ISSN 0002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ր. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5–6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները չընջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թիվ չատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն; անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա».

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

А. М. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 6, 1997

В данной работе доказывается несколько теорем, которые в частных случаях подтверждают следующую гипотезу Ч. Ч. Янга : если для многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ выполняется условие $P(z)\,(P(z)-1)=0 \iff Q(z)\,(Q(z)-1)=0$, то $P(z)=Q(z)$ или $P(z)+Q(z)=1$. Результаты зависят от кратностей нулей, их количества, геометрического расположения, степеней многочленов и т.д.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В письме академику М. М. Джрбашяну американский математик Ч. Ч. Янг сформулировал следующую задачу : для многочлена P обозначим через $E_P=\{z\in\mathbf{C}\colon P(z)(P-1)(z)=0\}$. Что можно сказать о многочленах P и Q, если

$$E_P=E_Q\,? \tag{1}$$

Сам Янг высказал предположение, что всегда имеет место альтернатива : либо $P\equiv Q$, либо $P+Q=1$. Хотя решение сформулированной задачи в общей постановке пока не известно, некоторыми авторами были получены по ней частные результаты (см. [1] — [3]). В данной работе также приводятся результаты, подтверждающие гипотезу Янга в некоторых частных случаях нового типа. Основными результатами работы являются формулируемые ниже теоремы.

Теорема 1. *Если как многочлены P, Q, так и многочлены $P-1$, $Q-1$ имеют одинаковые нули, то $P\equiv Q$.*

Теорема 2. *Если многочлены P, Q удовлетворяют (1) и четности кратностей соответствующих нулей многочленов $P(P-1)$ и $Q(Q-1)$ совпадают, то $P\equiv Q$*

либо $P+Q=1$.

Теорема 3. *Пусть для многочленов* P, Q

$$P(P-1)(z)=A\prod_{j=1}^{t}(z-a_j)^{\alpha_j},\quad \sum_{j=1}^{t}\alpha_j=2p,\quad p=degP,$$

и

$$Q(Q-1)(z)=B\prod_{j=1}^{t}(z-a_j)^{\beta_j},\quad \sum_{j=1}^{t}\beta_j=2q,\quad q=degQ.$$

Тогда если $\sum\limits_{j=1}^{t}\min(\alpha_j,\beta_j)>p+t/2$, *то* $P\equiv Q$ *или* $P+Q=1$.

Доказательства теорем 1—3 приведены в §2. Во всех этих теоремах без ограничения общности можно считать, что $\deg P\geq \deg Q$. Случай, когда $\deg P=\deg Q$, отдельно изучается в §3. Здесь доказывается следующая

Теорема 4. *Пусть многочлены* P, Q *удовлетворяют (1) и* $degP=degQ$. *Если выполняется одно из следующих условий :*

1. $|E_P|=degP+1$;
2. $|E_P|=degP+2$;
3. $E_P\subset\mathbb{R}$ *и* $|E_P|=degP+1+r$, *где* $0\leq r<(degP-1)/5$,

то $P\equiv Q$ *или* $P+Q=1$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 — 3

Следующая лемма была доказана в [3]. Мы приведем ее новые доказательства, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1 ([3]).

$$|E_P|\geq 1+degP.$$

Доказательство. I вариант. Пусть $P(P-1)(z)=A\prod_{j=1}^{t}(z-a_j)^{\alpha_j}$, где $t=|E_P|$. Обозначим $I_0=\{i:P(a_i)=0\}$ и $I_1=\{i:P(a_i)=1\}$. Итак, $\sum\limits_{i\in I_0}\alpha_i=\sum\limits_{i\in I_1}\alpha_i=p$ и $|I_0|+|I_1|=|E_P|$. Обозначим $D(z)=\prod_{i\in I_0}(z-a_i)$, $G(z)=\prod_{i\in I_1}(z-a_i)$. Имеем $P=D\cdot P_0$ и $P-1=G\cdot P_1$, где P_0 и P_1 – многочлены. Ясно, что P' делится на P_0, а $(P-1)'=P'$ делится на P_1. Так как P_0 и P_1 не имеют общих нулей, то $\deg P'\geq \deg P_0+\deg P_1=(\deg P-\deg D)+(\deg P-\deg G)$, или $\deg P-1\geq \deg P-|I_0|+\deg P-|I_1|$. Отсюда $|E_P|\geq 1+\deg P$.

II вариант. Обозначим через Z_f множество нулей f, считая каждый нуль столько раз, какова его кратность. Тогда имеем

$$f_n(z) = \sum_{i \in I_n} \frac{\alpha_i}{z - a_i}, \quad A_n = \bigcup_{i \in I_n} \{\underbrace{a_i, \dots a_i}_{\alpha_i - 1}\}, \quad B_n = Z_{f_n}, \qquad n = 0.1.$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, имеем $P' = P \cdot f_0$, $Z_{P'} = A_0 \bigcup B_0$. С другой стороны, $P' = (P-1)' = (P-1) \cdot f_1$ и $Z_{P'} = Z_{(P-1)'} = A_1 \bigcup B_1$. Ясно, что $A_0 \bigcup B_0 = A_1 \bigcup B_1$, $A_0 \bigcap A_1 = \emptyset$, $A_0 \bigcap B_0 = \emptyset$, $A_1 \bigcap B_1 = \emptyset$. Значит, $A_0 = B_1 \setminus B_0$ и $A_1 = B_0 \setminus B_1$. Отсюда имеем $|A_0| \leq |B_1|$, поэтому $\sum\limits_{i \in I_0} (\alpha_i - 1) \leq |I_1| - 1$, и $\deg P + 1 \leq |I_0| + |I_1| = |E_P|$.

Следствие 1. Если $j \in I_n$, $n = 0, 1$ и $\alpha_j \geq 2$, то

$$f_n(a_j) = 0, \quad n = 0, 1. \tag{2}$$

Доказательство следует из представлений $A_0 = B_1 \setminus B_0$ и $A_1 = B_0 \setminus B_1$.

Доказательство теоремы 1. По условию многочлен $P - Q$ имеет не менее $|E_P|$ корней. С другой стороны, по лемме 1 $\deg P < |E_P|$ и, значит, $\deg(P - Q) \leq$ $\leq \deg P < |E_P|$, т.е. $P \equiv Q$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $D = НОД(P(P-1))$ (НОД – наибольший общий делитель). Поскольку все 0 и 1 многочленов P и Q являются корнями D, то по лемме 1 $d = \deg D \geq \deg P + 1 = p + 1$. Условие теоремы означает, что $P(P-1) = D \cdot T_1^2$ и $Q(Q-1) = D \cdot T_2^2$, где T_1 и T_2 – многочлены. Пусть $\deg T_1 = t_1$, $\deg T_2 = t_2$ (т.к. $p \geq q$, то $t_1 \geq t_2$). Имеем, что $p+1 \leq d = 2p - 2t_1 = 2q - 2t_2$, значит, $2t_1 \leq p - 1$ и $p + t_2 = q + t_1$. С другой стороны, $T_1^2 Q(Q-1)(z) - T_2^2 P(P-1)(z) = 0$ или $T_1^2(Q - 1/2)^2(z) - T_2^2(P - 1/2)^2(z) = \frac{1}{4}(T_1^2 - T_2^2)(z)$. В случае

$$\deg\left(T_1^2(Q-1/2)^2 - T_2^2(P-1/2)^2\right) \geq \max\left(\deg\left(T_1(Q-1/2\right), \deg\left(T_2(P-1/2)\right)\right) =$$

$$= \max(t_1 + q, t_2 + p) = t_2 + p$$

имеем

$$t_2 + p \leq \deg\left(T_1^2(Q-1/2)^2 - T_2^2(P-1/2)^2(z)\right) = \deg\left(\frac{1}{4}(T_1^2 - T_2^2)\right) \leq 2t_1 \leq p - 1.$$

Отсюда имеем $t_2 \leq -1$. Это противоречие позволяет нам заключить, что $T_1^2(Q-1/2)^2(z) - T_2^2(P-1/2)^2(z) \equiv 0$. Следовательно, $T_1^2 \equiv T_2^2$ и $P(P-1)(z) - Q(Q-1)(z) \equiv 0$, т.е. $(P-Q)(P+Q-1)(z) \equiv 0$, чем и завершается доказательство теоремы 2.

Замечание. Так как степени многочленов $P(P-1)(z)$ и $Q(Q-1)(z)$ – четные числа, теорему 2 можно сформулировать следующим образом :

Если для многочленов P и Q имеет место (1), то четности кратностей соответствующих нулей многочленов $P(P-1)(z)$ и $Q(Q-1)(z)$ либо совпадают, и тогда $P \equiv Q$ или $P+Q \equiv 1$, либо не совпадают лишь четное число раз.

Доказательство теоремы 3. Пару (λ, n), где $\lambda \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbb{N}_0$, будем называть "хорошей", если $P^{(n)}(\lambda) = Q^{(n)}(\lambda)$. Число "хороших" пар для P и Q обозначим через $L(P,Q)$. Ясно, что если $L(P,Q) \geq p+1$, то $P \equiv Q$, если же $L(1-P,Q) \geq p+1$, то $P+Q \equiv 1$. Поэтому будем считать, что $L(P,Q) \leq p$ и $L(1-P,Q) \leq p$. Оценим снизу сумму $L(P,Q) + L(1-P,Q)$. Для этого обозначим

$$I_{00} = \{i: \quad P(a_i) = 0,\, Q(a_i) = 0\}, \qquad I_{01} = \{i: \quad P(a_i) = 0,\, Q(a_i) = 1\},$$

$$I_{10} = \{i: \quad P(a_i) = 1,\, Q(a_i) = 0\}, \qquad I_{11} = \{i: \quad P(a_i) = 1,\, Q(a_i) = 1\}.$$

Для каждого $i \in I_{00}$ имеем $\min(\alpha_i, \beta_i)$ "хороших" пар. Действительно, если $i \in I_{00}$, то $P^{(k)}(a_i) = Q^{(k)}(a_i)$, где $k = 0, 1, ..., \min(\alpha_i, \beta_i) - 1$. То же самое можно сказать для каждого $i \in I_{11}$.

Для каждого же $i \in I_{01} \cup I_{10}$ имеем $\min(\alpha_i, \beta_i) - 1$ "хороших" пар. Действительно, если $i \in I_{01} \cup I_{10}$, то $P^{(k)}(a_i) = Q^{(k)}(a_i)$, где $k = 1, ..., \min(\alpha_i, \beta_i) - 1$. Следовательно

$$L(P,Q) \geq \sum_{i \in I_{00} \cup I_{11}} \min(\alpha_i, \beta_i) + \sum_{i \in I_{01} \cup I_{10}} [\min(\alpha_i, \beta_i) - 1] = \sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - |I_{01}| - |I_{10}|$$

и

$$L(1-P,Q) \geq \sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - |I_{11}| - |I_{00}|.$$

Отсюда $2p \geq L(P,Q) + L(1-P,Q) \geq 2\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - (|I_{01}| + |I_{10}| + |I_{00}| + |I_{11}|) =$ $= 2\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - t$, или $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \leq p + \frac{1}{2}t$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 2. *Если $P \not\equiv Q$. то для $\beta \geq 0$*

$$deg НОД(P, Q) + deg НОД(P-1, Q-1) = p - \beta.$$

Доказательство. Докажем, что $\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1) \leq p$. С этой целью обозначим

$$\frac{P}{НОД(P,Q)} = P_0, \quad \frac{Q}{НОД(P,Q)} = Q_0,$$

$$\frac{P-1}{НОД(P-1,Q-1)} = P_1, \quad \frac{Q-1}{НОД(P-1,Q-1)} = Q_1.$$

Ясно, что $Q[P_0Q_1 - P_1Q_0] = Q_0[Q_1 - P_1]$. Так как $P \not\equiv Q$, то $P_1 \not\equiv Q_1$. Значит

$$\deg Q \leq \deg Q_0 + \max(\deg Q_1, \deg P_1) =$$

$$= \deg Q_0 + \max(\deg Q, \deg P) - \deg НОД(P-1, Q-1),$$

или

$$(\deg Q - \deg Q_0) + \deg НОД(P-1, Q-1) \leq \max(\deg P, \deg Q),$$

т.е. $\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1) \leq p$. Доказательство завершено.

Лемма 3. *Если $P \not\equiv Q$, то $deg(P_0Q_1 - P_1Q_0) \leq \beta$, т.е. $[P_0Q_1]^{(\beta+1)} \equiv [P_1Q_0]^{(\beta+1)}$.*

Доказательство. Следуя введенным выше обозначениям, имеем

$$\deg(P_0Q_1 - P_1Q_0) = \deg Q_0 - \deg Q + \deg(Q_1 - P_1) \leq -(\deg Q - \deg Q_0) +$$

$$+ \max(\deg Q_1, \deg P_1) = -\deg НОД(P,Q) + \max(\deg P, \deg Q) -$$

$$- \deg НОД(P-1, Q-1) = p - [\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1)] = \beta.$$

Лемма 4. *Пусть $A(z) = A\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{\alpha_i}$, причем $\max\limits_{1\leq i\leq n}\alpha_i \leq \alpha$. Тогда $A^{(\alpha-1)}$ имеет только простые корни.*

Доказательство проводится с помощью индукции.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 4, отметим следующее. Считая здесь $p = q$, имеем

$$P(P-1)(z) = A\prod_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\alpha_i}, \quad Q(Q-1)(z) = B\prod_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\beta_i},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{t}\beta_i = 2p$; $\alpha_i, \beta_i \geq 1$. По лемме 1 $t \geq p+1$. Ясно, что $P'(z) = \prod\limits_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\alpha_i-1}\cdot R(z)$, где $\deg R = r = (p-1) - \sum\limits_{i=1}^{t}(\alpha_i - 1) = (p-1) - \sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i + t = t-(p+1)$. Аналогично, $Q'(z) = \prod\limits_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\beta_i-1}\cdot S(z)$, где $\deg S = s = t-(p+1)$. Обозначим $T(z) = \prod\limits_{i=1}^{t}(z-a_i)$. Имеем

$$[P(P-1)(z)]' = A\prod_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\alpha_i-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i T(z)}{z-a_i}\right) = A\frac{P'(z)}{R(z)}\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i T(z)}{z-a_i}\right).$$

Значит

$$(2P-1)\cdot R(z) = A\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i T(z)}{z-a_i}\right).$$

Подставляя сюда $z = a_j$ $(j = 1, 2, ..., t)$, получим $(2P(a_j)-1)\,R(a_j) = A\cdot\alpha_j\cdot T'(a_j)$. Таким же образом, $(2Q(a_j)-1)\,S(a_j) = B\cdot\beta_j\cdot T'(a_j)$. Обозначая $\delta_j = 2P(a_j)-1 = \pm 1$ и $\varphi_j = 2Q(a_j)-1 = \pm 1$, получим

$$\frac{\delta_j}{\varphi_j}\cdot\frac{R(a_j)}{S(a_j)} = \frac{A}{B}\cdot\frac{\alpha_j}{\beta_j}; \quad j = 1, 2, ..., t. \tag{3}$$

Доказательство пункта 1 теоремы 4. Из условий теоремы следует, что $\deg R = \deg S = 0$, т.е. $R(z) = R_0$, $S(z) = S_0$, где $R_0, S_0 \in \mathbb{C}$. Значит, в силу (3) будем иметь

$$\frac{\delta_j}{\varphi_j} = \frac{AS_0}{BR_0}\cdot\frac{\alpha_j}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, ..., p+1.$$

Ясно, что $\alpha_j/\beta_j > 0$ для всех j. Следовательно, из последнего неравенства имеем, что соотношение $\dfrac{\delta_j}{\varphi_j}$ не меняет знака, т.е. либо $\delta_j = \varphi_j$, либо $\delta_j = -\varphi_j$ $(j = 1, 2, ..., p+1)$. Первый случай представляет собой условия теоремы 1 для многочленов P, Q, а второй – для $1-P$, Q. В обоих случаях или $P \equiv Q$ или $P + Q \equiv 1$.

Доказательство пункта 2 теоремы 4. Так как $t = p+2$, то $\deg S = \deg R = 1$. Значит, $F(z) = \dfrac{B}{A}\cdot\dfrac{R(z)}{S(z)}$ является дробно–линейной функцией, причем

$$F(a_j) = \frac{\alpha_j}{\beta_j}\cdot\frac{\varphi_j}{\alpha_j} \in \mathbb{R} \quad \text{при} \quad j = 1, 2, ..., p+2.$$

Обратное к дробно-линейной функции есть дробно-линейная функция и она переносит прямую $\mathbb{R}$ на некоторую окружность или прямую. Значит, точки a_j находятся либо на одной окружности, либо на одной прямой. Покажем, что первое из них невозможно. Пусть они находятся на окружности с центром τ. Ясно, что существует такое j, что $\alpha_j > 2$ (в противном случае $t = p+2 = 2p$, $p = 2$, что есть противоречие). Например, будем считать, что $\alpha_1 \geq 2$ и $P(a_1) = 0$, $P'(a_1) = 0$. В силу (1) $f_1(a_1) = 0$. Полагая $a_1 = 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$, нетрудно убедиться, что все точки $\dfrac{\alpha_i}{a_1 - a_i}$ находятся на одну сторону от мнимой оси OY (в общем случае точки $\dfrac{\alpha_i}{a_1 - a_i}$ будут находиться в полуплоскости $\{\mathrm{Re}(z\,\overline{(a_1 - \tau)}) > 0\}$). Следовательно, их сумма не может равняться нулю. Итак, точки a_i находятся на одной прямой $z = \lambda + \mu x$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$. Значит, с помощью замены переменной задача сводится к случаю с действительными 0 и 1 многочленов P и Q. Поэтому ниже мы приводим доказательство пункта 3, завершающее доказательство пункта 2, кроме случаев $p = 3, 4, 5, 6$, которые будут получены в конце работы.

Доказательство пункта 3 теоремы 4. В силу указанной выше замены переменной можем написать

$$P(P-1)(x) = A\prod_{i=1}^{t}(x - a_i)^{\alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^{t}\alpha_i = 2p, \quad a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{R}.$$

Не нарушая общности можно считать, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_t, \tag{4}$$

$$P'(x) = \prod_{i=1}^{t}(x - a_i)^{\alpha_i - 1} \cdot R(x) = A\prod_{i \in I_0}(x - a_i)^{\alpha_i} \cdot f_0(x) = A\prod_{i \in I_1}(x - a_i)^{\alpha_i} \cdot f_1(x).$$

В силу (2)

$$[f_0(a) = 0] \Longleftrightarrow [R(a) = 0 \quad \text{или} \quad a = a_i, \quad \text{где} \quad i \in I_1, \quad \alpha_i \geq 2], \tag{5}$$

$$[f_1(a) = 0] \Longleftrightarrow [R(a) = 0 \quad \text{или} \quad a = a_i, \quad \text{где} \quad i \in I_0, \quad \alpha_i \geq 2]. \tag{6}$$

Теперь, не нарушая общности, можем считать, что $P(a_1) = 0$. Докажем, что $\alpha_1 = 1$. Действительно, в противном случае ($\alpha_1 \geq 2$) в силу (5) $f_1(a_1) \geq 0$, но поскольку любая функция вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{x - c_j}, \quad \gamma_j > 0, \quad c_1 < c_2 < \ldots < c_n$$

в интервалах (c_k, c_{k+1}), $k = 1, 2, ..., n-1$ имеет только простые корни в каждом по одному, то a_1 находится в некотором интервале (a_k, a_m), $k, m \in I_1$, что противоречит (4). Аналогичным образом $\alpha_t = 1$ (независимо от того $P(a_t) = 0$ или $P(a_t) = 1$). Этими рассуждениями можно доказать, что $R(x)$ не имеет корней в интервалах (a_1, a_2) и (a_{t-1}, a_t).

Покажем, что $P(a_2) = 1$. Действительно, если $P(a_2) = 0$, то $P(a_1) = P(a_2)$ и по теореме Ролля существует $c \in (a_1, a_2)$ такое, что $P'(c) = 0$, но тогда $R(c) = 0$, что противоречит вышесказанному. Аналогично можно доказать, что $P(a_{t-1}) = 1 - P(a_t)$.

Процесс получения информации о числах a_i и α_i разделим на три этапа :

1. В случае $r = 0$ функция $R(x)$ не имеет корней. Это означает во первых, что $P'(x)$ кроме точек a_i других корней не имеет. Из этого и из теоремы Ролля сразу следует, что $P(a_3) = 0$, $P(a_4) = 1$, $P(a_5) = 0$ и т.д., а во вторых, что корнями f_0 являются точки $\{a_i\colon\ i \in I_1 \text{ и } \alpha_1 \geq 2\}$, корни же f_1 – $\{a_i\colon\ i \in I_0, \alpha_i \geq 2\}$. Очевидно, что f_0 и f_1 вместе имеют $|I_0| - 1 + |I_1| - 1 = t - 2$ корней. Так как $\alpha_1 = \alpha_t = 1$, то $\alpha_i \geq 2$, $i = 2, ..., t-1$. Имеем

$$2p = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{t-1} \alpha_i + \alpha_t \geq 1 + 2(t-2) + 1 = 2(t-1) = 2p$$

и, значит, $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_{t-1} = 2$. Итак, в этом случае 0 и 1 многочлена P (и, следовательно, Q) чередуют друг друга, причем кратности наименьшего и наибольшего из них равны 1, а остальных – 2.

2. В случае $r = 1$ функция $R(x)$ является линейным многочленом и имеет единственный корень $R(b) = 0$. Допустим, что $b \in (a_k, a_{k+1})$. Мы уже знаем, что $2 \leq k \leq t-2$. Что касается точек a_1, ...,a_k, то обстановка не меняется (снова по очереди следуют 0 и 1). То же самое можно сказать и о точках a_{k+1}, a_{k+2},..., a_t. Докажем, что при переходе от a_k к a_{k+1} порядок нарушается : $P(a_k) = P(a_{k+1})$. Для простоты допустим, что $P(a_k) = 0$ и в противоположность нашему утверждению допустим, что $P(a_{k+1}) = 1$. Ясно, что $0 < P(x) < 1$ в (a_k, a_{k+1}) и $P'(b) = 0$, $P''(b) \neq 0$. Теперь если предположить, что $P'(x)$ в интервале (a_k, a_{k+1}) не имеет корней, отличных от b, то получаем, что $P'(x)$ в интервалах (a_k, b) и (b, a_{k+1}) возрастает. Так как b не является локальным экстремумом, то $P''(b) = 0$, что

является противоречием. Значит, $P'(x)$ в интервале (a_k, a_{k+1}) имеет корень, отличный от b, что невозможно. Значит, $P(a_k) = P(a_{k+1})$. С другой стороны

$$2p = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{t-1} \alpha_i + \alpha_t \geq$$

$$\geq 1 + 2(k-2) + 1 + 1 + 2(t-k+2) + 1 = 2(t-2) = 2p.$$

Следовательно

$$\alpha_1 = \alpha_t = 1, \quad \alpha_k = \alpha_{k+1} = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_{t-1} = 2.$$

Очевидно, что все вышесказанное имеет место и для Q.

Чтобы применить теорему 3, мы должны оценить снизу $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i)$. В силу вышеполученного $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \geq 6 + 2(t-6) = 2t - 6 = 2p - 2$. А так как по условию пункта 3 теоремы 4, $p > 5r + 1 = 6$, то

$$\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \geq 2p - 2 > p + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(3p+2).$$

Применяя теорему 3, мы завершаем доказательство этого случая.

3. В случае $r < (p-1)/5$ функция $R(x)$ имеет $r = t - p - 1$ простых корней, которые находятся в интервалах (a_i, a_{i+1}), в каждом из них не больше одного. Если $R(x)$ имеет корень в (a_k, a_{k+1}), то точно так же, как и выше, докажем, что $P(a_k) = P(a_{k+1})$. Аналогично доказывается, что для остальных точек a_i сохраняется прежний порядок.

Теперь о числах α_i. Нетрудно проверить, что P имеет ровно $2 + 2r$ точек, для которых $\alpha_i = 1$, и ровно $t - (2 + 2r)$ точек, для которых $\alpha_i = 2$. Так как все это имеет место и для многочлена Q, то можем оценить величину $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i)$. Число тех i, для которых $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) = 1$, не больше $2 + 4r$. Значит

$$\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \geq 2 + 4r + 2(t - (2 + 4r)) = 2t - 2 - 4(t - p - 1) = 4p - 2t + 2.$$

А неравенство $4p - 2t + 2 > p + t/2$ равносильно условию $t < (6p+4)/5$ пункта 3 теоремы 4, что, в свою очередь, равносильно $r < (p-1)/5$. Остается применить теорему 3. Пункт 3 теоремы 4 доказан.

Вернемся к пункту 2 теоремы 4, для завершения доказательства которого остается рассмотреть случаи $p = 3, 4, 5, 6$ (при $r = 1$ условия пункта 3 теоремы 4 равносильны неравенству $p > 6$).

a) $p = 3$. В силу вышесказанного мы можем предположить, что $P(a_1) = 0$, $Q(a_1) = 0$ и $R(b) = 0$, $b \in (a_2, a_3)$, $S(c) = 0$, $c \in (a_3, a_4)$. Тогда

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_4)^2, \qquad Q(x) = B(x - a_1)(x - a_3)(x - a_4),$$

$$P(x) - 1 = A(x - a_2)(x - a_3)(x - a_5), \qquad Q(x) - 1 = B(x - a_2)^2(x - a_5).$$

Значит, $\deg НОД(P, Q) + \deg НОД(P - 1, Q - 1) = 4 > p$, а это в силу леммы 2 означает, что $P \equiv Q$ (разумеется, что при предположении $P(a_1) = 0$, $Q(a_1) = 1$ получим $P + Q \equiv 1$).

b) $p = 4$. В этом случае имеем

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_4)^2(x - a_6), \qquad Q(x) = B(x - a_1)(x - a_3)^2(x - a_6),$$

$$P(x) - 1 = A(x - a_2)(x - a_3)(x - a_5)^2, \quad Q(x) - 1 = B(x - a_2)^2(x - a_4)(x - a_5).$$

Значит, $\deg НОД(P, Q) + \deg НОД(P - 1, Q - 1) = 4 = p$. Отсюда, в силу леммы 2 ясно, что $\beta = 0$ и

$$P_0(x) = A(x - a_4)^2, \quad Q_0(x) = B(x - a_3)^2,$$

$$P_1(x) = A(x - a_3)(x - a_5), \quad Q_1(x) = B(x - a_2)(x - a_4).$$

Применим лемму 3 : $[P_0Q_1]' \equiv [P_1Q_0]'$, т.е. $P \equiv Q$.

c) $p = 5$. В этом случае

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_4)^2(x - a_6)^2,$$

$$Q(x) = B(x - a_1)(x - a_3)^2(x - a_5)^2(x - a_6),$$

$$P(x) - 1 = A(x - a_2)(x - a_3)(x - a_5)^2(x - a_7),$$

$$Q(x) - 1 = B(x - a_2)^2(x - a_4)^2(x - a_7).$$

Отсюда $\deg НОД(P, Q) + \deg НОД(P - 1, Q - 1) = 4 = p - 1$, т.е. $\beta = 1$. С другой стороны

$$P_0(x) = A(x - a_4)^2(x - a_6), \; Q_0(x) = B(x - a_3)^2(x - a_5),$$

$$P_1(x) = A(x - a_3)(x - a_5)^2, \; Q_1(x) = B(x - a_2)(x - a_4)^2.$$

Применим лемму 3 : $[AB(x-a_2)(x-a_4)^2(x-a_6)]'' \equiv [AB(x-a_3)^2(x-a_5)^2]''$. В силу леммы 4 многочлен правой части имеет только простые корни, а для многочлена

левой части a_4 является двукратным корнем. Полученное противоречие в силу леммы 3 даст $P \equiv Q$.

d) $p = 6$. Снова в силу рассуждений доказательства пункта 3, не нарушая общности можем написать

$$P(x) = A(x-a_1)(x-a_4)^2(x-a_6)^2(x-a_8),$$

$$Q(x) = B(x-a_1)(x-a_3)^2(x-a_5)^2(x-a_8),$$

$$P(x)-1 = A(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)^2(x-a_7)^2,$$

$$Q(x)-1 = B(x-a_2)^2(x-a_4)^2(x-a_6)(x-a_7).$$

В лемме 2 Q можно заменить на $1-Q$. Так как $НОД(P, 1-Q) = (x-A_4)^2(x-a_6)$ и $НОД(P-1, Q) = (x-a_3)(x-a_5)^2$, то $\beta = 0$. С другой стороны

$$P_0(x) = A(x-a_1)(x-a_6)(x-a_8), \qquad Q_0(x) = B(x-a_2)^2(x-a_7),$$

$$P_1(x) = A(x-a_2)(x-a_7)^2, \qquad Q_1(x) = B(x-a_1)(x-a_3)(x-a_8).$$

Применяя лемму 3 для многочленов P и $1-Q$, получим $[AB(x-a_1)^2(x-a_3)(x-a_6)(x-a_8)^2]' \equiv [AB(x-a_2)^2(x-a_7)^3]'$. В силу леммы 4 многочлен правой части имеет только простые корни, а a_2 и a_7 – двукратные корни для многочлена левой части. Следовательно, по лемме 3 $P+Q \equiv 1$. Теорема 4 доказана.

Автор выражет глубокую благодарность Н. У. Аракеляну и В. А. Мартиросяну за ценные замечания и С. Г. Рафаэляну – за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

ABSTRACT. The results of this paper refer to the following conjecture by C. C. Yang : if the polynomials $P(z)$ and $Q(z)$ satisfy $P(z)(P(z)-1) = 0 \iff Q(z)(Q(z)-1) = 0$, then either $P(z) = Q(z)$ or $P(z)+Q(z) = 1$. The paper confirms this conjecture in a variety of special cases depending on the multiplicities of zeros and their quantity, their geometrical positions as well as the degrees of the polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. C. Yang, "A problem on polynomials", In "Complex Analysis", Proc. of the SUNY Brackport Conf., 169, New-York – Basel, 1978.
2. W. Adams, E. Straus, "Non-Archimedian analytic functions taking the same values at the same points", Ill. J. Math., vol. 15, pp. 418 — 424, 1971.
3. М. А. Мкртчян, "Об одной задаче Янга", В кн. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, Красноярск, стр. 237 — 242, 1980.

20 октября 1997

Ереванский государственный университет

О ВЕСОВЫХ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА–СЛОБОДЕЦКОГО

Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

Доказываются весовые оценки для производных дифференцируемых функций многих переменных в нормах анизотропных пространств Соболева–Слободецкого или Никольского–Бесова.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются весовые неравенства в анизотропных пространствах типа классических пространств Соболева–Слободецкого или Никольского–Бесова. Полученные неравенства для дифференцирусмых функций многих переменных с одной стороны обобщают известные неравенства в изотропных пространствах (см. [1] – [8]), а с другой стороны развивают их в различных направлениях.

Помимо самостоятельного интереса эти неравенства могут быть примснены при доказательстве существенной самосопряженности гипоэллиптических операторов, при изучении вырождающихся гипоэллиптических уравнений. Например, в работах [7], [8] подобные неравенства, полученные в изотропных пространствах W_2^l Соболева, применены при доказательстве существенной самосопряженности эллиптических операторов, в работе [9] аналогичные неравенства, полученные в анизотропных пространствах $W_2^{l_1,\dots,l_n}$ Соболева–Слободецкого ($l_1,\dots,l_n$ – целые неотрицательные числа) применеы при доказательстве самосопряженности полуэллиптических операторов.

Доказанные в настоящей работе неравенства мы намерены применить при получении критериев самосопряженности для одного класса регулярных гипоэллиптических операторов.

Будем пользоваться стандартными обозначениями : $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство. $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{N}_0^n = \mathcal{N}_0 \times \cdots \times \mathcal{N}_0$ и

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \text{ при } \alpha \in \mathcal{N}_0^n, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$ – обобщенные по Соболеву производные. Через $\{e^j\}_1^n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Лемма 1.1. *Пусть $\chi > 0$, $2 \le m \in \mathcal{N}$, $a_j \ge 0$ $(j = 0, 1, ..., m)$. Тогда существуют числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\chi' > 0$ такие, что неравенства*

$$(1-\varepsilon)a_j \le \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{j+1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{j-1} + \chi a_0 \tag{1.1}$$

влекут неравенства

$$a_j \le a_m + \chi' a_0, \quad j = 1, ..., m-1. \tag{1.2}$$

Доказательство. Докажем больше, а именно, существование чисел $\varepsilon \in (0, 1)$, $\chi' > 0$ и функции $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ таких, что неравенства (1.1) влекут неравенства

$$a_j \le \left[\frac{j}{m} + \delta(\varepsilon)\right] a_m + \chi' a_0, \quad j = 1, ..., m-1. \tag{1.3}$$

Доказательство этих неравенств проведем по индукции по m. При $m = 2$ из (1.1) получаем

$$a_1 \le \left[\frac{1}{2} + \delta(\varepsilon)\right] a_2 + \chi' a_0, \tag{1.4}$$

где

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \chi' = \frac{\chi}{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Чтобы при $m = 2$ из неравенств (1.4) получить неравенства (1.2), достаточно выбрать любое $\varepsilon \in (0, 1/3)$.

Пусть неравенства (1.3) доказаны при $m \le k$. Докажем их при $m = k+1$. Из (1.1) при $m = k+1$, $j = k$ и из (1.3) при $m = k$, $j = k-1$ имеем

$$(1-\varepsilon)a_k \le \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{k+1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{k-1} + \chi a_0 \le$$

$$\leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{k+1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\left[\frac{k-1}{k} + \delta(\varepsilon)\right] a_k + (\chi+\chi')a_0.$$

Пусть число $\varepsilon \in (0, 1/3)$ выбрано так, что

$$\Delta(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\left[\frac{k-1}{k} + \delta(\varepsilon)\right] \geq \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$a_k \leq \left[\frac{k-1}{k} + \delta'(\varepsilon)\right] a_{k+1} + \chi'' a_0,$$

где

$$\chi'' = \frac{\chi+\chi'}{\Delta} \leq 4(\chi+\chi'), \quad \delta'(\varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{1+\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} - \frac{k}{k+1},$$

при этом, очевидно, $\delta'(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда и из (1.3) при $m = k$ получаем неравенства (1.3) при $m = k+1$. Лемма 1.1 доказана.

Замечание. Очевидно, если для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ неравенства (1.1) влекут (1.2), то это же верно и для любого числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Поэтому доказанное предложение можно перефразировать так :

Лемма 1.2. *В условиях леммы 1.1 существуют $\tau \in (0,1)$ и $\chi' > 0$ такие, что неравенства (1.1) для некоторого $\varepsilon \in (0, \tau)$ влекут (1.2).*

Лемма 1.3. *Пусть $\chi > 0$, $2 \leq m \in \mathcal{N}$, $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$ $(j = 0, 1, ..., m)$, $a_0 = b_0$. Тогда существуют $\varepsilon \in (0,1)$ и $\chi' > 0$ такие, что неравенства*

$$a_k \leq \chi(a_m + a_0), \tag{1.5}$$

$$b_k \leq \chi\left(a_k + \varepsilon\sum_{j=0}^{k-1} a_j + a_0\right), \tag{1.6}$$

$$a_k \leq \chi\left(b_k + \varepsilon\sum_{j=0}^{k-1} a_j + a_0\right) \tag{1.7}$$

влекут неравенства

$$b_k \leq \chi'(b_m + b_0), \tag{1.8}$$

$$a_k \leq \chi'(b_m + b_0), \tag{1.9}$$

$$b_k \leq \chi'(a_m + a_0), \quad k = 1, ..., m. \tag{1.10}$$

Доказательство. Применяя последовательно неравенства (1.7) и (1.5), имеем с некоторой постоянной $c = c(\chi, m) \geq 1$

$$a_k \leq c(b_k + \varepsilon a_m + a_0), \quad k = 0, 1, ..., m.$$

Поэтому, при $k = m$ и $0 < \varepsilon < \tau < 1/(2c)$ получаем $a_m \leq 2c(b_m + a_0)$. Отсюда, из неравенств (1.5) и условия $a_0 = b_0$, приходим к неравенству (1.9).

Применяя неравенства (1.5) и (1.6), получаем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$b_k \leq c_1 \left(a_m + \varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} b_j + a_0 \right), \quad k = 0, 1, ..., m.$$

Просуммировав эти неравенства по k, имеем с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \leq c_2 \left(a_m + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} b_k + a_0 \right).$$

Отсюда имеем при $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} c_2$

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \leq 2c_2(a_m + a_0),$$

т.е. неравенства (1.10). Из (1.9) и (1.10) следуют неравенства (1.8) при $\varepsilon \leq$ $\leq \min\{\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_2\}$. Лемма 1.3 доказана.

Ниже будем считать, что числа $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ удовлетворяют условиям (1.2) и (1.8) – (1.10) для некоторого $\chi' > 0$.

§2. ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА–СЛОБОДЕЦКОГО–БЕСОВА

Пусть $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in (0, \infty)^n$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathcal{N}^n$, $m_i > \mu_i$, $i = 1, ..., n$. Обозначим через $B_2^\mu = B_{2,2}^\mu$ (см. [1], [2]) банахово пространство функций f, определенных на $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\| f|B_2^\mu \| = \| f|b_2^\mu \| + \|f\|, \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в L_2, а полунорма $\|\cdot|b_2^\mu\|$ определяется формулой

$$\|f|b_2^\mu\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \|\Delta_i^{m_i}(t) f\|^2 t^{-2\mu_i} \frac{dt}{t}, \tag{2.2}$$

$$\Delta_i(t)F(x) = F(x + te^i) - F(x), \quad \Delta_i^s(t)F = \Delta_i(t)\Delta_i^{s-1}(t)F, \quad s = 2, 3, \ldots \quad \Delta_i^0 = 1.$$

В [2] и [3] доказано, что при различных m_i нормы (2.1) эквивалентны, поэтому далее будем предполагать, что

$$m_1 = \cdots = m_n = R > \max_{1 \le j \le n} \{\mu_j\}. \tag{2.3}$$

Введем еще локальное пространство

$$B_{2,loc}^{\mu} = \{u : \ u \cdot \varphi \in B_2^{\mu}, \ \varphi \in \mathbf{C}_0^{\infty}\} \supset B_2^{\mu},$$

которое можно определить как множество функций $u \in B_2^{\mu}(G)$ для всякой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$. На протяжении всей работы будем считать постоянным вектор $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathcal{N}^n$, $l_1 \ge l_2 \ge \cdots \ge l_n$. Пусть $a \in \mathcal{N}_0^n$. Положим

$$|a : l| = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{l_i}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_i = \frac{l_1}{l_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Построим последовательность чисел $d_0, d_1, \ldots, d_M$ и множеств $N_0, N_1, \ldots, N_M$ следующим образом :

$$d_0 = l_1, \quad N_0 = \{\beta \in (0, \infty)^n : \ (\lambda, \beta) \equiv \lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n \le d_0\}.$$

Затем продолжим по индукции :

$$d_j = \max\{(\lambda, \beta) : \ \beta \in N_{j-1} \cap \mathcal{N}_0^n, \ (\lambda, \beta) < d_{j-1}\}, \ N_j = \{\beta \in (0, \infty)^n : \ (\lambda, \beta) \le d_j\}.$$

Очевидно, существует номер $M \ge 1$ такой, что $d_{M-1} > 0$ и $d_M = 0$. Если не все компоненты вектора l (или, что то же самое, вектора λ) равны между собой, то числа $d_1, \ldots, d_{M-1}$, вообще говоря, нецелые. Но так как эти числа, очевидно, рациональные, то для некоторого натурального числа r числа rd_j, $j = 0, 1, \ldots, M$ уже целые. Далее через r обозначим наименьшее натуральное число, для которого rd_j, $j = 0, 1, \ldots, M$ – целые. Очевидно, что $r = 1$ при $l_1 = \cdots = l_n$. В дальнейшем если r – число, а $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – вектор, то положим

$$r\lambda = (r\lambda_1, \ldots, r\lambda_n), \quad \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Пример. Пусть $n = 2$ и $l = (8.6) \in \mathcal{N}^2$. Имеем

$$m = 21, \quad \lambda = \left(4, \frac{4}{3}\right), \quad d_0 = \frac{24}{3},\ d_1 = \frac{23}{3}, ...,\ d_{18} = \frac{6}{3},\ d_{19} = \frac{4}{3},\ d_{20} = \frac{3}{3},\ d_{21} = 0.$$

При этом $r = 3$ и число d_0 реализуется мультииндексами (8,0), (4,3), (0,6); d_1 – мультииндексами (5,2), (1,5); d_2 – мультииндексами (6,1), (2,4) и т.д.

Введем еще пространство $B_2^{s/(r\lambda)} \equiv B_2^{(sl)/(rl_1)}$, $s = 1, 2, ...$, как множество локально суммируемых функций с конечной нормой (2.1), (2.2). Так как

$$\max_{1\le s\le l_1} \max_{1\le j\le n} \left\{\frac{s}{r\lambda_j}\right\} = \max_{1\le s\le l_1} \left\{\frac{s}{r}\right\} = \frac{l_1}{r},$$

то число $R = [l_1/r] + 1$ удовлетворяет условию (2.3) для всех $\frac{s}{r\lambda}$, $s = 1, ..., l_1$ и поэтому годится для всех пространств $B_2^{(sl)/(rl_1)}$, $s = 1, ..., l_1$.

Введем также множество Φ "весовых" функций φ таких, что $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty$, $0 \le \varphi(x) \le 1$. Для таких функций введем следующие нормы:

$$\|\varphi|\mathbf{C}\| = \max_x |\varphi(x)|, \quad \left\|\varphi|\mathbf{C}^{(l)}\right\| = \max_{0\le|\alpha:l|\le 1} \|D^\alpha\varphi|\mathbf{C}\| \equiv \max_{0\le(\lambda,\alpha)\le l_1} \|D^\alpha\varphi|\mathbf{C}\|,$$

и полунорму

$$\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\| = \max_{0<|\alpha:l|\le 1} \|D^\alpha\varphi|\mathbf{C}\|. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Существует постоянная $C = C(k)$ такая, что для любых $s = 1, ..., l_1$, $k \ge s$ $(k \in \mathcal{N})$ и для всех $\varphi \in \Phi$, $u \in B_{2,loc}^{s/(r\lambda)} \cap L_2$*

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 \le c\left\|\varphi^s u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 + \left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|^2 \left[\left\|\varphi^s u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 + \|u\|^2\right], \tag{2.5}$$

где φ^m – m-ая степень функции $\varphi(x)$

Доказательство. При $k = s$ утверждение очевидно. Пусть $k > s$. Так как $|\varphi(x)| \le 1$, то применяя формулу конечных разностей, получим для всех $j = 1, ..., l_1$, $i = 1, ..., n$, $t \in \mathbb{R}^1$

$$\left|\Delta_i^j(t)\varphi^{k-s}[x + (R-j)te^j]\right| \le t^j |D_i^j \varphi^{k-s}(\xi)| \le t^j \left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|. \tag{2.6}$$

Так как $R = [l_1/r] + 1$ и $\lambda_j \ge 1$ $(i = 1, ..., n)$, то $R > s/r$ и R удовлетворяет также условию (2.3) для всех $\frac{s}{r\lambda}$, $s = 1, ..., l_1$. Тогда в определении пространств $B_2^{s/(r\lambda)}$

можно брать $m_1 = \cdots = m_r = R$ (см. [2], определение 18.1). Отсюда и из (2.2) имеем

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left\|\Delta_i^R(t)\varphi^k u\right\|^2 t^{-2s/(r\lambda_i)}\,\frac{dt}{t} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} t^{-2s/(r\lambda_i)} \left|\sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^s \cdot u)\Delta_i^j(t)\varphi^{k-s}[x+(R-j)te^j]\right|^2 dx\,\frac{dt}{t},$$

где C_R^j – биномиальные коэффициенты. Отсюда и из (2.6) имеем ($c = \max\limits_j\{C_R^j\}$)

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 \le c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^R \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} t^{-2[s/(r\lambda_i)-j]} \left|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^s u)\right|^2 dx\,\frac{dt}{t}.$$

Отсюда и из теоремы 18.2 работы [2], имея в виду то, что r и R – натуральные числа, причем $R > s/r$, а значит

$$R - j - \left(\frac{s}{r\lambda_i} - j\right) = R - \frac{s}{r\lambda_i} > 0, \quad \lambda_i \ge 1, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 0,1,\ldots,R,$$

получаем утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Существует число $c > 0$ такое, что для любого $k = 1,\ldots,l_1 - 1$ и для всех $\varphi \in \Phi$, $u \in B_{2,loc}^{l_1/(r\lambda)} \cap L_2$*

$$\left[1 - c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|\right] \cdot \left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 \le \frac{1}{2}\left[1 + c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|\right] \cdot \left\|\varphi^{k+1}u|b_2^{(k+1)/(r\lambda)}\right\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[1 + c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|\right] \cdot \left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2 + c\|u\|^2. \tag{2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\delta_i(t,x) = [\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)(x)]\left[\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^k u)(x)}\right] - [\Delta_i^R(t)(\varphi^{k+1}u)(x)]\left[\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)(x)}\right],$$

где $i = 1,\ldots,n$. Подставляя $\varphi^k u = \varphi(\varphi^{k-1}u)$ и $\varphi^{k+1}u = \varphi(\varphi^k u)$, а также учитывая то, что φ – вещественная функция, причем $|\varphi(x)| \le 1$, имеем при $i = 1,\ldots,n$

$$\delta_i(t,x) = \Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\Delta_i^j(t)\varphi[x+(R-j)te^j] -$$

$$-\sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^j(t)\varphi[x+(R-j)te^j]\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)} = \sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^j(t)\times$$

$$\times\varphi[x+(R-j)te^j]\left[\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}-\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right].$$

Используя теорему о конечных приращениях, отсюда имеем с некоторой постоянной $c_1>0$

$$|\delta_i(t,x)|\le c_1\sum_{j=1}^{R}t^j\left\|\varphi|\widetilde{\mathbb{C}^{(l)}}\right\|\cdot\times$$

$$\times\left|\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}-\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|,\quad i=1,\dots,n.$$

Из определения полунормы в b_2^μ (см. (2.2)) имеем для любого $k=1,\dots,l_1-1$

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t^{-2k/(r\lambda_i)}\left[\delta_i(t,x)+\right.$$

$$\left.+\Delta_i^R(t)(\varphi^{k+1}u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right]\,dx\,\frac{dt}{t}\le A_0(k)+c_1\left\|\varphi|\widetilde{\mathbb{C}^{(l)}}\right\|\sum_{j=1}^{R}A_j(k),\qquad(2.8)$$

где

$$A_0(k)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t^{-2k/(r\lambda_i)}\left|\Delta_i^R(t)(\varphi^{k+1}u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|\,dx\,\frac{dt}{t},$$

$$A_j(k)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t^{-2k/(r\lambda_i)+j}\left[\left|\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|\right]\,dx\,\frac{dt}{t}.$$

Оценим в отдельности члены правой части (2.8), различая случаи $k>1$ и $k=1$. В случае $k>1$ в силу неравенства Коши и неравенства $|ab|\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ имеем

$$A_0(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^{k+1}u|b_2^{(k+1)/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2\right],\qquad(2.9)$$

$$A_R(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u\right\|^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{-2k/(r\lambda_i)+2R-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\left\|\varphi^k u\right\|^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{-2(k+1)/(r\lambda_i)+2R-1}\,dt+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2\right].$$

Поскольку $k\le l_1-1$, то условие (2.4) обеспечиваст сходимость в правой части, поэтому отсюда имеем с нскоторой постоянной $c_2>0$ для всех $k=2,\dots,l_1-1$

$$A_R(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2+c_2\|u\|^2\right].\qquad(2.10)$$

Аналогично при $j=1,\dots,l_1-1$

$$A_j(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2(k+1)/(r\lambda_i)+2j}|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}\Bigg].$$

Отсюда и из теоремы вложения для пространств Бесова (см. [3] или [2], теорема 18.4), имеем с некоторой постоянной $c_3>0$ и для всех $j=1,\dots,l_1-1$

$$A_j(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2\right]+.$$

$$+\frac{c_3}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2k/(r\lambda_i)+2}|\Delta_i^R(t)(\varphi^{k-1}u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2(k+1)/(r\lambda_i)+2}|\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}+||u||^2\right]\le$$

$$\le\frac{1}{2}(1+c_3)\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2+||u||^2\right]. \tag{2.11}$$

Из неравенств (2.8) – (2.11) немедленно получаем неравенства (2.6) при $k>1$ с подходящим выбором постоянной.

При $k=1$, в силу неравенства Коши, имеем с некоторой постоянной $c_4>0$

$$A_0(1)\le\sum_{i=1}^{n}2^R\left[\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2/(r\lambda_i)}|\Delta_i^R(t)(\varphi^2 u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}\right]\cdot||u||\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left\|\varphi^2 u|b_2^{2/(r\lambda)}\right\|^2+c_4||u||^2. \tag{2.12}$$

Аналогично, с некоторыми постоянными $c_5,c_6>0$

$$A_R(1)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2+||u||^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{2(R-1)/(r\lambda_i)-1}\,dt\right]+$$

$$+c_5||u||^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{2(R-2)/(r\lambda_i)-1}\,dt\le\frac{1}{2}\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2+c_6||u||^2. \tag{2.13}$$

При $j=1,\dots,R-1$, в силу выбора числа R и теоремы вложения для пространств Бесова, имеем с некоторой постоянной $c_7>0$

$$A_j(1)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2+2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{2(j-1)/(r\lambda_i)-2}|\Delta_i^R(t)u|^2dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2/(r\lambda_i)}|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi u)|^2dx\,\frac{dt}{t}\right]\le c_7\left[\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2+||u||^2\right].$$

Отсюда и из неравенств (2.8), (2.12), (2.13) следует неравенство (2.7) при $k=1$. Лемма 2.2 доказана.

Обозначим через $\Phi(r)$ множество функций $\varphi \in \Phi$ таких, что $\varphi^{1/r} \in \Phi$. Очевидно, что $\Phi(r) = \Phi(1) = \Phi$ при $l_1 = \cdots = l_n$. Через W_2^l обозначим пространство Соболева–Слободецкого (см. [10]) с нормой

$$\|u|W_2^l\| = \sum_{|\alpha:l|\le 1} \|D^\alpha u\| \equiv \sum_{(\lambda,\alpha)\le d_0} \|D^\alpha u\|.$$

Известно (см. [2], §18.9), что

$$W^l_{2,loc} \cap L_2 = B^l_{2,loc} \cap L_2. \tag{2.14}$$

Пользуясь этим, лемму 2.2 можно перефразировать так :

Лемма 2.2'. *Существует $c > 0$ такое, что для всех $k = 1, ..., l_1 - 1$, $\varphi \in \Phi(r)$ и $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$ справедливы неравенства (2.7).*

Пусть X, Y – топологические пространства, ρ – полунорма в X

$$U(t) = \{x \in X : \ \rho(x) < t\}, \quad F \subset U(1), \quad F \cap U(t) \setminus Ker\, \rho \neq \emptyset,$$

и пусть $a_j(x, y)$ $(j = 0, 1, ..., m \ge 2)$ – неотрицательные функции, определенные на топологическом произведении $X \times Y$. Следующее предложение является непосредственным следствием леммы 1.1.

Лемма 2.3. *Пусть для некоторого $\chi > 0$ и любого $j = 1, ..., m - 1$*

$$(1 - \rho(x))a_j(x, y) \le \frac{1}{2}(1 + \rho(x))a_{j+1}(x, y) +$$

$$+\frac{1}{2}(1 + \rho(x))a_{j-1}(x, y) + \chi a_0(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y. \tag{2.15}$$

Тогда существуют $\tau \in (0, 1)$ и $\chi' > 0$ такие, что для всех $x \in F \cap U(\tau)$ и $y \in Y$

$$a_j(x, y) \le a_m(x, y) + \chi' a_0(x, y), \quad j = 1, ..., m - 1. \tag{2.16}$$

Отсюда и из лемм 2.2', 2.3 легко получить следующее предложение.

Теорема 2.1. *Существуют $\tau \in (0, 1)$ и $\chi_1(\tau)$ такие, что для любого $j = 1, ..., l_1 - 1$ и для произвольной функции $\varphi \in \Phi(\tau)$, удовлетворяющей условию $\left\|\varphi|\widetilde{C^{(l)}}\right\| \le \tau$, справедливо неравенство*

$$\left\|\varphi^{j/\tau} u|b_2^{j/(\tau\lambda)}\right\| \le \chi_1 \left[\left\|\varphi^{l_1} u|b_2^{l_1/\lambda}\right\| + \|u\|\right], \quad u \in W^l_{2,loc} \cap L_2. \tag{2.17}$$

Доказательство. Положим

$$X = \mathbf{C}_0^\infty, \quad Y = W^l_{2,loc} \cap L_2, \quad \rho(\varphi) = c \left\| \varphi | \widetilde{\mathbf{C}^{(l)}} \right\|,$$

где c – постоянная из неравенства (2.7),

$$a_0(x,y) = ||y||, \quad a_j(x,y) = \left\| x^{j/r} y | b_2^{j/(r\lambda)} \right\|, \quad j = 1, ..., l_1.$$

В силу леммы 2.2' функции a_j связаны неравенствами (2.15) при $m = l_1$. Применяя лемму 2.3, мы получим, что для некоторого $\tau \in (0,1)$ и для всех $x \in \Phi(r)$, $\rho(x) \le \tau$, $y \in Y$ функции a_j удовлетворяют неравенствам (2.16), т.е. в наших обозначениях (2.17). Теорема 2.1 доказана.

Пусть по данному вектору l числа $r, d_0, d_1, ..., d_M$ и множества $N_0, N_1, ..., N_M$ определены как и выше.

Теорема 2.2. *Пусть $\tau \in (0,1)$ и $\chi > 0$ выбраны так, что выполняются соотношения (2.17). Тогда существует число $\chi_1(\tau, \chi) > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in \Phi(r)$, $\left\| \varphi | \widetilde{\mathbf{C}^{(l)}} \right\| \le \tau$ и для всех $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$*

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_j} u) \right\| \le \chi_1 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_0} u) \right\| + ||u|| \right]. \qquad (2.18)$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in \mathbf{C}_0^\infty$. Пользуясь преобразованием Фурье и равенством Парсеваля, имеем с некоторыми постоянными $c_i'' \ge c_i' > 0$

$$\sum_{(\lambda,\alpha)=d_i} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_i} u) \right\| = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_i} \left\| F(\varphi^{d_i} u) \xi^\alpha \right\| \le c_i' \left\| |\xi|\lambda|^{d_i} F(\varphi^{d_i} u) \right\| \le c_i'' \left\| \varphi^{d_i} u | B_2^{d_i/\lambda} \right\|,$$

где $i = 1, ..., l_1 - 1$ и

$$|\xi|\lambda| = \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{2/\lambda_i} \right]^{1/2}.$$

Так как для каждого $i \in (1, l_1 - 1)$, очевидно, существует такой номер $j(i)$, что $d_i = j/r$, то применяя неравенства (2.17) для таких j, получим

$$\sum_{(\lambda,\alpha)=d_i} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_i} u) \right\| \le c_i'' \chi \left\| \varphi^{d_0} u | B_2^{d_0/\lambda} \right\|.$$

Но в силу (2.14) с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\left\| \varphi^{d_0} u | B_2^{d_0/\lambda} \right\| \le c_1 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_0} u) \right\| + ||u|| \right].$$

Из последних двух соотношений немедленно следует (2.18) для функций $u \in \mathbf{C}_0^\infty$. Неравенство (2.18) для произвольных $u \in W_{2,loc}^l \cap L_2$ следует из уже доказанной части и из плотности бесконечно дифференцируемых финитных функций в $W_{2,loc}^l \cap L_2$ (см., например, [11]).

Теорема 2.3. *Пусть числа τ и χ выбраны так, что выполняется неравенство (2.17). Тогда существует постоянная $c(\tau,\chi) > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi(\tau)$, $\rho(\varphi) \equiv \left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\| \le \tau$ и для всех $u \in W_{2,loc}^l \cap L_2$*

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\|\varphi^{d_j} D^\alpha u\right\| \le c \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|\varphi^{d_0} D^\alpha u\right\| + \|u\| \right], \tag{2.19}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\|D^\alpha(\varphi^{d_j} u)\right\| \le c \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|\varphi^{d_0} D^\alpha u\right\| + \|u\| \right], \tag{2.20}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\|\varphi^{d_j} D^\alpha u\right\| \le c \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|D^\alpha(\varphi^{d_0} u)\right\| + \|u\| \right]. \tag{2.21}$$

Доказательство. Положим

$$X = \mathbf{C}_0^\infty, \quad Y = W_{2,loc}^l \cap L_2, \quad F = \{\varphi \in \Phi(\tau) : \rho(\varphi) \le \tau\},$$

$$a_k(x,y) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k}} \left\|D^\alpha(x^{d_{M-k}} y)\right\|, \quad b_k(x,y) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k}} \left\|x^{d_{M-k}} D^\alpha y\right\|.$$

Сначала покажем, что для каждой фиксированной пары (x,y), $x \in F \subset X$, $y \in Y$ числа $a_k(x,y)$, $b_k(x,y)$ $(k = 0,1,...,M)$ удовлетворяют соотношениям (1.5) – (1.7) с одинаковыми параметрами τ и χ, причем число τ выбрано так, что удовлетворяются неравенства (2.17). Неравенства (1.5) для так определенных чисел a_k следуют из неравенства (2.18). Для доказательства неравенств (1.6) при $\varepsilon = \rho(x) \le \tau$ заметим, что

$$x^{d_{M-k}} D^\alpha y = D^\alpha(x^{d_{M-k}} y) - \sum_{\nu<\alpha} b_{\alpha,\nu} D^{\alpha-\nu}(x^{d_{M-k}}) D^\alpha y,$$

где $b_{\alpha,\nu}$ – числа, возникающие при применении формулы Лейбница. Так как $\rho(x) \le \tau < 1$, то простые выкладки показывают, что

$$\left|D^{\alpha-\nu}(x^{d_{M-k}})\right| \le C_1 \rho(x) \left|x^{d_{M-k}-|\alpha-\nu|}\right|$$

для некоторого $C_1 = C_1(\alpha, \nu, d_{M-k}) > 0$. Имея еще ввиду то, что $(\lambda, \alpha) = d_{M-k}$, $\nu < \alpha$ и $\lambda_i \geq 1$ $(i = 1, ..., n)$, получаем

$$d_{M-k} - |\alpha - \nu| > d_{M-k} - (\lambda, \alpha - \nu) \geq (\lambda, \nu).$$

Но при $\nu < \alpha$ для некоторого i, $1 \leq i \leq k-1$, $(\lambda, \nu) = d_{M-k+i}$ и, поэтому, с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\left| \sum_{\nu < \alpha} b_{\alpha,\nu} D^{\alpha-\nu}(x^{d_{M-k}}) D^\nu y \right| \leq C_2 \rho(x) \sum_{i=1}^{k} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k+i}} \left| x^{d_{M-k+i}} D^\alpha y \right|.$$

Тогда имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$b_k(y, x) \leq C_3 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k}} \left\| D^\alpha (x^{d_{M-k}} y) \right\| + \rho(x) \sum_{i=1}^{k} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k+i}} \left\| x^{d_{M-k+i}} D^\alpha y \right\| + \right.$$

$$\left. + \|y\| \right] = C_3 \left[a_k(x, y) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k-1} b_{k-i}(x, y) + a_0(x, y) \right], \quad k = 0, 1, ..., M,$$

что доказывает неравенства (1.6). Неравенства (1.7) доказываются буквальным повторением приводимых рассуждений, потому мы их не будем приводить. Итак, неравенства (1.5) – (1.7) доказаны с не зависящими от (x, y) парамстрами τ и $\chi = C_3$. Применив лемму 1.3, получим соотношения (1.8) – (1.10). Из неравенств (1.9) непосредственно следует неравенство (2.20), а из (1.10) – неравенство (2.21). Неравенство (2.19) получится, очевидно, применением неравенств (2.2) и (2.20). Теорема 2.3 доказана.

Замечание. Так как при замене $\varphi(x)$ на $\varphi_\varepsilon \equiv \varphi(\varepsilon^\lambda x)$ $(0 < \varepsilon < 1)$ имеем $\rho(\varphi_\varepsilon) \leq \rho(\varphi) \leq \tau$, то неравенства (2.17) – (2.21) остаются в силе с теми же постоянными при замене φ на φ_ε.

Это замечнаие позволяет получить ε-оценки для произвольных функций изучаемых классов.

Теорема 2.4. *Пусть*

$$\alpha, \nu \in \mathcal{N}_0^n, \quad (\lambda, \nu) \leq d_0, \quad \nu < \alpha, \quad \varphi \in \Phi(r), \quad \rho(\varphi) \leq \tau.$$

Тогда существует постоянная $c(\alpha, \nu, \lambda) > 0$ *такая, что для всех* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$

$$\left\| D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon^{d_0}) D^\nu u \right\|^2 \leq c\varepsilon^2 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\| \varphi_\varepsilon^{d_0} D^\alpha u \right\|^2 + \|u\|^2 \right]. \qquad (2.22)$$

Доказательство. Так как, очевидно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon(x))| \le c_1 \left\|\varphi|\widetilde{C^{(l)}}\right\| \varepsilon^{(\lambda,\alpha-\nu)} \left|\varphi_\varepsilon^{d_0-(\alpha-\nu)}(x)\right|,$$

то

$$\left\|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon^{d_0})D^\alpha u\right\|^2 \le c_1^2\varepsilon^{2(\lambda,\alpha-\nu)} \left\|\varphi_\varepsilon^{d_0-|\alpha-\nu|}D^\nu u\right\|.$$

Но поскольку $(\lambda,\alpha) = d_0$, $\nu < \alpha$ и $\lambda_i \ge 1$ $(i = 1,\dots,n)$, то

$$d_0 - |\alpha-\nu| \ge d_0 - (\lambda,\alpha-\nu) = [d_0-(\lambda,\alpha)] + (\lambda,\alpha) \ge (\lambda,\nu).$$

Поэтому

$$\left\|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon^{d_0})D^\nu u\right\|^2 \le c_1^2\varepsilon^{2(\lambda,\alpha-\nu)} \left\|\varphi|\widetilde{C^{(l)}}\right\|^2 \left\|\varphi_\varepsilon^{(\lambda,\nu)}D^\nu u\right\|^2.$$

Применяя теперь неравенства (2.19) – (2.21) с заменой φ на φ_ε (см. замечание) с учетом того, что $(\lambda,\nu) < d_0$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $(\lambda,\alpha-\nu) > |\alpha-\nu| \ge 1$, получим неравенство (2.21). Теорема 2.4 доказана.

ABSTRACT. The paper establishes some weighted bounds for derivatives of functions of many variables, for the norms of anisotropic spaces of Sobolev–Slobodetski or Nikolski–Besov type.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., Наука, 1977.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, 1975.
3. О. В. Бесов, "Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения", Труды МИАН СССР, т. 60, стр. 42 — 81, 1961.
4. Х. Трибель, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, М., Мир, 1983.
5. S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, D. Van Nostrand, NY, 1965.
6. F. Browder, "Functional analysis and partial differential equations II", Math. Ann., vol. 145, pp. 81 – 226, 1962.
7. Nguen Xuan Dung, "Essential self-adjointness and self-adjointness for generalized Schrödinger operators", Lect. Nat. Math., vol. 964, pp. 171 – 178, 1982.
8. Nguen Xuan Dung, "Essential self-adjointness and self-adjointness for even elliptic operators", Proc. Soc. Edinburgh, Sect. A, vol. 95, pp. 161 – 179, 1982.
9. H. G. Kazarian, V. N. Markarian, "Essential self-adjointness and self-adjointness for semi-elliptic operators", J. Integral Eq. Math. Phys., vol. 1, № 1, pp. 67 – 104, 1992.
10. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М., Наука, 1988.
11. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных и гипоэллиптических операторов", Труды МИАН СССР, т. 140, стр. 130 – 161, 1976.

18 февраля 1996 Ереванский государственный университет

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПО НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

М. С. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

Рассматривая неполную систему рациональных функций в пространстве H^2_+ в верхней полуплоскости, В. Х. Мусояном был предложен метод суммирования биортогонального разложения М. М. Джрбашяна. В настоящей работе этот результат устанавливается во всех пространствах H^p_+ $(1 < p < \infty)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f(z)$ – предел последовательности $\sum_{k=1}^{p_n} a_k^{(n)} e_k(z)$ при $n \to \infty$, где $\{e_k\}_1^\infty$ – система рациональных функций, не полная относительно любого из пространств Харди H^p_+ $(1 < p < \infty)$ в верхней полуплоскости. Рассматривается ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(z)$, где $a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$, и ставится задача суммирования этого ряда к функции $f(z)$. Она сводится к построению метода суммирования биортогонального разложения функции $f(z)$ по неполной системе $\{e_k\}_1^\infty$, что и предлагается в настоящей работе. Следует отметить, что в случае $p = 2$ эта задача решена в работе [1], где существенно была использована гильбертова структура пространства H^2_+. В случае $1 < p < \infty$ решение аналогичной задачи представлено в работе [2].

§1. ПОРОЖДЕННЫЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ H^p_+ $(1 < p < \infty)$

Пусть $\mathbb{R}^*$ – пространство, сопряженное к линейному нормированному пространству $\mathbb{R}$. Линейно-независимую $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ и систему функционалов $\{u_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}^*$ называют *биортогональными*, если

$$u_k(e_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$$

Известно, что для существования биортогональной системы $\{u_k\}_1^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы система $\{c_k\}_1^\infty$ была минимальной, т.е. отбрасывание хотя бы одного элемента c_k вызывает уменьшение замкнутой линейной оболочки оставшейся системы в пространстве $\mathbb{R}$.

Пусть $1 < p < \infty$ и рассмотрим пространство $\mathbb{R} = \mathbf{H}^p_+$, т.е. пространство всех функций $f(z)$, аналитических в верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p_+} = \sup_{0<y<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Известно (см., например, [5]), что функции пространства $\mathbf{H}^p_+$ почти везде на вещественной оси имеют угловые граничные значения, и класс граничных функций составляет подпространство в пространстве $\mathbf{L}^p(-\infty, +\infty)$, причем это подпространство изоморфно и изометрично пространству $\mathbf{H}^p_+$. Поэтому впредь мы не будем различать пространство предельных функций от самого пространства $\mathbf{H}^p_+$ и для обозначений норм функций из $\mathbf{L}^p(-\infty, +\infty)$ и $\mathbf{H}^p_+$ будем использовать единый символ $\|\cdot\|_p$. Нам понадобится следующая (см. [3], стр. 157 — 160)

Теорема 1 (М. Рисс). *Если $g(x) \in \mathbf{L}^p(-\infty, +\infty)$, где $1 < p < \infty$, то функция*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x - z} \, dx$$

входит в класс $\mathbf{H}^p_+$, и существует постоянная A_p, зависящая только от p такая, что $\|h\|_p \le A_p \|g\|_p$.

Как известно (см. [3], стр. 177), при $1 < p < \infty$ сопряженным пространством пространства $\mathbf{H}^p_+$ является фактор–пространство $\mathbf{L}^q / \mathbf{H}^q_+$, т.е., каждый функционал $u \in \mathbf{H}^p_+$ имеет следующее представление :

$$u(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, g_\alpha(x) \, dx,$$

где $\{g_\alpha\}$ – некоторый смежный класс в пространстве $\mathbf{L}^q / \mathbf{H}^q_+$, $q = p/(p-1)$. Применением теоремы М. Рисса нетрудно убедиться, что функционал $u \in \mathbf{H}^{p*}_+$ можно представить в более удобной для нашей цели форме

$$u(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \overline{\varphi(x)} \, dx, \qquad (1)$$

где φ – единственная функция из $\mathbf{H}^q_+$. Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ – минимальная система функций из $\mathbf{H}^p_+$ $(1 < p < \infty)$. Если для функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$ выполнены условия

$$u_k(e_m) = \delta_{km}, \quad u_k(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,dx, \quad e \in \mathbf{H}^p_+, \quad \varphi_k \in \mathbf{H}^q_+, \quad q = p/(p-1),$$

$k, m = 1, 2, ...$, то $\{e_k\}_1^\infty$ и $\{\varphi_k\}_1^\infty$ будем называть биортогональными.

С помощью (1) нетрудно убедиться, что система, биортогональная системе $\{e_k\}_1^\infty$, единственна тогда и только тогда, когда $E_p = \mathbf{H}^p_+$, где E_p – замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве $\mathbf{H}^p_+$. Следует отметить, что условие $E_p = \mathbf{H}^p_+$ эквивалентно условию полноты системы $\{e_k\}_1^\infty$ относительно пространства $\mathbf{H}^q_+$ $(q = p/(p-1))$. Поэтому

(A). если система $\{e_k\}_1^\infty$ неполна относительно любого из пространств $\mathbf{H}^p_+$, то $E_p \neq \mathbf{H}^p_+$ для всех $p \in (1, \infty)$. Верно и обратное.

Пусть система $\{e_k\}_1^\infty$ минимальна во всех пространствах $\mathbf{H}^p_+$, $1 < p < \infty$ и неполна относительно любого из них. Если вдобавок к этому $\{\varphi_k\}_1^\infty \subset E_p$ для всех $p \in (1, \infty)$, где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ – система, биортогональная к системе $\{e_k\}_1^\infty$, то назовем $\{\varphi_k\}_1^\infty$ биортогональной системой, порожденной системой $\{e_k\}_1^\infty$. Легко проверить, что порожденная биортогональная система единственна.

Если $\{\varphi_k\}_1^\infty$ – биортогональная система, порожденная системой $\{e_k\}_1^\infty$, то порожденным биортогональным разложением функции $f \in \mathbf{H}^p_+$ назовем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(f)\, c_k(z), \tag{2}$$

где

$$u_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,dx.$$

Определение. Будем говорить, что пространство $\mathbf{H}^p_+$ ортогонально проектируется на подпространство E_p, если для любой функции $f \in \mathbf{H}^p_+$ существует единственная функция $P_{E_p} f \in E_p$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x) - P_{E_p} f(x)\right] \overline{e_k(x)}\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Функцию $P_{E_p} f$ назовем ортогональной проекцией функции $f \in \mathbf{H}^p_+$ на подпространство E_p.

Ниже предлагается метод суммирования ряда (2) к $P_{E_p} f$.

§2. НЕПОЛНАЯ СИСТЕМА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В полуплоскости $G^{(+)} = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z-\overline{\lambda_k})^{s+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1, \tag{3}$$

где $\{\lambda_k\}_1^\infty$ - произвольная последовательность различных комплексных чисел из $G^{(+)}$.

Функции системы (3) входят во все пространства H_+^p $(1 < p < \infty)$. Известно (см. [4]), что для неполноты системы (3) относительно любого из пространств H_+^p $(1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m_k \frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} < \infty. \tag{4}$$

В $G^{(+)}$ рассмотрим систему функций

$$\varphi_{ks}(z) = \frac{B(z)}{s!\,2\pi} \int_{c_k} \frac{(\zeta-\lambda_k)^s}{B(\zeta)\,(\zeta-z)}\,d\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1, \tag{5}$$

где $c_k \subset G^{(+)}$ – окружность с центром в точке λ_k и не охватывающая других точек λ_i, отличных от λ_k ; $B(z)$ – произведение Бляшке в $G^{(+)}$. Мы предполагаем, что $z \notin c_k$. Заметим, что условие (4) необходимо и достаточно для существования произведения Бляшке.

Лемма. *Система (5) является биортогональной системой, порожденной системой (3), т.е.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_{lq}(x)\,\overline{\varphi_{ks}(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e_{lq}(x)}\,\varphi_{ks}(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad l = k, q = s, \\ 0 & \text{при} \quad l \neq k, \\ 0 & \text{при} \quad l = k, q \neq s. \end{cases} \tag{6}$$

Функции системы (5) принадлежат замкнутым линейным оболочкам E_p системы (3) в пространствах H_+^p, $p \in (1, \infty)$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\varphi_{ksn}(z) = \frac{B_n(z)}{s!\,2\pi} \int_{c_k} \frac{(\zeta-\lambda_k)^s}{B_n(\zeta)\,(\zeta-z)}\,d\zeta, \quad n \geq l,$$

где

$$B_n(z)=\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{z-\lambda_j}{z-\overline{\lambda_j}}\cdot\nu_j\right]^{m_j},$$

$\nu_k=\dfrac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2}$, и условимся считать, что $\nu_k=1$ при $\lambda_k=i$. Тогда имеем (см. [1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{e_{lq}(x)}\,\varphi_{ksn}(x)\,dx=\begin{cases}1 & \text{при} \quad l=k, q=s,\\ 0 & \text{при} \quad l\neq k,\\ 0 & \text{при} \quad l=k, q\neq s.\end{cases} \tag{7}$$

Для установления (6) докажем, что в (7) можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Для этого достаточно доказать, что при фиксированных k и s последовательность $\varphi_{ksn}(x)$ стремится к $\varphi_{ks}(x)$ по нормам H_+^p. Действительно

$$\begin{aligned}|\varphi_{ksn}(x)-\varphi_{ks}(x)|\le{}&|B_n(x)|\cdot\int_{c_k}\frac{|\zeta-\lambda_k|^s}{|\zeta-x|}\cdot\left|\frac{1}{B_n(\zeta)}-\frac{1}{B(\zeta)}\right|\cdot|d\zeta|+\\ &+|B_n(x)-B(x)|\int_{c_k}\frac{|\zeta-\lambda_k|^s}{|\zeta-x|}\cdot\frac{|d\zeta|}{|B(\zeta)|}.\end{aligned} \tag{8}$$

Так как $(1+|x|)|\zeta-x|^{-1}$, как функция двух переменных $x\in(-\infty,+\infty)$ и $\zeta\in c_k$ непрерывно и равномерно относительно $\zeta\in c_k$ стремится к 1 при $|x|\to\infty$, то она ограничена и, следовательно, для некоторого $M>0$ выполняется неравенство

$$|\zeta-x|^{-1}\le M\,(1+|x|)^{-1},\quad \zeta\in c_k,\quad -\infty<x<\infty, \tag{9}$$

Кроме того, функции $B_n(\zeta)$ равномерно стремятся к $B(\zeta)$ на c_k и $|B_n(x)|=1$, $n=1,2,\ldots$ почти для всех $x\in(-\infty,+\infty)$. Поэтому первый интеграл в (8) сходится к нулю по нормам H_+^p. Имеем (см. [3], стр. 147 и [5], стр. 187)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|B_n(x)-B(x)|^p\,\frac{dx}{1+x^2}\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Следовательно, для всех $f\in\mathrm{L}^1(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|B_n(x)-B(x)|^p\,|f(x)|\,dx\to 0,\quad\text{при}\quad n\to\infty. \tag{10}$$

Теперь из (9) и (10) следует, что и второе слагаемое в (8) стремится к нулю при $n\to\infty$ по нормам пространств H_+^p.

Остается доказать, что система (5) порождается системой (3). Допустим обратное : существует некоторая функция φ_{lq} системы (5), не принадлежащая

некоторому E_p $(1 < p < \infty)$. Тогда существует функционал $\Phi \in \mathrm{H}_+^{p^*}$ такой, что $\Phi(\varphi_{lq}) \neq 0$ и $\Phi | E_p = 0$. Пусть

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx, \quad \psi \in \mathrm{H}_+^q, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Из условия $\Phi|_{E_p} = 0$ вытекает, что

$$\Phi(e_{ks}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1,$$

откуда и

$$\psi^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{11}$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{B(z)\,(z - \overline{\zeta})}, \quad \zeta \in c_l$$

входит в класс H_+^1, поэтому (см. [3], стр. 151)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = 0. \tag{12}$$

С другой стороны, применяя теорему Фубини, получим

$$0 \neq \overline{\Phi(\varphi_{lq})} = \frac{1}{q!\,2\pi i} \overline{\int_{c_l} \frac{(\zeta - \lambda_l)^q}{B(\zeta)}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx,$$

что находится в противоречии с (12). Лемма доказана.

Отметим, что порожденная биортогональной системой (3) система была построена и систематически использована М. М. Джрбашяном (см. [6] — [8]), интегральное же представление (5) получено В. Х. Мусояном [1]. Основным результатом настоящей работы является слеующая

Теорема 2. *Пусть $1 < p < +\infty$ и $f \in E_p$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\overline{z} - \lambda}} \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{13}$$

где l.i.m. означает предел по норме пространства H_+^p, а

$$a_{ks}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{\varphi_{ks}(x)}\,dx, \qquad r_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \overline{\lambda_k}}\,\nu_k \right)^{m_k}.$$

Доказательство. В работе [1] установлено следующее равенство :

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{\overline{z}-\lambda}}\right\}_{\lambda=\lambda_k} = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,B_n(x)}{B(x)}\,\frac{dx}{x-z} - \frac{B_n(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{B(x)(x-z)}, \tag{14}$$

где $f \in \mathrm{H}_+^2$, $z \in G^{(+)}$. Оно верно и для любой функции $f \in \mathrm{H}_+^p$ $(1 < p < \infty)$ и, в частности, для $f \in E_p$.

Перейдем к пределу в (14) при $n \to \infty$. В силу теоремы М. Рисса и (10) получим

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{\overline{z}-\lambda}}\right\}_{\lambda=\lambda_k} = f(z) - \frac{B(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{B(x)(x-z)}. \tag{15}$$

Пусть

$$f(x) = \varlimsup_{n\to\infty} P_n(x), \quad \text{где} \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)}\,e_{ks}(x).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)\,dx}{B_n(x)(x-z)} = \sum_{k=1}^{p_n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)}\,\frac{s!}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{B_n(x)(x-\overline{\lambda_k})^{s+1}(x-z)}. \tag{16}$$

Рациональные функции

$$F_{ksn}(\omega) = \frac{1}{B_n(\omega)(\omega-\overline{\lambda_k})^{s+1}(\omega-z)}, \quad z \in G^{(+)}$$

не имеют полюсов на действительной оси, аналитичны в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ и $F_{ksn}(\omega) = O(\omega^{-s-2})$ при $|\omega| \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, \ldots, m_k - 1$. Применяя теорему о вычетах, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{ksn}(\omega)\,dx = -2\pi i \operatorname{Res}(F_{ksn}, \infty) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1.$$

Следовательно, сумма в (16) равна нулю. Еще раз учитывая (10) и применив теорему М. Рисса, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{B(x)(x-z)} = 0,$$

т.е. правая часть равенства (15) равна $f(z)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (3)

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(z)$$

сходится к функции $f(z)$ по норме пространства $\mathbf{H}_+^p$, $1 < p < \infty$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{l.i.m}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\overline{z}-\lambda}} \right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

где $a_{ks} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{ks}^{(n)}$.

Учитывая (A), ясно, что для произвольной функции $f \in \mathbf{H}_+^p$ $(1 < p < \infty)$ равенство (13), вообще говоря, не имеет место. Однако можно утверждать следующее.

Следствие 2. При $1 < p < \infty$ пространство $\mathbf{H}_+^p$ ортогонально проектируется на подпространство E_p, причем

$$P_{E_p} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{l.i.m}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\overline{z}-\lambda}} \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \quad f \in \mathbf{H}_+^p. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathbf{H}_+^p$. Так как функция

$$H(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{B(x)(x-z)}$$

входит в класс $\mathbf{H}_+^p$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \overline{e_{ks}(x)}\,dx = -H^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{18}$$

Учитывая (15) и (18), для доказательства следствия 2 достаточно убедиться, что $H_1(z) = f(z) - H(z)$ – единственная функция из E_p, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - H_1(x)] \overline{e_{ks}(x)}\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{18'}$$

Действительно, пусть $H_2 \in E_p$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - H_2(x)] \overline{e_{ks}(x)}\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{19}$$

Тогда из (18′) и (19) следуст, что

$$\int_{J_{-\infty}}^{+\infty} [H_1(x) - H_2(x)]\, \overline{e_{k,s}(x)}\, dx = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1.$$

Следовательно

$$a_{k,s}(H_1 - H_2) = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1. \tag{20}$$

Но так как $H_1 - H_2 \in E_p$, то в силу доказанной теоремы 2

$$H_1(z) - H_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{k,s}(H_1 - H_2) \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{\tau_n(\lambda)}{\overline{z} - \lambda}} \right\}_{\lambda=\lambda_k} \tag{21}$$

Теперь из (20) и (21) вытекает равенство $H_1(z) = H_2(z)$ при $z \in G^{(+)}$. Следствие 2 доказано.

ABSTRACT. For an incomplete system of rational functions in the space $\mathbf{H}^2_+$ over the upper half–plane, V. Kh. Musoyan has costructed a summation method for biorthogonal decomposition of M. M. Djrbashian. The present paper extends that result to all spaces $\mathbf{H}^p_+$, $(1 < p < \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 2, стр. 163 — 186, 1986.
2. М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогонального разложения по неполной системе рациональных функций в пространствах $\mathbf{H}^p$ $(1 < p < \infty)$", Изв. НАН Армении, Математика, т. 32, № 5, стр. 27 — 38, 1997.
3. П. Кусис, Введение в теорию пространств $\mathbf{H}^p$, М., Мир, 1984.
4. В. М. Мартиросян, "Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем, и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 13, № 5 — 6, стр. 490 — 531, 1978.
5. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
6. М. М. Джрбашян, "Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций", Мат. Сборник, т. 114 (156), № 1, стр. 3 — 84, 1981.
7. М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси", Мат. Сборник, т. 95 (137), стр. 418 — 444, 1974.
8. М. М. Джрбашян, "Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах $\mathbf{H}^p$ в полуплоскости", Изв. АН СССР, Математика, т. 42, стр. 1323 — 1384, 1978.

15 августа 1997 Ереванский государственный университет

О СПЕКТРЕ И S–МАТРИЦЕ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

П. Э. Мелик–Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

В настоящей работе мы доказываем, что точечные спектры возмущенного ($\mathcal{D}_k$) и невозмущенного ($\mathcal{D}_k^0$) операторов Дирака совпадают. Исследуются также свойства факторизации S–матрицы, записанной для пары $(\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^0)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе обобщаются исследования работ [1], [2], относящиеся к прямой задаче теории рассеяния. Для пояснения характера наших обобщений приведем необходимые обозначения и определения. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы операторы $\mathcal{J}$ и T такие, что

$$\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^2 = -I, \quad T^* = T, \quad \mathcal{J}T = -T\mathcal{J}, \tag{0.1}$$

где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда операторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J})$ являются ортогональными проекторами на собственные подпространства $\mathcal{H}_\pm = P_\pm\mathcal{H}$ оператора $\mathcal{J}$, т.е. $P_\pm P_\mp = 0$, $P_+ + P_- = I$, $iP_+ - iP_- = \mathcal{J}$. Предполагается, что $\dim\mathcal{H}_+ = \dim\mathcal{H}_-$. Обозначим через K произвольный оператор со свойствами $K^* = K$, $\mathcal{J}K = -K\mathcal{J}$. Тогда оператор $P_K = \frac{1}{2}(I + K)$ является ортогональным проектором, удовлетворяющим условию $P_K\mathcal{J} = \mathcal{J}P_K^\perp$ ($P_K\mathcal{J}P_K = 0$), следовательно, он является проектором на гипермаксимальное $(-i\mathcal{J})$–нейтральное подпространство $\mathcal{H}_K = P_K\mathcal{H}$ оператора $\mathcal{J}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(R_+, \mathcal{H})$ (R_+ – неотрицательная полуось действительной оси) рассмотрим дифференциальное выражение

$$d[f] = \mathcal{J}f'(r) - V(r)f(r) - mTf(r), \quad m > 0, \quad r \in R_+, \tag{0.2}$$

где операторнозначная функция $V(r)$ суммируема и

$$V^*(r) = V(r), \qquad \mathcal{J}V(r) = -V(r)\mathcal{J}. \tag{0.3}$$

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ минимальный симметрический оператор

$$\mathcal{D}_0 f = d[f], \qquad D_0 = D(\mathcal{D}_0) = \{f \in L_2(R_+, \mathcal{H}) | \quad d[f] \in L_2(R_+, \mathcal{H}),\ f(0) = 0\}.$$

Известно (см. [3]), что множество $\{\mathcal{D}_K\}$ всех самосопряженных расширений оператора $\mathcal{D}_0$ параметризуется множеством проекторов $\{P_K\}$ формулой

$$\mathcal{D}_k f = d[f],\ D_k = D(\mathcal{D}_k) = \{f \in L_2(R_+, \mathcal{H}) | \quad d[f] \in L_2(R_+, \mathcal{H}),\ f(0) = P_K f(0)\}.$$

Операторы, порожденные формулой (0.2), называются операторами Дирака с массой m. Если $m = 0$, то такие операторы называются каноническими и обозначаются через $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_K$. Через $\mathcal{D}_K^0$ и $\mathcal{C}_K^0$ обозначим невозмущенные операторы (случай $V(r) = 0$).

В работе [1] исследован спектр и S-матрица оператора Дирака в случае, когда $\dim \mathcal{H}_\pm = n$, матрицы $\mathcal{J}$ и T вещественны и имеют специальную структуру, а элементы вещественной матрицы-функции $V(r)$ допускают определенную оценку сверху при $r \to \infty$.

В §1 настоящей работы показано, что в интервале $(-m, m)$ спектр оператора $\mathcal{D}_K$ совпадает со спектром оператора $\mathcal{D}_K^0$, исследованным в [4], следовательно, он обусловлен лишь свойствами граничного проектора P_K.

В §2 определяется S-матрица, отвечающая паре $(\mathcal{D}_K^0, \mathcal{D}_K)$ такая, что при $m = 0$ она совпадает с S-матрицей пары $(\mathcal{C}_K^0, \mathcal{C}_K)$, исследованной в [2]. В конечномерном случае наши рассмотрения согласуются с работой [1].

Ниже мы будем пользоваться блочно-матричными представлениями операторов в разложении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, именно, вектору $h \in \mathcal{H}$ сопоставив столбец $\begin{bmatrix} h_+ \\ h_- \end{bmatrix}$, $(h_\pm = P_\pm h)$. Из формул (0.1) имеем

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} iI_+ & 0 \\ 0 & -iI_- \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 & T_+^* \\ T_+ & 0 \end{bmatrix}, P_K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ & \mathcal{K}_+^* \\ \mathcal{K}_+ & I_- \end{bmatrix}, T_+ = T|\mathcal{H}_+, \mathcal{K}_+ = \mathcal{K}|\mathcal{H}_+,$$

где $I_\pm$ – единичные операторы в $\mathcal{H}_\pm$, а $T_+^* T_+ = \mathcal{K}_+^* \mathcal{K}_+ = I_+$, $T_+ T_+^* = \mathcal{K}_+ \mathcal{K}_+^* = I_-$.

Обозначим через $\Lambda_\pm$ открытую верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости Λ, соответственно, и на плоскости Λ с разрезом по отрезку $[-m, m]$ введем в рассмотрение регулярную ветвь аналитической функции $k = \sqrt{\lambda^2 - m^2}$, для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, соответственно, имеем $k = \pm i\sqrt{m^2 - \mu^2}$, $\mu \in (-m, m)$, $\lambda = \mu + i\nu \in \Lambda$. Для этой ветви при $\lambda \in \Lambda_\pm$, соответственно, имеем $k \in \Lambda_\pm \setminus [0, \pm im]$.

Для операторов B, действующих в $\mathcal{H}$, обозначим $B^\tau = -\mathcal{J}B^*\mathcal{J}$.

§1. СПЕКТР ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ИНТЕРВАЛЕ $(-m, m)$

Рассмотрим уравнение $P_K f = \mu f$, т.е. задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}f'(r,\mu) - V(r)\,f(r,\mu) = (mT + \mu I)\,f(r,\mu), \\ &f(0,\mu) = P_K\,f(0,\mu), \quad f(r,\mu) \in L_2(R_+, \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

при $\mu \in (-m, m)$. Поскольку $(\mu I - mT)(\mu I + mT) = k^2 I$, то верхнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{k}(\mu I - mT)\mathcal{J}f'(r,\mu) - \frac{1}{k}(\mu I - mT)V(r)f(r,\mu) = kf(r,\mu). \tag{1.2}$$

Обозначим $V_\pm(r) = \frac{1}{2}\,(V(r) \pm TV(r)T)$, так что $V(r) = V_+(r) + V_-(r)$, $T\,V_\pm(r) = \pm V_\pm(r)T$. Для оператора $U(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(I + \frac{\mu - k}{m}T\right)$ имеем $U^{-1}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu + k}{k} \times \left(I - \frac{\mu - k}{m}T\right)$ и непосредственно проверяется, что

$$U(\mu)\,\frac{1}{k}(\mu I - mT)\mathcal{J}U^{-1}(\mu) = \mathcal{J},\ U(\mu)\,\frac{1}{k}(\mu I - mT)V_+(r)\,U^{-1}(\mu) = \frac{1}{k}(\mu I - mT)V_+(r),$$

$$U(\mu)\,\frac{1}{k}(\mu I - mT)V_-(r)\,U^{-1}(\mu) = V_-(r).$$

Обозначая $g(r,\mu) = U(\mu)\,f(r,\mu) \in L_2(R_+, \mathcal{H})$ и умножая уравнение (1.2) слева на $U(\mu)$, получим

$$\mathcal{J}g'(r,\mu) - V_-(r)\,g(r,\mu) - \frac{1}{k}(\mu I - mT)V_+(r)\,g(r,\mu) = kg(r,\mu),$$

$$g(0,\mu) = U(\mu)\,f(0,\mu) = U(\mu)\,P_K f(0,\mu).$$

Теперь заметим, что если $P_K T = TP_K$ (или, что то же $KT = TK$), то для каждого μ функция $g(r,\mu)$ удовлетворяет граничному условию

$$g(0,\mu) = U(\mu)P_K f(0,\mu) = P_K U(\mu)\,f(0,\mu) = P_K g(0,\mu).$$

Теорема 1.1. *Если граничный проектор P_K таков, что $KT = TK$, то интервал $(-m, m)$ является резольвентным множеством оператора $\mathcal{D}_K$.*

Доказательство. Пусть $\mu_0 \in (-m, m)$. Тогда

$$[(\mathcal{D}_K - \mu_0 I)\, f](r) = \\ = U^{-1}(\mu_0) \left[\mathcal{J} g'(r) - V_-(r)\, g(r) - \frac{1}{k_0}(\mu_0 I - mT) V_+(r) g(r) - k_0 g(r) \right], \tag{1.3}$$

где $g(r) = U(\mu_0)\, f(r)$, $g(0) = P_K g(0)$. Рассмотрим операторную задачу Коши

$$\mathcal{J}\, Z'(r) = -\frac{m}{k_0} T V_+(r) Z(r) = \frac{m}{k_0} T V_+(r) \mathcal{J}\mathcal{J} Z(r), \qquad Z(0) = I. \tag{1.4}$$

Пользуясь соотношениями (0.1) и (0.3), отсюда имеем

$$Z'(r)\mathcal{J} = \frac{m}{k_0} T V_+(r) \mathcal{J} Z(r) \mathcal{J},$$

следовательно, в силу единственности решения задачи Коши, получим $\mathcal{J} Z(r) = \\ = Z(r)\mathcal{J}$, поскольку $\mathcal{J} Z(0) = Z(0)\mathcal{J} = \mathcal{J}$. Из суммируемости функции $V_+(r)$ следует, что $Z^{\pm 1}(r)$ равномерно ограничены, следовательно, операторы $Z^{\pm 1}$, действующие по формуле $Z^{\pm 1} f = Z^{\pm 1}(r) f(r)$, ограничены в $L_2(R_+, \mathcal{H})$. Полагая $h(r) = Z^{-1}(r) g(r)$, пользуясь уравнением (1.4) и соотношением $Z^{-1}(r) \mathcal{J} Z(r) = \\ = \mathcal{J}$, выражение в квадратных скобках формулы (1.3) приведем к виду

$$Z\, [\mathcal{J} h'(r) - V_0(r) h(r) - k_0 h(r)], \qquad h(0) = g(0) = P_K h(0), \quad h(r) \in L_2(R_+, \mathcal{H}), \tag{1.5}$$

где функция $V_0(r) = Z^{-1}(r) \left(V_-(r) - \frac{\mu_0}{k_0} V_+(r) \right) Z(r)$ суммируема и удовлетворяет условию $\mathcal{J} V_0(r) = -V_0(r)\, \mathcal{J}$. Такие условия (см. [5]) достаточны для существования операторнозначного ядра $N(r, t)$ $(0 \le t \le r < \infty)$ такого, что действующий в $L_2(R_+, \mathcal{H})$ оператор

$$[(I + N) f](r) = f(r) + \int_0^r N(r, t)\, f(t)\, dt$$

обладает свойством

$$(I + N)\mathcal{J} \frac{df}{dr} = \left(\mathcal{J} \frac{d}{dr} - V_0(r) \right) (I + N) f, \qquad \mathcal{J} \frac{df}{dr} \in L_2(R_+, \mathcal{H}).$$

Оператор $I+N$ имеет обратный $I+M$ такого же вида. Полагая в формуле (1.5) $q(r)=[(I+M)h](r)$, получим

$$Z(I+N)\left[\mathcal{J}\frac{dq(r)}{dr}-k_0q(r)\right],\qquad q(0)=h(0)=P_Kq(0).$$

Следовательно, формула (1.3) запишется в виде

$$(\mathcal{D}_K-\mu_0I)\,f=W\left(C_K^0-k_0I\right)W^{-1}f,\quad \left(W^{-1}f\right)(0)=P_K(W^{-1}f)(0). \tag{1.6}$$

Здесь оператор $W=U^{-1}(\mu_0)Z(I+N)$ и обратный к нему ограничены.

Так как оператор C_K^0 самосопряжен, а параметр $k_0=\pm i\sqrt{m^2-\mu_0^2}$ – число мнимое, то формула (1.6) и доказывает теорему 1.1.

Замечание 1.1. В работе [1] для матричного оператора Дирака ($\dim\mathcal{H}_\pm=n$) подробно исследован оператор $\mathcal{D}_T$, отвечающий граничному проектору $P_T=\frac{1}{2}(I+T)$. Теорема 1.6.1 этой работы неточна, поскольку она утверждает, что в интервале $(-m,m)$ оператор $\mathcal{D}_T$ имеет конечное (не более чем n) число собственных значений. В конечномерном случае индексы дефекта оператора $\mathcal{D}_0$ равны n. и из теоремы 1.1 следует, что указанная теорема верна для оператора $\mathcal{D}_K$ такого, что $TK\neq KT$, а дополнение точечного спектра в $(-m,m)$ является резольвентным множеством.

При $TK=KT$ имеем равносильные соотношения $T_+^*K_+=K_+^*T_+$, $T_+K_+^*=K_+T_+^*$. Рассмотрим случай, когда $TK\neq KT$, т.е. как $T_+^*K_+\neq K_+^*T_+$, так и $T_+K_+^*\neq K_+T_+^*$, причем операторы каждой из этих пар являются унитарными, соответственно, в $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. Очевидно, что оператор $A_K^+=\frac{1}{2}\left(T_+^*K_++K_+^*T_+\right)$ самосопряжен.

Теорема 1.2. *Если $TK\neq KT$, то в интервале $(-m,m)$ точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{D}_K)$ оператора $\mathcal{D}_K$ совпадает с множеством $\sigma_p(-mA_K^+)\cap(-m,m)$.*

Доказательство. Если $TK\neq KT$, то формула (1.6) принимает вид

$$[(\mathcal{D}_K-\mu_0I)\,f](r)=W\left(\mathcal{J}g'(r)-k_0g(r)\right),$$

где функция $g(r)=\left(W^{-1}f\right)(r)$ такова, что $g(0)=\left(W^{-1}f\right)(0)=U(\mu_0)P_Kf_0$, $f_0=f(0)\in\mathcal{H}$.

Для операторной задачи Коши

$$\mathcal{J}\frac{d\mathcal{E}^0(r)}{dr} = k_0\mathcal{E}^0(r), \qquad \mathcal{E}^0(0) = I$$

имеем $\mathcal{E}^0(r) = e^{-ik_0r}P_+ + e^{ik_0r}P_-$, следовательно, для любого решения уравнения $\mathcal{J}g'(r) = k_0g(r)$ имеем $g(r) = \left(e^{-ik_0r}P_+ + e^{ik_0r}P_-\right)g(0)$. Таким образом, число μ_0 является собственным значением оператора $\mathcal{D}_K$ тогда и только тогда, когда найдется ненулевой вектор $f_0 \in \mathcal{H}$ такой, что

$$g(r) = \left(e^{-ik_0r}P_+ + e^{ik_0r}P_-\right)U(\mu_0)P_Kf_0 \in L_2(R_+,\mathcal{H}). \tag{1.7}$$

Для μ_0 из верхнего берега разреза имеем $k_0 = i\sqrt{m^2-\mu_0^2}$, поэтому верхнее условие будет выполняться тогда и только тогда, когда $P_+U(\mu_0)P_Kf_0 = 0$, а для μ_0 из нижнего берега разреза – когда $P_-U(\mu_0)P_Kf_0 = 0$.

Если $f_0 = \begin{bmatrix} f_0^+ \\ f_0^- \end{bmatrix}$, $f_0^\pm = P_\pm f_0$, то

$$\begin{aligned} U(\mu_0)P_Kf_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I_+ & \dfrac{\mu_0-k_0}{m}T_+^* \\ \dfrac{\mu_0-k_0}{m}T_+ & I_- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_+ & K_+^* \\ K_+ & I_- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0^+ \\ f_0^- \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left(I_+ + \dfrac{\mu_0-k_0}{m}T_+^-K_+\right)f_+ \\ \left(\dfrac{\mu_0-k_0}{m}T_+ + K_+\right)f_+ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $f_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(f_0^+ + K_+^-f_0^-\right) \in \mathcal{H}_+$. Поскольку $\frac{\mu_0-k_0}{m}\cdot\frac{\mu_0+k_0}{m} = 1$, то условие $P_+U(\mu_0)P_Kf_0 = 0$ примет вид

$$\left(I_+ + \frac{\mu_0-k_0}{m}T_+^-K_+\right)f_+ = \frac{\mu_0-k_0}{m}T_+^*K_+\left(I_+ + \frac{\mu_0+k_0}{m}K_+^*T_+\right)f_+ = 0.$$

Поскольку оператор $T_+^*K_+$ унитарен, то имеем

$$\left(\frac{\mu_0+k_0}{m}I_+ + T_+^-K_+\right)f_+ = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\mu_0-k_0}{m}I_+ + K_+^-T_+\right)f_+ = 0. \tag{1.9}$$

Складывая верхние соотношения, окончательно получим

$$\left(\mu_0I_+ + mA_K^+\right)f_+ = 0. \tag{1.10}$$

Из формулы (1.8) для условия $P_-U(\mu_0)P_Kf_0 = 0$ имеем

$$\left(\frac{\mu_0-k_0}{m}T_+ + K_+\right)f_+ = T_+\left(\frac{\mu_0-k_0}{m}I_+ + T_+^*K_+\right)f_+ = 0,$$

откуда также следует формула (1.10). Из теоремы об отображении спектра следует, что соотношения (1.9), (1.10) равносильны, поскольку операторы A_K^+, $T_+^* K_+$ и $K_+^* T_+$ являются функциями одного и того же переменного. Таким образом, условие (1.7) выполняется тогда и только тогда, когда μ_0 является собственным значением оператора $-mA_K^+$. Теорема 1.2 доказана.

Замечание 1.2. В случае $TK \neq KT$ и при условии $\dim \mathcal{H}_\pm = n$ самосопряженная матрица A_k^+ не является унитарной, следовательно множество $\sigma_p(-mA_K^+) \cap (-m, m)$ не пусто и содержит не более чем n точек. В бесконечномерном случае при этом условии точечный спектр оператора $\mathcal{D}_K$ может и отсутствовать.

Замечание 1.3. Результаты этого параграфа идентичны результатам работы [5], где рассматривается невозмущенный оператор Дирака $\mathcal{D}_K^0$.

§2. S–МАТРИЦА ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Рассмотрим уравнение (1.1) при $\mu \in R \setminus [-m, m]$. Здесь мы дополнительно будем предполагать, что перестановочная с оператором T часть $V_+(r)$ потенциала $V(r)$ такова, что

$$\int_0^\infty r \|V_+(r)\| \, dr < \infty.$$

В работе [6] доказано, что при таких условиях на потенциал для пары $(\mathcal{D}_0^{0*}, \mathcal{D}_0^*)$ существует операторнозначное ядро $N(r,t)$, $(0 \leq r \leq t < \infty)$ такое, что действующий в $L_2(R_+, \mathcal{H})$ интегральный оператор

$$[(I+N)f](r) = f(r) + \int_r^\infty N(r,t) f(t) \, dt$$

обладает свойством

$$(I+N)\mathcal{D}_0^{0*} f = \mathcal{D}_0^*(I+N)f, \qquad f \in D(\mathcal{D}_0^{0*}). \tag{2.1}$$

Оператор $I+N$ имеет обратный $I+M$ такого же вида.

Пусть $\mathcal{E}^0(r,\mu)$ – оператор Коши невозмущенного уравнения

$$\mathcal{J} \frac{d\mathcal{E}^0(r,\mu)}{dr} = (\mu I + mT)\, \mathcal{E}^0(r,\mu), \quad \mathcal{E}^0(0,\mu) = I, \quad \mu \in R \setminus [-m, m]$$

и $k = \sqrt{\mu^2 - m^2}$ – регулярная ветвь, для которой $\mu k > 0$. Вводя оператор $\mathcal{J}(\mu) = \frac{1}{k}(\mu I - mT)\, \mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2(\mu) = -I$, верхнее уравнение можем представить в

виде

$$\mathcal{J}(\mu)\frac{d\mathcal{E}^0(r,\mu)}{dr}=k\,\mathcal{E}^0(r,\mu).$$

Полагая $P_\pm(\mu)=\frac{1}{2}\left(I\mp i\mathcal{J}(\mu)\right)$, имеем $\mathcal{E}^0(r,\mu)=e^{-ikr}P_+(\mu)+e^{ikr}P_-(\mu)$. Обозначая

$$U^{\pm1}(\mu)=\sqrt{\frac{\mu+k}{2k}}\left(I\pm\frac{\mu-k}{m}T\right),$$

имеем $U(\mu)\mathcal{J}(\mu)U^{-1}(\mu)=\mathcal{J}$, следовательно, $U(\mu)\,P_\pm(\mu)\,U^{-1}(\mu)=P_\pm$.

Рассмотрим операторную функцию

$$\mathcal{E}_\infty(r,\mu)=(I+N)\mathcal{E}^0(r,\mu)=\mathcal{E}^0(r,\mu)+\int_r^\infty N(r,t)\,\mathcal{E}^0(t,\mu)\,dt. \tag{2.2}$$

Из формулы (2.1) следует, что $\mathcal{E}_\infty(r,\mu)$ является решением уравнения

$$\mathcal{J}\,\mathcal{E}'_\infty(r,\mu)-V(r)\,\mathcal{E}_\infty(r,\mu)=(\mu I+mT)\mathcal{E}_\infty(r,\mu) \tag{2.3}$$

таким, что

$$\lim_{r\to\infty}\|\mathcal{E}_\infty(r,\mu)-\mathcal{E}^0(r,\mu)\|=0. \tag{2.4}$$

Из уравнения (2.3) имеем $\left(\mathcal{E}^*_\infty(r,\mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty(r,\mu)\right)'=0$, значит, $\mathcal{E}^*_\infty(r,\mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty(r,\mu)$ – постоянный оператор. Очевидно, $\mathcal{E}^{0*}(r,\mu)\,\mathcal{J}\mathcal{E}^0(r,\mu)=\mathcal{J}$ и из формулы (2.4) следует, что $\mathcal{E}^*_\infty(r,\mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty(r,\mu)=\mathcal{J}$, т.е. функция $\mathcal{E}_\infty(r,\mu)$ является $\mathcal{J}$-унитарной и, следовательно, она обратима и $\mathcal{E}_\infty^{-1}(r,\mu)=\mathcal{E}^r(r,\mu)$. Обозначив $\mathcal{A}_0(\mu)=$ $=\mathcal{E}_\infty^{-1}(r,\mu)$ и воспользовавшись формулами $\mathcal{J}^r(\mu)=-\mathcal{J}(\mu)$, $P_\pm^r=P_\pm(\mu)$, из (2.2) получим

$$\mathcal{A}_0(\mu)=\left[I+\int_0^\infty N(0,t)\,\mathcal{E}^0(t,\mu)\,dt\right]^r=I+\int_0^\infty\left(e^{ikt}P_+(\mu)+e^{-ikt}P_-(\mu)\right)\,N(t)\,dt,$$

где $N(t)=N^r(0,t)$. Операторная функция $\mathcal{A}_0(\mu)$, очевидно, $\mathcal{J}$-унитарна.

Для операторной функции $\mathcal{E}(r,\mu)=\mathcal{E}_\infty(r,\mu)\,\mathcal{A}_0(\mu)$ имеем $\mathcal{E}(0,\mu)=I$. Следовательно, единственное решение задачи (1.1) при $\mu\in R\setminus[-m,m]$ запишется в виде

$$f(r,\mu)=\mathcal{E}(r,\mu)P_Kf_0=\mathcal{E}_\infty(r,\mu)\mathcal{A}_0(\mu)P_Kf_0,\qquad f_0\in\mathcal{H}.$$

Из условия (2.4) получим асимптотическую формулу

$$f(r,\mu)\sim f_\infty(r,\mu)\mathcal{E}^0(r,\mu)\,\mathcal{A}_0(\mu)\,P_K\,f_0,\qquad r\to\infty. \tag{2.5}$$

Функция $f_\infty(r,\mu)$, очевидно, является решением невозмущенного уравнения Дирака, удовлетворяющим граничному условию $f_\infty(0,\mu) = \mathcal{A}_0(\mu)\,P_K\,f_0$. Выясним характер такого условия. Функцию $f_\infty(r,\mu)$ представим в виде

$$f_\infty(r,\mu) = \mathcal{E}^0(r,\mu)\,U^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}(\mu)\,P_K\,f_0,$$

где функция $\mathcal{A}(\mu) = U(\mu)\,\mathcal{A}_0(\mu)$ остается $\mathcal{J}$–унитарной, поскольку для оператора $U(\mu) = U^*(\mu)$ имеем $U(\mu)\mathcal{J}\,U(\mu) = \mathcal{J}$. Из соотношений $U(\mu)\,P_\pm(\mu) = P_\pm\,U(\mu)$, $P_\pm(\mu)\,U^{-1}(\mu) = U^{-1}(\mu)\,P_\pm$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_0(r,\mu)\,U^{-1}(\mu)\cdot\left[e^{-ikr}P_+ + e^{ikr}P_-\right],\\
&\mathcal{A}(\mu) = U(\mu) + \int_0^\infty \left(e^{ikt}P_+ + e^{-ikt}P_-\right)\,U(\mu)\,N(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В представлении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ имеем

$$\mathcal{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}, \quad N(t) = \begin{bmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) \\ N_{21}(t) & N_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad P_K f_0 = \begin{bmatrix} f_+ \\ K_+ f_+ \end{bmatrix},$$

где $f_+ = P_+ f_0 + K_+^* P_- f_0$. Следовательно

$$f_\infty(r,\mu) = U^{-1}(\mu)\begin{bmatrix} e^{-ikr}\left[\mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu)K_+\right] f_+ \\ e^{ikr}\left[\mathcal{A}_{21}(\mu) + \mathcal{A}_{22}(\mu)K_+\right] f_+ \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Из $\mathcal{J}$–унитарности функции $\mathcal{A}(\mu)$ следует (см. [7]) обратимость оператора $\mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu)K_+$. Из этого также следует то, что дробно–линейное преобразование $S_K(\mu) = \left[\mathcal{A}_{21}(\mu) + \mathcal{A}_{22}(\mu)K_+\right]\left[\mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu)K_+\right]^{-1}$ частично изометрического оператора K_+ является частично изометрическим оператором, т.е. $S_K^*(\mu)S_K(\mu) = I_+$, $S_K(\mu)S_K^*(\mu) = I_-$. Обозначим $S_{K+}(\mu) = \mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu)K_+$, $S_{K-}(\mu) = \mathcal{A}_{21}(\mu) + \mathcal{A}_{22}(\mu)\,K_+$. Если $f_+(\mu) = S_{K+}(\mu)\,f_+$, то формула (2.7) примет вид

$$f_\infty(r,\mu) = U^{-1}(\mu)\begin{bmatrix} e^{-ikr}\,f_+(\mu) \\ e^{ikr}S_K(\mu)\,f_+(\mu) \end{bmatrix},$$

так что для каждого фиксированного $\mu \in R \setminus [-m,m]$ функция $f_\infty(r,\mu)$ является решением невозмущенного уравнения, удовлетворяющим самосопряженному граничному условию в нуле, отвечающему ортогональному проектору

$$P_S(\mu) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ & S_K^*(\mu) \\ S_K(\mu) & I_- \end{bmatrix}.$$

Операторная функция $S_K(\mu)$ называется S–матрицей пары $(\mathcal{D}_K^0, \mathcal{D}_K)$.

Замечание 2.1. В случае $m = 0$ имеем $k = \mu$, $U(\mu) = I$, $\mathcal{J}(\mu) = \mathcal{J}$ и функция $S_K(\mu)$ обращается в S-матрицу пары (C_K^0, C_K) канонических операторов, исследованных в работе [2], где приведено обоснование определения S-матрицы с помощью асимптотической формулы (2.5).

Другие свойства S-матрицы обусловлены свойствами ее факторизующих множителей $S_{K\pm}(\mu)$. Обозначив $N_1(t) = N_{11}(t) + N_{12}(t)K_+$, $N_2(t) = N_{21}(t) + N_{22}(t)K_+$, из формулы (2.6) имеем

$$\mathcal{A}(\mu)\begin{bmatrix} I_+ \\ K_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{K+}(\mu) \\ S_{K-}(\mu) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}}\left\{\begin{bmatrix} I_+ & \frac{\mu-k}{m}T_+^* \\ \frac{\mu-k}{m}T_+ & I_- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_+ \\ K_+ \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{ikt}I_+ & e^{ikt}\frac{\mu-k}{m}T_+^* \\ e^{-ikt}\frac{\mu-k}{m}T_+ & e^{-ikt}I_- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} dt \right\},$$

так что

$$S_{K+}(\mu) = P_+\mathcal{A}(\mu)P_K P_+ = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}}\times$$
$$\left[I_+ + \int_0^\infty e^{ikt}N_1(t)\,dt + \frac{\mu-k}{m}T_+^* K_+\left(I_+ + \int_0^\infty e^{ikt}K_+^* N_2(t)\,dt\right)\right], \tag{2.8$_+$}$$

$$S_{K-}(\mu) = P_-\mathcal{A}(\mu)P_K P_+ = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}}\,K_+\times$$
$$\left[\frac{\mu-k}{m}K_+^* T_+\left(I_+ + \int_0^\infty e^{-ikt}N_1(t)\,dt\right) + I_+ + \int_0^\infty e^{-ikt}K_+^* N_2(t)\,dt\right]. \tag{2.8$_-$}$$

При $\mu \to \infty$ имеем $S_{K+}(\mu) \to I_+$ и $S_{K-}(\mu) \to K_+$. Из формулы (2.1) следует, что функции $\mathcal{E}_\infty(r,\lambda)P_\pm(\lambda) = (I+N)\left(e^{\mp ikr}P_\pm(\lambda)\right)$ являются решениями уравнения (2.3) при $\lambda \in \Lambda_\mp$. Поскольку для любого $\lambda \in \Lambda$ имеем $P_\pm^r(\overline{\lambda}) = P_\pm(\lambda)$, то справедлива формула

$$P_\pm(\lambda)\mathcal{E}_\infty^r(r,\overline{\lambda}) = e^{\pm ikr}P_\pm(\lambda) + \int_r^\infty e^{\pm ikt}P_\pm(\lambda)\,N^r(r,t)\,dt, \quad \lambda \in \Lambda_\pm. \tag{2.9}$$

Положим

$$P_\pm(\lambda)\mathcal{A}_0(\lambda) = P_\pm(\lambda)\mathcal{E}_\infty^r(0,\overline{\lambda}) = P_\pm(\lambda) + \int_0^\infty e^{\pm ikt}P_\pm(\lambda)\,N(t)\,dt, \quad \lambda \in \Lambda_\pm.$$

Операторные функции

$$U(\lambda)\,P_\pm(\lambda)\mathcal{A}_0(\lambda) = P_\pm\left(U(\lambda) + \int_0^\infty e^{\pm ikt}U(\lambda)\,N(t)\,dt\right) = P_\pm\mathcal{A}_\pm(\lambda)$$

аналитичны, соответственно, в $\Lambda_\pm$, и функции $S_{K\pm}(\lambda) = P_\pm \mathcal{A}_\pm(\lambda)\, P_K P_+$ определяются формулами $(2.8_\pm)$ с заменой вещественного параметра μ на комплексный параметр $\lambda \in \Lambda_\pm$, следовательно, функции $S_{K\pm}(\lambda)$ являются аналитическими продолжениями функций $S_{K\pm}(\mu)$.

Теорема 2.1. *В случае* $\dim \mathcal{H}_\pm = n$ *матрицы–функции* $S_{K\pm}(\lambda)$ *обратимы, соответственно, в* $\Lambda_\pm$.

Доказательство. Для произвольного $\lambda_0 \in \Lambda_+$ имеем

$$S_{K+}(\lambda_0) = U(\lambda_0)\, P_+(\lambda_0)\, \mathcal{A}_0(\lambda_0) P_K P_+ = U(\lambda_0)\, P_+(\lambda_0)\, \mathcal{E}_\infty^r(0, \overline{\lambda}_0) P_K P_+.$$

Поскольку матрица $U(\lambda_0)$ обратима и $P_K x_+ \neq 0$ для любого $x_+ \in \mathcal{H}_+$, достаточно рассмотреть матрицу $P_+(\lambda_0)\, \mathcal{E}_\infty^r(0, \overline{\lambda}_0) P_K$, которая отображает $\mathcal{H}_K$ на n–мерное подпространство $P_+(\lambda_0)\mathcal{H} = \left\{ x_+ - \dfrac{\lambda_0 - k_0}{m} T_+ x_+ \,|\, x_+ \in \mathcal{H}_+ \right\}$. Сопряженной к ней будет матрица

$$P_K \left[P_+(\lambda_0)\, \mathcal{E}_\infty^r(0, \overline{\lambda}_0) \right]^* = P_K \left[P_+^*(\lambda_0) + \int_0^\infty e^{-i\overline{k}_0 t} \left(-\mathcal{J} N(0,t)\, \mathcal{J} \right) P_+^*(\lambda_0)\, dt \right] =$$

$$= P_K(-\mathcal{J}) \left[P_+(\overline{\lambda}_0)\mathcal{J} + \int_0^\infty e^{-i\overline{k}_0 t} N(0,t)\, P_+(\overline{\lambda}_0)\, \mathcal{J}\, dt \right] = \qquad (2.10)$$

$$= -\mathcal{J} P_K^\perp \left[P_+(\overline{\lambda}_0)\mathcal{J} + \int_0^\infty e^{-i\overline{k}_0 t} N(0,t)\, P_+(\overline{\lambda}_0)\, \mathcal{J}\, dt \right].$$

Переходя к сопряженным матрицам в формуле (2.9), получим

$$\left[P_+(\lambda_0)\, \mathcal{E}_\infty(0, \overline{\lambda}_0) \right]^* = -\mathcal{J} \left[e^{-i\overline{k}_0 t}\, P_+(\overline{\lambda}_0)\, \mathcal{J} + \int_r^\infty N(r,t)\, e^{-i\overline{k}_0 t}\, P_+(\overline{\lambda}_0)\, \mathcal{J}\, dt \right].$$

Если $P_K \left[P_+(\lambda_0), \mathcal{E}_\infty^r(0, \overline{\lambda}_0) \right]^* x_+ = 0$ для ненулевого вектора $x_+ \in P_+^*(\lambda_0)\mathcal{H}$, то матрица в квадратных скобках формулы (2.10) либо аннулирует вектор x_+, либо переводит его в ненулевой вектор $y \in \mathcal{H}_K$, поскольку $P_K^\perp y = 0$. В первом случае ненулевая (в силу обратимости оператора $I + N$) векторная функция

$$f(r) = e^{-i\overline{k}_0 t}\, P_+(\overline{\lambda}_0)\, \mathcal{J} x_+ + \int_r^\infty N(r,t)\, e^{-i\overline{k}_0 t}\, P_+(\overline{\lambda}_0)\, \mathcal{J}\, x_+\, dt$$

является решением уравнения Дирака, удовлетворяющим граничному условию $f(0) = 0$, что противоречит единственности решения задачи Коши. Во втором случае функция $f(r)$ удовлетворяет самосопряженному граничному условию

$f(0) = P_K f(0)$, принадлежит $L_2(R_+, \mathcal{H})$, поскольку $\overline{k}_0 \in \Lambda_-$, и является решением уравнения Дирака с параметром $\overline{\lambda}_0 \in \Lambda_-$, что снова приводит к противоречию. Этим доказано, что матрица $S^{-}_{K+}(\lambda_0)$ обратима, следовательно, обратима и матрица $S_{K+}(\lambda_0)$. Для матрицы $S_{K-}(\lambda)$ доказательство аналогично приведенному, и теорема 2.1 доказана.

ABSTRACT. The main result of the paper is the proof that point spectra of perturbed ($\mathcal{D}_k$) and nonperturbed ($\mathcal{D}_k^0$) Dirac operators coincide. The properties of factorization of S–matrix written for the pair $(\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^0)$ are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Гасымов, "Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$", Труды ММО, т. 19, стр. 41 — 112, 1968.
2. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 11, № 4, стр. 291 — 313, 1976.
3. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, "О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами, и разложения по собственным функциям этого уравнения", ДАН СССР, т. 208, № 6, стр. 1268 — 1271, 1973.
4. П. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектров операторов Дирака", Уч. записки ЕГУ, т. 164, № 1, стр. 18 — 26, 1987.
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 12, № 1, стр. 10 — 31, 1977.
6. П. Э. Мелик-Адамян, "Об операторе преобразования для операторов Дирака", Уч. записки ЕГУ, т. 162, № 2, стр. 3 — 12, 1986.
7. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами", Матем. Исследования, т. 2, № 3, стр. 64 — 96, 1967.

25 февраля 1997

Ереванский государственный университет

ПОСТРОЕНИЕ НОВЫХ МАССИВОВ БОМЕР–ХОЛЛА И МАТРИЦ АДАМАРА

А. Г. Саруханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

Вводится понятие дополнительных параметрических блочных последовательностей, которые являются естественным обобщением как обычных, так и блочных дополнительных последовательностей. Приведены конструкции различных классов четырех параметрических и обычных дополнительных блочных последовательностей, на основе которых построены массивы Бомер–Холла и матрицы Адамара новых порядков.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования матриц Адамара первоначально были связаны с вопросами линейной алгебры (задача построения максимальных детерминантов). Далее обнаружились взаимосвязи матриц Адамара с различными комбинаторными конфигурациями такими, как блок–схемы, ортогональные конструкции, латинские квадраты, сильно регулярные графы, максимальные коды, достигающие границы Плоткина, дополнительные последовательности и т.д. Есть много примеров успешного применения матриц Адамара к задачам обработки информации [8].

Квадратная $(-1,+1)$-матрица H_m порядка m, удовлетворяющая условию

$$H_m H_m^T = H_m^T H_m = mI_m, \tag{1.1}$$

где H_m^T – транспонированная матрица H_m, I_m – единичная матрица порядка m, называется *матрицей Адамара или Сильвестра* [1], [2].

В 1893 году Адамар [3] доказал, что если $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ – действительная матрица порядка m с элементами, удовлетворяющими условиям $-1 \le a_{ij} \le +1$, то имсет место неравенство $det\ A \le \sqrt{m^m}$, а равенство имеет место тогда

и только тогда, когда $a_{ij} = \pm 1$. Такие матрицы называются "матрицами Адамара".

В 1933 году Пэли [4] доказал, что если H_m – матрица Адамара порядка m, $m > 2$, то $m \equiv 0(mod\ 4)$. Задача посторения матриц Адамара любого порядка остается открытой.

В этой работе строятся матрицы Адамара новых порядков. Приведем некоторые определения.

Определение 1.1. (см. [5] – [7]) Множество квадратных матриц $\{A_1, ..., A_k\}$ порядка m назовем *параметрическим семейством Вильямсона* и обозначим через $(k, m, B_m, n, \{s_i\})$, если выполняются следующие условия :

a) элементы матриц A_i, $i = 1, ..., k$ имеют вид x_r или $-x_r$, $r = 1, ..., n$;

b) существует $(0, -1, +1)$-матрица B_m порядка m, в каждой строке (столбце) которой ненулевой элемент встречается один раз и

$$A_i B_m A_j^T = A_j B_m A_i^T, \quad i, j = 1, ..., k;$$

c)

$$\sum_{i=1}^{k} A_i A_i^T = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2 I_m, \tag{1.2}$$

где s_i показывает число вхождений параметров x_i или $-x_i$ в каждую строку (столбец) матрицы A_r, $r = 1, ..., k$ и $s_1 + \cdots + s_n = mk$.

При $s_i = s$, $i = 1, ..., n$ параметрическое семейство Вильямсона обозначим через (k, m, B_m, n, s), а если $x_i = \pm 1$, $i = 1, ..., n$, то множество матриц назовем *семейством Вильямсона* и обозначим через (k, m, B_m).

Матрицы A_i, $i = 1, ..., k$, образующие параметрическое семейство Вильямсона назовем

(i) параметрическими матрицами Вильямсона, если $k = 4$, $B_m = I_m$;

(ii) восемью параметрическими матрицами Вильямсона, если $k = 8$, $B_m = I_m$.

Матрицы A_i, $i = 1, ..., k$, образующие семейство Вильямсона (k, m, B_m), назовем

(i) матрицами Вильямсона, если $k = 4$, $B_m = I_m$;

(ii) восемью матрицами Вильямсона, если $k = 8$, $B_m = I_m$.

Определение 1.2. (см. [2], [6]) $(0, -1, +1)$-матрицы $\{X_1, ..., X_4\}$ порядка k называются *T-матрицами*, если выполняются условия :

a) $X_i * X_j = 0$, $i \neq j$, где $*$ – произведение Адамара ;

b) $\sum_{i=1}^{4} X_i$ – $(-1, +1)$-матрица ;

c) $X_i X_j = X_j X_i$, $\quad i, j = 1, ..., 4$;

d) $X_i B_k X_j^T = X_j B_k X_i^T$, $\quad i, j = 1, ..., 4$;

e) $\sum_{i=1}^{4} X_i X_i^T = kI_k$.

Определение 1.3. (см. [2]) Параметрическая матрица $H(A_1, ..., A_4)$ порядка $4t$ называется *массивом Бомер–Холла* порядка $4t$, если выполняются следующие условия :

a) элементы матрицы H имеют вид $\pm A_i$, $i = 1, ..., 4$;

b) строки (столбцы) матрицы H формально ортогональны ;

c) $HH^T = t \sum_{i=1}^{4} A_i A_i^T \times I_{4t}$, где $\times$ – произведение Кронеккера.

Ниже приведены некоторые известные классы порядков матриц типа Вильямсона и T-матриц :

a. Существуют циклические и симметрические матрицы типа Вильямсона порядка $n \in W$, $W = \{3, 5, 7, ..., 31, 37, 43, (p+1)/2\}$, где $p \equiv 1 (mod\ 4)$ – степень простого числа [2], [8].

b. Существуют матрицы типа Вильямсона порядка

(i) $n < 100$, кроме $n = 35, 39, 47, 53, 67, 73, 89, 94$ [9] ;

(ii) 3^a, где a – положительное целое число [9] ;

(iii) $t(4t + 3)$, $t(4t - 1)$, где $t \in \{1, 3, 5, ..., 23, 25\}$ [10].

Множество порядков приведенных в (i) – (iii) обозначим W_2. Существуют T-матрицы порядка t_1, t_2 и t_3, где

$t_1 \in L_1 = \{3, 5, ..., 61, k + 1\}$ [2] ;

$t_2 \in L_2 = \{2 \cdot 11(2n - 1), 2(2n - 1)(2k + 1)\}$ [11] ;

$t_3 \in L_3 = \{3m, 7m, 13m\}$ [11], [12], $m \in L_1 \cup L_2$; $n \in \{2, 3, 4, ..., 8, 13, 15, 2^a 10^b 26^c +$

$+1\}$, $k = 2^a 10^b 26^c$, a, b, c – неотрицательные числа. Наиболее полный список матриц типа Вильямсона и T-матриц приведен в [13].

§2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГОЛЕЯ И $\delta(t,n)$–ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ – последовательность коммутативных переменных.

Определение 2.1. (см. [14], [15]) Периодической и непериодической *автокорреляционной функцией* последовательности A называются функции вида

$$P_A(j) = \sum_{i=1}^{j} a_i a_{n+i-j} + \sum_{i=1}^{n-j} a_i a_{i+j}, \quad N_A(j) = \sum_{i=1}^{n-j} a_i a_{i+j}, \quad j = 1, ..., n-1. \quad (2.1)$$

Отметим, что $P_A(j) = N_A(n-j) + N_A(j)$, и если $N_A(j) = 0$, то $P_A(j) = 0$ для $j = 1, ..., n-1$.

Определение 2.2. Пусть $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ – последовательности коммутативных переменных. Непериодическая *взаимно-корреляционная функция* последовательностей A и B определяется формулой

$$N_{A,B}(j) = \sum_{i=1}^{n-j} a_i b_{i+j}, \quad j = 1, ..., n-1. \quad (2.2)$$

Определение 2.3. $(-1,+1)$-последовательности $A_i = (a_{i,j})_{j=1}^n$, $i = 1, ..., n$ называются *дополнительными последовательностями*, если выполняются следующие условия :

$$\sum_{i=1}^{m} N_{A_i}(j) = 0, \quad j = 1, ..., n-1. \quad (2.3)$$

Две $(-1,+1)$-последовательности $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ называются *последовательностями Голея* длины n, если $N_A(j) + N_B(j) = 0$ для всех $j = 1, ..., n-1$. Последовательности Голея длины 2, 10 и 26 имеют вид

$$\begin{aligned} n = 2 \quad & ++, \quad +-; \\ n = 10 \quad & +---+-+---+, \quad +-------++-; \\ n = 26 \quad & +++--+++-+-----+-++--+----, \\ & ---+++---+-++-+-+-++--+----, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где знак - означает -1 и + означает +1.

В следующей лемме X^* означает последовательность с обратными расположениями элементов последовательности X.

Лемма 2.1. *(см. [15]) Пусть A, B и C, D – последовательности Голея длины m и n, соответственно. Тогда*

$$A \times \frac{(C+D)}{2} + B \times \frac{(C-D)}{2}, \quad A \times \frac{(C^*-D^*)}{2} - B \times \frac{(C^*+D^*)}{2}$$

также являются последовательностями Голея длины mn.

Из (2.4) и леммы 2.1 следует существование последовательности Голея длины $2^a10^b26^c$, где a, b, c – целые неотрицательные числа.

Пусть $V = \{v_i\}_{i=1}^m$ – последовательность взаимно ортогональных $(-1,+1)$-векторов. Последовательность V называется *n-символьным δ-кодом длины m* и обозначается через $\delta(n,m)$, если максимальное число взаимно ортогональных векторов в последовательности V равно n и

$$\sum_{i=1}^{m-j} V_i V_{i+j} = 0, \quad j = 1, ..., m-1.$$

Лемма 2.2. *Если существуют последовательности Голея длины m, то существует $\delta(2,m)$-последовательность.*

Доказательство. Пусть $A = (a_i)_{i=1}^m$ и $B = (b_i)_{i=1}^m$ – последовательности Голея длины m. Легко показать, что $V = \{v_i = (a_i, b_i)\}_{i=1}^m$ – $\delta(2,m)$-последовательность.

Отметим, что в [16] построены $\delta(3, 2^a10^b26^c+1)$-последовательности.

Теорема 2.1. *(см. [14]) Для существования $\delta(t,n)$-последовательности, $t \le 4$, необходимо и достаточно существование $(0,-1,+1)$-последовательностей X_1, X_2, X_3, X_4 длины n, удовлетворяющих условиям :*

$$\begin{aligned} &X_i * X_j = 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{i=1}^4 X_i - (-1,+1)\text{-последовательность}, \\ &\sum_{i=1}^4 N_{X_i}(j) = 0, \quad j = 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Замечание. Существует $\delta(3, 2^a10^b26^c+1)$-последовательность, образованная тремя 4-мерными векторами, сумма двух первых и последних координат которых равны.

§3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ БЛОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $A = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ - последовательность $(-1,+1)$-матриц порядка k. Периодической (P_A) и непериодической (N_A) автокорреляционной функцией блочной последовательности A является функция вида

$$P_A(j) = \sum_{i=1}^{j} A_i A_{n+i-j}^T + \sum_{i=1}^{n-j} A_i A_{i+j}^T, \quad N_A(j) = \sum_{i=1}^{n-j} A_i A_{i+j}^T, \quad j = 1, ..., n-1. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. [14], [15]. $A_i = \{A_{i,j}\}_{j=1}^{n}$, $i = 1, ..., m$, где $A_{i,j}$ - $(-1,+1)$-матрицы порядка k, называются m дополнительными *блочными последовательностями длины* n с блочной размерностью k, если выполняются следующие условия :

$$\begin{gathered} A_{i,j} A_{t,r}^T = A_{t,r} A_{i,j}^T, \quad i \neq t; \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} A_{i,j}^T = mnkI_k; \\ \sum_{i=1}^{m} N_{A_i}(j) = 0, \quad j = 1, ..., n-1. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Замечание. При $m = 1$ вышеуказанная последовательность называется блочной последовательностью Баркера, а при $m = 2$ - последовательностью Голея [15]. Если существуют m дополнительные последовательности длины n и матрица Адамара порядка $4k$, то существуют m дополнительные блочные последовательности длины n с блочной размерностью $4k$.

Лемма 3.1. *Если существует пара блочных последовательностей Голея длины m, n с блочной размерностью k, то существуют четыре дополнительные блочные последовательности Голея длины $m+n$ с блочной размерностью k.*

Лемма 3.2. *Если существуют матрицы Адамара порядка m и n, то существуют блочные последовательности Голея длины 3 с блочной размерностью $mn/2$.*

Доказательство. Пусть H_m и H_n - матрицы Адамара порядка m и n, соответственно. В [8] показано, что существование матриц Адамара порядка m и n влечет существование $(-1,+1)$-матриц X и Y порядка $mn/4$, удовлетворяющих условиям

$$XY^T = 0, \quad XX^T + YY^T = \frac{mn}{2} I_{mn/4}. \tag{3.3}$$

Теперь введем матрицы

$$C_1 = \begin{pmatrix} X & X \\ X & -X \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} Y & Y \\ Y & -Y \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Нетрудно показать, что H – матрица Адамара порядка $mn/2$, и последовательности (C_1, C_2, H), $(C_1, C_2, -H)$ – блочные последовательности Голея длины 3 с блочной размерностью $mn/2$. Из лемм 2.1, 3.1, 3.2 и замечания имеем

Следствие 3.1. Если существуют матрицы Адамара порядка m и n, то существуют четыре дополнительные блочные последовательности длины $2^a10^b26^c+3$ с блочной размерностью $mn/2$, где a, b, c – целые неотрицательные числа.

Теорема 3.1. *(А. Харагани [15]). Для любого положительного целого числа k существуют блочные последовательности Голея длины $2^{2k-1}+1$ и 4^k+1 с блочной размерностью 4^k.*

Теперь из леммы 3.1 и теоремы 3.1 имеем

Следствие 3.2. Для любого положительного целого числа k существуют четыре дополнительные блочные последовательности длины $2(2^{2k-1}+2^{k-2}+1)$ с блочной размерностью 4^k. Для любого положительного целого числа k и для целых неотрицательных чисел a, b и c существуют четыре дополнительные блочные последовательности длины $2^a10^b26^c + 2^{2k-1} + 1$ и $2^a10^b26^c + 4^k + 1$ с блочной размерностью 4^k.

§4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БЛОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $A_i = \{A_{i,j}\}_{j=1}^n$, $i = 1, ..., m$ – последовательность параметрических матриц порядка k, т.е. $A_{i,j}$ – параметрические матрицы порядка k, зависящие от r параметров x_i, $i = 1, ..., r$.

Определение 4.1. $\{A_1, ..., A_m\}$ называются *дополнительными параметрическими блочными последовательностями* и обозначаются через $CPB(m, n, k, r)$, если

$$A_{i,j}A_{t,p}^T = A_{t,p}A_{i,j}^T, \quad i \neq t, \quad \sum_{i=1}^{m} N_{A_i}(j) = 0, \quad j = 1, ..., n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}A_{i,j}^{T} = \frac{mnk}{r}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 I_k. \tag{4.1}$$

Замечание. Если $x_i = \pm 1$, $i = 1, ..., r$, то $CPB(m, n, k, r)$-последовательности являются дополнительными блочными последовательностями и обозначаются через $CB(m, n, k)$. $CPB(2, n, k, r)$-последовательности являются параметрическими блочными последовательностями Голея и обозначаются через $GPB(n, k, r)$. А при $x_i = \pm 1$, $i = 1, ..., r$ эти последовательности обозначим через $GB(n, k)$.

Теорема 4.1. *Если существует $\delta(t, n)$-последовательность ($t \leq 4$) и параметрическое семейство Вильямсона $(4, m, I_m, r, \{s_i\})$, то существуют $CPB(4, n, m, r)$-последовательности.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1 существуют $(0, -1, +1)$-последовательности $X_1 = (a_i)_{i=1}^n$, $X_2 = (b_i)_{i=1}^n$, $X_3 = (c_i)_{i=1}^n$, $X_4 = (d_i)_{i=1}^n$, удовлетворяющие условиям (2.6). Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 – параметрические матрицы Вильямсона порядка m, зависящие от r параметров. Рассмотрим следующие параметрические блочные последовательности :

$$\begin{aligned}
X &= \left(a_iA_1 + b_iA_2 + c_iA_3 + d_iA_4\right)_{i=1}^n = \left(X_{1,i}\right)_{i=1}^n,\\
Y &= \left(-a_iA_2 + b_iA_1 - c_iA_4 + d_iA_3\right)_{i=1}^n = \left(X_{2,i}\right)_{i=1}^n,\\
Z &= \left(-a_iA_3 + b_iA_4 + c_iA_1 - d_iA_2\right)_{i=1}^n = \left(X_{3,i}\right)_{i=1}^n,\\
W &= \left(-a_iA_4 - b_iA_3 + c_iA_2 + d_iA_1\right)_{i=1}^n = \left(X_{4,i}\right)_{i=1}^n.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Докажем, что эти последовательности являются $CPB(4, n, m, r)$-последовательностями. Так как A_i, $i = 1, ..., 4$ – параметрические матрицы Вильямсона, то первое условие (4.1) очевидно. Докажем второе условие (4.1). Имеем

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j}X_{i,j}^{T} = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2)\sum_{i=1}^{4} A_iA_i^{T}.$$

Используя условия (2.6) и (1.2), получаем

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j}X_{i,j}^{T} = n\sum_{i=1}^{r} s_i x_i^2 I_m.$$

Теперь вычислим

$$N_X(j)+N_Y(j)+N_Z(j)+N_W(j)=(a_ia_{i+j}+b_ib_{i+j}+c_ic_{i+j}+d_id_{i+j})\sum_{i=1}^{4}A_iA_i^T.$$

Далее, согласно теореме 2.1 имеем

$$N_X(j)+N_Y(j)+N_Z(j)+N_W(j)=0,\quad j=1,...,n-1.$$

Следовательно, X,Y,Z,W образуют $CPB(4,n,m,r)$-последовательность.

В [5], [6] доказано, что если существуют матрицы типа Вильямсона порядка m, то существуют также параметрические матрицы типа Вильямсона порядка $2m$, зависящие от четырех параметров. Теперь из теорем 2.1 и 4.1 получаем

Следствие 4.1. Существуют $CPB(4,n,2m,4)$-последовательности, где $n\in L_1\cup L_2\cup L_3$, $m\in W_1\cup W_2$. В частности, $n=(2^a10^b26^c+1)k$ и $m=(p+1)/2$, где $k=1,3,7,13$, $p\equiv 1(mod\ 4)$ – степень простого числа, a,b,c – целые неотрицательные числа.

Перейдем теперь к более детальному рассмотрению четырех дополнительных параметрических блочных последовательностей.

Теорема 4.2. *Если существуют $CPB(4,n,k,4)$-последовательности и матрицы типа Вильямсона порядка m, то существуют $CB(4,n,mk)$-последовательности.*

Доказательство. Пусть $X_i(a,b,c,d)$, $i=1,...,4$ – $CPB(4,n,k,4)$-последовательности, а A,B,C,D – матрицы типа Вильямсона порядка m. Можно показать, что $X_i(A,B,C,D)$, $i=1,...,4$ являются $CB(4,n,mk)$-последовательностями.

Из теоремы 4.2 и следствия 4.1 получаем

Следствие 4.2. Существуют $CB(4,n,2mr)$-последовательности, где $n\in L_1\cup L_2\cup L_3$, $r,m\in W_1\cup W_2$.

Пусть A_i, $i=1,...,n$ – параметрические матрицы порядка k, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^{n}A_iA_i^T=\frac{nk}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)I_k,\quad A_iA_j^T=0,\quad i\neq j,\quad i,j=1,...,n. \quad (4.3)$$

Теорема 4.3. *Если существует массив Бомер–Холла H порядка m и параметрические матрицы A_i, $i = 1, ..., n$ порядка m, удовлетворяющие условиям (4.3) и условиям $A_i H^T = H A_i^T$, $i = 1, ..., n$, и существует $\delta(3, k)$-последовательность, то существуют $CPB(4, n + k, m, 4)$-последовательности.*

Доказательство. Пусть существуст $\delta(3, k)$-последовательность. Нетрудно доказать, что существуют четыре дополнительные $(-1, +1)$-последовательности $A = (a_i)_{i=1}^k$, $B = (b_i)_{i=1}^k$, $C = (c_i)_{i=1}^k$, $D = (d_i)_{i=1}^k$, и что согласно замечанию в §2

$$a_i + b_i - c_i - d_i = 0, \quad i = 1, ..., k. \tag{4.4}$$

Теперь рассмотрим параметрические блочные последовательности длины $n + k$ с блочной размерностью порядка m

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{(A_i)_{i=1}^n, \quad (a_i H)_{i=1}^k\right\}, \qquad Q_2 = \left\{(A_i)_{i=1}^n, \quad (b_i H)_{i=1}^k\right\}, \\ Q_3 &= \left\{(A_i)_{i=1}^n, \quad (-c_i H)_{i=1}^k\right\}, \qquad Q_4 = \left\{(A_i)_{i=1}^n, \quad (-d_i H)_{i=1}^k\right\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где матрицы A_i, $i = 1, ..., n$ удовлетворяют условиям (4.3) и $A_i H^T = H A_i^T$ для всех $i = 1, ..., n$, а H – массив Бомер–Холла порядка m. Можно доказать, что $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in CPB(4, n + k, m, 4)$.

Лемма 4.1. *Если существует матрица Адамара порядка m и массив Бомер–Холла порядка n, то существует массив Бомер–Холла H порядка $mn/2$ и две параметрические матрицы C_1, C_2 порядка $mn/2$, удовлетворяющие следующим условиям :*

$$C_1 C_1 + C_2 C_2 = \frac{mn}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) I_{mn/2}, \quad C_1 C_2^T = 0, \quad C_i H^T = H C_i^T, \quad i = 1, 2. \tag{4.6}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.

Из теорем 4.3 и леммы 4.1 получаем

Следствие 4.3. Если существует матрица Адамара порядка m и массив Бомер–Холла порядка n, то существуют $CPB(4, 2^a 10^b 26^c + 3, mn/2, 4)$-последовательности. В частности, существуют $CPB(4, 2^a 10^b 26^c + 3, 8mnk, 4)$-последовательности, где $n, k \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m \in W_1 \cup W_2$, a, b, c – целые неотрицательные числа.

Отметим, что параметрические матрицы $H \times H$, $C_1 \times C_1$, $C_1 \times C_2$, $C_2 \times C_1$ и $C_2 \times C_2$ порядка $(mn/2)^2$, где H и C_1, C_2 имеют вид (3.4) и удовлетворяют условиям (4.6). Следовательно, из теоремы 4.3 имеем

Следствие 4.4. Если существует матрица Адамара порядка m и массив Бомер–Холла порядка n, то существуют четыре дополнительные параметрические блочные последовательности длины $2^a10^b26^c+1$ с блочной размерностью порядка $(mn/2)^d$. В частности, существуют четыре дополнительные параметрические блочные последовательности длины $2^a10^b26^c+1$ с блочной размерностью порядка $(8mnt)^d$, где $n, t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m \in W_1 \cup W_2$, a, b, c, d – целые неотрицательные числа.

§5. ПОСТРОЕНИЕ МАССИВОВ БОМЕР–ХОЛЛА И МАТРИЦ АДАМАРА

Теорема 5.1. *Если существуют $CPB(4, n, k, 4)$-последовательности, то существует массив Бомер–Холла порядка $4nk$.*

Доказательство. Пусть $A = (A_i)_{i=1}^n$, $B = (B_i)_{i=1}^n$, $C = (C_i)_{i=1}^n$ и $D = (D_i)_{i=1}^n$ – дополнительные параметрические блочные последовательности длины n с блочной размерностью порядка k. Введем следующие матрицы :

$$H_{1,1} = H_{2,2} = H_{3,3} = H_{4,4} = \sum_{i=1}^{n} A_i \times U^{i-1}, \quad H_{1,2} = -H_{2,1} = \sum_{i=1}^{n} B_i \times U^{i-1}R,$$

$$H_{1,3} = -H_{3,1} = \sum_{i=1}^{n} C_i \times U^{i-1}R, \quad H_{1,4} = -H_{4,1} = \sum_{i=1}^{n} D_i \times U^{i-1}R,$$

$$H_{3,2} = -H_{2,3} = \sum_{i=1}^{n} D_i \times U^{n-i+1}R, \quad H_{4,3} = -H_{3,4} = \sum_{i=1}^{n} B_i \times U^{n-i+1}R,$$

$$H_{2,4} = -H_{4,2} = \sum_{i=1}^{n} C_i \times U^{n-i+1}R,$$

где U – циклическая матрица порядка n с первой строкой $(0, 1, 0, ..., 0)$, а R – зеркальное отображение тождественной матрицы. Матрица $(H_{i,j})_{i,j=1}^n$ является массивом Бомер–Холла порядка $4nk$.

Из теоремы 5.1 и следствия 4.4 получаем

Следствие 5.1. Существует массив Бомер–Холла порядка $2^{3d+2}(2^a10^b26^c+2^d++1)(mnt)^d$, где $n,t\in L_1\cup L_2\cup L_3$, $m\in W_1\cup W_2$, a,b,c,d – целые неотрицательные числа.

Теорема 5.2. *Если существует массив Бомер–Холла порядка t и матрица Адамара порядка m, то существует массив Бомер–Холла порядка* $\frac{2^k+1}{2^{k-1}}(mt)^k$, $k=1,2,\cdots$.

Доказательство. Согласно лемме 4.1 существуют параметрические матрицы C_i, $i=1,...,2^k$ и массив Бомер–Холла H порядка $(mt/2)^k$, удовлетворяющие условиям (4.6). Можно показать, что последовательности $(H,C_1,...,C_{2^k})$ и $(-H,C_1,...,C_{2^k})$ образуют параметрические блочные последовательности Голея длины 2^k+1 с блочной размерностью порядка $(mt/2)^k$. Теперь нетрудно показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} X & YR \\ -YR & X \end{pmatrix}$$

является массивом Бомер–Холла порядка $\frac{2^k+1}{2^{k-1}}(mt)^k$, где X и Y – блочно-циклические матрицы с первыми строками вида $H,C_1,...,C_{2^k}$ и $-H,C_1,...,C_{2^k}$, соответственно.

Из теоремы 5.2 и следствия 5.1 получаем

Следствие 5.2. Существует массив Бомер–Холла порядка

$$2^{3k(d+1)+1}(2^k+1)(2^a10^b26^c+1)^k(2^e10^f26^g+2^h+1)^k(rnt)^{kh}m^k,$$

где $n,t\in L_1\cup L_2\cup L_3$, $m,r\in W_1\cup W_2$, а $a,b,...,g,h$ – целые неотрицательные числа, $k=1,2,\cdots$.

Следствие 5.3. Для любых натуральных чисел n и k существует массив Бомер–Холла порядка

$$2^{3k(n+1)+1}(2^k+1)(2^a10^b26^c+1)^{k(n+1)}(2^d10^e26^f+2^n+1)^kr^{kn}m^k,$$

где $m,r\in W_1\cup W_2$ и $a,b,...,e,f$ – целые неотрицательные числа.

Из следствия 5.3 следует существование массивов Бомер–Холла порядка

$$2^73n_1^2n_2^2m_1m_2,\quad 2^{10}3n_1^3n_2m_1m_2,\quad 2^{13}5n_1^4n_2^2m_1^2m_2^2,\quad 2^{13}3n_1^4n_2m_1m_2^2,$$

$$2^{16}3n_1^5n_2m_1m_2^5, \quad 2^{19}5n_1^6n_2m_1^2m_2^4, \quad 2^{19}9n_1^6n_2^3m_1^3m_2^3,$$

где $m_1, m_2 \in W_1 \cup W_2$ и

$$n_1 \in L_4 = \{3, 5, 9, 17, 21, 27, 33, 41, 53, 81, 105\},$$

$$n_2 \in L_5 = \{5, 7, ..., 13, 17, ..., 37, 41, 43, 45, 49, 53, ...$$

$$..., 61, 65, 67, 69, 73, 81, 83, 85, 89, 91, 97, 105, 107, 109, 113, 117, 121\}.$$

Из последнего следствия и теоремы Бомер–Холла [2] получаем

Следствие 5.4. Для любых натуральных чисел n и k и для всех целых неотрицательных чисел $a, b, ..., e, f$ существует матрица Адамара порядка

$$2^{3k(n+1)+1}(2^k+1)(2^a10^b26^c+1)^{k(n+1)}(2^d10^e26^f+2^n+1)^k r^{kn}m^k t,$$

где m, r, t – порядки матриц типа Вильямсона.

ABSTRACT. Baumert–Hall arrays and Hadamard matrices of new orders are constructed basing on the concept of complementary parametric block sequence. The latter generalize both usual and block complementary sequences. Some classes of four parametric and usual complementary block sequences are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Sylvester, "Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions and tessellated pavements in two or more colors with applications to Newton's rule, ornamental tile-work and the theory numbers", Phil. Mag., vol. 34, № 4, pp. 461 – 475, 1867.
2. W. D. Wallis, A. P. Street, J. S. Wallis, Combinatorics : Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices, Lecture Notes in Math., vol. 292, 1972.
3. J. Hadamard, "Resolution d'une question relative aux determinants", Bull. Scien. Math., ser. 2, № 17 (part 1), pp. 240 – 246, 1893.
4. R. E. A. Palay, "On orthogonal matrices", J. Math. and Phys., vol. 12, № 3, pp. 311 – 320, 1933.
5. S. S. Agaian, Hadamard Matrices and Their Applications, Lecture Notes in Math., vol. 168, 1985.
6. S. S. Agaian, H. G. Sarukhanyan, "Recurence formulas for the construction of Williamson type matrices", Math. Notes, vol. 30, pp. 796 –804, 1982.
7. А. Г. Саруханян, "О блоках типа Geothals–Seidel", Уч. Записки ЕГУ, № 1, стр. 12 – 19, 1979.
8. J. Seberry, M. Yamada, "Hadamard matrices, sequences and block designs", Surveys in Contemporary Design Theory (J. Dinitz, D. Stinsons eds.), Wiley-Interscience Series in Discrete Math., pp. 431 – 560, NY, 1992.

9. J. S. Wallis, "On Hadamard matrices", J. Comb. Theory ser. A, № 18, pp. 145 – 164, 1975.
10. J. S. Wallis, "Construction of Williamson type matrices", Linear and Multilinear Algebra, № 3, pp. 197 – 207, 1975.
11. А. Г. Саруханян, "О построении δ-кодов", Пробл. передачи информ., № 2, стр. 106 – 108, 1987.
12. C. M. Yang, "Lagrange identity for polynomials and δ-codes of lengths $7t$, $13t$", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 88, pp. 746 – 750, 1983.
13. B. Jenkins, Ch. Koukouvinos, J. Seberry, "Numerical results on T-sequences (odd and even), T-matrices, $OD(4t;t,t,t,t)$, Williamson matrices and Hadamard matrices constructed via $OD(4t;t.t.t.t)$", TR CS, vol. 88/26, January 25, 1989.
14. H. G. Sarukhanyan, "On the construction of generalized sequences with zero autocorrelation functions and Hadamard matrices", Proc. of Comp. Center of Armenian Academy of Sciences, vol. 12, pp. 105 – 129, 1984.
15. H. Kharaghani, "Block Golay sequences with applications", Austral J. of Combinatorics, № 6, pp. 293 – 303, 1992.
16. С. С. Агаян, А. Г. Саруханян, "Построение обобщенных δ–кодов и матриц Адамара", Пробл. передачи информ., т. 14, № 3, стр. 50 – 59, 1980.

18 апреля 1996

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН Армении
E–mail : hakop@ipia.sci.am

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

В работе рассматриваются краевые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений, возникающие при изучении полета крылатых летательных аппаратов по прямой, параллельной земной поверхности. Граничные данные задаются на границах интервала, левый конец которого фиксирован, а правый подлежит определению.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при достаточно общих предположениях задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в малой окрестности начальной точки имеет единственное решение [1] – [4]. В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений. Граничные данные задаются на границах области определения решения, причем левый конец области определения фиксирован, а правый подлежит определению.

В конце работы полученные результаты используются для исследования полета крылатых летательных аппаратов по прямой, параллельной земной поверхности, когда на летательный аппарат одновременно действуют сила тяжести, реактивная сила, сила сопротивления и подъемная сила крыльев. Вторым концом области определения решения полученной задачи является время полета летательного аппарата при заданном расходе топлива. Доказывается возможность полета крылатых аппаратов по указанной прямой и определяются основные параметры полета.

§1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В интервале $(0, t_0)$ рассмотрим следующую задачу :

$$m(t)\frac{dV}{dt} = k_1 F(t) - f_1(V), \tag{1}$$

$$-k_2\frac{dm}{dt} = F(t), \tag{2}$$

$$f_2(V) + k_3 F(t) = m(t)k_4, \tag{3}$$

$$m(0) = M_0, \quad V(0) = V_0, \tag{4}$$

$$m(t_0) = m_0, \tag{5}$$

где $f_1(V)$ и $f_2(V)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции при $V \geq 0$; k_1, k_2, k_3, k_4, m_0 и V_0 – заданные положительные постоянные, $t_0 > 0$ – искомая положительная постоянная, $m(t)$, $F(t)$ и $V(t)$ – искомые функции в интервале $(0, t_0)$, причем

$$0 < m_0 < M_0, \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(V_0) < k_4 M_0, \tag{6}$$

$$f_1'(V) > 0, \quad f_2'(V) > 0 \quad \text{при} \quad V > 0, \tag{7}$$

$$f_1(V) \to \infty, \quad f_2(V) \to \infty \quad \text{при} \quad V \to \infty.$$

В этом параграфе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача (1) – (5) имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Решение задачи (1) – (5) удовлетворяет следующим неравенствам :*

$$V(t) > 0, \quad f_2(V) \leq k_4 M_0, \quad 0 < F(t) \leq \frac{M_0 k_4}{k_3}, \quad m_0 \leq M(t) \leq M_0, \tag{8}$$

$$0 < t_0 \leq \frac{2k_2 k_3 (l_0 - 1)}{k_4} + \frac{M_0}{f_1(c_0)}[V_0 + k_1 k_2 (\lambda_0 - 1)], \tag{9}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{M_0}{m_0}, \quad c_0 > 0, f_2(c_0) = \frac{m_0 k_4}{2}.$$

Для доказательства теорем 1 и 2 установим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если $F(t)$, $V(t)$ и $m(t)$ – решение задачи (1) – (4) в интервале $0 < t < t_0$ и $m(t)$ удовлетворяет условию*

$$m_0 \le m(t) \le M_0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0, \tag{10}$$

то $F(t) > 0$, $V(t) > 0$ при $0 < t < t_0$ и t_0 удовлетворяет неравенству (9).

Доказательство. Пусть τ – наименьшее число, где $V(\tau) = 0$, $0 < \tau < t_0$. Так как $V(0) = V_0 > 0$, то $V(t) > 0$ при $0 < t < \tau$. Поэтому

$$V'(\tau) \le 0. \tag{11}$$

Подставляя $t = \tau$ в (3) и имея в виду равенство $f_1(0) = 0$ и неравенство (10), получим

$$F(\tau) \ge \frac{m_0 k_4}{k_3}. \tag{12}$$

Подставляя $t = \tau$ в (1), получим

$$m(\tau)V'(\tau) = F(\tau)k_1. \tag{13}$$

Из (10), (12) и (13) получим $V'(\tau) > 0$. Это противоречит условию (11). Это означает, что $V(t) > 0$ при $0 < t < t_0$.

Теперь докажем, что $F(t) > 0$ при $0 < t < t_0$. Из условия $f_2(V_0) < M_0 k_4$ и равенства (3) при $t = 0$ следует, что $F(0) > 0$. Пусть $F(t) = 0$ в некоторой точке $t \in (0, t_0)$. Тогда, аналогично (11) покажем, что существует точка $\tau \in (0, t_0)$, где

$$F(\tau) = 0, \quad F'(\tau) \le 0. \tag{14}$$

Подставляя в (2) $t = \tau$, получаем $m'(\tau) = 0$. Дифференцируя обе части (3) по t и подставляя $t = \tau$, получим

$$V'(\tau)f_2'(V(\tau)) + F'(\tau)k_3 = 0. \tag{15}$$

Так как $V(\tau) > 0$, то из условия (7) следует, что $f_2'(V(\tau)) > 0$. Поэтому, из (14) и (15) имеем

$$V'(\tau) \ge 0. \tag{16}$$

Подставляя $t = \tau$ в (1) и имея в виду условие $F(\tau) = 0$, получим

$$m(\tau)V'(\tau) = -f_1(V(\tau)). \tag{17}$$

Так как $f_1(0) = 0$ и $f'(V) > 0$ при $V > 0$, то $f_1(V) > 0$ при $V > 0$. Поэтому, из (17) следует, что $V'(\tau) < 0$, что противоречит условию (16). Это означает, что $F(\tau)$ не обращается в нуль в интервале $(0, t_0)$. Но так как $F(0) > 0$, то $F(t) > 0$ при $0 \le t < t_0$. Теперь докажем неравенство (9). Интегрируя (2) от 0 до $t \in (0, t_0)$, получим

$$k_2(M_0 - m(t)) = \int_0^t F(u)\,du.$$

Отсюда и из неравенства (10) имеем

$$\int_0^t F(u)\,du \le k_2(M_0 - m_0), \quad t \in (0, t_0). \tag{18}$$

Так как $F(t) > 0$, то из неравенства (18) следует, что левая часть имеет предел при $t \to t_0$. Переходя к пределу при $t \to t_0$, получим

$$\int_0^{t_0} F(t)\,dt \le k_2(M_0 - m_0). \tag{19}$$

Пусть ω и Ω – множества точек в интервале $(0, t_0)$, удовлетворяющие условиям

$$F(t) > \frac{m_0 k_4}{2k_3} \quad \text{при} \quad t \in \omega, \tag{20}$$

$$F(t) \le \frac{m_0 k_4}{2k_3} \quad \text{при} \quad t \in \Omega. \tag{21}$$

Обозначим через ω_0 и Ω_0 лебегову меру множеств ω и Ω, соответственно, $0 \le \omega_0 \le t_0$, $\Omega_0 = t_0 - \omega_0$. Ясно, что

$$\int_0^{t_0} F(t)\,dt \ge \int_\omega F(t)\,dt \ge \omega_0 \frac{m_0 k_4}{2k_3}. \tag{22}$$

Из (19) и (22) получим неравенство

$$\omega_0 \le \frac{2k_2k_3(M_0 - m_0)}{k_4 m_0}. \tag{23}$$

Из неравенств (10),(21) и равенства (3) имеем

$$f_2(V(t)) \ge \frac{m_0 k_4}{2} \quad \text{при} \quad t \in \Omega. \tag{24}$$

Разделив обе части (1) на $m(t)$, получим

$$\frac{f_1(V(\tau))}{m(t)} = \frac{k_1 F(t)}{m(t)} - V'(t).$$

Интегрируя обе части, получим

$$\int_0^t \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\, d\tau = k_1 \int_0^t \frac{F(\tau)}{m(\tau)}\, d\tau - V(t) + V(0). \tag{25}$$

Так как $V(t) > 0$ и $F(t) > 0$ при $t \in (0, t_0)$, то из (10) и (25) имеем

$$\int_0^t \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\, d\tau \le \frac{k_1}{m_0} \int_0^{t_0} F(\tau)\, d\tau + V(0).$$

Отсюда и из (19) следует

$$\int_0^t \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\, d\tau \le \frac{k_1 k_2}{m_0}(M_0 - m_0) + V(0), \quad t \in (0, t_0). \tag{26}$$

Поскольку $V(\tau) > 0$, $f_1(V(\tau)) > 0$ и $m(\tau) > 0$, то из неравенства (26) следует, что левая часть имеет предел при $t \to t_0$, и этот предел удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{t_0} \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\, d\tau \le V_0 + \frac{k_1 k_2}{m_0}(M_0 - m_0). \tag{27}$$

Пусть c_0 – положительное решение уравнения

$$f_2(c_0) = \frac{m_0 k_4}{2}. \tag{28}$$

Так как $f_1(V)$ и $f_2(V)$ – возрастающие функции, то из (24) и (28) следует, что $V(t) \ge c_0$ при $t \in \Omega$,

$$f_1(V(t)) \ge f_1(c_0) \quad \text{при} \quad t \in \Omega. \tag{29}$$

Из (10) и (29) имеем

$$\int_0^{t_0} \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\, d\tau \ge \int_\Omega \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\, d\tau \ge \frac{f_1(c_0)}{M_0}\Omega_0. \tag{30}$$

Из неравенств (27) и (30) имеем

$$\Omega_0 \le \frac{M_0}{f_1(c_0)}\left[V_0 + \frac{k_1 k_2}{m_0}(M_0 - m_0)\right]. \tag{31}$$

Из (23) и (31) получим неравенство (9). Лемма 1 доказана.

Доказательства теорем 1 и 2. Уравнение (3) можно записать в виде

$$F(t) = \frac{m(t)k_4}{k_3} - \frac{1}{k_3} f_2(V). \tag{32}$$

Подставляя $F(t)$ из (32) в (1) и (2), получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k_1 k_4}{k_3} - \frac{k_1 f_2(V)}{k_3 m(t)} - \frac{f_1(V)}{m(t)}, \tag{33}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{k_2 k_3}[m(t)k_4 - f_2(V)]. \tag{34}$$

Известно, что задача (33), (34), (4) имеет решение в некоторой достаточно малой окрестности $(0, \varepsilon)$, где функцию $F(t)$ можно найти из соотношения (32). Так как $F(t) > 0$, то из (2) следует, что $m(t)$ – убывающая функция в этой окрестности и $m_0 < m(t) < M_0$ при $t \in (0, \varepsilon)$. Пусть $(0, t_0)$ – максимальная окрестность, где существует решение задачи (1) – (4), удовлетворяющее неравенству

$$m_0 < m(t) < M_0, \quad t \in (0, t_0). \tag{35}$$

Согласно лемме 1 интервал $(0, t_0)$ ограничен. Так как $m(t)$ – убывающая функция в $(0, t_0)$ и удовлетворяет неравенству (35), то существует предел $m(t)$ при $t \to t_0$. Этот предел обозначим через $m(t_0)$. Ясно, что $m_0 \le m(t_0) < M_0$. Покажем, что $m(t_0) = m_0$.

Согласно лемме 1 $V(t) > 0$ и $F(t) > 0$ в $(0, t_0)$. Следовательно, $f_2(V)$ также положительна. Поэтому, из (3) и (35) имеем

$$f_2(V) \le M_0 k_4, \quad k_3 F(t) \le M_0 k_4.$$

Следовательно

$$0 \le V \le c_1, \quad F(t) \le \frac{M_0 k_4}{k_3}, \quad 0 \le t < t_0, \tag{36}$$

где c_1 – положительное решение уравнения $f_2(c_1) = M_0 k_4$, которое имеет решение в силу свойств (7). Из неравенств (35) и (36) следует, что левая часть (33) ограничена в интервале $(0, t_0)$. Это означает, что $V'(t)$ также ограничена в этом интервалеіs. Поэтому существует предел $V(t)$ при $t \to t_0$, который обозначим через $V(t_0)$. Следовательно, из (32) - (34) вытекает, что $F(t)$, $m(t)$ и $V(t)$ –

непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0, t_0]$. Аналогично лемме 1 мы можем показать, что $V(t_0) > 0$ и $F(t_0) > 0$. Пусть $m(t_0) \neq m_0$. Тогда $m_0 < m(t) < M_0$. Обозначим $V(t_0) = V_1$, $m(t_0) = m_1$. В интервале $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (33), (34) с граничными условиями

$$V(t_0) = V_1, \quad m(t_0) = m_1. \tag{37}$$

Как известно при достаточно малом ε эта задача имеет решение. Так как $m_0 < m(t_0) < M_0$, то за счет малости ε можно обеспечить справедливость неравенства $m_0 < m(t) < M_0$ при $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Подставляя решение задачи (33), (34), (37) в (32), получим $F(t)$. Таким образом, в интервале $(0, t_0 + \varepsilon)$ существует решение задачи (1) – (4), удовлетворяющее неравенству (35). Но это невозможно, так как $(0, t_0)$ – максимальная окрестность, где существует такое решение. Это означает, что $m(t_0) = m_0$. Теорема 1 доказана.

Поскольку $F(t) > 0$ при $0 \leq t \leq t_0$, то из (2), (4) и (5) следует, что $m(t)$ – убывающая функция и справедливы неравенства (35). Поэтому из леммы 1 следует оценка (9). Оценки (8) совпадают с оценками (36). Теорема 2 доказана.

§2. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В этом параграфе мы сведем задачу (1) – (5) со свободной границей к задаче Коши для некоторого нелинейного дифференциального уравнения в интервале $(0, M_0 - m_0)$ и докажем существование и единственность решения этой задачи.

Пусть $V(t)$, $F(t)$, $m(t)$ и t_0 – решения задачи (1) – (5). Так как $m(t)$ – непрерывно дифференцируемая убывающая функция на отрезке $[0, t_0]$, то в задаче (1) – (5) в качестве независимого переменного можно брать m, а V, F и t считать функциями от m. Сделаем замену переменной

$$m = M_0 - x. \tag{38}$$

Тогда имеем

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\dfrac{dt}{dx}}, \tag{39}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dt}{dx}}. \tag{40}$$

Учитывая (38) – (40), задачу (1) – (5) запишем в виде

$$(M_0 - x)\frac{dV}{dx} = (k_1 F - f_1(V))\frac{dt}{dx}, \quad 0 < x < M_0, \tag{41}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{k_2}{F}, \quad 0 < x < M_0, \tag{42}$$

$$f_2(V) + k_3 F = (M_0 - x)k_4, \quad 0 < x < M_0, \tag{43}$$

$$t = 0, \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad V = V_0, \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{44}$$

$$t = t_0, \quad \text{при} \quad x = M_0 - m_0. \tag{45}$$

В задаче (41) – (45) искомыми являются зависящие от x функции V, F и t, а t_0 – значение t при $x = M_0 - m_0$. Из (43) имеем

$$F = \frac{1}{k_3}[(M_0 - x)k_4 - f_2(V)], \quad 0 < x < M_0 - m_0. \tag{46}$$

Подставляя F из (46) в (42), получим

$$\frac{dt}{dx} = \frac{k_2 k_3}{(M_0 - x)k_4 - f_2(V)}, \quad 0 < x < M_0 - m_0. \tag{47}$$

Подставляя F и $\frac{dt}{dx}$ из (46) и (47) в (41), получим

$$\frac{dV}{dx} = \Phi(x, V), \quad 0 < x < M_0 - m_0, \tag{48}$$

где

$$\Phi(x, V) = \frac{1}{M_0 - x}\left[k_1 k_2 - \frac{k_2 k_3 f_1(V)}{(M_0 - x)k_4 - f_2(V)}\right].$$

Граничное условие (44) можно записать в виде

$$V(0) = V_0. \tag{49}$$

Отметим, что V_0 – заданное положительное число, удовлетворяющее условию $f_2(V_0) < k_4 M_0$. Из (44) и (47) имеем

$$t = \Psi(x) = \int_0^x \frac{k_2 k_3 \, dx}{(M_0 - x)k_4 - f_2(V)}, \quad 0 \le x \le M_0 - m_0, \tag{50}$$

где $V(x)$ – решение задачи Коши (48), (49). Подставляя в (50) $x = M_0 - m_0$, получим $t_0 = \Psi(M_0 - m_0)$. Таким образом, задачу (1) – (5) мы свели к задаче Коши (48), (49) в интервале $0 < x < M_0 - m_0$.

В §1 мы показали, что решение задачи (1) – (4) удовлетворяет условиям : $V > 0$ и $F > 0$, $m_0 \le m \le M_0$ при $0 \le t \le t_0$. Поэтому, из (46) и граничных условий (44) и (45) следует, что

$$V > 0, \quad (M_0 - x)k_4 - f_2(V) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le M_0 - m_0. \tag{51}$$

Таким образом, из эквивалентности задачи (1) – (5) и (48), (49) и теоремы 1 следует, что задача Коши (48), (49) имеет единственное решение в интервале $0 < x < M_0 - m_0$, удовлетворяющее условиям (51).

§3. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$V'(t) = F(t, V), \quad t > 0, \tag{52}$$

$$V(0) = V_0, \tag{53}$$

где V_0 – заданная положительная постоянная, $F(t, V)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция по t при $t \ge 0$, $V \ge 0$, причем

$$F(t, 0) > 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \qquad F(t, V) \le g(t) \quad \text{при} \quad t \ge 0, \ V \ge 0, \tag{54}$$

где $g(t)$ – некоторая непрерывная функция.

Теорема 3. *Задача Коши (52), (53) имеет единственное решение на полуоси* $t > 0$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому некоторые детали мы опускаем. Единственность решения задачи (52), (53) доказана в книге [1]. Также доказано существование решения этой задачи в малой окрестности точки $t = 0$. Здесь мы докажем существование решения на полуоси $t > 0$.

Пусть $V(t)$ – решение задачи (52), (53) в интервале $(0, t_0)$. Тогда $V(t) > 0$ при $0 \le t \le t_0$. Действительно, в противном случае существует точка $\tau \in (0, t_0)$, где имеют место условия (см. условия (14))

$$V(\tau) = 0, \quad V'(\tau) \le 0. \tag{55}$$

Подставляя в (52) $t = \tau$, получаем $V'(\tau) = F(\tau, 0) > 0$, что противоречит условию (55).

Пусть $(0, t_0)$ – максимальный интервал, где задача (52), (53) имеет решение. Докажем, что $t_0 = \infty$. Так как в окрестности точки 0 существует решение задачи (52), (53), то $t_0 > 0$. Как показано выше, $V(t) > 0$ при $0 \le t < t_0$. Интегрируя обе части (52) по t, получим

$$V(t) = V_0 + \int_0^t F(\tau, V)\, d\tau, \quad t \in (0, t_0).$$

Отсюда и из неравенства (54) имеем

$$0 < V(t) \le V_0 + \int_0^{t_0} g(\tau)\, d\tau, \quad t \in (0, t_0).$$

Последнее неравенство указывает на то, что левая часть (52) ограничена в интервале $(0, t_0)$. Далее доказательство существования решения совпадает с доказательством теоремы 1. Теорема 3 доказана.

§4. ДВИЖЕНИЕ КРЫЛАТЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим движение летательного аппарата параллельно земной поверхности. Мы будем предполагать, что движение летательного аппарата управляется при помощи реактивной силы. Мы также будем применять полученные результаты для определения реактивной силы, дальности полета, времени полета, скорости летательного аппарата и т.д. Исследование этих вопросов, как правило, приводит к обратным задачам динамики, одной из которых является задача Ньютона об определении силы, под действием которой планеты движутся вокруг Солнца [6]. Задача Ньютона вызвала в дальнейшем постановку задачи Бертрана об определении силы, под действием которой материальная точка движется по

конечному сечению [7]. Следующими фундаментальными задачами в этом направлении являются задачи Суслова [8], Мещерского [9], Чаплыгина–Горячева [10], [11], Пуанкаре–Картана [12] и других.

Общие подходы к решению таких задач приведены в монографии [5]. Однако в любом конкретном случае необходимо провести дополнительные исследования для доказательства возможности движения летательного аппарата по заданной траектории и определения основных параметров полета. Здесь мы исследуем возможности полета крылатых летательных аппаратов по прямой, когда на них одновременно действуют сила тяжести $m(t)\bar{g}$, реактивная сила $\bar{F}_R$, сила сопротивления воздуха $\bar{F}_c$ и подъемная сила крыльев F_l, где $m(t)$ – масса аппарата в данный момент t, а $g = 9.8\frac{m}{\text{сек}^2}$ – ускорение силы тяжести.

Пусть XOY – плоскость, где положительное направление оси x совпадает с направлением движения летательного аппарата, а положительное направление оси y направлено вверх от земной поверхности. Летательный аппарат движется от точки $x = 0$. Пусть направление силы сопротивления противоположно направлению движения летательного аппарата, подъемная сила сонаправлена с положительным направлением оси y, реактивная сила находится в плоскости XOY и составляет с положительным направлением оси x угол $\alpha \in (0, \pi/2)$, а вектор $\bar{g}$ направлен вертикально вниз к земной поверхности. Как известно, величина реактивной силы определяется формулой (см. [9])

$$F_R = -k\frac{dm(t)}{dt}, \tag{56}$$

где $\frac{dm}{dt}$ – скорость уменьшения массы летательного аппарата во времени из-за расхода топлива, k – скорость истечения продуктов горения топлива относительно аппарата. Сила сопротивления и подъемная сила – непрерывно дифференцируемые возрастающие функции от скорости V

$$F_c = f_1(V), \quad F_l = f_2(V), \tag{57}$$

удовлетворяющие условиям

$$f_1(0) = f_2(0) = 0, \quad f_1'(V) > 0, \quad f_2'(V) > 0, \quad \text{при} \quad V > 0,$$

$$f_1(V) \to \infty, \quad f_2(V) \to \infty \quad \text{при} \quad V \to \infty.$$

Движение летательного аппарата с переменной массой описывается известным уравнением Мещерского ([9])

$$m(t)\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m(t)\vec{g} + \vec{F}_R + \vec{F}_c + \vec{F}_l, \tag{58}$$

где $\vec{r} = \vec{Ox}$ – радиус-вектор центра инерции аппарата. Так как летательный аппарат движется по оси x, то проекция силы $m(t)\vec{g}+\vec{F}_R+\vec{F}_c+\vec{F}_l$ на ось y равна нулю, т.е.

$$-m(t)g + F_R \sin\alpha + F_l = 0. \tag{59}$$

Учитывая (59), уравнение (58) запишем в виде

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} = F_R \cos\alpha - F_l. \tag{60}$$

Известно, что $\dfrac{dx}{dt} = V$ – скорость аппарата. Учитывая формулу (57), уравнения (59) и (60) запишем в виде

$$F_R \sin\alpha + f_2(V) = m(t)g, \tag{61}$$

$$m(t)\frac{dV}{dt} = F_R \cos\alpha - F_1(V). \tag{62}$$

Пусть M_0 – начальная масса летательного аппарата (с топливом), m_0 – масса аппарата в конце пути, $M_0 - m_0$ – масса топлива, V_0 – начальная скорость аппарата. Мы будем считать, что $F_R > 0$, поэтому из (62) при $t = 0$ получим $f_2(V_0) < M_0 g$. Граничные условия движения летательного аппарата примут вид

$$x(0) = 0, \quad V(0) = V_0, \quad m(0) = M_0, \quad m(t_0) = m_0, \tag{63}$$

где t_0 – время полета аппарата при расходе топлива с массой $M_0 - m_0$. Величину t_0 также необходимо определить.

Таким образом, для определения m, F_R, V и t_0 мы получили задачу (56), (61) – (63). В §1 мы показали, что эта задача имеет единственное решение. В §§1, 2 мы указали приближенные методы решения этой задачи. Пусть $m(t)$, $F_R(t)$, $V(t)$ и t_0 – решение указанной задачи. Тогда из граничного условия $x(0) = 0$ имеем

$$x(t) = \int_0^t V(\tau)\,d\tau, \quad x_0 = \int_0^{t_0} V(\tau)\,d\tau,$$

где x_0 – дальность пути летательного аппарата при расходе топлива с массой $M_0 - m_0$.

ABSTRACT. The paper considers boundary value problems for systems of non-linear differential equations, that arise in the study of the flight of winged aircraft along a line parallel to Earth's surface. The boundary conditions are imposed on the ends of an interval, whose left endpoint is fixed, while the right endpoint is subject to calculation.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1970.
2. Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1962.
3. Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.
4. В. И. Арнольд, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
5. А. С. Галиуллин, Методы решения обратных задач динамики, М., Наука, 1986.
6. I. Newton, Mathematical Principles of Natural Philosophy and System of World, Univ. California, 1946.
7. M. J. Bertrand, "Theoreme relatif au mouvement d'un point attire vers un centre fixe", Comptes Rendus, vol. 77, 1873.
8. Г. К. Суслов, О силовой функции, допускающей данные интегралы, Киев, Наука, 1980.
9. И. В. Мещерский, Работы по механике тел переменной массы, М., Гостехиздат., 1979.
10. С. А. Чаплыгин, Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке, Сб., соч., т. 1, М., Гостехиздат., 1948.
11. Д. Н. Горячев, Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела, Варшава, 1910.
12. Н. Картан, Интегральные инварианты, 1940.
13. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобелков, Численные методы, М., Наука 1987.

21 мая 1997

Армянский государственный
инженерный университет

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ КОММУТАТОРА ОДНОГО КЛАССА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $BL(\mathrm{H})$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, дсйствующих на комплексном гильбертовом пространстве H. Если $\dim \mathrm{H} = n < \infty$, то алгебра $BL(\mathrm{H})$ совпадает (изоморфна) с алгеброй M_n всех квадратных матриц порядка n. Как показал Дж. фон Нейман в работе [1], для произвольных матриц $N, T \in M_n$ имеет место тождество

$$\|[T, N^*]\|^2 = \|[T, N]\|^2 + \mathrm{tr}([T, T^*] \cdot [N^*, N]),$$

где $[T, N] = TN - NT$. В случае если матрица N нормальна, из условия $[N, T] = 0$ следует, что $[N^*, T] = 0$. В той же работе фон Нейман ставит следующий вопрос : верно ли это утверждение для нормальных операторов в алгебре $BL(\mathrm{H})$ в случае, когда $\dim \mathrm{H} = \infty$, так как в этих случаях понятие следа может не быть.

Положительный ответ на этот вопрос дал ученик фон Неймана Фугледе, который в [2] показал, что если $[N, T] = 0$, $T, N \in BL(\mathrm{H})$ и N – нормальный оператор, то $[N, T] = 0$. Там же для неограниченного нормального оператора показано, что если $NT \supset TN$, то $N^*T \supset TN^*$. Путнам в [3] показал, что если $N_1 T \supset TN_2$, то $N_1^* T \supset TN_2^*$. Это свойство для ограниченного нормального оператора в дальнейшем было обобщено в разных направлениях в работах Р. Мура [4], Д. Роджерса [5], Т. Фуруты [6], Е. А. Горина и М. И. Караханяна [7] — [11].

В данной работе, используя методику работ [7] — [11], мы получим некоторый асимптотический вариант результата Фугледе для неограниченного нормального оператора, действующего в банаховом пространстве X.

Пусть X - банахово пространство над полем C комплексных чисел, и $BL(\mathrm{X})$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в X.

Напомним, что однопараметрическая группа $\{\mathcal{H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset BL(\mathrm{X})$ называется слабо непрерывной или C_0–группой, если

i) $t \mapsto \mathcal{H}(t)x$ непрерывна в $\sigma(\mathrm{X},\mathrm{X}^*)$–топологии при всех $x \in \mathrm{X}$, т.е. отображение $t \mapsto \varphi(\mathcal{H}(t)x)$ непрерывно при всех $x \in \mathrm{X}$ и $\varphi \in \mathrm{X}^*$;

ii) $x \mapsto \mathcal{H}(t)x$ является $\sigma(\mathrm{X},\mathrm{X}^*)$–$\sigma(\mathrm{X},\mathrm{X}^*)$ непрерывным отображением при всех t, т.е. для каждого $\varphi \in \mathrm{X}^*$ функционал $\Psi_t(\cdot) = \varphi(\mathcal{H}(t)\,\cdot) \in \mathrm{X}^*$.

Если $\{\mathcal{H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ есть слабо непрерывная группа, то существуют $M \geq 1$ и $\sigma \geq 0$ такие, что $\|\mathcal{H}(t)\| \leq M\, e^{\sigma|t|}$.

Отметим, что из теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что всякая слабо непрерывная однопараметрическая группа является сильно непрерывной, т.е. отображение $t \mapsto \mathcal{H}(t)x$ непрерывно относительно нормы X при всех $x \in \mathrm{X}$.

Напомним, что генератор слабо непрерывной группы $\mathcal{H}(t)$ в банаховом пространстве X определяется как линейный оператор H с областью определения

$$\mathcal{D}(H) = \{x \in \mathrm{X}\colon \exists y \in \mathrm{X} \text{ такой, что } \varphi(y) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi[(\mathcal{H}(t) - I)x]}{t} \text{ для } \forall \varphi \in \mathrm{X}^*\}.$$

Если $x \in \mathcal{D}(H)$, то $y = Hx$. Из групповых свойств $\mathcal{H}(t)$ имеем $\mathcal{H}(t)\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ и $H\mathcal{H}(t)x = \mathcal{H}(t)Hx$ для всех $x \in \mathcal{D}(H)$.

Если однопараметрическая группа $\{\mathcal{H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ класса C_0 сильно дифференцируема, т.е. при любом $x \in \mathrm{X}$ функция $\mathcal{H}(t)x$ сильно дифференцируема по t, то $\mathcal{H}(t)x \in \mathcal{D}(H^\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(H^n)$ и $\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{H}(t)x = H^n\mathcal{H}(t)x$. При этом множество аналитических элементов генератора H плотно лежит в пространстве X, и любой элемент в пространстве X можно аппроксимировать равномерно ограниченной сетью аналитических элементов (см. [12] и [13]).

Пусть $\{\mathcal{H}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{\mathcal{K}(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ есть однопараметрические коммутирующие группы класса C_0, которые сильно дифференцируемы и для которых генераторами являются линейные операторы iH и iK, соответственно. Тогда существуют константы $M_1, M_2 \geq 1$ и $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ такие, что $\|\mathcal{H}(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1|t|}$ и

$\|\mathcal{K}(s)\| \le M_2 e^{\sigma_2|s|}$, где $s,t \in \mathbb{R}$. Для каждого $x \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(K)$ имеют место соотношения $K\mathcal{H}(t)x = \mathcal{H}(t)Kx$, $H\mathcal{K}(s)x = \mathcal{K}(s)Hx$, где $t,s \in \mathbb{R}$. Для оператора $N = H + iK$ имеем $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*) = \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(K)$, где $N^* = H - iK$.

Линейный замкнутый оператор $N = H + iK$, где $\mathcal{D}(N)$ плотен в $\mathbf{X}$, назовем квазинормальным, если линейные операторы iH и iK есть, соответственно, генераторы сильно дифференцируемых коммутирующих однопараметрических групп $\mathcal{H}(t)$ и $\mathcal{K}(s)$ класса C_0, где $t,s \in \mathbb{R}$ и

$$\max_{|\lambda|=r} \|\mathcal{H}(2t)\mathcal{K}(-2s)\| = o(\sqrt{r}) \quad \text{при} \quad \lambda = s + it \in C, \quad \text{когда} \quad r \to \infty.$$

Ясно, что для $x \in \mathcal{D}(N)$ имеем $[H,K]x = [N,N^*]x = 0$. В случае, когда $\|\mathcal{H}(2t)\mathcal{K}(-2s)\| = 1$ для всех $s,t \in \mathbb{R}$, оператор N нормальный.

Пусть N – неограниченный квазинормальный оператор. Множество

$$U(N; x_1, ..., x_n; \varepsilon) = \{T \in BL(\mathbf{X}):\ \|N^p[N,T]N^l x_k\| \le \varepsilon\},$$

где $R(T) \subset \mathcal{D}(N^\infty)$; $x_k \in \mathcal{D}(N)$; $k = 1, ..., n$; $p,l \in \mathbb{N}$, назовем сильной N-псевдоокрестностью нуля в операторной алгебре $BL(\mathbf{X})$.

Множество

$$V(N; x_1, ..., x_n; \varphi_1, ..., \varphi_m; \varepsilon) = \{T \in BL(\mathbf{X}):\ |\varphi_j(N^p[N,T]N^l x_k\| \le \varepsilon\},$$

где $R(T) \subset \mathcal{D}(N^\infty)$; $x_k \in \mathcal{D}(N)$; $k = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$; $p,l \in \mathbb{N}\}$, назовем слабой N-псевдоокрестностью нуля в операторной алгебре $BL(\mathbf{X})$.

Пусть $V(\lambda) = \mathcal{H}(t)\mathcal{H}(-is)\mathcal{K}(-s)\mathcal{K}(-it)$, $T \in BL(\mathbf{X})$, $\|T\| \le 1$ и $h(\lambda) = V(\lambda)x$, $f(\lambda) = V(\lambda)TV(-\lambda)x$. Тогда $h(\lambda)$ и $f(\lambda)$ – векторнозначные ($\mathbf{X}$-значные) функции от $\lambda = s + it \in C$.

Лемма. *Функции $h(\lambda)$ и $f(\lambda)$ есть целые векторнозначные функции.*

Доказательство. Поскольку

$$\|h(\lambda) - h(\lambda')\| \le M_1 M_2^2 \left[e^{\sigma_1|t|}e^{\sigma_2(|t|+|s|)}\|\mathcal{H}(-is) - \mathcal{H}(-is')\| + \right.$$

$$\left. + e^{\sigma_1|s'|}e^{\sigma_2(|t'|+|s|)}\|\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t')\|\right] + M_1^2 M_2 \left[e^{\sigma_2|s|}e^{\sigma_1(|s'|+|t|)}\|\mathcal{K}(-it) - \mathcal{K}(-it')\| + \right.$$

$$\left. + e^{\sigma_2|t'|}e^{\sigma_2(|s'|+|t'|)}\|\mathcal{K}(-s) - \mathcal{K}(-s')\|\right],$$

то $h(\lambda)$ и $f(\lambda)$ – непрерывные функции. Так как

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{\lambda}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s} + i\frac{\partial}{\partial t}\right) h(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(H - iK) + i(K + iH)\right] \mathcal{H}(t)\mathcal{H}(-is)\,\mathcal{K}(-s)\,\mathcal{K}(-it)\,x = 0,$$

то $h(\lambda)$ и $f(\lambda)$ – целые векторнозначные функции.

Пусть $\lambda_0 = s_0 + it_0 \in C$ и $y_{\lambda_0} = \mathcal{H}(2t_0)\,\mathcal{K}(-2\lambda_0)\,x$, где $x \in \mathbf{X}$. Тогда $y_{\lambda_0} \in \mathcal{D}(N^\infty)$ есть аналитический элемент для оператора N и $\|y_{\lambda_0}\| = \omega(r)$, где $|\lambda_0| = r$ и $\omega(r) = \max_{|\lambda|=r} \|\mathcal{H}(\lambda t)\mathcal{K}(-rs)\|$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– банахово пространство и* N *– неограниченный квазинормальный оператор. Тогда для каждой сильной (или слабой)* N*–псевдоокрестности нуля* U *в операторной алгебре* $BL(\mathbf{X})$ *существует такая сильная (или слабая)* N*–псевдоокрестность нуля* V*, что из условия* $\|T\| \le 1, T \in V$ *следует, что* $T \in U$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай сильной псевдоокрестности нуля. Для случая слабой псевдоокрестности нуля доказательство аналогично.

Так как $\omega(r) = 0(\sqrt{r})$ для каждого $r > 0$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\dfrac{\omega^2(r) + \pi}{r} < \varepsilon$.

Пусть натуральное число n таково, что $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{r^k}{k!} < (M_1 M_2)^{-2} e^{-2(\sigma_1+\sigma_2)r}$. Рассмотрим N–псевдоокрестности нуля в операторной алгебре $BL(\mathbf{X})$ вида

$$U = U(N^+; x; \varepsilon) =$$

$$= \{T \in BL(\mathbf{X}): \quad \|[N^+, T]x\| < \varepsilon, x \in \mathcal{D}(N), \quad R(T) \subset \mathcal{D}(N^\infty), \quad \|x\| = 1\}.$$

Так как $h(\lambda)$ равномерно непрерывна на окружности $\Gamma_r = \{\lambda \in C: |\lambda| = r\}$, то существует конечное множество $\mathcal{P} \subset \Gamma_r$ такое, что для каждого $\lambda \in \Gamma_r$ найдется $\gamma = \rho + i\chi \in \mathcal{P}$, удовлетворяющее условию

$$\|h(\lambda) - h(\gamma)\| + \|h(-\lambda) - h(-\gamma)\| \le (M_1 M_2)^{-2} e^{-2(\sigma_1+\sigma_2)r}.$$

Пусть $\delta = r^{-1}(M_1 M_2)^{-4} e^{-4(\sigma_1+\sigma_2)r}$ и $y_\gamma = \mathcal{H}(2\chi)\mathcal{K}(-2\rho)x$. Тогда $\|y_\gamma\| = \omega(r)$ и $y_\gamma \in \mathcal{D}(N^\infty)$ есть аналитический элемент для оператора N. Пусть

$$V = V(\delta; \mathcal{P}) = \{L \in BL(\mathbf{X}): \|N^{k-l-1}[N, L]N^l y_\gamma\| < \delta,$$

$$\gamma \in \mathcal{P}, \quad l = 0, \ldots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{R}(L) \subset \mathcal{D}(N^\infty)\}.$$

Рассмотрим векторнозначную целую функцию $f(\lambda) = V(\lambda)TV(-\lambda)x$. Так как $\|f(\lambda)\| \le (M_1M_2)^4 e^{4(\sigma_1+\sigma_2)|\lambda|}$, то для $\lambda, \gamma \in \Gamma_r$, где $\gamma \in \mathcal{P}$, имеем

$$\|f(\lambda) - f(\gamma)\| \le (M_1M_2)^2 e^{2(\sigma_1+\sigma_2)r} \{\|h(\lambda) - h(\gamma)\| + \|h(-\lambda) - h(-\gamma)\|\} < 1.$$

Следовательно

$$\|f\|_r = \max\{\|f(\lambda)\| : |\lambda| = r\} \le \max\{\|f(\gamma)\| : \gamma \in \mathcal{P}\} + 1.$$

Оценим норму $\|f(\gamma)\|$ при $\gamma \in \mathcal{P}$:

$$\|f(\gamma)\| = \|V(\gamma)TV(-\gamma)\,x\| =$$

$$= \|\mathcal{H}(\chi)\mathcal{H}(-i\rho)\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(-i\chi)\,T\,\mathcal{H}(-\chi)\mathcal{H}(i\rho)\mathcal{K}(\rho)\,\mathcal{K}(i\chi)\,x\| \le$$

$$\le \|\mathcal{H}(2\chi)\mathcal{K}(-2\rho)\,T\,\mathcal{H}(-2\chi)\,\mathcal{K}(2\rho)\,x\| +$$

$$+\|\mathcal{H}(-i\rho)\mathcal{H}(\chi)\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(-i\chi)\cdot[\mathcal{H}(\chi)\mathcal{H}(i\rho)\,\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(i\chi);T]\,\mathcal{H}(-2\chi)\mathcal{K}(2\rho)\,x\| \le$$

$$\le \omega^2(r) + \|\mathcal{H}(\chi)\mathcal{H}(-i\rho)\,\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(i\chi)\,[\mathcal{H}(\chi)\mathcal{H}(i\rho)\,\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(i\chi);T]\,y_\gamma\| \le$$

$$\le \omega^2(r) + (M_1M_2)^2 e^{2(\sigma_1+\sigma_2)r}\|[\mathcal{H}(\chi)\mathcal{H}(i\rho)\,\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(i\chi);T]\,y_\gamma\|.$$

Так как $T \in V(\delta;\mathcal{P})$, то

$$\|[\mathcal{H}(\chi)\mathcal{H}(i\rho)\,\mathcal{K}(-\rho)\,\mathcal{K}(i\chi);T]\,y_\gamma\| =$$

$$= \|[V(-\overline{\gamma}),T]\,y_\gamma\| \le r\delta(M_1M_2)^2 e^{2(\sigma_1+\sigma_2)r} + \frac{2}{(M_1M_2)^2 e^{2(\sigma_1+\sigma_2)r}}.$$

Отсюда следует, что $\|f(\gamma)\| \le \omega^2(r) + \pi$.

В силу интегральной формулы Коши

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda,$$

откуда $\|f'(0)\| \le (\omega^2(r) + \pi)\,r^{-1} < \varepsilon$. Но так как $f'(0) = [N^+,T]\,x$, то $T \in U$. Доказательство завершено.

Следствие 1. Пусть $\mathbf{X}$ – банахово пространство, и N – неограниченный нормальный оператор. Тогда для каждой сильной (или слабой) N^+–псевдоокрестности нуля U в операторной алгебре $BL(\mathbf{X})$ существует такая сильная (или слабая) N^+–псевдоокрестность нуля V, что из $\|T\| \le 1$ и $T \in V$ вытекает $T \in U$.

Следствие 2. Пусть X – банахово пространство, и N – неограниченный нормальный оператор. Тогда если $NT \supset TN$, то $N^+T \supset TN^+$.

Используя аналогичные рассуждения для пары неограниченных нормальных операторов N_1 и N_2, получим

Следствие 3. Пусть X – банахово пространство и N_1, N_2 – неограниченные нормальные операторы. Если для $T \in BL(\mathrm{X})$ $N_1T \supset TN_2$, то $N_1^+T \supset TN_2^+$.

Данный результат обобщает теорему Путнама.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. von Neuman, "Approximative properties of matrices of high finite order", Part. math., vol. 3, pp. 1 — 62, 1942.
2. B. A. Fuglede, "A commutativity theorem for normal operators, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, vol. 36, pp. 35 — 40, 1950.
3. C. R. Putman, Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics, Ergebnisse der Math. and ihrer Grenzgebicte, Band 36, Springer–Verlag, New–York, 1967.
4. P. Moore, "An asymptotic Fuglede theorem", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 50, pp 138 — 148, 1975.
5. D. D. Rogers, "On Fuglede theorem and operator topologies", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 75, pp. 33 — 36, 1979.
6. T. Furuta, "Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede—Putman theorem", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 593 — 596, 1980.
7. Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе–Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Матем. заметки, т. 22, № 2, стр. 179 – 188, 1977.
8. Е. А. Горин, "Обобщение одной теоремы Фугледе", Алгебра и анализ, № 5, 1993.
9. М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе–Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях", ДАН АрмССР, т. 78, № 5, стр. 265 — 278, 1981.
10. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 19, № 5 – 6, стр. 405 – 421, 1978.
11. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 43 — 49, 1994.
12. У. Брателли, Д. Робинсон, Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, М., Мир, 1982.
13. А. В. Балакришнан, Прикладной функциональный анализ, М., Наука, 1980.

12 мая 1997

Ереванский государственный университет

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. Лух, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

Пусть $\mathcal{O} \neq \emptyset$ – произвольное открытое множество в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, обозначим через $H(\mathcal{O})$ семейство всех голоморфных на $\mathcal{O}$ функций. Мы предполагаем, что $H(\mathcal{O})$ наделено компактно–открытой топологией; это позволяет считать $H(\mathcal{O})$ полным метрическим пространством. Функция $\phi \in H(\mathcal{O})$ называется T–универсальной на $\mathcal{O}$ ("универсальной относительно сдвигов"), если она удовлетворяет следующему условию : для всех компактных множеств $K \subset \mathbf{C}$ со связным дополнением, для всех функций f, которые непрерывны на K и голоморфны на его внутренности K°, и для всех $\zeta \in \partial\mathcal{O}$ существует последовательность $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbf{C}^2$ такая, что

$$t_n(z) := a_n z + b_n \in \mathcal{O} \quad \text{для всех} \quad z \in K \quad \text{и всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\{t_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{сходится к} \quad \zeta \quad \text{для всех} \quad z \in K,$$

$$\{\phi \circ t_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{сходится к} \quad f(z) \quad \text{равномерно на} \quad K.$$

Множество всех функций, которые T–универсальны на $\mathcal{O}$, обозначим через $T(\mathcal{O})$.

Было доказано, что $T(\mathcal{O}) \neq \emptyset$; случай, когда $\mathcal{O}$ – односвязная область, смотрите работу Луха [4], а случай, когда $\mathcal{O}$ – открытое множество с односвязными

Исследовательская работа второго автора была поддержана Немецкой Академической Службой Обмена (DAAD) и Трирским университетом.

компонентами, смотрите работы Луха [5], [7] и Луха, Мартиросяна, Мюллера [9]. В последней статье доказано также, что T–универсальную на $\mathcal{O}$ функцию можно выбрать имеющей степенной ряд с определенными пропусками. Для ознакомления с краткой историей универсальных функций мы отсылаем к работам [5] и [7], где даны также дальнейшие библиографические ссылки.

Проблема существования T–универсальных функций на произвольных открытых множествах впервые была исследована Гроссе–Эрдманом [3]; при этом для доказательства его основного результата (теорема 3.3.11) были использованы нестандартные методы функционального анализа.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы дать элементарное и прямое доказательство (используя только стандартные методы комплексного анализа) следующего результата.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbf{C}$ – произвольное непустое открытое множество. Тогда $T(\mathcal{O})$ есть плотное подмножество в $H(\mathcal{O})$.*

Доказательство. 1. Предположим сперва, что $\mathcal{O} = \Omega$ является произвольной областью и покажем, что $T(\Omega) \neq \emptyset$. Это очевидно, если $\Omega = \mathbf{C}$ (см., например, [8], где доказано даже намного большее); поэтому можем предположить, что $\Omega \neq \mathbf{C}$ и что $\mathrm{D} := \{z\colon |z| < 1\} \subset \Omega$. Существует последовательность $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ компактных множеств со свойствами

i) $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ii) Для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset K_{n_0}$.

iii) Каждая компонента K_n^c пересекается с некоторой компонентой для $\overline{\Omega^c}$

(краткое доказательство см., например, в [12]). Рассмотрим произвольную последовательность $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ точек $\zeta_k \in \partial\Omega$, которая плотна на $\partial\Omega$, и для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем последовательность $\{z_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $z_{n,k} \in \Omega \setminus K_n$ $(n = 1, 2, ...)$ и $z_{n,k} \to \zeta_k$ при $n \to \infty$.

a) Построим индукцией последовательность $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел. Пусть $n_1 = 1$ и предположим, что n_ν уже определено при $\nu \geq 1$. Тогда выберем

$n_{\nu+1} \in \mathbb{N}$ так, чтобы $n_{\nu+1} > n_\nu$ и

$$z_{n_\nu,1}, \quad z_{n_\nu,2}, \ldots, z_{n_\nu,n_\nu} \in K^\circ_{n_{\nu+1}} \setminus K_{n_\nu}.$$

Пусть $\{r_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ – последовательность вещественных чисел $r_\nu \in (0, 1/\nu)$, которые настолько малы, что замкнутые круги

$$D_{n_\nu,\mu} := \{z\colon |z - z_{n_\nu,\mu}| \le r_\nu\}, \qquad \mu = 1, \ldots, n_\nu$$

попарно не пересекаются (если центры $z_{n_\nu,\mu}$ различны) и выполняется включение $D_{n_\nu,\mu} \subset K^\circ_{n_{\nu+1}} \setminus K_{n_\nu}$.

b) Пусть $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – нумерация всех рациональных функций $R_n = P_n/Q_n$ с полюсами в Ω^c, причем полиномы P_n и Q_n имеют коэффициенты, вещественные и мнимые части которых рациональны. Построим индукцией последовательность $\{S_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ рациональных функций. Предположим, что $S_0 \equiv 0, \ldots, S_{\nu-1}$ уже определены. По теореме Рунге о рациональной аппроксимации существует рациональная функция S_ν со свойствами

$$\max_{K_{n_\nu}} |S_\nu(\omega) - S_{\nu-1}(\omega)| < \frac{1}{\nu^2}, \tag{1}$$

$$\max_{D_{n_\nu,\mu}} \left| S_\nu(\omega) - R_\nu\left(\frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu}\cdot(\omega - z_{n_\nu,\mu})\right)\right| < \frac{1}{\nu}, \qquad \mu = 1, \ldots, n_\nu. \tag{2}$$

Полюсы функций S_ν лежат вне $K_{n_\nu} \bigcup \bigcup_{\mu=1}^{n_\nu} D_{n_\nu,\mu}$ и согласно методу перемещения полюсов можем предположить, что полюсы S_ν лежат в Ω^c.

c) Пусть функция ϕ определена рядом

$$\phi(\omega) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \{S_{n_\nu}(\omega) - S_{n_\nu-1}(\omega)\}.$$

Тогда из (1) и свойств последовательности $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ вытекает, что ϕ голоморфна в Ω. Из (1) и (2) кратким подсчетом получаем

$$\max_{D_{n_\nu,\mu}} \left|\phi(\omega) - R_\nu\left(\frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu}\cdot(\omega - z_{n_\nu,\mu})\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \max_{K_{n_\lambda}} |S_\nu(\omega) - S_{\nu-1}(\omega)| + \frac{1}{\nu} < \frac{2}{\nu}.$$

Отсюда следует, что при $\nu = 1, 2, \ldots$ и $\mu = 1, 2, \ldots, n_\nu$

$$\max_{|z| \le \nu/(\nu+1)} \left| \phi\left(\frac{\nu+1}{\nu} \cdot r_\nu \cdot z + z_{n_\nu, \mu} \right) - R_\nu(z) \right| < \frac{2}{\nu}. \tag{3}$$

d) Пусть даны произвольное компактное множество K со связным дополнением, функция f, которая непрерывна на K и голоморфна на K°, и граничная точка $\zeta \in \partial\Omega$. Выберем число $\rho \ge 1$ так, чтобы $K_\rho = \{z\colon \rho z \in K\} \subset \mathbf{D}$. По теореме Мергеляна [11] найдется подпоследовательность $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ из $\mathbb{N}$, для которой

$$\max_{K_\rho} |f(\rho z) - R_{\nu_k}(z)| < \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Для всех достаточно больших k имеем $K_\rho \subset \left\{ z\colon |z| \le \dfrac{\nu_k}{\nu_k + 1} \right\}$, так что из (3) и (4) следует, что

$$\max_{K} \left| \phi\left(\frac{\nu_k + 1}{\nu_k} \cdot r_{\nu_k} \cdot \frac{z}{\rho} + z_{n_{\nu_k}, \mu} \right) - f(z) \right| < \frac{1}{k} + \frac{2}{\nu_k}. \tag{5}$$

Множество точек $z_{n_{\nu_k}, \mu}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, \ldots, n_{\nu_k})$ имеет ζ своей предельной точкой. Поэтому существуют последовательности $\{k_s\}$ и $\{\mu_s\}$ такие, что $1 \le \mu_s \le n_{\nu_{k_s}}$ и $z_{n_{\nu_{k_s}}, \mu_s} \to \zeta$ при $s \to \infty$. Определяя теперь

$$a_s := \frac{\nu_{k_s} + 1}{\nu_{k_s}} \cdot r_{\nu_{k_s}} \cdot \frac{1}{\rho}, \qquad b_s := z_{n_{\nu_{k_s}}, \mu_s},$$

мы получим $a_s \to 0$ и $b_s \to \zeta$ при $s \to \infty$, а в силу (5) последовательность $\{\phi(a_s z + b_s)\}_{s \in \mathbb{N}}$ сходится к $f(z)$ равномерно на K. Следовательно, $\phi \in T(\Omega)$.

2. Пусть теперь $\mathcal{O} \subset \mathbf{C}$, $\mathcal{O} \ne \mathbf{C}$ является произвольным непустым открытым множеством. Тогда существуют конечное или счетное множество $I = \{1, 2, \ldots\}$ и попарно не пересекающиеся области Ω_i $(i \in I)$ такие, что $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Согласно шагу 1 для любого $i \in I$ существует функция ϕ_i, T-универсальная на Ω_i. Определим на $\mathcal{O}$ функцию ϕ следующим образом : $\phi(z) := \phi_i(z)$ при $z \in \Omega_i$.

Проверка T-универсальности на $\mathcal{O}$ функции ϕ есть простое упражнение (заметим, что граничная точка $\zeta \in \partial\Omega$ может быть $\zeta = \infty$ или $\zeta \notin \partial\Omega_i$ при всех $i \in I$).

3. Из теоремы Рунге о рациональной аппроксимации легко следует, что $T(O)$ является плотным подмножеством в $H(O)$. Для доказательства отсылаем к работе [5], гл. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками", ДАН СССР, т. 235, стр. 249 — 252, 1977.
2. D. Gaier, Vorlesungen über Approximation in Komplexen, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1980.
3. K.–G. Grose–Erdmann, Holomorphe Monster und universelle Funktionen, Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 176, 1987.
4. W. Luh, "Über cluster sets analytischer Funktionen", Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 33, № 1 – 2, pp. 137 — 142, 1979.
5. W. Luh, "Holomorphic monsters", Journ., Approx. Theory, vol. 53, pp. 128 — 144, 1988.
6. W. Luh, "Entire functions with various universal properties", Complex Variables, vol. 31, pp. 87 — 96, 1996.
7. W. Luh, "Multiply universal holomorphic functions", J. Approx. Theory, vol. 89, pp. 135 — 155, 1997.
8. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Universal entire functions with gap power series", Indagationes Math., № 9, 1998, pp. 529 — 536.
9. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "T– universal functions with lacunary power series", Acta Sci. Math. Szeged, vol. 64, pp. 67 — 79, 1998.
10. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Матем. Сборник, т. 120, стр. 451 — 472, 1983.
11. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", УМН, т. 7, стр. 31 — 122, 1952.
12. W. Rudin, Real and Complex Analysis (3rd ed.), Mc Graw–Hill, New York, 1987.

14 ноября 1997

Трирский университет (Германия),

Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 32 НОМЕРА 1 — 6 1997

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

НОМЕР

Граничная задача Гильберта в полуплоскости в смысле L^1-сходимости
Г. М. Айрапетян, В. Ш. Петросян 5

Теоремы единственности для многочленов
А. М. Акопян 5

Об одном интегральном уравнении типа свертки в неограниченной плоской области
М. Т. Акопян 1

Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна
Л. Г. Арабаджян 1

О построении целых и квазицелых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угловой области, II
Г. В. Бадалян 2

Применения принципа разбиения мероморфных функций I: свойство сравнимости
Г. А. Барсегян 3

Применения принципа разбиения мероморфных функций II: накопления a–точек и свойство Литтлвуда
Г. А. Барсегян, Г. А. Сукиасян 4

Нерешенные задачи семинара по теории распределений и ее применений, Гонк Конг, июль 1996
А. Ф. Беардон, Ч.-Ч. Янг 4

Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления
Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян 1

Приближение функций полиномами наилучшего квадратического приближения
А. Л. Григорян 5

Уравнение Винера–Хопфа в закритическом случае
Г. А. Григорян 1

Применение многократной факторизации к однородному уравнению свертки
Б. Н. Енгибарян 1

Параметрические представления и двойственность весовых пространств гармонических в полупространстве функций
М. А. Закарян 5

О весовых оценках функций из анизотропных пространств Соболева–Слободецкого
Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян 6

Явная обобщенная факторизация ограниченных голоморфных функций
А. Г. Камалян 2

Весовые представления голоморфных функций в матричных областях Зигеля
А. О. Карапетян 2

Об асимптотическом свойстве коммутатора одного класса неограниченных линейных операторов
М. И. Караханян 6

Элементарное конструирование универсальных функций на открытых множествах
В. Лух, В. А. Мартиросян 6

О нулях целых функций малого положительного порядка и их производных
Дж. Майлс, Дж. Росси 3

О представлении по неполной системе рациональных функций
М. С. Мартиросян 6

Суммирование биортогонального разложения по неполной системе рациональных функций в пространствах H^p
М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян 5

Включение–исключение и точечные процессы в польских пространствах
А. А. Машурян 2

О спектре и S-матрице оператора Дирака
П. Э. Мелик-Адамян 6

Ограниченные решения одного класса матричных уравнений Риккати
М. Г. Мурадян, А. Г. Мурадян 1

Об уравнении восстановления со вполне непрерывным ядром
О. Р. Назарян 1

Об уравнении восстановления на всей оси
О. Р. Назарян 2

О римановых метриках в $\mathbb{R}^2$, для которых кратчайшими являются прямые
В. К. Оганян 2

Построение новых массивов Бомер–Холла и матриц Адамара
А. Г. Саруханян 6

О p-листных в среднем по окружности функциях
Г. А. Сукиасян 3

Краевые задачи для некоторых классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их применение
Н. Е. Товмасян 6

Об одном интегральном уравнении свертки в кинетической теории газов
А. Х. Хачатрян, К. В. Папоян 1

Классификация римановых поверхностей с непостоянной мероморфной функцией, ограниченной на бесконечности
М. Хаяши 4

Теория распределения значений p-адичных мероморфных функций
П.-Ч. Ху, Ч.-Ч. Янг 3

Предположение Картана для p-адичных голоморфных кривых
П.-Ч. Ху, Ч.-Ч. Янг 4

Задача управления для уравнений, корректных по Петровскому
Р. Л. Шахбагян 5

О распределении радиальных особенностей степенного ряда
А. В. Яврян 5

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 32 НОМЕР 6 1997

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Теоремы единственности для многочленов
А. М. Акопян 5

О весовых оценках функций из анизотропных пространств Соболева–Слободецкого
Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян 16

О представлении по неполной системе рациональных функций
М. С. Мартиросян 30

О спектре и S-матрице оператора Дирака
П. Э. Мелик-Адамян 39

Построение новых массивов Бомер–Холла и матриц Адамара
А. Г. Саруханян 51

Краевые задачи для некоторых классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их применение
Н. Е. Товмасян 65

Краткие сообщения

Об асимптотическом свойстве коммутатора одного класса неограниченных линейных операторов
М. И. Караханян 78

Элементарное конструирование универсальных функций на открытых множествах
В. Лух, В. А. Мартиросян 84

Содержание тома 32 89

CONTENTS

VOLUME 32 NUMBER 6 1997

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

Uniqueness theorems for polynomials
A. M. Hakopian 1

On weight bounds for functions from anisotropic Sobolev–Slobodetski spaces
H. G. Kazarian, V. N. Markarian 12

On representation by incomplete systems of rational functions
M. S. Martirosian 26

On the spectrum and S–matrix of the Dirac operator
P. E. Melik–Adamian 35

Construction of new Baumert–Hall arrays and Hadamard matrices
H. G. Sarukhanyan 47

Boundary value problems for non–linear ordinary differential equations and some applications
N. E. Tovmasyan 59

Brief Communications

On the asymptotic properties of commutators of a class of unbounded linear operators
M. I. Karahanian 71

Elementary construction of universal functions on open sets
W. Luh, V. A. Martirosian 77

Contents of Volume 32 82

©1998 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of $50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.