

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵԳԻՍ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՋԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ՁԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԱՐԱՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՒՆԻԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են Հոդվածներ Հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, Հաշվի առնել Հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ Համառոտ Հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5-6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով Հոդվածներն ընդունվում են Հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի Հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (Հայերեն) ներկայացված Հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ Հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա Հեղինակների Հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են Հրապարակվել Համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են Համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծի կով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով: Ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց Համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղափոխվում է Հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի Համար նշվում է՝ Հեղինակը, գրքի անունը, Հրատարակման տեղը, Հրատարակչությունը, Հրատարակման տարեթիվը, Հոդվածների Համար նշվում է՝ Հեղինակը, Հոդվածի անունը, ամսագիրը, Համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի Համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ Հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով Հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես Հոդվածի ստացման ժամկետ Համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում Հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն Հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի Հոդվածը, նշի իր լրիվ Հասցեն, անունը և Հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց Հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության Հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ
И ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ЗНАЧЕНИЙ**

**сборник статей
под редакцией Г. А. Барсегяна**

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Этот и предыдущий номер журнала посвящены вопросам геометрической теории комплексных функций, теории распределения значений, а также их применениям ко многим комплексным переменным и в теории расположений a -точек. В этих областях существует интенсивное взаимопроникновение идей и методов. Хотелось бы сказать несколько слов о сравнительно новой теории местоположений a -точек.

Достижения комплексного анализа последних 70 лет в значительной мере обусловлены классическими теориями Р. Неванлинны и Л. Альфорса, описывающими количества a -точек и функций, мероморфных в плоскости или в круге.

Эта классическая область в последние годы обогатилась результатами общего характера, касающимися расположений a -точек. Вероятно мы находимся в начале новой стадии исследований, когда основное внимание будет уделено изучению расположений a -точек.

В этой связи отметим "свойство близости a -точек" в его различных версиях и так называемый "принцип разбиения" мероморфных функций (см. введение к статье Г. Барсегяна в предыдущем номере). Этот принцип предлагает новый тип геометрических разложений для функций, мероморфных в плоскости и для мероморфных функций "быстрого роста" в единичном круге, а также описывает местоположения a -точек этих функций.

Вторая основная теорема теории распределения значений неприменима для функций "медленного роста" (таких как функции из H^p , классов Дирихле или Неванлинны). Недавно был установлен так называемый "принцип близости", который описывает не только числа но, и местоположения a -точек произвольных мероморфных функций в единичном круге.

Такое продвижение было достигнуто благодаря новому подходу, в котором используются так называемые Γ -линии, которые аналогичны a -точкам и имеют важные интерпретации в физике. Краткий обзор этой быстро развивающейся области можно найти в статье настоящего выпуска о нерешенных задачах.

4 августа 1997

Григор Барсегян

ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА РАЗБИЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, II: НАКОПЛЕНИЯ a -ТОЧЕК И СВОЙСТВО ЛИТТЛВУДА

Г. А. Барсегян, Г. А. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 4, 1997

В настоящей статье представлено применение принципа разбиения [3], связанное с принципом разбиения и свойством Литтлвуда. Показано, что существуют классы мероморфных функций, a -точки которых в основном содержатся в произвольно малых множествах, тогда как сферические производные в этих точках являются произвольно большими.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Замечательное свойство Литтлвуда [1] изучает множество G в z -плоскости, где скапливается "большинство" a -точек целой функции $f(z)$ для "почти всех" значений $a \in \mathbb{C}$ и устанавливает, что для любой целой функции $f(z)$ существует такое множество G с "сравнительно малой" площадью. Площадь $S(G)$ множества G не может быть произвольно малой для целых функций. Это заключение вытекает из оценок $M(r, f')$ в терминах классических характеристик $M(r, f)$, $T(r, f)$ или $A(r, f)$. (Определения и результаты теории распределения значений мероморфных функций предполагаются известными [2]). С другой стороны, это показывает, что классические характеристики описывают малость $S(G)$ для целых функций.

Справедливо ли то же самое для мероморфных функций $w(z)$ в $\mathbb{C}$?

В настоящей работе мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. В частности, мы указываем некоторые классы мероморфных функций с предписанной малостью $S(G)$ и роста их характеристик. Используя принцип разбиения мероморфных функций [2], мы легко приходим к оценкам площади $S(G)$ (свойство Литтлвуда) и, более того, получаем подробное описание геометрии множеств G .

Кроме того, мы показываем, что наибольший рост сферических производных $w(z)$ достигается на множествах G с наименьшей площадью G и наоборот. Отсюда, в частности, следует существование мероморфных функций с произвольно большими сферическими производными на множествах G .

Все это приводит к следующему важному заключению: в случае мероморфных функций значения сферических производных и размер множества G не могут быть описаны в терминах классических характеристик. Для выяснения ситуации нужны новые понятия. Мы намереваемся вернуться к этой задаче позже.

§2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через M класс мероморфных функций в $\mathbb{C}$, отображающих верхнюю полуплоскость на себя (см. [4]). Как установлено М. Г. Крейном [4], функции $w(z) \in M$ имеют представление

$$w(z) = c \frac{z - z_0(0)}{z - z_0(\infty)} \prod_{n \neq 0} \frac{1 - z/z_n(0)}{1 - z/z_n(\infty)},$$

где $z_n(\infty) < z_n(0) < z_{n+1}(\infty)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $z_{-1}(0) < 0 < z_1(\infty)$, c — константа.

Мы будем использовать обозначения принципа разбиения и теоремы 1 из [3] такие, как $\varphi(r)$, $D(r)$, $A(r)$, $E_i^c(r)$, $d(E_i^c(r))$, $A(\tilde{w}(E_0^c(r)))$, $\Phi^c(r)$, Δ , E .

Теорема 1. Пусть $\tau(r)$ — положительная монотонная функция, стремящаяся к нулю при $r \rightarrow \infty$ и $0 \leq \rho \leq \infty$. Существует мероморфная функция $w(z) \in M$ заданного порядка ρ такая, что для $\varphi^{35}(r) < A(r)$ и для произвольного $r \notin E$ отображение $(D(r), w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$, $i = 0, 1, 2, \dots, \Phi^c(r)$ такие, что: для $i \geq 1$ отображения $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ — удобные однолистные накопители с тотальным дефектом

$$\Delta \leq 4; \quad (1)$$

для $i = 0$ отображение $(E_0^c(r), w(E_0^c(r)))$ — расширенный накопитель особенностей, причем

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)))A^{-1}(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E \quad (2)$$

и, одновременно

$$\Phi^c(r)A^{-1}(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (3)$$

Диаметры $d(E_i^c(r))$ удовлетворяют неравенству

$$d(E_i^c(r)) \leq \tau(r), \quad i \geq 1, \quad (4)$$

и для каждого $z \in E_i^c(r)$, $i \geq 1$

$$\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \geq \frac{1}{\tau(r)}. \quad (5)$$

Благодаря формулам (1) — (3) большинство простых a -точек для большинства значений $a \in C$ содержится в объединении областей $E_i^c(r)$, $i \geq 1$, играющей роль множества G во введении (см. [3]). Неравенство (4) в теореме 1 показывает, что диаметры удобных однолистных накопителей могут быть произвольно малыми, и, следовательно, объединение может быть произвольно малым. Это означает, что мы имеем пример мероморфных функций с произвольно малым множеством G и, соответственно, с произвольно большими сферическими производными на множестве G .

Следующий результат описывает расположение областей и дает оценки снизу для сферических производных $w \in M$, зависящих от расстояний между нулями и полюсами.

Теорема 2. Пусть $w(z) \in M$ и $\varphi^{35}(r) < A(r)$. Тогда для любого $r \notin E$ отображение $(D(r), w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$, $i = 0, 1, 2, \dots, \Phi^c(r)$ такие, что :

для $i \geq 1$ отображения $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ — удобные однолистные накопители с тотальным дефектом

$$\Delta \leq 4; \quad (6)$$

для $i = 0$ отображение $(E_0^c(r), w(E_0^c(r)))$ — расширенный накопитель особенностей, причем

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)))A^{-1}(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E \quad (7)$$

и одновременно

$$\Phi^c(r)A^{-1}(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (8)$$

Для каждого $E_i^s(r)$, $i \geq 1$ существует индекс n_i (соответствие между i и n_i взаимно однозначно) такой, что $E_i^s(r) \cap (z_{n_i}(\infty); z_{n_i}(0)) \neq \emptyset$ и

$$E_i^s(r) \subset \left\{ z : \left| z - \frac{z_{n_i}(\infty) + z_{n_i}(0)}{2} \right| \leq 10^{C\varphi^7(r)} |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)| \right\}, \quad (9)$$

где C – абсолютная константа;

для любого $z \in E_i^s(r)$, $i \geq 1$

$$\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \geq \frac{1}{10^{C\varphi^7(r)} |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)|}. \quad (10)$$

Следующий результат имеет самостоятельный интерес в изучении функций $w \in M$.

Теорема 3. Пусть $w \in M$. Тогда

$$|A(r) - n(r, 0)| = o(A(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E, \quad (11)$$

$$|A(r) - n(r, \infty)| = o(A(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (12)$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Мы будем использовать следующие обозначения из [3]: $\tilde{w}$ – сферический образ w ; $\tilde{w}(X)$ – сферический образ $w(X)$; $\tilde{l}(\Gamma)$ – сферическая длина кривой Γ ; $D(\rho, w_0)$ – сферическая ρ -окрестность точки w_0 , т.е. множество точек, расположенных на сферическом расстоянии, меньшем чем ρ , от точки w_0 .

Доказательство теоремы 3. Пусть $\tilde{l}(r, \Gamma)$ – суммарная сферическая длина кривых на римановой поверхности $F_r = \{w(z) : |z| \leq r\}$, проекции которых лежат на кривой Γ .

Согласно первой фундаментальной теореме Альфорса (см. [2], гл. XIII)

$$\left| A(r) - \frac{\tilde{l}(r, \Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)} \right| = o(A(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (13)$$

Для кривой Γ возьмем полуось $(-\infty, 0)$. Тогда $\tilde{l}(\Gamma) = \frac{\pi}{2}$. Заметим, что интервалы в определении $\tilde{l}(r, \Gamma)$ в точности являются w -образами интервалов $\{U_{(n)}(z_n(\infty), z_n(0))\} \cap \{z : |z| \leq r\}$. Действительно, ясно, что w -образ каждого интервала $(z_n(\infty), z_n(0))$ отображается на полуось $(-\infty, 0)$. w -образ любой прямой вне $U_{(n)}(z_n(\infty); z_n(0))$ не может лежать в $(-\infty, 0)$. Это следует из того, что

1) w -образы интервалов $[z_n(0); z_{n+1}(\infty)]$ лежат на положительной полуоси; 2) если w -образ некоторой прямой из $C \setminus (-\infty; +\infty)$ принадлежит $(-\infty; 0)$, то любая окрестность этой прямой содержит значения как из верхней, так и из нижней полуплоскостей. А это противоречит тому, что функция $w(z)$ отображает верхнюю полуплоскость на себя.

Остается показать, что соответствие между этими интервалами на F_r и интервалами $(z_n(\infty), z_n(0))$ взаимно однозначно. В противном случае, существовали бы точки $z_n^{(i)} \in (z_n(\infty), z_n(0))$, в которых $w'(z_n^{(i)}) = 0$. Следовательно, для любого $\rho > 0$ w -образ полукруга $\{z: |z - z_n^{(i)}| < \rho\} \cap \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ содержал бы точки из $\{\operatorname{Im} w < 0\}$. Мы пришли к противоречию.

Сферическая длина w -образа каждого интервала $(z_n(\infty), z_n(0)) \subset [-r; r]$ равна $\frac{\pi}{2}$, а для интервалов $(z_n(\infty), z_n(0))$, пересеченных с $[-r; r]$, меньше $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, отношение $\frac{\tilde{l}(r, \Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)}$ получает целый вклад из интервалов $(z_n(\infty), z_n(0))$, целиком находясь в $[-r; r]$. Каждый такой вклад равен числу $B(r)$ этих интервалов. Положим

$$\frac{\tilde{l}(r, \Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)} = B(r) + B_0(r),$$

где $B_0(r) \leq 2$ - вклад из $(z_n(\infty), z_n(0)) \cap [-r; r]$.

Следовательно, из (13) имеем

$$|A(r) - B(r)| \leq \left| A(r) - \frac{\tilde{l}(r, \Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)} \right| + B_0(r) = o(A(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (14)$$

Поскольку $0 \leq n(r, \infty) - B(r) \leq 1$ и $0 \leq n(r, 0) - B(r) \leq 1$, то (11) и (12) следуют из (14). Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 2. Пусть γ - сферический образ полуоси $(-\infty; 0)$. Тогда, в силу утверждения 5' из [3], можно указать точку $\tilde{w}^* \in \gamma$ такую, что сферический круг $\mathcal{D}(C_6 \varphi^{-6}(r), w^*)$ принадлежит всем $\tilde{w}(E_i^c(r))$, $i = 1, \dots, \Phi^c(r)$, $r > r_1$. Обозначим через $m(r)$ дугу кривой γ , целиком лежащую в круге $\mathcal{D}(C_6 \varphi^{-6}(r), w^*)$. Сферическая длина $m(r)$ равна $2C_6 \varphi^{-6}(r)$. Полуось $(-\infty; 0)$ в точности является w -образом каждого из интервалов $(z_n(\infty), z_n(0))$. Поэтому, для каждого $E_i^c(r)$, $i = 1, \dots, \Phi^c(r)$ существует индекс n_i (соответствие между i и

n_i взаимно однозначно) такой, что множество $\tilde{w}(E_i^c(r) \cap (z_{n_i}(\infty), z_{n_i}(0)))$ содержит дугу $m(r)$ так, что

$$\int_{E_i^c(r) \cap (z_{n_i}(\infty), z_{n_i}(0))} \frac{|w'(x)|}{1 + |w(x)|^2} dx \geq 2 C_6 \varphi^{-6}(r).$$

Для некоторого $x_{n_i}^* \in E_i^c(r) \cap (z_{n_i}(\infty), z_{n_i}(0))$, согласно теореме о среднем значении, имеем

$$\frac{|w'(x)|}{1 + |w(x)|^2} \geq \frac{2 C_6 \varphi^{-6}(r)}{\text{mes}(E_i^c(r) \cap (z_{n_i}(\infty), z_{n_i}(0)))} \geq \frac{2 C_6 \varphi^{-6}(r)}{|z_{n_i}(\infty), z_{n_i}(0)|}. \quad (15)$$

Пусть $z \in E_i^c(r)$. Из утверждения 3' работы [3] следует, что существует кривая $\tilde{\Gamma}(\tilde{w}(z), \tilde{w}(x_{n_i}^*)) \subset \tilde{w}(E_i^c(r))$, соединяющая точки $\tilde{w}(z)$ и $\tilde{w}(x_{n_i}^*)$, длина которой $\tilde{l}(\tilde{\Gamma}(\tilde{w}(z), \tilde{w}(x_{n_i}^*)))$ меньше, чем $C_3 \varphi(r)$. Применяя соотношения (0.17) теоремы 1 из [3] и (15), получаем

$$\begin{aligned} |z - x_{n_i}^*| &\leq \int_{w^{-1}(\tilde{\Gamma}(\tilde{w}(z), \tilde{w}(x_{n_i}^*)))} ds = \\ &= \int_{w^{-1}(\tilde{\Gamma}(\tilde{w}(z), \tilde{w}(x_{n_i}^*)))} \frac{1 + |w(x)|^2}{|w'(x)|} \frac{|w'(x)|}{1 + |w(x)|^2} ds \leq \\ &\leq \varphi_1(r) \frac{1 + |w(x_{n_i}^*)|^2}{|w'(x_{n_i}^*)|} \tilde{l}(\tilde{\Gamma}(\tilde{w}(z), \tilde{w}(x_{n_i}^*))) \leq \frac{C_3}{2 C_6} \varphi^7(r) \varphi_1(r) |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)|, \end{aligned}$$

$r \notin E$, откуда следует

$$E_i^c(r) \subset \left\{ z: \left| z - \frac{z_{n_i}(\infty) + z_{n_i}(0)}{2} \right| \leq \left(\frac{C_3}{2 C_6} + 1 \right) \varphi^7(r) \varphi_1(r) |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)| \right\},$$

$r \notin E$. Аналогичным образом получаем, что для любого $z \in E_i^c(r)$

$$\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \geq \frac{2 C_6 \varphi^{-6}(r) \varphi_1^{-1}(r)}{|z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)|}, \quad r \notin E.$$

Таким образом, утверждения теоремы 2 доказаны с некоторой абсолютной константой C .

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 вытекает из теоремы 2. Рассмотрим функцию $w(z) \in M$ с положительными нулями и полюсами, удовлетворяющими условиям:

- 1) $N(r, \infty)$ имеет порядок ρ ;
- 2) $|z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)| = \frac{1}{\Psi(n)}$, $n = 1, 2, \dots$,

где $\Psi(r)$ – положительная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$, для которой при $r > r_2$ справедливо неравенство

$$\Psi(n^{1/2}(r, \infty)) \geq \frac{2 \cdot 10^C \varphi^7(r)}{\tau(r)}.$$

Покажем, что для функции $w(z)$ все утверждения теоремы 1 справедливы. Мы выносим из рассмотрения те области $E_i^c(r)$ из теоремы 1, для которых соответствующий индекс $n_i \leq [n^{1/2}(r, \infty)] + 1$, где $[x]$ – целая часть x . Согласно теореме 3, число таких областей $o(A(r))$, $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$. Сохраняя обозначения теоремы 2 для остальных областей, мы получаем соотношения (1) – (3) теоремы 1 и неравенство

$$d(E_i^c(r)) \leq 2 \cdot 10^C \varphi^7(r) |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)| = 2 \cdot 10^C \varphi^7(r) \frac{1}{\Psi(n_i)} \leq \frac{2 \cdot 10^C \varphi^7(r)}{\Psi(n^{1/2}(r, \infty))} \leq \tau(r),$$

$r \notin E$, которое следует из соотношения (9) теоремы 2.

Из неравенства (10) теоремы 2 для произвольного $z \in E_i^c(r)$, $i \geq 1$, имеем

$$\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \geq \frac{1}{\tau(r)}, \quad r \notin E.$$

Остается заметить, что, согласно соотношению $m(r, w) = O(\ln r)$, $r \rightarrow \infty$ (см. [5], гл. VI), функция имеет порядок ρ . Теорема 1 полностью доказана.

ABSTRACT. Present article gives an application of the Principle of Partitioning [3] related to the Principle of partitioning and to the Littlewood Property. It is shown that there exist classes of meromorphic functions whose a -points mainly occur in arbitrarily small sets, while spherical derivatives considered at these points are arbitrarily big.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Littlewood, "On some conjectural inequalities with applications to the theory of integral", J. London Math. Soc., 27, 1952, p. 387-393.
2. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin, Springer. 1934.
3. Г. А. Барсегян, "Применения принципа разбиения мероморфных функций, 1 : свойство сравнимости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 32, № 3, стр. 2 – 45, 1997.
4. Б. И. Левин, Распределение корней целых функций, Гос. тех. издат., М., 1956.
5. А. А. Гольдберг, Распределение значений мероморфных функций, Наука, М., 1970.

3 июня 1997

Институт математики
НАН Армении

E-mail : barseg@instmath.sci.am

**НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ СЕМИНАРА
ПО ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЙ
ГОНК КОНГ, ИЮЛЬ 1996**

Под редакцией А. Ф. Беардона и Ч.-Ч. Янга

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 4, 1997**

Темы и статьи :

Комплексная динамика : А. Ф. Беардон, Х. Г. Хуа, Х. Крайет
Комплексные линейные дифференциальные уравнения : С. П. Уанг
Искривления в некоторых комплексных переменных : В. Черри
Динамика в многомерных пространствах : П. К. Ху и Ч.-Ч. Янг
Теория факторизации : Ч.-Ч. Янг
Рост и распределение нулей : У. Бергвейлер
Теория Неванлинны : У. Бергвейлер
Метод Ньютона : Х. Крайет
Распределение значений случайных рядов : Д. К. Сан
Г-линии и теория распределения значений : Г. Барсегян

§1. ЗАДАЧИ Г. БАРСЕГЯНА (barseg@instmath.sci.am)

**НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
ФУНКЦИЙ И ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ**

В последние годы объектами интенсивного изучения стали Г-линии и множества уровней. Мы пришли к новой стадии исследования мероморфных функций : в противоположность теории Неванлинны, описывающей число a -точек, теперь основное внимание уделяется изучению расположений a -точек. Оказывается, что в подобных исследованиях Г-линии играют важную роль. Ниже мы представим некоторые нерешенные задачи и темы для лучшего понимания распределений Г-линий и расположения a -точек. Прежде чем приступить к ним, мы представим контуры необходимых теоретических предпосылок.

Распределения Г-линий мероморфных и квазиконформных отображений, взаиморасположения a -точек. Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в

заданной области D , и пусть Γ – гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости. Прообразы $w^{-1}(\Gamma) \cap D$ называются Γ -линиями (точно так же, как прообразы $w^{-1}(a) \cap D$ называются a -точками). Оценки сверху для длин $L(D, \Gamma)$ Γ -линий мероморфных функций в $\mathbb{C}$ и в произвольных областях D с кусочно-гладкой границей впервые были даны в работах автора [3] – [5]. Мы дадим упрощенную версию основного метода оценки $L(D, \Gamma)$, который называем *принципом вариации касательной* (см. [5] и [6]). Допустим, что

$$\nu(\Gamma) = \text{Var}_{z \in \Gamma} \alpha_\Gamma(z) < \infty, \quad (1.1)$$

где $\alpha_\Gamma(z)$ – угол между касательной к Γ в $z \in \Gamma$ и вещественной осью; очевидно, в некотором смысле, $\nu(\Gamma)$ характеризует “кривизну” линий Γ . Далее

$$L(D, \Gamma) \leq K(\Gamma) \cdot \left(\iint_D \left| \frac{w''(z)}{w'(z)} \right| d\sigma + l(D) \right), \quad (1.2)$$

где $K(\Gamma)$ – постоянная $< \infty$, зависящая только от Γ , а $l(D)$ – длина границы области D . В теории Γ -линий мероморфных функций в комплексной плоскости и в единичном круге существует теорема, аналогичная второй основной теореме Р. Неванлинны. Именно, для кривых Γ_ν , $\nu = 1, \dots, q$, без общих точек и удовлетворяющих формуле (1.1), справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^q L(D(r), \Gamma_\nu) \leq KA(r), \quad (1.3)$$

где $D(r) = \{z : |z| < r\}$, K – абсолютная константа, $A(r)$ – сферическая характеристическая функция и $r = r_n \rightarrow \infty$. Позже Γ -линии взаимно однозначных конформных отображений в единичном круге были рассмотрены во многих работах, начиная с хорошо известной статьи [19] У. К. Хеймана и Дж. М. Ву; отметим также статьи Й. Гарнета, Ф. Геринга и П. Джонса [18]; Дж. Фернандеса и Д. Гамильтона [14]; Дж. Фернандеса и М. Цинмейстера [15]; Дж. Фернандеса, Дж. Хейнопена и О. Мартио [16]; Дж. Фернандеса [17]; К. Бишопа, Л. Карлсона, Дж. Гарнета и П. Джонса [12]; К. Бишопа, П. Джонса [13]; Й. Вайсалы [21]; К. Ой-ма [20]; К. Асталы, Дж. Фернандеса и С. Роде [1]; о квазирегулярных взаимно однозначных отображениях см. работу [21].

Интерес к Γ -линиям обусловлен некоторыми важными обстоятельствами, среди которых отметим следующие.

Из первой и второй основных теорем Р. Неванлинны следует

$$\sum_{\nu=1}^q |N(r, a_\nu) - N(r, b_\nu)| \leq 2T(r) + o(T(r)), \quad r = r_n \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

где a_ν и b_ν попарно различны. Назовем

$$B(r, a_\nu, b_\nu) = \sum_{\nu=1}^q |N(r, a_\nu) - N(r, b_\nu)|$$

разностью Неванлинны, где

$$N(r, w) = \int_0^r n(t, w) dt,$$

а $n(r, w)$ — обычное число w -точек в круге $|z| \leq r$ с учетом кратностей.

Легко показать, что (см. Барсегян [7], [8])

$$\sum_{\nu=1}^q (C(r, a_\nu, b_\nu) + B(r, a_\nu, b_\nu)) \leq L(r, \Gamma), \quad (1.5)$$

где a_ν и b_ν лежат на кривой Γ , а $C(r, a_\nu, b_\nu)$ отражает близость a_ν и b_ν -точек (которые мы обозначим через $z_i(a_\nu)$ и $z_i(b_\nu)$, соответственно), которая выглядит примерно как $\sum |z_i(a_\nu) - z_i(b_\nu)|$. Таким образом, изучение Γ -линий приводит к новому подходу для вывода неравенств вида (1.4).

Теория Неванлинны неприменима к мероморфным функциям с “медленным ростом”, определенным в единичном круге. Используя неравенство (1.5), мы получаем результат, напоминающий вторую основную теорему Р. Неванлинны для произвольных функций, мероморфных в $\mathbb{C}$ (см. [8]).

Пусть γ_ν и τ_ν , $\nu = 1, \dots, n$, — два набора множеств таких, что

1) для любого $\nu = 1, \dots, n$ кривые γ_ν и τ_ν являются непрерывными;

2) для любого $\nu = 1, \dots, n$, множество γ_ν перескается с каждой окружностью $\Gamma(R) = \{w : |w| = R\}$ в одной только точке (которую обозначим через $a_\nu(R)$), а множество τ_ν пересекается с каждой окружностью $\Gamma(R)$ также в одной точке (которую обозначим через $b_\nu(R)$);

3) для любого R точки $a_\nu(R)$ и $b_\nu(R)$ на $\Gamma(R)$ расположены в порядке возрастания аргумента: $a_1(R), b_1(R), a_2(R), b_2(R), \dots, a_n(R), b_n(R), a_1(R)$.

Применяя неравенство (1.5) к случаю, когда $w(z)$, $\Gamma = \Gamma(R)$ и $a_\nu = a_\nu(R)$, $b_\nu = b_\nu(R)$, $\nu = 1, \dots, n$, получаем следующий результат.

Интегрированное фундаментальное неравенство : для любой мероморфной функции $w(z)$ в единичном круге и любой положительной функции $\psi(R)$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^q \int_0^\infty \frac{C(r, a_\nu(R), b_\nu(R))}{\psi(R)} dR + \sum_{\nu=1}^q \int_0^\infty \frac{B(r, a_\nu(R), b_\nu(R))}{\psi(R)} dR \leq \iint_{D(r)} \frac{|w'(z)|}{\psi(|w(z)|)} d\sigma. \quad (1.6)$$

Легко можно найти связь между правой частью формулы (1.6) и интегралами, характеризующими классы функций в единичном круге (см. Барсегян [6], [8]). Поэтому, изучение Γ -линий приводит к результату, аналогичному второй основной теореме, справедливой для всех мероморфных функций в единичном круге.

Благодаря присутствию величин $C(r, a_\nu, b_\nu)$ формула (1.5) описывает взаимные расположения $a_\nu(R)$ и $b_\nu(R)$ -точек. Таким образом, изучение Γ -линий ведет к описанию взаимных расположений a -точек. Такой подход является версией "свойства близости a -точек" (см. Барсегян [9], [10]), или "принципа разбиения мероморфных функций" (см. [11]).

Область исследования 1. Оценить сверху $L(D(r), \Gamma)$ и $\sum_{\nu=1}^q L(D(r), \Gamma_\nu)$ для широкого класса кривых и функций $w(z)$, принадлежащих известным классам аналитических и мероморфных функций в единичном круге (таких, как классы ограниченных функций, H^p , Дирихле и т.д.) в терминах характеристик этих классов. Из вышеотмеченного следует, что такие оценки могут применяться в изучении утверждений, аналогичных второй фундаментальной теореме Р. Неванлинны и свойству близости для изучаемых классов функций.

Другой класс задач, касающийся Γ -линий, связан с K -квазиконформными и квазирегулярными функциями $f(z)$ в комплексной области или с функциями $f(\bar{z})$, отображающими области из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. В качестве G -линий здесь мы можем рассматривать кривые Γ в $\mathbb{R}^n$, а также прообразы заданных поверхностей G в $\mathbb{R}^n$, которые назовем G -поверхностями. В последнем случае будем рассматривать площади $S(r, G)$ множеств $f^{-1}(G)$, лежащих в $\{\|\bar{z}\| < r\}$.

Область исследования 2. Оценить сверху выражение $\sum_{\nu=1}^q L(D(r), \Gamma_\nu)$ для квазирегулярных и K -квазиконформных функций в $\mathbb{C}$ и оценить $\sum_{\nu=1}^q L(r, \Gamma_\nu)$

и $\sum_{\nu=1}^q S(r, G_\nu)$ для широкого класса кривых Γ и поверхностей G в случае K -квазиконформных и квазирегулярных функций в $\mathbb{R}^n$.

В частном случае квазиконформных взаимно однозначных отображений в статье Вайсалы [1] даны оценки для $L(D(r), \Gamma)$; а в случае "угловых-квазиконформных" отображений в $\mathbb{C}$ (см. [5], [6]) даны оценки для $L(D(r), \Gamma_\nu)$ и $L(D(r), \Gamma)$; в случае же "угловых-квазиконформных" отображений в $\mathbb{R}^3$ оценки для $S(r, G)$ даны в работе В. Авакяна, Г. Барсегяна и М. Караханяна [2]. Эти результаты приводят к описанию числа a -точек отмеченных функций, а также взаимных расположений для различных значений a .

Теория Р. Неванлинны для квазирегулярных функций возникла в последние годы благодаря усилиям С. Рикмана, Й. Вайсалы и других, при помощи описания взаимных расположений a -точек.

Следующий класс задач касается обобщения концепции множества уровней функций $v(x, y) = \operatorname{Im} w(z)$, где $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которые являются Γ -линиями, когда $\Gamma = \{w : \operatorname{Im} w - T = 0\}$, где T - константа или, что то же самое, решениями уравнения

$$v(x, y) - T = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим уравнение

$$F = 0, \quad (1.8)$$

где F - функция, зависящая от x, y, u, v и некоторых последующих смешанных производных функций u и v , которые определены посредством $w = u + iv$, где w - комплексное отображение, определенное в области D . Обозначим через $L_F(D)$ длины кривых в D , для которых справедлива формула (1.7) (если таковые есть для заданных F и w).

Область исследования 3. Оценить сверху $L_F(D)$ и $\sum_{\nu=1}^q L_{F_\nu}(D)$ для некоторых классов функций F_ν (например, линейных по u и v) и для $w(z)$, принадлежащих известным классам аналитических и мероморфных функций в области D .

Пусть $u(x, y)$ - решение уравнения Лапласа в области D (либо решение уравнения Пуассона, или более общего эллиптического уравнения) с граничным условием $u(x, y) = f(x, y)$, когда (x, y) принадлежит границе D .

Область исследования 4. Оценить сверху $\sum_{\nu=1}^g L_{F_{\nu}}(D)$, где $F_{\nu} = u - T_{\nu}$, а T_{ν} – заданные постоянные в терминах вышеуказанных граничных условий.

Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в $\mathbb{C}$ или в единичном круге, $\Gamma(R)$ – окружность $\{w : |w| = R\}$, и пусть $\alpha(Re^{i\vartheta})$ – угол, образуемый касательной к одной из заданных $\Gamma(R)$ -линий в заданном круге, взятой в точке $w^{-1}(Re^{i\vartheta})$. Пусть

$$C(\Gamma(R)) = \sum \text{Var}_{\vartheta=0}^{2\pi} \alpha(Re^{i\vartheta}),$$

где суммирование проводится по всем $\Gamma(R)$ -линиям. Величина $C(\Gamma(R))$ отражает “кривизну” всех $\Gamma(R)$ -линий.

Область исследования 5. Оценить сверху $C(\Gamma(R))$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{C(\Gamma(R))}{\psi(R)} dR$$

с положительными функциями $\psi(R)$ для различных классов мероморфных функций в $\mathbb{C}$ и в единичном круге. Аналогичную задачу можно поставить для угловых-квазиконформных, K -квазиконформных и квазирегулярных функций.

Можно ожидать интересные результаты для “кривизны” $\Gamma(R)$ -линий. Многие технические применения теории потенциала, полученные в последние годы, касаются “кривизны” $\Gamma(R)$ -линий, однако в них используются более сложные аспекты теории.

Область исследования 6. Было бы интересно установить аналог теории распределения Γ -линий в случае функций нескольких комплексных переменных, отображающих $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$, и рассмотреть вышеуказанные задачи для этих функций.

Оценки сверху для длин кривых приводят (см. (1.5)) к описанию взаимных расположений a -точек в случае мероморфных функций в комплексной плоскости и в единичном круге.

Область исследования 7. Построить теорию взаимных расположений a -точек для угловых-квазиконформных, K -квазиконформных и квазирегулярных функций в комплексной плоскости, в единичном круге и в $\mathbb{R}^n$.

Область исследования 8. Построение теории взаимных расположений a -точек для функций нескольких комплексных переменных, отображающих $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. K. Astala, J. Fernandes, S. Ronde, "Quasilines and Hayman-Wu theorem", *Indiana University Math. Journal*, vol. 42, pp. 1078 – 1100, 1993.
2. В. Авакян, Г. Барсегян, М. Караханян, "Пространственно-обобщенные квазиконформные отображения", *АРМНИИНТИ*, т. 5, стр. 1 – 35, 1993.
3. Г. А. Барсегян, "О распределении разрывов при отображениях мероморфными функциями", *Докл. Акад. Наук СССР*, т. 237, стр. 1009 – 1011, 1977.
4. Г. А. Барсегян, "Новые результаты в теории мероморфных функций", *Докл. АН СССР*, т. 238, стр. 777 – 780, 1978.
5. Г. А. Барсегян, "О Геометрии мероморфных функций", *Матем. Сборн.*, т. 114(156), стр. 179 – 226, 1980.
6. Г. А. Барсегян, "Касательный вариационный принцип в комплексном анализе", *Изв. АН Армении, Математика*, т. 27, № 3, стр. 37 – 60, 1992.
7. G. A. Barsegian, "Principle of closeness of sufficiently large sets of a -points of meromorphic functions", *Hokkaido Math. Journal*, vol. 26, pp. 451 – 456, 1997.
8. Г. А. Барсегян, *Геометрическая теория мероморфных функций* (рукопись).
9. Г. А. Барсегян, "Свойство близости a -точек мероморфных функций", *Мат. Сборник*, т. 120(162), № 1, стр. 42 – 63, 1983.
10. Г. А. Барсегян, "Свойство близости мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей", *Изв. АН АрмССР, Математика*, т. 20, № 5,6, стр. 375 – 425, 1985.
11. G. A. Barsegian, "Principle of partitioning of meromorphic functions", *Math. Montisnigri*, vol. 5, pp. 18 – 26, 1995.
12. C. Bishop, L. Carleson, J. Garnet, P. Jones, "Harmonic measures supported on curves", *Pacif. Journal Math.*, vol. 138, pp. 233 – 236, 1989.
13. C. Bishop, P. Jones, "Harmonic measure and arclength", *Ann. Math.*, vol. 132, pp. 511 – 547, 1990.
14. J. Fernandes, D. Hamilton, "Length of curves under conformal mappings", *Comm. Math. Helv.*, vol. 62, pp. 122 – 134, 1987.
15. J. Fernandes, M. Zinsmeister, "Ensembles de niveau des representations conformes", *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 305, no. 1, pp. 449 – 452, 1987.
16. J. Fernandes, J. Heinonen, O. Martio, "Quasilines and conformal mappings", *Journal d'Analyse Math.*, vol. 52, pp. 117 – 132, 1989.
17. J. Fernandes, "Domains with strong barrier", *Monatshefte Math.*, vol. 5, pp. 47 – 65, 1989.
18. J. Garnet, F. Gehring, P. Jones, "Conformally invariant length sums", *Indiana Univ. Math. Journal*, vol. 32, pp. 809 – 829, 1983.
19. W. Hayman, J.-M. Wu, "Level of sets of univalent functions", *Comm. Math. Helv.*, vol. 56, pp. 366 – 403, 1981.
20. К. О'йма, "Harmonic measure and conformal length", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 115, pp. 687 – 689, 1992.
21. J. Vaisala, "Bounded turning and quasiconformal mappings", *Monatshefte Math.*, vol. 11, pp. 233 – 244, 1991.

§2. ЗАДАЧИ А. Ф. БЕАРДОНА (afb@dpmms.cam.ac.uk)

Пусть f – аналитическое отображение открытого единичного круга D в себя, и пусть $|f'| < 1$ в D (так что f является евклидовым сжатием D). Легко видеть, что евклидов диаметр $\text{diam}[f^n(D)]$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, где f^n означает n -ую итерацию f (см. [1]). Известно, что для всех таких f

$$\text{diam}[f^n(D)] = O(1/\sqrt{n}),$$

и существуют примеры, в которых

$$\text{diam}[f^n(D)] \geq c/n$$

для некоторой постоянной c .

Задача 1. Правда ли, что для всех f

$$\text{diam}[f^n(D)] = O(1/n),$$

и если нет, то для каких классов областей можно доказать подобный результат?

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Beardon, "Analytic contractions of the unit disc", Bull. Hong Kong Math. Soc, vol. 1, 1997.

§3. ЗАДАЧИ ВАЛЬТЕРА БЕРГВЕЙЛЕРА

(bergweiler@math.uni-kiel.de)

Задача 1. Пусть f – целая функция порядка ρ . Обозначим через $T(r, f)$ ее характеристику Неванлинны, а через $M(r, f)$ – ее максимальный модуль. Согласно предложению Пели, впервые доказанному Говоровым [Функц. Анал. и Прил. т. 3, стр. 41 – 45, 1969], если $\frac{1}{2} \leq \rho < \infty$, то

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} \leq \pi \rho. \quad (3.1)$$

Правую часть можно заменить на π , если $\Delta = \sum_{a \in \mathbb{C}} \delta(a, f) = 1$, где $\delta(a, f)$ означает дефект Неванлинны. Это следует из результатов Петренко [Мат. СССР, Изв. т.

3, стр. 391 – 432, 1969]. Если $\Delta = 1$, то, как доказано Цангом и Хуангом [J. Shanghai Norm. Univ., Nat. Sci. Ed., no. 2, pp. 36 – 39, 1980], имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} = \pi.$$

Улучшения оценки (3.1) можно получить из результатов Петренко, если Δ достаточно близка к 1. Какой является точная оценка сверху для

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \log M(r, f)/T(r, f)$$

в терминах ρ и Δ , если $0 < \Delta < 1$?

Задача 2. Пусть (z_j) – последовательность комплексных чисел, стремящаяся к ∞ . Обозначим через $n(r)$ количество z_j , удовлетворяющих неравенству $|z_j| \leq r$. Предположим, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = \infty.$$

(Или, эквивалентно, $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^{-p} = \infty$ для всех $p > 0$.) Существует ли целая функция f , нулями которой являются z_j и

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{n(r)} < \infty?$$

Пусть

$$\mu = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log n(r)}{\log \log r}. \quad (2)$$

Тогда $\mu \geq 1$. Было показано [J. Reine Angew. Math., vol. 430, pp. 85 – 107, 1992], что такая целая функция существует, если $1 < \mu \leq \infty$. Таким образом, только случай $\mu = 1$ остается нерешенным. Я предполагаю, что целая f с выше перечисленными свойствами не может существовать, если $\mu = 1$.

Можно также поставить вопрос о нахождении наилучшей оценки для $\liminf_{r \rightarrow \infty} \log M(r, f)/n(r)$ в терминах μ . Другими словами, определить

$$L(\mu) = \sup_{(z_j)} \inf_f \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{n(r)},$$

где (z_j) пробегает по всем последовательностям, которые удовлетворяют формуле (2), а f – по всем целым функциям с нулями (z_j) . Оценки сверху и снизу

для $L(\mu)$ получены в процитированной работе. Ответ на первый вопрос будет положительным, если $L(1) < \infty$. Поведение $L(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ также неизвестно. Имеем ли мы $L(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ и $L(\infty) = 0$?

Задача 3. Пусть f – трансцендентная мероморфная функция. Еременко и автор [Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 11, pp. 355 – 373, 1995], Чен и Фанг [Adv. Math., Beijing, vol. 24, pp. 93 – 94, 1995], а также Зальцман [неопубликовано] доказали, что $f'f - 1$ имеет бесконечно много нулей. Всегда ли дефект Неванлинны удовлетворяет неравенству $\delta(1, f'f) < 1$? Если так, то какой является наилучшая оценка сверху для $\delta(1, f'f)$?

Задача 4. Пусть P – непостоянный многочлен, и пусть f – трансцендентная мероморфная функция. Имеет ли $P(f)f' - 1$ бесконечно много нулей? Для целой f это доказал Мюес [Arch. Math., vol. 32, pp. 55 – 67, 1979], а для f конечного порядка – автор и Еременко.

§4. ЗАДАЧИ ВИЛЯМА ЧЕРРИ (cherry@math.tu-berlin.de)

Пусть D – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{P}^n$ – комплексное проективное пространство размерности n . Пусть $Z_0, \dots, Z_n$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^n$. *Формой Фубини-Штуди* ω_{FS} на $\mathbb{P}^n$ назовем

$$\omega_{FS} = \frac{\left(\sum_{j=0}^n Z_j \bar{Z}_j \right) \left(\sum_{j=0}^n dZ_j \wedge d\bar{Z}_j \right) - \sum_{i,j=0}^n \bar{Z}_i Z_j dZ_i \wedge d\bar{Z}_j}{\left(\sum_{j=0}^n Z_j \bar{Z}_j \right)^2}.$$

При $n = 1$ форма Фубини-Штуди ω_{FS} приводится к форме сферической площади на римановой сфере (если риманова сфера имеет радиус $1/2$ в $\mathbb{R}^3$). Если f – голоморфное отображение из D в $\mathbb{P}^n$, то $f^*\omega_{FS}$ является формой псевдоплощади на D . Это означает, что

$$f^*\omega_{FS} = \rho(z) dz \wedge d\bar{z},$$

где z – комплексная координата на D , а ρ – неотрицательная функция. Определим

$$f^{\sharp}(z) = \sqrt{\rho(z)}.$$

Величина $f^{\sharp}(z)$ показывает насколько f инфинитезимально искривляет длину в z , где длина на D берется относительно евклидовой метрики, а длина на

$\mathbb{R}^n$ берется относительно метрики, получающейся из формы Фубини-Штуди.

Заметим, что при $n = 1$ имеем

$$f^{\sharp}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2},$$

которая известна под названием сферической производной и, поэтому, мы выбрали такое обозначение.

Говорят, что набор $H_1, \dots, H_q$ гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ находится в *основной позиции*, если для любого подмножества $\{H_j\}$ с кардинальностью $\leq n + 1$ линейные формы, определяющие гиперплоскости в этом подмножестве, линейно независимы. (При $n = 1$ гиперплоскости являются простыми точками на римановой сфере, а находиться в основной позиции означает, что эти точки различны). Теперь мы можем сформулировать следующее.

Теорема. Пусть n — положительное целое число, и пусть $q \geq 2n + 1$. Пусть $H_1, \dots, H_q$ — q гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, находящиеся в основной позиции. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{H_1 \cup \dots \cup H_q\}$. Тогда

$$\sup\{f^{\sharp}(0) : f : D \rightarrow \Omega, f - \text{голоморфна}\} < \infty.$$

Теорема состоит из двух составляющих. Первая утверждает, что дополнение $2n + 1$ гиперплоскостей в основной позиции в $\mathbb{R}^n$ располагается гиперболически в $\mathbb{R}^n$. Этот результат в сочетании с леммой Броди о параметризации дает конечную верхнюю оценку производной Фубини-Штуди в нулевой точке $f^{\sharp}(0)$. Подробности см., например, в книге Ланги [2] (теоремы VII.2.5 и III.1.4.). Мы приходим к следующему вопросу : можно ли найти явную оценку сверху ?

Задача. Пусть n, q, H_j и Ω определяются из теоремы. Найти явную оценку сверху M такую, что если f — голоморфное отображение из D в Ω , то

$$f^{\sharp}(0) \leq M.$$

Отметим, что M будет зависеть от гиперплоскостей H_j .

Отметим, что оценка сверху для $f^{\sharp}(0)$ дает оценку снизу для касательных векторов, измеренных по метрике Кобаяши на Ω . Таким образом, задача сводится

к нахождению явной оценки снизу для длины по метрике Кобаяши на Ω всех касательных векторов, имеющих длину 1 по метрике Фубини-Штуди.

При $n = 1$, т.е. когда f – мероморфная функция, опускающая по крайней мере три значения, можно найти явную оценку сверху для $f^1(0)$. Для этого нужно построить явную форму сингулярной площади с отрицательной кривизной на римановой сфере и затем использовать лемму Альфорса-Шварца. Другим способом является использование второй основной теоремы Неванлинны с явным остаточным членом. В обоих случаях можно получить явную оценку, зависящую только от (сферических) расстояний между опущенными точками – чем меньше расстояния между точками, тем больше оценка для сферической производной.

В многомерном случае построение явной сингулярной формы $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^n$, с отрицательной кривизной и сингулярной только на опущенных гиперплоскостях представляется довольно трудным. Такая техника использована в [1] и [4] для получения оценок сверху для $f^1(0)$. Однако эти оценки зависят не только от опущенных гиперплоскостей H_j , но также от производных высших порядков от f в точке 0. Вообще оценки кривизны недостаточно сильны как касательный подход к опущенным гиперплоскостям с целью получения оценки для $f^1(0)$, не зависящей от производных высших порядков. Конечно, можно попытаться использовать вторую основную теорему для получения оценок, как в одномерном случае. Однако, можно только получить оценки, зависящие от производных высших порядков f в точке 0.

Подобный вопрос затрагивается в работе [5], где используется метод явных оценок Неванлинны, однако, здесь рассматриваются отображения в $\mathbb{P}^2$, опускающие только четыре гиперплоскости и, таким образом, в данном случае производные высших порядков играют значительную роль. Для симметричных областей в $\mathbb{P}^1$, например, для дополнения n -ых корней единицы в работе [3] даны не только явные, но строгие оценки сверху для $f^1(0)$. Авторы работы [3] стараются обобщить свою работу на случай симметричных расположений гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, однако, до сих пор это им не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бабец, "Псевдоформы с отрицательной кривизной на CP_n ", Изв. АН

- СССР, Математика, т. 50, стр. 1326 – 1337, 1986.
2. S. Lang, Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Springer-Verlag, 1987.
 3. M. Bonk, W. Cherry, "Bounds on spherical derivatives for maps into regions with symmetries", Journal D'Analyse Mathématique (to appear).
 4. M. Cowen, "The Kobayashi metric on $\mathbb{P}^n - (2^n + 1)$ hyperplanes", in : R. Kujala, A. Vitter (eds), Value-Distribution Theory, Part A, Marcel Dekker, pp. 205 – 224, 1974.
 5. P. Hall, "Landau and Schottky theorems for holomorphic curves", Michigan Math. J., vol. 38, pp. 207 – 223, 1991.

§5. ЗАДАЧИ ПЕИ-ЧУ ХУ И ЧУНГ-ЧУН ЯНГА¹

pchu@public.jn.sd.cn и mayang@uxmail.ust.hk

НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой заметке мы ставим некоторые задачи, связанные с динамикой методом Ньютона в многомерных пространствах. Мы будем использовать терминологию и обозначения Ху-Янга [8]. Через $F(\mathcal{F})$ и $J(\mathcal{F})$ мы обозначим множество Фату и множество Жулия семейства $\mathcal{F}$, соответственно. В частности, если $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ – семейство, порожденное итерациями отображения f , мы примем сокращенные обозначения $F(f) = F(\mathcal{F})$ и $J(f) = J(\mathcal{F})$.

1. Распиренные вопросы для итераций рациональных функций. Фиксированная точка p отображения f на гладком многообразии M называется *притягивающей*, если существует окрестность U точки p такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p \quad \text{для всех } x \in U.$$

Множество A называется *отталкивающим*, если для каждой окрестности V множества A $V - [A]$ непусто; и если существует окрестность U множества A такая, что для каждого $x \in U - [A]$ существует $n_0 > 0$ с $f^n(x) \notin U$ для всех $n \geq n_0$, где $[A]$ – объединение основных орбит всех элементов в A .

Предположение 1.1. Пусть M – комплексное многообразие, $f : M \rightarrow M$ – голоморфное отображение, $p \in M$, $f(p) = p$, и пусть λ_i – собственные значения для $A = f'(p)$, удовлетворяющие неравенствам $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_m|$ ($m = \dim M$).

Если p – отталкивающий, то $|\lambda_m| > 1$ (т.е. p отталкивает).

¹Работу первого автора частично поддерживал Postdoctoral Grant of China, а второго частично поддерживал UGC Grant of Hong Kong.

Предположение 1.2. Если f — непрерывное самоотображение на компактном гладком многообразии M , то множество притягивающих циклов компактно и множество Жульа $J(f)$ равно замыканию своего множества отталкивающих циклов.

С. Смейл в [15] предположил, что диффеоморфизмы на S^2 с C^r -топологией в основном должны иметь только конечное число раковин. С. Е. Ньюхауз [10] доказал, что на любом компактном C^∞ -многообразии M с размерностью большей или равной 1, существует подмножество $\mathcal{R}$ открытого множества $\mathcal{U}$ в $\text{Diff}^r(M, M)$, $r \geq 2$ такое, что каждый элемент подмножества $\mathcal{R}$ имеет бесконечно много раковин, где, по определению, $\mathcal{R}$ содержит счетное пересечение открытых подмножеств множества $\mathcal{U}$.

Непрерывное самоотображение на многообразии M называется исключительным, если его множество Жулиа содержит либо исключительные, либо изолированные точки, где точка $x \in M$ называется исключительной, если ее основная орбита конечна.

Предположение 1.3. Пусть f — непрерывное самоотображение на компактном гладком многообразии M либо с $|\deg(f)| \geq 2$, либо с топологической энтропией $h_{\text{top}}(f) > 0$. Тогда

1) если f не исключительно, то $J(f)$ совершенно и для любого $x \in J(f)$ обратная орбита $O^-(x)$ плотна в $J(f)$;

2) $J(f) = M$ тогда и только тогда, когда существует x , правильная орбита $O^+(x)$ которой плотна в M ;

3) если U — некоторое открытое множество, пересекающее множество Жулиа, то $f^n(U \cap J(f)) = J(f)$ для любого достаточно большого n ;

4) если M — компактное комплексное многообразие, а f — голоморфное самоотображение на M , то f имеет не более чем конечное число раковин, и каждая компонента множества Фату периодична, т.е. для каждой компоненты U множества Фату существуют целые числа m и n такие, что $f^n(f^m(U)) = f^m(U)$.

Если M – риманова сфера, то предположение подтверждается. О подробностях см. в [3], [5], [6] и [8].

Обозначим через $\text{Res}J(f)$ *остаточное множество Жулиа* отображения f , т.е. множество тех точек в $J(f)$, которые не лежат на границе $F(f)$. Теперь мы расширим предположение Макиенко [2] для рациональных функций на римановой сфере к следующему общему случаю :

Предположение 1.4. Пусть M – компактное ориентированное гладкое m -мерное многообразие и $f \in C(M, M)$ удовлетворяет условиям

$$1) \text{ либо } |\deg(f)| \geq 2, \text{ либо } h_{\text{top}}(f) > 0,$$

$$2) F(f) \text{ не имеет обратную инвариантную компоненту.}$$

Тогда $\text{Res}J(f) \neq \emptyset$.

Связанными работами по рациональным функциям являются [9], [11] и [12].

2. Хаусдорфова метрика и множества Жулиа. Фиксируем $f \in C(M, M)$, и пусть $\mathcal{U} \subset C(M, M)$ – окрестность f в компактно-открытой топологии. Всякую последовательность $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ назовем *случайным возмущением f на $\mathcal{U}$* . Семейство

$$Ds(\mathcal{F}) = \{f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n \mid n = 1, 2, \dots\}$$

называется *случайным возмущением $DS \{f^n\}$ на $\mathcal{U}$* . Если $f_j = g$ для всех $j \geq 1$, то мы получаем постоянное возмущение $\mathcal{F} = \{g\}$ с $Ds(\mathcal{F}) = \{g^n\}$. Интересно сравнить $J(Ds(\mathcal{F}))$ и $J(f)$, когда $\mathcal{F} \rightarrow f$, т.е. $f_j \rightarrow f$ для всех $j \geq 1$.

Предположение 2.1. Пусть M – компактное метрическое пространство, и пусть $f \in C(M, M)$. Тогда

1) *если f топологически стабильно, то существует окрестность $\mathcal{U}$ отображения f в C^0 -топологии такая, что для любого случайного возмущения $\mathcal{F}$ отображения f на $\mathcal{U}$ $d_H(J(Ds(\mathcal{F})), J(f)) \rightarrow 0$ при $\mathcal{F} \rightarrow f$;*

2) *если $\mathcal{F}$ – случайное возмущение f на $C(M, M)$, то $d_H(J(Ds(\mathcal{F})), J(f)) \rightarrow 0$ при $\mathcal{F} \rightarrow f$ тогда и только тогда, когда каждая компонента $F(f)$ является чашкой притяжения.*

Далее, если M – риманова сфера, то 2) в этом предположении справедливо (см. [1], [13], [17]).

Пусть M – компакт, и пусть X – векторное пространство, порождающее течение $\mathcal{F} = \{f^t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^1$, содержащее точку 0. Пусть X_ε – векторное пространство, зависящее от параметра $\varepsilon \in \Omega$ такое, что $X_\varepsilon \rightarrow X_0 = X$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в C^1 -топологии векторных пространств. Пусть $\mathcal{F}_\varepsilon = \{f_\varepsilon^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ – течение, порожденное X_ε .

В теории возмущений принято полагать M гладким расслоением $\pi : M \rightarrow B$. Векторное пространство X на свертке M называется *вертикальным*, если оно касательно к каждому слою. Функции на базе B слоя π определяют первые интегралы уравнения $\dot{x} = X(x)$ на M . Вертикальное векторное пространство X называется *невозмущенным*. *Возмущенным полем* называется поле $X_\varepsilon = X + \varepsilon X_1$ близкое к X , которое определяет следующее возмущенное дифференциальное уравнение :

$$\dot{x} = X(x) + \varepsilon X_1(x).$$

Задача 2.1. В каких случаях имеют место $d_H(J(\mathcal{F}_\varepsilon), J(\mathcal{F})) \rightarrow 0$ и $\dim_H J(\mathcal{F}_\varepsilon) \rightarrow \dim_H J(\mathcal{F})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$?

Мы предполагаем, что они имеют место, когда $\{f^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ структурально стабильно.

3. Неблуждающие множества и множества Жулия. Если f – рациональное отображение порядка не меньше двух на римановой сфере и U – любое непустое множество, встречающее $J(f)$, то мы знаем, что $J(f) \subset f^n(U)$ для всех достаточно больших целых n так, что $J(f) \subset \Omega(f)$, где $\Omega(f)$ – множество неблуждающих точек.

Предположение 3.1. Если M – компактное гладкое многообразие, то $J(f) \subset \Omega(f)$ и в пространстве $\text{Diff}^1(M, M)$ диффеоморфизмов C^1

$$J(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(f^n).$$

4. Гиперболические множества и множества Жулия. Под *гиперболическим множеством* дифференцируемого отображения f на многообразии M мы подразумеваем правильное инвариантное компактное множество $\Lambda \subset M$ (т.е. $f(\Lambda) = \Lambda$) такое, что для каждой точки $x \in \Lambda$ касательное пространство $T(M)_x$

разлагается в прямую сумму $T(M)_x = E_x^s \oplus E_x^u$ стабильного пространства E_x^s и неустойчивого пространства E_x^u со следующими свойствами : для $\xi \in E_x^s$, $\eta \in E_x^u$, $n \geq 0$

$$(df)_x E_x^s \subset E_{f(x)}^s, \quad (df)_x E_x^u = E_{f(x)}^u,$$

$$\|(df^n)_x \xi\| \leq a e^{-cn} \|\xi\|, \quad \|(df^n)_x \eta\| \geq \frac{1}{a} e^{cn} \|\eta\|,$$

где a, c — положительные постоянные, не зависящие от x, ξ, η, n . Если $\dim E_x^u$ постоянна для гиперболического множества Λ , то она называется *индексом Морса* Λ и обозначается через u_Λ .

Предположение 4.1. Пусть Λ является гиперболическим множеством C^r -дифференцируемого преобразования f на многообразии M . Если индекс Морса $u_\Lambda = \dim M$, то Λ — отталкивающее множество.

Уместен следующий вопрос Смейла : являются ли отображения, удовлетворяющие аксиоме А, плотными в $\text{Diff}(M, M)$? С. Е. Ньюхауз показал, что существует открытое множество $\mathcal{U}$ в $\text{Diff}^2(S^2, S^2)$ такое, что если $f \in \mathcal{U}$, то f не удовлетворяет аксиоме А и f^{C^2} структурально неустойчиво. Предположим, что M ориентировано и Ω — элемент объема на M . Возьмем $f \in C^1(M, M)$. Правильное инвариантное компактное подмножество Λ в M называется *объемно сжимающим гиперболическим* (соотв., *объемно расширяющим гиперболическим*), если существуют $a > 0$ и $0 \leq \lambda < 1$ (соотв., $b > 0$ и $\gamma > 1$) такие, что $|(f^n)^* \Omega / \Omega| \leq a \lambda^n$ (соотв., $|(f^n)^* \Omega / \Omega| \geq b \gamma^n$) на Λ , и называется *объемно гиперболическим*, если каждая правильная инвариантная компонента Λ либо объемно сжимающая, либо расширяющая гиперболическая. Мы ставим следующий вопрос :

Предположение 4.2. Множество C^r -самоотображений ($r \geq 1$) на M с объемно гиперболическими множествами Жулиа плотно в $C^r(M, M)$.

Для рациональных функций на римановой сфере это является предположением Фату, нерешенным даже для многочленов порядка 2 на $\mathbb{C}$. Заменяем аксиому А следующей :

Аксиома В : $\Omega(f)$ объемно гиперболично, а множество $\text{Per}(f)$ плотно в $\Omega(f)$.

Мы также ставим следующий вопрос :

Предположение 4.3. Множество C^r -самоотображений ($r \geq 1$), удовлетворяющих аксиоме В на M , плотно в $\text{Diff}^r(M, M)$.

Пусть C_f – множество критических точек f . Определим

$$C_f = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(C_f)}.$$

Предположение 4.4. Пусть f – голоморфное отображение на компактном комплексном многообразии M . Если либо каждая критическая точка f имеет правильную орбиту, накапливающуюся на притягивающем цикле f , либо $J(f) \cap C_f = \emptyset$, то $J(f)$ объемно гиперболично.

Мы также предполагаем, что $J(f) \neq \emptyset$, если f Ли-Йорк-хаотично.

5. Экспоненты Ляпунова и множества Жулия. Пусть f – C^1 -отображение на m -мерном римановом многообразии M . Определим

$$\gamma_f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in M} \log \|(df^n)_x\|.$$

Для любого $x \in M$ мы также определим

$$\gamma(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(df^n)_x\|.$$

Относительно некоторой борелевской вероятностной меры μ определим

$$\Gamma(f, \mu) = \int_M \gamma(x) d\mu(x),$$

$$l(f, \mu) = \int_M \sum_{\chi_i(x) > 0} m_i(x) \chi_i(x) d\mu(x),$$

где $m_i(x)$ – кратность экспоненты Ляпунова $\chi_i(x)$ и, далее, определим

$$l(f) = \sup_{\mu \in \Sigma_f(M)} l(f, \mu), \quad \Gamma(f) = \sup_{\mu \in \Sigma_f(M)} \Gamma(f, \mu),$$

где $\Sigma_f(M)$ – множество всех f -инвариантных борелевских вероятностных мер на M .

Предположение 5.1. Пусть M – компактное многообразие и $f \in \text{Diff}^1(M, M)$.

Тогда $J(f) \neq \emptyset$, либо $l(f) > 0$, либо $\Gamma(f) > 0$.

Здесь мы также ставим следующие задачи :

Предположение 5.2. Если M является компактным гладким многообразием и $f \in \text{Diff}^2(M, M)$, то

1) *если либо $l(f) > 0$, либо $\Gamma(f) > 0$ и если $F(f)$ не имеет компонент, обратных инвариантных, то $\text{Res}J(f) \neq \emptyset$;*

2) *$J(f) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда существует вероятностная мера μ на M такая, что f — мера, сохраняющая преобразование для μ с положительной экспонентой Ляпунова.*

6. Метод Ньютона. Пусть f — голоморфное отображение на $\mathbb{C}^m$, и пусть N_f — отображение, построенное методом Ньютона. Пусть S — подмножество нулей f такое, что $\zeta \in S$ тогда и только тогда, когда ζ — притягивающая фиксированная точка N_f . Пусть $\text{Att}(\zeta)$ обозначает чашку притяжения для притягивающей фиксированной точки ζ из N_f . Для меры μ на M и для борелевского измеримого множества B с $\mu(B) > 0$ определим

$$A_{f,\mu}(B) = \mu \left(B \cap \left(\bigcup_{\zeta \in S} \text{Att}(\zeta) \right) \right) / \mu(B).$$

Тогда $A_{f,\mu}(B)$ будет вероятностью того, что для данного отображения f итерация N_f стремится к нулю f для случайного выбора начальной точки в B .

Задача 6.1. При каких условиях $A_{f,\mu}(B)$ положительна?

Пусть $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m)$ — подвекторное пространство, состоящее из всех многочленов порядка $\leq d$ на $\mathbb{C}^m$. Для $d = (d_1, \dots, d_m)$ положим

$$\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m) = \mathcal{P}_{d_1}(\mathbb{C}^m) \times \dots \times \mathcal{P}_{d_m}(\mathbb{C}^m).$$

Подпространство $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m; 1)$ (соотв. $\mathcal{P}'_d(\mathbb{C}^m; 1)$) определяется следующим образом:

$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m; 1)$ (соотв. $\mathcal{P}'_d(\mathbb{C}^m; 1)$) тогда и только тогда, когда

(i) $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m)$ с $\deg(f_k) = d_k$ ($1 \leq k \leq m$),

(ii) один из коэффициентов $\hat{f}_k$ равен 1 для любого k , а абсолютные значения всех коэффициентов $\hat{f}_k \leq 1$ для любого k , где $\hat{f}_k$ — однородная часть f_k порядка d_k ,

(iii) $\{\hat{f}_1 = \dots = \hat{f}_m = 0\} = \{0\}$ (соотв. $\det(f'(z)) \neq 0$).

По теореме Bézout's, любое f в $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m; 1)$ имеет ровно $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m$ нулей с учетом кратностей.

Задача 6.2. Существует ли число $\tau > 0$ для лебеговой меры μ на $\mathbb{C}^m$ такое, что $A_{f,\mu}(\mathbb{C}^m(\tau)) > 0$ для любого $f \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C}^m; 1)$ (соотв. $\mathcal{P}'_d(\mathbb{C}^m; 1)$), где $\mathbb{C}^m(\tau)$ – τ -шар с центром 0 в $\mathbb{C}^m$?

При замене условия (iii) условием (iii)* $\{f_1 = \dots = f_m = 0\} = \{0\}$ и $\det(f'(z)) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^m$ получается семейство $\mathcal{P}_d^*(\mathbb{C}^m; 1)$.

Предположение 6.1. Задача 6.2 правильна для семейства $\mathcal{P}_d^*(\mathbb{C}^m; 1)$.

7. Гиперболичность по Кобаяши и множества Жулиа.

Предположение 7.1. Если M – гиперболическое комплексное многообразие Кобаяши, то $J(f) = \emptyset$ для любого голоморфного самоотображения f на M .

Если M – совершенное гиперболическое комплексное многообразие Кобаяши, то M is taut так, что $J(f) = \emptyset$ для любого голоморфного самоотображения f на M , т.е. это предположение справедливо для совершенных гиперболических комплексных многообразий Кобаяши. Более подробно см. [5] и [8].

Предположение 7.2. Если f – голоморфное самоотображение на комплексном многообразии M с $h_{\text{top}}(f) > 0$, то каждая компонента множества Фату гиперболична по Кобаяши.

В том случае, когда M – проективное пространство, эту задачу решил Уэда. Более подробно см. [3], [5], [6] и [8].

8. Множества Жулиа голоморфных самоотображений на $\mathbb{C}^m$. Предположим, что M имеет логарифмически выпуклую аннулирующую функцию, а f – голоморфное отображение на M . Для $p \in \mathbb{Z}[1, m]$, где $m = \dim M$, введем величину

$$d_p[f] = \limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{T_{p,f^n}(r)}{T_{p,f}(r)} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где $T_{p,f}(r)$ – функция порядка p функции f .

Предположение 8.1. Если $d_p[f] > 1$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}[1, m]$, то $J(f) \neq \emptyset$.

Для $M = \mathbb{C}^m$ можно определить величину

$$d(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\log M(r, f^n)}{\log M(r, f)} \right)^{\frac{1}{n}},$$

где $M(r, f)$ – функция максимума функции f .

Предположение 8.2. Если для голоморфного отображения $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ $d(f) > 1$, то $J(f) \neq \emptyset$.

Пусть $P : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ — полиномиальное отображение. Определим

$$\mathcal{A}_P = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m) : Z(f - P) = \emptyset \text{ или } Z(f - P) \text{ родственно алгебраично}\}$$

Для $f, g \in \text{Hol}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m) - \mathcal{A}_P$ мы предполагаем

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f \circ g = P)}{\log M(r, g)} = +\infty.$$

В случае $m = 1$ см. [14] и [16]. Более подробно см. [3] — [6] и [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Douady, "Julia sets of polynomials", Preprint, 1994.
2. A. E. Eremenko, M. Y. Lyubich, "The dynamics of analytic transformations", Leningrad Math. J., vol. 1, no. 3, pp. 563 — 634, 1990.
3. P. C. Hu, "Value distribution theory and complex dynamics", Ph.D thesis, Hong Kong Univ. of Science and Technology, 1996.
4. P. C. Hu, C. C. Yang, "Fixed points and factorization of meromorphic mappings", Complex Variables (to appear).
5. P. C. Hu, C. C. Yang, Differentiable and Complex Dynamics of Several Variables, manuscript.
6. P. C. Hu, C. C. Yang, "Dynamics in high dimensional spaces", Preprint.
7. P. C. Hu, C. C. Yang, "Invariant sets in dynamics", Bulletin of Hong Kong Math. Soc. (to appear).
8. P. C. Hu, C. C. Yang, "Fatou-Julia theory in high dimensional spaces", Bulletin of Hong Kong Math. Soc. (to appear).
9. S. Morosawa, "On the residual Julia sets of rational functions", Ergod. Th. & Dynam. Sys., vol. 17, pp. 205 — 210, 1997.
10. S. E. Newhouse, "Diffeomorphisms with infinitely many sinks", Topology, vol. 12, pp. 9 — 18, 1974.
11. J. Y. Qiao, "Buried points of Julia sets for rational or entire functions", Sci. in China, Ser. A, vol. 25, no. 11, pp. 1139 — 1146, 1995.
12. J. Y. Qiao, "Topological complexity of Julia sets", Sci. in China, Ser. A, vol. 27, pp. 775 — 781, 1997.
13. W. Y. Qiu, F. Y. Ren, Y. C. Yin, "Iterate for small random perturbations of rational functions and polynomials", Preprint.
14. P. C. Rosenbloom, "The fix-points of entire functions", Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl. Bd. M. Riesz, pp. 186 — 192, 1952.
15. S. Smale, "Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms", Proc. Int. Congress Math. (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, pp. 490 — 496, 1963.
16. C. C. Yang, J. H. Zheng, "On the fix-points of composite meromorphic functions and generalizations", J. D'Analyse Mathematique, vol. 68, pp. 59 — 93, 1996.
17. Y. C. Yin, "Discontinuity of Julia sets for polynomials", Acta Math. Sinica, vol. 38, pp. 99 — 102, 1995.

§6. ЗАДАЧИ К. Х. ХУА (mahua@netra.nju.edu.cn)

Задача 1. Независимо друг от друга Бейкер и Кин доказали, что для трансцендентной функции $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ множество Фату $F(f)$ имеет не более одного кольца Германа. Я предполагаю, что $F(f)$ не может содержать кольца Германа.

Задача 2. Построить трансцендентную мероморфную функцию, множество Фату которого имело бы кольцо Германа.

§7. ЗАДАЧИ ХАРТЬЕ КРИЕТЕ (kriete@uni-math.gwdg.de)

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ИТЕРАЦИЙ

Обозначим через $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ риманову сферу, и пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ – мероморфная функция. Напомним, что множество Фату $\mathcal{F}(f)$ – это множество $z \in \hat{\mathbb{C}}$ такое, что семейство итераций $\{f^{on}\}$ определено и нормально в окрестности z . Множеством Жюлиа $\mathcal{J}(f)$ называется дополнение $\mathcal{F}(f)$ в $\hat{\mathbb{C}}$. Другими словами, множество Жюлиа $\mathcal{J}(f)$ – это множество тех точек, вблизи которых f не имеет сходимого характера. Оно является непустым, совершенным и инвариантным множеством, в котором отталкивающие периодические точки f плотны.

1. Сходимость множеств Жюлиа. Рассмотрим последовательность функций $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, равномерно сходящихся на компакте к f . Нас интересуют динамические следствия этой сходимости. В частности, нас интересует

Задача 1. При каких условиях множества Жюлиа $\mathcal{J}(f_m)$ сходятся к множеству Жюлиа $\mathcal{J}(f)$ как множества в хаусдорфовой метрике, когда $m \rightarrow \infty$?

Известны различные достаточные условия, при которых ответ положителен, см. [18], [17], [9], [11], [15]. Тем не менее, до сих пор принято считать, что f не имеет блуждающих областей и областей Бейкера. Поэтому мы спрашиваем :

Вопрос 1. Предположим, что f имеет блуждающую область и/или область Бейкера. Возможно ли найти функции f_m , стремящиеся к f равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$ такие, что множества Жюлиа $\mathcal{J}(f_m)$ стремятся к $\mathcal{J}(f)$ по хаусдорфовой метрике на $\mathbb{C}$ при $m \rightarrow \infty$?

В частности, нас интересует вопрос о приближении f рациональными функциями или многочленами. Иногда приближения f_m можно выбирать такими, чтобы они имели одинаковую с f динамику. Например, если приближения f_m и f имеют одинаковое количество так называемых “свободных сингулярных значений”, то мы говорим о “динамическом приближении”.

Задача 2. Найти широкие классы трансцендентных функций, динамически приближаемых многочленами или рациональными функциями.

Примеры можно найти в [3], [4] и [11] – [14], [19]. Заметим, что для каждого сингулярного значения v функции f существует последовательность $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ сингулярных значений v_m приближений f_m , стремящаяся к v . Поэтому нужно найти приближения f_m , не имеющие большое количество сингулярных значений.

Пример. Пусть $f(z) = e^z$. Тогда множество $\text{sing}(f)$ конечных сингулярных значений, играющее большую роль в комплексной динамике, равно $\{0\}$. Последовательности $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, где $f_m(z) = \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$, и $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, где $g_m(z) = \sum_{\mu=0}^m \frac{z^\mu}{m!}$, сходятся к f равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$. С одной стороны мы получаем $\lim_{m \rightarrow \infty} \#\text{sing}(g_m) = \infty$, а с другой стороны $\text{sing}(f_m) = \text{sing}(f) = \{0\}$ имеет место для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ является динамическим приближением, но не $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$.

2. Метод Ньютона для трансцендентных функций. С недавних пор большое внимание уделяется методу Ньютона для заданной трансцендентной функции f , см. [1], [2], [7], [8], [19], [21]. Следуя Смейлу мы спрашиваем о вероятности применения метода Ньютона к заданной трансцендентной функции f для случайного выбора начального значения.

Пусть f – трансцендентная функция. Для начального $z_0 \in \mathbb{C}$ определим

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

Пусть A – множество всех z_0 таких, что последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ стремится к корню f .

Задача 3. Найти оценку снизу (сферической) лебеговой меры A .

Известны достаточные условия, устанавливающие открытость и плотность множества $\mathcal{A}$, либо ее полную меру, см. [7], [8], [21]. Большинство этих условий подразумевает “гиперболичность” (в некотором смысле) функции f . Тем не менее, Харута [6] представил класс целых функций $\mathcal{H}$ таких, что множество $\mathcal{A}$, связанное с некоторым $f \in \mathcal{H}$, имеет ограниченную плоскую лебегову меру $\Lambda(\mathcal{A})$. Если f – многочлен, то известны некоторые оценки для $\Lambda(\mathcal{A})$ (см. [5], [20], [16], [19]). Это приводит к следующему :

Вопрос 2. Пусть f – целая функция и $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – последовательность полиномиальных приближений. Возможно ли выбрать приближения f_m такими, чтобы $\liminf_{m \rightarrow \infty} c\Lambda(f_m)$ мог быть оценен (снизу) равномерно в m ?

3. Гиперболичность. “Гиперболичность” играет важную роль в итерации многочленов и рациональных функций. Определение приводит к классу трансцендентных функций конечного типа. Однако определение гиперболичности для более широких классов представляется довольно трудным. Некоторые попытки сделаны в работах [11] – [14].

Задача 4. Найти удобное определение “гиперболичности” для широкого класса трансцендентных функций.

4. Сходимость гиперболических компонент. Имея определение гиперболических трансцендентных функций, принадлежащих заданному семейству $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}$, где λ принимает значения в некотором параметрическом пространстве $\mathcal{P}$, например, $\mathbb{C}^*$, можно начать изучение гиперболических компонент в параметрическом пространстве. Отметим, что гиперболичность обычно определяется как открытое свойство, т.е. множество всех λ таких, что f_λ гиперболично, предполагается открытым.

Предположим также, что семейство допускает динамическое приближение семействами $\mathcal{F}_m = \{f_{m,\lambda}\}$ многочленов или рациональных функций.

Вопрос 3. Пусть H – гиперболическая компонента (в параметрическом пространстве $\mathcal{P}$) семейства $\mathcal{F}$. Существует ли последовательность гиперболических компонент H_m семейства $\mathcal{F}_m$, стремящаяся к H ?

Используя сходимость ядра, был дан положительный ответ для широкого класса семейств $\mathcal{F}$, ср. [11] – [14]. Вообще, нельзя ожидать хаусдорфову сходимость ([14]), однако, она имеет место в том случае, когда $\mathcal{F} = \{\lambda e^z\}$ и $\mathcal{F}_m = \{\lambda(1 + \frac{z}{m})^m\}$, ([3], [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Bergweiler, N. Terglane, "On the zeros of solutions of linear differential equations of the second order", J. London Math. Soc., 1998 (to appear).
2. W. Bergweiler, "Newton's method for meromorphic functions", Pitman's Research Notes, vol. 305, pp. 147 – 158, 1994.
3. R. L. Devaney, "Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps", Int. J. Bifurcations and Chaos, vol. 1, pp. 287 – 308, 1984.
4. R. L. Devaney, L. R. Goldberg, J. H. Hubbard, "A dynamical approximation to the exponential map by polynomials", preprint, 1986.
5. J. Friedman, "On the convergence of Newton's method", Journal of Complexity, vol. 5, pp. 12 – 33, 1989.
6. M. Haruta, "Newton's method on the complex exponential function", Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
7. M. Jankowski, "Newton's method for solutions of quasi-Bessel differential equations", Ann. Acad. Sci. Fenn. (to appear).
8. M. Jankowski, Das Newtonverfahren für transzendente meromorphe Funktionen, Dissertation, 1996.
9. M. Kisaka, "Local uniform convergence and convergence of Julia sets", Nonlinearity, vol. 8, pp. 273 – 281, 1995.
10. B. Krauskopf, "Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda \times [1 + (z/d)]^d$ ", Int. J. Bif. Chaos, vol. 3, pp. 257 – 270, 1993.
11. B. Krauskopf, H. Kriete, ([ftp://www.uni-math.gwdg.de](http://www.uni-math.gwdg.de)) "Hausdorff convergence of Julia sets", Bull. Belg. Math. Soc. – Simon Stevin (to appear).
12. B. Krauskopf, H. Kriete, "On the convergence of hyperbolic components in families of finite type", Mathematica Gottingensis, vol. 5, 1995.
13. B. Krauskopf, H. Kriete, "Hausdorff convergence and the limit shape of the unicorn", Experimental Mathematics, vol. 6, no. 2, pp. 117 – 135, 1996.
14. B. Krauskopf, H. Kriete, "Kernel convergence of hyperbolic components", Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 17, no. 5, 1996.
15. B. Krauskopf, H. Kriete, "A note on non-converging Julia sets", Nonlinearity, vol. 9, no. 2, pp. 601 – 603, 1996.
16. H. Kriete, "On the efficiency of relaxed Newton's method", Pitman Research Notes in Math. Series, vol. 305, pp. 200 – 212, 1994.
17. H. Kriete, "Approximation of indifferent cycles", Mathematica Gottingensis, vol. 3, 1996.
18. H. Kriete, "Continuity of filled-in Julia sets and the Closing lemma", Nonlinearity, vol. 9, no. 6, pp. 1599 – 1608, 1996.
19. H. Kriete, On the Dynamics of Newton's Method, Habilitationsschrift, Göttingen, 1997.
20. S. Sutherland, "Finding roots of complex polynomials with Newton's method", Preprint, SUNY Stony Brook, 1989.
21. N. Terglane, Iteration Transzrender Funktionen, Dissertation, 1996.

§8. ЗАДАЧИ ДАОЧУН САН

Задача 1. Пусть $X_n(\omega)$ – последовательность независимых, симметричных и равномерно распределенных действительных или комплексных случайных переменных с конечными ненулевыми вариациями. Рассмотрим случайную последовательность

$$f_\omega(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(\omega) Z^n$$

в $|Z| < 1$, где

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} |a_n| = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty.$$

Является ли образом $f_\omega(Z)$ вся комплексная плоскость с вероятностью единица?

Дж. П. Кахан [1] доказал, что это имеет место, когда X_n – гауссовские случайные переменные. Сан Даочун [2] доказал это, когда X_n – непрерывные случайные переменные или если $f_\omega(Z)$ удовлетворяет

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\log \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}{-\log(1-r)} = \infty.$$

Задача 2. Существует ли мероморфная функция $f(Z)$, $|Z| < 1$ с $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} T(r, f) = \infty$ такая, что $f(Z)$ не принимает трех различных комплексных значений?

Если мы докажем, что число исключительных значений конечно, то задача 1 будет решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Kahane, Some Random Series of Functions, Second Edition, London, Cambridge University Press, 1985.
2. Daochun Sun, "Value distribution of random series", Bull. Hong Kong Math. Soc, vol. 1, 1997.

§9. ЗАДАЧИ С. П. ВАНГА (swang@math.uno.edu)

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \dots + p_0(z)f = 0, \quad (9.1)$$

где $n \geq 2$ и $p_0(z), \dots, p_{n-1}(z)$ – многочлены с $p_0(z) \neq 0$. Для любого нетривиального решения f уравнения (9.1) обозначим порядок роста f через $\rho(f)$, а экспоненту сходимости нулей f через $\lambda(f)$. Нами доказано, что уравнение (9.1) допускает множество фундаментальных решений $\{f_1, \dots, f_n\}$ с тем свойством, что

$\lambda(f_k) < \rho(f_k)$ для всех $k = 1, \dots, n$ тогда и только тогда, когда существует ненулевая постоянная b и положительное целое число α такие, что для $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$p_j(z) = \binom{n}{j} b^{n-j} z^{\alpha(n-j)} + \dots, \quad (9.2)$$

где $\binom{n}{j}$ – биномиальный коэффициент. Отсюда следует, что если один из коэффициентов уравнения (9.1) не имеет представления (9.2), то для любого множества фундаментальных решений $\{f_1, \dots, f_n\}$ уравнения (9.1) по крайней мере один из них удовлетворяет равенству $\lambda(f) = \rho(f)$. Уместен следующий вопрос : сколько таких решений может существовать во множестве решений ?

Банк и Франк [Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, vol. 33, pp. 143 – 151, 1984] показали, что для уравнений вида

$$f^{(n)} + p_0(z)f = 0,$$

где $n \geq 2$ и $p_0(z) \not\equiv 0$ – многочлен, в любом множестве фундаментальных решений $\{f_1, \dots, f_n\}$ существуют по крайней мере $n - 1$ решений, удовлетворяющих равенству $\lambda(f) = \rho(f)$.

§10. ЗАДАЧИ С. С. ЯНГА (mayang@uxmail.ust.hk)

1. О теории факторизации мероморфных функций. Обозначим через $f(z)$ мероморфную функцию в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Выражение $f(z) = g(h(z))$ с g мероморфной и h целой или g рациональной и h мероморфной называется факторизацией f с левым фактором g и правым фактором h . $f(z)$ называется первичной (псевдо-первичной), если в каждой факторизации f либо h либо g билинейна (либо h либо g рациональна). Определение “первичной функции” впервые введено П. К. Розенблумом [9] в 1952 году как результат количественного изучения фиксированных точек composite целой функции. После 1968 года теория факторизации широко изучалась Ф. Гроссом, М. Озавой, Ч.-Ч. Янгом, В. Бергвейлером, Х. Урабе и т.д. (см. [3] и [5]. Недавно, подобные исследования успешно были проведены для мероморфных функций нескольких комплексных переменных, а более общие – для мероморфных отображений – мной и соавторами, см. ([2], [6] – [8] и [10]).

Несмотря на усилия комплексных аналитиков в течение трех десятилетий (см. [3] и [4]), в теории факторизации пока что нет значительных и важных достижений. Ниже мы приводим два наиболее важных результата :

Теорема 1. (Стейнмец [11]). *Всякое мероморфное решение линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами должно быть псевдо-первичным.*

Теорема 2. (Бергвейлер [1]). *Всякая трансцендентная целая функция, имеющая только конечное число фиксированных точек, должна быть первичной.*

Задача 1. *Найти другие интересные критерии того, что целая функция является первичной или псевдо-первичной.*

Задача 2. *Следует ли из псевдо-первичности F , что для любого многочлена p $F(p)$ псевдо-первично ?*

Замечание. Эта задача некорректна в случае $p(F)$, см., например, [3], стр. 181.

2. Эквивалентность двух факторизаций. Мы называем две факторизации $f_1 \circ \dots \circ f_n$ и $g_1 \circ \dots \circ g_m$ эквивалентными тогда и только тогда, когда имеют место следующие три условия :

$$(i) \quad m = n ;$$

(ii) все факторы f_i и g_j — трансцендентные первичные целые функции ;

(iii) существуют $n - 1$ линейных преобразований $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ такие, что

$$f_1 = g_1 \circ \lambda_1, \quad f_2 = \lambda_1^{-1} \circ g_2 \circ \lambda_2, \quad \dots, \quad f_n = \lambda_{n-1}^{-1} \circ g_n.$$

Определение. Говорят, что трансцендентная целая функция F обладает *свойством единичной факторизуемости* тогда и только тогда, когда любые две факторизации F в трансцендентные первичные целые факторы эквивалентны друг другу.

Замечание. Показано, что существуют определенные классы трансцендентных целых функций, которые обладают свойством единичной факторизуемости, см., например, [12] и [13].

Задача 3. *Найти критерии единичной факторизуемости функции.*

Задача 4. Существует ли трансцендентная целая функция, не являющаяся единично факторизуемой?

3. Наибольший простой правый фактор и наименьший простой правый множитель двух функций.

Обозначения. Пусть f, g и h – три целые функции такие, что $f = g \circ h$. Тогда h – правый фактор f и должен быть обозначен через $h|f$.

Определение. Целая функция h называется *наибольшим простым правым фактором* двух целых функций f_1 и f_2 тогда и только тогда, когда

$$(i) \quad h|f_1 \text{ и } h|f_2,$$

$$(ii) \text{ для любой целой функции } k \text{ такой, что } k|f_1 \text{ и } k|f_2, \text{ имеем } k|h.$$

Замечание. Ерменко и Рубель [4] показали, что для любого набора целых функций наибольший простой правый фактор всегда существует.

Задача 5. Каков критерий сравнительной первичности двух целых функций (т.е. из наибольшие простые правые факторы – линейные функции)?

Замечание. В [15] даны некоторые критерии для этой задачи.

Определение. Целая функция H называется *наименьшим простым множителем* двух функций f и g тогда и только тогда, когда

$$(i) \quad f|H, g|H,$$

$$(ii) \text{ если для любой целой функции } K \text{ } f|K \text{ и } g|K, \text{ то } H|K.$$

Замечание. Не всякая пара целых функций имеет наименьший простой множитель, см. [15].

Задача 6. Найти необходимое и достаточное условие существования наименьшего простого множителя пары функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Bergweiler, "On proof of a conjecture of Gross concerning fix-points", Math. Zeit, vol. 204, pp. 381 – 390, 1990.
2. D. C. Chang, B. Q. Li, C. C. Yang, "On composition of meromorphic functions in several complex variables", Forum Math., vol. 7, pp. 77 – 94, 1995.
3. C. T. Chuang, C. C. Yang, Fix-points and Factorization of Meromorphic Functions [in Chinese], Peking University Press, 1988 [English translation : World Scientific, 1990].
4. A. Eremenko, L. A. Rubel, "The arithmetic of entire functions under composition", Advances in Mathematics, vol. 124, pp. 334 – 354, 1996.

5. F. Gross, Factorization of Meromorphic Functions, U.S. Govern. Printing Office, Washington D.C., 1972.
6. P. C. Hu, C. C. Yang, "Factorization of holomorphic mappings", Complex Variables, vol. 27, pp. 235 – 244, 1995.
7. P. C. Hu, C. C. Yang, "Fix-points and factorization of meromorphic mappings", Complex Variables, (to appear).
8. B. Q. Li, C. C. Yang, "Factorization of meromorphic functions in several complex variables", AMS Contemporary Math. Series, vol. 142 (edited by Yang-Gong), pp. 61 – 74, 1993.
9. P. C. Rosenbloom, "The fix-points of entire functions", Medd Lunds, Univ. Mat. Sem. Supp. Bd. M. Riesz, pp. 186 – 192, 1952.
10. L. Rubel, C. C. Yang, "The factorization of $A(z) + B(w)$ under composition", Illinois Math. J., vol. 39, pp. 258 – 270, 1995.
11. N. Steinmetz, "Über die faktorizierbaren Lösungen gewöhnlichen Differentialgleichungen", Math. Zeit., vol. 170, pp. 169 – 186, 1980.
12. H. Urabe, C. C. Yang, "Uniquely factorizable entire functions under composition", Forum Math. vol. I, pp. 309 – 313, 1989.
13. C. C. Yang, "On unique factorizability of certain composite entire functions", JMAA (2), vol. 175, pp. 499 – 513, 1993.
14. C. C. Yang, Factorization Theory of Meromorphic Functions and Related Topics, Lecture Notes in Math., Marcel Dekker, New York, 1983.
15. C. C. Yang, "On common right factor and common right multiple of two entire functions", Chinese Journal of Contemporary Mathematics (to appear).

КЛАССИФИКАЦИЯ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С НЕПОСТОЯННОЙ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИЕЙ, ОГРАНИЧЕННОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

М. Хаяши

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 4, 1997

Пусть R – связанная риманова поверхность, и пусть $M^\infty(R)$ – множество всех мероморфных функций на R , ограниченных на бесконечности R . В этой заметке мы классифицируем римановы поверхности R , удовлетворяющие условию, что $M^\infty(R)$ содержит непостоянный элемент.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть R – произвольная риманова поверхность (связанная), а $H^\infty(R)$ – алгебра всех ограниченных аналитических функций на R . Обозначим через $M^\infty(R)$ множество всех мероморфных функций на R , ограниченных на бесконечности R . Другими словами, $f \in M^\infty(R)$ – мероморфная функция на R , ограниченная вне компактного множества. Мероморфные функции в $M^\infty(R)$ вместе со своими полюсами играют ключевую роль в изучении максимального идеального пространства алгебры $H^\infty(R)$ (см. [2],[3]), поэтому нас интересует класс функций $M^\infty(R)$.

В данной заметке мы классифицируем класс P_{M^∞} римановых поверхностей R , удовлетворяющих тому, что $M^\infty(R)$ содержит непостоянный элемент. Это выражается записью $M^\infty(R) \neq \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – означает множество всех комплексных постоянных. Конечно, класс P_{H^∞} римановых поверхностей R , удовлетворяющих свойству $H^\infty(R) \neq \mathbb{C}$ более интересен. Однако, характеризовать класс P_{H^∞} – довольно трудная задача.

Если R – замкнутая риманова поверхность, то $M^\infty(R)$ совпадает с множеством всех рациональных функций на R . Поэтому $M^\infty(R) \neq \mathbb{C}$, согласно тео-

реме Римана-Роха, и $H^\infty(R) = \mathbb{C}$, согласно принципу максимального модуля. Поскольку $H^\infty(R) \subset M^\infty(R)$, то класс P_{M^∞} строго шире класса P_{H^∞} . Используя конструкцию типа Мирберга, можно легко найти риманову поверхность R с бесконечным родом таким, что $R \in P_{M^\infty}$, но $R \notin P_{H^\infty}$. Поэтому, охарактеризовать класс P_{M^∞} так же сложно, как и класс P_{H^∞} . Тем не менее, оказывается возможным охарактеризовать класс P_{M^∞} в терминах P_{H^∞} . Этим мы и займемся в настоящей заметке.

Семейство $\mathcal{A}$ мероморфных функций на R называется *разделяющим*, если для любых различных точек a, b из R существует функция f в $\mathcal{A}$ такая, что $f(a) \neq f(b)$. Алгебра $\mathcal{A}$ мероморфных функций на R называется *слабо разделяющей*, если семейство $\{f/g : f, g \in \mathcal{A}, g \neq 0\}$ разделяющее.

На первом шагу мы ограничиваем наше внимание теми римановыми поверхностями R в P_{M^∞} , для которых $M^\infty(R)$ слабо разделяюще. Основная теорема гласит следующее :

Теорема 1. Если R – риманова поверхность такая, что $M^\infty(R)$ слабо разделяюще, то выполняется одно и только одно из следующих двух :

- 1) существует непостоянная ограниченная аналитическая функция на R , т.е. $H^\infty(R) \neq \mathbb{C}$;
- 2) R конформно эквивалентно подобласти замкнутой римановой поверхности и $H^\infty(R) = \mathbb{C}$.

Замкнутое подмножество E на римановой поверхности называется *AB-пренебрегаемым*, если для каждого координатного круга U на R все ограниченные аналитические функции на $U \setminus E$ аналитически продолжаются на U (т.е. $U \cap E$ – множество с нулевой аналитической емкостью). Известно, что для подобласти R замкнутой римановой поверхности $H^\infty(R) = \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда дополнение R является AB-пренебрегаемым (см. [5]). Для открытых римановых поверхностей с бесконечным родом этот простой факт вообще не имеет места.

Рассматривая компактификации Александрова, говорят, что две открытые

римановы поверхности имеют одинаковую идеальную границу, если их бесконечно удаленные точки имеют некторую идентичную окрестность (в смысле конформной инвариантности). Свойство римановой поверхности называется *свойством ее идеальной границы*, если любые две римановы поверхности с одинаковой идеальной границей одновременно обладают или не обладают этим свойством. Хорошо известен классический результат [1], гласящий, что свойство $H^\infty(R) \neq \mathbb{C}$ не является свойством идеальной границы. С этой точки зрения интересен следующий результат :

Следствие 1. В категории римановых поверхностей R таких, что $M^\infty(R)$ слабо разделяюще, существование непостоянной аналитической функции на R является свойством идеальной границы.

Теорему 1 мы докажем в следующем параграфе. В последнем параграфе §3 мы рассматриваем неслабый разделяющий случай, а также некоторые дальнейшие обобщения следствия 1.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что R – риманова поверхность такая, что $M^\infty(R)$ слабо разделяюще, и такая, что $H^\infty(R) = \mathbb{C}$. Доказательство завершится, когда мы покажем, что R – конформный эквивалент к подобласти замкнутой римановой поверхности.

Лемма 1. Пусть $f \in M^\infty(R)$ – непостоянная функция. Тогда

а) $1/(f - \lambda)$ принадлежит множеству $M^\infty(R)$ и все его полюсы простые, если модуль комплексного числа λ достаточно большой ;

б) существует функция g в $M^\infty(R)$ такая, что g разделяет точки полюсного множества $f^{-1}(\infty)$ функции f .

Доказательство. Существует компактное подмножество K такое, что $|f| \leq M$ на $R \setminus K$ для некоторой постоянной M . Поэтому $1/(f - \lambda) \in M^\infty(R)$, если $|\lambda| > M$. Пусть $f^{-1}(\infty) = \{a_1, \dots, a_L\}$. При необходимости, заменяя постоянную M большей, мы можем предположить, что множество $\{p \in R : |f(p)| > M\}$ состоит из конечного числа раздельных кругов $V_1, \dots, V_L$ и, что $z = \sqrt[4]{1/f}$

дает координату V_k , где n_k – порядок полюса a_k . Тогда все полюсы $1/(f - \lambda)$ становятся простыми, если $|\lambda| > M$. Этим доказывается пункт а).

Для доказательства пункта (б) рассмотрим алгебру функций, имеющих вид g/h ($g, h \in M^\infty(R)$, $h \neq 0$), согласно предположению, являющуюся разделяющей. Затем находим пару функций g_1 и h_1 в $M^\infty(R)$ таких, что $(g_1/h_1)(a_k) = k$ для $k = 1, \dots, L$. При необходимости, умножая g_1 и h_1 на ту же самую степень f^n функции f , мы можем предположить, что g_1 имеет полюса во всех $a_1, \dots, a_L$. Согласно (а), $1/(h_1 - \lambda) \in M^\infty(R)$, если λ достаточно большое. Таким образом, функция

$$g = \frac{g_1}{h_1 - \lambda} = \frac{1}{h_1/g_1 - \lambda/g_1}$$

принадлежит классу $M^\infty(R)$ и разделяет $f^{-1}(\infty)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если Φ – аналитическое отображение R в замкнутую риманову поверхность S , то $\Phi(R)$ плотно в S .

Доказательство. Пусть g – любая ограниченная аналитическая функция на открытом подмножестве $\Phi(R)$ поверхности S . Тогда $g \circ \Phi$ принадлежит классу $H^\infty(R)$. Следовательно, $g \circ \Phi$ постоянна, и такой же является g . Это показывает, что $H^\infty(\Phi(R)) = \mathbb{C}$. Следовательно, $\Phi(R)$ должно быть плотным в S .

Ключевая идея доказательства содержится в следующей лемме, указывающей нам путь нахождения требуемой замкнутой римановой поверхности.

Лемма 3. Пусть $f, g \in M^\infty(R)$. Тогда существует непостоянный многочлен P двух переменных такой, что $P(f, g) = 0$.

Доказательство. Если f не имеет полюсов, то $f \in H^\infty(R)$. Из предположения $H^\infty(R) = \mathbb{C}$ следует, что $f = c(\text{const})$. Поэтому требуемый многочлен задается по формуле $P(z, w) = c - z$. Теперь мы можем предположить, что и f и g имеют полюса. Выберем положительное целое число M такое, чтобы все полюса f и g имели наибольшим порядком M . Пусть $f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty) = \{a_1, \dots, a_L\}$. Для положительного целого N обозначим через $\mathcal{L}_N$ линейное пространство, состоящее из функций вида $f^j g^k$ ($1 \leq j, k \leq N$). У каждого полюса a_j фиксируя координату, рассмотрим все коэффициенты главных частей в разложениях Лаурента функции

h в $\mathcal{L}_N$. Отсюда мы получаем линейное отображение из линейного пространства $\mathcal{L}_N$ в $2MNL$ -мерное комплексное векторное пространство, где $2MNL$ -мерность вытекает из того, что каждая функция $h \in \mathcal{L}_N$ имеет не больше L полюсов, и что все ее полюса имеют порядок не больше $2MN$. Заметим, что существуют N^2 функций вида $f^j g^k$ в $\mathcal{L}_N$. Следовательно, если N достаточно велико, то мы находим нетривиальную линейную комбинацию $F = \sum_{1 \leq j, k \leq N} c_{jk} f^j g^k$ в ядре линейного отображения. Из этого следует, что функция F не имеет полюсов, так что F — ограниченная аналитическая функция на R . Поскольку $H^\infty(R) = \mathbb{C}$, то имеем $F = c(\text{const})$. Следовательно, искомым многочлен задается по формуле

$$P(z, w) = c - \sum_{1 \leq j, k \leq N} c_{jk} z^j w^k.$$

Теперь мы можем доказать теорему 1. Поскольку $H^\infty(R) = \mathbb{C}$, то каждая непостоянная функция f в $M^\infty(R)$ имеет полюс. Используя лемму 1, мы находим функцию f в $M^\infty(R)$ такую, что все полюса f простые, и функцию $g \in M^\infty(R)$ такую, что g разделяет точки $f^{-1}(\infty)$. Обозначим через $\hat{\mathbb{C}}$ риманову сферу. Полагая $\varphi(p) = (f(p), g(p))$, получим аналитическое отображение $\varphi : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$. Согласно лемме 3, существует непостоянный многочлен P такой, что $P(f, g) = 0$. Мы можем предположить, что многочлен P неприводимый. Определим S как подмножество $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ по формуле $S = \{(z, w) : P(z, w) = 0\}$, которая может иметь конечное число алгебраических особенностей. Существуют (связанная) замкнутая риманова поверхность $\tilde{S}$ и естественное аналитическое отображение $\pi_S : \tilde{S} \rightarrow S$, которая биективна везде, кроме особенностей S . С учетом непрерывности отображения ψ теорема Римана об устранимой особенности позволит нам определить аналитическое отображение $\tilde{\varphi} : R \rightarrow \tilde{S}$ такое, что $\varphi = \pi_S \circ \tilde{\varphi}$. Из леммы 2 следует, что дополнение образа $\tilde{\varphi}(R)$ является AB -пренебрегаемым подмножеством $\tilde{S}$. В частности, $\tilde{\varphi}(R)$ плотно в $\tilde{S}$. Мы утверждаем, что отображение $\tilde{\varphi}$ инъективно на R . Пусть $f^{-1}(\infty) = \{a_1, \dots, a_L\}$. При подходящем выборе f и g существуют раздельные круги V_j с центрами a_j ($j = 1, \dots, L$) такие, что $\tilde{\varphi}$ инъективно на $V = V_1 \cup \dots \cup V_L$, и такие, что $\tilde{\varphi}(V) \cap \tilde{\varphi}(R \setminus V) = \emptyset$. Пусть $h \in M^\infty(R)$. Рассмотрим отображение $\psi : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ определяемое из $\psi(p) = (f(p), g(p), h(p))$. Опять

существует неприводимый многочлен $Q(w, u)$, а образ лежит в подмножестве

$$T = \{(z, w, u) \in \mathbb{C}^3 : P(z, w) = Q(w, u) = 0\}.$$

Если $\bar{T}$ – замкнутая риманова поверхность, соответствующая T , то мы получаем аналитическое отображение $\bar{\psi}$ из R на $\bar{T}$, и, аналогично, для ψ . Проекция T на S с использованием первых двух координат также порождает аналитическое отображение Π из $\bar{T}$ на $\bar{S}$ такое, что $\Pi \circ \bar{\psi} = \bar{\varphi}$. При необходимости, заменив $\bar{T}$ ее связанной компонентой, содержащей образ $\bar{\psi}(R)$, из леммы 2 получим, что отображение $\bar{\psi}$ имеет плотный образ и инъективно на множестве V . Следовательно, проекция Π должна быть биективной. Отсюда следует, что третья координатная функция u на T является рациональной функцией $R(z, w)$ от переменных z, w , так что $h = R(f, g)$. Поскольку h – любой элемент в $M^\infty(R)$, то точки R слабо разделены алгеброй, порожденной функциями f и g . Это показывает, что $\bar{\psi}$ инъективно на R , и мы завершаем доказательство.

§3. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Предположим, что $M^\infty(R) \neq \mathbb{C}$, где $M^\infty(R)$ необязательно слабо разделяюще. В этом случае (см. [4]) существуют тройка $(\bar{R}, \Phi, \mathcal{M})$ римановой поверхности $\bar{R}$, аналитическое отображение Φ из R в $\bar{R}$ и алгебра $\mathcal{M}$ мероморфных функций на $\bar{R}$ такие, что

а) $\mathcal{M} \circ \Phi = M^\infty(R)$;

б) $\mathcal{M}$ слабо разделяет точки $\bar{R}$;

в) $\bar{R}$ $\mathcal{M}$ -максимально; точнее, если риманова поверхность, скажем, R' , содержит $\bar{R}$ как свою правильную подобласть, то существует функция в $\mathcal{M}$, которая мероморфно не продолжается в R' .

Риманова поверхность $\bar{R}$ определяется однозначно с точностью до конформной эквивалентности и называется *решением Ройдена R относительно алгебры $M^\infty(R)$* . Легко видеть, что каждая функция в $\mathcal{M}$ принадлежит $M^\infty(\bar{R})$. В частности, $M^\infty(\bar{R})$ слабо разделяет точки $\bar{R}$. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Пусть $M^\infty(R) \neq \mathbb{C}$. Если $\bar{R}$ – решение Ройдена R относительно $M^\infty(R)$, то либо $H^\infty(\bar{R}) \neq \mathbb{C}$, либо $\bar{R}$ – замкнутая риманова поверхность. Более того, $M^\infty(R) \subset M^\infty(\bar{R}) \circ \Phi$.

Для дальнейших обобщений интересно рассмотреть случай, когда $M^\infty(R \setminus K)$ является слабо разделяющим для компактного подмножества K из R . Является ли слабо разделяющим $M^\infty(R)$? Вопреки ожиданиям, ответ отрицателен.

Пример. Существует риманова поверхность R такая, что $H^\infty(R \setminus K)$ слабо разделяюще для компактного подмножества K , и, однако $H^\infty(R) = M^\infty(R) = \mathbb{C}$.

Пример, который мы собираемся рассмотреть, является разновидностью примера 1 из работы [3]. Пусть $I_k = [a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots$) – последовательность взаимно раздельных интервалов таких, что $1 < a_k < a_{k+1}$ и $a_n \rightarrow \infty$. В каждом интервале I_k рассмотрим конечное число взаимно раздельных замкнутых подинтервалов и обозначим через J_k объединение этих подинтервалов. Положим

$$D_0 = \mathbb{C}, \quad D_n = \mathbb{C} \setminus (\cup_{k, k \neq n} I_k) \cup J_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Приступая к нашему построению, мы мысленно представляем определенный рисунок. А именно, мы располагаем лист D_0 внизу, лист D_1 наверху, а остальные D_n так, чтобы они монотонно стремились к нижнему листу D_0 ; Смысл этого рисунка прояснится позже. Вырезая нижний лист D_0 вдоль подинтервалов J_n , мы соединим все D_n с D_0 вдоль подинтервалов J_n . Полученную риманову поверхность обозначим через $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, и пусть $\Pi : S \rightarrow \mathbb{C}$ – естественное покрывающее отображение. Далее, используя только D_n и D_0 , вырежем D_0 вдоль подинтервалов J_n и соединим D_n с D_0 вдоль подинтервалов J_n с тем, чтобы получить риманову поверхность $R_n = D_n \cup D_0$ для каждого n . Тожественно отображая D_n и D_0 из S и отображая все остальные D_j ($j \neq 0, n$) из S в нижний лист D_0 из R_n , мы получим аналитическое отображение $\Pi_n : S \rightarrow R_n$. Поскольку R_n – подобласть замкнутой римановой поверхности и $H^\infty(R_n) \neq \mathbb{C}$, то $H^\infty(S)$ разделяет точки S . Пусть

$$Q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2\}, \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

В нашей конструкции ни одна из точек ветвления покрытия $\Pi : S \rightarrow \mathbb{C}$ не содержится внутри окружностей $\Pi^{-1}(\Gamma)$. Для $a \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ имеем $\Pi^{-1}(a) = \{a_0, a_1, \dots\}$, где мы полагаем, что $a_n \in D_n$. Начиная с верхнего листа D_1 ,

увеличивая число подинтервалов J_n , мы далее можем полагать, что

$$\sup_{a \in \Gamma} \{|f(a_0) - f(a_n)| : f \in H^\infty(S \setminus \Pi^{-1}(Q)), |f| \leq 1\} < \frac{1}{n}. \quad (3.1)$$

Условие (3.1) именно то, что мы хотели объяснить рисунком. Теперь, выбирая замкнутый интервал I во внутренности замкнутого круга Q , положим $D_{-1} = \mathbb{C} \setminus I$. Вырезая нижний лист D_0 из S вдоль интервала I , мы поперечно соединим лист D_{-1} с S вдоль I и получим новую риманову поверхность $R = S \cup D_{-1}$, обладающую требуемым свойством. Обозначим через $\Pi_* : R \rightarrow \mathbb{C}$ покрывающее отображение. Тогда $K = (D_0 \cap \Pi_*^{-1}(Q)) \cup D_{-1}$ — компактное подмножество R . Так как $R \setminus K$ — подобласть S , то $H^\infty(R \setminus K)$ разделяюще. Пусть $f \in H^\infty(R \setminus K)$ и $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Положим

$$\Delta_n = D_n \cap \Pi_*^{-1}(\Delta), \quad f_n = f \circ (\Pi_*|_{\Delta_n})^{-1}.$$

Используя принцип максимума, из (3.1) получим, что f_n равномерно сходится к f_0 , и, следовательно, f_0 аналитически продолжается на весь единичный круг Δ . Таким образом, мы можем продолжить f на ограниченную аналитическую функцию на поверхности S . Предположим, что существует непостоянная функция $g \in M^\infty(R)$. При необходимости, заменяя g на $1/(g - \lambda)$ для подходящего комплексного числа λ , мы можем предположить, что g не имеет полюсов на границе компактного множества K . Тогда $g|_{R \setminus K}$ принадлежит $M^\infty(R \setminus K)$. Находя подходящую ненулевую функцию f_1 в $H^\infty(R \setminus K)$ с нулями в полюсах g , мы получим $f_2 = f_1 g \in H^\infty(R \setminus K)$. Как f_1 так и f_2 аналитически продолжаются на поверхность S , и, следовательно, $g|_{R \setminus K}$ продолжается на S мероморфно. Это означает, что для мероморфной функции g на Δ_0 не существует ветвлений. Поэтому имеем $g(a_0) = g(a_{-1})$ для любого $a \in \Delta$. Отсюда, далее, следует, что $g|_{D_{-1}}$ продолжается на непостоянную рациональную функцию G на римановой поверхности $\mathbb{C}$. Из теоремы единственности теперь следует, что g совпадает с $G \circ \Pi_*$ на R , который никогда не принадлежит $M^\infty(R)$, так как Π_* бесконечно листовая на плотном подмножестве R . Это противоречие показывает, что $M^\infty(R) = \mathbb{C}$.

В связи с вышеприведенным примером и следствием 1 мы делаем следующее

Предположение. Предположим, что существуют компактное подмножество K и открытое подмножество U из R такие, что $M^\infty(U)$ слабо разделяюще, и такие, что $R = K \cup U$ и $\partial K \subset \mathcal{P}(U)$. Тогда $M^\infty(R)$ является слабо разделяющим.

Здесь $\mathcal{P}(U)$ обозначает множество всех точек U , в которых функция в $M^\infty(U)$ существует и имеет полюс. Для вышеприведенного примера имеем $\mathcal{P}(S) = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$. Если мы соединим лист D_{-1} с листом D_n ($n \geq 1$) на месте D_0 , то $H^\infty(R)$ на полученной поверхности будет разделяющим. Этот пример обосновывает наше предположение.

С основными свойствами множества $\mathcal{P}(U)$ читатель может ознакомиться в работах [2] и [3].

Автор выражает благодарность профессору Т. В. Гамелину за его полезные советы и особенно за упрощение доказательства теоремы 1. Вначале автор обнаружил идею теоремы 1 в связи с теорией Бишоп-Ройдена, и его первоначальное доказательство основывалось на этом.

ABSTRACT. Let R be a connected Riemann surface and $M^\infty(R)$ be the set of all meromorphic functions on R bounded at the infinity of R . In this note we classify the Riemann surfaces R satisfying the property that $M^\infty(R)$ contains a nonconstant element.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Ahlfors, "Remarks on the classification of open Riemann surfaces", Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I., vol. 87, p. 8, 1951.
2. T. W. Gamelin, M. Hayashi, "The algebra of the bounded analytic functions on a Riemann surface", J. Reine Angew. Math., vol. 382, pp. 49 – 73, 1987.
3. M. Hayashi, "The maximal ideal space of the bounded analytic functions on a Riemann surface", J. Math. Soc. Japan, vol. 39, pp. 337 – 344, 1987.
4. H. L. Royden, "Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces", Acta Math., vol. 114, pp. 113 – 142, 1965.
5. L. Sario, M. Nakai, Classification Theory of Riemann Surfaces, Springer, NY-Berlin, 1970.

22 апреля 1997

Университет Хоккайдо,
Саппоро, Япония

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ КАРТАНА ДЛЯ p -АДИЧНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

Пен-Чу Ху, Чунг-Чун Янг

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 4, 1997

В работе рассматривается теория Неванлинны p -адичных голоморфных кривых и доказывается p -адичный аналог теорем Ночки и Ру-Столла для предположения Картана о соотношениях дефектов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Теория Неванлинны (или теория распределения значений) столь красива, что естественен интерес к выяснению того как будет выглядеть такая теория в p -адичном случае. Существуют две “основные теоремы” и соотношения дефектов, занимающие центральное место в теории Неванлинны. Н. Н. Khóai [7], Н. Н. Khóai, М. V. Quang [9] и A. Boutabaa [1] доказали p -адичные аналоги двух “основных теорем” и соотношений дефектов теории Неванлинны. Н. Н. Khóai [8], W. Cherry и Zh. Ye [4] начали изучать некоторую переменную p -адичную теорию Неванлинны и доказали соотношение дефектов гиперплоскостей в общем случае. Ху и Янг показали, что представление Столла [21] метода Чуанга-Стейнмеца для доказательства соотношения дефектов малых функций вместе с доказательством Широаки [19] теоремы Ру-Столла [15] и использованием метода Картана могут дать p -адичный аналог теоремы Ру-Столла для движущихся мишеней. Они также изучили множество единственности значений для p -адичных мероморфных функций.

В настоящей работе доказывается p -адичный аналог теорем Ночки и Ру-

Столла для предположения Картана о соотношениях дефектов, а именно

Теорема. Пусть V — $n+1$ -мерное векторное пространство над C_p , а $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ — конечное множество p -адических голоморфных кривых $g_j : C_p \rightarrow P(V^*)$ в основной позиции, $q \geq n$. Возьмем целое k , $1 \leq k \leq n$. Пусть $f : C_p \rightarrow P(V)$ — p -адическая голоморфная кривая, являющаяся k -плоской над $\mathcal{R}$ и такая, что любая пара (f, g_j) свободна для $j = 0, \dots, q$. Предположим, что g_j растет медленнее чем f для каждого j . Тогда имеем

$$\sum_{j=0}^q \delta_f(g_j) \leq 2n - k + 1.$$

Обозначения приведены в следующих параграфах. Здесь мы только опишем историю этой задачи.

(i) Случай в комплексном анализе :

(i)-1 постоянные мишени : Р. Неванлинна [11] для $n = k = 1$; Г. Картан [2] для $n = k > 1$; Е. И. Ночка [12 – 14] для $n > k \geq 1$;

(i)-2 движущиеся мишени : Н. Стейнмец [20] для $n = k = 1$; М. Ру и В. Столл [15], [16] для $n = k > 1$ и для $n > k \geq 1$.

(ii) Случай в p -адическом анализе :

(ii)-1 постоянные мишени : Н. Н. Khóai [7], Н. Н. Khóai, М. V. Quang [9] и А. Boutabaa [1] для $n = k = 1$; Н. Н. Khóai и М. V. Tu [10], W. Cherry и Zh. Ye [4] для $n = k > 1$; Р. С. Hu и С. С. Yang для $n > k \geq 1$ (теорема 1.1).

(ii)-2 движущиеся мишени : П. Ч. Ху и Ч. Ч. Янг [5] для $n = k \geq 1$; П. Ч. Ху и Ч. Ч. Янг для $n > k \geq 1$ (теорема 1.1).

(iii) Случай в диофантовом анализе :

(iii)-1 постоянные мишени : теорема Рота ([23]) для $n = k = 1$; теорема подпространства Шмидта ([23]) для $n = k \geq 1$; М. Ру и П. М. Вонг [18] для $n > k \geq 1$.

(iii)-2 движущиеся мишени : П. Войта [24] для $n = k = 1$; М. Ру и П. Войта [17] для $n = k \geq 1$. Случай $n > k \geq 1$ остается нерешенным.

§2. ТЕОРИЯ НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ p -АДИЧНЫХ
МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть p – простое число, $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел и $\mathbb{C}_p$ – p -адическое дополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$. Абсолютное значение $|\cdot|_p$ в $\mathbb{C}_p$ нормализовано так, что $|p|_p = p^{-1}$. Далее мы используем обозначение ord_p для аддитивной валуации на $\mathbb{C}_p$.

Напомним, что в метрическом пространстве, метрика которого порождается неархимедовской нормой, последовательность называется последовательностью Коши тогда и только тогда, когда разность между соседними членами стремится к нулю; и если метрическое пространство полно, бесконечная сумма сходится тогда и только тогда, когда ее основной член стремится к нулю. Таким образом, если мы рассмотрим выражения вида

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, \quad (a_n \in \mathbb{C}_p)$$

мы можем приписать значение $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ функции $f(z)$ при замене Z на z , для которого

$$|a_n z^n|_p \rightarrow 0.$$

Определим “радиус ρ сходимости”:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда ряд будет сходиться, если $|z|_p < \rho$ и расходиться, если $|z|_p > \rho$. Функция $f(z)$ называется p -адической аналитической на $B(\rho)$, где

$$B(\rho) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < \rho\}.$$

Если $\rho = \infty$, то функция $f(z)$ называется p -адической целой на $\mathbb{C}_p$.

Задана непостоянная p -адическая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n \in \mathbb{C}_p)$$

на $B(\rho)$ ($0 < \rho \leq \infty$). Суть метода Вимана–Валирона состоит в анализе поведения функции с помощью *максимального члена*:

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n|_p r^n \quad (0 < r < \rho)$$

вместе с центральным индексом :

$$\nu(r, f) = \max_{n \geq 0} \{n \mid |a_n|_p r^n = \mu(r, f)\}.$$

Определим

$$\nu(0, f) = \lim_{r \rightarrow 0} \nu(r, f).$$

Очевидно, если $f \neq 0$, то $\mu(r, f) > 0$ для $r > 0$. Далее, заметим, что если h другая p -адичная аналитическая функция на $B(\rho)$, то

$$\mu(r, fh) = \mu(r, f)\mu(r, h). \quad (1)$$

Лемма 2.1. [5] Центральный индекс $\nu(r, f)$ убывает при $r \rightarrow \rho$ и удовлетворяет формуле

$$\log \mu(r, f) = \log |a_{\nu(0, f)}|_p + \int_0^r \frac{\nu(t, f) - \nu(0, f)}{t} dt + \nu(0, f) \log r. \quad (0 < r < \rho).$$

Следовательно, $\mu(r, f)$ — убывающая непрерывная функция.

Следующую техническую лемму можно найти в [4] :

Лемма 2.2. [Подготовительная теорема Вейерштрасса] Существуют единственный одиначный многочлен P порядка $\nu(r, f)$ и p -адичная аналитическая функция g на $B[r]$ такие, что $f = gP$, где

$$B[r] = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p \leq r\}.$$

Далее, g не имеет нулей внутри $B[r]$, а P имеет ровно $\nu(r, f)$ нулей, с учетом кратности, на $B[r]$.

Обозначим через $n(r, \frac{1}{f})$ число нулей (с учетом кратности) отображения f с абсолютным значением $\leq r$ и определим функцию валентности f для 0 выражением

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \log r. \quad (0 < r < \rho).$$

Лемма 2.2 показывает, что

$$n(r, \frac{1}{f}) = \nu(r, f).$$

Из леммы 2.1 следует формула Йенсена :

$$N(r, \frac{1}{f}) = \log \mu(r, f) - \log |a_{n(0, \frac{1}{f})}|_p. \quad (2)$$

Для каждого n начертим граф $\gamma_n(t)$, который описывает $\text{ord}_p(a_n z^n)$ как функцию от $t = \text{ord}_p(z)$. Тогда $\gamma_n(t)$ является прямой с наклоном n . Обозначим через $\gamma(t, f)$ границу пересечения всех полуплоскостей, лежащих под кривыми $\gamma_n(t)$. Эта кривая называется многоугольником Ньютона функции $f(z)$ (см. [9]). Точки t , в которых $\gamma(t, f)$ имеет вершины, называются критическими точками функции $f(z)$. Конечный отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит только конечное множество критических точек. Ясно, что если t — критическая точка, то $\text{ord}_p(a_n) + nt$ достигает своего минимума не менее чем для двух значений n . Очевидно, имеем

$$\mu(r, f) = p^{-\gamma(t, f)}, \quad r = p^{-t}.$$

Основным свойством многоугольника Ньютона является то, что если $t = \text{ord}_p(z)$ не является критической точкой, то

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t, f)},$$

откуда следует, что $|f(z)|_p = \mu(r, f)$. Под мероморфной функцией f на $B(p)$ будем подразумевать отношение $\frac{g}{h}$ двух p -адичных аналитических функций g и h таких, что g и h не имеют простых факторов в кольце p -адичных аналитических функций на $B(p)$. Заметим, что (1) выполняется и, что наибольший простой делитель любых двух p -адичных аналитических функций существует. Мы можем единственным образом расширить μ на мероморфную функцию $f = \frac{g}{h}$, полагая

$$\mu(r, f) = \frac{\mu(r, g)}{\mu(r, h)}.$$

Положим также

$$\gamma(t, f) = \gamma(t, g) - \gamma(t, h).$$

Ясно, что если $t = \text{ord}_p(z)$ не является критической точкой для $f(z)$, т.е. t не является критической точкой для $g(z)$ или $h(z)$, то

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t, f)} = \mu(r, f).$$

Определим

$$|C_p| = \{|z|_p \mid z \in C_p\}.$$

Заметим, что $\{p^w \mid w \in \mathbb{Q}\} \subseteq |C_p|$. Тогда $|C_p|$ плотно в $\mathbb{R}[0, +\infty)$. Если $a : \mathbb{R}[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $b : C_p \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественнозначные функции, то $a(r) \leq b(z)$ означает, что для любого положительного числа $0 < R < \rho$ существует конечное множество E в $|C_p|[0, R]$ такое, что

$$a(r) \leq b(z), \quad r = |z|_p \in |C_p|[0, R] - E.$$

Используя эти обозначения, имеем

$$\mu(r, f) = |f(z)|_p$$

для p -адичного мероморфного отображения f на $B(\rho)$.

Определим считывающую функцию $n(r, f)$ и функцию валентности $N(r, f)$ отображения f для полюсов :

$$n(r, f) = n(r, \frac{1}{h}), \quad N(r, f) = N(r, \frac{1}{h}).$$

Применяя (2) для g и h , получим формулу Йенсена

$$N(r, \frac{1}{f}) - N(r, f) = \log \mu(r, f) - C_f, \quad (3)$$

где C_f — постоянная, зависящая только от f . Определим

$$m(r, f) = \log^+ \mu(r, f) = \max\{0, \log \mu(r, f)\}.$$

Наконец, определим характеристическую функцию

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Легко проверить, что

$$T(r, f) = \max\{\log \mu(r, g), \log \mu(r, h)\} + O(1).$$

Ниже мы приводим некоторые основные факты, используемые в следующих параграфах.

Лемма 2.3. (Первая основная теорема, [1], [9]). Пусть f — непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$. Тогда для любого $a \in \mathbb{C}_p$ имеем

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1), \quad r \rightarrow \rho.$$

Лемма 2.4. (Лемма о логарифмической производной, [1], [4], [9]) Пусть f — непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$. Тогда

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1), \quad r \rightarrow \rho.$$

Лемма 2.5. (Вторая основная теорема, [1], [4], [9]) Пусть f — непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$, и пусть $a_1, \dots, a_q$ — различные номера $\mathbb{C}_p$. Тогда

$$(q-1)T(r, f) \leq N(r, f) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_1(r, f) - \log r + O(1),$$

где

$$N_1(r, f) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

§3. ВЕС НОЧКИ

Пусть V — векторное пространство конечной меры $n+1 > 0$ над $\mathbb{C}_p$. Возьмем базис $e = (e_0, \dots, e_n)$ для V . Для $\xi = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_n e_n \in V$ определим

$$\|\xi\| = \|\xi\|_e = \max_{0 \leq i \leq n} \{|\xi_i|_p\}.$$

$\|\cdot\|$ означает норму: (1) $\|\xi\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$; (2) $\|a\xi\| = |a|_p \|\xi\|$ для всех $\xi \in V$ и $a \in \mathbb{C}_p$; (3) $\|\xi + \eta\| \leq \max\{\|\xi\|, \|\eta\|\}$. Очевидно, норма зависит от базиса e , поэтому, она называется нормой, определенной над базисом e . Если $\|\cdot\|_{e'}$ — другая норма, определенная над базисом $e' = (e'_0, \dots, e'_n)$, то легко доказать, что

$$\left\{ \max_{0 \leq i \leq n} \|e'_i\|_e \right\}^{-1} \|\xi\|_e \leq \|\xi\|_{e'} \leq \left\{ \max_{0 \leq i \leq n} \|e_i\|_{e'} \right\} \|\xi\|_e$$

для всех $\xi \in V$, т.е. нормы, определенные над базисами, эквивалентны. Если норма, определенная над некоторым базисом, назначена к V , то V называется нормированным векторным пространством. Норма в $V = \mathbb{C}_p$ нормирована так, что $\|\xi\| = |\xi|_p$.

Пусть $P(V) = V/\{C_p - \{0\}\}$, и пусть $P: V - \{0\} \rightarrow P(V)$ — стандартная проекция. Если $S \subset V$, сокращенно запишем

$$P(S) = P(S \cap \{V - \{0\}\}).$$

Дуальное векторное пространство V^* пространства V состоит из всех C_p -линейных функций $\alpha: V \rightarrow C_p$, а

$$\langle \xi, \alpha \rangle = \alpha(\xi)$$

называем скалярным произведением $\xi \in V$ и $\alpha \in V^*$. Если $\alpha \neq 0$, то n -мерное линейное подпространство $E[\alpha] = \text{Ker}(\alpha)$ зависит только от $a = P(\alpha) \in P(V^*)$ и $\tilde{E}[a] = P(E[\alpha])$ — гиперплоскость в $P(V)$. Таким образом, $P(V^*)$ биективно параметризует гиперплоскости в $P(V)$.

Пусть $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ — дуальный к базису $e = (e_0, \dots, e_n)$. Тогда норма на V порождает норму на V^* , определенную по формуле

$$\|\alpha\| = \|\alpha\|_\epsilon = \max_{0 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|_p\},$$

где $\alpha = \alpha_0 \epsilon_0 + \dots + \alpha_n \epsilon_n$. Неравенство Шварца

$$|\langle \xi, \alpha \rangle|_p \leq \|\xi\| \cdot \|\alpha\|$$

выполняется для $\xi \in V$, $\alpha \in V^*$. Расстояние от $x = P(\xi)$ до $\tilde{E}[a]$, $a = P(\alpha) \in P(V^*)$ определяется по формуле

$$0 \leq \|x, a\| = \frac{|\langle \xi, \alpha \rangle|_p}{\|\xi\| \cdot \|\alpha\|} \leq 1.$$

Мы отождествляем $V^{**} = V$, $\langle \xi, \alpha \rangle = \langle \alpha, \xi \rangle$, и $(\bigwedge_{k+1} V)^* = \bigwedge_{k+1} V^*$, поскольку

$$\langle \xi_0 \wedge \dots \wedge \xi_k, \alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_k \rangle = \det(\langle \xi_i, \alpha_j \rangle).$$

Возьмем $k, l \in \mathbb{Z}[0, n]$, $\xi \in \bigwedge_{k+1} V$ и $\alpha \in \bigwedge_{l+1} V^*$. Если $k \geq l$, то скалярное произведение $\xi \angle \alpha \in \bigwedge_{k-l} V$ однозначно определяется из

$$\langle \xi \angle \alpha, \beta \rangle = \langle \xi, \alpha \wedge \beta \rangle$$

для всех $\beta \in \bigwedge_{k=l} V^*$. Если $k = l$, то, по определению

$$\xi \angle \alpha = \langle \xi, \alpha \rangle \in C_p = \bigwedge_0 V.$$

Для $k < l$ определим $\xi \angle \alpha \in \bigwedge_{l-k} V^*$ так, что если $\eta \in \bigwedge_{l-k} V$, то

$$\langle \eta, \xi \angle \alpha \rangle = \langle \xi \wedge \eta, \alpha \rangle.$$

Возьмем неположительные целые числа a и b , $a \leq b$. Пусть J_a^b — множество всех возрастающих инъективных отображений $\lambda : \mathbb{Z}[0, a] \rightarrow \mathbb{Z}[0, b]$. Норма на V также порождает нормы на $\bigwedge_{k+1} V$ и $\bigwedge_{l+1} V^*$. Возьмем $\xi \in \bigwedge_{k+1} V$, $\alpha \in \bigwedge_{l+1} V^*$ и запишем

$$\xi = \sum_{\lambda \in J_k^n} \xi_\lambda e_\lambda, \quad \alpha = \sum_{\lambda \in J_l^n} \alpha_\lambda e_\lambda,$$

где $e_\lambda = e_{\lambda(0)} \wedge \dots \wedge e_{\lambda(k)}$. Затем определим нормы

$$\|\xi\| = \|\xi\|_e = \max_{\lambda \in J_k^n} \{|\xi_\lambda|_p\}, \quad \|\alpha\| = \|\alpha\|_e = \max_{\lambda \in J_l^n} \{|\alpha_\lambda|_p\}.$$

При $l \leq k$ имеем

$$\|\xi \angle \alpha\| \leq \|\xi\| \cdot \|\alpha\|.$$

Действительно, если $l = k$, то замечая, что

$$\xi \angle \alpha = \langle \xi, \alpha \rangle = \sum_{\lambda \in J_l^n} \xi_\lambda \alpha_\lambda,$$

получаем это неравенство. Если $l < k$, то заметим, что

$$(e_0 \wedge \dots \wedge e_k) \angle \alpha = \sum_{\nu \in J_l^k} \text{sign}(\nu, \nu^\perp) \langle e_\nu, \alpha \rangle e_{\nu^\perp},$$

см. [22], где $\nu^\perp \in J_{k-l-1}^k$ для каждого $\nu \in J_l^k$, $\text{Im} \nu \cap \text{Im} \nu^\perp = \emptyset$, и где $\text{sign}(\nu, \nu^\perp)$ — знак возмущения $(\nu, \nu^\perp)$. Отсюда получим

$$\|(e_0 \wedge \dots \wedge e_k) \angle \alpha\| = \max_{\nu \in J_l^k} \{|\langle e_\nu, \alpha \rangle|_p\} \leq \|\alpha\|.$$

Итак, имеем

$$\|\xi \angle \alpha\| = \left\| \sum_{\lambda \in J_k^n} \xi_\lambda e_\lambda \angle \alpha \right\| \leq \max_{\lambda \in J_k^n} \{|\xi_\lambda|_p \|e_\lambda \angle \alpha\|\} \leq \|\xi\| \cdot \|\alpha\|.$$

Пусть $V_1, \dots, V_m$ и W – нормированные векторные пространства над C_p . Пусть

$$\odot : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow W$$

– m -линейное отображение над C_p . Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$, то будем писать

$$\odot(\xi) = \xi_1 \odot \dots \odot \xi_m,$$

и будем говорить, что ξ свободно для операции $\odot$, если $\odot(\xi) \neq 0$. Если $x_j = P(\xi_j)$, мы также будем говорить, что $x_1, \dots, x_m$ свободны для $\odot$ и

$$x_1 \odot \dots \odot x_m = P(\xi_1 \odot \dots \odot \xi_m)$$

определено корректно. “Норма”

$$\|x_1 \odot \dots \odot x_m\| = \frac{\|\xi_1 \odot \dots \odot \xi_m\|}{\|\xi_1\| \dots \|\xi_m\|}$$

также определена корректно.

Пример 3.1. Возьмем $V_1 = \dots = V_m = V$, $W = \bigwedge_m V$ и $\odot = \wedge$. Пусть $\|\cdot\|$ – норма V , определенная над базисом e . Тогда $\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\|$ определено для всех $x_j \in P(V)$ и $0 \leq \|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\| \leq 1$.

Пример 3.2. Возьмем $V_1 = \bigwedge_{k+1} V$, $V_2 = \bigwedge_{l+1} V^*$, $W = \bigwedge_{k+l} V$ и $\odot = \angle$ с $0 \leq l \leq k$. Тогда $\|x \angle a\|$ определено для всех $x \in P(\bigwedge_{k+1} V)$ и $a \in P(\bigwedge_{l+1} V^*)$, $0 \leq \|x \angle a\| \leq 1$. В частности, если $k = l = 0$, то $\|x \angle a\| = \|x, a\|$. Проективное пространство $P(\bigwedge_{n+1} V^*)$ состоит из одной и только одной точки, обозначаемой через ∞ .

Пример 3.3. Пусть $V_1 = \dots = V_m = V$, и пусть $W = \Pi_m V$ – m -мерное симметричное тензорное произведение V . Тогда

$$\dim \Pi_m V = \binom{n+m}{m}.$$

Пусть для $\xi_j \in V$ $\xi_1 \Pi \dots \Pi \xi_m$ – симметричное тензорное произведение. Пусть для $\xi \in V$ $\xi^{\Pi m}$ – m -тая симметричная тензорная степень. Определим

$$x^{\Pi m} = P(\xi^{\Pi m})$$

для $x = P(\xi)$. Мы можем отождествлять $\Pi_m V^* = (\Pi_m V)^*$, поскольку

$$\langle \xi_1 \Pi \cdots \Pi \xi_m, \alpha_1 \Pi \cdots \Pi \alpha_m \rangle = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda \in \mathcal{J}_m} \langle \xi, \alpha_{\lambda(1)} \rangle \cdots \langle \xi, \alpha_{\lambda(m)} \rangle$$

для всех $x_j \in V, \alpha_j \in V^*, j = 1, \dots, m$, где $\mathcal{J}_m$ — группа перестановок на $\mathbb{Z}[1, m]$.

Пусть $J_{n,m}$ — множество всех отображений $\lambda : \mathbb{Z}[0, n] \rightarrow \mathbb{Z}[0, m]$ таких, что

$$|\lambda| = \lambda(0) + \cdots + \lambda(n) = m.$$

Для $\lambda \in J_{n,m}, e = (e_0, \dots, e_n) \in V^{n+1}$ определим

$$\lambda! = \lambda(0)! \cdots \lambda(n)!, \quad e^{\Pi\lambda} = e_0^{\Pi\lambda(0)} \Pi \cdots \Pi e_n^{\Pi\lambda(n)} \in \Pi_m V.$$

Если $e = (e_0, \dots, e_n)$ в базисе V , то $\{e^{\Pi\lambda}\}_{\lambda \in J_{n,m}}$ — базис $\Pi_m V$, а $\{\frac{m!}{\lambda!} e^{\Pi\lambda}\}_{\lambda \in J_{n,m}}$ — дуальный базис $\Pi_m V^*$, где $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ — дуален к e . Норма на V порождает норму на $\Pi_m V$ и $\Pi_m V^*$ следующим образом: для $\eta \in \Pi_m V, \beta \in \Pi_m V^*$ с

$$\eta = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \eta_\lambda e^{\Pi\lambda}, \quad \beta = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \beta_\lambda \frac{m!}{\lambda!} e^{\Pi\lambda},$$

определим

$$\|\eta\| = \max_{\lambda \in J_{n,m}} |\eta_\lambda|_p, \quad \|\beta\| = \max_{\lambda \in J_{n,m}} |\beta_\lambda|_p.$$

Заметим, что

$$\xi^{\Pi m} = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \xi_0^{\lambda(0)} \cdots \xi_n^{\lambda(n)} e^{\Pi\lambda}, \quad \alpha^{\Pi m} = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \alpha_0^{\lambda(0)} \cdots \alpha_n^{\lambda(n)} \frac{m!}{\lambda!} e^{\Pi\lambda},$$

для

$$\xi = \xi_0 e_0 + \cdots + \xi_n e_n \in V, \quad \alpha = \alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Тогда

$$\|\xi^{\Pi m}\| = \|\xi\|^m, \quad \|\alpha^{\Pi m}\| = \|\alpha\|^m.$$

Лемма 3.1. Для всех $x \in P(V)$ $\|x \angle \infty\| = 1$.

Доказательство. Возьмем $\xi \in V - \{0\}, x = P(\xi)$. Положим $\xi_j = \langle \xi, \epsilon_j \rangle$. Для $j \in \mathbb{Z}[0, n]$ определим

$$\hat{\epsilon}_j = (-1)^j \epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j-1} \wedge \epsilon_{j+1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_n.$$

Отсюда имеем

$$\|\xi \angle (\epsilon_0 \wedge \dots \wedge \epsilon_n)\| = \left\| \sum_{j=0}^n \langle \xi, \epsilon_j \rangle \hat{\epsilon}_j \right\| = \max_{0 \leq j \leq n} \{|\xi_j|_p\} = \|\xi\|.$$

Поскольку $\infty = P(\epsilon_0 \wedge \dots \wedge \epsilon_n)$, то

$$\|x \angle \infty\| = \frac{\|\xi \angle (\epsilon_0 \wedge \dots \wedge \epsilon_n)\|}{\|\xi\| \cdot \|\epsilon_0 \wedge \dots \wedge \epsilon_n\|} = 1.$$

Лемма 3.2. Для $x \in P(V)$, $a_j \in P(V^*)$, $j = 0, 1, \dots, n$ имеем

$$\|a_0 \wedge \dots \wedge a_n\| \leq \max_{0 \leq j \leq n} \|x, a_j\|.$$

Доказательство. Для $\|a_0 \wedge \dots \wedge a_n\| = 0$ неравенство тривиально. Если $\|a_0 \wedge \dots \wedge a_n\| > 0$, то $a_0 \wedge \dots \wedge a_n = \infty$. Из леммы 3.1 следует $\|x \angle (a_0 \wedge \dots \wedge a_n)\| = 1$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}[0, n]$ возьмем $\alpha_j \in V^* - \{0\}$, $P(\alpha_j) = a_j$. Возьмем также $\xi \in V - \{0\}$, $P(\xi) = x$. Имеем

$$\begin{aligned} \|a_0 \wedge \dots \wedge a_n\| &= \|a_0 \wedge \dots \wedge a_n\| \cdot \|x \angle (a_0 \wedge \dots \wedge a_n)\| = \\ &= \frac{\|\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_n\|}{\|\alpha_0\| \dots \|\alpha_n\|} \cdot \frac{\|\xi \angle (\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_n)\|}{\|\xi\| \|\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_n\|} = \\ &= \frac{\|\sum_{j=0}^n \langle \xi, \alpha_j \rangle \hat{\alpha}_j\|}{\|\xi\| \|\alpha_0\| \dots \|\alpha_n\|} \leq \max_{0 \leq j \leq n} \frac{|\langle \xi, \alpha_j \rangle|_p \|\hat{\alpha}_j\|}{\|\xi\| \|\alpha_0\| \dots \|\alpha_n\|} = \\ &= \max_{0 \leq j \leq n} \|x, a_j\| \|\alpha_0 \wedge \dots \wedge a_{j-1} \wedge a_{j+1} \wedge \dots \wedge a_n\| \leq \max_{0 \leq j \leq n} \|x, a_j\|. \end{aligned}$$

Этим завершается доказательство.

Весы Ночки [12] — [14] (см. также Чен [3]) изначально доказаны для поля комплексных чисел. Первоначальная статья Ночки написана очень сжато. Полное доказательство можно найти в тезисе Чена, который, напротив, довольно обширен. Ру и Вонг [18] укоротили доказательство и расширили веса Ночки на любое поле характеристического нуля. Следуя Чену, Ру, Столлу и Вонгу, мы будем использовать понятие подосновной позиции.

Пусть $A = \{a_0, a_1, \dots, a_q\}$ — семейство точек $a_j \in P(V^*)$. Возьмем $\alpha_j \in V^* - \{0\}$ с $P(\alpha_j) = a_j$. Для $\lambda \in J_l^q$ положим $A_\lambda = \{\alpha_{\lambda(0)}, \dots, \alpha_{\lambda(l)}\}$, и пусть $E(A_\lambda)$ — линейное подпространство, порожденное $\{\alpha_{\lambda(0)}, \dots, \alpha_{\lambda(l)}\}$ в V^* над C_p . Определим

$$J_l(A) = \{\lambda \in J_l^q \mid \alpha_\lambda \neq 0\}.$$

Очевидно, если $\lambda \in J_l(A)$, то $\dim E(A_\lambda) = l + 1$, и $\alpha_{\lambda(0)}, \dots, \alpha_{\lambda(l)}$ – базис $E(A_\lambda)$. Говорят, что для $1 \leq n \leq u \leq q$ A находится в u -подосновной позиции, если $E(A_\kappa) = V^*$ для любого $\kappa \in J_u^q$. Для $u = n$ это понятие согласуется с обычным понятием гиперплоскостей в основной позиции.

Лемма 3.3. Пусть V – векторное пространство размерности $n + 1$ над C_p , и пусть $A = \{a_0, a_1, \dots, a_q\}$ – семейство точек $a_j \in P(V^*)$ в u -подосновной позиции, $1 \leq n \leq u \leq q$. Тогда существуют функция $\omega : A \rightarrow R(0, 1]$, называемая весом Ночки, и действительное число $\theta \geq 1$, называемое постоянной Ночки, обладающие следующими свойствами :

$$1) 0 < \omega(a_j)\theta \leq 1, \quad j = 0, 1, \dots, q;$$

$$2) q - 2u + n = \theta(\sum_{j=0}^q \omega(a_j) - n - 1);$$

$$3) 1 \leq \frac{u+1}{n+1} \leq \theta \leq \frac{2u-n+1}{n+1};$$

$$4) \sum_{j=0}^s \omega(a_{\kappa(j)}) \leq \dim E(A_\kappa) \text{ при } \kappa \in J_s^q \text{ и } 0 \leq s \leq u;$$

5) пусть $r_0, \dots, r_q$ – последовательность действительных чисел с $r_j \geq 1$ для всех j . Тогда для любого $\kappa \in J_s^q$ с $0 \leq s \leq u$ при $\dim E(A_\kappa) = l + 1$ существует $\lambda \in J_l(A)$ такое, что $\text{Im } \lambda \subset \text{Im } \kappa$, $E(A_\lambda) = E(A_\kappa)$ и

$$\prod_{j=0}^s r_{\kappa(j)}^{\omega(a_{\kappa(j)})} \leq \prod_{j=0}^l r_{\lambda(j)}.$$

Подробнее см. [18]. Согласно Ру-Столла [15] базис $e = (e_0, \dots, e_n)$ пространства V называется совершенным для конечного семейства $A = \{a_0, a_1, \dots, a_q\}$ точек в $P(V^*)$, $q \geq n$ и $J_n(A) \neq \emptyset$, если для любого $\lambda \in J_n(A)$

$$\langle e_0 \wedge \dots \wedge e_j, \alpha_{\pi(0)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(j)} \rangle \neq 0, \quad \pi \in \mathcal{J}_\lambda, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где $\alpha_j \in V^* - \{0\}$, $P(\alpha_j) = a_j$, $\mathcal{J}_\lambda$ – группа перестановок $\{\lambda(0), \dots, \lambda(n)\}$. Существование совершенного базиса доказано Ру-Столлом [15] в поле комплексных чисел. Поскольку доказательство алгебраично, оно также работает на C_p . Итак справедлива

Лемма 3.4.. Пусть задано конечное семейство $A = \{a_0, a_1, \dots, a_q\}$ точек в $P(V^*)$, $q \geq n$ и $J_n(A) \neq \emptyset$. Тогда существует совершенный базис V для A .

§4. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

 p -АДИЧНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

Пусть V – нормированное векторное пространство размерности $n + 1 > 0$ над C_p , и пусть $\| \cdot \|$ – норма, определенная над базисом $e = (e_0, \dots, e_n)$ пространства V . Под p -адичной голоморфной кривой

$$f : C_p \longrightarrow P(V)$$

мы будем иметь ввиду класс эквивалентности $(n + 1)$ -кратностей p -адичных целых функций

$$(\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n) : C_p \longrightarrow C_p^{n+1}$$

таких, что $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n$ не имеют простых факторов в кольце p -адичных целых функций на C_p и таких, что не все $\tilde{f}_j$ тождественно равнялись бы нулю. Здесь

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 e_0 + \dots + \tilde{f}_n e_n : C_p \longrightarrow V$$

называется приведенным представлением f , а базис e называется допустимым для f , если $\tilde{f}_0 \neq 0$. Обозначим

$$\mu(r, \tilde{f}) = \max_{0 \leq k \leq n} \mu(r, \tilde{f}_k).$$

Заметим, что

$$\mu(r, \tilde{f}) = \max_{0 \leq k \leq n} |\tilde{f}_k(z)|_p = \|\tilde{f}(z)\|.$$

Поэтому характеристическая функция

$$T(r, f) = \log \mu(r, \tilde{f})$$

определена корректно для всех $r > 0$ с точностью до $O(1)$.

Возьмем отображение

$$\bar{h} = \bar{h}_0 e_0 + \dots + \bar{h}_n e_n : C_p \longrightarrow V,$$

где $(\bar{h}_0, \dots, \bar{h}_n)$ – $(n + 1)$ -кратных p -адичных мероморфных функций таких, что не все $\bar{h}_j$ тождественно равны нулю. Согласно предложению 7.1 Черри-Йе [4]

существует наибольший простой делитель h функций $\bar{h}_0, \dots, \bar{h}_n$ такой, что $\bar{f} = \frac{\bar{h}}{h}$ – приведенное представление p -адичной голоморфной кривой $f : C_p \rightarrow P(V)$. Мы назовем $\bar{h}$ представлением f и будем писать $f = P \circ \bar{h}$. Заметим, что

$$\mu(r, \bar{h}) = \mu(r, h)\mu(r, \bar{f}).$$

Используя формулу Йенсена, получим

$$T(r, f) + N_f(r) = \log \mu(r, \bar{h}) + O(1), \quad (4)$$

где

$$N_f(r) = N(r, \frac{1}{h}) - N(r, h).$$

Имеем также

$$N(r, \bar{h} = 0) = N(r, \frac{1}{h}), \quad N(r, \bar{h} = \infty) = N(r, h).$$

Пусть $\bar{f} = \bar{f}_0 e_0 + \dots + \bar{f}_n e_n : C_p \rightarrow V$ – приведенное представление f . Тогда

$$\bar{f} \wedge \bar{f}' \wedge \dots \wedge \bar{f}^{(n)} = W[e, \bar{f}] e_0 \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

где $W[e, \bar{f}]$ – детерминант Вронского от $\bar{f}$ по базису e , и поэтому

$$|W[e, \bar{f}]|_p = \|\bar{f} \wedge \bar{f}' \wedge \dots \wedge \bar{f}^{(n)}\|.$$

Мы также получим

$$W[e, \bar{f}] = (\bar{f} \wedge \bar{f}' \wedge \dots \wedge \bar{f}^{(n)}, e_0 \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n),$$

где $e = (e_0, \dots, e_n)$ – дуальный базис e . Введем p -адичную целую функцию

$$K[e, \bar{f}] = \bar{f}_0 \dots \bar{f}_n$$

и p -адичную мероморфную функцию

$$S[e, \bar{f}] = \frac{W[e, \bar{f}]}{K[e, \bar{f}]}.$$

Из леммы о логарифмической производной имеем

$$m(r, S[e, \bar{f}]) = O(1). \quad (5)$$

Пусть $V_0, V_1, \dots, V_s$ и W – нормированные векторные пространства над C_p . Пусть

$$\odot : V_0 \times \dots \times V_s \longrightarrow W$$

– $(s+1)$ -линейное отображение над C_p . Возьмем p -адичные голоморфные кривые

$$f_j : C_p \longrightarrow P(V_j), \quad j = 0, 1, \dots, s$$

с приведенными представлениями

$$\bar{f}_j : C_p \longrightarrow V_j, \quad j = 0, 1, \dots, s.$$

В этом случае говорят, что $(f_0, \dots, f_s)$ свободен для $\odot$, если $\bar{f}_0 \odot \dots \odot \bar{f}_s \neq 0$. В этих условиях обозначим

$$\mu(r, f_0 \odot \dots \odot f_s) = \frac{\mu(r, \bar{f}_0 \odot \dots \odot \bar{f}_s)}{\mu(r, \bar{f}_0) \dots \mu(r, \bar{f}_s)}.$$

Имеем

$$\mu(r, f_0 \odot \dots \odot f_s) = \|f_0(z) \odot \dots \odot f_s(z)\|.$$

Предположим, что $(f_0, \dots, f_s)$ свободен для $\odot$ и определим функцию компенсации

$$m_{f_0 \odot \dots \odot f_s}(r) = -\log \mu(r, f_0 \odot \dots \odot f_s).$$

Заметим, что

$$f_0 \odot \dots \odot f_s : C_p \longrightarrow P(W)$$

– p -адичная голоморфная кривая с представлением $\bar{f}_0 \odot \dots \odot \bar{f}_s$. Итак, мы получаем первую основную теорему :

$$\sum_{j=0}^s T(r, f_j) = N_{f_0 \odot \dots \odot f_s}(r) + m_{f_0 \odot \dots \odot f_s}(r) + T(r, f_0 \odot \dots \odot f_s) + O(1).$$

При $\dim W = 1$ $P(W)$ – точка, а $T(r, f_0 \odot \dots \odot f_s)$ – константа.

Пусть $g : C_p \longrightarrow P(V^*)$ – p -адичная голоморфная кривая с приведенным представлением

$$\bar{g} = \bar{g}_0 \epsilon_0 + \dots + \bar{g}_n \epsilon_n : C_p \longrightarrow V^*,$$

где $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ – дуальный базис e . Пара (f, g) называется свободной, если она свободна для $\mathcal{L}$, т.е.

$$\bar{f}\bar{g} = \langle \bar{f}, \bar{g} \rangle = \bar{g}_0\bar{f}_0 + \dots + \bar{g}_n\bar{f}_n \neq 0.$$

Пусть пара (f, g) свободна. Тогда первая основная теорема принимает вид

$$T(r, f) + T(r, g) = N_f(r, g) + m_f(r, g) + O(1),$$

где

$$N_f(r, g) = N_{f\mathcal{L}_g}(r) = N(r, \frac{1}{\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle}), \quad m_f(r, g) = m_{f\mathcal{L}_g}(r).$$

Дефект отображения f для g определяется из

$$\delta_f(g) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{N_f(r, g)}{T(r, f) + T(r, g)}$$

с $0 \leq \delta_f(g) \leq 1$. Говорят, что g растет медленнее f , если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} = 0.$$

Если так, то

$$\delta_f(g) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \sup \frac{N_f(r, g)}{T(r, f)}.$$

Предположим, что $\xi \in V$, $\eta \in V - \{0\}$, и положим $y = P(\eta)$. Пусть пара (y, g) свободна. p -адичная мероморфная функция

$$g_{\xi, \eta} = \frac{\langle \xi, \bar{g} \rangle}{\langle \eta, \bar{g} \rangle}$$

называется координатной функцией g . Пусть $\mathcal{M}(C_p)$ – поле всех p -адических мероморфных функций на C_p . Пусть $\mathcal{R}$ – подполе $\mathcal{M}(C_p)$ и $C_p \subset \mathcal{R}$. Тогда g называется определенной над $\mathcal{R}$, если $g_{\xi, \eta} \in \mathcal{R}$ для всевозможных ξ и η . Если базис ϵ допустим для g , то k -тая координатная функция g определяется так :

$$g_k = g_{\epsilon_k, \epsilon_0} = \frac{\bar{g}_k}{\bar{g}_0}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Очевидно, g определено над $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $g_k \in \mathcal{R}$ для $k = 1, \dots, n$.

Заметим, что $\mu(r, \bar{g}_k) = \mu(r, g_k)\mu(r, \bar{g}_0)$. Для $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} T(r, g_k) &\leq \max\{\log \mu(r, \bar{g}_0), \log \mu(r, \bar{g}_k)\} + O(1) \leq \\ &\leq T(r, g) + O(1) \leq \sum_{j=1}^n T(r, g_j) + O(1). \end{aligned} \tag{6}$$

p -адичная голоморфная кривая f называется линейно невырождающей над $\mathcal{R}$, если (f, g) свободен для каждой p -адичной голоморфной кривой $g : C_p \rightarrow P(V^*)$, определенной над $\mathcal{R}$. Если f — линейно вырождающаяся над $\mathcal{R}$, то пусть $\mathcal{G}^*$ — множество всех p -адичных голоморфных кривых $g : C_p \rightarrow P(V^*)$, определенных над $\mathcal{R}$ и таких, что (f, g) не свободно. Возьмем подмножество $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q \subseteq \mathcal{G}^*$, причем $q + 1 = \#\mathcal{G}^*$, если $\mathcal{G}^*$ финитно, и $q = \infty$ — в противном случае. Возьмем также приведенное представление g_j

$$\bar{g}_j = \bar{g}_{j0}\epsilon_0 + \dots + \bar{g}_{jn}\epsilon_n : C_p \rightarrow V^*.$$

Для $\lambda \in J_l^q$ запишем $\mathcal{G}_\lambda = \{g_{\lambda(j)}\}_{j=0}^l$, что является сокращенной записью формулы

$$\bar{g}_\lambda = \bar{g}_{\lambda(0)} \wedge \dots \wedge \bar{g}_{\lambda(l)} : C_p \rightarrow \bigwedge_{l+1} V^*.$$

Если $\bar{g}_\lambda \neq 0$, то

$$g_\lambda = g_{\lambda(0)} \wedge \dots \wedge g_{\lambda(l)} = P \circ \bar{g}_\lambda : C_p \rightarrow P\left(\bigwedge_{l+1} V^*\right)$$

— p -адичная голоморфная кривая, и семейство $\mathcal{G}_\lambda$ называется линейно независимым. Определим

$$J_l(\mathcal{G}) = \{\lambda \in J_l^q \mid \bar{g}_\lambda \neq 0\},$$

и

$$\ell_f(\mathcal{R}) = \max\{l + 1 \mid J_l(\mathcal{G}) \neq \emptyset, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*\}$$

с $1 \leq \ell_f(\mathcal{R}) \leq n + 1$. Запишем

$$V_{\mathcal{R}} = V \otimes_{C_p} \mathcal{R} = \mathcal{R}\{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n\},$$

$$V_{\mathcal{R}}^* = V^* \otimes_{C_p} \mathcal{R} = \mathcal{R}\{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n\},$$

и определим линейное подпространство $V_{\mathcal{R}}^*$:

$$E[f] = \{w \in V_{\mathcal{R}}^* \mid \langle \bar{f}, w \rangle \equiv 0\}.$$

Легко доказать, что $\ell_f(\mathcal{R}) = \dim E[f]$. Положим $k = n - \ell_f(\mathcal{R})$. Тогда f называется k -плоской над $\mathcal{R}$. С целью упрощения наших обозначений будем писать $\ell_f(\mathcal{R}) = 0$, если f линейно невырождающаяся над $\mathcal{R}$, т.е. $E[f] = \emptyset$, и будем говорить, что f является n -плоской над $\mathcal{R}$.

Лемма 4.1. Число k неотрицательно, т.е. $0 \leq \ell_f(\mathcal{R}) \leq n$.

Доказательство. Если $k < 0$, т.е. $\ell_f(\mathcal{R}) = n+1$, то существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ такое, что

$$\bar{g}_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge \bar{g}_{\lambda(n)} \neq 0; \quad \langle \bar{f}, \bar{g}_{\lambda(j)} \rangle \equiv 0 \quad (0 \leq j \leq n).$$

Согласно правилу Крамера $\bar{f} \equiv 0$, что невозможно.

Лемма 4.2. Пусть $f : C_p \rightarrow P(V)$ — p -адическая голоморфная кривая, линейно вырождающаяся над $\mathcal{R}$. Тогда f является k -плоской над $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда существует базис $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ пространства $V_{\mathcal{R}}$ над $\mathcal{R}$ с дуальным базисом $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ таким, что для любого представления $\bar{f} : C_p \rightarrow V$ мы имеем

$$\bar{f} = \sum_{j=0}^k \langle \bar{f}, \alpha_j \rangle \xi_j.$$

Более того, базис можно выбрать так, что $\alpha_j \in V^*$ для $j = 0, \dots, k$ и

$$\langle \bar{f}, \alpha_0 \rangle, \dots, \langle \bar{f}, \alpha_k \rangle$$

— p -адично голоморфны и линейно независимы над $\mathcal{R}$.

С доказательством можно ознакомиться в работе [15] (теорема 6.9).

§5. ОТОБРАЖЕНИЕ СТЕЙНМЕЦА-СТОЛЛА

Пусть V — векторное пространство размерности $n+1 > 0$ над C_p . Пусть $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ — конечное семейство голоморфных кривых $g_j : C_p \rightarrow P(V^*)$, $n \leq q < \infty$ и $J_n(\mathcal{G}) \neq \emptyset$. Для каждого $z \in C_p$ определим орбиту $\mathcal{G}(z) = \{g_j(z)\}_{j=0}^q$. Пусть $\bar{g}_j : C_p \rightarrow V^*$ — приведенное представление g_j для $j = 0, \dots, q$. Базис $e = (e_0, \dots, e_n)$ пространства V называется совершенным для $\mathcal{G}$, если для каждого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$

$$\langle e_0 \wedge \cdots \wedge e_j, \bar{g}_{\pi(0)} \wedge \cdots \wedge \bar{g}_{\pi(j)} \rangle \neq 0, \quad \pi \in \mathcal{J}_\lambda, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где $\mathcal{J}_\lambda$ — группа перестановок $\{\lambda(0), \dots, \lambda(n)\}$. Определим

$$I = I(\mathcal{G}) = \bigcup_{l=0}^n \bigcup_{\lambda \in J_l(\mathcal{G})} \bar{g}_\lambda^{-1}(0).$$

Очевидно, $J_1(\mathcal{G}) = J_1(\mathcal{G}(z))$, если $z \in C_p - I$. Поэтому, если $z \in C_p - I$, то совершенный базис V для $\mathcal{G}(z)$ является также совершенным базисом V для $\mathcal{G}$. В частности, совершенный базис V для $\mathcal{G}$ существует.

Пусть $\| \cdot \|$ — норма, определенная над совершенным базисом $e = (e_0, \dots, e_n)$ пространства V для $\mathcal{G}$. Имеем

$$\bar{g}_j = \bar{g}_{j0}e_0 + \dots + \bar{g}_{jn}e_n : C_p \longrightarrow V^*, \quad j = 0, \dots, q,$$

где $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ — дуальный базис e . Заметим, что для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ базис ϵ допустим для каждого $g_{\lambda(j)}$, поскольку e совершенен. Координатные функции

$$g_{\lambda(j)k} = \frac{\bar{g}_{\lambda(j)k}}{\bar{g}_{\lambda(j)0}}, \quad \lambda \in J_n(\mathcal{G}), \quad j = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, n,$$

определены. Определим

$$\bar{\mathcal{G}} = \{g_{\lambda(j)k} \mid \lambda \in J_n(\mathcal{G}), 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\}.$$

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{\mathcal{G}})$ — конечномерное векторное пространство, порожденное $\bar{\mathcal{G}}$ над C_p , и пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\bar{\mathcal{G}})$ — поле, порожденное $\bar{\mathcal{G}}$ над C_p . Тогда

$$C_p \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{R} \subseteq M(C_p)$$

и $\mathcal{R} = C_p$, если каждый элемент g_λ постоянен для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$. $\mathcal{R}$ — также наименьшее поле такое, что каждый элемент g_λ определен над $\mathcal{R}$ для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$. Мы будем предполагать, что каждое g_j растет медленнее p -адичной голоморфной кривой $f : C_p \longrightarrow P(V)$. Из (6) получаем, что каждое $g_{jk} \in \bar{\mathcal{G}}$ растет медленнее f , т.е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g_{jk})}{T(r, f)} = 0,$$

для $j \in \text{Im} \lambda$ с $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$. Следовательно, все $\phi \in \mathcal{R}$ и, далее, все p -адичные голоморфные кривые, определенные над $\mathcal{R}$, растут медленнее f .

p -адичная целая функция $G_0 \neq 0$ называется универсальным знаменателем $\bar{\mathcal{G}}$, если $G_0\phi$ — p -адичная целая функция для каждого $\phi \in \bar{\mathcal{G}}$ такая, что для любого $z \in C_p$ существует $\phi \in \bar{\mathcal{G}}$ с $(G_0\phi)(z) \neq 0$. Такие G_0 существуют, поскольку наибольшие простые делители

$$\{\bar{g}_{\lambda(j)0} \mid \lambda \in J_n(\mathcal{G}), j = 0, \dots, n\}$$

согласно предложению 7.1 из [4] существуют. Предположим, что $\mathcal{L}^*$ — дуальное векторное пространство $\mathcal{L}$. Тогда p -адичная голоморфная векторная функция $\bar{G} : C_p \rightarrow \mathcal{L}^* - \{0\}$, однозначно определяемая из

$$\langle \phi, \bar{G}(z) \rangle = (G_0 \phi)(z)$$

для всех $\phi \in \mathcal{L}$ и $z \in C_p$, определяет линейно невырождающуюся p -адичную голоморфную кривую

$$G = P \circ \bar{G} : C_p \rightarrow P(\mathcal{L}^*),$$

называемую сопряженным отображением $\bar{G}$. Далее мы получаем p -адичную голоморфную кривую

$$G^{\Pi m} : C_p \rightarrow P(\Pi_m \mathcal{L}^*)$$

с приведенным представлением

$$\bar{G}^{\Pi m} : C_p \rightarrow \Pi_m \mathcal{L}^* - \{0\}.$$

Пусть $\mathcal{L}^*(m)$ является наименьшим линейным подпространством $\Pi_m \mathcal{L}^*$, содержащим $\bar{G}^{\Pi m}(C_p)$. Определим

$$q(m) = \dim \mathcal{L}^*(m).$$

Тогда $\mathcal{L}^*(1) = \mathcal{L}^*$ и

$$G^{\Pi m} : C_p \rightarrow P(\mathcal{L}^*(m))$$

линейно невырождающийся, т.е. его образ не может содержаться ни в одной гиперплоскости.

Выберем приведенное представление $\bar{f} : C_p \rightarrow V - \{0\}$ отображения f с

$$\bar{f} = \sum_{j=0}^n \bar{f}_j e_j, \quad \bar{f}_0 \neq 0,$$

и определим

$$V(0) = C_p e_1 \oplus \dots \oplus C_p e_n \subset V,$$

$$V(m) = \mathcal{L}^*(m) \oplus \{V(0) \otimes \mathcal{L}^*(m+1)\}, \quad m = 1, \dots$$

с размерностью

$$k(m) + 1 = \dim V(m) = q(m) + nq(m+1).$$

Мы определяли p -адичную голоморфную векторную функцию

$$\tilde{F}_m = \tilde{f}_0 G_0 \tilde{G}^{\Pi m} + (\tilde{f} - \tilde{f}_0 e_0) \otimes \tilde{G}^{\Pi m+1} : C_p \longrightarrow V(m).$$

Так как $\tilde{f}_0 G_0 \neq 0$, то мы имеем $\tilde{F}_m \neq 0$. Итак, определена p -адичная голоморфная кривая, называемая m -тым p -адичным отображением Стейнмеца-Столла :

$$F_m = P \circ \tilde{F}_m : C_p \longrightarrow P(V(m)).$$

Пусть $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_l)$ - базис $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$, $\theta_0 = 1$, и пусть $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_l)$ - дуальный базис. Запишем

$$\tilde{G} = \sum_{j=0}^l \tilde{G}_j \tau_j.$$

Тогда $\tilde{G}_j = G_0 \theta_j$, $j = 0, \dots, l$. Поэтому отображение G определено над $\mathcal{R}$ и, следовательно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, G)}{T(r, f)} = 0.$$

Заметим, что $G_0 = \tilde{G}_0 = (\theta_0, \tilde{G})$. Положим $b = P(\theta_0) \in P(\mathcal{L})$. Из первой основной теоремы следует, что

$$0 \leq N(r, \frac{1}{G_0}) = N_G(r, b) \leq T(r, G) + O(1).$$

Отсюда имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, \frac{1}{G_0})}{T(r, f)} = 0.$$

Заметим, что $\tilde{G} \neq 0$, откуда следует, что $\tilde{G}^{\Pi m+1} \neq 0$ и $\tilde{G}^{\Pi m} \neq 0$. Поэтому, легко получаем

$$N_{F_m}(r) = N(r, \tilde{F}_m = 0) \leq N(r, \frac{1}{G_0}),$$

и, следовательно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{F_m}(r)}{T(r, f)} = 0.$$

Пусть $\|\cdot\|$ — норма, определенная над базисом θ векторного пространства $\mathcal{L}$, которая порождает нормы на $\mathcal{L}^*$ и

$$\Pi_m \mathcal{L}^* \oplus \{V(0) \otimes \Pi_{m+1} \mathcal{L}^*\} \supset V(m),$$

соответственно, и, следовательно, ограничивает норму на $V(m)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_m\| &\leq \max\{\|\tilde{f}_0 G_0 \tilde{G}^{\Pi m}\|, \|(\tilde{f} - \tilde{f}_0 e_0) \otimes \tilde{G}^{\Pi m+1}\|\} \leq \\ &\leq \max\{|\tilde{f}_0|_p |(1, \tilde{G})|_p \|\tilde{G}\|^m, (\max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{f}_j|_p) \|\tilde{G}\|^{m+1}\} \leq \|\tilde{f}\| \|\tilde{G}\|^{m+1}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\mu(r, \tilde{F}_m) \leq \mu(r, \tilde{f}) \mu(r, \tilde{G})^{m+1}.$$

Поскольку μ непрерывно, а $|C_p|$ плотно в $\mathbb{R}[0, +\infty)$, то

$$\mu(r, \tilde{F}_m) \leq \mu(r, \tilde{f}) \mu(r, \tilde{G})^{m+1}$$

для всех $r > 0$. Следовательно, имеем

$$T(r, F_m) \leq T(r, f) + (m+1)T(r, G) + O(1) = \{1 + o(1)\}T(r, f).$$

Определим

$$\tilde{\mathcal{G}}_m = \{\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_m \mid \phi_j \in \tilde{\mathcal{G}}, j = 1, \dots, m\}$$

и введем сокращенную запись $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{G}}_m)$. Имеем

$$\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}_{m+1} \subseteq \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{G}}_{m+1}) \subseteq \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathcal{R}.$$

Существует одно и только одно сюръективное линейное отображение $\sigma : \Pi_m \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_m$ такое, что

$$\sigma(\phi_1 \amalg \cdots \amalg \phi_m) = \phi_1 \cdots \phi_m$$

при $\phi_j \in \mathcal{L}$ для $j = 1, \dots, m$. Заметим, что

$$\tilde{G}^{\Pi m} = \sum_{\lambda \in J_{1,m}} \frac{m!}{\lambda!} \tilde{G}_0^{\lambda(0)} \cdots \tilde{G}_l^{\lambda(l)} \tau^{\Pi m} = G_0^m \sum_{\lambda \in J_{1,m}} \frac{m!}{\lambda!} \theta_0^{\lambda(0)} \cdots \theta_l^{\lambda(l)} \tau^{\Pi m}.$$

Получаем

$$\langle \phi, \tilde{G}^{\Pi m} \rangle = G_0^m \sigma(\phi)$$

для всех $\phi \in \Pi_m \mathcal{L}$. Согласно теореме 3.9 Столла [21] мы также имеем следующее :

Лемма 5.1. Пусть $\tau_{m,1}, \dots, \tau_{m,q(m)}$ – базис пространства $\mathcal{L}^*(m)$ над $\mathbb{C}_p$. Тогда

$$\tilde{G}^{\Pi m} = \sum_{j=1}^{q(m)} B_{m,j} \tau_{m,j},$$

где каждое $B_{m,j}$ – p -адичная целая функция с $G_0^{-m} B_{m,j} \in \mathcal{L}_m$. Более того

$$G_0^{-m} B_{m,1}, \dots, G_0^{-m} B_{m,q(m)}$$

является базисом $\mathcal{L}_m$.

В частности, мы видим, что

$$q(m) = \dim \mathcal{L}_m \leq \dim \mathcal{L}_{m+1} = q(m+1),$$

откуда легко можно вывести результат Стейнмеца

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{q(m+1)}{q(m)} = 1.$$

Используя теорему 6.5 Столла [21], мы также получаем следующее :

Лемма 5.2. Если f – линейно невырождающееся отображение над $\mathcal{R}$, то m -тое p -адичное отображение Стейнмеца-Столла F_m является линейно невырождающимся.

Пусть $\tau_{m,1}, \dots, \tau_{m,q(m)}$ – базис $\mathcal{L}^*(m)$ над $\mathbb{C}_p$. Тогда

$$e(m) = \{\tau_{m,i}, e_k \otimes \tau_{m+1,j} \mid 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq q(m), 1 \leq j \leq q(m+1)\}$$

– базис $V(m)$, над которым определена норма. Возьмем $c \in \bigwedge_{k(m)+1} V(m)^*$, $\|c\| = 1$.

Тогда

$$W[e(m), \tilde{F}_m] = \langle \tilde{F}_m \wedge \tilde{F}_m' \wedge \dots \wedge \tilde{F}_m^{(k(m))}, c \rangle$$

– детерминант Вронского от $\tilde{F}_m$ по базису $e(m)$ с

$$|W[e(m), \tilde{F}_m]|_p = \|\tilde{F}_m \wedge \tilde{F}_m' \wedge \dots \wedge \tilde{F}_m^{(k(m))}\|.$$

p -адичная мероморфная функция на $\mathbb{C}_p$ определяется из

$$S_m = \frac{W[e(m), \tilde{F}_m]}{K_m},$$

где

$$K_m = \tilde{f}_0^{q(m)} (\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_n)^{q(m+1)} G_0^{(m+1)(k(m)+1)}.$$

Лемма 5.3. Если f — линейно невырождающееся отображение над $\mathcal{R}$, то существует p -адичная мероморфная функция $\phi_m \in \mathcal{R}$ такая, что $K[e(m), \tilde{F}_m] = \phi_m K_m$.

Доказательство. Согласно лемме 5.1 существуют p -адичные целые функции $B_{m,i}$ и $B_{m+1,j}$ такие, что

$$\tilde{G}^{\Pi m} = \sum_{i=1}^{q(m)} B_{m,i} \tau_{m,i}, \quad \tilde{G}^{\Pi m+1} = \sum_{j=1}^{q(m+1)} B_{m+1,j} \tau_{m+1,j},$$

$\theta_{m,i} = G_0^{-m} B_{m,i} \in \mathcal{L}_m \subset \mathcal{R}$, $\theta_{m+1,j} = G_0^{-m-1} B_{m+1,j} \in \mathcal{L}_{m+1} \subset \mathcal{R}$ и такие, что $\theta_{m,1}, \dots, \theta_{m,q(m)}$ — базис $\mathcal{L}_m$, а $\theta_{m+1,1}, \dots, \theta_{m+1,q(m+1)}$ — базис $\mathcal{L}_{m+1}$. Мы имеем

$$\tilde{F}_m = \sum_{i=1}^{q(m)} \tilde{f}_0 G_0 B_{m,i} \tau_{m,i} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{q(m+1)} \tilde{f}_k B_{m+1,j} e_k \otimes \tau_{m+1,j},$$

и, следовательно

$$K[e(m), \tilde{F}_m] = \left(\prod_{i=1}^{q(m)} \tilde{f}_0 G_0 B_{m,i} \right) \left(\prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^{q(m+1)} \tilde{f}_k B_{m+1,j} \right) = \phi_m K_m,$$

где

$$\phi_m = \left(\prod_{i=1}^{q(m)} \theta_{m,i} \right) \left(\prod_{j=1}^{q(m+1)} \theta_{m+1,j} \right)^n \in \mathcal{R}.$$

Если f — линейно невырождающееся отображение над $\mathcal{R}$, то из (5) получаем

$$m(r, S[e(m), \tilde{F}_m]) = O(1).$$

Заметим, что

$$S_m = \phi_m S[e(m), \tilde{F}_m],$$

отсюда

$$m(r, S_m) \leq m(r, \phi_m) + m(r, S[e(m), \tilde{F}_m]) = o(T(r, f)).$$

Определим

$$a_i = P(\epsilon_i) \in P(V^*), \quad i = 0, \dots, n.$$

Имеем

$$N(r, S_m) \leq q(m)N_f(r, a_0) + q(m+1) \sum_{i=1}^n N_f(r, a_i) + \\ + (m+1)(k(m)+1)N(r, \frac{1}{G_0}).$$

Тогда

$$T(r, S_m) \leq q(m)N_f(r, a_0) + q(m+1) \sum_{i=1}^n N_f(r, a_i) + o(T(r, f)),$$

для $r \rightarrow \infty$.

Для $0 \leq j \in \mathbb{Z}$ определим $s(j) = \frac{1}{2}(j-1)j$. Возьмем $0 < m \in \mathbb{Z}$, $m > s(n)$. Для любого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ p -адичная целая функция $K_{m,\lambda} \neq 0$ определяется из

$$K_{m,\lambda} = \left(\prod_{j=0}^n (\tilde{f}_j, g_{\lambda(j)})^{q(m-s(j))} \right) \left(\prod_{j=1}^n \tilde{f}_j^{q(m+1)-q(m-s(j))} \right) G_0^{(m+1)(k(m)+1)},$$

где

$$g_{\lambda(j)} = \frac{1}{\tilde{g}_{\lambda(j)0}} \tilde{g}_{\lambda(j)}.$$

Лемма 5.4. Если f — линейно невырождающееся отображение над $\mathcal{R}$, то для любого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ существуют линейный изоморфизм $L_\lambda : V(m) \rightarrow V(m)$, базис $e(m)$ пространства $V(m)$ и p -адичная мероморфная функция $\phi_{m,\lambda} \in \mathcal{R}$ такие, что $K[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m] = \phi_{m,\lambda} K_{m,\lambda}$.

Ру и Столл [15] доказали этот результат на $\mathbb{C}$. Поскольку их метод алгебраичен, доказательство справедливо также на $\mathbb{C}_p$. Следовательно, для каждого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ получаем p -адичную мероморфную функцию

$$S_{m,\lambda} = \frac{W[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m]}{K_{m,\lambda}}$$

с

$$S_{m,\lambda} = \phi_{m,\lambda} S[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m],$$

и, следовательно

$$m(r, S_{m,\lambda}) = o(T(r, f)).$$

Заметим, что

$$W[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m] = c_\lambda W[e(m), \tilde{F}_m]$$

для постоянной $c_\lambda \in C_p$. Тогда мы получаем основное тождество Ру-Столла

$$\frac{S_{m,\lambda}}{S_m} = c_\lambda \prod_{j=0}^n \left(\frac{\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle \langle e_0, \tilde{g}_{\lambda(j)} \rangle}{\langle \tilde{f}, \tilde{g}_{\lambda(j)} \rangle} \right)^{q(m-s(j))}$$

Следовательно

$$\frac{\mu(r, S_{m,\lambda})}{\mu(r, S_m)} = |c_\lambda|_p \prod_{j=0}^n \left(\frac{\mu(r, f \angle a_j) \mu(r, e^0 \angle g_{\lambda(j)})}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})} \right)^{q(m-s(j))},$$

где $e^0 = P(e_0) \in P(V)$. Определим

$$\Xi(r) = \frac{1}{\mu(r, S_m)} \prod_{j=0}^n \left(\frac{1}{\mu(r, f \angle a_j)} \right)^{q(m)}$$

$$\Psi_\lambda(r) = \prod_{j=0}^n \frac{1}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})},$$

$$R_\lambda(r) = \frac{\mu(r, S_{m,\lambda})}{|c_\lambda|_p} \prod_{j=0}^n \frac{\mu(r, f \angle a_j)^{q(m)-q(m-s(j))}}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})^{q(m)-q(m-s(j))} \mu(r, e^0 \angle g_{\lambda(j)})^{q(m-s(j))}},$$

для всех $r > 0$. После легких вычислений перепишем основное тождество в виде

$$R_\lambda(r) \Xi(r) = \Psi_\lambda(r)^{q(m)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \log \Xi(r) &= N(r, S_m) - N(r, \frac{1}{S_m}) + q(m) \sum_{j=0}^n m_f(r, a_j) + O(1) \leq \\ &\leq q(m) N_f(r, a_0) + q(m+1) \sum_{i=1}^n N_f(r, a_i) + \\ &+ q(m) \sum_{j=0}^n m_f(r, a_j) + o(T(r, f)) \leq \\ &\leq (q(m) + nq(m+1)) T(r, f) + o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (7)$$

Для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ мы также имеем

$$\begin{aligned} \log^+ R_\lambda(r) &\leq m(r, S_{m,\lambda}) + \log^+ \frac{1}{|c_\lambda|_p} + \sum_{j=0}^n (q(m) - q(m-s(j))) m_f(r, g_{\lambda(j)}) + \\ &+ \sum_{j=0}^n q(m-s(j)) m_{e^0 \angle g_{\lambda(j)}}(r) \leq \sum_{j=0}^n (q(m) - q(m-s(j))) T(r, f) + o(T(r, f)). \end{aligned} \quad (8)$$

§6. p -АДИЧНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ

В ПОДОСНОВНОЙ ПОЗИЦИИ

Продолжим изучение ситуации в §5. Пусть u — целое число и $n \leq u \leq q$. Говорят, что конечное семейство $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ находится в u -подосновной позиции, если для любого $\kappa \in J_u^q$ существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ с $\text{Im} \lambda \subseteq \text{Im} \kappa$. Конечно, n -подосновная позиция является основной позицией.

Предположим, что $\mathcal{G}$ находится в u -подосновной позиции. Очевидно, если $z \in C_p - I$, то орбита $\mathcal{G}(z)$ находится в u -подосновной позиции. Для $\lambda \in J_l^q$ запишем

$$\mathcal{G}_\lambda(z) = \{g_{\lambda(0)}(z), \dots, g_{\lambda(l)}(z)\}.$$

Тогда $\dim E(\mathcal{G}_\lambda(z))$ является постоянной для $z \in C_p - I$ (см. [16], лемма 3.2).

Лемма 6.1. Пусть V — векторное пространство размерности $n+1$ над C_p , и пусть $\mathcal{G} = \{g_0, g_1, \dots, g_q\}$ — семейство p -адичных голоморфных кривых $g_j : C_p \rightarrow P(V^*)$ в u -подосновной позиции, $1 \leq n \leq u \leq q$. Тогда существуют функция $\omega : Z[0, q] \rightarrow R(0, 1]$ и действительное число $\theta \geq 1$, которые для $z \in C_p - I$ обладают следующими свойствами:

$$1) 0 < \omega(j)\theta \leq 1, \quad j = 0, 1, \dots, q;$$

$$2) q - 2u + n = \theta(\sum_{j=0}^q \omega(j) - n - 1);$$

$$3) 1 \leq \frac{u+1}{n+1} \leq \theta \leq \frac{2u-n+1}{n+1};$$

$$4) \sum_{j=0}^q \omega(\kappa(j)) \leq \dim E(\mathcal{G}_\kappa(z)), \text{ если } \kappa \in J_s^q \text{ с } 0 \leq s \leq u;$$

5) пусть $r_0, \dots, r_q$ — семейство функций, определенных на $C_p - I$ с $r_j \geq 1$ для всех j . Тогда для любого $\kappa \in J_s^q$, $0 \leq s \leq u$ при $\dim E(\mathcal{G}_\kappa(z)) = l+1$ существует $\lambda \in J_l(\mathcal{G})$, $\text{Im} \lambda \subseteq \text{Im} \kappa$ такое, что $E(\mathcal{G}_\lambda(z)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z))$ и

$$\prod_{j=0}^s r_{\kappa(j)}(z)^{\omega(\kappa(j))} \leq \prod_{j=0}^l r_{\lambda(j)}(z).$$

Доказательство. Фиксируем точку $z_0 \in C_p - I$. Тогда $\mathcal{G}(z_0)$ находится в u -подосновной позиции. Мы получаем весовую функцию Ночки ω и постоянную Ночки θ для семейства $\mathcal{G}(z_0)$. Определим $\omega(j) := \omega(g_j(z_0))$ для семейства $\mathcal{G}(z)$ при $z \in C_p - I$. Поскольку $\dim E(\mathcal{G}_\kappa(z))$ постоянна для $z \in C_p - I$, то свойства

1-4 следуют из леммы 3.3. Согласно пункту 5) леммы 3.3 для любого $\kappa \in J_u^q$, $0 \leq s \leq u$ при $\dim E(\mathcal{G}_\kappa(z_0)) = l + 1$ существует $\lambda \in J_l(\mathcal{G}(z_0))$, $\text{Im} \lambda \subset \text{Im} \kappa$ такое, что $E(\mathcal{G}_\lambda(z_0)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z_0))$, и такое, что

$$\prod_{j=0}^s r_{\kappa(j)}(z)^{\omega(\kappa(j))} \leq \prod_{j=0}^l r_{\lambda(j)}(z), \quad z \in C_p - I.$$

Заметим, что $\bar{g}_\lambda(z_0) \neq 0$. Следовательно, $\bar{g}_\lambda \neq 0$ и $\lambda \in J_l(\mathcal{G})$. Поэтому $\bar{g}_\lambda(z) \neq 0$, поскольку $z \in C_p - I$, и, следовательно, $E(\mathcal{G}_\lambda(z)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z))$.

Определим размерность $\Gamma(\mathcal{G})$ семейства $\mathcal{G}$ из

$$\Gamma(\mathcal{G})(z) = \inf_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \{ \|g_{\lambda(0)}(z) \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}(z)\| \}.$$

Тогда $0 \leq \Gamma(\mathcal{G}) \leq 1$, а $\Gamma(\mathcal{G})(z) > 0$, если $z \in C_p - I$.

Лемма 6.2. Для $x \in P(V)$, $0 < b \in \mathbb{R}$ определим

$$\mathcal{G}(x, b, z) = \{j \in \mathbb{Z}[0, q] \mid \|x, g_j(z)\| < b\}.$$

Если $z \in C_p - I$ и $0 < b \leq \Gamma(\mathcal{G})(z)$, то $\#\mathcal{G}(x, b, z) \leq u$.

Доказательство. Предположим, что $\#\mathcal{G}(x, b, z) \geq u + 1$. Тогда существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ такое, что $\text{Im} \lambda \subseteq \mathcal{G}(x, b, z)$. Следовательно

$$\|x, g_{\lambda(j)}(z)\| < b, \quad j = 0, \dots, n.$$

Из леммы 3.2 следует

$$\begin{aligned} 0 < \Gamma(\mathcal{G})(z) &\leq \|g_{\lambda(0)}(z) \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}(z)\| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq n} \|x, g_{\lambda(j)}(z)\| < b \leq \Gamma(\mathcal{G})(z), \end{aligned}$$

что невозможно.

Лемма 6.3. Пусть $x \in P(V)$ и $z \in C_p - I$ такие, что $\|x, g_j(z)\| > 0$ для $j = 0, \dots, q$.

Тогда

$$\prod_{j=0}^q \left(\frac{1}{\|x, g_j(z)\|} \right)^{\omega(j)} \leq \left(\frac{1}{\Gamma(\mathcal{G})(z)} \right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^n \frac{1}{\|x, g_{\lambda(j)}(z)\|}.$$

Доказательство. Возьмем $b = \Gamma(\mathcal{G})(z)$. Из леммы 6.2 имеем $\#\mathcal{G}(x, b, z) \leq u$. Поэтому существует $\kappa \in J_u^q$ такое, что $\mathcal{G}(x, b, z) \subset \text{Im} \kappa$. Заметим, что

$E(\mathcal{G}_\kappa(z)) = V^*$. Согласно лемме 6.1 существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$, $\text{Im} \lambda \subset \text{Im} \kappa$ такое, что $E(\mathcal{G}_\lambda(z)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z))$, и такое, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^u \left(\frac{1}{\|x, g_{\kappa(j)}(z)\|} \right)^{\omega(\kappa(j))} &\leq \prod_{j=0}^n \frac{1}{\|x, g_{\lambda(j)}(z)\|} \leq \\ &\leq \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^n \frac{1}{\|x, g_{\lambda(j)}(z)\|}. \end{aligned}$$

Положим $C = \mathbb{Z}[0, q] - \text{Im} \kappa$. Тогда $\|x, g_j(z)\| \geq b$ для $j \in C$, и, следовательно

$$\begin{aligned} \prod_{j \in C} \left(\frac{1}{\|x, g_j(z)\|} \right)^{\omega(j)} &\leq \prod_{j \in C} \frac{1}{\|x, g_j(z)\|} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{b} \right)^{\#C} = \left(\frac{1}{\Gamma(\mathcal{G})(z)} \right)^{q-u}. \end{aligned}$$

Для $r > 0$ функция размерности $\Gamma_{\mathcal{G}}$ определяется из

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(r) = \inf_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \{ \mu(r, g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}) \}.$$

Тогда

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(r) = \Gamma(\mathcal{G})(z) \leq 1.$$

Заметим, что

$$\prod_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \|g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}\| \leq \Gamma(\mathcal{G}).$$

Обычным методом можно показать, что

$$\prod_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \mu(r, g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}) \leq \Gamma_{\mathcal{G}}(r) \quad (r > 0).$$

Замечая, что для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ первая основная теорема имеет вид

$$\sum_{j=0}^n T(r, g_{\lambda(j)}) = N_{g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}}(r) + m_{g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}}(r) + O(1),$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq -\log \Gamma_{\mathcal{G}}(r) &\leq \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} m_{g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}}(r) \leq \\ &\leq \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \sum_{j=0}^n T(r, g_{\lambda(j)}) + O(1). \end{aligned}$$

Теорема 6.1. Пусть $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ — конечное семейство p -адических голоморфных кривых $g_j : \mathbb{C}_p \rightarrow P(V^*)$ в u -подосновной позиции, $u \leq 2u - n \leq q$. Пусть

$f : \mathbb{C}_p \rightarrow P(V)$ - p -адичная голоморфная кривая, линейно невырождающаяся над $\mathcal{R}$. Предположим, что g_j растет медленнее f для $j = 0, \dots, q$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{j=0}^q m_j(r, g_j) \leq (2u - n + 1 + \varepsilon)T(r, f),$$

для достаточно больших r .

Доказательство. Определим $b = \#J_n(\mathcal{G})$. Пусть ω - весовая функция Ночки, а θ - постоянная Ночки. Согласно лемме 7.2 Ру-Столла [15] $0 < m \in \mathbb{Z}$ можно выбрать так, что

$$1 \leq \frac{q(m+1)}{q(m)} < 1 + \frac{\varepsilon}{3n\theta}, \quad 0 \leq \frac{q(m) - q(m-s(j))}{q(m)} < \frac{\varepsilon}{3nb\theta}.$$

Тогда из леммы 6.3 имеем

$$\prod_{j=0}^q \left(\frac{1}{\|f, g_j\|} \right)^{\omega(j)} \leq \left(\frac{1}{\Gamma(\mathcal{G})} \right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^n \frac{1}{\|f, g_{\lambda(j)}\|},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^q \left(\frac{1}{\mu(r, f \mathcal{L} g_j)} \right)^{\omega(j)} &\leq \left(\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{G}}(r)} \right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^n \frac{1}{\mu(r, f \mathcal{L} g_{\lambda(j)})} = \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{G}}(r)} \right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \Psi_{\lambda}(r) = \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{G}}(r)} \right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} (R_{\lambda}(r) \Xi(r))^{\frac{1}{q(m)}}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^q \omega(j) m_j(r, g_j) &\leq -(q-u) \log \Gamma_{\mathcal{G}}(r) + \frac{1}{q(m)} (\log \Xi(r) + \\ &+ \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \log^+ R_{\lambda}(r)) + \frac{1}{q(m)} \log b \leq \\ &\leq (q-u) \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \sum_{j=0}^n T(r, g_{\lambda(j)}) + \left(1 + n \frac{q(m+1)}{q(m)} \right) T(r, f) + \\ &+ b \sum_{j=0}^n \frac{q(m) - q(m-s(j))}{q(m)} T(r, f) + o(T(r, f)) \leq \\ &\leq \left(n + 1 + \frac{2\varepsilon}{3\theta} \right) T(r, f) + o(T(r, f)). \end{aligned}$$

Используя свойства весов Ночки, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^q m_f(r, g_j) &= \sum_{j=0}^q \theta \omega(j) m_f(r, g_j) + \sum_{j=0}^q (1 - \theta \omega(j)) m_f(r, g_j) \leq \\ &\leq \theta(n+1)T(r, f) + \frac{2\varepsilon}{3}T(r, f) + o(T(r, f)) + \\ &+ \left(1 + q - \theta \sum_{j=0}^q \omega(j)\right) T(r, f) + O(1) \leq \\ &\leq \left(1 + q - \theta \left(\sum_{j=0}^q \omega(j) - n - 1\right)\right) T(r, f) + \varepsilon T(r, f) = \\ &= (2u - n + 1 + \varepsilon)T(r, f), \end{aligned}$$

для достаточно больших r .

Следствие 6.1. В условиях теоремы 6.1

$$\sum_{j=0}^q \delta_f(g_j) \leq 2u - n + 1.$$

§7. p -АДИЧНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ

В ОСНОВНОЙ ПОЗИЦИИ

Продолжим изучение ситуации в §5. Предположим, что $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ находится в основной позиции и f является k -плоским над $\mathcal{R}$, $0 \leq k \leq n \leq q$ таким, что каждая пара (f, g_j) свободна для $j = 0, \dots, q$. Согласно лемме 4.2 тогда существует базис $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ пространства $V_{\mathcal{R}}$ над $\mathcal{R}$ с дуальным базисом $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ таким, что для приведенного представления $\bar{f}: C_p \rightarrow V$ имеем

$$\bar{f} = \sum_{j=0}^k \langle \bar{f}, \alpha_j \rangle \xi_j.$$

Более того, базис может быть выбран таким, чтобы $\alpha_j \in V^*$ для $j = 0, \dots, k$ и

$$\langle \bar{f}, \alpha_0 \rangle, \dots, \langle \bar{f}, \alpha_k \rangle$$

p -адически голоморфны и линейно независимы над $\mathcal{R}$. Мы также имеем

$$\bar{g}_j = \sum_{i=0}^n \langle \xi_i, \bar{g}_j \rangle \alpha_i, \quad j = 0, \dots, q.$$

Возьмем базис $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ пространства V^* с $\epsilon_j = \alpha_j$ для $j = 0, \dots, k$. Пусть $e = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ — дуальный базис ϵ . Пусть W — векторное пространство с базисом

$e_0, \dots, e_k$ над C_p . Тогда $e_0, \dots, e_k$ является базисом W^* . p -адическая голоморфная кривая $\tilde{f} : C_p \rightarrow P(W)$ определяется из представления

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^k \langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle e_j : C_p \rightarrow W.$$

Поскольку $\langle \tilde{f}, \epsilon_0 \rangle, \dots, \langle \tilde{f}, \epsilon_k \rangle$ линейно независимы над $\mathcal{R}$, то отображение $\tilde{f}$ линейно невырождающееся над $\mathcal{R}$. Заметим, что

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^k \langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle \xi_j = \sum_{j=0}^n \langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle e_j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\| &= \max_{0 \leq j \leq k} |\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle|_p \leq \max_{0 \leq j \leq n} |\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle|_p = \|\tilde{f}\| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq k} |\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle|_p \|\xi_j\| \leq \|\tilde{f}\| \max_{0 \leq j \leq k} \max_{0 \leq i \leq n} |\xi_{ji}|_p, \end{aligned}$$

где

$$\xi_j = \sum_{i=0}^n \xi_{ji} e_i, \quad \xi_{ji} \in \mathcal{R}.$$

Следовательно

$$\mu(r, \tilde{f}) \leq \mu(r, \tilde{f}) \leq \mu(r, \tilde{f}) \max_{0 \leq j \leq k} \max_{0 \leq i \leq n} \mu(r, \xi_{ji}) \quad (r > 0).$$

Заметим, что $\tilde{f} \neq 0$. Имеем

$$N_f(r) = N(r, \tilde{f} = 0) \leq \sum_{j=0}^k N(r, \xi_j = \infty) \leq \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^n N(r, \xi_{ji}) = o(T(r, f)).$$

Следовательно, получаем

$$T(r, \hat{f}) + O(1) \leq T(r, f) \leq T(r, \hat{f}) + o(T(r, f)). \quad (9)$$

Замечание 7.1. Если $k = 0$, то $T(r, \hat{f})$ – постоянная, и неравенство (9) невозможно. Поэтому $k \geq 1$.

p -адические голоморфные кривые $\tilde{g}_j : C_p \rightarrow P(W^*)$ также определяются из представлений

$$\tilde{g}_j = \sum_{i=0}^k \langle \xi_i, \tilde{g}_j \rangle \epsilon_i : C_p \rightarrow W^*, \quad j = 0, \dots, q.$$

Заметим, что $\bar{g}_j \neq 0$, поскольку пара (f, g_j) свободна. Очевидно, каждое $\bar{g}_j$ определено над $\mathcal{R}$, и, следовательно

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, \bar{g}_j)}{T(r, f)} = 0, \quad j = 0, \dots, q.$$

Отсюда получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, \bar{g}_j)}{T(r, \hat{f})} = 0, \quad j = 0, \dots, q.$$

Лемма 7.1. Семейство $\hat{\mathcal{G}} = \{\hat{g}_j\}_{j=0}^q$ находится в n -подосновной позиции.

Доказательство. Возьмем $\kappa \in J_n^q$. Тогда $\bar{g}_\kappa \neq 0$, и, следовательно

$$\det(\langle \xi_i, \bar{g}_{\kappa(j)} \rangle) \neq 0 \quad (0 \leq i, j \leq n).$$

Поэтому существует $\lambda \in J_k^q$, $\text{Im} \lambda \subseteq \text{Im} \kappa$ такое, что

$$\det(\langle \xi_s, \bar{g}_{\lambda(t)} \rangle) \neq 0 \quad (0 \leq s, t \leq k).$$

Имеем

$$\bar{g}_\lambda = \det(\langle \xi_s, \bar{g}_{\lambda(t)} \rangle) \epsilon_0 \wedge \dots \wedge \epsilon_k \neq 0.$$

Поэтому $\lambda \in J_k(\hat{\mathcal{G}})$ и, следовательно, $\hat{\mathcal{G}}$ находится в n -подосновной позиции.

Теорема 7.1. Пусть $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ — конечное семейство p -адичных голоморфных кривых $g_j : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ в подосновной позиции, $q \geq n$. Возьмем целое k , $1 \leq k \leq n$. Пусть $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}(V)$ — p -адичная голоморфная кривая, являющаяся k -плоской над $\mathcal{R}$, так что каждая пара (f, g_j) свободна для всех $j = 0, \dots, q$.

Предположим, что g_j растет медленнее f для каждого j . Тогда

$$\sum_{j=0}^q \delta_f(g_j) \leq 2n - k + 1.$$

Доказательство. Из следствия 6.1 имеем

$$\sum_{j=0}^q \delta_f(\hat{g}_j) \leq 2n - k + 1.$$

Заметим, что

$$\langle \bar{f}, \bar{g}_j \rangle = \sum_{i=0}^n \langle \bar{f}, \alpha_i \rangle \langle \xi_i, \bar{g}_j \rangle = \sum_{i=0}^k \langle \bar{f}, \epsilon_i \rangle \langle \xi_i, \bar{g}_j \rangle = \langle \bar{\hat{f}}, \bar{\hat{g}}_j \rangle.$$

Пусть $\bar{f}$ и $\bar{g}_j$ — приведенные представления f и g_j , соответственно. Тогда существуют p -адическая голоморфная функция $h \neq 0$ и p -адические мероморфные функции $w_j \neq 0$ такие, что $\bar{f} = h\bar{f}$ и $\bar{g}_j = w_j\bar{g}_j$. Получаем

$$\langle \bar{f}, \bar{g}_j \rangle = h w_j \langle \bar{f}, \bar{g}_j \rangle.$$

Следовательно

$$N_f(r, g_j) - N_{\bar{f}}(r, \bar{g}_j) = N(r, \frac{1}{h}) + N(r, \frac{1}{w_j}) - N(r, w_j).$$

Возьмем приведенное представление $\bar{\xi}_i$ мероморфной p -адической голоморфной кривой

$$x_i = P \circ \xi_i : C_p \longrightarrow P(V).$$

Тогда существует p -адическая мероморфная функция $h_i \neq 0$ такая, что $\xi_i = h_i \bar{\xi}_i$.

Очевидно

$$N(r, \frac{1}{h_i}) \leq \sum_{k=0}^n N(r, \frac{1}{\xi_{ik}}) = o(T(r, f)),$$

$$N(r, h_i) \leq \sum_{k=0}^n N(r, \xi_{ik}) = o(T(r, f)).$$

Заметим, что

$$w_j \bar{g}_j = \bar{g}_j = \sum_{i=0}^k h_i \langle \bar{\xi}_i, \bar{g}_j \rangle \epsilon_i \neq 0.$$

Возьмем некоторое $i \in Z[0, k]$ такое, что p -адическая голоморфная функция $\langle \bar{\xi}_i, \bar{g}_j \rangle \neq 0$. Тогда

$$N(r, \frac{1}{w_j}) \leq N(r, \frac{1}{h_i}) + N_{x_i}(r, g_j) = o(T(r, f)),$$

$$N(r, w_j) \leq \sum_{i=0}^k N(r, h_i) = o(T(r, f)).$$

Заметим, что

$$N(r, \frac{1}{h}) = N_f(r) = o(T(r, f)).$$

Получим

$$N_f(r, g_j) - N_{\bar{f}}(r, \bar{g}_j) = o(T(r, f)),$$

откуда легко вывести равенство

$$\delta_f(g_j) = \delta_{\tilde{f}}(\tilde{g}_j).$$

Теорема доказана.

ABSTRACT. The paper considers the Nevanlinna theory of p -adic holomorphic curves and proves p -adic analogous of Nochka and Ru-Stoll's theorems for the Cartan conjecture of defect relations.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Boutabaa, "Applications de la théorie de Nevanlinna p -adic", Collect. Math., vol. 42, pp. 75 — 93, 1991.
2. H. Cartan, "Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données", Mathematica (cluj) vol. 7, pp. 80 — 103, 1933.
3. W. Chen, "Cartan's conjecture : defect relations for meromorphic maps from parabolic manifold to projective space", University of Notre Dame Thesis, 1987.
4. W. Cherry, Zh. Ye, "Non-Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the Non-Archimedean Nevanlinna inverse problem", Preprint.
5. P. C. Hu, C. C. Yang, "Value distribution theory of p -adic meromorphic functions", Preprint.
6. P. C. Hu, C. C. Yang, "A unique range set of p -adic meromorphic functions with 10 elements", Preprint.
7. Hà Huy Khóai, "On p -adic meromorphic functions", Duke Math. J., vol. 50, pp. 695 — 711, 1983.
8. Hà Huy Khóai, "Heights for p -adic holomorphic functions of several variables", Max-Planck Institut Für Mathematik, pp. 89 — 83, 1989.
9. Hà Huy Khóai, M. V. Quang, "On p -adic Nevanlinna theory", Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, vol. 1351, pp. 146 — 158, 1988.
10. Hà Huy Khóai, M. V. Tu, " p -adic Nevanlinna-Cartan theorem", International J. of Math., vol. 6, pp. 719 — 731, 1995.
11. R. Nevanlinna, Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Meromorphes, Gauthier Villars, Paris, 1929; Reprint, Chelsea, New York, 1974.
12. E. I. Nochka, "Defect relations for meromorphic curves", Izv. Akad. Nauk. Moldav. SSR, Ser. Fiz.-Tek. Mat. Nauk, vol. 1, pp. 41 — 47, 1982.
13. E. I. Nochka, "On a theorem from linear algebra", Izv. Akad. Nauk. Moldav. SSR, Ser. Fiz.-Tek. Mat. Nauk, vol. 3, pp. 29 — 33, 1982.
14. E. I. Nochka, "On the theory of meromorphic curves", Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 269, pp. 377 — 381, 1983.
15. M. Ru, W. Stoll, "The second main theorem for moving targets", J. of Geom. Analysis, vol. 1, pp. 99 — 138, 1991.
16. M. Ru, W. Stoll, "The Cartan conjecture for moving targets", Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 52, Part 2, pp. 477 — 508, 1991.
17. M. Ru, P. Vojta, "Schmidt's subspace theorem with moving targets", Invention Math., vol. 127, pp. 51 — 65, 1997.
18. M. Ru, P. M. Wong, "Integral points of $P^n - \{2n + 1 \text{ hyperplanes in general position}\}$ ", Preprint.
19. M. Shirotsaki, "Another proof of the defect relation for moving targets", Tôhoku Math. J., vol. 43, pp. 355 — 360, 1991.

20. N. Steinmetz, "Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes", J. Reine Angew. Math., vol. 368, pp. 134 — 141, 1986.
21. W. Stoll, "An extension of the theorem of Steinmetz-Nevanlinna to holomorphic curves", Math. Ann., vol. 282, pp. 185 — 222, 1988.
22. W. Stoll, "Value distribution theory for meromorphic maps", Aspects of Math. E7, Vieweg, 1985.
23. P. Vojta, "Diophantine approximation and value distribution theory", Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, vol. 1239, 1987.
24. P. Vojta, "Roth's theorem with moving targets", International Math. Research Notices, pp. 109 — 114, 1996.

12 июня 1997

Кафедра математики
Шандонгский университет 250100,
Шандонг, НР Китай

Кафедра математики
Гонг Конгский университет Науки и Технологии
Гонг Конг

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 32

НОМЕР 4

1997

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

И ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

Сборник статей

Страницы

Предисловие редактора.....	4
Применения принципа разбиения мероморфных функций II: накопления a -точек и свойство Литтлвуда Г. А. Барсегян, Г. А. Сукиасян	5
Нерешенные задачи семинара по теории распределений и ее применений, Гонк Конг, июль 1996 А. Ф. Беардон, Ч.-Ч. Янг	12
Классификация римановых поверхностей с непостоянной мероморфной функцией, ограниченной на бесконечности М. Хаяши	42
Предположение Картана для p -адических голоморфных кривых П.-Ч. Ху, Ч.-Ч. Янг	51 – 87

CONTENTS

VOLUME 32

NUMBER 4

1997

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

GEOMETRIC COMPLEX FUNCTIONS THEORY AND VALUE DISTRIBUTION THEORY

Collection of Papers

	PAGES
Editor's Preface	1
Applications of the principle of partitioning of meromorphic functions, II: Accumulations of α -points and Littlewood property G. A. Barsegian, G. A. Sukiasian	2
Open problems for the workshop on value distribution theory and its applications, Hong Kong, July 1996 A. F. Beardon, C. C. Yang	9
Classification of Riemann surfaces with a nonconstant meromorphic function bounded at infinity M. Hayashi	37
The Cartan conjecture for p -adic holomorphic curves P-C. Hu, C. C. Yang	45

©1998 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.