ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ոչ ավելի քան 5–6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ НАИЛУЧШЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А. Л. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

Пусть f – 2π-периодическая функция. Тригонометрический полином $T_m(x)$ порядка не выше m, минимизирующий сумму $\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l)-T_m(x_l)]^2$, где $x_l=\frac{2\pi l}{q}$, $l=0,1,...,q-1$ для некоторого целого числа $q>2m$, называется полиномом наилучшего квадратического приближения для функции f по системе точек x_l. Пусть H – совокупность всех 2π-периодических функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию $|f(x_2)-$ $-f(x_1)|\le|x_2-x_1|$, и пусть $C_m^q(x,H)=\sup_{f\in H}|f(x)-T_m(f,x)|$. В настоящей работе будет дано решение задачи об асимптотике величины $C_m^q(x,H)$ при $m,q\to\infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для 2π-периодической функции f тригонометрический полином $T_m(x)$ порядка не выше m, который минимизирует сумму

$$\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l)-T_m(x_l)]^2, \quad \text{где } x_l=\frac{2\pi l}{q}, \quad l=0,1,...,q-1$$

для некоторого целого числа $q>2m$, называется *полиномом наилучшего квадратического приближения* по системе точек x_l. Известно (см. [1]), что этот полином, который мы обозначим через $T_m(f,x)$, имеет вид

$$T_m(f,x)=\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1}f(x_l)\frac{\sin(m+1/2)(x_l-x)}{\sin\frac{1}{2}(x_l-x)}.$$

Аппроксимацией функций полиномами наилучшего квадратического приближения занимались С. Н. Бернштейн [1], М. Д. Калашников [2], Г. П. Губанов [3] и другие.

Совокупность всех 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$, назовем классом H. Обозначим

$$C_m^q(x, H) = \sup_{f \in H} |f(x) - T_m(f, x)|, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{xq}{2\pi},$$

$$D_\varphi(s, p) = \frac{2\cos\left(\frac{1}{2}\left\{s\varphi(x) - \frac{s}{2}\right\}\right)\frac{\pi}{q}}{\pi p \sin\frac{\pi}{2p}}, \quad s, p \in \mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, а $\{a\}$ – дробная доля a.

В работе [2] получена формула для $C_m^q(x, H)$, с помощью которой можно исследовать асимптотическое поведение этой величины при условии, что q делится на $2m+1$. В настоящей работе мы получаем асимптотики (при $m, q \to \infty$) для $C_m^q(x, H)$ без этого ограничения.

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть x – произвольное число, $m, q \in \mathbb{N}$, $q = q_m > 2m$, $\frac{2m+1}{q_m} \to \alpha$ при $m \to \infty$, и пусть*

$$y_m^q(x, \alpha) = C_m^q(x, H)\left[\frac{\pi\alpha/2}{\sin(\pi\alpha/2)}\,\frac{\ln m}{m}\right]^{-1}.$$

а) *Если α иррационально или $\alpha = 0$, то*

$$\lim_{m\to\infty} y_m^q(x, \alpha) = \frac{4}{\pi^2}.$$

б) *Если $\alpha = \frac{s}{p}$, где $s, p \in \mathbb{N}$, $(s, p) = 1$, то при $\varliminf\limits_{m\to\infty} D_\varphi(s, p) \geq 0$ имеем*

$$\varliminf_{m\to\infty} y_m^q(x, \alpha) \geq \frac{4}{\pi^2}, \quad \varlimsup_{m\to\infty} y_m^q(x, \alpha) \leq \frac{2}{\pi p \sin\frac{\pi}{2p}},$$

а при $\varlimsup\limits_{m\to\infty} D_\varphi(s, p) < 0$ имеем

$$\varliminf_{m\to\infty} y_m^q(x, \alpha) \geq \frac{2}{\pi p}\cot\frac{\pi}{2p}, \quad \varlimsup_{m\to\infty} y_m^q(x, \alpha) \leq \frac{4}{\pi^2}.$$

Кроме того, для любого

$$h \in \left[\frac{4}{\pi^2}; \frac{2}{\pi p \sin\frac{\pi}{2p}}\right] \quad \text{или} \quad h \in \left[\frac{2}{\pi p}\cot\frac{\pi}{2p}; \frac{4}{\pi^2}\right]$$

и для любого x (за исключением быть может тех x, для которых отношение $x/2\pi$ рационально) существуют последовательности $\{m_n\}$ и $\{q_n\}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2m_n+1}{q_n} = \frac{s}{p} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_{m_n}^{q_n}(x, \alpha) = h.$$

Замечание 1. Величина $C_m^q(x, H)$ имеет период $2\pi/q$ по переменной x. Ввиду этого в дальнейшем будем считать, что $0 \leq x \leq 2\pi/q$.

Замечание 2. В определении величины $C_m^q(x,H)$ класс H можно заменить на класс H_x 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица степени 1 и обращающихся в нуль в данной точке x. Таким образом

$$C_m^q(x,H) = \sup_{f\in H_x} |T_m(f,x)|. \tag{1}$$

§3. ДВЕ ЛЕММЫ

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Положим*

$$b_k = \int_0^\infty \frac{\sinh(kx)\,dx}{e^{qx}+1}, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}, \quad k = 1,...,m.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sin(\pi k/q)} = \frac{2q}{\pi} b_k + \frac{q}{\pi k}, \tag{2}$$

$$b_k = O\left(\frac{k}{q^2}\right), \tag{3}$$

$$\Delta b_k = O\left(\frac{1}{q^2}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pm kx}}{e^{qx}+1}\,dx = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n \pm k/q},$$

то

$$b_k = \frac{k}{q^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - k^2/q^2}. \tag{5}$$

Отсюда, подставляя в формулу (см. [4], стр. 473)

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

значение $x = \pi k/q$ и учитывая (5), получим (2). Далее, из (5) имеем

$$b_k = \frac{k}{q^2}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2 - k^2/q^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2 - k^2/q^2}\right) \le \frac{k}{q^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2 - 1/4},$$

откуда следует (3). Для доказательства формулы (4) заметим, что

$$|\Delta b_k| = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{(k+1)t} - e^{kt} + e^{-kt} - e^{-(k+1)t}}{e^{qt}+1}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(e^t-1)(e^{kt} + e^{-(k+1)t})}{2(e^{qt}+1)}\,dt < \int_0^\infty \frac{(e^t-1)e^{kt}}{e^{qt}+1}\,dt < \int_0^\infty \frac{e^t-1}{e^{qt/2}}\,dt = O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ – ограниченная 2π-периодическая функция, и пусть*

$$\Delta f(x_l)=f(x_{l-1})-f(x_l),\quad ||\Delta f||=\max_{l\in\mathbb{N}}|\Delta f(x_l)|.$$

Тогда равномерно по m, q и x имеет место формула

$$T_m(f,x)=\frac{1}{2q\sin(\pi m/q)}\sum_{l=\tau}^{q-\tau}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}+f(0)+O(\tau||\Delta f||),$$

где

$$\tau=\left[\frac{q}{m}\right],\qquad \gamma(l)=\frac{2\pi l}{q}-\frac{\pi}{q}-x.$$

Доказательство. Применяя к $T_m(f,x)$ преобразование Абеля, получим

$$T_m(f,x)=\frac{2}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\Delta f(x_l)d_l+f(0),\tag{6}$$

где

$$d_l=\sum_{i=l}^{q-1}D_m(x-x_i),$$

а $D_m(x)$ – ядро Дирихле. Замечая, что

$$d_l=\frac{q-l}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k(\frac{\pi}{q}+x)}{2\sin(\pi k/q)}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\gamma(l)}{2\sin(\pi k/q)},$$

а также

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k(\frac{\pi}{q}+x)}{2\sin(\pi k/q)}=O(q),$$

из (6) получим

$$T_m(f,x)=\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\gamma(l)}{\sin(\pi k/q)}+\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1}l\Delta f(x_l)+f(0)+O(||\Delta f||).\tag{7}$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{\tau-1}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\gamma(l)}{\sin(\pi k/q)}\right|=O(\tau||\Delta f||)$$

и, аналогично

$$\frac{1}{q}\sum_{l=q-\tau+1}^{q-1}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\gamma(l)}{\sin(\pi k/q)}=O(\tau||\Delta f||),$$

то применяя лемму 1 из (2) и (7), получим

$$T_m(f,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{l=\tau}^{q-\tau}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\gamma(l)}{k}+f(0)+J_1+J_2+O(\tau||\Delta f||),\tag{8}$$

где

$$J_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{m} b_k \sin k\gamma(l), \quad J_2 = \frac{1}{q}\sum_{l=r}^{q-r} l\Delta f(x_l).$$

Так как

$$\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l) = O(r\|\Delta f\|),$$

то из формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$$

имеем

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\left(\frac{\gamma(l)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\Delta f(x_l) + O(r\|\Delta f\|) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\gamma(l)}{k} + O(r\|\Delta f\|). \tag{9}$$

Обратимся к изучению суммы J_1. Обозначим

$$B_m(l) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sin k\gamma(l), \quad A_m(l) = \sum_{k=1}^{m}\sin k\gamma(l).$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$B_m(l) = \sum_{k=1}^{m-2}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i(l)\right)\Delta^2 b_k + \Delta b_{m-1}\sum_{k=1}^{m-1} A_k(l) + b_m A_m(l),$$

где $\Delta^2 b_k = \Delta b_k - \Delta b_{k+1}$. Так как

$$\sum_{i=1}^{k} A_i(l) = \frac{k+1}{2}\cot\frac{\gamma(l)}{2} - \frac{\sin(k+1)\gamma(l)}{4\sin^2\gamma(l)/2},$$

$$\sum_{k=1}^{m-2}(k+1)\Delta^2 b_k = 2b_1 - b_2 - b_{m-1} - (m-1)\Delta b_{m-1},$$

то

$$J_1 = -\frac{2b_m}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin(\gamma(l)/2)} + S, \tag{10}$$

где

$$S = \frac{2}{\pi}\sum_{i=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\left[\left(b_1 - \frac{b_2}{2}\right)\cot\frac{\gamma(l)}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\sin^2\gamma(l)/2}\sum_{k=1}^{m-2}\Delta^2 b_k \sin(k+1)\gamma(l) - \frac{\Delta b_{m-1}\sin m\gamma(l)}{4\sin^2\gamma(l)/2}\right]$$

Оценим величину S. Заметим сперва, что

$$\frac{1}{q}\sum_{l=r+2}^{q-r-3}\frac{|\sin(k+1)\gamma(l)|}{\sin^2\gamma(l)/2}\leq\frac{1}{q}\sum_{l=r+2}^{[q/2]}\frac{1}{\sin^2\gamma(l)/2}+\frac{1}{q}\sum_{l=[q/2]+1}^{q-r-3}\frac{1}{\sin^2\gamma(l)/2}\leq$$

$$\leq\frac{q}{4}\sum_{l=r+2}^{[q/2]}\frac{1}{(l-2)^2}+\frac{q}{4}\sum_{l=r+3}^{[q/2]-2}\frac{1}{l^2}+O(1)=O(m). \tag{11}$$

Кроме того, так как

$$\Delta^2 b_k=\int_0^\infty\frac{\Delta^2\sinh(kx)}{e^{qx}+1}\,dx,\quad(\sinh\,kx)''\geq 0,$$

то имеем

$$\Delta^2 b_k\geq 0. \tag{12}$$

Из соотношений

$$\sum_{k=1}^{m-2}\Delta^2 b_k=\Delta b_1-\Delta b_{m-1}=O\left(\frac{1}{q^2}\right),\quad\sum_{l=r}^{q-r}\frac{1}{\sin\gamma(l)/2}=O(q^2),$$

а также из (3), (4), (10) – (12) получим

$$S\leq||\Delta f||\left[O\left(\frac{1}{q^2}\right)\sum_{l=r}^{q-r}\frac{1}{\sin\gamma(l)/2}+O(qm)\sum_{k=1}^{m-2}\Delta^2 b_k+O\left(\frac{1}{q^2}\right)O(qm)+O(1)\right]=$$

$$=O(||\Delta f||). \tag{13}$$

Следовательно, из (8) – (10) и (13) вытекает оценка

$$T_m(f,x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin k\gamma(l)}{k}-\frac{2b_m}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma(l)}+$$

$$+f(0)+O(r||\Delta f||). \tag{14}$$

Займемся изучением величины

$$G=\frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin k\gamma(l)}{k}.$$

В работе [5] (стр. 182) получена оценка

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\cos(m+1/2)x}{2(m+1)\sin\frac{x}{2}}-\Delta(m+1)\psi_m(x)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\Delta^2(k)\psi_k(x),$$

где

$$\Delta(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1) = O\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

$$\psi_k(x) = -\frac{\sin(k+1)x}{4\sin^2 x/2}.$$

Отсюда, учитывая (11), имеем

$$\left|G - \frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin(\gamma(l)/2)}\right| \leq$$

$$\leq \left[\Delta(m+1)\sum_{l=r+2}^{q-r-3}|\psi_m(\gamma(l))| + \sum_{k=m+1}^{\infty}\Delta^2(k)\sum_{l=r+2}^{q-r-3}|\psi_k(\gamma(l))| + O\left(\frac{q}{m}\right)\right] O(||\Delta f||). \tag{15}$$

Из (14) с учетом (15) следует, что

$$\left|T_m(f,x) - \frac{2b_m + (m+1)^{-1}}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma(l)}\right| = O(r||\Delta f||). \tag{16}$$

Замечая, что

$$\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{(m+1)\sin(\gamma(l)/2)}\Delta f(x_l) = O(r||\Delta f||)$$

и используя (11), выводим, что в оценке (16) число $(m+1)^{-1}$ можно заменить на m^{-1}. Так как при этом

$$2b_m + m^{-1} = \frac{\pi}{q\sin(\pi m/q)},$$

то лемма 2 доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем сперва, что равномерно по m, q и x имеет место формула

$$C_m^q(x,H) = \frac{\pi}{q^2\sin(\pi m/q)}\sum_{l=r}^{q-r}\left|\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}\right| + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{17}$$

Отметим, что из определения $C_m^q(x,H)$ и из леммы 2 легко следует оценка сверху :

$$C_m^q(x,H) \leq \frac{\pi}{q^2\sin(\pi m/q)}\sum_{l=r}^{q-r}\left|\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}\right| + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{18}$$

Для нахождения оценки снизу обозначим

$$\rho(x_l) = \operatorname{sign}(\cos(m+1/2)\gamma(l)), \quad l_k = \frac{q(2k+1)}{4m+2} + \frac{1}{2} + \frac{xq}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\rho(x_l) = (-1)^{k+1}$ при $l \in (l_k, l_{k+1})$. Построим 2π-периодическую функцию $f_0(t)$ следующим образом : $f_0(t) = 0$ при $0 \le t \le x_{[l_1]+1}$, $f_0(t)$ линейна на $[x_{j-1}, x_j]$ и $f_0(x_j) = f_0(x_{j-1} + (-1)^k 2\pi/q$ при $j \in (l_k, l_{k+1})$, где $j = [l_1]+2$, $[l_1]+3, ..., [q/6]$. Аналогично, предположим, что $f_0(t) = 0$ при $x_{[l_{2m-1}]} \le t \le 2\pi$, $f_0(t)$ линейна на $[x_{j-1}, x_j]$ и $f_0(x_{j-1}) = f_0(x_j) + (-1)^k 2\pi/q$ при $j \in (l_k, l_{k+1})$, где $j = [l_{2m-1}] - 1$, $[l_{2m-1}] - 2, ..., [5q/6]$. Для значений $t \in (x_{[q/6]}, x_{[5q/6]}$ функцию f_0 определим линейно. Ясно, что $f_0(t) \in H_x$. Поскольку для построенной функции f_0 имеем

$$\frac{1}{2q\sin(\pi m/q)} \sum_{l=[q/6]+1}^{[5q/6]-1} \Delta f_0(x_l) \frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)} = O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\Delta f_0(x_l) = \frac{2\pi}{q}\rho(x_l), \quad l = [l_1]+1, ..., [q/6], \quad l = [5q/6], ..., [l_{2m-1}],$$

то из (1) с учетом леммы 2 получим требуемую оценку снизу, которая вместе с (18) доказывает формулу (17).

Чтобы получить утверждение теоремы для иррациональных α, обозначим

$$L_m(q) = \frac{1}{q} \sum_{l=2}^{q-1} \frac{|\cos(m+1/2)\gamma(l)|}{\sin(\gamma(l)/2)}$$

и докажем, что

$$\begin{aligned} L_m(q) = \frac{4\ln q}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(n\theta\left(\frac{xq}{2\pi} - \frac{1}{2}\right)\right) \times \\ \times \ln\left(\frac{1}{q} + \left\|\frac{n(2m+1)}{q}\right\|\right)(4n^2-1)^{-1} + O(1) \end{aligned} \tag{19}$$

равномерно по m, q и x, где $\theta = (2m+1)\pi/q$, а $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого числа. Замечая, что

$$\sum_{l=2}^{q-1} \frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)} = \sum_{l=1}^{q-1} \frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\pi l/q)} + O(q),$$

$$\frac{1}{q} \sum_{l=2}^{q-1} \frac{1}{\sin(\gamma(l)/2)} = \frac{2}{\pi} \ln q + O(1)$$

и используя разложение

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(2nx)(4n^2-1)^{-1},$$

получим следующее выражение :

$$L_m(q) = \frac{4\ln q}{\pi^2} + \frac{4}{q\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\pi l/q)} + O(1). \tag{20}$$

Имеем

$$\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\pi l/q)} = \frac{2}{q}\sum_{l=1}^{[q/2]}\frac{\cos 2\pi n(2m+1)l/q\cdot\cos 2\pi n(2m+1)\varphi(x)/q}{\sin(\pi l/q)} +$$

$$\begin{aligned}&+O(1) = \frac{2}{\pi}\ln q\cos 2\pi n(2m+1)\frac{\varphi(x)}{q} - \\ &-\frac{2}{q}\cos 2\pi n(2m+1)\frac{\varphi(x)}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\sin^2\pi n(2m+1)l/q}{\sin(\pi l/q)} + O(1).\end{aligned} \tag{21}$$

Далее, используя равенства

$$\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\sin^2\pi n(2m+1)l/q}{\sin(\pi l/q)} = \sum_{l=1}^{q-1}\sum_{k=1}^{n(2m+1)}\sin(2k-1)\pi l/q = \sum_{k=1}^{n(2m+1)}\cot(2k-1)\pi/2q$$

и

$$\sum_{k=1}^{pq}\cot\frac{(2k-1)\pi}{q} = 0, \quad p\in\mathbb{N},$$

получим

$$\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\sin^2\pi n(2m+1)l/q}{\sin(\pi l/q)} = \sum_{k=1}^{q\{n(2m+1)/q\}}\cot\frac{(2k-1)\pi}{q}. \tag{22}$$

Обозначим

$$r = q\left\{\frac{n(2m+1)}{q}\right\}, \quad \bar{r} = \min(r; q-r) = q\left\|\frac{n(2m+1)}{q}\right\|.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=1}^{r}\cot\frac{(2k-1)\pi}{2q} = \sum_{k=1}^{\bar{r}}\cot\frac{(2k-1)\pi}{2q} = \frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\bar{r}}\frac{1}{2k-1} + O(q) = \frac{q}{\pi}\ln(1+\bar{r}) + O(q).$$

Отсюда и из (20) – (22) получим формулу (19).

Обозначим

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{l=r}^{q-r}\left|\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}\right|.$$

При $(2m+1)/q \to \alpha \neq 0$ имеем

$$\overline{L}_m(q) = L_m(q) + O(1), \quad \left\| \frac{n(2m+1)}{q} \right\| \to \|n\alpha\|,$$

где $n\alpha$ – нецелое число для иррациональных α. Разделив (17) на $m^{-1}\ln m$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, согласно (19) получим утверждение теоремы для иррациональных α.

Для доказательства теоремы 1 при $\alpha = 0$ оценим $\overline{L}_m(q)$ снизу и сверху. Поскольку

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + O(1), \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

то имеем

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=r}^{[q/2]} \frac{|\cos\theta(l-\varphi(x))|}{l-\varphi(x)} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=r}^{[q/2]} \frac{|\cos\theta(l+\varphi(x))|}{l+\varphi(x)} + O(1).$$

Замечая, что

$$\operatorname{sign}(\cos x) = (-1)^{k+1}, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi,$$

получим

$$\begin{aligned} \overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^{k+1} \sum_{l=[a_k^+]+1}^{[a_{k+1}^+]} \frac{\cos\theta(l-\varphi(x))}{l-\varphi(x)} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^{k+1} \sum_{l=[a_k^-]+1}^{[a_{k+1}^-]} \frac{\cos\theta(l+\varphi(x))}{l+\varphi(x)} + O(1), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$a_k^{\pm} = \frac{q}{2m+1}\left(k + \frac{1}{2}\right) \pm \varphi(x).$$

Из (23) следует

$$\begin{aligned} \overline{L}_m(q) \ge \frac{2m+1}{\pi q} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{3}{2}} \sum_{l=[a_k^+]+1}^{[a_{k+1}^+]} \cos\theta(l-\varphi(x)) + \\ + \frac{2m+1}{\pi q} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{3}{2}} \sum_{l=[a_k^-]+1}^{[a_{k+1}^-]} \cos\theta(l+\varphi(x)) + O(1). \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sum_{l=[a_k^{\pm}]+1}^{[a_{k+1}^{\pm}]} \cos\theta(l \mp \varphi(x)) = \frac{(-1)^{k+1}[\cos(\frac{1}{2} - \{a_{k+1}^{\pm}\})\theta + \cos(\frac{1}{2} - \{a_k^{\pm}\})\theta]}{2\sin\theta}$$

и

$$2\cos\frac{\theta}{2} \le \cos\left(\frac{1}{2} - \{a^{\pm}_{k+1}\}\right)\theta + \cos\left(\frac{1}{2} - \{a^{\pm}_{k}\}\right)\theta \le 2,$$

получим оценку снизу :

$$\overline{L}_m(q) \ge \frac{2(2m+1)}{\pi q}\cot\frac{\pi(2m+1)}{2q}\ln m + O(1). \tag{24}$$

Аналогично получается оценка сверху :

$$\overline{L}_m(q) \le \frac{2(2m+1)\ln m}{\pi q}\sin^{-1}\frac{\pi(2m+1)}{2q} + O(1). \tag{25}$$

Из (17), (24) и (25) следует утверждение теоремы 1 для $\alpha = 0$.

Пусть теперь

$$\frac{2m+1}{q} = \frac{s}{p} + \varepsilon, \quad (s,p) = 1, \quad s,p \in \mathbb{N}$$

и $\varepsilon \to 0$ при $m \to \infty$. Докажем формулу

$$\overline{L}_m(q) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\pi^2} + D_\varphi(s,p)\right)\ln q + O(1), & \text{при} \quad |\varepsilon|q \le 3, \\ \frac{4}{\pi^2}\ln q + D_\varphi(s,p)\ln\frac{1}{|\varepsilon|} + O(\varepsilon\ln q), & \text{при} \quad |\varepsilon|q > 3. \end{cases} \tag{26}$$

С этой целью отметим, что

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{[q/2]}\left(|\cos\theta(l-\varphi(x))| + |\cos\theta(l+\varphi(x))|\right)l^{-1} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{[q/2]}\left(\left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l - \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right| + \left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l + \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right|\right)l^{-1} + O(\varepsilon\ln q) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{l=kp+1}^{(k+1)p}\left(\left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l - \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right| + \left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l + \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right|\right)l^{-1} +$$

$$+ O(\varepsilon\ln q) = \frac{1}{\pi p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\left|\cos\pi(kp\varepsilon + z_j^-)\right| + \left|\cos\pi(kp\varepsilon + z_j^+)\right|\right)k^{-1} + O(\varepsilon\ln q), \tag{27}$$

где $z_j^{\pm} = \frac{s}{p}(j \pm \varphi(x))$. Обозначим

$$J(z) = \sum_{k=1}^{q-1}|\cos\pi(kp\varepsilon + z)|k^{-1} \tag{28}$$

и докажем, что

$$J(z) = \begin{cases} |\cos\pi z|\ln q + O(1), & \text{при} \quad |\varepsilon|q \le 3, \\ \frac{2}{\pi}\ln(|\varepsilon|q) - |\cos\pi z|\ln\varepsilon + O(\varepsilon\ln q), & \text{при} \quad |\varepsilon|q > 3. \end{cases} \tag{29}$$

Для $\varepsilon = 0$ (29) сразу следует из (28). Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Так как

$$\int_1^q \frac{|\cos\pi(up\varepsilon + z)|}{u}\,du = \sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}\int_k^{k+1}|\cos\pi(up\varepsilon + z)|\,du + O(1),$$

то равномерно по z

$$\left|\int_1^q \frac{|\cos\pi(up\varepsilon + z)|}{u}\,du - \sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}|\cos\pi(pk\varepsilon + z)|\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}\int_k^{k+1}\big(|\cos\pi(up\varepsilon + z)| - |\cos\pi(kp\varepsilon + z)|\big)\,du\right| + O(1) \leq$$

$$\leq 2\pi|\varepsilon|p\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k} + O(1) = O(\varepsilon\ln q) + O(1).$$

Поэтому, с учетом (28) получим

$$J(z) = \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(u + \operatorname{sign}\varepsilon\cdot z)|}{u}\,du + O(\varepsilon\ln q). \tag{30}$$

Пусть $|\varepsilon|q \leq 3$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ верна оценка

$$\left|\int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(y+t)|}{t}\,dt - \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi y|}{t}\,dt\right| \leq 2\int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\sin\pi t/2|}{t}\,dt = O(1).$$

Из (30) получим (29).

Пусть теперь $|\varepsilon|q > 3$. Имеем

$$\int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,di = \int_{|\varepsilon|p}^{3p}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt + \int_{3p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt =$$

$$= -|\cos\pi z|\ln|\varepsilon| + \int_{3p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt + O(1). \tag{31}$$

Однако

$$\begin{aligned}\int_{3p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt &= \int_{3p-z}^{|\varepsilon|qp-z}\frac{|\cos\pi x|}{x}\,dx + O(1) =\\ &= \int_1^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi x|}{x}\,dx + O(1) = \frac{2}{\pi}\ln(|\varepsilon|q) + O(1).\end{aligned} \tag{32}$$

Из (30) – (32) следует (29) и при $|\varepsilon|q > 3$.

Далее, так как при $(s,p) = 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{p}\big(|\cos\pi z_j^-| + |\cos\pi z_j^+|\big) = 2\cos\left(\frac{1}{2} - \left\{s\varphi(x) - \frac{l}{2}\right\}\right)\frac{\pi}{2p}\sin^{-1}\frac{\pi}{2p},$$

то из (27) – (29) следует (26). Пусть выполнено условие $\underline{\lim}_{m\to\infty} D_\varphi(s,p) \geq 0$. Замечая, что $\ln q > -\ln|\varepsilon|$ при $|\varepsilon|q > 3$, из (26) получим

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \geq \frac{4}{\pi^2}, \quad \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \leq \frac{2}{\pi p} \sin^{-1} \frac{\pi}{2p}. \tag{33}$$

Пусть теперь $\overline{\lim}_{m\to\infty} D_\varphi(s,p) < 0$. Из (26) имеем

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \geq \frac{2}{\pi p} \cot \frac{\pi}{2p}, \quad \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \leq \frac{4}{\pi^2}.$$

Вместе с (17) и (33) это доказывает первую часть утверждения б). Для доказательства заключительной части утверждения б) рассмотрим последовательность

$$\frac{2m_n+1}{q_n} = \frac{ns+\alpha_n}{np}, \quad n \in \mathbb{N};$$

где

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad sn = 0(mod\, 2), \\ 0, & \text{если} \quad sn = 1(mod\, 2), \end{cases}$$

и заметим, что если $\frac{x}{2\pi}$ – иррациональное число, то $\left\{\frac{sxpn}{2\pi}\right\}$ всюду плотно в интервале $[0,1]$. Теорема 1 доказана.

ABSTRACT. Let f be a 2π-periodic function. A trigonometric polynomial $T_m(x)$ of order at most m, which minimizes the sum $\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l) - T_m(x_l)]^2$, where $x_l = \frac{2\pi l}{q}$, $l = 0, 1, \ldots, q-1$ for some integer $q > 2m$ is called a polynomial of the best quadratic approximation for the function f by the system of points x_l. Let H be the space of all 2π-periodic functions $f(x)$ satisfying $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$, and let $C_m^q(x,H) = \sup_{f\in H} |f(x) - T_m(f,x)|$. The paper obtains exact asymptotics of $C_m^q(x,H)$ as $m, q \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, "О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов", ДАН СССР, т. 4, № 1, стр. 1 – 8, 1934.
2. М. Д. Калашников, "О полиномах наилучшего квадратического приближения в заданной системе точек", ДАН СССР, т. 105, № 4, стр. 634 – 636, 1955.
3. Г. П. Губанов, "Приближение функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения, Изв. Вузов, Математика, т. 12, стр. 22 – 29, 1970.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., Наука, 1969.
5. А. Н. Колмогоров, Избранные труды, М., Наука, 1985.

27 марта 1997

Армянский государственный
инженерный университет

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В СМЫСЛЕ L^1–СХОДИМОСТИ

Г. М. Айрапетян, В. Ш. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

Мы исследуем граничную задачу Гилберта, имея целью найти аналитические в верхней и нижней полуплоскостях функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{y\to0}||\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)||_1=0$, где $||\cdot||_1$ – норма пространства $L^1(-\infty,+\infty)$, а $a(x)$ кусочно-непрерывна в смысле Гёльдера. Мы рещаем эту задачу в классе A_y, состоящем из тех аналитических функций $\Phi(z)$, которые удовлетворяют условию $|\Phi(z)|\leq C|z|^m$ в каждой области $|\operatorname{Im} z|\geq y>0$, где C и m зависят только от y.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G^+ – верхняя, а G^- – нижняя полуплоскости комплексной плоскости z. Через A_y обозначим класс аналитических вне действительной оси функций $\Phi(z)$, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(z)|\leq C|z|^m \quad \text{в каждой области } |\operatorname{Im} z|\geq y>0, \tag{1}$$

где C и m зависят только от y. Под граничной задачей Гильберта в полуплоскости G^+ в смысле L^1-сходимости будем понимать следующую задачу : найти функцию $\Phi(z)\in A_y$, которая удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{y\to+0}||\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)||_1=0, \quad f(x)\in L^1(-\infty,+\infty), \tag{2}$$

где $\Phi^{\pm}(z)$ – сужения функции $\Phi(z)$ на G^+ и G^-, соответственно, $||\cdot||_1$ – норма пространства $L^1(-\infty,+\infty)$, $a(x)\not\equiv0$ – кусочно-непрерывная в смысле Гёльдера функция, имеющая правосторонний и левосторонний пределы в бесконечно удаленной точке и удовлетворяет условию

$$|a(x)-a(-\infty)|<\frac{A}{|x+i|^{\mu}}, \quad |a(x)-a(+\infty)|<\frac{A}{|x+i|^{\mu}}, \quad A,\mu>0.$$

Граничная задача Гильберта в ограниченных и неограниченных областях, в классах Гёльдера и L^p, $p > 1$ в классической постановке (т.е. когда предполагается принадлежность $\Phi^+(z)$ определенному классу аналитических функций) исследована многими авторами. Отметим монографии Н. И. Мусхелишвили [1], Ф. Д. Гахова [2] и обзорную статью Б. В. Хведелидзе [3]. Основным аппаратом исследования этой задачи является интеграл типа Коши, который является ограниченным оператором в классах Гёльдера и L^p, $p > 1$.

Исследование задачи Гильберта в L^1 в классической постановке сталкивается с определенными трудностями. Это обусловлено тем, что интеграл типа Коши не является ограниченным оператором в L^1. Учитывая это обстоятельство, мы меняем классическую постановку задачи Гильберта на постановку (2). Отметим, что при исследовании задачи (2) взамен интеграла типа Коши порождаются интегральные операторы, которые ограничены в L^1. Постановка (2) для конечных областей впервые приводилась в работах [4], [5].

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ И ОЦЕНКИ

2.1. Пусть $x_1, ..., x_n$ – конечные точки разрывов функции $a(x)$. Выберем непрерывные ветви функции $\ln a(x)$ так, чтобы в точке $z = \infty$

$$0 \le \alpha_0 = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i}[\ln a(+\infty) - \ln a(-\infty)] < 1.$$

В каждой точке x_k обозначим

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}[\ln a(x_k - 0) - \ln a(x_k + 0)].$$

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – целые числа такие, что $-1 < \lambda_k + \alpha_k \le 0$, $k = 1, ..., n$. Положим

$$S(z) = (z+i)^N \prod_{k=1}^{n} (z - x_k)^{\lambda_k} \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z+i}{t+i}\,\frac{\ln a(t)\, dt}{t-z}\right], \tag{3}$$

где $z \in G^+ \cup G^-$, $N = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

В дальнейшем, если функция $\Phi(z)$ определена на $G^+ \cup G^-$, под $\Phi^{\pm}(z)$ будем понимать сужения $\Phi(z)$ на G^+ и G^-, соотвстственно, и обратно, если $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – заданные функции на G^+ и G^-, соответственно, то под $\Phi(z)$ будем понимать функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & \text{при} \quad z \in G^+, \\ \Phi^-(z) & \text{при} \quad z \in G^-. \end{cases}$$

Из определения функции $S(z)$ и формул Сохоцкого-Племеля непосредственно следует

Лемма 1. *Функция $S(z)$, определенная по формуле (3), удовлетворяет следующим условиям :*

а) $S^+(x) = a(x)S^-(x)$ для всех $x \neq x_k$, $k = 1, ..., n$;

б) в достаточно малых окрестностях V_k точек x_k, $k = 1, ..., n$, функция $S(z)$ представляется в виде

$$S(z) = \frac{\Omega_k(z)}{(z - x_k)^{\delta_k - i\beta_k}}, \quad \delta_k = -(\alpha_k + \lambda_k), \quad z \in G^\pm \cap V_k,$$

где $\Omega_k(z)$ - голоморфная в $G^\pm \cap V_k$ функция, стремящаяся к определенным отличным от нуля пределам при $z \to x_k$, $z \in G^\pm$;

в) в окрестности $V_0 = \{z : |z| > R\}$ точки $z = \infty$, т.е. для достаточно больших R, имеет место

$$S(z) = (z + i)^{\alpha_0 + i\beta_0}\Omega_0(z), \quad \beta_0 = Im \frac{1}{2\pi i}[\ln a(+\infty) - \ln a(-\infty)],$$

где $\Omega_0(z)$ - голоморфная в $G^\pm \cap V_0$ функция, стремящаяся к определенным пределам при $z \to \infty$, $z \in G^\pm$;

г) $[S^\pm(x)]^{-1} \in L^\infty(-\infty, +\infty)$.

2.2. Для произвольной функции $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$ положим

$$I_1(f; x, y) = \frac{S^+(x + iy)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)} \frac{y\, dt}{(t - x)^2 + y^2}.$$

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$. Тогда*

$$||I_1(f; x, y)||_1 \leq C\, ||f||_1, \tag{4}$$

где C - постоянная, не зависящая от f и y.

Доказательство. Из определения $I_1(f; x, y)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I_1(f; x, y)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(t)}{S(t)}\right| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y|S^+(x + iy)|\, dx}{(t - x)^2 + y^2}\right] dt.$$

Докажем, что
$$\left|\frac{y}{S^+(t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}\right| \leq \text{const} .$$

Выбирая число $A>0$ так, чтобы $x_k \in (-A, A)$, $k=1,\dots,n$, где x_k – точки разрыва функции $a(x)$, будем иметь
$$\frac{y}{S^+(t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2} = \frac{y}{S^+(t)}\int_{-A}^{A}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2} + \frac{y}{S^+(t)}\int_{|x|>A}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}.$$

Равномерная ограниченность первого интеграла правой части доказана в работе [4]. Нам следует доказать равномерную ограниченность второго интеграла. Из свойств функции $S^+(z)$ следует, что
$$S^+(z) = S_1(z)(z+i)^{\alpha_0}, \qquad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad \alpha_0 > 0,$$

где $S_1(z)$ – ограниченная сверху и снизу функция при $|z|>A$. Поэтому
$$\left|\frac{y}{S^+(t)}\int_{|x|>A}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}\right| \leq \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|x+iy+i|^{\alpha_0}dx}{(t-x)^2+y^2} =$$
$$= \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|x+iy+i|^{\alpha_0}-|t+i|^{\alpha_0}dx}{(t-x)^3+y^2} + \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|t+i|^{\alpha_0}dx}{(t-x)^2+y^2} \leq$$
$$\leq \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[(t-x)^2+y^2]^{1-\alpha_0/2}} + 1.$$

Учитывая, что
$$\frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[(t-x)^2+y^2]^{1-\alpha_0/2}} \leq$$
$$\leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,du}{[u^2+y^2]^{1-\alpha_0/2}} \leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{[\tau^2+1]^{1-\alpha_0/2}} < \infty,$$

завершаем доказательство леммы 2.

2.3. Лемма 3. *Для достаточно больших R при $|x|>R$ имеет место оценка*
$$C_1|S^+(x+iy)|\frac{y}{|x+i|} \leq |S^+(x+iy)-a(x)S^-(x-iy)| \leq C_2|S^+(x+iy)|\frac{y}{|x+i|}, \quad y>0, \tag{5}$$

где $C_2 > C_1 > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие с г у.

Доказательство. Положим

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z+i}{t+i} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-z}.$$

Тогда

$$|\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy)| =$$

$$= \left| \frac{x+iy+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{(t+i)(t-x-iy)} - \frac{x-iy+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{(t+i)(t-x+iy)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \left(\int_{-A}^{A} \frac{x+iy+i}{t+i} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-x-iy} - \int_{-A}^{A} \frac{x-iy+i}{t+i} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-x+iy} \right) \right| =$$

$$= \left| \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} \frac{y \ln a(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} \right|.$$

Поэтому

$$|\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy)| < \max |\ln a(t)|. \tag{6}$$

Далее, имеем

$$S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy) = S^+(x+iy) \left[1 - a(x) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k} \right)^{\lambda_k} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i} \right)^{N} \right] \exp[\gamma^-(x-iy) - \gamma^+(x+iy)] = S^+(x+iy) \left[1 - \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i} \right)^{N} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k} \right)^{\lambda_k} \right] \exp[\gamma^-(x-iy) - \gamma^+(x+iy) + \ln a(x)] = S^+(x+iy) \times$$

$$\times \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i} \right)^{N} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k} \right)^{\lambda_k} [\exp[\gamma^-(x-iy) - \gamma^+(x+iy) + \ln a(x)]] +$$

$$+ S^+(x+iy) \left[1 - \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i} \right)^{N} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k} \right)^{\lambda_k} \right]. \tag{7}$$

Так как $N = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$, то для некоторых постоянных $k_2 > k_1 > 0$ справедлива оценка

$$k_1 \frac{y}{|x+i|^2} \le \left| 1 - \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i} \right)^{N} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k} \right)^{\lambda_k} \right| \le k_2 \frac{y}{|x+i|^2}. \tag{8}$$

Используя оценки (6) и (8), из (7) будем иметь

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \le$$
$$\le \text{const}\ |S^+(x+iy)| \left(\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \ln a(x) \right| + \frac{y}{|x+i|^2} \right). \tag{9}$$

В окрестности $z=\infty$ функцию $\ln a(t)$ можно представить в виде

$$\ln a(t) = c\chi(t) + \varphi(t), \quad c = \alpha_0 + i\beta_0, \tag{10}$$

где $\chi(t) = 1$ при $t \ge 0$ и $\chi(t) = 0$ при $t < 0$, а $\varphi(t)$ – функция из класса Гёльдера на действительной оси, включая точку $z = \infty$, в окрестности которой удовлетворяет условию

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < A \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^{\mu}, \quad A > 0, \quad \mu > \frac{1}{2}.$$

Учитывая (10), получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \ln a(x) \right| \le$$

$$\le C \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y\chi(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \chi(x) \right| + C \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \varphi(x) \right|.$$

Так как при $x \to \infty$

$$\arctan x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & x \ge 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & x \le 1 \end{cases}$$

то

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\, dt}{(t-x)^2+y^2} - 1 \right| = \left| \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t-x}{y} \Big|_0^{\infty} - 1 \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right] - 1 \right| = \left| -\frac{1}{\pi} \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right|$$

при $x \ge 1$ и

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\, dt}{(t-x)^2+y^2} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t-x}{y} \Big|_0^{\infty} \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right] \right| = \left| \frac{1}{\pi} \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right|$$

при $x \le -1$. Следовательно, для $|x| \ge 1$

$$l_1 \frac{y}{|x+i|^2} \le \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\chi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \chi(x) \right| \le l_2 \frac{y}{|x+i|^2}, \tag{11}$$

где $l_2 > l_1 > 0$ – постоянные, не зависящие от y. Далее, имеем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \varphi(x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x-iy} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x+iy} - \varphi(x) \right| =$$

$$= |\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x) - \Psi^-(x-iy) + \Psi^-(x)| \le |\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x)| +$$

$$+ |\Psi^-(x-iy) - \Psi^-(x)| \le \text{const} \left| \frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x} \right|^{\mu} + \text{const} \left| \frac{1}{x-iy} - \frac{1}{x} \right|^{\mu} \le \text{const} \frac{y}{|x+i|},$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad z \in G^+ \cup G^-.$$

Окончательно, из (9) получим

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \le c_2 |S^+(x+iy)| \frac{y}{|x+i|}.$$

Для доказательства левого неравенства в (5) заметим, что для достаточно малых $y > 0$ имеет место оценка

$$c_3 \frac{y}{|x+i|} \le \left| \operatorname{Im} \left[\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x) \right] \right| \le c_4 \frac{y}{|x+i|}.$$

Действительно, вновь используя представление (10), получим

$$\left| \operatorname{Im}[\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x)] \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \ln a(x) \right) \right| =$$

$$= \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y[c\chi(t) + \varphi(t)]\,dt}{(t-x)^2+y^2} - c\chi(x) - \varphi(x) \right) \right| = \left| \frac{\beta_0}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\chi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \chi(x) \right) \right|.$$

Используя теперь оценку (11), будем иметь

$$\left| \exp\left[-(\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x)) \right] \right| >$$

$$> C \left| \operatorname{Im} \left[\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x) \right] \right| > \text{const} \frac{y}{|x+i|}.$$

Отсюда получим

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \ge C_1 |S^+(x+iy)| \frac{y}{|x+i|},$$

что завершает доказательство леммы 3.

2.4. Для произвольной функции $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$ положим

$$I_2(f; x, y) = \frac{S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{t-x-iy}.$$

Лемма 4. *Пусть $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$. Тогда*

$$||I_2(f; x, y)||_1 \leq C\, ||f||_1, \tag{12}$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I_2(f; x, y)|\, dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(t)}{S^+(t)}\right| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y|S^+(x+iy)|\, dx}{|x+i|\, |t-x-iy|}\right] dt.$$

Докажем, что

$$\frac{y}{|S^+(t)|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S^+(x+iy)|}{|x+i|\, |t-x-iy|}\, dx \leq \text{const} .$$

Имеем

$$\frac{y}{|S^+(t)|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S^+(x+iy)|}{|x+i|\, |t-x-iy|}\, dx \leq \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+iy|^{\alpha_0}}{|x+i|\, |t-x-iy|}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x+i|\, |t-x-iy|^{1-\alpha_0}} + y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x+i|\, |t-x-iy|}.$$

Равномерная ограниченность последних двух интегралов устанавливается так, как это делалось при доказательстве леммы 2 и, тем самым, получаем доказательство леммы.

2.5. Для произвольной функции $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$ положим

$$I_3(f; z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{(x-z)}, \quad z \in G^+ \cup G^-.$$

Из лемм 2 и 4 следует оценка

$$||I_3(f; x+iy) - a(x) I_3(f; x-iy)||_1 \leq C ||f||_1. \tag{13}$$

Из леммы 3

$$\left\| \frac{S^+(x+iy)}{(x+iy+i)^k} - a(x) \frac{S^-(x-iy)}{(x-iy+i)^k} \right\|_1 \leq \text{const}\ y, \quad k \geq 1. \tag{14}$$

Наконец, если $a(x)$ имеет разрыв в точке $x = \infty$, то имеет место оценка снизу

$$\left|S^+(x+iy)(x+iy)^k - a(x)S^-(x-iy)(x-iy)^k\right| > \text{const}\ y |S^+(x+iy)|\, |x+i|^{k-1} \tag{15}$$

при $k \geq 0$.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ

3.1. Для исследования задачи (2) мы отдельно будем рассматривать два случая :

1) функция $a(x)$ непрерывна в точке $x = \infty$,

2) $x = \infty$ является точкой разрыва функции $a(x)$.

Сначала рассмотрим второй случай, то есть

$$a(+\infty) \neq a(-\infty). \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (16) и $\Phi(z) \in A_y$ является решением задачи (2). Тогда справедливы следующие утверждения :*

а) Если $N \geq -1$, то

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x - z} + S(z) G\left(\frac{1}{z+i}\right), \quad z \in G^+ \cup G^-, \tag{17}$$

где $G(w)$ – полином порядка N, $G(0) = 0$ при $N > 0$ и $G(w) \equiv 0$ при $N = 0$ или $N = -1$.

б) Если $N < -1$, то задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, ..., -N$$

и $\Phi(z)$ можно представить в виде (17), где $G(w) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $N > 0$. Обозначим

$$\Phi^+(x + iy) - a(x)\Phi^-(x - iy) = f_y(x).$$

Так как

$$a(x) = \frac{S^+(x)}{S^-(x)}, \quad x \neq x_k, \quad k = 1, ..., n,$$

то

$$\frac{\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)} - \frac{\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)} = \frac{f_y(x)}{S^+(x)}. \tag{18}$$

Функция $\Phi^-(z - iy)[S^-(z)]^{-1}$ аналитична при $\operatorname{Im} z < 0$ кроме точки $z = -i$, где имеет полюс порядка N. Через $Q_y(1/(z+i))$ обозначим главную часть этой функции в точке $z = -i$. Равенство (18) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)} - \left[\frac{\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)} - Q_y\left(\frac{1}{x+i}\right)\right] = \frac{f_y(x)}{S^+(x)} + Q_y\left(\frac{1}{x+i}\right). \tag{19}$$

Обозначим $\Phi_y^+(z) = \Phi^+(z+iy)$, $\Phi_y^-(z) = \Phi^-(z-iy)$. Так как $\Phi(z) \in A_y$, то

$$\Phi_y^\pm(z) = \frac{S^\pm(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{x-z} + S^\pm(z)\left[P_y(z) + Q_y\left(\frac{1}{z+i}\right)\right], \tag{20}$$

где $P_y(z)$ – произвольный полином. Докажем, что $P_y(z) \equiv 0$. Для произвольного $s > 0$ имеем

$$\Phi^+(x+i(s+y)) - a(x)\Phi^-(x-i(s+y)) = I_3(f;x+i(s+y)) - I_3(f;x-i(s+y)) +$$
$$+S^+(x+is)Q_y\left(\frac{1}{x+i(s+1)}\right) - a(x)S^-(x-is)Q_y\left(\frac{1}{x+i(s-1)}\right) +$$
$$+S^+(x+is)P_y(x+is) - a(x)S^-(x-is)P_y(x-is) = f_{s+y}(x).$$

Так как $f_{s+y}(x) \in L^1(-\infty,+\infty)$, то в силу оценок (13) - (15) заключаем, что $P_y(z) \equiv 0$. Так как при $y \to 0$ $f_y(x) \to f(x)$ в $L^1(-\infty,+\infty)$, то переходя к пределу в (20) и учитывая лемму 1, получим доказательство утверждения а). Остальные утверждения доказываются аналогично.

В теореме 1 при условии (16) мы установили, что каждое решение задачи (2) представляется в виде (17). Докажем основную теорему.

Теорема 2. *Если выполнено условие (16), то справедливы следующие утверждения :*

а) Если $N \geq -1$, то общее решение задачи (2) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{x-z} + S(z)G\left(\frac{1}{z+i}\right), \quad z \in G^+ \cup G^-, \tag{21}$$

где $G(w) \equiv 0$ при $N = 0$ или $N = -1$, а при $N > 0$ $G(w)$ – полином порядка N, $G(0) = 0$.

б) Если $N < -1$, то задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1,\ldots,N$$

и $\Phi(z)$ можно представить в виде (21), где $G(w) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность финитных функций из класса Гёльдера таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x) - f(x)\|_1 = 0.$$

Для любого n положим

$$\Phi_n(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x-z} + S(z)G\left(\frac{1}{z+i}\right).$$

Докажем, что для любого n

$$\lim_{y\to+0} ||\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)|| = 0. \tag{22}$$

В самом деле, так как по формуле Сохоцкого-Племеля

$$\Phi_n^+(x) - a(x)\Phi_n^-(x) = f_n(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad x \neq x_k,$$

и по лемме 1

$$|\Phi_n^\pm(z)| < \frac{\text{const}}{|z-x_k|^{\delta_k}}, \quad \delta_k < 1$$

в окрестности x_k, $k = 1, ..., n$, то для любого $A > 0$ будем иметь

$$\int_{-A}^{A} |\Phi_n^+(x) - a(x)\Phi_n^-(x) - f_n(x)|\, dx = 0. \tag{23}$$

Используя представление

$$\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = I_3(f_n; x+iy) - a(x)I_3(f_n; x-iy) + J(x,y), \tag{24}$$

где

$$J(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k \left[\frac{S^+(x+iy)}{(x+iy+i)^k} - a(x)\frac{S^-(x-iy)}{(x-iy+i)^k}\right],$$

получим

$$\int_{A}^{\infty} |\Phi_n^+(x) - a(x)\Phi_n^-(x) - f_n(x)|\, dx \leq J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y),$$

где

$$J_1(x,y) = \int_{A}^{\infty} \left| \frac{S^+(x+iy)}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t-x)^2+y^2} - f_n(x)\right| dx,$$

$$J_2(x,y) = \int_{A}^{\infty} \left| \frac{S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{t-x-iy}\right| dx,$$

$$J_3(x,y) = \int_{A}^{\infty} \left| S^+(x+iy)G\left(\frac{1}{x+iy+i}\right) - a(x)S^-(x-iy)G\left(\frac{1}{x+iy+i}\right)\right| dx.$$

Для первого интеграла имеем оценку

$$J_1(x,y) \le \int_A^\infty \frac{|S^+(x+iy)|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\right| \frac{dt\,dx}{(t-x)^2+y^2} \le C_1 y \int_a^b \left|\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\right| \times$$

$$\times \left[\int_A^\infty \frac{x^{\alpha_0}\,dx}{(t-x)^2+y^2}\right] dt \le C_2 y \int_A^\infty \frac{x^{\alpha_0}\,dx}{(b-x)^2+y^2} = C_2 y \int_{(A-b)/y}^\infty \frac{(\tau y+b)^{\alpha_0}\,d\tau}{\tau^2+1}.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $y \to +0$. Для интеграла $J_2(x,y)$ аналогично имеем

$$J_2(x,y) \le c_1 y \int_a^b \left|\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\right| \left[\int_A^\infty \frac{|x+iy|^{\alpha_0}\,dx}{|x+i|\,|t-x-iy|}\right] dt \le$$

$$\le c_2 y \int_A^\infty \frac{dx}{|x+i|^{1-\alpha_0}|t-x-iy|} \le c_3 y \int_A^\infty \frac{dx}{|x+i|^{2-\alpha_0}} + c_3 y \int_A^\infty \frac{dx}{|t-x-iy|^{2-\alpha_0}}.$$

Отсюда, учитывая оценку (14) для $J(x,y)$ и равенство (23), получим (22). Используя представление (24), равенство (22) и оценки (13) и (14), будем иметь

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_1 \le \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_1 +$$

$$+\|f_n(x) - f(x)\|_1 + \|[\Phi_n^+(x+iy) - \Phi^+(x+iy)] - a(x)[\Phi_n^-(x-iy) - \Phi^-(x-iy)]\|_1 \le$$

$$\le \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_1 + \|f_n(x) - f(x)\|_1 + c_2 y,$$

откуда, при $y \to +0$ получим

$$\lim_{y\to+0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_1 = 0.$$

3.2. Рассмотрим случай, когда функция $a(x)$ непрерывна в бесконечно удаленной точке и принадлежит классу Гёлдера в окрестности $x = \infty$, то есть

$$|a(x_1) - a(x_2)| < A\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|^\mu, \quad A > 0, \mu > 0. \tag{25}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $a(x)$ удовлетворяет условию (25) и $\mu > 1/2$, то справедливы следующие утверждения :*

а) Если $N \ge -1$, то общее решение задачи (2) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x-z} + S(z) \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(z+i)^k}, \tag{26}$$

где при $N = -1$ считаем $c_k = 0$.

б) Если $N < -1$, то для разрешимости задачи (2) необходимы и достаточны условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \ldots, -N.$$

Доказательство. Учитывая предыдущую теорему, достаточно доказать, что

$$\lim_{y \to +0} ||S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)||_1 = 0. \tag{27}$$

Действительно, из оценки (9) следует, что

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq \text{const } |S^+(x+iy)| \times$$

$$\times \left(\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-x-iy} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-x+iy} - \ln a(x) \right| + \frac{y}{|x+i|^2} \right) =$$

$$= \text{const } |S^+(x+iy)| \left(|\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x)| + |\Psi^-(x-iy) - \Psi^-(x)| + \frac{y}{|x+i|^2} \right),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-z}.$$

Так как в окрестности бесконечно удаленной точки

$$|\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x)| < \left| \frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x} \right|^{\mu} < \text{const } \frac{y^{2\mu}}{|x+i|^{2\mu}},$$

$$|\Psi^-(x-iy) - \Psi^-(x)| < \left| \frac{1}{x-iy} - \frac{1}{x} \right|^{\mu} < \text{const } \frac{y^{2\mu}}{|x+i|^{2\mu}},$$

то

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq \text{const } \frac{y^{2\mu}}{|x+i|^{2\mu}}.$$

Учитывая, что $\mu > 1/2$, из последней оценки получаем (27).

ABSTRACT. We investigate a version of the Hilbert boundary value problem asking to find analytic in the lower and upper half-planes functions $\Phi^+(z)$ and $\Phi^-(z)$ satisfying the condition $\lim_{y \to 0} ||\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)||_1 = 0$, where $|| \cdot ||_1$ is the norm of $L^1(-\infty, +\infty)$ and $a(x)$ is piecewise continuous in Hölder sense. In the paper we solve this problem in the class A_y consisting of those analytic functions

$\Phi(z)$ that satisfy the condition $|\Phi(z)| \leq C|z|^m$ for every $|\operatorname{Im} z| \geq y > 0$, where C and m may depend only on y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука, 1968.
2. Ф. Д. Гахов, Красвые задачи, М., Наука, 1977.
3. Б. В. Хведелидзе, "Линейные разрывные граничные задачи теории функций", Труды Тбилисского мат. института АН ГрузССР, т. 23, 1956.
4. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 25, № 1, стр. 3 – 20, 1990.
5. Г. М. Айрапетян, "Граничная задача сопряжения со сдвигом в классе L^1", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 3, 1987.

5 апреля 1997

Армянский государственный инженерный университет

СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ H^p $(1 < p < \infty)$

М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, Na 5, 1997

Рассматривая неполную систему рациональных функций в пространстве H^2, Н. А. Геворкян и В. Х. Мусоян построили метод суммирования для биортогонального разложения, где существенно была использована гильбертова структура пространства H^2. В настоящей работе приведены взаимные связи между условиями единственности, замкнутости и полноты биортогональных систем в пространствах H^p, $(1 < p < \infty)$ и введено понятие порожденной биортогональной системы. Затем, используя одну теорему М. Рисса, удается суммировать биортогональное разложение во всех пространствах H^p $(1 < p < \infty)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система рациональных функций $\{e_k\}_1^\infty$, которая неполна относительно любого из пространств Харди H^p $(1 < p < \infty)$ в единичном круге D. Пусть E_p – замыкание линейной оболочки системы $\{e_k\}_1^\infty$ по норме пространства H^p. Тогда E_p составляет класс функций, вообще говоря, шире класса функций, представимых рядами заданных рациональных функций. Каждой функции

$$f(z) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{p_n} a_k^{(n)} e_k(z) \in E_p,$$

где l.i.m. означает предел по норме пространства H^p, сопоставляется ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k(z)$, где $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)}$, и ставится задача суммирования этого ряда к функции $f(z)$. Она решается построением метода суммирования биортогонального разложения функции $f \in E_p$ по неполной системе $\{e_k\}_1^\infty$. В случае $p = 2$ эта задача решена в работе [1], где существенно использована гильбертова структура пространства H^2. Следует отметить, что аналогичные решения задачи суммирования биортогонального разложения предложены для неполной системы экспонент в пространстве $\mathbf{L}^2(0,+\infty)$ (см. [2], [3]) и для неполной системы рациональных функций в пространстве $\mathbf{L}^2(-\infty,+\infty)$ (см. [2]).

В настоящей работе удастся суммировать биортогональное разложение во всех пространствах $\mathbf{H}^p$, $(1 < p < \infty)$. В §1 приведены некоторые результаты общего характера. Это обеспечивает более свободное изложение метода суммирования биортогонального разложения, проведенное в §2.

§1. ПОРОЖДЕННЫЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\mathbb{R}$ - линейное нормированное пространство, а $\mathbb{R}^*$ – пространство всех непрерывных линейных функционалов, определенных на $\mathbb{R}$. Линейно-независимую систему $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ и систему функционалов $\{u_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}^*$ называют *биортогональным*, если

$$u_k(e_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = m \\ 0, & \text{при} \quad k \neq m. \end{cases}$$

Известно, что для существования биортогональной системы $\{u_k\}_1^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}_1^\infty$ была минимальной, т.е. отбрасывание хотя бы одного элемента e_k вызывает уменьшение замкнутой линейной оболочки системы $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве $\mathbb{R}$.

Для $1 < p < \infty$ рассмотрим пространство $\mathbb{R} = \mathbf{H}^p$, т.е. пространство всех аналитических в единичном круге $\mathbf{D}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(r\,e^{i\theta}|^p\,d\theta < \infty.$$

$\mathbf{H}^p$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p} = \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(r\,e^{i\theta}|^p\,d\theta \right\}^{1/p}$$

Известно, что функции пространства $\mathbf{H}^p$ почти везде на единичной окружности имеют предел по некасательным направлениям. Класс предельных функций обозначается через $\mathcal{H}^p$. Оказывается, что (см. [4], стр. 92) $\mathcal{H}^p$ – подпространство пространства $\mathbf{L}^p$ на единичной окружности и соответствие $f \mapsto \widetilde{f}$ является изометричным изоморфизмом между $\mathbf{H}^p$ и $\mathcal{H}^p$, где $\widetilde{f}$ – предел функции $f \in \mathbf{H}^p$. Поэтому впредь мы не будем различать пространства $\mathbf{H}^p$ и $\mathcal{H}^p$ и для обозначений норм этих пространств будем использовать единый символ $\|\cdot\|$.

Более того (см. [5], стр. 38 и [6], стр. 215), $\mathbf{H}^p$ – класс функций из $\mathbf{L}^p$ на единичной окружности, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю. Если $1 < p < \infty$ и f – функция из $\mathbf{L}^p$ на единичной окружности с рядом Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$, то ряд $\sum\limits_{0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ является рядом Фурье функции $g \in \mathbf{L}^p$ на единичной окружности, и существует постоянная A_p, зависящая только от p такая, что

$$\|g\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Это утверждение принадлежит М. Риссу и впредь его мы будем использовать в следующей форме :

A. Пусть $f \in \mathbf{L}^p(T)$, $1 < p < \infty$, где T – единичная окружность. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

входит в класс $\mathbf{H}^p$ и существует постоянная A_p, зависящая только от p такая, что $\|g\|_p \leq A_p \|f\|_p$.

Также известно (см. [4], стр. 174 или [5], стр. 112), что при $1 < p < \infty$ каждый функционал $u \in \mathbf{H}^{p*}$ имеет вид

$$u(f) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta}) \, g_\alpha(e^{i\theta}) \, d\theta,$$

где $f \in \mathbf{H}^p$ и семейство функций $\{g_\alpha\}$ составляет некоторый смежный класс в пространстве $\mathbf{L}^q/\mathbf{H}^q(0)$, $q = p/(p-1)$

$$\mathbf{H}^q(0) = \{f \in \mathbf{H}^q : f(0) = 0\}.$$

Отсюда легко выводится (см. [5], стр. 113) формула единственного представления функционала $u \in \mathbf{H}^{p*}$:

$$u(f) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta}) \, \overline{\varphi(e^{i\theta})} \, d\theta, \quad \varphi \in \mathbf{H}^q.$$

Полученное представление назовём *каноническим* и, в основном, его будем применять в форме

$$u(f) = \int_{|t|=1} f(t) \, \overline{\varphi(t)} \, \frac{dt}{it}, \quad f \in \mathbf{H}^p, \quad \varphi \in \mathbf{H}^q, \quad q = p/(p-1). \tag{1}$$

Если $\{e_k\}_1^\infty$ – минимальная система функций из H^p, то для краткости биортогональными будем называть системы $\{e_k\}_1^\infty$ и $\{\varphi_k\}_1^\infty$, где функции $\{\varphi_k\}_1^\infty$ определяются из равенств

$$u_k(e_m) = \delta_{km}, \quad u_k(e) = \int_{|t|=1} e(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,\frac{dt}{it},$$

$$e \in \mathrm{H}^p, \quad \varphi_k \in \mathrm{H}^q, \quad q = p/(p-1), \quad k, m = 1, 2, \ldots$$

Перейдем к вопросу единственности биортогональной системы. Так как наша основная задача имеет аппроксимативный характер, то удобно этот вопрос связать с вопросом замкнутости данной системы относительно всего пространства. Мы будем пользоваться следующими определениями.

Определение 1. Система $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$ называется *замкнутой* относительно пространства H^p, если $E_p = \mathrm{H}^p$, где E_p – замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве H^p

Определение 2. Система $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$, $1 < p < \infty$ называется *полной* относительно пространства H^q, $q = p/(p-1)$, если из условий

$$\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{e_k(t)}\,\frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad f \in \mathrm{H}^q$$

вытекает, что $f \equiv 0$.

Пусть $1 < p < \infty$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Предложение 1. *Для того, чтобы биортогональная системе $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$ система $\{\varphi_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^q$ была единственной, необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}_1^\infty$ была замкнутой относительно пространства H^p.*

Доказательство. Необходимость. Предположим противное : $\{\varphi_k\}_1^\infty$ единственна, но $E_p \neq \mathrm{H}^p$. Тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{H}^p \backslash E_p$ и функционал $u \in \mathrm{H}^{p*}$ такие, что $u(f_0) \neq 0$ и $u|_{E_p} = 0$. Пусть функционал u имеет вид

$$u(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\psi(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad f \in \mathrm{H}^p, \quad \psi \in \mathrm{H}^q.$$

Система $\{e_k\}_1^\infty$ неполна относительно пространства H^q, ибо в противном случае из $u|_{E_p} = 0$ вытекает, что $\psi \equiv 0$, откуда и $u(f_0) = 0$, что находится в противоречии с $u(f_0) \neq 0$. Следовательно, существует функция $h \not\equiv 0$ класса H^q такая, что

$$\int_{|t|=1} e_k(t)\,\overline{h(t)}\,\frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

В результате, система $\{e_k\}_1^\infty$ будет иметь более одной биортогональной системы (например, $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{h + \varphi_k\}_1^\infty$).

Достаточность. Пусть $E_p = \mathrm{H}^p$. Тогда $\{e_k\}_1^\infty$ полна относительно H^q. Действительно, пусть $g \in \mathrm{H}^q$ и для всех $f \in E_p = \mathrm{H}^p$

$$\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{g(t)}\,\frac{dt}{it} = 0.$$

Тогда

$$\int_{|t|=1} t^m\,\overline{g(t)}\,\frac{dt}{it} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta}\,g\left(e^{i\theta}\right)\,d\theta = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как $g \in \mathrm{H}^q$, то последние равенства имеют место и для отрицательных m, следовательно $g \equiv 0$. Полнота доказана.

Если теперь

$$\int_{|t|=1} e_k(t)\,\overline{\varphi_m(t)}\,\frac{dt}{it} = \int_{|t|=1} e_k(t)\,\overline{\psi_m(t)}\,\frac{dt}{it} = \delta_{km},$$

где $\{\varphi_m\}_1^\infty$, $\{\psi_m\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^q$, то $\varphi_m(t) = \psi_m(t)$ почти для всех t, $|t| = 1$, $m = 1, 2, \ldots$, т.е. биортогональная система единственна.

Замечание 1. В ходе доказательства предложения 1 было показано, что замкнутость системы относительно H^p эквивалентна ее полноте относительно H^q, где $1 < p < \infty$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Пусть система $\{e_k\}_1^\infty$ минимальна во всех пространствах H^p $(1 < p < \infty)$ и $E_p \neq \mathrm{H}^p$ для всех $p \in (1, \infty)$. Рассмотрим дополнительное условие $\{\varphi_k\}_1^\infty \subset E_p$ для всех $p \in (1, \infty)$, где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ - система, биортогональная к $\{e_k\}_1^\infty$. В этом случае будем говорить, что $\{\varphi_k\}_1^\infty$ - *порожденная биортогональная система* системы $\{e_k\}_1^\infty$. Легко установить, что порожденная биортогональная система единственна. Пусть

$$u_k(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad f \in \mathrm{H}^p, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ – порожденная биортогональная система системы $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$. Каждой функции $f \in \mathrm{H}^p$ сопоставим следующий ряд :

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k(f)\, e_k(z) \tag{2}$$

Ряд (2) называется *порожденным биортогональным разложением* функции $f \in \mathrm{H}^p$ по системе $\{e_k\}_1^\infty$. Ниже предлагается метод суммирования этого ряда в случае системы рациональных функций.

§2. НЕПОЛНАЯ СИСТЕМА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В единичном круге D рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \cdot \frac{z^s}{(1-\overline{\lambda}_k z)^{s+1}}, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1, \tag{3}$$

где $|\lambda_k| < 1$, $k = 1, 2, ...$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Функции системы (3) входят в каждый класс H^p при $1 < p < \infty$.

Предложение 2. *Для неполноты системы (3) относительно любого из пространств* H^p $(1 < p < \infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m_k \left(1 - |\lambda_k|\right) < \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (3) неполна относительно любого из пространств H^p $(1 < p < \infty)$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathrm{H}^p$ такая, что

$$\int_{|t|=1} f(t)\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it}, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1.$$

Подставляя выражения (3) в эти равенства, получим

$$\frac{s!}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{(t-\lambda_k)^{s+1}}\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1. \tag{5}$$

Так как для функций класса H^p имеет место формула Коши, то из (5) вытекает, что $f^{(s)}(\lambda_k) = 0$. Следовательно (см. [5], стр. 18) имеет место (4).

Достаточность. Из (4) следует, что в D (см. [5], стр. 19) существует произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_k - z}{1 - \overline{\lambda}_k z} \cdot \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\right]^{m_k}.$$

Тогда

$$\int_{|t|=1} B(t)\,\overline{e_{ks}(t)}\,\frac{dt}{it} = i\,B^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1,2,...; \quad s = 0,1,...,m_k - 1. \quad (6)$$

Так как функция $B(z)$ входит во все классы H^p, то из (6) вытекает, что система (3) неполна относительно любого из пространств H^p. Предложение 2 доказано.

Рассмотрим систему функций

$$\varphi_{ks}(z) = \frac{B(z)}{s!\,2\pi}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B(x)\,(x-z)}\,dx, \quad k = 1,2,...; \quad s = 0,1,...,m_k - 1, \quad (7)$$

где $c_k \subset \mathrm{D}$ – окружность с центром в точке λ_k, не охватывающая точек λ_i, отличных от λ_k ; $z \notin c_k$, а $B(z)$ – произведение Бляшке.

Лемма 1. *Система (7) является порожденной биортогональной системой системы (3),* т.е.

$$\int_{|z|=1} e_{lq}(z)\,\overline{\varphi_{ks}(z)}\,\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1}\overline{e_{lq}(z)}\,\varphi_{ks}(z)\,\frac{dz}{iz} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad l = k, q = s, \\ 0, & \text{при} \quad l \neq k, \\ 0, & \text{при} \quad l = k, q \neq s, \end{cases}$$

и функции системы (7) принадлежат замкнутой линейной оболочке E_p системы (3) в пространстве H^p для любого $p \in (0,\infty)$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_{ksn}(z) = \frac{B_n(z)}{s!\,2\pi}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B_n(x)\,(x-z)}\,dx,$$

где

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\lambda_k - z}{1-\overline{\lambda}_k z}\cdot\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\right]^{m_k}$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$\int_{|z|=1}\overline{e_{lq}(z)}\,\varphi_{ksn}(z)\,\frac{dz}{iz} = \frac{q!}{s!2\pi i}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B_n(x)}\,dx\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{B_n(z)}{(z-\lambda_l)^{q+1}(z-x)}\,dz.$$

Так как при $n \geq l$ функция $B_n(z)(z-\lambda_l)^{-q-1}$ входит в класс H^p, то для нее справедлива формула Коши и, следовательно

$$\int_{|z|=1}\overline{e_{lq}(z)}\,\varphi_{ksn}(z)\,\frac{dz}{iz} = \frac{q!}{s!2\pi i}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{(x-\lambda_l)^{q+1}}\,dx = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad l = k, q = s, \\ 0, & \text{при} \quad l \neq k, \\ 0, & \text{при} \quad l = k, q \neq s. \end{cases} \quad (8)$$

Теперь докажем, что в (8) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что при фиксированных k и s последовательность $\varphi_{ksn}(z)$ сходится к $\varphi_{ks}(z)$ по норме пространства H^p. Действительно

$$|\varphi_{ksn}(z) - \varphi_{ks}(z)| \leq |B_n(z)| \cdot \int_{c_k} \left| \frac{(x-\lambda_k)^s}{x-z} \right| \cdot \left| \frac{1}{B_n(x)} - \frac{1}{B(x)} \right| \cdot |dx| + \\ + |B_n(z) - B(z)| \int_{c_k} \left| \frac{(x-\lambda_k)^s}{B(x)\,(x-z)} \right| \cdot |dx|. \tag{9}$$

Так как $|B(z)| = 1$ почти для всех z на единичной окружности и $B_n(x)$ равномерно стремится к $B(x)$ на c_k, то первое слагаемое в (9) стремится к нулю по норме H^p. Такое же поведение имеет и второе слагаемое в (9). Для этого достаточно показать, что B_n стремится к B по L^p-норме на единичной окружности, а это вытекает из соотношений (см. [6], стр. 97) $\|B_m - B_n\|_2 \to 0$ при $m, n \to \infty$ и

$$\|B_m - B_n\|_p \leq \|B_m - B_n\|_2 \quad \text{при} \quad 1 < p < 2, \\ |B_m - B_n|^p \leq 2^{p-2}\,|B_m - B_n|^2 \quad \text{при} \quad 2 < p < \infty. \tag{10}$$

Остается доказать, что система (7) порождается системой (3). Допустим противное : существует некотороая функция φ_{lq} из системы (7), не принадлежащая E_p. Тогда существует функционал $\Phi \in \mathrm{H}^{p*}$

$$\Phi(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\psi(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad \psi \in \mathrm{H}^q, \quad q = \frac{p}{p-1}$$

такой, что $\Phi(\varphi_{lq}) \neq 0$ и $\Phi|_{E_p} = 0$. Из условия $\Phi|_{E_p} = 0$ вытекает, что

$$\int_{|t|=1} \overline{e_{ks}(t)}\,\psi(t)\,\frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1,$$

что равносильно равенствам

$$\psi^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1. \tag{11}$$

С другой стороны, применением теоремы Фубини получим

$$0 \neq \int_{|t|=1} \overline{\varphi_{lq}(t)}\,\psi(t)\,\frac{dt}{it} = \frac{1}{q!\,2\pi i}\,\overline{\int_{c_l} \frac{(x-\lambda_l)^q\,dx}{B(x)}} \int_{|t|=1} \frac{\psi(t)}{B(t)\,(t\overline{x}-1)}\,dt. \tag{12}$$

Положим

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{B(z)\,(z\overline{x}-1)}.$$

Тогда функция $F(z)$, в силу (11), аналитична в $\mathbf{D}$. Более того, $F \in \mathrm{H}^q$, что приводит к равенству

$$\int_{|t|=1} \frac{\psi(t)}{B(t)\,(t\overline{z}-1)}\,dt = 0,$$

которое противоречит формуле (12). Лемма 1 доказана.

Следует отметить, что порожденная системой (3) биортогональная система была построена М. М. Джрбашяном [7] и использована в интерполяционных задачах [8]. Интегральное представление (7) получено В. Х. Мусояном [1]. Вопросы базисности системы (3) в подпространствах $E_p \subset \mathrm{H}^p$ $(1 < p < \infty)$ изучены в ряде работ Г. М. Айрапетяна (см. [9] — [11]).

Определение 3. Пусть $\{e_k\} \subset \mathrm{H}^p$ и E_p – замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}$ в пространстве H^p. Будем говорить, что пространство H^p ортогонально проектируется на подпространство E_p, если для любой функции $f \in \mathrm{H}^p$ существует единственная функция $P_{E_p}f \in E_p$ такая, что интегралы

$$J_k = \int_{|t|=1} \left[f(t) - P_{E_p}f(t)\right] \overline{e_k(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

существуют и $J_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Функцию $P_{E_p}f(t)$ назовем ортогональной проекцией функции $f \in \mathrm{H}^p$ на подпространство E_p.

В силу предложения 2 при условии (4) система (3) неполна относительно любого из пространств H^p $(1 < p < \infty)$. Учитывая замечание 1, заключаем, что система (3) не замкнута относительно любого из пространств H^p, т.е. $E_p \neq \mathrm{H}^p$ при любом $p \in (1, \infty)$.

Введем обозначения

$$a_{ks}(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\varphi_{ks}(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad r_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_k - \lambda}{1 - \overline{\lambda}_k\lambda} \cdot \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\right]^{m_k}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 < p < +\infty$. Тогда пространство H^p ортогонально проектируется на подпространство E_p и для любой функции $f \in \mathrm{H}^p$*

$$P_{E_p}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s}\,\frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}}\right\}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{13}$$

где предел понимается в смысле нормы H^p.

Доказательство. Из (7) имеем

$$a_{ks}(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\left\{\frac{B(t)}{s!\,2\pi}\int_{\gamma_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B(x)\,(x-t)}\,dx\right\}}\,\frac{dt}{it}. \tag{14}$$

При фиксированном $z \in \mathrm{D}$ рассмотрим функцию

$$\Psi(\lambda) = \frac{r_n(\lambda)}{1 - \lambda\overline{z}}.$$

Она регулярна в D, так как $\dfrac{1}{\overline{z}} \notin \mathrm{D}$. Учитывая (14), получим

$$\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}\right\}}_{\lambda=\lambda_k} = \tag{15}$$
$$= \int_{|t|=1} f(t) \overline{\left\{\frac{B(t)}{2\pi}\int_{c_k}\frac{1}{B(x)(x-t)}\sum_{s=0}^{m_k-1}\frac{\psi^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(x-\lambda_k)^s\,dx\right\}}\frac{dt}{it}.$$

Так как функция

$$\frac{1}{B(x)(x-t)}\sum_{s=m_k}^{+\infty}\frac{\psi^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(x-\lambda_k)^s$$

регулярна на $\overline{c_k}$, то заменив в (15) конечную сумму на бесконечную и учитывая, что

$$\frac{\psi(x)}{B(x)} = \frac{1}{B_n(x)(1-x\overline{z})},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \overline{\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}\right\}}_{\lambda=\lambda_k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{|t|=1} f(t)\overline{\left\{\frac{B(t)}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{dx}{B_n(x)(1-x\overline{z})(t-x)}\right\}}\frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)\,\overline{B(t)}}{tz}\overline{\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{dx}{B_n(x)(1/\overline{z}-x)(t-x)}\right\}}dt = \tag{16}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)\,B_n(t)}{B(t)(t-z)}dt - \frac{B_n(z)}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)(t-z)}dt.$$

Докажем, что для произвольной функции $\Phi \in \mathrm{L}^p$ на единичной окружности T

$$\|\Phi B_n - \Phi B\|_p \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Действительно

$$\int_{|t|=1}|\Phi(t)B_n(t) - \Phi(t)B(t)|^p\,dt \le \int_{E_k}|\Phi(t)|^p\cdot|B_n(t)-B(t)|^p dt +$$
$$+k\int_{|t|=1}|B_n(t)-B(t)|^p dt,$$

где $E_k = \{t \in T: \quad |\Phi(t)|^p > k\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Остается заметить, что меры множеств E_k

$$\mu(E_k) = \int_{E_k} |dt| < \frac{1}{k} \int_{E_k} |\Phi(t)|^p \cdot |dt|$$

стремятся к нулю при $k \to \infty$ и воспользоваться соотношениями (10). Так как $\dfrac{f(t)}{B(t)} \in \mathrm{L}^p(T)$, то в силу (17) и утверждения (A) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda \bar z}} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = f(z) - H(z), \tag{18}$$

где

$$H(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)} \in \mathrm{H}^p.$$

Заметим, что

$$\int_{|t|=1} H(t)\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it} = i H^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{19}$$

Пусть $H_1 \in E_p$ и

$$\int_{|t|=1} [f(t) - H_1(t)]\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{20}$$

Учитывая (19) и (20), для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$H_1(t) \equiv f(t) - H(t) \tag{21}$$

почти всюду на T. Для этого сначала допустим, что $f \in E_p$. Тогда $f(t) =$ $= \mathrm{l.i.m.} P_n(t)$, где

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(t). \tag{22}$$

Получим, что при $|z| < 1$

$$\int_{|t|=1} \frac{P_n(t)\,dt}{B_n(t)(t-z)} = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} \frac{s!}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t^s}{B_n(t)(1-\bar\lambda_k t)^{s+1}(t-z)}\, dt. \tag{23}$$

Заметим, что функция

$$F(\omega) = \frac{\omega^s}{B_n(\omega)(1-\bar\lambda_k \omega)^{s+1}(\omega - z)}$$

аналитична при $|\omega| > 1$ и $F(\omega) = O(\omega^{-2})$ при $|\omega| \to \infty$ и, следовательно, $\mathrm{Res}(F, \infty) = 0$. Поэтому, сумма (23) равна нулю. Еще раз учитывая (17) и применяя (A), получим, что при $f \in E_p$

$$\int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)} = 0,$$

т.е. учитывая (18)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\bar{z}}} \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \quad \text{если } f \in E_p. \tag{24}$$

Далее, если $H_1 \in E_p$ и имеют место равенства (20), то

$$\int_{|t|=1} [f(t) - H(t) - H_1(t)]\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1.$$

Следовательно

$$a_{ks}(f - H - H_1) = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1. \tag{25}$$

Но так как $f - H - H_1 \in E_p$, то в силу (24) и (25) получим (21). Теорема 1 доказана.

Замечание 2. В силу (18), (19) и (21)

$$P_{E_p} f(z) = f(z) - \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)}.$$

В случае $p = 2$ это равенство представляет теорему Дж. Уолша (см. [2], стр. 365 или [1]).

Следствие. Пусть последовательность обобщенных полиномов (22) стремится к функции $f(z)$ по норме пространства H^p. Тогда имеет место (24), где $a_{ks} = \lim_{n\to\infty} a_{ks}^{(n)}$.

ABSTRACT. In their study of a non–complete system of rational functions in the Hardy space H^2, N. A. Gevorgian and V. Kh. Musoyan have costructed a summation method of biorthogonal decomposition where the Hilbert structure of H^2 has essentially been used. In the present paper relations between conditions of uniqueness, closedness and completeness of biorthogonal systems are presented in the spaces H^p, $(1 < p < \infty)$ and the concept of a generated biorthogonal system is introduced. Basing upon a

theorem of M. Riesz, a summation method in all H^p $(1 < p < \infty)$ spaces is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Геворгян, В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогонального разложения по неполной системе рациональных функций в круге", Ученые записки ЕГУ, Математика, № 2, 1990.
2. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогонального разложения по неполным системам экспонент и рациональных функций", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 2, стр. 163 — 186, 1986.
3. А. Ф. Леонтьев, Последовательности полиномов из экспонент, М., Наука, 1980.
4. П. Кусис, Введение в теорию пространств H^p, М., Мир, 1984.
5. Peter L. Duren, Theory of H^p Spaces, New York, London, 1970.
6. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
7. М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 5, стр. 384 — 409, 1973.
8. М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 9, № 4, стр. 339 — 373, 1974.
9. Г. М. Айрапетян, "Кратная интерполяция и базисность некоторых систем рациональных функций в классах H^p Харди", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 12, № 3, стр. 262 — 277, 1977.
10. Г. М. Айрапетян, "О базисе рациональных функций в подпространствах Харди H^p $(1 < p < \infty)$", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 6, стр. 429 — 450, 1973.
11. Г. М. Айрапетян, "О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 10, № 2, стр. 133 — 152, 1975.
12. Дж. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., Мир, 1961.

9 июля 1997 Ереванский государственный университет

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, КОРРЕКТНЫХ ПО ПЕТРОВСКОМУ

Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

В статье исследована задача управления, описываемая корректными по Петровскому дифференциальными уравнениями в частных производных высокого порядка. Доказано существование точного управления смешанной задачей (при достаточно больших значениях временной переменной) для широкого класса операторов с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая статья является продолжением исследований, проведенных в [1]. Здесь изучена задача точного управления системами, описываемыми уравнениями, корректными по Петровскому. Исследуемый класс операторов охватывает дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. История вопроса и подробная библиография приведены в [1], [3].

Обозначим через Ω ограниченную область $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть, далее, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ – открытый цилиндр, лежащий в прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}^1 : \quad t > 0\}$.

В цилиндре Q_T рассмотрим эволюционное уравнение порядка $4m$ ($m \geq 1$) вида

$$u_{tt} + L^{2m}u + L_1 u = 0, \tag{1.1}$$

Проведение настоящего исследования стало возоможно благодаря Joint-Stock Company "Prometheus".

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \tag{1.2}$$

$$L_1 u = \sum_{|\alpha|\le 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\left(a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u\right), \tag{1.3}$$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ниже нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $x^o = (x_1^o,\dots,x_n^o) \in \mathbb{R}^n$ – произвольно заданная точка. Для любого $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$m(x) = x - x_o = (x_1 - x_1^o,\dots,x_n - x_n^o), \quad m_k(x) = x_k - x_k^o. \tag{1.4}$$

Пусть, далее, $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ – единичная внешняя нормаль к поверхности Γ, $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$. Обозначим через $\nu_L = (\nu_{1_L},\dots,\nu_{n_L})$ нормированный вектор к границе Γ, определенный следующим образом :

$$\nu_{k_L} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x)\,\nu_j. \tag{1.5}$$

Разделим границу Γ на две части :

$$\Gamma(x^o) = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{k=1}^{n} m_k\nu_k \ge 0\} \quad \text{и} \quad \Gamma_*(x^o) = \Gamma \setminus \Gamma(x^o).$$

Для уравнения (1.1) рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$u(0) = u^o, \quad u'(0) = u^1, \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{1.6}$$

где $u(0) = u(x,0)$, $u'(0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$.

Пусть $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. На Σ зададим краевые условия

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0,\dots,2m-2, \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial L^{m-1} u}{\partial \nu_L}\right|_{\Sigma} = \begin{cases} v, & \text{на } \Gamma(x^o) \times (0,T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_*(x^o) \times (0,T), \end{cases} \tag{1.8}$$

где функция v – управление.

Проблема заключается в нахождении точного управления смешанной задачей (1.1), (1.6) — (1.8), а именно, функции $v(x,t)$, заданной на $\Gamma(x^o) \times (0,T)$ такой, что для любых начальных данных $u^o(x)$ и $u^1(x)$ существует T, $0 < T < \infty$, при котором решение $u(v) = u(x,t;v)$ задачи (1.1), (1.6) — (1.8) обращается в нуль вместе со своей производной по t :

$$u(x,T;v) = u'(x,T;v) = 0. \tag{1.9}$$

§2. ОПЕРАТОР Λ

2.1. В основе решения задачи точного управления, поставленной в §1, лежит предложенный Ж.-Л. Лионсом [3] метод HUM. Он заключается в одновременном рассмотрении двух задач - прямой и, в определенном смысле, двойственной ей.

Пусть функция $\omega(x,t)$ - решение задачи

$$\omega_{tt} + L^{2m}\omega + L_1\omega = 0, \tag{2.1}$$

$$\omega(0) = \omega^0, \qquad \omega'(0) = \omega^1, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial^k \omega}{\partial \nu^k}\right|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0, \ldots, 2m-1, \tag{2.3}$$

и пусть функция $z(x,t)$ - решение двойственной задачи

$$z_{tt} + L^{2m}z + L_1 z = 0, \tag{2.4}$$

$$z(T) = z'(T) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial \nu^k}\right|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0, \ldots, 2m-2, \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial L^{m-1} z}{\partial \nu_L}\right|_{\Sigma} = \begin{cases} L^m\omega, & \text{на } \Gamma(x^o) \times (0,T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_*(x^o) \times (0,T). \end{cases} \tag{2.7}$$

Заметим, что мы исходим из того, что уравнение (1.1), при соответствующих предположениях относительно коэффициентов операторов L и L_1 (см. §3), является корректным по Петрвоскому и, стало быть, задачи (2.1) — (2.3) и (2.4) — (2.7) имеют единственное обобщенное решение в соответствующих пространствах Соболева (см. [2]).

Ниже мы будем существенно опираться на следующее

Предложение 2.1. *Пусть функции $\omega(x,t)$ и $z(x,t)$ – решения задач (2.1) — (2.3) и (2.4) — (2.7), соответственно. Тогда справедливо соотношение*

$$\int_{\Omega} \left(z'(0)\,\omega^0 - z(0)\,\omega^1\right)\,dx = \iint_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |L^m\omega|^2\,d\Gamma\,dt. \tag{2.8}$$

Доказательство. Умножив тождество (2.1) на $z(x,t)$, а тождество (2.4) на $\omega(x,t)$, составляя симметрическую разность и интегрируя ее по цилиндру Q_T, получим

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T} (z\,\omega_{tt} - \omega\,z_{tt})\,dx\,dt + \iint_{Q_T} \left(z\,L^{2m}\omega - \omega\,L^{2m}z\right)\,dx\,dt = \\ &= \iint_{Q_T} (\omega\,L_1\,z - z\,L_1\,\omega)\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Левая часть последнего соотношения преобразуется так (см. [1]) :

$$\iint_{Q_T} (z\,\omega_{tt} - \omega\,z_{tt})\,dx\,dt = \int_{\Omega} \left(z'(0)\,\omega^0 - z(0)\,\omega^1\right)\,dx. \tag{2.10}$$

Правая часть (2.9), в силу (2.3) и (2.6), преобразуется следующим образом :

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T} (\omega\,L_1\,z - z\,L_1\,\omega)\,dx\,dt = \\ &= \sum_{|\alpha|\le 2m-1} \iint_{Q_T} (a_\alpha(x)\,D^\alpha\omega\,D^\alpha z - a_\alpha(x)\,D^\alpha z\,D^\alpha\omega)\,dx\,dt = 0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Преобразуем, наконец, интеграл

$$I = \iint_{Q_T} \left(z\,L^{2m}\,\omega - \omega\,L^{2m}\,z\right)\,dx\,dt. \tag{2.12}$$

Применяя многократно формулу Гаусса-Остроградского, с учетом условий (2.6) и (1.5), получим

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T} zL^{2m}\omega dxdt = \iint_{Q_T} L^m z\,L^m\,\omega\,dx\,dt - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Sigma} a_{ij}(x)\,\nu_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,L^{m-1}z\cdot L^m\omega\,d\Sigma = \\ &= \iint_{Q_T} L^m z\,L^m\,\omega\,dx\,dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial\nu_L}\,L^{m-1}z\cdot L^m\omega\,d\Sigma.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Аналогично, пользуясь условиями (2.3), имеем

$$\iint_{Q_T} \omega\,L^{2m}\,z\,dx\,dt = \iint_{Q_T} L^m\omega\cdot L^m\,z\,dx\,dt. \tag{2.14}$$

Подставляя теперь (2.13) и (2.14) в (2.12), с учетом (2.7), получим

$$I = \iint_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |L^m\omega|^2\,d\Gamma\,dt. \tag{2.15}$$

Подставляя, наконец, (2.10), (2.11) и (2.15) в (2.9), приходим к соотношению (2.8), и доказательство завершено.

2.2. Определим оператор Λ, ставящий в соответствие каждой паре начальных данных $\{\omega^0, \omega^1\}$ задачи (2.1) — (2.3) пару $\{z'(0), -z(0)\}$ следующим образом :

$$\Lambda\{\omega^0, \omega^1\} = \{z'(0), -z(0)\}. \tag{2.16}$$

Как будет доказано ниже, оператор Λ обратим в надлежащим образом построенных функциональных пространствах. После этого, повторяя рассуждения, проведенные в [3], можно убедиться в существовании решения основной задачи (1.1), (1.6) — (1.8).

Обозначим через $\vec{L}_2(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, наделенных скалярным произведением

$$< u, v >= \int_\Omega (u_1 v_1 + u_2 v_2)\, dx. \tag{2.17}$$

В силу (2.16) и (2.17) имеем

$$< \Lambda\{\omega^0, \omega^1\}, \{\omega^0, \omega^1\} >= \int_\Omega (z'(0)\omega^0 - z(0)\omega^1)\, dx \tag{2.18}$$

и в силу предложения 2.1

$$< \Lambda\{\omega^0, \omega^1\}, \{\omega^0, \omega^1\} >= \iint_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |L^m\omega|^2 \, d\Gamma\, dt. \tag{2.19}$$

Таким образом, для обратимости оператора Λ достаточно показать, что интеграл

$$\left(\iint_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |L^m\omega|^2 \, d\Gamma\, dt \right)^{1/2}$$

определяет норму на множестве начальных данных задачи (2.1) — (2.3).

§3. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ

3.1. а) Предполагается, что матрица $\|a_{ij}(x)\|$, определяющая оператор L, вещественна и симметрична, $a_{ij} \in C^{2m}(\Omega)$ и выполнено *условие эллиптичности* : существуют постоянные $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$ такие, что

$$\gamma_0 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \le \gamma_1 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \tag{3.1}$$

для любых $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$.

b) Коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператора L_1 принадлежат пространству $C^{2m}(\Omega)$.

Следующие условия связаны с неотрицательностью энергии системы.

Для их формулировки умножим уравнение (2.1) на ω_t, где $\omega(x,t)$ – решение задачи (2.1) — (2.3) и проинтегрируем обе его части по Q_T. Имеем

$$\int_{Q_T} \omega_t \left(\omega_{tt} + L^{2m}\omega + L_1\omega\right) dx\,dt = 0. \tag{3.2}$$

Очевидно

$$\int_{Q_T} \omega_t\,\omega_{tt}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\omega_t|^2\,dx\Big|_0^T. \tag{3.3}$$

Далее, в силу условий (2.3)

$$\int_{Q_T} \omega_t\,L^{2m}\omega\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(L^m\omega\right)^2 dt\right\} dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |L^m\omega|^2\,dx\Big|_0^T. \tag{3.4}$$

Наконец, последний интеграл правой части (3.2) (см. [1]) равен

$$\int_{Q_T} \omega_t\,L_1\omega\,dx\,dt = \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\int_{\Omega} a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2\,dx\Big|_0^T. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3) — (3.5) в (3.2), получим

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\omega_t^2 + |L^m\omega|^2 + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2\right) dx\Big|_0^T = 0. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что “интеграл энергии”

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\omega_t^2 + |L^m\omega|^2 + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2\right) dx \tag{3.7}$$

является константой при $t \in [0,T]$.

Представление (3.7) диктует ограничения на младшие члены оператора задачи. Введем следующие обозначения :

$$L_k^0 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

$$L_k = \sum_{r=0}^{m-1} L^{m-1-r}\,L_k^0\,L^r, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{L} = L^{m-1}\left(\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

c) Требуется, чтобы для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$

$$\sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)\,\xi^{2\alpha} \ge 0, \qquad (\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}).$$

d) Для любого $\omega \in \mathring{H}^{2m}(\Omega)$ (определение см. в п. 3.2)

$$\int_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m-1} m_k\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}\,|D^\alpha\omega|^2 + \left(\tilde{L}\omega + \sum_{k=1}^{n} m_k\,L_k\omega\right)\cdot L^m\omega\Bigg]\,dx \le 0. \tag{3.9}$$

Заметим, что последнее условие возникает (см. [4]) и в случае уравнений второго порядка. Заметим также, что оно автоматически выполняется в том случае, когда матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ постоянна.

3.2. Введем функциональные пространства, в которых исследуется поставленная в §1 задача управления.

Обозначим через $H^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{Z}^+$) пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha|\le s}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{3.10}$$

а через $\mathring{H}^s(\Omega)$ – подпространство $H^s(\Omega)$, являющееся замыканием в норме (3.10) финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций.

Ниже нам понадобится также норма в $\mathring{H}^s(\Omega)$:

$$'\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha|\le s}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{3.11}$$

эквивалентная (3.10).

Введем, наконец, в прямом произведении гильбертовых пространств

$$F = \mathring{H}^{2m}(\Omega) \times L_2(\Omega) \tag{3.12}$$

норму

$$\|\{u,v\}\|_F = \left('\|u\|_{2m}^2 + \|v\|_0^2\right)^{1/2}, \tag{3.13}$$

где $\|\cdot\|_0$ – норма в пространстве $L_2(\Omega)$.

§4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В этом параграфе будет получен основной результат статьи, а именно, доказано существование точного управления смешанной задачей (1.1), (1.6) — (1.8). Доказательство основано на следующих теоремах.

Теорема 4.1. *Пусть $\omega(x,t)$ - решение задачи (2.1) — (2.3), отвечающее начальным данным $\{\omega^0,\omega^1\}\in F$, и выполнены условия a) — c). Тогда существует постоянная $c>0$, не зависящая от T, такая, что*

$$\int_\Sigma |L^m\omega|^2\,d\Sigma \le c\,(1+T)\,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *При выполнении условий теоремы 4.1 и d) существуют постоянные $c>0$ и $T_0>0$ такие, что для решения $\omega(x,t)$ задачи (2.1) — (2.3) справедлива оценка*

$$\int_{\Gamma(x^0)\times(0,T)} |L^m\omega|^2\,d\Gamma\,dt \ge c\,(T-T_0)\,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2. \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим функции $h_k\in C^{2m}(\overline{\Omega})$, $k = 1,2,\dots,n$, удовлетворяющие условиям

$$h_k(x)|_\Gamma=\nu_k. \tag{4.3}$$

Умножим тождество (2.1) на $h_k\,\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k}$, просуммируем по $k=1,2,\dots,n$ и проинтегрируем обе его части по цилиндру Q_T. Получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\iint_{Q_T}\omega_{tt}\,h_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\,dt+\sum_{k=1}^n\iint_{Q_T}L^{2m}\omega\,h_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\,dt+\\+\sum_{k=1}^n\iint_{Q_T}L_1\omega\,h_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\,dt=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Интегралы

$$I_1=\sum_{k=1}^n\iint_{Q_T}\omega_{tt}\,h_k\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\,dt$$

преобразуются точно так же, как в [1] :

$$I_1=X+\frac12\sum_{k=1}^n\iint_{Q_T}\omega_t^2\,\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\,dx\,dt, \tag{4.5}$$

где

$$X=\sum_{k=1}^n\int_\Omega\omega_t\,h_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\bigg|_0^T. \tag{4.6}$$

Преобразуем теперь

$$I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} L^{2m}\omega\, h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\, dx\, dt. \tag{4.7}$$

Аналогично (2.13), в силу условий (2.3) имеем

$$\begin{aligned} I_2 = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} L^m\omega\, L^m \left(h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right) dx\, dt - \\ - \sum_{k=1}^{n} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_L} L^{m-1} \left(h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right) L^m\omega\, d\Sigma = I_2' - I_2''. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Заметим, что в силу условия $\omega|_\Sigma \doteq 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial}{\partial \nu}. \tag{4.9}$$

С учетом условий (4.3) и (4.9) преобразуем

$$\begin{aligned} I_2'' &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_L} L^{m-1} \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right) L^m\omega\, d\Sigma = \\ &= \sum_{i,j=1}^{r} \int_{\Sigma} a_{ij}(x)\, \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \nu}\right) L^m\omega\, d\Sigma = \\ &= \sum_{i,j=1}^{r} \int_{\Sigma} a_{ij}(x)\, \nu_i \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1}\omega\, L^m\omega\, d\Sigma + \sum_{|\alpha| \le 2m-2} \int_{\Sigma} \sigma_\alpha(x)\, D^\alpha\omega\, L^m\omega\, d\Sigma. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь коэффициенты разложения $\sigma_\alpha(x)$ определяются матрицей $\|a_{ij}(x)\|$. Заметим, что в силу условий (2.3) последняя сумма обращается в нуль.

Имеем, далее

$$\begin{aligned} I_2'' &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1}\omega\right) L^m\omega d\Sigma - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Sigma} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1}\omega L^m\omega d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} |L^m\omega|^2\, d\Sigma - \sum_{i,j=1}^{r} \int_{\Sigma} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1}\omega\, L^m\omega\, d\Sigma. \end{aligned}$$

В силу условий (2.3) последний интеграл полученного соотношения исчезает, и мы имеем

$$I_2'' = \int_{\Sigma} |L^m\omega|^2\, d\Sigma. \tag{4.11}$$

Преобразуем теперь

$$\begin{aligned} I_2' = \sum_{k=1}^{n} \iint_{Q_T} h_k(x)\, L^m\omega\, L^m \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right) dx\, dt + \\ + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta| \le 2m \\ \alpha \ne 0}} \iint_{Q_T} D^\alpha h_k(x) \cdot b_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right) L^m\omega\, dx\, dt = I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Далее

$$I_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} h_k(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,|L^m\omega|^2\,dx\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|\le 2m}\iint_{Q_T} h_k(x)c_\alpha(x)\,D^\alpha\omega\cdot L^m\omega\,dx\,dt = I_3' + I_3''. \tag{4.13}$$

Преобразуем

$$I_3' = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\,|L^m\omega|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{\Sigma} h_k(x)\,|L^m\omega|^2\,\nu_k\,d\Sigma.$$

Учитывая (4.3), получим

$$I_3' = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\,|L^m\omega|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma}|L^m\omega|^2\,d\Sigma. \tag{4.14}$$

Подставляя (4.14) в (4.13), а затем полученные выражения для I_3 в (4.12), будем иметь

$$I_2' = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\,|L^m\omega|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma}|L^m\omega|^2\,d\Sigma + I_3'' + I_4. \tag{4.15}$$

С учетом (4.11) и (4.15) для I_2 получим представление

$$I_2 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\,|L^m\omega|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma}|L^m\omega|^2\,d\Sigma + I_3'' + I_4. \tag{4.16}$$

Подставляя, наконец, (4.16) и (4.5) в тождество (4.4), перепишем его в виде

$$X+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T}\frac{\partial h_k}{\partial x_k}\,\left(\omega_t^2 - |L^m\omega|^2\right)\,dx\,dt-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}|L^m\omega|^2\,d\Sigma+I_3''+I_4+I_5 = 0, \tag{4.17}$$

где

$$I_5 = \sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} L_1\omega\,h_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\,dt.$$

Перейдем к доказательству неравенства (4.1). С этой целью оценим слагаемые (4.17). В силу ограниченности функций $c_\alpha(x)$ и $h_k(x)$ имеем

$$|I_3''| \le c_1\sum_{|\alpha|\le 2m}\iint_{Q_T}|D^\alpha\omega|\cdot|L^m\omega|\,dx\,dt \le c_2\iint_{Q_T}\left(\sum_{|\alpha|\le 2m}|D^\alpha\omega|^2 + |L^m\omega|^2\right)\,dx\,dt. \tag{4.18}$$

Здесь и далее через c_i, $i = 1, 2, \ldots$ будем обозначать различные константы.

Поскольку при каждом $t \in [0,T]$ $\omega(t) \in \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega)$, то с учетом условия (3.1) получим

$$\sum_{|\alpha|\le 2m} \iint_{Q_T} |D^\alpha \omega|^2\, dx\, dt \le c_3 \iint_{Q_T} |\Delta^m \omega|^2\, dx\, dt \le c_4 \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2\, dx\, dt, \tag{4.19}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Из (4.18) в силу (4.19) и (3.7) имеем

$$|I_3''| \le c_5 \int_0^T E(t)\, dt = c_5\, E(0)\, T. \tag{4.20}$$

Воспользовавшись теперь неравенством

$$E(t) \le c_6 \int_\Omega |\omega_t|^2\, dx + '||\omega||^2_{2m}, \tag{4.21}$$

из (4.20) в силу начальных условий (2.2) и (3.13) имеем

$$|I_3''| \le c_7\, T\, \left(||\omega^1||^2_0 + ||\omega^0||^2_{2m}\right) = c_7\, T\, ||\{\omega^0, \omega^1\}||^2_F. \tag{4.22}$$

Обратимся к оценке I_4. В силу ограниченности коэффициентов разложения $b_{\alpha\beta}(x)$ и $D^\alpha h_k$ при $|\alpha| \le 2m$ имеем

$$|I_4| \le c_8 \sum_{|\beta|\le 2m} \iint_{Q_T} |D^\beta \omega| \cdot |L^m \omega|\, dx\, dt,$$

и аналогично предыдущему придем к оценке

$$|I_4| \le c_9\, T\, ||\{\omega^0, \omega^1\}||^2_F. \tag{4.23}$$

В точноси такая же оценка для I_5 получена в [1].

Далее, легко убедиться, что для X справедливо неравенство

$$|X| \le c_{10}\, ||\{\omega^0, \omega^1\}||^2_F. \tag{4.24}$$

Аналогичными рассуждениями получаем следующую оценку :

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \left(\omega_t^2 - |L^m \omega|^2\right) dx\, dt \right| \le c_{11}\, ||\{\omega^0, \omega^1\}||^2_F. \tag{4.25}$$

Из (4.22) — (4.25) и (4.17) приходим к окончательной оценке

$$\int_\Sigma |L^m \omega|^2\, d\Sigma \le c_{12}\, (1+T)\, ||\{\omega^0, \omega^1\}||^2_F. \tag{4.26}$$

Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $\omega(x,t)$ - решение задачи (2.1) — (2.3). Умножим тождетсво (2.1) на $m_k(x)\,\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k}$, просуммируем по $k=1,\dots,n$ и проинтегрируем по цилиндру Q_T. Имеем

$$0=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,\omega_{tt}\,dx\,dt+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,L^{2m}\omega\,dx\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,L_1\omega\,dx\,dt+J_1+J_2+J_0. \tag{4.27}$$

Как показано в [1]

$$J_1=\widetilde{X}+\frac{n}{2}\iint_{Q_T}\omega_t^2\,dx\,dt, \tag{4.28}$$

где

$$\widetilde{X}=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega} m_k(x)\,\omega_t\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,dx\Big|_0^T. \tag{4.29}$$

Далее, из (2.3) следует, что

$$J_2=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k(x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\,L^{2m}\omega\,dx\,dt=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} L^m\left(m_k\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\cdot L^m\omega\,dx\,dt-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial\nu_L}L^{m-1}\left(m_k\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\cdot L^m\omega\,d\Sigma=J_2'-J_2''. \tag{4.30}$$

Преобразуем

$$J_2'=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} L^{m-1}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_k\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\right)\right]\cdot L^m\omega\,dx\,dt=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} L^{m-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{kj}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]\cdot L^m\omega\,dx\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} L^{m-1}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_k\,a_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\right)\right]\cdot L^m\omega\,dx\,dt=$$
$$=\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\,dx\,dt+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k\,L^m\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\cdot L^m\omega\,dx\,dt+\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} L^{m-1}\times$$
$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ik}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)\right]\cdot L^m\omega\,dx\,dt=\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\,dx\,dt+J_3+J_4. \tag{4.31}$$

Мы воспользовались тем, что $\dfrac{\partial m_k}{\partial x_j}=\delta_{jk}$, где δ_{jk} - символ Кронекера. Легко видеть далее с учетом обозначения (3.8), что

$$J_4=\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\,dx\,dt-\iint_{Q_T}\widetilde{L}\omega\cdot L^m\omega\,dx\,dt, \tag{4.32}$$

где оператор $\widetilde{L}$ задается выражением (3.8). Подставляя (4.32) в (4.31), получим

$$J_2' = 2\iint_{Q_T} |L^m\omega|^2\, dx\, dt - \iint_{Q_T} \widetilde{L}\omega\cdot L^m\omega\, dx\, dt + J_3. \tag{4.33}$$

Далее, нетрудно убедиться в справедливости следующего разложения :

$$L^m\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}L^m\omega - L_k\omega, \tag{4.34}$$

где операторы L_k задаются выражениями (3.8). В силу (4.34) интеграл

$$J_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}|L^m\omega|^2\, dx\, dt - \sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k\, L_k\omega\cdot L^m\omega\, dx\, dt. \tag{4.35}$$

Аналогично (4.13) — (4.15) имеем

$$\begin{aligned} J_3' &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\iint_{Q_T} m_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}|L^m\omega|^2\, dx\, dt = \\ &= -\frac{n}{2}\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right)|L^m\omega|^2\, d\Sigma. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Подставляя теперь (4.36) в (4.33), получим

$$\begin{aligned} J_2' = \left(2-\frac{n}{2}\right)\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right)|L^m\omega|^2\, d\Sigma - \\ - \iint_{Q_T}\left(\widetilde{L}\omega + \sum_{k=1}^{n} m_k\, L_k\omega\right) L^m\omega\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Обратимся, наконец, к интегралу J_2''. Нетрудно убедиться, что в силу условий (2.3) имеем

$$L^{m-1}\left(m_k\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right) = m_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}L^{m-1}\omega, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

На поверхности Σ в силу условия (2.3) имеем

$$\nu_i\,\frac{\partial^2 L^{m-1}\omega}{\partial x_k\,\partial x_j} = \nu_i\,\nu_k\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}L^{m-1}\omega = \nu_k\,\frac{\partial^2 L^{m-1}\omega}{\partial x_i\,\partial x_j}.$$

Из последнего соотношения, а также (2.3), (4.9) следует

$$\begin{aligned} J_2'' &= \sum_{k=1}^{n}\iint_\Sigma\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\nu_i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}L^{m-1}\omega\right) L^m\omega\, d\Sigma = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\iint_\Sigma\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, m_k\,\nu_i\,\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}L^{m-1}\omega\cdot L^m\omega\, d\Sigma = \sum_{k=1}^{n}\iint_\Sigma m_k\,\nu_k\times \\ &\times\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}L^{m-1}\omega\cdot L^m\omega\, d\Sigma = \iint_\Sigma\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right)|L^m\omega|^2\, d\Sigma. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Подставляя тепеь (4.37) и (4.38) в (4.30), имеем

$$J_2 = \left(2-\frac{n}{2}\right)\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\sum_{k=1}^n m_k\,\nu_k\right)|L^m\omega|^2\,d\Sigma - \\ - \iint_{Q_T}\left(\widetilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k\,L_k\omega\right)L^m\omega\,dx\,dt. \tag{4.39}$$

Интеграл J_0 преобразуется точно так же, как в [1]. Имеем (см. [1], стр. 82)

$$J_0 = \sum_{k=1}^n\iint_{Q_T} m_k\,\frac{\partial\omega}{\partial x_k}L_1\omega\,dx\,dt = \left(1-\frac{n}{2}\right)\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2\,dx\,dt - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}m_k(x)\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}\,|D^\alpha\omega|^2\,dx\,dt. \tag{4.40}$$

Соотношения (4.28), (4.39) и (4.40) позволяют переписать тождество (4.27) в следующем виде :

$$\widetilde{X} + \frac{n}{2}\iint_{Q_T}\omega_t^2\,dx\,dt + \left(2-\frac{n}{2}\right)\iint_{Q_T}|L^m\omega|^2\,dx\,dt - \\ - \frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\sum_{k=1}^n m_k\,\nu_k\right)|L^m\omega|^2\,d\Sigma - \iint_{Q_T}\left(\widetilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k\,L_k\omega\right)L^m\omega\,dx\,dt + \\ + \left(1-\frac{n}{2}\right)\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2\,dx\,dt - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{|\alpha|\le 2m-1}\iint_{Q_T}m_k(x)\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}\,|D^\alpha\omega|^2\,dx\,dt = 0. \tag{4.41}$$

Легко видеть, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\widetilde{X} + \frac{(n-2)}{2}Y + 2\int_0^T E(t)\,dt - \iint_{Q_T}\left[\sum_{|\alpha|\le 2m-1}a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{|\alpha|\le 2m-1}m_k\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k}\,|D^\alpha\omega|^2 + \left(\widetilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k\,L_k\omega\right)L^m\omega\right]dx\,dt - \\ - \frac{1}{2}\int_\Sigma\left(\sum_{k=1}^n m_k\,\nu_k\right)|L^m\omega|^2\,d\Sigma = 0, \tag{4.42}$$

где $E(t)$ задается выражением (3.7), а

$$Y = \iint_{Q_T}\left(\omega_t^2 - |L^m\omega|^2 - \sum_{|\alpha|\le 2m-1}a_\alpha(x)\,|D^\alpha\omega|^2\right)dx\,dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$Y = \int_{\Omega} \omega\, \omega_t\, dx \Big|_0^T. \tag{4.43}$$

Перейдем к доказательству оценки (4.2). В силу условия d) из (4.42) приходим к неравенству

$$\tilde{X} + \frac{(n-2)}{2} Y + 2\int_0^T E(t)\,dt \le \frac{1}{2}\int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right) |L^m\omega|^2\, d\Sigma. \tag{4.44}$$

Подставляя интеграл по Σ, входящий в (4.44), в виде суммы двух интегралов по $\Gamma(x^o)\times(0,T)$ и $\Gamma_*(x^o)\times(0,T)$, пользуясь оценками

$$E(T) = E(0) \ge c_1 \,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2$$

и

$$\int_{\Gamma_*(x^o)\times(0,T)} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right) |L^m\omega|^2\, d\Sigma \le 0,$$

нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства :

$$\tilde{X} + \frac{(n-2)}{2} Y + T c_2 \,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2 \le \frac{1}{2}\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k\right) |L^m\omega|^2\, d\Sigma. \tag{4.45}$$

Интегралы $\tilde{X}$ и Y не превосходят величины $c_3\,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2$.

Следовательно, из (4.45) имеем

$$T c_2 \,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2 \le \frac{R(x^o)}{2}\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |L^m\omega|^2\, d\Sigma + \frac{n}{2} c_3\,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2,$$

где $R(x^o) = \sup_{x\in\Gamma}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\nu_k$ и, стало быть

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |L^m\omega|^2\, d\Sigma \ge \frac{2c_2}{R(x^o)}\left(T - \frac{nc_3}{2c_2}\right) \|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2.$$

Обозначив $T_0 = \dfrac{nc_3}{2c_2}$ и $c = \dfrac{2c_2}{R(x^o)}$, приходим к требуемой оценке

$$\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |L^m\omega|^2\, d\Sigma \ge c(T - T_0)\,\|\{\omega^0,\omega^1\}\|_F^2.$$

Теорема 4.2 доказана.

Из теорем 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия a) — d). Тогда оператор Λ, определенный выражением (2.16), при достаточно больших $T > 0$ осуществляет изоморфизм между пространствами F и F', где*

$$F' = H^{-2m}(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

а $H^{-2m}(\Omega)$ – пространство, сопряженное $\mathring{H}^{2m}(\Omega)$.

Доказательство. В силу (2.16) – (2.18) имеем

$$< \Lambda\{\omega^0, \omega^1\}, \{\omega^0, \omega^1\} >= \int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |L^m\omega|^2 \, d\Gamma \, dt = \int_\Omega (z'(0)\,\omega^0 - z(0)\,\omega^1)\, dx. \tag{4.46}$$

Далее, из оценки (4.1) следует существование интеграла

$$\left(\int_{\Gamma(x^o)\times(0,T)} |L^m\omega|^2 \, d\Gamma \, dt\right)^{1/2} < \infty. \tag{4.47}$$

Если теперь последний интеграл равен нулю, то в силу оценки (4.2) $\omega^0 = \omega^1 = 0$ при $T > T_0$. Поскольку задача (2.1) — (2.3) однозначно разрешима, то $\omega = 0$ в Q_T, откуда следует, что при $T > T_0$ интеграл (4.47) определяет норму на множестве начальных данных $\{\omega^0, \omega^1\}$ задачи (2.1) — (2.3). Норма (4.47) эквивалентна норме пространства Соболева на F. С учетом (4.46) отсюда следует, что оператор Λ обратим при достаточно больших $T > 0$. Это позволяет для любой пары $\{z'(0), -z(0)\}$, где $z'(0) \in H^{-2m}(\Omega)$ и $z(0) \in L_2(\Omega)$, найти единственную пару $\{\omega^0, \omega^1\} \in F$ такую, что (2.16), а это означает, что оператор Λ осуществляет изоморфизм между пространствами F и F'. Теорема доказана.

В следующей теореме содержится основной результат статьи.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы 4.3 и $T > 0$ достаточно велико. Тогда при любых начальных данных $\{u^0, u^1\} \in F$ существует точное управление $v \in L_2(\Gamma(x^o) \times (0,T))$, приводящее систему (1.1), (1.6) — (1.8) в состояние покоя за время T.*

Доказательство. По любым начальным данным $\{\omega^0, \omega^1\} \in F$ определяется [2] единственное обобщенное решение $\omega(x,t)$ задачи (2.1) — (2.3). В силу теоремы 4.1 для него существуют граничные значения $L^m\omega|_\Sigma \in L_2(\Sigma)$. Подставляя их в

(2.7) и решая задачу (2.4) — (2.7), найдем единственное решение $z(x,t)$. Затем, выбирая в качестве управления $v = L^m\omega|_{\Gamma(x^0)\times(0,T)}$, нетрудно убедиться в том, что решением исходной задачи является функция $u(x,t;v) = z(x,t)$. Теорема доказана.

Замечание. Вопрос о единственности точного управления решается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [1] и [3].

ABSTRACT. The paper investigates the control problem for systems described by partial differential equations that are correct in Petrowsky's sense. The existence of exact control for the mixed problem for a wide class of operators with coefficients depending on space variables and large time intervals is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбагян, М. эль-Саиди, "Задача управления для эволюционных уравнений высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 29, № 2, стр. 57 - 75, 1994.
2. J.-L. Lions, E Magenes, Problèmes aux Limites Nonhomogénes et Applications, vol. 1 and 2, Dunod, Paris, 1968.
3. J.-L. Lions, "Exact controlability, stabilization and perturbations for distributed systems", SIAM Reiew, vol. 30, no. 1, pp. 3 — 68, 1998.
4. Г. Идрис, Кандидатская диссертация, Ереван, 1991.

12 ноября 1996 Ереванский государственный университет

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАДИАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННОГО РЯДА

А. В. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

В настоящей работе исследуется вопрос о наличии особенностей степенного ряда на границе круга сходимости или вне этого круга. Получены достаточные условия на коэффициенты степенного ряда, гарантирующие наличие радиальных особых точек ряда в заданной угловой области.

1°. В классической работе Фабри [1] исследован вопрос о наличии особых точек степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n, \qquad \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 1 \tag{1}$$

на заданной замкнутой дуге единичной окружности. Общая теорема Фабри и ее частные случаи — теорема Фабри о лакунах и об отношении стали основой для большого цикла исследований в этом направлении (см. обзоры [2] и [3]). Ряд общих результатов, содержащих в себе классические теоремы в качестве частных случаев, были получены Н. У. Аракеляном и В. А. Мартиросяном (см. [4]). Предложенный ими подход основан на использовании хорошо известного метода "функции коэффициентов" и условий равновесия между ростом этой функции и количеством ее нулей.

В настоящей работе мы применяем этот подход для исследования вопроса о наличии радиальных особых точек в заданной открытой или замкнутой угловой области.

Определение 1. Для аналитического элемента

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n \tag{2}$$

с радиусом сходимости $R \in (0, +\infty)$ точку $z = re^{i\theta}$, $R \leq r < +\infty$ назовем радиальной особой точкой (особенностью) в направлении θ, если ряд (2) аналитически продолжается вдоль интервала $[0, z)$, не допуская при этом аналитического продолжения на отрезок $[0, z]$.

Радиальные особые точки аналитического элемента это фактически угловые точки его главной звезды (см. [2], стр. 35). Аналогично, точку ∞ естественно считать радиальной особенностью в направлении θ, если элемент (2) аналитически продолжается вдоль луча $\{re^{i\theta};\ r \in [0, +\infty)\}$, не допуская при этом аналитического продолжения в окрестность точки ∞. Следует отметить, что точка ∞ может быть радиальной особенностью по некоторым направлениям и не быть таковой по другим.

Далее через Δ будем обозначать произвольную угловую область с вершиной в точке 0, а через $\overline{\Delta}$ - замыкание Δ в $\mathbb{C}$.

Определение 2. Для элемента (2) скажем, что точка ∞ – радиальная особенность изнутри $\Delta(\overline{\Delta})$, если она является таковой по всем направлениям θ, для которых $e^{i\theta} \in \Delta(\overline{\Delta})$.

2°. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для $n \in \mathbb{N}$, $P \subset \mathbb{N}$ и $\mu > 1$ положим $P_{n,\mu} = P \cap [n, \mu n]$ и введем обозначение

$$S_P(n, \mu) := \begin{cases} \sum\limits_{m \in P_{n,\mu}} \dfrac{1}{m}, & \text{если} \quad P_{n,\mu} \neq \emptyset \\ 0, & \text{если} \quad P_{n,\mu} = \emptyset. \end{cases}$$

Для элемента (1) и $\beta \in \mathbb{R}$ обозначим через Z_β множество мест перемен знака последовательности $\mathrm{Re}\left(f_n e^{i\beta}\right)$ (см. [5], стр. 48). Далее, для $\alpha \in (0, \pi]$ положим $\Delta_\alpha = \{\zeta\colon |\arg\zeta| < \alpha\}$, а для $\mu > 1$ положим

$$W(\mu) := \liminf_{k\to\infty} S_{Z_{\beta_k}}(n_k, \mu).$$

Теорема 1. *Пусть для элемента (1) последовательности* $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \uparrow \infty$ *и* $\beta_k \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют условию*

$$\liminf_{k\to\infty} \left| Re\left(f_{n_k} e^{i\beta_k}\right)\right|^{1/n_k} = \rho > 0, \tag{3}$$

и пусть существует $\lambda \in (0, 1]$ *такое, что*

$$\limsup_{\mu\to\infty} [\lambda \log \mu - W(\mu)] > 1 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{p}. \tag{4}$$

Тогда ряд (1) будет иметь конечную радиальную особую точку внутри угла $\Delta_{\pi\lambda}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n z^n$$

допускает однозначное аналитическое продолжение в угол $\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta_\sigma}$, где $\sigma=\pi(1-\lambda)$, если $\lambda\neq 1$, или в $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$, если $\lambda=1$. Согласно необходимой части теоремы 1.1 работы [6] будет существовать целая функция φ экспоненциального типа в правой полуплоскости и внутренне экспоненциального типа σ такая, что

$$(-1)^n\,\varphi(n)=f_n,\quad n\in\mathbb{N}\cap\{0\} \tag{5}$$

и

$$h_\varphi(\theta)\le\sigma|\sin\theta|,\quad |\theta|<\frac{\pi}{2},$$

где $h_\varphi(\theta)$ – индикатрисса функции φ. Из свойств функции φ следует, что в произвольном угле Δ_α, $\alpha\in(0,\pi/2)$ имеет место оценка (см. [7], стр. 97)

$$\log|\varphi(\zeta)|\le\sigma|\mathrm{Im}\zeta|+\varepsilon_\alpha(|\zeta|)\,|\zeta|+C, \tag{6}$$

где $\varepsilon_\alpha(r)\downarrow 0$ при $r\uparrow\infty$, а $C\ge 0$ – некоторая константа.

Во всей правой полуплоскости $\mathrm{Re}\zeta\ge 0$ имеем

$$\log|\varphi(\zeta)|\le C\,(|\zeta|+1). \tag{7}$$

Для $\mu>1$ обозначим через g_μ функцию Грина для круга

$$\mathcal{D}_\mu:=\{\zeta\in\mathbb{C},\ |\zeta-\mu|<\mu\}$$

с фиксированным полюсом в точке 1. Легко проверить, что

$$g_\mu(\zeta)=\log\left|\frac{\mu+\mu\zeta-\zeta}{\mu(\zeta-1)}\right|. \tag{8}$$

Для $\beta\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{N}$ определим целые по ζ функции

$$\Psi_k(\zeta,\beta)=\frac{1}{2}\left[\varphi(n_k\zeta)\,e^{i\beta}+\overline{\varphi(n_k\overline{\zeta})}\,e^{-i\beta}\right] \tag{9}$$

и применим к $\Psi_k(\zeta,\beta)$ и кругу $\mathcal{D}_\mu$ формулу Пуассона–Йенсена, записанную для точки $z=1$. Замечая, что $|\Psi_k(1,\beta)| = \left|\mathrm{Re}\left(f_{n_k}\, e^{i\beta}\right)\right|$, получим

$$\log\left|\mathrm{Re}\left(f_{n_k} e^{i\beta}\right)\right| + \sum_{\tau_\nu} g_\mu(\tau_\nu) \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{D}_\mu} \log|\Psi_k(\zeta,\beta)|\, \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial l}\, |d\zeta|, \tag{10}$$

где сумма в левой чсти берется по всем нулям (с учетом их кратности) функции $\Psi_k(\zeta,\beta)$ в интервале $[1,2\mu]$, а l – внутренняя нормаль.

Оценим сначала сверху интеграл J в правой части (10). С этой целью представим J в виде суммы интегралов J_1 и J_2 по кривым $\gamma_1 = \partial\mathcal{D}_\mu \bigcap (\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha)$ и $\gamma_2 = \partial\mathcal{D}_\mu \bigcap \Delta_\alpha$, $\alpha\in(0,\pi/2)$. Учитывая, что $|\zeta| \le 2\mu\cos\alpha$ для $\zeta\in\gamma_1$, из оценки (7) получим

$$J_1 < C\,(2\,\mu\, n_k\, \cos\alpha + 1)\,. \tag{11}$$

Далее, с учетом (6) имеем

$$J_2 < \frac{1-\lambda}{2} n_k \int_{\gamma_1} |\mathrm{Im}\zeta|\, \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial l}\, |d\zeta| + 2\,\mu\, n_k\, \varepsilon_\alpha\,(2\,\mu\, n_k\, \cos\alpha) + C. \tag{12}$$

Положим

$$J_0 \colon = \int_{\partial\mathcal{D}_\mu} |\mathrm{Im}\zeta|\, \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial l}\, |d\zeta|\,. \tag{13}$$

Учитывая лемму 2 из [4] и соотношение (8), будем иметь

$$J_0 = 2\int_0^{2\mu} g_\mu(t)\, dt = 2\,\frac{2\mu-1}{\mu-1}\log(2\mu-1). \tag{14}$$

Отсюда с учетом (11) и (12) получим

$$J < (1-\lambda)\, n_k\, \frac{2\mu-1}{\mu-1}\log(2\mu-1) + 2\,\mu\, n_k\, \varepsilon_\alpha\,(2\,\mu\, n_k\, \cos\alpha) + C\,(2\,\mu\, n_k\, \cos\alpha + 2)\,. \tag{15}$$

Теперь преобразуем и оценим снизу сумму в левой части (10). Обозначим через $m(t)$ число нулей (с учетом их кратности) функции $\Psi_k(\zeta,\beta)$ на интервале $[1,t]$. Положим

$$\sum\nolimits_{k,\mu} \colon = \sum_{\tau_\nu} g_\mu(\tau_\nu) = \int_1^{2\mu} g_\mu(\tau)\, dm(\tau). \tag{16}$$

С учетом соотношения (8) легко проверить, что функция $g_\mu(\tau) - \dfrac{2}{\tau}$ убывает на промежутке $(1, 2\,\mu]$, так что имеем $g_\mu(\tau) \ge \dfrac{2}{\tau} - \dfrac{1}{\mu}$ при $\tau\in(1,2\,\mu]$. Отсюда для $\sum_{k,\mu}$ получим

$$\sum\nolimits_{k,\mu} \ge 2\int_1^{2\mu} \frac{1}{\tau}\, dm(\tau) - \frac{1}{\mu} m(2\,\mu) = 2\int_1^{2\mu} \frac{m(\tau)}{\tau^2}\, d\tau. \tag{17}$$

Далее, пусть $W_k(\tau,\beta)$ - число перемен знака конечной последовательности $\operatorname{Re}\left(f_h e^{i\beta}\right)$, $n \in [n_k, \tau n_k]$. Согласно лемме 3 работы [4] имеем $m(\tau) \geq (\tau - 1)\, n_k - W_k(\tau,\beta) - 2$. Отсюда и из (17) следует

$$\sum\nolimits_{k,\mu} \geq 2n_k \log 2\mu - 2\int_1^{2\mu} \frac{W_k(\tau,\beta)}{\tau^2}\,d\tau - 2\left(1 - \frac{1}{2\mu}\right)(n_k + 2). \tag{18}$$

Умножая (10) на $(2n_k)^{-1}$, из (15) и (18) получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2n_k}\log\left|\operatorname{Re}\left(f_{n_k}e^{i\beta}\right)\right| + \log 2\mu - \int_1^{2\mu}\frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k\tau^2}\,d\tau \leq \\ &\leq (1-\lambda)\,\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\,\log(2\mu-1) + 1 + C\,\mu\cos\alpha + \gamma(n_k), \end{aligned} \tag{19}$$

где $\gamma(n_k) \to 0$ при $n_k \to \infty$.

После интегрирования по частям имеем

$$\int_1^{2\mu}\frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k\tau^2}\,d\tau \leq S_{Z_\beta}(n_k, 2\mu).$$

Следовательно, полагая в (19) $\beta = \beta_k$ и перейдя к верхнему пределу при $k \to \infty$, с учетом (3) будем иметь

$$\log 2\mu - W(2\mu) \leq 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + (1-\lambda)\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\,\log(2\mu-1) + C\,\mu\cos\alpha.$$

Отсюда при $\alpha \to \pi/2$ получим

$$\lambda\log 2\mu - W(2\mu) \leq 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + \delta(\mu),$$

где $\delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to +\infty$. Переходя здесь к верхнему пределу, придем к противоречию с условием (4).

3°. Положим далее

$$P{:}\ = \{n \in \mathbb{N}{:}\ f_n \neq 0\} = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Пусть теперь $f_n = |f_n|\,e^{i\omega_n}$, где ω_n выбраны так, что $|\omega_{n+1} - \omega_n| \leq \pi$. Определим для $\mu > 1$ и $n \in \mathbb{N}$

$$V^*(n,\mu){:}\ = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in[n,\mu n]}\frac{|\omega_{k+1} - \omega_k|}{k},$$

и для бесконечного множества $Q \subset \mathbb{N}$ положим

$$V_Q^*(\mu){:}\ = \limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in Q}} V^*(n,\mu).$$

Теорема 2. *Пусть для бесконечной последовательности $Q \subset \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in Q}} |f_n|^{1/n} = \rho > 0. \tag{20}$$

Если для некоторого числа $\lambda \in (0,1]$ имеем

$$\limsup_{\mu\to\infty} \left(\lambda \log \mu - V_Q^*(\mu)\right) > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}, \tag{21}$$

то ряд (1) будет иметь радиальную особенность в угле $\Delta_{\pi\lambda}$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Положим $Q = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, будем исходить из неравенства (19). Разделив на π, проинтегрируем обе его части по β от нуля до π. Получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2n_k}\log\frac{1}{2}|f_{n_k}| + \log 2\mu - \frac{1}{\pi}\int_1^{2\mu}\frac{1}{n_k\tau^2}\int_0^{\pi} W_k(\tau,\beta)\,d\beta\,d\tau \le \\ \le (1-\lambda)\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\log(2\mu-1) + C\mu\cos\alpha + \gamma(n_k).\end{gathered} \tag{22}$$

Далее, согласно оценке работы [4] (стр. 17) имеем

$$\int_0^{\pi} W_k(\tau,\beta)\,d\beta \le V(\tau,k) := \sum_{n\in[n_k,\tau n_k]} |\omega_{n+1}-\omega_n|. \tag{23}$$

С учетом этого неравенства и соотношения (20), после перехода в (22) к верхнему пределу, получим

$$\frac{1}{2}\log\rho + \log 2\mu - \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_1^{2\mu}\frac{V(\tau,k)}{n_k\tau^2}\,d\tau \le 1 + C\mu\cos\alpha + (1-\lambda)\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\log(2\mu-1). \tag{24}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_1^{2\mu}\frac{V(\tau,k)}{n_k\tau^2}\,d\tau \le V^*(n_k,2\mu). \tag{25}$$

При $\alpha \to \pi/2$ из (24) будем иметь

$$\lambda\log 2\mu - V_Q^*(\mu) \le 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + \delta(\mu),$$

где $\delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Это противоречит условию (21).

Далее мы будем использовать следующие обозначения : обозначим через $|I|$ длину отрезка $I \subset \mathbb{R}$; для множества $Q \subset \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{N}_Q(I) = \mathcal{N}(I)$ число элементов множества $Q \bigcap I$. При $I = [0,t], t > 1$ положим $\mathcal{N}_Q(I) = \mathcal{N}_Q(t) = \mathcal{N}(t)$.

Следствие 1. Пусть для элемента (1) последовательность $\mathcal{Q} \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет условию (20) и

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{Q}}(t)}{t} = 1. \tag{26}$$

Если для некоторого $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ существует конечный предел

$$\lim_{\substack{m_k\to\infty \\ m_k\in\mathcal{Q}}} \frac{f_{m_k} e^{i\theta_0 m_k}}{f_{m_{k+1}} e^{i\theta_0 m_{k+1}}} > 0, \tag{27}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ ряд (1) будет иметь конечную радиальную особенность в некотором направлении θ, $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Очевидно, что можно предположить $\theta_0 = 0$. Согласно теореме 2 достаточно доказать, что $V^*_{\mathcal{Q}}(\mu) = 0$ для любого $\mu > 1$. С этой целью покажем, что для любого $\mu > 1$ существует последовательность $n_k \in \mathcal{Q}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{N}(\tau n_k) - \mathcal{N}(n_k)}{(\tau - 1)n_k} = 1, \quad \text{при} \quad \tau \in (1, \mu]. \tag{28}$$

Пусть $I'_k \subset I_k$, $k \in \mathbb{N}$ и

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|I'_k|}{|I_k|} > 0.$$

Тогда легко проверить, что если $\mathcal{N}(I_k)/|I_k| \to 1$ при $k \to \infty$, то $\mathcal{N}(I'_k)/|I'_k| \to 1$. Пусть теперь $t_k \uparrow \infty$ – такая последовательность, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{N}(t_k)}{t_k} = 1. \tag{29}$$

Из вышесказанного следует, что для фиксированного $r_0 \in (0, \mu^{-1})$ и достаточно большого k существует число $n_k \in \mathcal{Q} \bigcap [r_0 t_k, \mu^{-1} t_k]$. Применяя то же замечание к интервалам $I_k = [0, t_k]$ и $I'_k = [n_k, \tau n_k]$, $\tau \in (1, \mu]$, с учетом (29) получим (28).

Далее, с учетом (27) легко проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathcal{Q}_{n_k,\mu}} \frac{|\omega_{n+1} - \omega_n|}{n} = 0, \tag{30}$$

где $\mathcal{Q}_{n_k,\mu} = \mathcal{Q} \bigcap [n_k, \mu n_k]$.

Пусть теперь $\mathcal{Q}'_{n_k,\mu} = [n_k, \mu n_k] \setminus \mathcal{Q}$ и $\mathcal{N}'_k(\tau)$ – число элементов множества $\mathcal{Q}'_{n_k,\mu} \bigcap [n_k, \tau n_k]$. Имеем

$$V'(n_k, \mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathcal{Q}'_{n_k,\mu}} \frac{|\omega_{n+1} - \omega_n|}{n} \le \int_1^\mu \frac{1}{n_k \tau} d\mathcal{N}'_k(\tau) = -\frac{\mathcal{N}'_k(\tau)}{\mu n_k} + \int_1^\mu \frac{\mathcal{N}'_k(\tau)}{n_k \tau^2} d\tau. \tag{31}$$

Так как согласно (28) $\dfrac{\mathcal{N}_k'(\tau)}{n_k(\tau-1)} \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $\tau \in (1, \mu]$, то из (31) получим, что $V'(n_k, \mu) \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (30) окончательно получим, что $V_Q^*(\mu) = 0$.

Далее, для бесконечного множества $Q \subset \mathbb{N}$ положим

$$S_{P,Q}(\mu) = \liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in Q}} S_P(n,\mu), \qquad \lambda_{P,Q} = \liminf_{\mu\to\infty} \frac{S_{P,Q}(\mu)}{\log \mu}.$$

Следствие 2 (о лакунах). Пусть для элемента (1) последовательность $Q \subset P$ удовлетворяет условию (20) и существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\limsup_{\mu\to\infty} [\lambda \log \mu - S_{P,Q}(\mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}. \tag{32}$$

Тогда ряд (1) имеет конечную радиальную особенность в любом открытом угле Δ раствора $2\pi\lambda$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$V_Q^*(\mu) = \liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in Q}} \frac{1}{\pi} \sum_{k\in[n,\mu n]} \frac{|\omega_k - \omega_{k-1}|}{k} \le S_{P,Q}(\mu)$$

и применить теорему 2 к ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{i\theta n} z^n$, где $\theta \in [0, 2\pi)$.

Следствие 3. Если в условиях следствия 2 имеем, что $\lambda = \lambda_{P,Q} < 1$, то в произвольном угле Δ раствора больше $2\pi\lambda$ элемент (1) имеет конечную радиальную особенность.

4°. В п. 5 мы покажем, что теорема 2 теряет силу, если условие (20) заменить более слабым условием

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{\mu\ge t\\ n\in Q_t}} [\lambda \log \mu - V^*(n,\mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}, \tag{33}$$

где $Q_t = Q \bigcap [t, +\infty)$. Тем не менее, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть для элемента (1) последовательность $Q = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ удовлстворяет условию (20) и для некоторого числа $\lambda \in (0, 1]$ выполнено условие (33). Тогда либо ряд (1) имеет конечную радиальную особенность в $\Delta_{\pi\lambda}$, либо его аналитическое продолжение в $\Delta_{\pi\lambda}$ неограничено. Это означает, что в $\overline{\Delta}_{\pi\lambda} \bigcup \{\infty\}$ ряд (1) имеет радиальную особенность в некотором направлении θ, $|\theta| < \pi\lambda$.*

Для доказательства нам понадобится следующее

Предложение 1. *Пусть элемент (1) допускает аналитическое продолжение f в открытый угол $\Delta'_\sigma = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_\sigma$, $\sigma \in (0, \pi)$, и для некоторых констант $\alpha > 0$ и $C > 0$ имеет место оценка*

$$|f(z)| \leq C \left(|z|^{-\alpha} + 1\right), \quad z \in \Delta'_\sigma. \tag{34}$$

Тогда существует голоморфная в правой полуплоскости функция φ, удовлетворяющая условию

$$\varphi(n) = f_n, \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \tag{35}$$

и такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leq C_\varepsilon \exp\left(\sigma\,|\eta| + \varepsilon\xi\right), \quad \xi \geq 0. \tag{36}$$

Доказательство. Для $r \in (0,1)$ и $\delta \in (0, 1-\sigma)$ положим

$$\gamma'_{r,\delta} = \{z\colon\ |z| = r\} \bigcap \Delta_{\sigma+\delta}, \qquad \gamma''_{r,\delta} = \{z\colon\ \arg z = \sigma + \delta, |z| \geq r\},$$

и определим для $\xi \geq 0$ функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_{r,\delta}} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''_{r,\delta}} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}}\,dz = I_1 + I_2,$$

где $z^\zeta = \exp\left(\zeta \log z\right)$, $\log z = \log|z| + i \arg z$, $|\arg z| < \pi$. Сходимость интеграла I_2 при $\xi \geq 0$ следует из условия (34). Далее, если положить $\gamma_R = \{z\colon\ |z| = R\} \bigcap \Delta'_\sigma$, то из (34) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}}\,dz \to 0, \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Отсюда очевидным образом следуют равенства (35), а также независимость значений φ от выбора r и δ. С учетом (34) имеем

$$|I_1| \leq C_r \exp\left((\sigma + \delta)\,\eta - \xi\,\log r\right), \qquad |I_2| \leq C_1 \exp\left((\sigma+\delta)\,\eta - \xi\,\log r\right),$$

где $C_r = \max_{|z|=r} |f(z)|$, а C_1 не зависит от r и δ.

Отсюда при $\delta \to 0$ будем иметь

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leq (C_1 + C_r)\,\exp\left(\sigma\,|\eta| - \xi\,\log r\right).$$

Выбирая r достаточно близким к 1, придем к (36).

Доказательство теоремы 3. Предположим, что элемент (1) допускает ограниченное аналитическое продолжение f в угол $\Delta_{\pi\lambda}$. Тогда, применяя предложение 1 к ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n z^{n-1} = (f(-z) - f_0)/z,$$

определим функцию $\Psi_k(\zeta,\beta)$ по формуле (9). С учетом (36) оценим интеграл J в правой части (10). Имеем

$$J \le \frac{n_k}{2}\,(1-\lambda)\,J_0 + \varepsilon\, n_k + \log C_\varepsilon,$$

где J_0 определяется формулой (13). Отсюда с учетом (14), (16) и (18), после умножения (10) на $(2\,n_k)^{-1}$ будем иметь

$$\frac{1}{2\,n_k}\log\left|\operatorname{Re}\left(f_{n_k}e^{i\beta}\right)\right| + \log 2\mu - \int_1^{2\mu}\frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k\,\tau^2}\,d\tau \le$$
$$\le (1-\lambda)\,\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\,\log(2\mu-1) + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0(n_k),$$

где $\gamma_0(n_k)\to 0$ при $n_k\to\infty$ и не зависит от μ. Интегрируя обе части полученного неравенства от нуля до π, с учетом (23) и (25) получим

$$\frac{1}{2\,n_k}\log\frac{|f_{n_k}|}{2} + \log 2\mu - V^*(n_k,\mu) \le (1-\lambda)\,\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\,\log(2\mu-1) + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0(n_k).$$

Отсюда с учетом (20) имеем

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{\substack{\mu\ge t\\ n_k\ge t}}\ [\lambda\,\log\mu - V^*(n_k,\mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя ε к нулю, придем к противоречию с условием (32).

Следствие 4 (о лакунах). Пусть для элемента (1) и последовательности $Q\subset P$ выполнено условие (20), и пусть существует число $\lambda\in(0,1]$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{\substack{\mu\ge t\\ n\in Q_t}}\ [\lambda\,\log\mu - S_P(n,\mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}. \tag{37}$$

Тогда, если ряд (1) не имеет конечной радиальной особенности в некотором угле Δ раствора $2\pi\,\lambda$, то его аналитическое продолжение в Δ неограниченно.

Для доказательства заметим, что

$$V^*(n,\mu) = \varepsilon(n,\mu) + \frac{1}{\pi}\sum_{k\in[n,\mu\,n]}\frac{|\omega_k - \omega_{k-1}|}{k} \le S_P(n,\mu) + \varepsilon(n,\mu),$$

где $\varepsilon(n,\mu)\to 0$ при $\mu\to\infty$ и $n\to\infty$, и применим теорему 3 к ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\,e^{i\theta\,n}z^n$, $\theta\in[0,2\pi)$.

Следствие 5. Пусть для элемента (1) последовательность $Q = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (20) и существует последовательность $\mu_k \uparrow \infty$ такая, что

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{S_P(n_k, \mu_k)}{\log \mu_k} = \tau < 1, \tag{38}$$

Тогда ряд (1) в любом замкнутом угле $\overline{\Delta}$ раствора $2\pi\tau$ либо имеет конечную радиальную особенность, либо ∞ является для него радиальной особенностью изнутри $\overline{\Delta}$.

Доказательство. Предположим, что элемент (1) допускает аналитическое продолжение f в некоторый угол $\overline{\Delta}$ раствора $2\pi\tau$ и бесконечность не является для него радиальной особенностью в некотором направлении θ, $e^{i\theta} \in \overline{\Delta}$. Тогда, в частности, f допускает ограниченное аналитическое продолжение в некоторый угол $\Delta_1 \supset \overline{\Delta}$, что невозможно, так как при условии (38) к ряду (1) применимо следствие 4 для любого $\lambda > \tau$.

5°. В этом пункте мы приводим пример степенного ряда, допускающего аналитическое продолжение в область $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, номера ненулевых коэффициентов которого удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \sum_{m_k \le n} \frac{1}{m_k} = 0. \tag{39}$$

Так как из условия (39) следует, что ряд (1) удовлетворяет условию (37) для любого $\lambda \in (0, 1]$, то этот пример показывает, что условие (32) в следствии 2 нельзя заменить более слабым условием (37).

Для начала покажем, что для любых жордановых областей U и V, $0 \notin \overline{V} \subset U$ найдется многочлен P, $P(0) = 0$ такой, что некоторая компонента γ_0 лемнискаты $\{z\colon |P(z)| = 1\}$ лежит в области U и содержит внутри себя область $\overline{V}$, причем $P'(z) \neq 0$, $z \in \gamma_0$.

Пусть g, $g(0) = 0$ – конформное отображение области $\overline{U}$ на единичный круг. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\overline{V} \subset \{z\colon |g(z)| \le 1 - \varepsilon\} \tag{40}$$

и

$$|g(z)| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in U \setminus \overline{V}. \tag{41}$$

Выберем теперь многочлен Q, $Q(0) = 0$ так, чтобы

$$|Q(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in \overline{U}. \tag{42}$$

Отсюда с учетом (40) имеем $|Q(z)| < 1-\varepsilon/2$, $z \in \overline{V}$. Следовательно, $\overline{V}$ содержится внутри некоторой компоненты γ_0 лемнискаты $\gamma = \{z\colon\ |Q(z)| = 1-\varepsilon/2\}$. С другой стороны, для $z \in \partial U$ имеем $|Q(z)| > |g(z)| - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon/2$. Отсюда следует, что $\gamma_0 \subset U$.

Далее, если бы $Q'(z_0) = 0$, где $z_0 \in \gamma_0$, то в U лежела бы еще одна компонента лемнискаты γ, внешняя по отношению к γ_0. И, следовательно, $Q(z) = 0$ для некоторой точки $z \in U \setminus \overline{V}$, что невозможно согласно (41) и (42). Остается положить $P = (1 - \varepsilon/2)^{-1}\, Q$.

Пусть теперь V_k – последовательность жордановых областей такая, что $0 \in \overline{V}_k \subset V_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Для каждой пары V_k, V_{k+1} подберем многочлен P_k, удовлетворяющий вышеуказанным условиям, и обозначим через γ_k соответствующую компоненту лемнискаты $\{z\colon\ |P_k(z)| = 1\}$. Полагая

$$r_k = \min_{z \in \gamma_k} |z|, \qquad d_k = \deg P_k,$$

имеем, что $r_k \to 1$ при $k \to \infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем последовательность $\nu_p^{(k)} \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\nu_{p+1}^{(k)} > d_k\, \nu_p^{(k)}. \tag{43}$$

Так как последовательность ненулевых коэффициентов ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} w^{\nu_p^{(k)}} \tag{44}$$

будет иметь плотность 0, то согласно теореме Фабри о лакунах единичная окружность $\{w\colon\ |w| = 1\}$ будет для него естественной границей. Тогда γ_k будет естественной границей для суммы ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} [P_k(z)]^{\nu_p^{(k)}}. \tag{45}$$

Действительно, пусть ряд (45) допускает аналитическое продолжение F в окрестность некоторой точки $z_0 \in \gamma_k$. Тогда $F \circ P_k^{-1}$ будет продолжением ряда (44) в окрестности точки $w_0 = P_k(z_0)$, где P_k^{-1} – определенная в окрестности точки w_0 функция, обратная к P_k, $(P_k'(z_0) \neq 0)$.

Если обозначить через α_{kn} коэффициенты Тейлора в точке 0 ряда (45), то

$$\limsup_{n\to\infty} |\alpha_{kn}|^{1/n} = r_k^{-1}. \tag{46}$$

Заметим, что как следует из условия $P_k(0) = 0$ и из (43), частные суммы ряда (45) являются последовательностью частных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn}\, z^n$, причем $\alpha_{kn} = 0$, $n \notin \bigcup_{p=1}^{\infty} [\nu_p^{(k)}, d_k\, \nu_p^{(k)}]$. Далее, выберем по индукции последовательность λ_k следующим образом. Фиксируем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, $\varepsilon_k > 0$ и положим $\lambda_1 = \nu_1^{(1)}$. Допуская, что λ_r выбрано при $r < k$, выберем λ_k. Пусть $A > 0$ такое, что при $m > A$

$$|P_k(z)|^m < \varepsilon_k, \qquad z \in \overline{V}_k \tag{47}$$

и

$$\frac{1}{\log(m\, d_k)} \sum_{n=d_{k-1}\lambda_{k-1}+1}^{m} \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon_k. \tag{48}$$

Теперь согласно (46) можем выбрать

$$\lambda_k = \nu_{pk}^{(k)} > A \tag{49}$$

так, чтобы для некоторого $n_k \in [\lambda_k, d_k\lambda_k]$

$$|\alpha_{kn_k}|^{n_k^{-1}} > r_k^{-1} - \varepsilon_k. \tag{50}$$

Рассмотрим далее ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} [P_k(z)]^{\lambda_k}. \tag{51}$$

Пусть α_n – коэффициенты при z^n после раскрытия скобок. Имеем

$$\alpha_n = \alpha_{kn} \quad \text{при} \quad n \in [\lambda_k, d_k\lambda_k] \quad \text{и} \quad \alpha_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} [\lambda_k, d_k\lambda_k]. \tag{52}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, z^n \tag{53}$$

будет искомым. Действительно, согласно (47) и (49) ряд (51) сходится равномерно внутри области $\mathbf{C} \setminus [1, +\infty)$. Следовательно

$$\limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{1/n} \leq 1.$$

С другой стороны, так как $r_k \to 1$ при $k \to \infty$, то из (50) имеем

$$\lim_{n_k \to \infty} |\alpha_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда (53) равен 1, а сумма ряда (51) является аналитическим продолжением в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Соотношение же (39) легко проверяется с учетом (48), (49) и (52).

В заключение автор выражает свою признательность профессору Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные обсуждения.

ABSTRACT. The paper considers singularities of power series on or beyond the boundary of the circle of convergence. Sufficient conditions are found that guarantee the presence of radial singular points of a series in a given angular domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fabry, "Sur les points singuliers d'une serie de Taylor" [in French], J. de Math. Pures et appl., (5) 4, pp. 317 — 358, 1898.
2. Л. Бибербах, Аналитическое продолжение, М., Наука, 1955.
3. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, Степенные ряды : аналитическое продолжение и локализация особенностей, Изд. Ереванского университета, 1991.
4. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 3 — 21, 1987.
5. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. II, М., ГИТТЛ, 1956.
6. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. Сборник, т. 5, стр. 24 — 44, 1984.
7. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

5 июня 1996 Ереванский государственный университет

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

М. А. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

В статье установлены параметрические представления весовых классов $h^p(\omega)$ функций, гармонических в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$. Найден общий вид линейных непрерывных функционалов на $h^p(\omega)$.

ВВЕДЕНИЕ

В 1945 году М. М. Джрбашян [1], [2] получил интегральные представления и теоремы единственности для классов $H^p(\alpha)$ аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left\{ \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p (1-r^2)^\alpha r \, dr \, d\theta \right\}^{1/p}.$$

(в дальнейшем эти классы обычно обозначались A^p_α). В частности, им было установлено, что любая функция $f \in H^p(\alpha)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\varphi})^{\alpha+2}} f(\rho e^{i\varphi}) \rho d\rho d\varphi. \tag{1}$$

Пользуясь этим представлением и одной его модификацией, Ф. А. Шамоян [3] – [6] установил представления непрерывных линейных функционалов в различных весовых пространствах голоморфных функций многих переменных.

Подобное (1) представление для весовых пространств $h^p(\omega)$ *гармонических* в n–мерном шаре функций было найдено в работе [7]. Данная же статья посвящена исследованию весовых пространств функций, гармонических в *верхнем полупространстве* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$.

Первый параграф содержит необходимые для дальнейшего изложения определения и вспомогательные результаты, в основном относящиеся к некоторым интегральным операторам в весовых пространствах L^p в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Во втором параграфе установлены параметрические представления классов $h^p(\omega)$, а в третьем – найден общий вид непрерывного линейного функционала на $h^p(\omega)$.

Автор благодарен А. М. Джрбашяну за внимание к работе и поддержку.

§1. О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$

1.1. Всюду ниже будем считать, что

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \\ x_{n+1} > 0,\ x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Меру Лебега на $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать $dx = dx'dx_{n+1}$, где $dx' = dx_1 \cdots dx_n$. Далее, через $h(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ будем обозначать множество всех функций, гармонических в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, а через S – множество функций, *правильно меняющихся* на $(0, +\infty)$ (определение см. в [8], гл. I, §§1, 2). Как доказано в работе [8], любая функция $\omega(x_{n+1}) \in S$ допускает представление

$$\omega(x_{n+1}) = x_{n+1}^{\alpha} \exp\left\{\int_a^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t}\, dt\right\}, \tag{1.1}$$

где $\alpha \in (1, +\infty)$ и $a > 0$ – некоторые числа, а $\mathcal{E}(t)$ – положительная, непрерывная на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\mathcal{E}(t) = o(1)$ при $t \to +\infty$. Как нетрудно видеть, из этого представления следует существование постоянной B_ω такой, что

$$0 \le \mathcal{E}(t) \le B_\omega, \quad t \in [a, +\infty). \tag{1.2}$$

Всюду ниже мы будем полагать, что $\omega \in S$.

Через $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$, $0 < p < +\infty$ (или $L^p(\omega)$) будем обозначать класс измеримых в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функций f, для которых

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left\{\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |f(x', x_{n+1})|^p \omega(x_{n+1}) dx' dx_{n+1}\right\}^{1/p} < +\infty.$$

При $p = +\infty$ будем полагать, что $L^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega\right)$ (или $L^\infty(\omega)$) – банахово пространство функций с конечной равномерной нормой

$$\|f\|_{L^\infty(\omega)} = \operatorname*{ess\ sup}_{x_{n+1}>0} |f(x', x_{n+1})|\omega(x_{n+1}).$$

Через $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$, $0 < p \le +\infty$, (или $h^p(\omega)$) будем обозначать пространство всех гармонических функций из $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$. Как нетрудно убедиться, $h^p(\omega)$ при $1 \le p < +\infty$ является банаховым пространством с указанной нормой. Если же $0 < p < 1$, то формулой

$$d(u, v) = \|u - v\|^p_{h^p(\omega)}, \quad u, v \in h^p(\omega)$$

в $h^p(\omega)$ определяется метрика.

Как известно, ядром Пуассона в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ называется функция

$$P(x) = P(x', x_{n+1}) = C_n \frac{x_{n+1}}{\left(|x'|^2 + x^2_{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$

где $C_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$. Введем в рассмотрение функцию двух переменных

$$P_m(x, y) = \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}} P(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}), \tag{1.3}$$

где $m \ge 0$ – целое число. При этом, для простоты будем полагать, что

$$P_0(x, y) \equiv P(x' - y', x_{n+1} + y_{n+1}) = C_n \frac{|x' - y'|^2 - (n+1)(x_{n+1} + y_{n+1})^2}{\left(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2\right)^{\frac{n+3}{2}}}. \tag{1.3'}$$

1.2. Первая оценка нижеприводимой леммы установлена в работе [9], а вторая является ее простым следствием.

Лемма 1.1. *При любом целом $m \ge 0$*

$$|P_m(x, y)| \le C_{n,m}\left(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2\right)^{-\frac{n+m+1}{2}},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_m(x, y)|\,dy' \le C(x_{n+1} + y_{n+1})^{-(m+1)}. \tag{1.4}$$

В дальнейшем нам понадобится вспомогательная функция

$$\mathcal{X}(x_{n+1}) = x^{-\gamma/pq}_{n+1}, \qquad 0 < \gamma < B_\omega, \quad q = \frac{p}{p-1}, \tag{1.5}$$

где $1 < p < +\infty$, а B_ω – постоянная, участвующая в оценке (1.2). В дальнейшем через C будем обозначать различные постоянные. Параметры, от которых они зависят, при необходимости будут отмечены в индексе.

Лемма 1.2. *Пусть $\omega \in S$ – любая функция. Тогда при любых $p \in (1,+\infty)$, $q = p/(p-1)$, $0 < \gamma < 1$, $\alpha > \gamma/q - 1$ и любом неотрицательном целом $m > B_\omega - \gamma/q$ имеет место оценка*

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le C_{\alpha,m} \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p.$$

Доказательство. Ясно, что при $0 < x \le 1$

$$\int_0^x \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le x^{-m-1} \int_0^x \frac{\omega(y)}{y^{\gamma/q}} dy. \tag{1.6}$$

Интегрированием по частям приходим к равенству

$$\int_0^x \frac{\omega(y)}{y^{\gamma/q}} \left(1 + \frac{\alpha + \mathcal{E}(y)}{1-\gamma/q}\right) dy = \frac{\omega(x) x^{1-\gamma/q}}{1-\gamma/q}.$$

С учетом (1.2) получим

$$\int_0^x \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le \frac{\omega(x) x^{1-\gamma/q}}{\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\left(1+\frac{\alpha+B_\omega}{1-\gamma/q}\right)} = \frac{\omega(x)[\mathcal{X}(x)]^p x}{\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\left(1+\frac{\alpha+B_\omega}{1-\gamma/q}\right)}.$$

Тем самым, ввиду (1.6)

$$\int_0^x \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le C_\alpha \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p, \quad 0 < x \le 1. \tag{1.7}$$

Теперь заметим, что при $x \ge 1$ имеем

$$\int_x^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy = \int_x^{+\infty} \frac{\omega(y) dy}{y^{\gamma/q}(x+y)^{m+1}} \le \int_x^{+\infty} \frac{\omega(y) dy}{y^{m+1+\gamma/q}}. \tag{1.8}$$

Интегрированием по чатсям находим, что

$$\int_x^{+\infty} \frac{\omega(y)}{y^{m+1+\gamma/q}} \left(1 - \frac{\alpha + \mathcal{E}(y)}{m+\gamma/q}\right) dy = \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p.$$

Подставив последнее выражение в (1.8), получим

$$\int_x^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le C_{\alpha,m} \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p, \quad 1 \le x < +\infty.$$

Объединяя эту оценку с (1.7), приходим к утверждению леммы.

Нам понадобится также приведенное ниже обобщение известного результата Харди–Литтлвуда, установленное в работе [10].

Лемма 1.3. *Пусть функция u гармонична в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, и пусть $B \subset G$ – шар с центром в точке x и $|B|$ – его лебегова мера. Тогда при любом $p \in (0, +\infty)$ имеет место оценка*

$$|u(x)|^p \leq \frac{C_p}{|B|} \int_B |u(y)|^p dy. \tag{1.9}$$

Лемма 1.4. *Пусть $0 < p < +\infty$ – любое число, функция ω удовлетворяет всем условиям леммы 1.2, $u \in h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ и $0 < p < +\infty$. Тогда имеет место оценка*

$$|u(x)| \leq C_n \frac{||u||_{h^p(\omega)}}{[x_{n+1}^{n+1}\omega(x_{n+1})]^{1/p}}, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Доказательство. Пусть в оценке (1.9) $B_r(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ – шар радиуса $r = x_{n+1}/2$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Заметим, что $|B_r(x)| = C_n x_{n+1}^{n+1}$ и при любом $y \in B_r(x)$ имеем $2y_{n+1}/3 \leq x_{n+1} \leq 2y_{n+1}$. Из (1.9) следует, что

$$|u(x)|^p\omega(x_{n+1}) \leq C_n\, x_{n+1}^{-n-1} \int_{B_r(\omega)} |u(y', y_{n+1})|^p \omega(x_{n+1}) dy' dy_{n+1}. \tag{1.10}$$

Теперь заметим, что если в представлении (1.1)

a) $\alpha \in (-1, 0)$, то

$$\omega(x_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\, y_{n+1}\right)^\alpha \exp\left(\int_a^{2y_{n+1}/3} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt\right) \exp\left(\int_{2y_{n+1}/3}^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t}\, dt\right) \leq$$

$$\leq \omega\left(\frac{2}{3}\, y_{n+1}\right) \exp\left(\int_{x_{n+1}/3}^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt\right) \leq C_n(\omega)\omega(y_{n+1}),$$

b) если же $\alpha \in [0, +\infty)$, то $x_{n+1}^\alpha \leq (2y_{n+1})^\alpha$ и

$$\omega(x_{n+1}) \leq (2y_{n+1})^\alpha \exp\left(\int_a^{2y_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt\right) \leq \omega(2y_{n+1}) \leq C_n(\omega)\omega(y_{n+1}).$$

Тем самым, из (1.10) следует, что $|u(x)|^p\omega(x_{n+1}) \leq C_n x_{n+1}^{-n-1} ||u||^p_{h^p(\omega)}$ и лемма доказана.

1.3. Следующие теоремы необходимы для дальнейшего изложения, к тому же представляют самостоятельный интерес.

Теорема 1.1. *Пусть функция $\omega \in S$ и число $\alpha > -1$ удовлетворяет условиям леммы 1.2, а $m > \alpha$ – целое число. Тогда оператор*

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y_{n+1}^m P_m(x, y) f(y', y_{n+1}) dy \equiv u(x), \quad f \in L^1\left(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega\right) \tag{1.11}$$

является ограниченным проектором из $L^1\left(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega\right)$ *в* $h^1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega)$. *При этом, существует постоянная* $C = C_{\alpha,n}$ *такая, что*

$$\|u\|_{h^1(\omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\omega)}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Из (1.11) ясно, что функция $u(x)$ гармонична в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Тем самым, достаточно доказать лишь оценку (1.12). С этой целью заметим, что в силу (1.4)

$$\|u\|_{h^1(\omega)} = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x',x_{n+1})|\omega(x_{n+1})dx'dx_{n+1} \leq$$
$$\leq \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\omega(x_{n+1})dx'dx_{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y_{n+1}^m|P_m(x,y)||f(x',x_{n+1})|dy'dy_{n+1} =$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',y_{n+1})|y_{n+1}^m dy'dy_{n+1}\int_0^{+\infty}\omega(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|P_m(x,y)|dy' \leq$$
$$\leq C_n\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',y_{n+1})|y_{n+1}^m dy'dy_{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\omega(x_{n+1})dx_{n+1}}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}}.$$

Отсюда, в силу леммы 1.2

$$\|u\|_{h^1(\omega)} \leq C_{\alpha,n}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',y_{n+1})|\omega(y_{n+1})dy'dy_{n+1} = C_{\alpha,n}\|f\|_{L^1(\omega)},$$

и теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* $\omega \in S$, $\alpha > -1$, $p \in (1,+\infty)$, *а* $m \geq 0$ *– целое число такое, что* $m > (1+\alpha)/p - 1$. *Тогда оператор* T_m, *определенный по формуле (1.11), является ограниченным проектором из* $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega)$ *в* $h^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega)$. *При этом существует постоянная* $C = C_{p,\alpha}$ *такая, что*

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Из (1.11) в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|u(x)| \leq \left\{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y_{n+1}^m|P_m(x,y)|[\mathcal{X}(y_{n+1})]^q dy'dy_{n+1}\right\}^{1/q} \times$$
$$\times\left\{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y_{n+1}^m|P_m(x,y)|\frac{|f(y',y_{n+1})|^p}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p}dy'dy_{n+1}\right\}^{1/p}$$

В силу лемм 1.1 и 1.2

$$\left\{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y_{n+1}^m|P_m(x,y)|[\mathcal{X}(y_{n+1})]^q dy'dy_{n+1}\right\}^{1/q} \leq$$

$$\le \left\{ C_n \int_0^{+\infty} \frac{y_{n+1}^m [\mathcal{X}(y_{n+1})]^q}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}} dy_{n+1} \right\}^{1/q} \le C_{n,p}\mathcal{X}(x_{n+1}).$$

Тем самым

$$\|u\|^p_{h^p(\omega)} \le C \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_{n+1}^m |f(y', y_{n+1})|^p}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} dy' dy_{n+1} \int_0^{+\infty} \omega(x_{n+1})[\mathcal{X}(x_{n+1})]^p dx_{n+1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} |P_m(x,y)| dx' \le C \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_{n+1}^m |f(y', y_{n+1})|^p}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} dy' dy_{n+1} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(x_{n+1})]^p \omega(x_{n+1})}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}} dx_{n+1} \le C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

Отсюда следует неравенство (1.13), и теорема доказана.

Для формулировки следующей теоремы введем обозначение

$$\omega_m(x_{n+1}) = \omega\left(\frac{x_{n+1}^m}{\omega(x_{n+1})}\right)^p, \quad x_{n+1} > 0,\ p > 1. \tag{1.14}$$

Теорема 1.3. *Пусть $\omega \in S$ - любая функция. Тогда при любых $\alpha > -1$, $1 < p < +\infty$ и целом $m \ge 0$ оператор*

$$T_m f(x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y', y_{n+1}) \omega(y_{n+1}) P_m(x,y) dy' dy_{n+1} = u(x)$$

является ограниченным проектором из $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ в $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega_m)$. При этом существует постоянная $C = C_n$ такая, что

$$\|u\|_{h^p(\omega_m)} \le C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

Доказательство. В силу неравенства Гёльдера

$$|u(x)|^p \le \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y', y_{n+1})|^p \omega(y_{n+1})}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} |P_m(x,y)| dy' dy_{n+1} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{X}(y_{n+1})]^q |\omega(y_{n+1})| P_m(x,y)| dy' dy_{n+1} \right\}^{p/q}.$$

Используя лемму 1.2, находим, что

$$\left\{ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{X}(y_{n+1})]^q |\omega(y_{n+1})| P_m(x,y)| dy' dy_{n+1} \right\}^{p/q} \le$$

$$\le \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^q \omega(y_{n+1})}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}} dy_{n+1} \right\}^{p/q} \le C[\mathcal{X}(x_{n+1})]^p \left(\frac{\omega(x_{n+1})}{x_{n+1}^m}\right)^{p/q}.$$

Отсюда следует оценка

$$\|u\|_{h^p(\omega_m)} \le C \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y', y_{n+1})|^p \omega(y_{n+1})}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} dy' dy_{n+1} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} [\mathcal{X}(x_{n+1})]^p x_{n+1}^m dx_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |P_m(x,y)| dx \le C\|f\|^p_{L^p(\omega)},$$

доказывающая нужное утверждение.

§ 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССОВ $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+;\omega)$

2.1. При $1 \le p < +\infty$ имеет место

Теорема 2.1. *Пусть $\omega \in S$ – любая функция, и пусть $\alpha > -1$ и $p \in [1,+\infty)$ – любые числа, а $m > (\alpha+1)/p - 1$ – целое неотрицательное число. Тогда следующие утверждения равносильны :*

1) $u \in h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$;

2)
$$u(x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} y^m_{n+1} P_m(x,y) f(y', y_{n+1}) dy' dy_{n+1}, \tag{2.1}$$

где $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+ \omega)$, при этом $||u||_{h^p(\omega)} \le C||f||_{L^p(\omega)}$ для некоторой постоянной $C_{p,\omega}$.

Доказательство. Согласно теоремам 1.1 – 1.3 из 2) следует 1). Докажем обратное утверждение. Из леммы 1.1 и того, что $\omega(x_{n+1})$ сверху и снизу оценивается степенями x_{n+1} (последнее вытекает из формул (1.1) и (1.2)) следует, что при выполнении 1) интеграл (2.1) сходится. Оставшуюся часть доказательства мы опускаем, ибо оно сводится к повторению части доказательства теоремы 1 работы [11].

2.2. В случае, когда $0 < p \le 1$ интеграл (1.11) может быть расходящимся. При $p = 1$ имеют место два представления, для установления которых нам понадобится следующая лемма из [12] (гл. 6, теорема 1).

Лемма 2.1. *В $\mathbb{R}^{n+1}_+$ существует набор $\{\Delta_k\}_0^\infty$ замкнутых кубов со сторонами, параллельными координатным осям,* такой, что

1) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \mathbb{R}^{n+1}_+$,

2) внутренности Δ_k попарно не пересекаются,

3) $diam\,\Delta_k = dist\left(\Delta_k C\mathbb{R}^{n+1}_+\right) \le 4 diam\,\Delta_k$.

Если Δ^*_k $(k \ge 1)$ – кубы с теми же центрами, что и Δ_k, но растянутые на 5/4, то из системы $\{\Delta^*_k\}_1^\infty$ можно выбрать конечное покрытие $\mathbb{R}^{n+1}_+$ (любой куб Δ^*_k $(k \ge 1)$ пересекается не более чем с 12^{n+1} кубами из $\{\Delta_k\}_1^\infty$).

Опираясь на эту лемму, повторением рассуждений из доказательства леммы 1.4 приходим к следующему результату.

Лемма 2.2. *Пусть Δ_k – какой-либо куб из набора $\{\Delta_k\}_1^\infty$ леммы 2.1, а $x^{(k)}$ – центр этого куба. Если функция u гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, то при любых $p \in (0, +\infty)$ и $\omega \in S$ имеет место оценка*

$$\max_{x\in\Delta_k} |u(x)|^p \omega\left(x_{n+1}^{(k)}\right) \le \frac{C_\omega}{|\Delta_k^*|} \int_{\Delta_k^*} |u(y)|^p \omega(y_{n+1}) dy' dy_{n+1},$$

где $x_{n+1}^{(k)}$ – $(n+1)$-ая координата точки $x^{(k)}$.

Основным результатом статьи для случая $0 < p \le 1$ является

Теорема 2.2. *Пусть $\omega \in S$ – любая функция, и пусть $\alpha > -1$, $0 < p \le 1$ – любые числа, а m – натуральное число такое, что $m > (1+\alpha+n)/p - n - 1$. Тогда класс $h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y_{n+1}^m P_m(x,y) d\mu(y), \tag{2.2}$$

где μ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}_+^{n+1}$, подчиненная условию

$$\sum_{k=1}^\infty [\mu(\Delta_k)]^p \omega\left(|\Delta_k|^{\frac{1}{n+1}}\right) |\Delta_k|^{1-p} < +\infty,$$

где Δ_k – кубы из леммы 2.1.

Доказательство. Сначала докажем, что любая функция, допускающая представление (2.2), принадлежит $h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$. Из (2.2) следует, что

$$\|u\|_{h^p(\omega)}^p \le \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \omega(x_{n+1}) \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y_{n+1}^m |P_m(x,y)| d\mu(y)\right)^p dx \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \omega(x_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^\infty \int_{\Delta_k} y_{n+1}^m |P_m(x,y)| \mu(y)\right)^p dx.$$

Отсюда, воспользовавшись равенством $(a+b)^p \le a^p + b^p$, $(a, b \ge 0,\ p \in (0,1])$, получаем

$$\|u\|_{h^p(\omega)}^p \le \sum_{k=1}^\infty |\mu(\Delta_k)|^p \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \max_{y\in\Delta_k} \left(y_{n+1}^m |P_m(x,y)|\right)^p \omega(x_{n+1}) dx. \tag{2.3}$$

Теперь нетрудно заметить, что

$$\max_{y\in\Delta_k} \left(y_{n+1}^m |P_m(x,y)|\right)^p \le C\left(\left(y^{(k)}\right)_{n+1}^m \left|P_m\left(x, y^{(k)}\right)\right|\right)^p,$$

где $y^{(k)}$ – центр куба Δ_k. Тем самым, (2.3) можно записать в виде

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \le C \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(\Delta_k)|^p \left(y^{(k)}\right)_{n+1}^{mp} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left|P_m\left(x, y^{(k)}\right)\right|^p \omega(x_{n+1}) dx. \tag{2.4}$$

Воспользовавшись свойствами функции P_m, леммой 1.1, а также условиями теоремы, нетрудно получить оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|P_m\left(x, y^{(k)}\right)\right|^p dx' \le C\left(x_{n+1} + \left(y^{(k)}\right)_{n+1}\right)^{-p(n+m+1)+n}$$

Подставив эту оценку в (2.4), получим

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \le C \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(\Delta_k)|^p \left(y^{(k)}\right)_{n+1}^{mp} \int_0^{+\infty} \frac{\omega(x_{n+1}) dx_{n+1}}{\left(x_{n+1} + \left(y^{(k)}\right)_{n+1}\right)^{p(n+m+1)-n}},$$

и, поскольку $|\Delta_k| = \left(y^{(k)}\right)_{n+1}^{n+1}$, то в силу леммы 1.2

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \le C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mu(\Delta_k)|^p \left(y_{n+1}^{(k)}\right)^{mp} \omega\left(y_{n+1}^{(k)}\right)}{\left(y_{n+1}^{(k)}\right)^{p(n+1+m)-n-1}} =$$

$$= C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mu(|\Delta_k|) \omega\left(|\Delta_k|^{\frac{1}{m+1}}\right) |\Delta_k|^{1-p} < +\infty.$$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что в силу леммы 1.4

$$\max_{x \in \Delta_k} |u(x)|^p \omega(x_{n+1}) |\Delta_k^*| \le C \int_{\Delta_k^*} |u(y)|^p \omega(y_{n+1}) dy' dy_{n+1}.$$

Запишем эту оценку в виде

$$\max_{x \in \Delta_k} |u(x)| [\omega(x_{n+1})]^{1/p} |\Delta_k^*|^{1/p} \le C_1^{1/p} (B_k)^{1/p},$$

где

$$B_k = \int_{\Delta_k^*} |u(y)|^p \omega(y_{n+1}) dy' dy_{n+1}.$$

Из принадлежности $u \in h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$ следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} B_k < +\infty$. Тем самым, $\sum_{k=1}^{\infty} (B_k)^{1/p} < +\infty$, поскольку $0 < p \le 1$. Поэтому, ввиду (2.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max_{x \in \Delta_k} |u(x)| [\omega(x_{n+1})]^{1/p} |\Delta_k^*|^{\frac{1-p}{p}} |\Delta_k^*| < +\infty.$$

Следовательно

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |u(x)| \omega_1(x_{n+1}) dy' dy_{n+1} < +\infty, \quad \text{где} \quad \omega_1(x) = [\omega(x)]^{1/p} x_{n+1}^{\frac{1-p}{p(m+1)}} \in S$$

(последнее включение очевидно ввиду того, что $\omega \in S$). Таким образом, в данной ситуации применима теорема 2.1, в силу которой

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^m_{n+1} P_m(x,y) u(y) dy' dy_{n+1}.$$

Далее очевидно, что можно взять $d\mu(y) = u(y)dy'dy_{n+1} = u(y)dm_{n+1}(y)$, где $m_{n+1}(y)$ – $n+1$-мерная нормированная мера Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. При этом, в силу лемм 2.1 и 2.2, эта мера удовлетворяет всем необходимым условиям. Теорема доказана.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Нашей целью является доказательство нижеследующей теоремы, устанавливающей представления линейных функционалов, действующих в пространствах $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$, $1 < p < +\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть Φ – непрерывный линейный функционал, действующий в пространстве $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ $(1 < p < +\infty)$, и пусть $v(x) = \Phi(P_m(x,y))$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Тогда*

1°. *$v(x) \in h^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega_m)$ $(1/p + 1/q = 1)$, где ω_m – функция, определенная по формуле (1.14). При этом имеет место представление*

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} x^m_{n+1} u(x) v(x) dx, \tag{3.1}$$

и существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_2 \|v\|_{h^p(\omega_m)} \le \|\Phi\| \le C_1 \|v\|_{h^p(\omega_m)}. \tag{3.2}$$

2°. *Обратно, любая функция $v \in h^q(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ по формуле (3.1) порождает непрерывный линейный функционал на пространстве $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ $(1 < p < +\infty)$ такой, что выполнены оценки (3.2).*

Доказательство. 1°. Согласно условию теоремы $P_m(x,y) \in h^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega_m)$ и $v(x) = \Phi(P_m(x,y))$. По теореме Хана-Банаха этот функционал можно продолжить до непрерывного линейного функционала, действующего на всем $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$. Далее, в силу теоремы Ф. Рисса существует функционал $\Psi \in L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ такой, что

$$\|\Phi\|_{L^p(\omega)} = \|\Psi\|_{L^q(\omega)} \quad \text{и} \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(y) \Psi(y) dm_{n+1}(y).$$

Следовательно

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} P_m(x,y)\Psi(y)dm_{n+1}(y).$$

Из теоремы 2.1 получаем $v \in h^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega_m)$ и $\|v\|_{h^q(\omega_m)} \le C\|\Psi\|_{L^q(\omega)} = C\|\Phi\|$. Теперь заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} x_{n+1}^m v(x)u(x)dm_{n+1}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Psi(y)dm_{n+1}(y) \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} u(x)x_{n+1}^m P_m(x,y)dm_{n+1}(x).$$

В силу теоремы 2.1 о параметрическом представлении классов $h^p(\omega)$ последний интеграл совпадает с интегралом

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Psi(y)u(y)dm_{n+1}(x),$$

т.е. равен $\Phi(u)$. Таким образом, нами доказаны равенство (3.1), а также первая оценка в (3.2). Левая оценка в (3.2) будет доказана вместе с 2°.

2°. Пусть $v \in h^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$ – произвольная функция. С применением неравенства Гёльдера легко убедиться в том, что формулой

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} v(x)u(x)x_{n+1}^m dm_{n+1}(x) \tag{3.3}$$

определяется непрерывный линейный функционал на пространстве $h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$, причем такой, что $\|\Phi\| \le C\|v\|_{h^q(\omega_m)}$. Теперь заметим, что подстановка в формуле (3.3) функции $P_m(x,y)$ вместо $u(x)$ дает

$$\Phi(P_m(x,y)) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} P_m(x,y)v(x)x_{n+1}^m dm_{n+1}(x).$$

Однако, в силу теоремы 2.1, последний интеграл совпадает с $v(y)$. Тем самым, $v(y) = \Psi(P_m(x,y))$. Ввиду 1° $\|v\|_{h^q(\omega_m)} \le C\|\Phi\|$, откуда следует левое неравенство (3.3). Теорема доказана.

ABSTRACT. The paper establishes descriptive representations of the weighted classes $h^p(\omega)$ of functions harmonic in the upper half-space $\mathbb{R}_+^{n+1}$ of $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \ge 1)$. A representation of continuous linear functionals in $h^p(\omega)$ is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН АрмССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Матем. и Мех. АН АрмССР, вып. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. Ф. А. Шамоян, "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 13, № 5 – 6, стр. 405 – 422, 1978.
4. Ф. А. Шамоян, "Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$", Матем. Сборник, т. 107(149), стр. 446 – 462, 1978.
5. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа", ДАН СССР, т. 261, № 3, стр. 557 – 561, 1981.
6. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и некоторые вопросы представления в пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. матем. журнал, т. 31, № 2, стр. 197 — 215, 1990.
7. Ф. А. Шамоян, М. А. Закарян, "Некоторые вопросы представления в весовых пространствах гармонических в шаре функций", ДАН Армении, т. 94, № 4, стр. 210 – 216, 1993.
8. Е. Сенета, Правильно меняющиеся функции, М., Наука, 1985.
9. Ch. Fefferman, E. M. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Math. v. 129, pp. 137 — 193, 1972.
10. F. Ricci, M. Taibleson, "Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure", Ann. Seuds. Nor. Soperiore, Piza, Serie 6, vol. 10, № 1, pp. 1 – 54, 1983.
11. А. Э. Джрбашян, "Классы A_p^α гармонических функций в полупространствах и аналоги теоремы М. Рисса", Изв. АН Армении, Математика, т. 22, № 4, стр. 386 – 398, 1987.
12. Е. И. Стейн, Сигулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973.

20 марта 1997 Ереванский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 32 НОМЕР 5 1997

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

CONTENTS

VOLUME 32 NUMBER 5 1997

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)