alpha-\beta} f|. \end{aligned}$$

Так как $\alpha - \beta \in \mathcal{N}^{j-l}$ для $l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1$, то в силу предложения 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \sup_K |D^\alpha(gf)| &\leq \sum_{l=0}^j \sum_{l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1} C_\alpha^\beta C_1^{l+2} (l+1)^{(l+1)/t} C_2^{j-l+1} (j-l)^{(j-l)/t} \leq \\ &\leq C_3^{j+1} \sum_{l=0}^j (l+1)^{(l+1)/t} (j-l)^{(j-l)/t} \sum_{l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1} C_\alpha^\beta \leq C_3^{j+1} C_4^{j+1} \times \\ &\times \left(\sum_{l=0}^j (l+1)^{(l+1)/t} (j-l)^{j-l} \right)^{1/t} \leq C_5^{j+1} (j+1)^{1/t} j^{j/t} \leq C_6^{j+1} j^{j/t}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Предложение 2.4 доказано.

§3. ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть (P) – конечный набор мультииндексов, и пусть $\gamma_\alpha(x)$ – бесконечно дифференцируемые функции для всех $\alpha \in (P)$ в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$P(x, D) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha(x) D^\alpha,$$

а для $f \in C^\infty(\Omega)$

$$N(P, f) = \{u \in D' : P(x, D)u = f\}.$$

Определение 3.1. (см. [1], определение 13.4.3) Оператор $P(x, D)$ называется *гипоеллиптическим* в Ω , если для любого $f \in C^\infty(\Omega)$ имеем $N(P, f) \subset C^\infty(\Omega)$.

Определение 3.2. (см. [9]) Оператор $P(x, D)$ называется *равномерно регулярным* в Ω , если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$1 + |P(x, \xi)| \geq C \sum_{\alpha \in (P)} |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega.$$

Определение 3.3. Характеристический многогранник оператора $P(x, D)$ называется *характеристическим многогранником набора* (P) .

Равномерно регулярный оператор $P(x, D)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами гипозллиптичен тогда и только тогда, когда $P(x, D)$ вполне правилен (см. [9]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Положим

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Лемма 3.1. Пусть $P(x, D)$ – равномерно регулярный оператор в Ω . Тогда существует окрестность $\omega \subset \Omega$ точки $x \in \Omega$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$\|D^\alpha \varphi\|_{L_2(\omega)} \leq C \|P(x, D)\|_{L_2(\omega)}, \quad \alpha \in \mathcal{N}(P) \cap (N_0^n), \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Доказательство см. в работе [1], теорему 13.2.1.

Пусть $v \in L_2^{loc}(\Omega)$. Положим

$$K_\varepsilon(v) = \left[\int_{\Omega_\varepsilon} |v|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Пусть $P(x, D)$ – равномерно регулярный оператор в Ω , характеристический многогранник которого порождается набором

$$B_1 = \{\lambda^j, d_j\}_{j=1}^M, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^j = 1, \quad d_j > 0, \quad j = 1, \dots, M.$$

Положим

$$\mathcal{M} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq 1, \quad j = 1, \dots, M\}, \quad d_0 = \max_{1 \leq j \leq M} d_j.$$

Лемма 3.2. Пусть $P(x, D)$ как в лемме 3.1. Тогда для любых $t \in (0, 1]$ и $v \in C^\infty(\omega)$ существуют постоянные $\varepsilon, \varepsilon_1, C > 0$ такие, что

$$\varepsilon^{(d_0-j)/t} K_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^j v) \leq C \left[\varepsilon^{d_0/t} K_{\varepsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{j=1}^{[d_0]} \sum_{\beta \in M_j} \varepsilon^{(d_0-j)/t} K_{\varepsilon_1}(D^\beta v) \right],$$

$$\alpha \in M_j, \quad 0 \leq j \leq [d_0].$$

(3.1)

Доказательство. Неравенство (3.1) для $j \geq 1$ очевидно. Пусть $j = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\omega_{\varepsilon_1})$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in \omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ (существование такой функции $\varphi(x)$ следует из леммы 3.1). В силу леммы 3.1 для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ имеем

$$K_{\varepsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_1 K_{\varepsilon_1}(P(x, D)(v\varphi)) \leq$$

$$\leq C_2 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{\nu < \beta} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-|\beta - \alpha|} \right]$$

Так как $\mathcal{N} = \bigcup_{j=0}^{[d_0]} \mathcal{M}_j$ (см. предложение 1.1), то имеем

$$K_{\epsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_2 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{j=0}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_j} \sum_{\nu < \beta} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-|\beta - \alpha|} \right].$$

Отсюда следует, что

$$K_{\epsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_2 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{j=0}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_j} \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\substack{\nu \in \mathcal{M}_i \\ \nu < \beta}} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-i/t} \right].$$

Если $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ и $\beta < \alpha$, то $\beta \in \mathcal{M}'_i$. Следовательно, для $0 < \epsilon < 1$ и $0 < t \leq 1$ при некоторых постоянных $C_3 > 0$ получаем

$$K_{\epsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_3 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\nu \in \mathcal{M}_i} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-i/t} \right].$$

Умножая это неравенство на $\epsilon^{d_0/t}$ и замечая, что $\varphi(x) = 1$ для $x \in \omega_{\epsilon + \epsilon_1}$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — многогранник, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с диаметром не больше двух. Для любых $\epsilon, \epsilon_1, C > 0$, $t \in (0, 1]$ и $\gamma(x) \in \Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}^j$, $j = 1, 2, \dots$

$$\epsilon^{j/t} |D^\alpha \gamma(x)| \leq C^{j+1} j!^{-j/t}, \quad x \in \Omega_{\epsilon_1 + l\epsilon}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Поскольку диаметр $\Omega \leq 2$, то $\Omega_{\epsilon_1 + l\epsilon} = \emptyset$ для $l\epsilon \geq 1$ и утверждение следует из определения $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$.

Теорема 3.1. Пусть $P(x, D)$ — равномерно регулярный оператор в Ω , характеристический многогранник $\mathcal{N}$ которого из F и $\gamma_\alpha(x) \in \Gamma^{(\mathcal{M}')^*}(\Omega)$ для всех $\alpha \in (P)$. Тогда для любого $t \in (0, 1]$ имеем $N(P, 0) \subset \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $x_0 \in \Omega$ существует окрестность $\omega(x_0) \subset \Omega$, удовлетворяющая условию $N(P, 0) \subset \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$. Для такой окрестности мы можем взять любую область с диаметром меньшим двух,

для которой выполняется неравенство (3.1). Так как $\gamma_\beta(x) \in \Gamma^{(\mathcal{M}^j)^*}(\Omega)$, то существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$\sup_{\omega} |D^\alpha \gamma_\beta(x)| \leq A^{j+1} j^{j/t}, \quad \alpha \in (\mathcal{M}^j)^*, \quad \beta \in (P), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Покажем что для любого $u \in N(P, 0)$ существует постоянная

$$B = B(u) \geq (1 + C)q[1 + 2(4(1 + j_0))^{1/t}(A + t)^3]$$

(q – количество элементов множества (P) , C – постоянная из (3.1), j_0 – число из определения множества F) такая, что для всех $\alpha \in (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1+j}) \setminus (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1})$

$$\varepsilon^{(d_0+j_0-1+j)/t} K_{j\varepsilon}(D^\alpha u) \leq B^{d+j_0+1}, \quad 1 \leq j, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (3.3)$$

Так как $N(P, 0) \subset C^\infty(\Omega)$, то за счет взятия постоянной достаточно большой можно добиться выполнения неравенства (3.3) при $j = 1$.

Пусть неравенство (3.3) выполняется при $j \leq l$, $l \geq 1$. Покажем его выполнение при $j = l + 1$. Так как $\mathcal{N} \in F$ и $\alpha \in (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1+j}) \setminus (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1})$, то существует мультииндекс $\alpha' \leq \alpha$, $\alpha' \in \mathcal{M}^{j_0+l}$, для которого $\alpha - \alpha' \in \mathcal{N}$ и $\alpha' + \gamma \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0+l}$ для любого $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$. В силу неравенства (3.1) при $\varepsilon_1 = l\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(d_0+j_0+j)/t} K_{(l+1)\varepsilon}(D^\alpha u) &= \varepsilon^{(d_0+j+1)/t} K_{(l+1)\varepsilon}(D^{\alpha'} D^{\alpha-\alpha'} u) \leq \\ &\leq C \varepsilon^{(j_0+l)/t} \left[\varepsilon^{d_0/t} K_{l\varepsilon}(P(x, D) D^{\alpha'} u) + \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_i} K_{l\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'} u) \varepsilon^{(d_0-i)/t} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко проверить для любого мультииндекса $\beta \in \mathcal{M}_i$, $1 \leq i \leq [d_0]$, что $\beta + \alpha' \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0+l-1}$. Тогда по предположению индукции

$$C \varepsilon^{(j_0+l)/t} \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_i} K_{l\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'} u) \varepsilon^{(d_0-i)/t} \leq C q B^{d_0+j_0+l}. \quad (3.5)$$

Теперь оценим выражение

$$E = \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon}(P(x, D)(D^{\alpha'} u)).$$

Так как $P(x, D)u = 0$, то имеем

$$E = \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{N}} \gamma_\beta(x) D^{\beta+\alpha'} u - \sum_{\beta \in \mathcal{N}} D^{\alpha'} (\gamma_\beta(x) D^\beta u) \right) =$$

$$= \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{0 \neq \nu \leq \alpha'} C_{\beta}^{\nu} D^{\nu} \gamma_{\beta}(x) D^{\beta+\alpha'-\nu} u \right).$$

Так как для любых двух мультииндексов β, ν таких, что $\beta \in \mathcal{N}$ и $0 \neq \nu \leq \alpha'$, имеем $\beta + \alpha' - \nu \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0+l-1}$, то в силу леммы 3.3

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^l \sum_{i \leq (\nu, \lambda^0) < i+1} C_{\alpha'}^{\nu} D^{\nu} \gamma_{\beta}(x) D^{\beta+\alpha'-\nu} u \right) \leq \\ &\leq \sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^l \sum_{i \leq (\nu, \lambda^0) < i+1} C_{\alpha'}^{\nu} [(i+1)! l^{-i}]^{1/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} E &\leq \sum_{i=1}^l q \left(\sum_{i \leq (\nu, \lambda^0) < i+1} C_{\alpha'}^{\nu} \right) [(i+1)! l^{-i}]^{1/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l q 2^{i/t} \frac{(j_0+1)^{i/t}}{(i!)^{1/t}} [(i+1)! l^{-i}]^{1/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq \\ &\leq q \sum_{i=1}^l [4(1+j_0)]^{i/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq q [4(1+j_0)]^{1/t} A^3 \sum_{i=1}^l \frac{B^{i-1}}{2^{i-1}} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq \\ &\leq 2q [4(1+j_0)]^{1/t} A^3 B^{d_0+j_0+l} \leq B^{d_0+j_0+l+1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (3.5), в силу неравенства (3.4), немедленно следует выполнение неравенства (3.3). Пусть $\delta > 0$, $\varepsilon = d/j$. Тогда из неравенства (3.3) при $\alpha \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1+j}$

$$\left(\int_{\omega_{\varepsilon}} |D^{\alpha} u|^2 dx \right)^{1/2} \leq B^{d_0+j_0+j} \frac{j^{(d_0+j_0+j-1)/t}}{\delta^{(d_0+j_0+j-1)/t}} \leq B^{d_0+j_0+j} j^{j/t}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы 3.1.

Когда коэффициенты гипозэллиптического оператора $P(x, D)$ постоянны, то полученный результат совпадает с уже известными результатами [6], [7] и дает тот же неулучшаемый класс Жевре, которому принадлежат все слабые решения $u \in D'(\Omega)$ уравнения $P(D)u = 0$.

Когда оператор $P(x, D)$ с аналитическими коэффициентами является эллиптическим, то полученный результат совпадает с результатами Петровского, т.е. $N(P, 0) \subset A(\Omega)$, ибо в этом случае многогранники $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ совпадают и

$$\Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega) = \Gamma^{\mathcal{M}^*}(\Omega) = \Gamma^{\lambda}(\Omega) = A(\Omega).$$

Если оператор $P(x, D)$ с аналитическими коэффициентами регулярен, то полученный результат при $t = 1$ совпадает с результатами, доказанными нами в [8]. Если же характеристический многогранник $\mathcal{N}$ оператора $P(x, D)$ также порождается одним единственным вектором и единственным числом $d > 0$, то многогранники $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ совпадают. Следовательно, $\Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega) = \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega) = \Gamma^{\lambda}(\Omega)$. Для $\gamma_{\beta}(x) \in \Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega)$ получаем $N(P, 0) \subset \Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega)$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда если $f \in \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$, то $N(P, f) \subset \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

ABSTRACT. For n -dimensional polyhedron $\mathcal{N}$ we define multi-anisotropic Gevrey functional space $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ and prove that the solutions of hypoelliptic equations with variable coefficients from $\Gamma^{\mathcal{M}^{(*)}}(\Omega)$ belong to $\Gamma^{\mathcal{M}^{(*)}}(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов. т. I, М., Мир, 1986.
2. L. Cattabriga, "Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients", Asterisque, vol. 89 – 90, pp. 129 – 151, 1981.
3. T. Kotake, M. S. Narasimhan, "Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator", Bull. Soc. Math. France, vol. 90, pp. 449 – 471, 1962.
4. L. Zanghirati, "Iterati di una classe de operatori ipoellitici e classi generalizate de Gevrey", BUMI, vol. 1, pp. 177 – 195, 1980.
5. V. I. Burenkov, K. R. Maman, "Local bounds for the derivatives of the solutions of nonhomogeneous hypoelliptic equation" [in Russian], Diff. Uravn. i Funk. Analis, pp. 15 – 29, 1986.
6. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипозеллиптичности", Матем. сборник, т. 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
7. Г. О. Акопян, "Об оценках производных решений одного класса гипозеллиптических уравнений", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 4, стр. 358 – 374, 1986.
8. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипозеллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.
9. Г. Г. Казарян, "Операторы постоянной силы с оценкой снизу через производные и формально гипозеллиптические операторы", Anal. Math., т. 3, № 4, стр. 263 – 289, 1977.

12 октября 1997

Ереванский государственный университет
E-mail : gagikhakobyan@hotmail.com

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ Ю. ЛУМИСТЕ О ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ

В. А. Мирзоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

Настоящая работа обобщает теорему Лумисте на случай параллельных и полупараллельных структур на подмногообразиях, выражаемых с помощью тензорных операций через вторые фундаментальные формы.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ подмногообразие M называется полупараллельным (см. [5] — [7], в работах [1] — [4] употребляется термин полусимметрический), если его вторая фундаментальная форма (ф.ф.) α_2 удовлетворяет условию : для любых векторных полей X и Y , касательных к M ,

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0,$$

где $\bar{R}(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X - \bar{\nabla}_{[X, Y]}$ — оператор кривизны связности Вандер Вардена-Бортолотти $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ (∇ и $\nabla^\perp$ — римановы и нормальные связности, соответственно). Для этого класса многообразий справедлива следующая характеристическая

Теорема (Ю. Лумисте, [8]). m -мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ полупараллельно тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства m -мерных параллельных подмногообразий.

Параллельные подмногообразия характеризуются параллельностью α_2 , т.е. условием $\bar{\nabla} \alpha_2 = 0$ (см. [9]). Подробный обзор результатов о параллельных и

полупараллельных подмногообразиях содержится в работах [10] — [16].

Обобщения выше изложенной теоремы даны автором в [17], [18]. Для формулировки этих результатов нам понадобятся некоторые определения (см. [17]).

Определение 1. Пусть M и $\widetilde{M}$ — m -мерные подмногообразия в $M_n(c)$, имеющие общую точку x . Точка x называется точкой касания s -го порядка ($s \geq 2$) для M и $\widetilde{M}$, если

- 1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ совпадают,
- 2) $\alpha_{rx} = \widetilde{\alpha}_{rx}$, $r = 2, \dots, s$.

Определение 2. m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ называется огибающим s -го порядка ($s \geq 2$) для некоторого семейства m -мерных подмногообразий $\{G\}$, если в каждой точке $x \in M$ подмногообразие M имеет касание s -го порядка с каким-либо подмногообразием этого семейства.

В нижеследующем определении X и Y — касательные векторные поля на M .

Определение 3. Фундаментальная форма α , называется параллельной, если $\overline{\nabla}_X \alpha = 0$ для любого X и полупараллельной, если $\overline{R}(X, Y) \cdot \alpha = 0$ для любых X и Y . Подмногообразия, удовлетворяющие этим условиям, называются s -параллельными и s -полупараллельными, соответственно.

Взаимосвязь между s -параллельными и s -полупараллельными подмногообразиями устанавливает следующая теорема, которая является обобщением теоремы Лумисте.

Теорема 1 ([17]). m -мерное подмногообразие $M \subset M_n(c)$ класса C^∞ является огибающим порядка $s \geq 3$ семейства m -мерных s -параллельных подмногообразий тогда и только тогда, когда оно имеет полупараллельные ф.ф. α_{s-1} и α_s .

В частном случае симметрических ф.ф. имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2 ([17], [18]). Пусть m -мерное подмногообразие класса C^∞ в $M_n(c)$ имеет симметрические ф.ф. $\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}$ ($s > 3$). Тогда его ф.ф. α_s будет симметрической в том и только в том случае, когда M является огибающим $(s-2)$ -го

порядка семейства m -мерных $(s-2)$ -параллельных подмногообразий, у каждого из которых все ф.ф. до $(s-2)$ порядка включительно также являются симметрическими.

Настоящая работа обобщает теорему Лумисте на случай параллельных и полупараллельных структур на подмногообразиях, выражаемых с помощью тензорных операций через вторую ф.ф.

§2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые определения.

Пусть T – класс тензорных полей на подмногообразии M в $M_n(c)$, выражаемых с помощью тензорных операций через вторую ф.ф. α_2 . Всюду ниже мы будем рассматривать только тензорные поля $T \in T$.

Определение 4. Общая точка x двух m -мерных подмногообразий M и $\widetilde{M}$ в $M_n(c)$ называется T -касательной точкой порядка s ($s \geq 0$), если

- 1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ совпадают,
- 2) тензоры T_x и $\widetilde{T}_x$ и их соответствующие ковариантные производные до s -го порядка включительно совпадают (символ $\sim$ относится к подмногообразию $\widetilde{M}$, при $s = 0$ будем говорить об “ T -касании”).

Определение 5. m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ называется T -огibaющим s -го порядка ($s \geq 0$) некоторого семейства m -мерных подмногообразий $\{G\}$, если в каждой точке $x \in M$ подмногообразие M имеет T -касание порядка s с некоторым подмногообразием из $\{G\}$.

Определение 6. Тензор T подмногообразия M называется параллельным, если $\nabla_X T = 0$ для любого X и полупараллельным, если $\bar{R}(X, Y) \cdot T = 0$ для любых векторных полей X, Y на M . Для простоты, подмногообразия, удовлетворяющие этим условиям, будем называть T -параллельными и T -полупараллельными, соответственно.

Будем рассматривать следующие тензоры: R = тензор кривизны, Ric = тензор Риччи, $R^\perp$ = тензор кривизны нормальной связности, H = вектор средней кривизны.

Основными результатами настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть для $T \in T$ m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ является R -, $R^\perp$ - и T -огигающим семейства m -мерных T -параллельных подмногообразий $\{G\}$. Тогда M является T -полупараллельным подмногообразием.

Замечание 1. Если тождество Риччи для $T \in T$ содержит только один из тензоров R и $R^\perp$, то в теореме 3 соответствующие " R -" и " $R^\perp$ -" опускаются.

Теорема 4. Для любого $T \in T$ каждое m -мерное T -полупараллельное подмногообразие M класса C^∞ в $M_n(c)$ является огибающим s -го порядка ($s \geq 2$) для некоторого семейства m -мерных T -параллельных подмногообразий.

Теоремы 3 и 4 описывают взаимосвязь между параллельными и полупараллельными структурами на подмногообразиях, выражаемых с помощью тензорных операций через вторую ф.ф.

В качестве следствий теорем 3 и 4 мы можем сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 5. Пусть m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ является R -огигающим семейства m -мерных R -параллельных подмногообразий $\{G\}$. Тогда M является R -полупараллельным подмногообразием.

Теорема 6. Каждое m -мерное R -полупараллельное подмногообразие M класса C^∞ в $M_n(c)$ является огибающим порядка s ($s \geq 2$) для некоторого семейства m -мерных R -параллельных подмногообразий.

Можно сформулировать аналогичные результаты, заменяя T в теоремах 3 и 4 на тензоры Ric , $R^\perp$ и H (см. [19]).

Теорема 5 изложена в [20]. Доказательство теоремы 5 мы будем выводить из теоремы 3, доказательство же теоремы 6 – из теоремы 4.

§3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И УРАВНЕНИЯ

В настоящем параграфе, с использованием формализма расслоения адаптированных ортонормированных реперов подмногообразия, мы приводим основные формулы и уравнения, используемые при доказательстве наших основных результатов.

Пусть $\omega = \omega^a \otimes e_a$ — каноническая 1-форма на $M_n(c)$, и пусть ω_a^b — формы связности Леви-Чивита в главном расслоении $\mathcal{O}(M_n(c))$ ортонормированных реперов $(x, e_1, \dots, e_n)$ в $M_n(c)$, где $a, b, d, \dots = 1, \dots, n$. Имеем $\omega_a^b + \omega_b^a = 0$, и имеют место следующие структурные уравнения

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega_b^a = \omega_a^d \wedge \omega_d^b + c\omega_a \wedge \omega^b.$$

Пусть M — m -мерное подмногообразие класса C^∞ в $M_n(c)$. Тогда расслоение $\mathcal{O}(M_n(c))$ может быть приведено к главному расслоению $\mathcal{O}(M, M_n(c))$ адаптированных реперов $(x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$, характеризующихся тем, что векторы e_i ($i, j, \dots = 1, \dots, m$) принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а векторы e_α ($\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$) принадлежат нормальному пространству $T_x^\perp(M)$ (см. [21], стр. 11 — 15). В силу этого и первой группы структурных уравнений имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad (3.1)$$

где вторая группа уравнений получается из первой с помощью внешнего дифференцирования и последующего применения леммы Картана.

Аналогичным образом, из второй группы уравнений в (3.1) получаем

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha (\bar{\nabla}_j h_{ik}^\alpha), \quad (3.2)$$

где $\bar{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена-Бортолотти.

В (3.1) и (3.2) функции h_{ij}^α , h_{ijk}^α , симметрические по нижним индексам, являются компонентами второй α_2 и третьей α_3 фундаментальных форм. Компоненты $h_{i_1 \dots i_s, i_{s+1}}^\alpha$ фундаментальных форм α_{s+1} ($s \geq 3$) определяются равенствами

$$\bar{\nabla} h_{i_1 \dots i_s}^\alpha = h_{i_1 \dots i_s, i_{s+1}}^\alpha \omega^{i_{s+1}+1}, \quad (3.3)$$

или, более подробно

$$dh_{i_1 \dots i_s}^\alpha + h_{i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - h_{i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_s}^k = h_{i_1 \dots i_s, s+1}^\alpha \omega^{s+1}. \quad (3.4)$$

Формы α_s при $s \geq 2$ являются $T^\perp(M)$ -значными ($T^\perp(M)$ — нормальное расслоение) и их действие определяется по правилу

$$\alpha_s: (X_1, \dots, X_s) \rightarrow h_{i_1 \dots i_s}^\alpha X_1^{i_1} \dots X_s^{i_s} e_\alpha,$$

где $X_r = X^{i_r} e_{i_r}$, $r = 1, \dots, s$.

В отличие от форм α_2 и α_3 , формы α_s , $s \geq 4$ симметричны только по первым трем аргументам. Из (3.3) следует, что $\alpha_{s+1} = \bar{\nabla} \alpha_s$.

Фундаментальная форма α_s называется параллельной или ковариантно постоянной, если его компоненты $h_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ удовлетворяют условиям

$$dh_{i_1 \dots i_s}^\alpha + h_{i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - h_{i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_s}^k = 0. \quad (3.5)$$

Это условие более коротко можно записать в виде $\bar{\nabla} \alpha_s = 0$, что равносильно условию $\alpha_{s+1} = 0$. Очевидно, что тогда $\alpha_k = 0$ при $k \geq s+2$.

Дифференцируя внешним образом уравнение (3.4), мы получаем условие интегрируемости

$$h_{i_1 \dots i_s, k l}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha. \quad (3.6)$$

Формы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \left(\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{\eta]j}^\alpha + c \delta_{i[k} \delta_{\eta]j} \right) \omega^k \wedge \omega^l, \quad (3.7)$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{\eta]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l \quad (3.8)$$

являются 2-формами кривизны связности Ван дер Вардена-Бортолотти $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, где ∇ обозначает риманову связность на подмногообразии M , определенную 1-формами ω_i^j , а $\nabla^\perp$ — нормальную связность, определенную 1-формами ω_α^β .

Фундаментальная форма α_s называется полупараллельной, если ее компоненты $h_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ удовлетворяют условию

$$h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.6) следует, что (3.9) равносильно симметричности компонент $h_{i_1 \dots i, kl}^\alpha$ ф.ф. α_{s+2} по двум последним нижним индексам, что, в свою очередь, равносильно симметричности выражения $\alpha_{s+2}(X_1, \dots, X_s, X, Y)$ по двум последним аргументам. Отсюда, в частности, следует, что если у подмногообразия все ф.ф. до $(s+2)$ -го ($s \geq 2$) порядка включительно являются симметрическими, то ф.ф. $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ автоматически будут полупараллельными.

В формулах (3.7) и (3.8) коэффициенты

$$R_{ikl}^j = - \left(\sum_{\alpha} h_{i[k}^{\alpha} h_{l]j}^{\alpha} + c \delta_{i[k} \delta_{l]j} \right), \quad R_{\alpha kl}^{\beta} = - \sum_i h_{i[k}^{\alpha} h_{l]i}^{\beta} \quad (3.10)$$

при $\omega^k \wedge \omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$, соответственно. Если $R = 0$, то подмногообразие называется локально евклидовым. Если $R^\perp = 0$, то говорят о подмногообразии с плоской нормальной связностью. Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.9) и учитывая, что 2-формы $\omega^p \wedge \omega^q$ являются базисными, мы получим

$$h_{k \dots i}^{\alpha} R_{i, pq}^k + \dots + h_{i_1 \dots k}^{\alpha} R_{i, pq}^{i_1} - h_{i_1 \dots i}^{\beta} R_{\beta pq}^{\alpha} = 0. \quad (3.11)$$

Это условие, равносильное (3.9), также является условием полупараллельности ф.ф. α_s . В силу (3.10) и (3.11) условие полупараллельности α_s фактически является алгебраическим условием на компоненты h_{ij}^{α} второй ф.ф. α_2 , компоненты $h_{i_1 \dots i}^{\alpha}$ ф.ф. α_s и кривизну объемлющего пространства.

Компоненты R_{ik} тензора Риччи Ric определяются по формуле

$$R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_{\alpha} (h_{il}^{\alpha} h_k^{\alpha l} - h_{ik}^{\alpha} H^{\alpha}), \quad (3.12)$$

где величины

$$H^{\alpha} = \sum_i h_{ii}^{\alpha} \quad (3.13)$$

являются компонентами вектора средней кривизны $H = H^{\alpha} e_{\alpha}$.

Условия параллельности тензоров R_{ikl}^j , R_{ik} , $R_{\alpha kl}^{\beta}$, H^{α} имеют следующий вид :

$$dR_{ikl}^j + R_{ikl}^t \omega_t^j - R_{ikl}^j \omega_t^t - R_{itl}^j \omega_k^t - R_{ikt}^j \omega_l^t = 0, \quad dR_{ik} - R_{ik} \omega_i^i - R_{ik} \omega_k^i = 0, \quad (3.14)$$

$$dR_{\alpha k l}^{\beta} + R_{\alpha k l}^{\gamma} \omega_{\gamma}^{\beta} - R_{\gamma k l}^{\beta} \omega_{\alpha}^{\gamma} - R_{\alpha l i}^{\beta} \omega_k^i - R_{\alpha k i}^{\beta} \omega_l^i = 0, \quad dH^{\alpha} + H^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha} = 0. \quad (3.15)$$

Дифференцируя эти выражения внешним образом, получим следующие условия интегрируемости :

$$R_{i k l}^j \Omega_i^k + R_{i l i}^j \Omega_k^i + R_{j k l}^i \Omega_l^i - R_{i k l}^i \Omega_l^j = 0, \quad R_{i k} \Omega_i^k + R_{i l} \Omega_k^l = 0, \quad (3.16)$$

$$R_{\alpha l i}^{\beta} \Omega_k^i + R_{\alpha k i}^{\beta} \Omega_l^i + R_{\gamma k l}^{\beta} \Omega_{\alpha}^{\gamma} - R_{\alpha k l}^{\gamma} \Omega_{\gamma}^{\beta} = 0, \quad H^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} = 0. \quad (3.17)$$

Кроме того, условия (3.16) и (3.17) фактически и являются условиями полупараллельности тензоров $R_{i k l}^j$, $R_{i k}$, $R_{\alpha k l}^{\beta}$ и H^{α} ; соответственно.

Пусть $T \in T$ - некоторое тензорное поле на подмногообразии $M \subset M_n(c)$, компоненты T_{ij}^{α} которого выражаются через h_{ij}^{α} с помощью тензорных операций. Условия параллельности и полупараллельности T_{ij}^{α} имеют, соответственно, следующий вид (ср. с (3.5) и (3.9)) :

$$dT_{ij}^{\alpha} + T_{ij}^{\beta} \omega_{\beta}^{\alpha} - T_{k j}^{\alpha} \omega_i^k - T_{i k}^{\alpha} \omega_j^k = 0, \quad (3.18)$$

$$T_{k j}^{\alpha} \Omega_i^k + T_{i k}^{\alpha} \Omega_j^k - T_{ij}^{\gamma} \Omega_{\gamma}^{\alpha} = 0. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) фактически является условием интегрируемости уравнения (3.18). Оно равносильно следующему алгебраическому условию, записанному в терминах компонент h_{ij}^{α} второй ф.ф. :

$$T_{k j}^{\alpha} R_{i p q}^k + T_{i k}^{\alpha} R_{j p q}^k - T_{ij}^{\gamma} R_{\gamma p q}^{\alpha} = 0. \quad (3.20)$$

Следовательно, в адаптированном поле ортонормированных реперов на подмногообразии M мы имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^{\alpha} = 0, \\ \omega_i^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} \omega^j, \\ \nabla h_{ij}^{\alpha} = h_{ijk}^{\alpha} \omega^k, \\ \dots \dots \dots \\ \nabla h_{i_1 \dots i_s}^{\alpha} = h_{i_1 \dots i_s i_{s+1}}^{\alpha} \omega^{i_{s+1}}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Условия интегрируемости этой системы имеют следующий вид :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{i j k l}^{\alpha} \omega^k \wedge \omega^l = h_{i j}^{\alpha} \Omega_i^k + h_{i l}^{\alpha} \Omega_j^k - h_{i j}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha}, \\ h_{i j k l p}^{\alpha} \omega^l \wedge \omega^p = h_{i j k}^{\alpha} \Omega_i^l + h_{i l k}^{\alpha} \Omega_j^l + h_{i j l}^{\alpha} \Omega_k^l - h_{i j k}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha}, \\ \dots \dots \dots \\ h_{i_1 \dots i_s, r t}^{\alpha} \omega^r \wedge \omega^t = h_{k \dots i_s}^{\alpha} \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots k}^{\alpha} \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Замечание 2. Системы (3.21) и (3.22) всегда конечны. Действительно, для любого x при увеличении s пространство $M_n(c)$ постепенно заполняется касательным и нормальными к подмногообразию пространствами. Это означает, что начиная с некоторого s компоненты $h_{i_1, \dots, i_s}^a$, $t \geq s + 1$ выражаются через компоненты предыдущих ф.ф. Следовательно, для этих значений s все уравнения в (3.21) и (3.22) обращаются в тождество.

Путем непосредственного ковариантного дифференцирования (3.10), (3.12) и (3.13) легко убедиться, что ковариантные производные $(s - 2)$ -го ($s \geq 2$) порядка тензоров R_{ikl}^j , R_{ik} , $R_{\alpha kl}^\beta$ и H^α выражаются через h_{ij}^a и его ковариантные производные до $(s - 2)$ -го порядка включительно. Отсюда следует, что если общая точка x двух m -мерных подмногообразий является точкой касания s -го порядка ($s \geq 2$), то она будет и точкой R -, H -, Ric - и $R^\perp$ -касания $(s - 2)$ -го порядка.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Пусть m -мерное подмногообразие M в $M_n(c)$ является R -, $R^\perp$ - и T -огнивающим некоторого семейства m -мерных T -параллельных подмногообразий $\{G\}$, и пусть $\widetilde{M}$ – подмногообразие из $\{G\}$ такое, что M и $\widetilde{M}$ имеют касание в точке x . В адаптированном ортонормированном репере, общем для M и $\widetilde{M}$ в точке x , компоненты R_{ikl}^j , $R_{\alpha kl}^\beta$ и T_{ij}^a совпадают с $\widetilde{R}_{ikl}^j$, $\widetilde{R}_{\alpha kl}^\beta$ и $\widetilde{T}_{ij}^a$, соответственно. Поскольку подмногообразие $\widetilde{M}$ T -параллельно, оно также T -полупараллельно. Это означает, что компоненты $\widetilde{T}_{ij}^a$ тензора $\widetilde{T}$ удовлетворяют условию (3.20), записанному для $\widetilde{M}$. В силу алгебраического характера этих условий и совпадения в точке x компоненты T_{ij}^a удовлетворяют уравнениям (3.20). Так как уравнения (3.20) имеют тензорный характер и $x \in M$ – произвольная точка, мы заключаем, что подмногообразие M T -полупараллельно. Теорема 3 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Доказательство будем проводить с помощью метода подвижного репера Картана и теории вполне интегрируемых дифференциальных систем Фробениуса-Картана. Аналогичные доказательства можно найти в [8], [17] и [18].

Пусть m -мерное подмногообразие M , на котором задано полупараллельное тензорное поле T , в расслоении адаптированных ортонормированных реперов

в $M_n(c)$ определяется вполне интегрируемой системой (3.21). Это означает, что условие (3.22) выполнено. Пусть E_n обозначает касательное евклидово пространство к $M_n(c)$ в точке $x \in M$. Обозначим через L многообразие всех наборов $(x, T_x(M), \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots)$ в E_n , где α_r — r -ая ф.ф. подмногообразия M , с помощью которой произведение $T_x(M) \times \dots \times T_x(M)$ (r раз) отображается в $T_x^\perp(M)$ (ортогональное дополнение к $T_x(M)$ в E_n). В силу замечания 2, число ф.ф. в этих наборах конечно и все они имеют одинаковую длину. Если дополнить такой набор адаптированными ортонормированными реперами $(x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$, где $e_i \in T_x(M)$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$ ($i = 1, \dots, m$, $\alpha = m+1, \dots, n$), то мы получим набор реперов. Многообразие всех реперированных наборов указанной конечной длины в E_n обозначим через L^{fr} . Локальными координатами в L^{fr} являются x^a -координаты ($a = 1, \dots, n$) точки x , параметры φ^p ($p = 1, \dots, n(n-1)/2$) ортогональной матрицы A в $\mathcal{O}(n, R)$, которые преобразуют базис $\{\partial/\partial x^a\}$ в базис $\{e_\alpha\}$ после стандартной ортогонализации, компоненты $h_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ форм α_s в базисе $\{e_\alpha\}$.

На многообразии L^{fr} рассмотрим следующую дифференциальную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^\alpha = 0, \\ \omega_i^\alpha - h_{ij}^\alpha \omega^j = 0, \\ dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k - h_{ijk}^\alpha \omega^k = 0, \\ \text{-----} \\ dh_{i_1 \dots i_s}^\alpha + h_{i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k \dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - h_{i_1 \dots k}^\alpha \omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s, i+1}^\alpha \omega^{i+1} = 0 \\ \text{-----} \\ dT_{ij}^\alpha + T_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj}^\alpha \omega_i^k - T_{ik}^\alpha \omega_j^k = 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Эта система состоит из двух подсистем. Первая подсистема совпадает с (3.21), для которой выполняется условие интегрируемости (3.22). Во второй подсистеме величины T_{ij}^α являются компонентами тензора T . Они выражаются через h_{ij}^α с помощью тензорных операций и, в силу полупараллельности T , удовлетворяют условиям (3.19), которые являются условиями интегрируемости для второй подсистемы. При этом предполагается, что R_{ikl}^j и $R_{\alpha kl}^\beta$ определяются по формулам (3.10), а Ω_i^j и Ω_α^β определяются по формулам (3.7) и (3.8), соответственно. Таким образом, дифференциальная система (5.1) вполне интегрируема.

Два реперированных набора будем называть эквивалентными, если $e'_i = A_i^j e_j$, $e'_\alpha = A_\alpha^\beta e_\beta$, где $\|A_i^j\| \in \mathcal{O}(m, R)$, $\|A_\alpha^\beta\| \in \mathcal{O}(n-m, R)$. Тогда для любого

$r \geq 2$ будем иметь

$$h'^{\alpha}_{i_1 \dots i_r} = h^{\beta}_{j_1 \dots j_r} A^{\alpha}_{\beta} A^{j_1}_{i_1} \dots A^{j_r}_{i_r}.$$

Эта эквивалентность определяет отображение $L^{Jr} \rightarrow L$, которое проецирует систему (5.1) в корректно определенную вполне интегрируемую дифференциальную систему на L . Отсюда следует, что для каждого фиксированного набора из L локально существует интегральное подмногообразие этой дифференциальной системы, которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволютивного распределения на L , соответствующего этой системе, т.е. m . Уравнения подсистемы (5.1) показывают, что фундаментальными формами этого подмногообразия являются α_s . Подсистема (5.1) показывает, что на этом подмногообразии тензорное поле T^{α}_{ij} является параллельным.

Пусть фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{sx}, \dots)$ подмногообразия M определяет некоторое m -мерное подмногообразие $\widetilde{M}$, проходящее через точку x , порожденное соответствующим интегральным подмногообразием системы (5.1). Так как в точке $x \in M \cap \widetilde{M}$ наборы $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{sx}, \dots)$ и $(x, T_x(\widetilde{M}), \widetilde{\alpha}_{2x}, \dots, \widetilde{\alpha}_{sx}, \dots)$ совпадают, то M является огибающим s -го порядка ($s \geq 2$) для всех таких $\widetilde{M}$. Теорема 4 доказана.

Доказательства теорем 5 и 6 аналогичны доказательствам теорем 3 и 4, соответственно. Доказательства их вариантов для Ric -, $R^{\perp}$ - и H -полупараллельных подмногообразий основаны на условиях параллельности (3.14), (3.15) и условиях полупараллельности (3.16), (3.17).

ABSTRACT. This paper extends Lumiste theorem on the envelope nature of semi-parallel submanifolds to semi-parallel structures determined by second fundamental forms by means of tensor operations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ü. Lumiste, "Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions", Izv. AN Est.SSR, Fiz. Math., vol. 36, № 4, pp. 414 – 417, 1987.
2. Ü. Lumiste, "Normally flat semi-symmetric submanifolds", Diff. Geom. and Appl. Proc. Conf., Dubrovnik, June 26 — July 3, 1988, Novi Sad, pp. 159 – 171, 1989.
3. Ю. Лумисте, "Неприводимые нормально плоские полусимметрические подмногообразия, I", Изв. вузов, Математика, № 8, стр. 45 – 53, 1990.
4. Ю. Лумисте, "Неприводимые нормально плоские полусимметрические подмно-

- гообразия, II", Изв. вузов, Математика, № 9, стр. 31 — 40, 1990.
5. J. Deprez, "Semi-parallel surfaces in Euclidean space", J. Geom., vol. 25, pp. 192 — 200, 1985.
 6. F. Mercuri, "Parallel and semi-parallel immersions into space forms", Riv. Mat. Univ. Parma (4), vol. 17, pp. 91 — 108, 1991.
 7. F. Dillen, S. Nölker, "Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property", J. Reine Angew. Math., vol. 435, pp. 33 — 63, 1993.
 8. Ü. Lumiste, "Semi-symmetric submanifold as the second order envelope of symmetric submanifolds", Proc. Estonian Acad. Sci., Phys. Math., vol. 39, pp. 1 — 8, 1990.
 9. D. Ferus, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", Math. Ann., vol. 247, № 1, pp. 81 — 93, 1980.
 10. Ю. Лумисте, "Полусимметрические подмногообразия", Итоги науки и техники, Пробл. геометрии, т. 23, стр. 3 — 28, 1991.
 11. В. А. Мирзоян, "Ric-полусимметрические подмногообразия", Итоги науки и техники, Пробл. геометрии, т. 23, стр. 29 — 66, 1991.
 12. Ü. Lumiste, "Symmetric orbits of orthogonal Veronese actions and their second order envelopes", Results Math., vol. 27, pp. 284 — 301, 1995.
 13. Ü. Lumiste, "Modified Nomizu problem for semi-parallel submanifolds", Geom. Topol. of Submanifolds, VII, Ed. F. Dillen, M. Magid, U. Simon, I. Van de Woestijne, L. Verstraelen, Singapore: World Scientific, pp. 176 — 181, 1995.
 14. Ü. Lumiste, "Symmetric orbits of orthogonal Plücker actions and triviality of their second envelopes", Ann. Global Analysis and Geom., vol. 14, pp. 237 — 256, 1996.
 15. Ü. Lumiste, "Semi-parallel submanifolds as some immersed fibre bundles with flat connections", Geom. Topol. of Submanifolds, VIII, Ed. F. Dillen, B. Komrakov, U. Simon, I. Van de Woestijne, L. Verstraelen, Singapore: World Scientific, pp. 236 — 244, 1996.
 16. Ü. Lumiste, "Semi-symmetric submanifolds of cylindrical or toroidal Segre type", Proc. Estonian Acad. Sci., Phys. Math., vol. 45, № 2/3, pp. 161 — 177, 1996.
 17. В. А. Мирзоян, "S-полупараллельные подмногообразия в пространствах постоянной кривизны как огибающие S-параллельных подмногообразий", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 5, стр. 37 — 48, 1996.
 18. В. А. Мирзоян, "Подмногообразия с симметрическими фундаментальными формами", Изв. вузов, Математика, № 9, стр. 35 — 40, 1997.
 19. В. А. Мирзоян, "Полупараллельные структуры как огибающие", Тезисы международной геометрической школы-семинара памяти Н. В. Ефимова, Ростов, стр. 56 — 57, 1998.
 20. В. А. Мирзоян, "О K-полупараллельных подмногообразиях", Тезисы международной геометрической школы-семинара памяти Н. В. Ефимова, Ростов, стр. 141 — 142, 1996.
 21. К. Кобаяси, К. Номидзу, Основы дифференциальной геометрии, т. II, Наука, 1981.

5 января 1998

Армянский государственный
инженерный университет

ТЕОРЕМА ОБ (S, h) -ОСНАЩЕННОМ КОБОРДИЗМЕ

А. А. Огникян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

В работе рассматриваются морфизмы векторных касательных пространств. Внимание сосредотачивается на понятии (S, h) -оснащенного кобордизма. Из теоремы о (S, h) -оснащенных кобордизмах и обобщенной теоремы Понтрягина-Тома, в частности, следует аналог теоремы Понтрягина для α -оснащенных многообразий.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] было введено понятие α -оснащенного кобордизма, как естественное обобщение хорошо известного понятия оснащенного бордизма [2]. Как и в классическом случае, α -оснащение нормального расслоения определяется последовательностью векторных полей, удовлетворяющих некоторому условию. Подробно α -оснащенные расслоения и их классифицирующие пространства изучались автором в [3].

Настоящая работа возникла из первоначального намерения получить аналог результата Понтрягина (см. [2], теоремы 9 и 10) для α -оснащенных многообразий. В подготовительном §1 мы рассматриваем эквивалентные гомотопии и эквивалентные изоморфизмы векторных расслоений. В §2 вводится основное для данной статьи понятие (S, h) -оснащенного бордизма и доказывается теорема 1 о редукции к (B, f) -кобордизмам. Эта теорема в сочетании с обобщенной теоремой Понтрягина-Тома (см. [4]) приводит к теореме 2 о существовании канонических изоморфизмов. Непосредственным следствием теоремы 2 является теорема 3, которая является аналогом теоремы Понтрягина для α -оснащенных многообразий. Отметим, что теорема 2 может оказаться полезной в ситуациях, когда дополни-

тельная структура на нормальном расслоении не является (B, f) -структурой.

Подготовительные предложения в §1 доказаны полностью за исключением наиболее простых случаев (предложения 5,8,10,12,15,16,18).

§1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГОМОТОПИИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В этом параграфе базы всех рассматриваемых векторных расслоений будут предполагаться паракompактными пространствами. Пусть X - векторное пространство и I - отрезок $[0, 1]$. Для любого $t \in I$ рассмотрим вложение $i_t : X \rightarrow X \times I$, $i_t(x) = (x, t)$, $x \in X$. Если $G : X \times I \rightarrow Y$ - некоторая гомотопия, то отображение $G \circ i_t$ в дальнейшем будем обозначать через G_t . Пусть γ^k - каноническое k -мерное векторное расслоение над $G_{k,\infty}$. Положим

$$\xi = F^* \gamma^k = (tl\xi, P, X \times I), \quad \xi_t = F_t^* \gamma^k,$$

где $tl\xi$ - полное пространство расслоения ξ и $P : tl\xi \rightarrow X \times I$ - проекция ξ .

Имеем

$$i_t^* \xi = \xi_t, \quad (F_1 \circ P_1)^* \gamma^k = P_1^* \xi_1,$$

где $P_1 : X \times I \rightarrow X$ - каноническая проекция. Пусть

$$(\Phi'_t, i_t) : i_t^* \xi \rightarrow \xi_t, \quad (\Phi''_t, P_1) : P_1^* \xi_t \rightarrow \xi_t$$

- канонические морфизмы, где

$$\Phi'_t : tl(i_t^* \xi) \rightarrow tl\xi, \quad \Phi''_t : tl(P_1^* \xi_t) \rightarrow tl\xi_t.$$

Согласно теореме 3.4.3 из [5] расслоение ξ изоморфно каждому из расслоений $P_1^* \xi_0$ и $P_1^* \xi_1$. Пусть $\Psi_i : \xi \rightarrow P_1^* \xi_i$, $i = 0, 1$ - некоторые изоморфизмы. Рассмотрим некоторую гомотопию $F : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ и такой морфизм расслоений $(\Phi, P_1) : \xi \rightarrow \xi_1$, что для любого $t \in I$ морфизм $(\Phi_t, 1_X) : \xi_t \rightarrow \xi_1$, $\Phi_t = \Phi \circ \Phi'_t$ является изоморфизмом, причем $\Phi_1 = 1_{\xi_1}$. Всякий такой морфизм вместе с семейством изоморфизмов Φ_t будем называть *присоединенным к гомотопии F* . Изоморфизм Φ_0 также называют *присоединенным к F* .

Предложение 1. Для любой гомотопии $F : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ существует морфизм, присоединенный к F , и существует изоморфизм $\tilde{\Psi}_0 : \xi \rightarrow P_1^* \xi_0$ такой, что

$$(\Phi_0'', P_1) \circ (\tilde{\Psi}_0, 1_{X \times I}) \circ (\Phi_0', i_0) = 1_{\xi_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм $(\Phi_1'', P_1) \circ (\Psi_1, 1_{X \times I}) \circ (\Phi_1', i_1)$, и пусть $\chi : \xi_1 \rightarrow \xi_1$ — обратный к нему изоморфизм. Положим $\Phi = \chi \circ \Phi_1'' \circ \Psi_1$. Тогда морфизм

$$(\Phi, P_1) = (\chi, 1_X) \circ (\Phi_1'', P_1) \circ (\Psi_1, 1_{X \times I})$$

будет требуемым морфизмом. Существует морфизм $(\bar{\Phi}, P_1) : \xi \rightarrow \xi_0$ такой, что для любого $t \in I$ морфизм $(\bar{\Phi}_t, 1_X)$ является изоморфизмом и $\bar{\Phi}_0 = 1_{\xi_0}$. Изоморфизм $\tilde{\Psi}_0 : t\xi \rightarrow t(P_1^* \xi_0)$ определим следующим образом: если $y \in t\xi$, то $\tilde{\Psi}_0(y) = (P(y), \bar{\Phi}(y))$.

Предложение 2. Пусть даны два морфизма $(\Phi^j, P_1) : \xi \rightarrow \xi_1$ и $\Phi_t^j : \xi_t \rightarrow \xi_1$, $j = 0, 1$, присоединенные к одной и той же гомотопии F . Тогда существует такой изоморфизм $\varphi : P_1^* \xi_0 \rightarrow P_1^* \xi_1$, что

$$(\Phi_1'', P_1) \circ (\varphi, 1_{X \times I}) \circ (\Psi_0 \circ \Phi_j', i_j) = (\Phi_0^j, 1_X), \quad j = 0, 1.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $((x, \tau), v)$, где $(x, \tau) \in X \times I$, и пусть v — некоторый вектор, принадлежащий слою расслоения ξ_t над точкой x . Определим отображение $\varphi : t(P_1^* \xi_0) \rightarrow t(P_1^* \xi_1)$ формулой

$$\varphi((x, t), v) = \begin{cases} ((x, t), \Phi^0((x, 2t), \tilde{\Psi}_0^{-1}((x, 2t), v))), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ ((x, t), \Phi^1((x, 2-2t), \tilde{\Psi}_0^{-1}((x, 2-2t), v))), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Пусть X' — подпространство пространства X и $F' : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторая гомотопия. Положим

$$F' = F|_{X' \times I}, \quad P_1' = P_1|_{X' \times I}, \quad \xi = F^* \gamma^k,$$

$$\xi' = (F')^* \gamma^k, \quad \xi_t = F_t^* \gamma^k, \quad \xi_t' = (F_t')^* \gamma^k, \quad t \in I.$$

Рассмотрим некоторый морфизм $(\Phi, P_1) : \xi \rightarrow \xi_1$, $\Phi_t : \xi_t \rightarrow \xi_1$, $t \in I$, присоединенный к гомотопии F , и пусть $(\Phi', P_1') : \xi' \rightarrow \xi_1'$, $\Phi_t' : \xi_t' \rightarrow \xi_1'$ —

морфизмы, полученные ограничением морфизмов $(\bar{\Phi}, P_1)$ и $\bar{\Phi}_i$ на подрасслоения ξ' и ξ'_i , соответственно. Следующее утверждение легко следует из доказательства предложения 1.

Предложение 3. Морфизм $(\bar{\Phi}', P'_1)$ вместе с семейством изоморфизмов $\bar{\Phi}'_i$ определяет некоторый морфизм, присоединенный к гомотопии F'

Пусть $f_0, f_1 : X \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторые отображения. Положим $\xi = f_0^* \gamma^k$, $\eta = f_1^* \gamma^k$. Пусть $(\varphi, 1_{X \times I}) : P_1^* \xi \rightarrow P_1^* \eta$ — некоторый морфизм векторных расслоений. Рассмотрим морфизмы

$$(\bar{\Phi}_i, 1_X) : \xi = i_i^*(P_1^* \xi) \rightarrow P_1^* \xi \xrightarrow{(\varphi, 1_{X \times I})} P_1^* \eta \rightarrow \eta, \quad i \in I,$$

где $i_i^*(P_1^* \xi) \rightarrow P_1^* \xi$ и $P_1^* \eta \rightarrow \eta$ — канонические морфизмы, индуцированные отображениями i_i и P_1 , соответственно. Изоморфизмы $\bar{\Phi}_i : \xi \rightarrow \eta$, $i = 0, 1$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $\varphi : P_1^* \xi \rightarrow P_1^* \eta$ такой, что $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_i$, $i = 0, 1$. Следующее утверждение легко вытекает из предложения 2.

Предложение 4. Пусть $F : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторая гомотопия и $\xi_0 = F_0^* \gamma^k$, $\xi_1 = F_1^* \gamma^k$. Пусть $\bar{\Phi}_F^i : \xi_0 \rightarrow \xi_1$, $i = 0, 1$ — некоторые изоморфизмы, присоединенные к F . Тогда изоморфизмы $\bar{\Phi}_F^0$ и $\bar{\Phi}_F^1$ эквивалентны.

Две гомотопии $F' F'' : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ будем называть эквивалентными, если $F'_i = F''_i$, $i = 0, 1$ и отображения F' и F'' гомотопны относительно ∂I .

Предложение 5. Пусть $F', F'' : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — эквивалентные гомотопии и $\bar{\Phi}_{F'}$, $\bar{\Phi}_{F''}$ — произвольные изоморфизмы, присоединенные к F' и F'' , соответственно. Тогда эти изоморфизмы эквивалентны.

Для данного символа Шуберта $a = (a_1, \dots, a_n, k)$ (см. [3]) положим $\hat{a} = (a_1 + n + k, \dots, a_n + n + k, n + 2k)$. Через $S(a)$ и $S(\hat{a})$ обозначим псевдомногообразия Шуберта, порожденные символами a и $\hat{a}$, соответственно. Стандартное вложение $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{2n+2k}$ индуцирует канонические вложения

$$i_{n,k} : G_{n,k} \rightarrow G_{n,n+2k}, \quad i_a : S(a) \rightarrow S(\hat{a}).$$

Имеем $s_{\hat{a}} \circ i_a = i_{n,k} \circ s_a$, где s_a обозначает каноническое вложения $S(a) \rightarrow G_{n,k}$.

Предложение 6. Пусть $f_0, f_1 : X \rightarrow S(a)$ — непрерывные отображения. Векторные расслоения $f_0^* \gamma(a)$ и $f_1^* \gamma(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $i_a \circ f_0, i_a \circ f_1 : X \rightarrow S(\hat{a})$ гомотопны.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n, k)$, и пусть $u^0 = (u_1^0, \dots, u_{n+k}^0)$, $v^1 = (v_1^1, \dots, v_{n+k}^1)$ — a -оснащения расслоений $\xi_0 = f_0^* \gamma(a)$ и $\xi_1 = f_1^* \gamma(a)$, индуцированные отображениями f_0 и f_1 , соответственно. Допустим, что расслоения ξ_0 и ξ_1 изоморфны и рассмотрим некоторый изоморфизм $\Psi : \xi_0 \rightarrow \xi_1$. Положим $v^0 = (v_1^0, \dots, v_{n+k}^0)$, где $v_i^0 = \Psi \circ u_i^0$. Последовательности $\tilde{v}_i = (v_1^i, \dots, v_{2n+2k}^i)$, $i = 0, 1$, где $v_j^i = 0$ при $j > n + k$, определяют некоторые $\hat{a}$ -оснащения $\tilde{v}^0, \tilde{v}^1$ расслоения ξ_1 . Для любого $t \in I$ и $i = 1, \dots, 2n + 2k$ определим сечения v_i^t расслоения ξ_1 формулой

$$v_i^t = \begin{cases} (1-t)v_i^0 + tv_i^1, & 1 \leq i \leq n+k, \\ (t-t^2)v_{i-n-k}^0, & n+k+1 \leq i \leq 2n+2k. \end{cases}$$

Для каждого $t \in I$ последовательность сечений $\tilde{v}^t = (v_1^t, \dots, v_{2n+2k}^t)$ определяет некоторое $\hat{a}$ -оснащение расслоения ξ_1 . Пространство расслоений $P_1^* \xi_1$ канонически гомеоморфно к $tl\xi_1 \times I$, а пересечения

$$v_i : X \times I \rightarrow tl\xi_1 \times I, \quad v_i(x, t) = (v_i^t(x), t), \quad x \in X, \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, 2n+2k$$

определяют некоторое $\hat{a}$ -оснащение $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{2n+2k})$ расслоения $P_1^* \xi_1$. Пусть $F : X \times I \rightarrow S(\hat{a})$ — гауссово отображение расслоения $(P_1^* \xi_1; \tilde{v})$, т.е. $P_1^* \xi_1 = F^* \gamma(\hat{a})$, $\tilde{v} = F^* v_{\hat{a}}$. Поскольку

$$(P_1^* \xi_1; \tilde{v})|_{X \times i} = (f_i^* \gamma(\hat{a}); \tilde{v}^i), \quad i = 0, 1,$$

то из теоремы 1 в [3] следует, что $i_a \circ f_0 = F_0$, $i_a \circ f_1 = F_1$. Следовательно, отображения $i_a \circ f_0$ и $i_a \circ f_1$ гомотопны. Справедливость обратного утверждения следует из теоремы 3.4.7 в [5].

Построенную гомотопию $X \times I \rightarrow S(\hat{a})$ между отображениями $i_a \circ f_0$ и $i_a \circ f_1$ в дальнейшем будем обозначать через $F^{\#}(f_0, f_1)$.

Следствие 1. Пусть $(\Phi, P_1) : P_1^* \xi_1 \rightarrow \xi_1$ — канонический морфизм. Тогда $\Phi \circ v_i(x, t) = v_i^t(x)$ и, поэтому, для любого $t \in I$ композиция канонических

морфизмов

$$(\Phi_t, 1_X) : i_1^*(P_1^* \xi_1) \mapsto P_1^* \xi_1 \mapsto \xi_1$$

является изоморфизмом и $\Phi_0 = \Psi$. Так как

$$(P_1^* \xi; \hat{v}) = (F^\Psi(f_0, f_1)^* \gamma(\hat{a}), F^\Psi(f_0, f_1)^* v_{\hat{a}}),$$

то (Φ, P_1) является морфизмом, присоединенным к гомотопии $s'_a \circ F^\Psi(f_0, f_1)$, где $s'_a : S(\hat{a}) \mapsto G_{k, \infty}$ – каноническое вложение, причем Ψ является изоморфизмом, присоединенным к гомотопии $s'_a \circ F^\Psi(f_0, f_1)$.

Введем понятие гомотопии, присоединенной к данному изоморфизму векторных расслоений. Пусть X – компактное пространство, и пусть $f_0, f_1 : X \mapsto G_{k, \infty}$ – такие отображения, что векторные расслоения $f_0^* \gamma^k$ и $f_1^* \gamma^k$ изоморфны. Пусть $\Psi : f_0^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$ – некоторый изоморфизм. Ввиду компактности X существуют такое число n и такие отображения $f'_0, f'_1 : X \mapsto G_{k, n}$, что $f_0 = i'_{k, n} \circ f'_0$ и $f_1 = i'_{k, n} \circ f'_1$, где $i'_{k, n} : G_{k, n} \mapsto G_{k, \infty}$ – каноническое вложение. Ясно, что $f_j^* \gamma^k = f_j'^* \gamma^{k, n}$, $j = 0, 1$. Для $a = (n+1, \dots, n+k; n)$ имеем $S(a) = G_{k, n}$ и $S(\hat{a}) = G_{k, k+2n}$. Пусть $F^\Psi(f'_0, f'_1) : X \times I \mapsto G_{k, k+2n}$ – каноническая гомотопия между отображениями $s_a \circ f'_0$ и $s_a \circ f'_1$, построенными в предложении 6. Положим $F^\Psi = i'_{k, k+2n} \circ F^\Psi(f'_0, f'_1)$. Отображение $F^\Psi : X \times I \mapsto G_{k, \infty}$ называется гомотопией, присоединенной к изоморфизму Ψ .

Предложение 7. Пусть X – компактное пространство, $f_0, f_1 : X \mapsto G_{k, \infty}$ – некоторые отображения и $\Psi : f_0^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$ – изоморфизм векторных расслоений. Если F^Ψ – гомотопия, присоединенная к изоморфизму Ψ , то Ψ – изоморфизм, присоединенной к гомотопии F^Ψ .

Доказательство. Пусть $F^\Psi = i'_{k, k+2n} \circ F^\Psi(f'_0, f'_1)$, где $f'_0, f'_1 : X \mapsto G_{k, n}$ – такие отображения, что $f_i = i'_{k, n} \circ f'_i$, $i = 0, 1$. Для символа Шуберта $a = (n+1, \dots, n+k; n)$ имеем $s'_a = i'_{k, k+2n}$, и требуемое утверждение вытекает из следствия 1.

Изоморфизм Ψ называется каноническим изоморфизмом, присоединенным к гомотопии F^Ψ , а соответствующий морфизм $(\Phi, P_1) : (F^\Psi)^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$, построенный в следствии 1, называется каноническим морфизмом, присоединенным к гомотопии F^Ψ .

Предложение 8. Пусть даны некоторые отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow G_{k,\infty}$ и некоторый изоморфизм $\Psi : f_0^* \gamma^k \rightarrow f_1^* \gamma^k$. Если $F^\Psi, G^\Psi : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — две гомотопии, присоединенные к Ψ , то F^Ψ и G^Ψ эквивалентны.

Предложение 9. Пусть X — компактное пространство, $f_0, f_1 : X \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторые отображения, $\Phi_0, \Phi_1 : f_0^* \gamma^k \rightarrow f_1^* \gamma^k$ — эквивалентные изоморфизмы и F^{Φ_0}, F^{Φ_1} — гомотопии, присоединенные к Φ_0 и Φ_1 , соответственно. Тогда гомотопии F^{Φ_0} и F^{Φ_1} эквивалентны.

Доказательство. Положим $\xi = f_0^* \gamma^k, \eta = f_1^* \gamma^k$. Существует некоторый изоморфизм $\varphi : P_1^* \xi \rightarrow P_1^* \eta$ такой, что для любого $t \in I$ морфизм

$$\tilde{\Phi}_t : \xi = i_t^*(P_1^* \xi) \rightarrow P_1^* \xi \xrightarrow{\varphi} P_1^* \eta \rightarrow \eta$$

является изоморфизмом, где $i_t^*(P_1^* \xi) \rightarrow P_1^* \xi$ и $P_1^* \eta \rightarrow \eta$ — канонические морфизмы и $\tilde{\Phi}_t = \Phi_t, i = 0, 1$. Пусть $F^\varphi : X \times I \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — гомотопия, присоединенная к φ . Отображения $F^\varphi|_{X \times I \times 0}$ и $F^\varphi|_{X \times I \times 1}$ являются гомотопиями, присоединенными к изоморфизмам Φ_0 и Φ_1 , соответственно. В силу предложения 8 эти гомотопии эквивалентны, соответственно, гомотопиям F^{Φ_0} и F^{Φ_1} . Следовательно F^{Φ_0} и F^{Φ_1} эквивалентны.

Пусть X — компактное пространство, $F : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторая гомотопия. Положим $\xi = F^* \gamma^k$ и $\xi_t = F_t^* \gamma^k$. Пусть

$$(\Phi, P_1) : \xi \rightarrow \xi_1, \quad \Phi_t : \xi_t \rightarrow \xi_1$$

— некоторый морфизм, присоединенный к F . Ввиду компактности $X \times I$ существуют отображения $F'_t : X \rightarrow G_{k,n}, t \in I$ такие, что $F_t = i_{k,n}^* \circ F'_t$. Пусть $F^{\Phi_1} : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ_1 . Отметим, что $\Phi_1 : \xi_1 \rightarrow \xi_1$ — тождественный изоморфизм и $F^{\Phi_1}(x, t) = F_1(x)$ для любых $x \in X, t \in I$.

Предложение 10. Гомотопии F^{Φ_0} и F эквивалентны.

Пусть X — компактное пространство, и пусть $f_0, f_1 : X \rightarrow G_{k,\infty}$ — непрерывные отображения. Обозначим через $[f_0^* \gamma^k, f_1^* \gamma^k]$ множество классов

эквивалентности всех изоморфизмов $f_0^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$, через $[f_0, f_1]$ — множество классов эквивалентности всех гомотопий

$$F: X \times I \mapsto G_{k,\infty}, \quad F_0 = f_0, \quad F_1 = f_1.$$

Если $\Psi: f_0^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$ — некоторый изоморфизм, то сопоставление $\Psi \mapsto F^\Psi$, где F^Ψ — гомотопия, присоединенная к изоморфизму Ψ , определяет, в силу предложений 8 и 9, некоторое отображение $\alpha: [f_0^* \gamma^k, f_1^* \gamma^k] \mapsto [f_0, f_1]$. Рассмотрим соответствие $F \mapsto \Phi_F$, где Φ_F — изоморфизм $f_0^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$, присоединенный к гомотопии F . В силу предложений 4 и 5 это соответствие определяет некоторое отображение $\beta: [f_0, f_1] \mapsto [f_0^* \gamma^k, f_1^* \gamma^k]$. Из предложений 7 и 10 следует, что отображения $\beta \circ \alpha$ и $\alpha \circ \beta$ являются тождественными отображениями множеств $[f_0^* \gamma^k, f_1^* \gamma^k]$ и $[f_0, f_1]$. Тем самым доказано следующее

Предложение 11. Пусть X — компактное пространство и $f_0, f_1: X \mapsto G_{k,\infty}$ — непрерывные отображения. Тогда существует каноническое биективное соответствие между элементами множеств классов эквивалентности всех изоморфизмов $f_0^* \gamma^k \mapsto f_1^* \gamma^k$ и элементами множеств классов эквивалентности всех гомотопий $F: X \times I \mapsto G_{k,\infty}$, $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$.

Рассмотрим вложение евклидовых пространств $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$. Для $e \in (\mathbb{R}^{n+k})^\perp$, $|e| = 1$ положим

$$j_k: G_{k,\infty} \mapsto G_{k+1,\infty}, \quad j_k^* \gamma^{k+1} = \gamma^k \oplus \theta$$

— каноническое вложение, где θ — тривиальное одномерное расслоение, оснащенное канонической тривиализацией, возникающей на векторе e . Пусть $F_0, F_1: X \mapsto G_{k,\infty}$ — некоторые отображения и $\Phi_0: F_0^* \gamma^k \mapsto F_1^* \gamma^k$ — некоторый изоморфизм. Рассмотрим расслоения

$$(j_k \circ F_i)^* \gamma^{k+1} = F_i^* \gamma^{k+1} \oplus F_i^* \theta, \quad i = 0, 1.$$

Так как все слои расслоения θ канонически изоморфны между собой, то имеется канонический изоморфизм $\varepsilon: F_0^* \theta \mapsto F_1^* \theta$. Поэтому возникает изоморфизм

$$\Phi \oplus \varepsilon: (j_k \circ F_0)^* \gamma^{k+1} \mapsto (j_k \circ F_1)^* \gamma^{k+1},$$

который будем называть *надстройкой* над изоморфизмом Φ и будем обозначать его через $E(\Phi)$.

Предложение 12. Пусть $F : X \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторая гомотопия и $\Phi_F : F_0^* \gamma^k \rightarrow F_1^* \gamma^k$ — изоморфизм, присоединенный к F . Тогда $E(\Phi_F)$ является изоморфизмом, присоединенным к $j_k \circ F$.

Пространство путей в $G_{k,\infty}$ будем обозначать через $G_{k,\infty}^I$. Если $\omega \in G_{k,\infty}^I$, $t \in I$, то определим путь $\omega' \in G_{k,\infty}^I$ формулой $\omega'(t') = \omega(t \circ t')$, $t' \in I$ и рассмотрим отображения

$$\alpha : G_{k,\infty}^I \times I \rightarrow G_{k,\infty}^I, \quad \alpha_k(\omega, t) = \omega^t, \quad \omega \in G_{k,\infty}^I, \quad t \in I,$$

а также отображения

$$(j_k)_* : G_{k,\infty}^I \rightarrow G_{k+1,\infty}^I, \quad (j_k)_*(\omega) = j_k \circ \omega,$$

порожденные отображениями $j_k : G_{k,\infty} \rightarrow G_{k+1,\infty}$. Для $\beta_k : G_{k,\infty}^I \rightarrow G_{k,\infty}$, $\beta_k(\omega) = \omega(1)$ имеем

$$(j_k)_* \circ \alpha_k = \alpha_{k+1} \circ ((j_k)_* \times 1_I), \quad j_k \circ \beta_k = \beta_{k+1} \circ (j_k)_*, \quad \beta_k(\omega^t) = \omega(t).$$

В дальнейшем постоянный путь в точке $x \in G_{k,\infty}$ будем обозначать через ω_x .

Пусть S_k — произвольное пространство, $h_k : S_k \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторое непрерывное отображение. Определим расслоение $f_k : B_k \rightarrow G_{k,\infty}$ (см. [6]), гомотопически эквивалентное отображению h_k . Напомним, что B_k определяется как подпространство в $S_k \times G_{k,\infty}^I$, состоящее из всех таких точек (x, ω) , для которых $\omega(0) = h_k(x)$, а отображение f_k определяется формулой $f_k(x, \omega) = \omega(1)$. Рассмотрим взаимно обратные гомотопические эквивалентности

$$\tau_k : B_k \rightarrow S_k, \quad q_k : S_k \rightarrow B_k, \quad \tau_k(x, \omega) = x, \quad q_k(x) = (x, \omega_{h_k(x)}), \quad x \in S_k, \quad \omega \in G_{k,\infty}^I.$$

Отметим, что $f_k \circ q_k = h_k$, $\tau_k \circ q_k = 1_{S_k}$. Пусть отображения $f : M \rightarrow G_{k,\infty}$, $\tilde{f} : M \rightarrow B_k$ и гомотопия $F : M \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ такие, что $f = f_k \circ \tilde{f}$, $F_0 = f$. Рассмотрим накрывающую гомотопию $\tilde{F} : M \times I \rightarrow B_k$, $f_k \circ \tilde{F} = F$, $\tilde{f}_0 = f$, построенную в [6] при доказательстве теоремы 2.8.9. Эту гомотопию будем называть каноническим поднятием гомотопии F . Она строится следующим

образом : пусть $l_k : B_k \mapsto S_k \times G_{k,\infty}^I$ – каноническое вложение. Рассмотрим отображения $\bar{f} = P_1 \circ l_k \circ \hat{f}$, $f' = P_2 \circ l_k \circ \hat{f}$, где

$$P_1 : S_k \times G_{k,\infty}^I \mapsto S_k, \quad P_2 : S_k \times G_{k,\infty}^I \mapsto G_{k,\infty}^I$$

– канонические проекции. Тогда $\hat{f}(x) = (\bar{f}(x), f'(x))$, $x \in M$. Далее, рассмотрим отображение $f'' : M \times I \mapsto G_{k,\infty}^I$, задаваемое формулой

$$f''(x, t)(t') = \begin{cases} f'(x)(\frac{2t'}{2-t}), & 0 \leq 2t' \leq 2-t \leq 2, \quad x \in M, \\ F(x, 2t' + t - 2), & 1 \leq 2-t \leq 2t' \leq 2, \quad x \in M. \end{cases}$$

Каноническое поднятие $\hat{F}$ определяется формулой

$$\hat{F}(x, t) = (\bar{f}(x), f''(x, t)), \quad x \in M, \quad t \in I.$$

Заметим, что $\tau_k \circ \hat{F}_t = \bar{f}$, $t \in I$.

Предложение 13. Пусть $g : M \mapsto G_{k,\infty}$, $\bar{g} : M \mapsto S_k$ – некоторые отображения, и пусть $G : M \times I \mapsto G_{k,\infty}$, $G_0 = h_k \circ \bar{g}$, $G_1 = g$ – некоторая гомотопия. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{G}$, $\hat{G}_0 = q_k \circ \bar{g}$ гомотопии G . Тогда $\tau_k \circ \hat{G}_t = \bar{g}$.

Доказательство. Так как

$$q_k \circ \bar{g}(x) = (\bar{g}(x), \omega_{h_k \circ \bar{g}}(x)), \quad x \in M,$$

то $\tau_k \circ \hat{G}_t = \bar{g}$, $t \in I$.

Предложение 14. Для всякого отображения $\hat{g} : M \mapsto B_k$ отображения $h_k \circ \tau_k \circ \hat{g}$ и $f_k \circ \hat{g}$ канонически гомотопны между собой.

Доказательство. Если $x \in M$, то $\hat{g}(x) = (\tau_k \circ \hat{g}(x), g'(x))$, где $g'(x) \in G_{k,\infty}^I$ – некоторый путь такой, что $g'(x)(0) = h_k \circ \tau_k \circ \hat{g}(x)$. Имеем, $f_k \circ \hat{g}(x) = g'(x)(1)$.

Рассмотрим гомотопию $F : M \times I \mapsto G_{k,\infty}$, $F = \beta_k \circ \alpha_k \circ (g' \times 1_I)$. Тогда

$$F_0(x) = (g'(x))^0(x) = g'(x)(0) = h_k \circ \tau_k \circ \hat{g}(x),$$

$$F_1(x) = (g'(x))^1(x) = g'(x)(1) = f_k \circ \hat{g}(x).$$

Следовательно, F – требуемая гомотопия.

Построенную гомотопию будем называть *канонической гомотопией*, соединяющей отображения $h_k \circ \tau_k \circ \hat{g}$ и $h_k \circ \hat{g}$, и будем обозначать через $H[\hat{g}]$. Таким образом, если $\hat{g} = (\tau_k \circ \hat{g}, g')$, то $H[\hat{g}] = \beta_k \circ \alpha_k \circ (g' \times 1_I)$. Для $M' \subset M$ положим $\hat{g}' = \hat{g}|_{M'}$. Имеем $H[\hat{g}'] = H[\hat{g}]|_{M' \times I}$.

Следствие 2. Пусть $\hat{g}_0, \hat{g}_1 : M \rightarrow B_k$ — некоторые послойно гомотопные поднятия отображения $g : M \rightarrow G_{k,\infty}$. Тогда существует гомотопия $G : (M \times I) \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ такая, что

$$G|_{(M \times I) \times 0} = H[\hat{g}_0], \quad G|_{(M \times I) \times 1} = H[\hat{g}_1], \quad G|_{(M \times 1) \times t} = g, \quad t \in I.$$

Доказательство. Пусть $\hat{G} : M \times I \rightarrow B_k$, $\hat{G}_0 = \hat{g}_0$, $\hat{G}_1 = \hat{g}_1$ — некоторая послойная гомотопия. Тогда гомотопия $H[\hat{G}]$ будет требуемой.

Предложение 15. Пусть $g : M \rightarrow G_{k,\infty}$, $\bar{g} : M \rightarrow S_k$ — некоторые отображения, и пусть $F : M \times I \rightarrow G_{k,\infty}$, $F_0 = h_k \circ \bar{g}$, $F_1 = g$ — некоторая гомотопия. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{F} : M \times I \rightarrow B_k$, $\hat{F}_0 = q_k \circ \bar{g}$ гомотопии F . Тогда гомотопии $H[\hat{F}_1]$ и F эквивалентны.

Предложение 16 Пусть $\hat{g} : M \rightarrow B_k$ — произвольное отображение, положим $\bar{g} = \tau_k \circ \hat{g}$. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{H}[\hat{g}]$, $\hat{H}[\hat{g}]_0 = \hat{g}$ канонической гомотопии $H[\hat{g}]$. Тогда отображения $\hat{H}[\hat{g}]_1$ и $q_k \circ \bar{g}$ послойно гомотопны между собой.

Зафиксируем некоторое пространство M и отображение $g : M \rightarrow G_{k,\infty}$. Рассмотрим всевозможные пары $(\bar{g}, F)$, где $F : M \times I \rightarrow G_{k,\infty}$ — некоторая гомотопия такая, что $F_0 = h_k \circ \bar{g}$, $F_1 = g$. Пары $(\bar{g}', F')$ и $(\bar{g}'', F'')$ будем считать эквивалентными, если F' и F'' гомотопны относительно конца 1 отрезка $I = [0, 1]$. Обозначим класс эквивалентности пары $(\bar{g}, F)$ через $[(\bar{g}, F)]$, множество всех классов эквивалентности — через $\{[(\bar{g}, F)]\}$.

Рассмотрим множество всех поднятий $\hat{g} : M \rightarrow B_k$, $f_k \circ \hat{g} = g$ отображения g . Два таких поднятий будем считать эквивалентными, если они послойно гомотопны. Класс эквивалентности отображения $\hat{g}$ обозначим через $[\hat{g}]_p$. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{F}$ гомотопии F с условием $F_0 = q_k \circ \bar{g}$. В силу теоремы 2.8.10 из [6] возникает отображение

$$\alpha' : \{[(\bar{g}, F)]\} \rightarrow \{[\hat{F}_1]_p\}, \quad \alpha'[(\bar{g}, F)] = [\hat{F}_1]_p.$$

Рассмотрим некоторый элемент $[\hat{g}]_p$ и каноническую гомотопию

$$H[\hat{g}] : M \times I \rightarrow G_{k,\infty}, \quad H[\hat{g}]_0 = h_k \circ \tau_k \circ \hat{g}, \quad H[\hat{g}]_1 = g$$

(см. следствие 2) вместе с отображением

$$\beta' : \{[\hat{g}]_p\} \mapsto \{[(\tau_k \circ \hat{g}, H[\hat{g}])]\}, \quad \beta'([\hat{g}]_p) = [(\tau_k \circ \hat{g}, H[\hat{g}])].$$

Из предложений 15 и 16 получаем

Предложение 17. Для произвольного пространства M и отображения $g : M \mapsto G_{k,\infty}$ отображения α', β' являются взаимно обратными биективными соответствиями.

Пусть $\{S_k\}$ – последовательность пространств, и пусть $\{h_k\}, \{s_k\}$ – последовательность отображений таких, что

$$h_k : S_k \mapsto G_{k,\infty}, \quad s_k : S_k \mapsto S_{k+1}, \quad j_k \circ h_k = h_{k+1} \circ s_k, \quad k \geq k_0.$$

Пусть f_k – построенные выше расслоения, гомотопически эквивалентные отображениям h_k . Определим отображения $J_k : B_k \mapsto B_{k+1}$ следующим образом : если $(x, \omega) \in B_k$, где $x \in S_k$, $\omega \in G_{k,\infty}^I$, $\omega(0) = h_k(x)$, то положим $J_k(x, \omega) = (s_k(x), j_k \circ \omega)$.

Предложение 18. Для произвольного отображения $\hat{g} : M \mapsto B_k$ имеем $H[J_k \circ \hat{g}] = j \circ H[\hat{g}]$.

§2. (S, h) -ОСНАЩЕННЫЕ КОВОРДИЗМЫ

Пусть S_k – топологическое пространство, $h_k : S_k \mapsto G_{k,\infty}$ – непрерывное отображение. Положим $\eta^k = h_k^* \gamma^k$. Пусть $\xi = g^* \gamma^k$, $g : X \mapsto G_{k,\infty}$ – некоторое k -мерное векторное расслоение на некотором пространстве X . Определим (S_k, h_k) -оснащение расслоения ξ как пару $(\bar{g}, \Phi)$, состоящую из некоторого непрерывного отображения $\bar{g} : X \mapsto S_k$, $h_k \circ \bar{g} = g$ и некоторого изоморфизма $\Phi : \bar{g}^* \eta^k \mapsto \xi$ векторных расслоений. Пару $(\xi, (\bar{g}, \Phi))$, где ξ – векторное расслоение, а $(\bar{g}, \Phi)$ – ее (S_k, h_k) -оснащение, будем называть (S_k, h_k) -оснащенным расслоением. В частном случае, когда

$$S_k = S(a), \quad a = (a_1, \dots, a_k; l), \quad h_k = s'_a : S(a) \mapsto G_{k,\infty},$$

имеем $\eta^k = \gamma(a)$. В силу теоремы 1 из [3] в этом случае (S_k, h_k) -оснащение расслоения ξ эквивалентно некоторому a -оснащению. Если $a = (1, \dots, k; 0)$, то

(S_k, h_k) -оснащение эквивалентно k линейно независимым сечениям (классическое оснащение по Понтрягину, см. [2]). Если $S_k = G_{k,\infty}$, $h_k = 1_{G_{k,\infty}}$, то $\eta^k = \gamma^k$, и в силу теоремы 2 из [3] (S_k, h_k) -оснащение расслоения ξ эквивалентно его счетному оснащению.

Пусть M и N – гладкие многообразия размерности n и $n+k$, соответственно, и M – подмногообразие в N . Предположим, что либо они оба без края, либо с краем. В последнем случае предполагается, что ∂M – подмногообразие в ∂N и имеет непустое пересечение с каждой компонентой связности многообразия ∂N . Ниже N будет обозначать либо евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$, либо его замкнутое полупространство $\mathbb{R}_+^{n+k}$, образованное всеми точками $(x_1, \dots, x_{n+k})$, $x_{n+k} \geq 0$, либо многообразие $\mathbb{R}^{n+k} \times I$. Край $\partial \mathbb{R}_+^{n+k}$ и каждую компоненту связности края

$$\partial(\mathbb{R}^{n+k} \times I) = (\mathbb{R}^{n+k} \times 0) \cup (\mathbb{R}^{n+k} \times 1)$$

будем отождествлять с $\mathbb{R}^{n+k}$. Пусть ν – нормальное расслоение подмногообразия M . Тогда $\nu = g^* \gamma^k$, где $g : M \rightarrow G_{k,n}$ – гауссово отображение расслоения ν . Отображение g является композицией соответствующего нормального отображения $M \rightarrow G_{k,n}$ и отображения стандартного вложения $G_{k,n} \rightarrow G_{k,\infty}$. Если $\partial M \neq \emptyset$, то предполагается, что M в точках края ортогонально к ∂N . Тогда ограничение расслоения ν на ∂M совпадает с нормальным расслоением подмногообразия $\partial M \subset \partial N$.

Будем говорить, что *имеется (S_k, h_k) -оснащение подмногообразия M* , если дано некоторое (S_k, h_k) -оснащение его нормального расслоения ν . Пару, состоящую из подмногообразия M и его некоторого (S_k, h_k) -оснащения $(\bar{g}, \Phi)$ будем обозначать через $(M, (\bar{g}, \Phi))$ и называть (S_k, h_k) -оснащенным подмногообразием многообразия N , или просто (S_k, h_k) -оснащенным многообразием.

Пусть $(M, (\bar{g}, \Phi))$ – некоторое (S_k, h_k) -оснащенное n -мерное многообразие, и пусть L – связная компонента многообразия $\partial N \neq \emptyset$. Пусть $g : M \rightarrow G_{k,\infty}$ – гауссово отображение нормального расслоения подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Положим $g' = g|_L$, $\bar{g}' = \bar{g}|_L$. Ограничение отображения Φ на $tl(h_k \circ \bar{g}')^* \gamma^k$

порождает изоморфизм

$$\Phi' : (h_k \circ \bar{g}')^* \gamma^k \mapsto (g')^* \gamma^k$$

и (S_k, h_k) -оснащенное многообразие $(L, (\bar{g}', \Phi'))$. Будем называть (S_k, h_k) -оснащение $(\bar{g}', \Phi')$ ограничением на L (S_k, h_k) -оснащения $(\bar{g}, \Phi)$.

Пусть $(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$ — некоторые (S_k, h_k) -оснащенные n -мерные подмногообразия евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+k}$. Будем говорить, что $(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$ (S_k, h_k) -оснащенно бордантны, если существует такое (S_k, h_k) -оснащенное $(n+1)$ -мерное подмногообразие $(M, (\bar{g}, \Phi))$ многообразия $\mathbb{R}^{n+k} \times I$, что

$$M \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times i) = M_i \times i, \quad i = 0, 1$$

и ограничения оснащения $(\bar{g}, \Phi)$ на $M_0 \times 0$ и $M_1 \times 1$ совпадают с $(\bar{g}_0, \Phi_0)$ и $(\bar{g}_1, \Phi_1)$, соответственно. Подмногообразие $(M, (\bar{g}, \Phi))$ будем называть пленкой (S_k, h_k) -оснащенного бордизма между $(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$.

Отношение (S_k, h_k) -оснащенной бордантности для (S_k, h_k) -оснащенных многообразий является отношением эквивалентности. Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для классически оснащенных многообразий (см. [2]). Класс (S_k, h_k) -оснащенных бордизмов (S_k, h_k) -оснащенного многообразия $(M, (\bar{g}, \Phi))$ будем обозначать через $[(M, (\bar{g}, \Phi))]_k$. Множество классов (S_k, h_k) -оснащенных бордизмов n -мерных замкнутых (S_k, h_k) -оснащенных многообразий обозначим через $\Pi_n(S_k, h_k)$. Множество $\Pi_n(S_k, h_k)$ превращается в группу с несвязным объединением (S_k, h_k) -оснащенных подмногообразий многообразия $\mathbb{R}^{n+k}$. Таким образом, для всякого фиксированного $k \geq 0$ возникает категория кобордизма [4], которую будем обозначать через $\Pi(S_k, h_k)$ и называть категорией кобордизма (S_k, h_k) -оснащенных многообразий.

Пусть имеются последовательность пространств $\{S_k\}$ и последовательности $\{s_k\}$, $\{h_k\}$ таких отображений $s_k : S_k \mapsto S_{k+1}$, $h_k : S_k \mapsto G_{k,\infty}$, что $h_{k+1} \circ s_k = j_k \circ h_k$, $k \geq 0$. Пусть $(M, (\bar{g}, \Phi))$ — произвольное (S_k, h_k) -оснащенное многообразие. Изоморфизм Φ порождает канонический изоморфизм

$$E(\Phi) : (h_{k+1} \circ (s_k \circ \bar{g}))^* \gamma^{k+1} \mapsto (j_k \circ g)^* \gamma^{k+1}.$$

Вложение $M \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ вместе с отображением $s_k \circ \bar{g}$ и изоморфизмом $E(\Phi)$ определяют некоторое (S_{k+1}, h_{k+1}) -оснащенное многообразие $(M, (s_k \circ \bar{g}, E(\Phi)))$, которое обозначим через $E(M, (\bar{g}, \Phi))$ и будем называть *надстройкой* над $(M, (\bar{g}, \Phi))$. Введем обозначения

$$E^0(M, (\bar{g}, \Phi)) = (M, (\bar{g}, \Phi)), \quad E^m(M, (\bar{g}, \Phi)) = E(E^{m-1}(M, (\bar{g}, \Phi))), \quad m \geq 1.$$

Класс эквивалентности $\{E^m(M, (\bar{g}, \Phi))\}$ последовательностей $\{E^m(M, (\bar{g}, \Phi))\}$ будем называть (S, h) -оснащенным многообразием (две последовательности считаются эквивалентными, если они совпадают, начиная с некоторого m). Понятие края (S, h) -оснащенного многообразия определяется естественным образом.

Два (S, h) -оснащенные многообразия называются (S, h) -оснащенно борданными, если в соответствующих классах эквивалентности существуют такие последовательности

$$\{E^m(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))\} \quad \text{и} \quad \{E^m(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))\},$$

что (S_k, h_k) -оснащенные многообразия $E^m(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $E^m(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$ являются (S_k, h_k) -борданными, начиная с некоторого значения m . Легко проверяется, что определение корректно и отношение (S, h) -бордантности является отношением эквивалентности. Тем самым возникает категория кобордизма (S, h) -оснащенных многообразий, которую будем обозначать через $\Pi(S, h)$. Класс (S, h) -оснащенных бордизмов (S, h) -оснащенного многообразия $\{E^m(M, (\bar{g}, \Phi))\}$ будем обозначать через $[(M, (\bar{g}, \Phi))]$, а множество классов (S, h) -оснащенных бордизмов n -мерных замкнутых (S, h) -оснащенных многообразий будем обозначать через $\Pi_n(S, h)$. Если $(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$ (S_k, h_k) -оснащенно борданны, то $E(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $E(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$ также (S_k, h_k) -оснащенно борданны. Ввиду этого сопоставление $[(M, (\bar{g}, \Phi))]_k \mapsto [E(M, (\bar{g}, \Phi))]_{k+1}$ определяет гомоморфизм групп

$$E_* : \Pi_n(S_k, h_k) \mapsto \Pi_n(S_{k+1}, h_{k+1}).$$

Гомоморфизм E_* называется *надстроенным гомоморфизмом*, индуцированным оператором надстройки E .

Теперь, следуя [7], исходя из последовательностей пространств S_k и отображений

$$h_k : S \mapsto G_{k,\infty}, \quad s_k : S_k \mapsto S_{k+1}, \quad h_{k+1} \circ s_k = j_k \circ h_k,$$

определим категорию кобордизма (S, h) -многообразий. Для этого рассмотрим расслоения $f_k : B_k \mapsto G_{k,\infty}$, гомотопически эквивалентные отображениям h_k . Пусть M — некоторое n -мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+k}$ и $\tilde{g} : M \mapsto B_k$ — некоторое поднятие гауссова отображения $g : M \mapsto G_{k,\infty}$ подмногообразия M . Согласно принятой в [4] терминологии всякий класс послойной гомотопий $[\tilde{g}]_p$ называется (S_k, h_k) -структурой расслоения $g^* \gamma^k$. Пара $(M, [\tilde{g}]_p)$, состоящая из подмногообразия M и некоторой (S_k, h_k) -структуры нормального расслоения $g^* \gamma^k$, называется *многообразием с (S_k, h_k) -структурой*, или (S_k, h_k) -многообразием. Понятие ограничения (S_k, h_k) -структуры на край и понятие (S_k, h_k) -бордантности для (S_k, h_k) -многообразий определяется аналогично соответствующим понятиям для (S_k, h_k) -оснащенных многообразий.

Класс (S_k, h_k) -бордантности данного (S_k, h_k) -многообразия $(M, [\tilde{g}]_p)$ будем обозначать через $[(M, [\tilde{g}]_p)]_k$. Обозначим через $\Omega_n(S_k, h_k)$ группу (S_k, h_k) -кобордизмов n -мерных замкнутых (S_k, h_k) -многообразий. Таким образом, для всякого фиксированного k возникает категория кобордизма (S_k, h_k) -многообразий, которую будем обозначать через $\Omega(S_k, h_k)$. Пусть $(M, [\tilde{g}]_p)$ — некоторое (S_k, h_k) -многообразие. Тогда возникает (S_{k+1}, h_{k+1}) -многообразие $(M, [j_k \circ \tilde{g}]_p)$, которое будем обозначать через $\Sigma(M, [\tilde{g}]_p)$ и называть *надстройкой над $(M, [\tilde{g}]_p)$* . Положим

$$\Sigma^0(M, [\tilde{g}]_p) = (M, [\tilde{g}]_p), \quad \Sigma^m(M, [\tilde{g}]_p) = \Sigma(\Sigma^{m-1}(M, [\tilde{g}]_p)), \quad m \geq 1.$$

Если $(M_0, [\tilde{g}_0]_p)$ и $(M_1, [\tilde{g}_1]_p)$ (S_k, h_k) -бордантны, то $\Sigma(M_0, [\tilde{g}_0]_p)$ и $\Sigma(M_1, [\tilde{g}_1]_p)$ также (S_k, h_k) -бордантны. Поэтому, сопоставление $[(M, [\tilde{g}]_p)]_k \mapsto [\Sigma(M, [\tilde{g}]_p)]_{k+1}$ определяет гомоморфизм групп

$$\Sigma_* : \Omega_n(S_k, h_k) \mapsto \Omega_n(S_{k+1}, h_{k+1}),$$

который будем называть *надстроенным гомоморфизмом*, индуцированным оператором Σ . Напомним, что (S, h) -многообразие в смысле [4] представляет собой класс эквивалентности последовательностей $\{\Sigma^m(M, [\hat{g}]_p)\}$ (две последовательности считаются эквивалентными, если они совпадают, начиная с некоторого m .) Категорию кобордизма (S, h) -многообразий будем обозначать через $\Omega(S, h)$. Пусть $\Omega_n(S, h)$ – группа (S, h) -кобордизмов n -мерных замкнутых (S, h) -многообразий (см. [4]). Тогда $\Omega_n(S, h) = \varinjlim \Omega_n(S_k, h_k)$, где предел определяется последовательностью

$$\Omega_n(S_0, h_0) \xrightarrow{\Sigma_*} \Omega_n(S_1, h_1) \xrightarrow{\Sigma_*} \dots$$

Пример 1. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k; l)$ – произвольный символ Шуберта. Положим

$$E(a) = (1, a_1 + 1, \dots, a_k + 1; l), \quad E^m(a) = E(E^{m-1}(a)), \quad m \geq 2.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} S(A) & \xrightarrow{j_a} & S(E(a)) & \xrightarrow{j_{E(a)}} & S(E^2(a)) & \xrightarrow{j_{E^2(a)}} & \dots \\ \downarrow s'_a & & \downarrow s'_{E(a)} & & \downarrow s'_{E^2(a)} & & \\ G_{k,\infty} & \xrightarrow{j_k} & G_{k+1,\infty} & \xrightarrow{j_{k+1}} & G_{k+2,\infty} & \xrightarrow{j_{k+2}} & \dots \end{array}$$

Положим

$$S_t = S(S^{t-k}(a)), \quad h_t = s'_{E^{t-k}(a)}, \quad s_t = j_{E^{t-k}(a)}, \quad t \geq k.$$

Для всякого $t \geq k$ можно рассматривать категорию кобордизма $\Pi(S_t, h_t)$. Возникает также категория кобордизма $\Pi(S, h)$. Как было отмечено выше, задание (S_k, h_k) -оснащения n -мерного подмногообразия евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+k}$ равносильно заданию некоторого a -оснащения его нормального расслоения. Введем обозначения: $\Pi(a) = \Pi(S_k, h_k)$ (категория кобордизма a -оснащенных многообразий), $\Pi^E(a) = \Pi(S, h)$ (категория кобордизма стабильно a -оснащенных многообразий), $\Pi_n(a) = \Pi_n(S_k, h_k)$ (n -мерная группа a -оснащенных бордизмов), $\Pi_n^E(a) = \Pi_n(S, h)$.

Пример 2. Рассмотрим особый случай, когда $S_k = G_{k,\infty}$, $h_k = 1_{G_{k,\infty}}$, $s_k = j_k$. Напомним, что в этом случае (S_k, h_k) -оснащение подмногообразия евклидова пространства эквивалентно счетному оснащению его нормального расслоения. Можно доказать, что данная категория кобордизма счетно-оснащенных многообразий эквивалентна категории кобордизма неориентированных многообразий.

Теперь для любой пары (n, k) определим канонические гомоморфизмы

$$Q(n, k) : \Pi_n(S_k, h_k) \mapsto \Omega_n(S_k, h_k), \quad R(n, k) : \Omega_n(S_k, h_k) \mapsto \Pi_n(S_k, h_k).$$

Пусть $(M, (\bar{g}, \Phi))$ — произвольное (S_k, h_k) -оснащенное многообразие, и пусть F^* — некоторая гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ . Тогда $(F^*)_0 = h_k \circ \bar{g}$, $(F^*)_1 = g$. Рассмотрим расслоение $f_k : B_k \mapsto G_{k, \infty}$ и каноническое поднятие $\hat{F}^*$:

$$\hat{F}^* : M \times I \mapsto B_k, \quad (\hat{F}^*)_0 = q_k \circ \bar{g}.$$

Из предложения 8 и теоремы 2.8.10 [6] следует, что класс послыных гомотопий $[(F^*)_1]_p$ не зависит от выбора гомотопии F^* . Пусть $(M_0, (\bar{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\bar{g}_1, \Phi_1))$ (S_k, h_k) -оснащенные борданты и $(M, (\bar{g}, \Phi))$ — пленка (S_k, h_k) -оснащенного бордизма между ними. Ограничение гомотопии F^* на $M_i \times I \subset M \times I$, $i = 0, 1$ представляет собой гомотопию, присоединенную к Φ_i . Положим $F^{*i} = F^*|_{M_i \times I}$. Пусть $\hat{F}^*$, $\hat{F}^{*0}$ и $\hat{F}^{*1}$ — канонические поднятия, соответственно, гомотопий F^* , F^{*0} и F^{*1} такие, что

$$(\hat{F}^*)_0 = q_k \circ \bar{g}, \quad (\hat{F}^{*0})_0 = q_k \circ \bar{g}_0, \quad (\hat{F}^{*1})_0 = q_k \circ \bar{g}_1.$$

Тогда

$$(\hat{F}^*)_1|_{M_i \times 1} = (\hat{F}^{*i})_1, \quad i = 0, 1.$$

Следовательно, (S_k, h_k) -многообразие $(M, [(\hat{F}^*)_1]_p)$ является пленкой (S_k, h_k) -бордизма между $(M_0, [(\hat{F}^{*0})_1]_p)$ и $(M_1, [(\hat{F}^{*1})_1]_p)$. Ввиду этого можем определить гомоморфизм $Q(n, k)$ формулой

$$Q(n, k)[(M, (\bar{g}, \Phi))]_k = \left[(M, [(\hat{F}^*)_1]_p) \right]_k.$$

Прежде чем определить гомоморфизм $R(n, k)$ докажем вспомогательное утверждение. Пусть $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ — некоторое замкнутое n -мерное подмногообразие. Рассмотрим его гауссово отображение $g : M \mapsto G_{k, \infty}$, и пусть отображение $g : M \mapsto B_k$ такое, что $f_k \circ \hat{g} = g$.

Предложение 19. Пусть $F^0, F^1 : M \times I \rightarrow G_{k, \infty}$ — эквивалентные гомотопии такие, что $F_0^0 = F_0^1 = h_k \circ r_k \circ \hat{g}$, $F_1^0 = F_1^1 = g$, а Φ_{F^0} и Φ_{F^1} — некоторые изоморфизмы, присоединенные к F^0 и F^1 , соответственно. Тогда

$$[(M, (r_k \circ \hat{g}, \Phi_{F^0}))]_k = [(M, (r_k \circ \hat{g}, \Phi_{F^1}))]_k.$$

Пусть $(M, [\hat{g}]_p)$ — произвольное (S_k, h_k) -многообразие. В силу предложения 14 существует каноническая гомотопия

$$H[\hat{g}] : M \times I \rightarrow G_{k, \infty}, \quad H[\hat{g}]_0 = h_k \circ r_k \circ \hat{g}, \quad H[\hat{g}]_1 = g.$$

Рассмотрим некоторый изоморфизм $\Phi : (h_k \circ r_k \circ \hat{g})^* \gamma^k \rightarrow g^* \gamma^k$, присоединенный к гомотопии $H[\hat{g}]$ и (S_k, h_k) -оснащенное многообразие $(M, (r_k \circ \hat{g}, \Phi))$. Определим гомоморфизм $R(n, k)$ формулой

$$R(n, k)[(M, [\hat{g}]_p)]_k = [(M, (r_k \circ \hat{g}, \Phi))]_k.$$

Корректность определения доказывается на основании предложений 19 и 3. Доказательство следующей теоремы (об (S, h) -оснащенном кобордизме) основано на предложениях 11 и 17.

Теорема 1. Для любой пары $n, k \geq 0$ имеются канонические изоморфизмы

$$\Pi_n(S_k, h_k) = \Omega_n(S_k, h_k), \quad \Pi_n(S, h) = \Omega_n(S, h).$$

Доказательство. Для установления первого утверждения докажем, что гомоморфизмы $R(n, k)$ и $Q(n, k)$ взаимно обратны. Пусть $[(M, (\bar{g}, \Phi))]_k$ — произвольный элемент из $\Pi_n(S_k, h_k)$, и пусть $F^\Phi : M \times I \rightarrow G_{k, \infty}$ — некоторая гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ . Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{F}^\Phi$, $(\hat{F}^\Phi)_0 = q_k \circ \bar{g}$ гомотопии F^Φ . Тогда

$$R(n, k) \circ Q(n, k)[(M, (\bar{g}, \Phi))]_k = [(M, (r_k \circ (\hat{F}^\Phi)_1, \Phi^1))]_k,$$

где Φ^1 — некоторый изоморфизм, присоединенный к канонической гомотопии $H[(\hat{F}^\Phi)_1]$. Из предложений 15 и 19 следует, что

$$[(M, (r_k \circ (\hat{F}^\Phi)_1, \Phi))]_k = [(M, (\bar{g}, \Phi))]_k.$$

Следовательно, $R(n, k) \circ Q(n, k) = 1_{\Pi_n(S_k, h_k)}$. Теперь покажем, что $Q(n, k) \circ R(n, k) = 1_{\Omega_n(S_k, h_k)}$. Пусть $[(M, [\hat{g}]_p)]_k$ - произвольный элемент из $\Omega_n(S_k, h_k)$. Полагая $g = r_k \circ \hat{g}$, мы можем написать

$$R(n, k)[(M, [\hat{g}]_p)]_k = [(M, (\bar{g}, \Phi))]_k,$$

где Φ - некоторый изоморфизм, присоединенный к гомотопии $H[\hat{g}]$. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{H}[\hat{g}]$ гомотопии $H[\hat{g}]$ такое, что $\hat{H}[\hat{g}]_0 = \hat{g}$. Пусть $F^* : M \times I \rightarrow G_{k, \infty}$ - некоторая гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ , и пусть $\hat{F}^* : M \times I \rightarrow B_k$ - каноническое поднятие гомотопии F^* такое, что $(\hat{F}^*)_0 = q_k \circ \bar{g}$. Тогда

$$Q(n, k)[(M, (\bar{g}, \Phi))]_k = [(M, [(\hat{F}^*)_1]_p)]_k.$$

Покажем, что $[(\hat{F}^*)_1]_p = [\hat{g}]_p$. Согласно предложению 16 существует послойная гомотопия

$$T : M \times I \rightarrow B_k, \quad T_0 = q_k \circ \bar{g}, \quad T_1 = (\hat{H}[\hat{g}])_1, \quad f_k \circ T_t = h_k \circ \bar{g}, \quad t \in I.$$

В силу предложения 10 гомотопии $H[\hat{g}]$ и F^* эквивалентны, т.е. существует такая гомотопия $G : M \times I \times I \rightarrow G_{k, \infty}$, что

$$G|_{M \times 0 \times I} = H[\hat{g}], \quad G|_{M \times 1 \times I} = F^*,$$

$$G(x, t, 0) = q_k \circ \bar{g}(x), \quad G(x, t, 1) = g(x), \quad x \in M, \quad t \in I.$$

Так как

$$f_k \circ \hat{H}[\hat{g}] = H[\hat{g}], \quad f_k \circ \hat{F}^* = F^*, \quad f_k \circ T_t = h_k \circ \bar{g}, \quad t \in I,$$

то согласно теореме 2.8.10 из [6] существует такое поднятие $\hat{G} : M \times I \times I \rightarrow B_k$ гомотопии G , что

$$\hat{G}|_{M \times 0 \times I} = \hat{H}[\hat{g}], \quad \hat{G}|_{M \times 1 \times I} = \hat{F}^*, \quad \hat{G}|_{M \times I \times 0} = T.$$

Тогда отображение $\hat{G}|_{M \times I \times 1}$ определяет послойную гомотопию между отображениями $\hat{g}$ и $(\hat{F}^*)_1$, т.е. $[(M, [(\hat{F}^*)_1]_p)]_k = [(M, [\hat{g}]_p)]_k$ и, следовательно

$$Q(n, k) \circ R(n, k) = 1_{\Omega_n(S_k, h_k)}.$$

Для доказательства второй части теоремы 1 покажем, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n(S_k, h_k) & \xrightarrow{R(n, k)} & \Pi_n(S_k, h_k) \\ \downarrow \Sigma_* & & \downarrow E_* \\ \Omega_n(S_{k+1}, h_{k+1}) & \xrightarrow{R(n, k+1)} & \Pi_n(S_{k+1}, h_{k+1}) \end{array}$$

коммутативны. Пусть $[(M, [\hat{g}]_p)]_k \in \Omega_n(S_k, h_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} E_* \circ R(n, k)[(M, [\hat{g}]_p)]_k &= E_* [(M, (r_k \circ \hat{g}, \Phi_{H[\hat{g}]})]_k = \\ &= [(M, (s_k \circ r_k \circ \hat{g}, E(\Phi_{H[\hat{g}]})))]_{k+1}, \end{aligned}$$

где $\Phi_{H[\hat{g}]}$ — некоторый изоморфизм, присоединенный к гомотопии $H[\hat{g}]$. С другой стороны

$$\begin{aligned} R(n, k+1) \circ \Sigma_* [(M, [\hat{g}]_p)]_k &= R(n, k+1)[(M, [J_k \circ \hat{g}])_{k+1}] = \\ &= [(M, (r_{k+1} \circ J_k \circ \hat{g}, \Phi_{H[J_k \circ \hat{g}]}))]_{k+1}, \end{aligned}$$

где $\Phi_{H[J_k \circ \hat{g}]}$ — некоторый изоморфизм, присоединенный к гомотопии $H[J_k \circ \hat{g}]$.

Согласно предложению 18 имеем $H[J_k \circ \hat{g}] = j_k \circ H[\hat{g}]$. Из предложения 12 получаем, что изоморфизм $E(\Phi_{H[\hat{g}]})$ присоединен к гомотопии $j_k \circ H[\hat{g}]$. Так как $s_k \circ r_k = r_{k+1} \circ J_k$, то из предложения 19 следует, что

$$[(M, (r_k \circ J_k \circ \hat{g}, \Phi_{H[J_k \circ \hat{g}]}))]_{k+1} = [(M, (s_k \circ r_k \circ \hat{g}, E(\Phi_{H[\hat{g}]})))]_{k+1}.$$

Следовательно, $E_* \circ R(n, k) = R(n, k+1) \circ E_*$. Отсюда и из первой части теоремы 1 получаем, что $\Sigma_* \circ Q(n, k) = Q(n, k+1) \circ \Sigma_*$. Поэтому возникают взаимно обратные изоморфизмы

$$Q(n) : \Pi_n(S, h) \longrightarrow \Omega_n(S, h), \quad R(n) : \Omega_n(S, h) \longrightarrow \Pi_n(S, h),$$

где

$$Q(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(n, k), \quad R(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} R(n, k).$$

Следовательно группы $\Omega_n(S, h)$ и $\Pi_n(S, h)$ канонически изоморфны. Теорема 1 доказана.

Согласно обобщенной теореме Понтрягина-Тома (см. [4]) существуют канонические изоморфизмы

$$\theta(n, k) : \Omega_n(S_k, h_k) \longrightarrow \pi_{n+k}(T(f_k^* \gamma^k); y_k),$$

$$\theta(n) : \Omega_n(S, h) \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(T(f_k^* \gamma^k); y_k),$$

где $T(f_k^* \gamma^k)$ — пространство Тома расслоения $f_k^* \gamma^k$,

$$y_k = T(f_k^* \gamma^k) \setminus tl(f_k^* \gamma^k), \quad \theta(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta(n, k).$$

Положим $x_k = T(h_k^* \gamma^k) \setminus tl(h_k^* \gamma^k)$.

Теорема 2. Для любых $n, k \geq 0$ существуют канонические изоморфизмы

$$\theta'(n, k) : \Pi_n(S_k, h_k) \longrightarrow \pi_{n+k}(T(h_k^* \gamma^k); x_k),$$

$$\theta'(n) : \Pi_n(S, h) \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(T(h_k^* \gamma^k); x_k).$$

Доказательство. Гомотопическая эквивалентность $r_k : B_k \longrightarrow S_k$ канонически продолжается до гомотопической эквивалентности

$$\bar{r}_k : T(f_k^* \gamma^k) \longrightarrow T(h_k^* \gamma^k), \quad \bar{r}_k(g_k) = x_k.$$

Рассмотрим индуцированные отображениями r_k изоморфизмы

$$r(n, k) : \pi_{n+k}(T(f_k^* \gamma^k); y_k) \longrightarrow \pi_{n+k}(T(h_k^* \gamma^k); x_k).$$

Имеются коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Sigma T(f_k^* \gamma^k) & \xrightarrow{\Sigma \bar{r}_k} & \Sigma T(h_k^* \gamma^k) \\ \downarrow T J_k & & \downarrow T s_k \\ T(f_{k+1}^* \gamma^{k+1}) & \xrightarrow{\bar{r}_{k+1}} & T(h_{k+1}^* \gamma^{k+1}) \end{array}$$

в которых отображения $T J_k, T s_k$ определяются отображениями J_k, s_k (см. [4]).

Возникают коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+k}(T(f_k^* \gamma^k); y_k) & \xrightarrow{r(n, k)} & \pi_{n+k}(T(h_k^* \gamma^k); x_k) \\ \downarrow (T J_k)_* \circ \Sigma' & & \downarrow (T s_k)_* \circ \Sigma' \\ \pi_{n+k+1}(T(f_{k+1}^* \gamma^{k+1}); y_{k+1}) & \xrightarrow{r(n, k+1)} & \pi_{n+k+1}(T(h_{k+1}^* \gamma^{k+1}); x_{k+1}) \end{array}$$

в которых Σ' обозначают гомоморфизмы надстройки. Положим $r_n = \lim_{k \rightarrow \infty} r(n, k)$

и определим требуемые изоморфизмы формулами

$$\theta'(n, k) = r(n, k) \circ \theta(n, k) \circ Q(n, k), \quad \theta'(n) = r(n) \circ \theta(n) \circ Q(n).$$

Отметим, что $\theta'(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta'(n, k)$. Теорема 2 доказана.

Как следствие из теоремы 2 получаем следующее.

Теорема 3. Для любого символа Шуберта $a = (a_1, \dots, a_k; l)$ существуют канонические изоморфизмы

$$\Pi_n(a) = \pi_{n+k}(T(\gamma(a)); \infty) \quad \text{и} \quad \Pi_n^E(a) = \pi_{n+k}^S(T(\gamma(a)); \infty).$$

ABSTRACT. The paper considers morphisms of vector fiber spaces. It concentrates on the concept of a (S, h) -framed cobordism. A theorem on (S, h) -framed cobordisms in conjunction with generalized Pontriagin-Thom's theorem imply, in particular, an analog of Pontriagin's theorem for a -framed manifolds.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Огникян, "Об одном обобщении оснащенного бордизма", ДАН АрмССР, т. 79, № 5, стр. 195 – 198, 1984.
2. Л. С. Понтрягин, Гладкие многообразия и их приложения в теории гомотопий, М., Наука, 1976.
3. А. А. Огникян, "О классифицирующих пространствах a -оснащенных расслоений", Уч. записки ЕГУ, т. 186, № 1, 1997.
4. Р. Е. Стронг, Заметки по теории кобордизмов, М., Мир, 1973.
5. Д. Хьюзмоллер, Расслоенные пространства, М., Мир, 1971.
6. Э. Спеньер, Алгебраическая топология, М., Мир, 1971.
7. R. Lashof, "Poincare duality and cobordism", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 109, pp. 257 – 277, 1963.

11 апреля 1997

Ереванский государственный университет

CONTENTS

VOLUME 33

NUMBER 1

1998

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

	PAGES
Singular points of spectrum of uniform algebra B. T. Batikian, S. A. Grigorian	1
Bipartite (d, λ) -designs G. S. Gasparian, H. E. Lazarian	17
On a Tauberian theorem of J. Karamata E. A. Danielian, Z. S. Mikaelian	27
On Gevrey class solutions of hypoelliptic equations G. O. Hakobyan, V. N. Markaryan	35
On generalizations of Ü. Lumiste theorem on semi-parallel submanifolds V. A. Mirzoyan	48
A theorem on (S, h) -framed cobordism H. H. Ohnikian	59

©1999 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 33

НОМЕР 1

1998

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Особые точки спектра равномерной алгебры Б. Т. Батикян, С. А. Григорян	5
Двудольные (d, λ) -дизайны Г. С. Гаспарян, А. Э. Лазарян	22
О тауберовой теореме Караматы Э. А. Даниелян, З. С. Микаелян	33
О решениях класса Жевре гипозллиптических уравнений Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян	40
Обобщения теоремы Ю. Лумксте о полупараллельных подмногообразиях В. А. Мирзоян	53
Теорема об (S, h) -оснащенном кобордизме А. А. Огникян	65