ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր. սերիա «Մաթեմատիկա»:

О ПОСТРОЕНИИ ЦЕЛЫХ И КВАЗИЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, РАВНОМЕРНО УБЫВАЮЩИХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ, II

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В первой статье с тем же названием (настоящий журнал, т. 31, № 6, стр. 11 – 25, 1996) была рассмотрена задача о максимальной скорости убывания целых или квазицелых функций в угловой области $|\arg z| \leq \alpha/2$ при $0 < \alpha < \pi$. В отличие от теоремы Н. У. Аракеляна, не было сделано какого–либо утверждения относительно расположения нулей целых функций. Целью было выяснить существенность условия $p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$ и вывести условия, при которых аналоги результатов Аракеляна оставались бы справедливыми для целых и квазицелых функций. В настоящей работе рассматривается та же задача для $\pi \leq \alpha < 2\pi$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа является продолжением исследования, проведенного в работе [3]. Нас интересуют целые и квазицелые функции конечного порядка с быстрейшей скоростью убывания в угле $|\arg z| \leq \dfrac{\pi}{2\gamma} = \dfrac{\alpha}{2}$. Случай $\gamma \geq 1$ был рассмотрен в [3]. В настоящей статье рассматривается случай $1/2 < \gamma \leq 1$. Обе работы тесно связаны с работой Н. У. Аракеляна, доказавшего следующее утверждение (см. [1], стр. 189).

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max\left\{\dfrac{\pi}{\alpha}, \dfrac{\pi}{2\pi - \alpha}\right\}$, и пусть $p(r)$, $r \geq 1$ – неотрицательная функция такая, что*

$$p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty, \qquad \int_1^\infty r^{-(\pi/\alpha+1)}\, p(r)\, dr \leq k < \infty. \tag{1}$$

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ порядка ρ и нормального типа, все нули *которой лежат вне угла* $|\arg z| \le \dfrac{\alpha}{2}$ *и которая удовлетворяет неравенствам*

$$\exp(-k|z|^{\pi/\alpha}) < |\omega_\alpha(z)| < \exp(-[Re z^{\pi/\alpha} + p(|z|)]), \qquad |\arg z| \le \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \ge 1. \tag{2}$$

Указанный тип или порядок нельзя понизить. По данному вопросу см. также [2] и замечание 1 в [3].

В данной работе рассматривается та же задача в случае $1/2 < \gamma = \dfrac{\pi}{\alpha} \le 1$. В отличие от теоремы Аракеляна, не сделано какого–либо утверждения относительно нулей. Целью является выяснение существенности условия $p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$ в (1) и вывод аналогичных теорем для целых и квазицелых функций.

Пусть $T_*(r)$, $r > a > 0$ – монотонно возрастающая функция такая, что сходится интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = \int^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr, \qquad a > 0. \tag{3}$$

Последовательность $\{M_n\}$ определим как

$$M_n = \sup_{r \ge a} \frac{r^n}{T_*(r)}. \tag{4}$$

Из [4], стр. 10 – 14 (см. также [3]) следует, что

$$T_*(r) = \sup_{n \ge 0} \frac{r^n}{M_n}, \tag{5}$$

т.е. $\{M_n\}$ является порождающей последовательностью для $T_*(r)$ и обладает свойством минимальности.

Рассмотрим последовательность $\{\mathring{M}_n\}$, где $\mathring{M}_n = M_n^\rho$, $\rho \ge 1$, и положим

$$\mathring{T}(r) = \sup_{n \ge 0} \frac{r^n}{\mathring{M}_n}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Из сходимости (3), где* $T_*(r)$ *определена в (5) и* $1/2 < \gamma \le 1$, $\rho = \dfrac{\gamma}{2\gamma - 1} \ge 1$, *следует сходимость интеграла*

$$\int^\infty \frac{\ln \mathring{T}(r)}{r^{1+1/\beta}}\, dr, \quad \beta = 2\rho - 1, \quad \rho \ge 1. \tag{7}$$

Доказательство. После замены r на $r^{1/\rho}$, будем иметь

$$\int^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = \frac{1}{\rho} \int^\infty \frac{\ln \mathring{T}(r^{1/\rho})}{r^{1+1/\beta}}\, dr. \tag{8}$$

Но согласно (6)

$$T_*(r^{1/\rho}) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^{n/\rho}}{M_n} = \sup_{n\geq 0} \left(\frac{r^n}{\mathring{M}_n}\right)^{1/\rho} = \left[\mathring{T}(r)\right]^{1/\rho}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует одновременная сходимость (3) и (7).

Определение 1. Последовательность чисел $\{\mu_\nu\}$, где

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ..., \qquad \mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0, \quad \nu = 0, 1, ... \tag{10}$$

принадлежит классу $A^*(1/\omega)$, $\omega > 0$, если сходится ряд

$$\sum \frac{\mu_\nu - \omega\nu}{\mu_\nu} \tag{11}$$

и

$$\mu_\nu - \omega\nu = \alpha_\nu = o(\nu^\delta), \quad 0 \leq \delta < 1/2, \quad \nu \to \infty. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$\sum_{\mu_\nu \leq r} \frac{1}{\mu_\nu} = \frac{1}{\omega} \ln r + O(1), \quad r \to +\infty, \quad \frac{1}{\omega} = \rho.$$

Теорема 2 (см. [5], Теорема 8). *Из сходимости (7) следует существование функции $0 \neq \varphi \in C^\infty[0,1]$, удовлетворяющей условиям*

$$1. \quad \varphi^{(n)}(1) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{13}$$

$$2. \quad \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{n-\widetilde{\mu}_k}\, dt = 0, \quad \mu_{k_n} \leq n, \tag{13'}$$

$$3. \quad |\varphi^{(n+1)}(x)|\, x^\delta \leq c c_1^n \mathring{M}_n, \quad n = 0, 1, ..., \quad x \in [0,1], \quad \delta \in (0, 1/2), \tag{14}$$

где последовательность $\widetilde{\mu} = \{\widetilde{\mu}_k\} \in A^*(\rho)$, $\mathring{M}_n = M_n^\rho$.

Нам потребуются оценки (вообще говоря двусторонние) модулей следующих функций :

$$\Lambda_*(z, \mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_\nu^2}\right), \quad z = \sigma + iy, \quad |z \pm \mu_\nu| \geq \frac{h}{4}, \tag{15}$$

$$W(z, \mu) = e_{1,\infty}(z, \mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\mu_\nu}\right) e^{-z/\mu_\nu}, \quad \mathrm{Re} z = \sigma > 0, \tag{16}$$

где μ_n – произвольная последовательность типа (10).

Теорема А. *Вне кругов* $\min|z \pm \mu_\nu| \le h_1$ *имеем*

$$e^{-c_1|\sigma|}\Lambda^2(y,\mu) \le |\Lambda_*(\sigma+iy,\mu)| \le e^{c_2|\sigma|}\Lambda^2(y,\mu), \tag{17}$$

где $h_1 \le h/4$ *и*

$$\Lambda(y,\mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{\mu_\nu^2}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *не зависят от* σ *и* y.

Доказательство. См. [6], теорему 2.2.

Теорема В. *Для функции* $W(\sigma+iy,\mu)$, $\sigma > 0$, *имеем*

$$\begin{gathered} c_1\Lambda(y,\mu)\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}+c_1'\right)\right) \le \\ \le |W(\sigma+iy,\mu)| \le c_2\Lambda(y,\mu)\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}-c_2'\right)\right), \end{gathered} \tag{19}$$

где постоянные $c_1 > 0$, $c_1' > 0$, $c_2 > 0$ *и* $c_2' > 0$ *не зависят от* σ *и* y.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $x > 0$

$$|W(x+iy,\mu)| = \Lambda(r,\mu)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{2\mu_\nu x}{r^2+\mu_\nu^2}\right)^{1/2} e^{-x/\mu_\nu},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Следовательно, достаточно получить двусторонние оценки для функции

$$P(x,y) = \prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(x,y),$$

где

$$p_\nu(x,y) = \left(1+\frac{2\mu_\nu x}{r^2+\mu_\nu^2}\right)^{1/2} e^{-x/\mu_\nu}.$$

Обозначим

$$P_{a,b}(x,y) = \prod_{a<\mu_\nu\le b} p_\nu(x,y),$$

и оценим функции $P_{1,r-a}(x,y)$, $P_{r-a,r+a}(x,y)$, $P_{r+a,\infty}(x,y)$. Заметим, что функции $P_{1,r-a}(x,y)$ и $P_{r+a,\infty}(x,y)$ оценивается аналогично ввиду того, что функция

$$g(u) = \frac{u}{r^2+u^2}, \qquad u \in (0,\infty)$$

достигает максимума в точке $u_0 = r$.

Для $\mu_\nu \geq r - a > 0$ и $\mu_\nu \geq r + a > 0$, $a > 0$ имеем

$$0 < \frac{2r\,\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} < q < 1.$$

Поэтому для оценки

$$p_\nu(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2}\right) - x/\mu_\nu\right)$$

мы можем воспользоваться свойством степенного ряда логарифмической функции. Имеем

$$\exp\left(-x\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu}\right) < P_{1,r-a}(x,y) < \exp\left(-x\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu} + \sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{\mu_\nu\, x}{r^2 + \mu_\nu^2}\right).$$

С другой стороны

$$\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{\mu_\nu\, x}{r^2 + \mu_\nu^2} < \frac{x}{r^2}\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\mu_\nu \leq \frac{x \cdot r \cdot n(r)}{r^2} \leq c_2\, x,$$

где $n(r)$ – числовая функция последовательности $\{\mu_\nu\}$. Так как $\mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0$, то $n(r) = O(r)$. Таким образом, мы доказали неравенства

$$\exp\left(-x\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu}\right) < P_{1,r-a}(x,y) < \exp\left(-x\left(\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu} - c_2\right)\right). \tag{20}$$

Для оценки $P_{r+a,\infty}(x,y)$ сперва заметим, что

$$\exp\left[-x\sum_{\mu_\nu \geq r+a}\left(\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} + \left(\frac{\mu_\nu\sqrt{x}}{r^2 + \mu_\nu^2}\right)^2\right)\right] < P_{r+a,\infty}(x,y) <$$
$$< \exp\left[-x\sum_{\mu_\nu \geq r+a}\left(\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2}\right)\right]. \tag{21}$$

Поскольку

$$\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} = \frac{r^2}{\mu_\nu\,(r^2 + \mu_\nu^2)},$$

то можем записать

$$\frac{1}{2}\,\frac{r^2}{\mu_\nu^3} \leq \frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} < \frac{r^2}{\mu_\nu^3}, \qquad \left(\frac{\mu_\nu\, x}{r^2 + \mu_\nu^2}\right)^2 < \frac{x^2}{\mu_\nu^2}.$$

Поскольку $\mu_{\nu+1}-\mu_\nu \geq h>0$, то имеем

$$0<c'<\frac{r^2}{2}\sum_{\mu_\nu\geq r+a}\frac{1}{\mu_\nu^3}<\sum_{\mu_\nu\geq r+a}\left(\frac{1}{\mu_\nu}-\frac{\mu_\nu}{r^2+\mu_\nu^2}\right)<2r^2\sum_{\mu_\nu\geq r+a}\frac{1}{\mu_\nu^3}\leq c''<\infty.$$

Принимая во внимание неравенство

$$0<\sum_{\mu_\nu\geq r+a}\left(\frac{\mu_\nu x}{r^2+\mu_\nu^2}\right)^2\leq x^2\sum_{\mu_\nu\geq r+a}\frac{1}{\mu_\nu^2}\leq c\frac{x^2}{r}\leq c_2 x,$$

получим

$$0<c_1<P_{r+a,\infty}(x,y)<c_2 x, \tag{21'}$$

где постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$ не зависят от r и x.

Для оценки $P_{r-a,r+a}(x,y)$ используем следующее очевидное неравенство :

$$e^{-x/\mu_\nu}<p_\nu(x,y)<\exp\left(-\frac{x}{\mu_\nu}+\frac{\mu_\nu x}{r^2+\mu_\nu^2}\right).$$

Имеем

$$e^{-x/\mu_\nu}<p_\nu(x,y)<\exp\left(-x\sum_{r-a<\mu_\nu\leq r+a}\frac{r^2}{\mu_\nu\,(r^2+\mu_\nu^2)}\right).$$

Так как $\mu_{\nu+1}-\mu_\nu\geq h>0$, то получим

$$0<\sum_{r-a<\mu_\nu\leq r+a}\frac{1}{\mu_\nu}=O\left(\ln\frac{r+a}{r-a}\right)<c.$$

Это означает, что

$$e^{-c_1' x}<P_{r-a,r+a}(x,y)<e^{c_2' x},\quad c_1'>0,\quad c_2'>0. \tag{22}$$

Далее имеем (см. (18))

$$\Lambda(y,\mu)\leq\Lambda(r,\mu)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{\mu_\nu^2}\right)^{1/2}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{y^2+\mu_\nu^2}\right)^{1/2}\leq$$
$$\leq\Lambda(y,\mu)\cdot\Lambda(x,\mu)\leq\Lambda(y,\mu)\cdot e^{cx}.$$

Поскольку $\mu_{\nu+1}-\mu_\nu\geq h>0$, то получим

$$1<\Lambda(x,\mu)<e^{cx}.$$

Комбинируя эти неравенства с (20) — (22), мы завершим доказательство.

Перейдем теперь к выводу оценок для $|W(-\sigma-iy,\mu)|$ вне малых окрестностей $u_\delta(\mu_\nu)=|z-\mu_\nu|<\delta$, $\nu=1,2,\ldots$.

Теорема C. *Для функции $|W(-\sigma - iy, \mu)|$, $\sigma > 0$ выполняются неравенства*

$$A\,\frac{e^{-c_1\sigma}\,\Lambda(y,\mu)}{\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}-c_1'\right)\right)} \le |W(-\sigma-iy,\mu)| \le B\,\frac{e^{c_2\sigma}\,\Lambda(y,\mu)}{\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}+c_2'\right)\right)} \tag{23}$$

вне окрестностей $u_\delta(\mu_\nu)$, $\nu = 1, 2, ..., 0 < \delta < h/4$.

Доказательство. Имеем

$$W(-\sigma-iy,\mu) = e_{1,\infty}(-\sigma-iy,\mu) = \frac{\Lambda_*(\sigma+iy,\mu)}{e_{1,\infty}(\sigma+iy,\mu)} = \frac{\Lambda_*(\sigma+iy,\mu)}{W(\sigma+iy,\mu)}.$$

Применяя теоремы A и B, получим (23). Теорема C доказана.

Обозначим

$$\widetilde{\Gamma}(z,\mu) = \widetilde{\Gamma}(\sigma+iy,\mu) = \frac{1}{e_{1,\infty}(\sigma+iy,\mu)}, \qquad \sigma > 0. \tag{24}$$

Нам нужна следущая версия теоремы B.

Теорема B′. *Для функции $\widetilde{\Gamma}(\sigma+iy,\mu)$ и $\sigma > 0$, $|z| = |\sigma+iy| = r$ выполняются неравенства*

$$\frac{\exp\left(\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}-c_1\right)\right)}{\Lambda(y,\mu)} \le |\widetilde{\Gamma}(\sigma+iy,\mu)| \le \frac{\exp\left(\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}+c_2\right)\right)}{\Lambda(y,\mu)},$$

где постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ не зависят от σ и y.

Наконец, напомним определение квазицелых функций. Пусть $\{\lambda_\nu\}$ – числовая последовательность такая, что

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < ..., \quad \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \ge h > 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu} = \infty.$$

Функция вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^{\lambda_k}, \tag{25}$$

определенная на римановой поверхности логарифмической функции $\mathrm{Ln}(z)$, называется квазицелой, если радиус сходимости ряда (25) равен бесконечности.

Для квазицелых функций порядок и тип нами определяются так же, как это делается для целых функций, т.е.

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln|a_n|^{-1/\lambda_n}}, \qquad (\sigma\, e\, \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{1/\rho}\,|a_n|^{1/\lambda_n}$$

(см. [7], стр. 250, 251).

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 3. *Из сходимости интеграла (3) следует существование целой или квазицелой функции, соответственно видов*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\, z^k,\quad \{\mu_\nu\}\in A^*(\rho)\quad \text{и}\quad f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\, z^{\mu_k\rho},\quad \{\mu_\nu\,\rho\}\in A^*(1)$$

порядка $\rho\geq 1$ и нормальных типов, удовлетворяющих условию

$$0\not\equiv|f(z)|\leq c\,\frac{r^{l_0}}{[T_*(r)]^\rho},\quad |\arg z|\leq\frac{\pi}{2\gamma},\quad \frac{1}{2}<\gamma\leq 1,$$

где число $l_0>0$ не зависит от z ($l_0\geq 4\rho$).

Доказательство. Доказательство проведем для целой функции, где по ходу доказательства будет видно, что теорема 3 остается в силе и для квазицелых функций, указанного в теореме вида.

Из сходимости интеграла (3) следует сходимость интеграла (7). Следовательно удовлетворены условия теоремы 2.

Рассмотрим частный случай последовательности

$$\begin{aligned}&A^*(\rho)\ni\widetilde{\mu}=\{\widetilde{\mu}_\nu\}=\{\mu'_\nu\}\cup\{\mu''_\nu=\nu\}_1^\infty,\ \widetilde{\mu}_{\nu+1}-\widetilde{\mu}_\nu\geq h>0,\\&\{\mu'_\nu\}\in A^*(\rho-1),\ \{\mu''_\nu\}\in A^*(1),\ \{\mu'_\nu\}\cap\{\mu''_\nu\}=\emptyset,\end{aligned}\tag{26}$$

а также последовательность вида (10), удовлетворяющую условию

$$\mu=\{\mu_\nu\}\in A^*(\rho),\quad \mu_{\nu+1}-\mu_\nu\geq h>0.\tag{27}$$

Заметим, что во всех проводимых в настоящей работе вычислениях и оценках последовательность $\mu=\{\mu_\nu\}$ может быть заменена на $\{\nu/\rho\}$.

Обозначим

$$f_1(z)=\int_0^1\varphi(t)\,p(zt,\sigma)\,\frac{dt}{t},\quad -\frac{1}{\rho}<\sigma<\mu_1,\tag{28}$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и

$$p(t,\sigma)=p_0(t,\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta\,t^{-\zeta}\,d\zeta}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\,e_{1,\infty}(\zeta,\mu)},\tag{29}$$

где $e_{1,\infty}(\zeta,\mu)$ определена в (16), последовательности $\mu=\{\mu_\nu\}$ и $\mu'=\{\mu'_\nu\}$ определены в (27) и (26), соответственно.

Утверждаем, что искомая теоремой 3 целая (при $\mu = \{\nu/\rho\}$) или квазицелая (при $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$) функция имеет представление

$$f(z) = f_1(l\, z^\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, z^{\mu_\nu\, \rho}, \tag{30}$$

где $f_1(z)$ определена в (28), $l > 0$ – удобно подобранное число.

Доказательству предпошлем следующие две леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы 3 функция (30) целая (при $\mu = \{\nu/\rho\}$) или квазицелая (при $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$).*

Доказательство. Доказательство проведем для случая $\mu = \{\nu/\rho\}$. Случай $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$ доказывается аналогично.

Нетрудно заметить, что из (29) следует равенство

$$p(t,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta=-k/\rho} \frac{\zeta\, t^{-\zeta}}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\, e_{1,\infty}(\zeta,\nu/\rho)} + p(t,-\sigma_n), \tag{31}$$

где $n/\rho < \sigma_n < (n+1)/\rho$.

Поэтому

$$p(t,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^{k/\rho} + p(t,-\sigma_n), \tag{32}$$

где

$$a_k = \left(\frac{k}{\rho}\right)^2 \frac{e^{-1}}{e_{1,\infty}(k/\rho,\mu') \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}} \left(1-\frac{k}{\nu}\right) e^{k/\nu}}.$$

Из (28), согласно (32) будем иметь

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k z^{k/\rho} + \int_0^1 \varphi(t)\, p(zt,-\sigma_n)\, \frac{dt}{t}, \tag{33}$$

где

$$b_k = a_k \int_0^1 t^{-1+k/\rho}\, \varphi(t)\, dt.$$

Полагая $y = 0$, $r = k/\rho$ и применяя теоремы B, C и B$'$, получим

$$|a_k| = \frac{\widetilde{\Gamma}(k/\rho,\mu')}{\widetilde{\widetilde{\Gamma}}(k/\rho,\mu)} \frac{1}{|\Lambda_*(k/\rho,\{\nu/\rho\})|_{\nu\neq k}} \frac{1}{2}\left(\frac{k}{\rho}\right)^2 = e^{O(k)} \frac{\widetilde{\Gamma}(k/\rho,\mu')}{\widetilde{\widetilde{\Gamma}}(k/\rho,\mu)} = e^{O(k)} \frac{1}{\Gamma(k/\rho)}.$$

Аналогичную оценку можно получить для b_k. Докажем, что

$$\lim_{\sigma_n\to\infty} p(zt,-\sigma_n) = 0, \tag{34}$$

где $x = \mathrm{Re}z > 0$. Действительно, имеем

$$\frac{1}{|e_{1,\infty}(\sigma_n + iy, \mu')|} = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\sigma_n}{\mu'_\nu}\right)^2 + \frac{y^2}{\mu'^2_\nu}\right]^{1/2} e^{-\frac{\sigma_n}{\mu'_\nu}}} =$$
$$= \frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu')}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu'_\nu)^2}\right)^{1/2}}, \tag{35}$$

и

$$\frac{1}{|e_{1,\infty}(-\sigma_n - iy, \mu)|} = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sigma_n+iy}{\mu_\nu}\right)\exp\left(-\frac{\sigma_n+iy}{\mu_\nu}\right)\right|}{\left|\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\sigma_n+iy}{\mu_\nu}\right)^2\right)\right|} \le$$
$$\le \frac{e^{c\sigma}}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu)} \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu_\nu)^2}\right)^{1/2}}{\Lambda^2(y, \mu)}, \tag{36}$$

где $\Lambda(y, \mu)$ определена в (18).

Из (31), согласно (35) и (36) будем иметь

$$|p(zt, -\sigma_n)| \le \frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu')}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{c\sigma}}{\Lambda^2(y, \mu)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu_\nu)^2}}{1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu'_\nu)^2}}\right)^{1/2} dy \le$$
$$\le 2\frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu')}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{c\sigma}}{1+y^2} dy \le \frac{\exp\left(\sigma_n \sum_{\mu' \le \sigma_n} \frac{1}{\mu'_\nu}\right)}{\exp\left(\sigma_n \sum_{\mu' \le \sigma_n} \frac{1}{\mu_\nu}\right)} e^{c'\sigma_n} \le$$
$$\le e^{c'\sigma_n} \exp(-\sigma_n \ln \sigma_n),$$

так как $\mu' \in A^*(\rho - 1)$, $\mu \in A^*(\rho)$. Этим доказана справедливость (34).

Поэтому из (33), после предельного перехода при $n \to \infty$, получим

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{k/\rho}, \quad 0 < x < \infty.$$

Следовательно функция $f_1(z)$ аналитически продолжается на всю риманову поверхность логарифмической функции $\mathrm{Ln}z$, поэтому $f_1(z)$ является квазицелой. Следовательно, функция

$$f(z) = f_1(lz^\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k l^k z^k \tag{37}$$

целая и роста (ρ, σ).

Совершенно очевидно, что если бы вместо последовательности $\mu = \{\nu/\rho\}$ мы взяли произвольную последовательность $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$, то получили бы квазицелую функцию роста (ρ, σ) по степеням $\{\mu_\nu\, \rho\}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция $f_1(z)$ определенная в (28), где $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, имеет представление*

$$f_1(z) = \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^n\, p_n(zt, \sigma_n)\, dt, \quad \sigma < \sigma_n < n, \tag{38}$$

где

$$p_n(zt, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n} (-\zeta + \nu)\, e_{1,\infty}(-\zeta, \mu')\, e_{1,\infty}(\zeta, \nu/\rho)}, \quad -\frac{1}{\rho} < \sigma < \widetilde{\mu}_1. \tag{39}$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует

$$\varphi(t) = \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_t^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, (t - \tau)^n\, d\tau.$$

Поэтому из (28) будем иметь

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 p_n(zt, \sigma)\, \frac{dt}{t} \int_t^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, (t - \tau)^n\, d\tau = \\ &= \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, \mathcal{G}_n(z, \tau, \sigma)\, d\tau, \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\mathcal{G}_n(z, \tau, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\tau p_n(zt, \sigma)\, (t - \tau)^n\, \frac{dt}{t}. \tag{41}$$

Далее имеем

$$\mathcal{G}_n(z, \tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{z^{-\zeta}\, \zeta d\zeta}{e_{1,\infty}(-\zeta, \mu')\, e_{1,\infty}(\zeta, \nu/\rho)} \int_0^\tau \frac{t^{-\zeta}\, (\tau - t)^n}{\Gamma(n+1)}\, \frac{dt}{t}.$$

С другой стороны, для $\mathrm{Re}(-\zeta - 1) > -1$ ($\sigma = \mathrm{Re}\zeta < 0$)

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\tau t^{-\zeta - 1}\, (\tau - t)^n\, dt = \frac{\tau^{-\zeta + n}}{\Gamma(n+1)}\, \frac{\Gamma(-\zeta)\, \Gamma(n+1)}{\Gamma(-\zeta + n + 1)} = \frac{\tau^{-\zeta + n}}{\prod_{\nu=1}^{n} (-\zeta + \nu)}.$$

Из условия (13′) теоремы 2 и равенства

$$p_n(zt, \sigma) = \sum_{0 < \widetilde{\mu}_k < \sigma_n} b_k^*(z \cdot t)^{-\widetilde{\mu}_k} + p_n(zt, \sigma_n),$$

получим (38). Лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Нам нужна оценка сверху для $|p_n(zt,\sigma_n)|$, где $0 < n - l_0 < \sigma_n < n$, а z принимает комплексные значения, для которых существует интеграл

$$|p_n(zt,\sigma_n)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_n - i\infty}^{\sigma_n + i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\, d\zeta}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\, e_{1,\infty}(\zeta,\nu/\rho) \prod_{\nu=1}^{n}(-\zeta+\nu)}. \tag{42}$$

Для этого оценим отдельно модули множителей подынтегральной функции в (42).

Заметим, что для $\zeta = \sigma_n + iy$, согласно теореме B, будем иметь

$$\frac{1}{|e_{1,\infty}(\sigma_n + iy, \nu/\rho)|} \le \frac{\exp\left(\sigma_n \sum_{\nu/\rho \le r} \frac{\rho}{\nu}\right) e^{c''\sigma_n}}{\Lambda(r,\{\nu/\rho\})} \le e^{c''\sigma_n} \frac{\exp(\rho\,\sigma_n \ln r)}{\sinh(\frac{\pi}{2}\rho\,|y|)} \tag{43}$$

и

$$\begin{gathered} \frac{1}{|e_{1,\infty}(\sigma_n + iy, \mu')|} \le \frac{e^{c'\sigma_n}\,\Lambda(y,\mu')}{\Lambda^2(y,\mu')\,\exp((\rho-1)\,\sigma_n \ln r)} \le \\ \le \frac{e^{c'\sigma_n}}{\exp((\rho-1)\,\sigma_n \ln r)} \cdot \frac{1}{\sinh(\frac{\pi}{2}(\rho-1)\,|y|)}. \end{gathered} \tag{44}$$

Оценим, наконец, сверху

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} = \frac{1}{\prod_{1\le\nu\le\sigma_n}[y^2+(\sigma_n-\nu)^2]^{1/2} \prod_{\sigma_n\le\nu\le n}[y^2+(\sigma_n-\nu)^2]^{1/2}}.$$

Разберем два случая : а) $|y| \ge \sigma_n$ и б) $|y| < \sigma_n$.

В первом случае будем иметь ($k_0 = n - \sigma_n$)

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} \le \frac{1}{|y|^{\sigma_n}} \frac{1}{(1+y^2)^{k_0/2}} \le e^{c''\sigma_n} \frac{\exp(-\sigma_n \ln r)}{(1+y^2)^{k_0/2}},$$

так как $r = (\sigma_n^2 + y^2)^{1/2} \le \sigma_n + |y| < 2|y|$.

В случае б) будем иметь

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} \le \frac{c}{\prod_{0<\nu<\sigma_n}(\sigma_n-\nu)\,(1+y^2)^{k_0/2}} \le e^{c_2\sigma_n} \frac{\exp(-\sigma_n \ln r)}{(1+y^2)^{k_0/2}}.$$

Таким образом, в любом случае

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} \le e^{c_0\sigma_n} \frac{\exp(-\sigma_n r)}{(1+y^2)^{k_0/2}}. \tag{45}$$

Далее, с учетом (43) — (45) и неравенства

$$0 < c' < \frac{\Lambda(y,\mu')}{\Lambda(y,\{y/(\rho-1)\})} \le c''$$

при $n - k_0 < \mathrm{Re} z = \sigma_n < n$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\, e_{1,\infty}(\zeta,\nu/\rho)\,\prod_{\nu=1}^{n}(-\zeta+\nu)}\right| \le$$
$$\le c_0\, e^{c\,\sigma_n} \frac{1}{\sinh(\frac{\pi}{2}\,\rho\,|y|)\,\sinh(\frac{\pi}{2}\,(\rho-1)\,|y|)} \cdot \frac{1}{1+y^2}.$$

Это значит, что если $|\arg z| \le \frac{\pi}{2}(2\rho-1)$, то

$$\begin{aligned} |p_n(zt,\sigma_n)| &\le c_0'\, e^c\, |zt|^{-\sigma_n} \int_0^\infty \frac{e^{y\,|\arg z|}}{e^{\frac{\pi}{2}\,(2\rho-1)\,y}}\, \frac{dy}{1+y^2} \le \\ &\le c_0 \frac{e^{c\,\sigma_n}}{|z|^{\sigma_n}}\, t^{-\sigma_n}, \quad n-k_0 < \sigma_n < n, \quad k_0 \ge 4. \end{aligned} \tag{46}$$

Возвращаясь к оценке $f_1(z)$, согласно (42), (46) и теореме 2, будем иметь

$$|f_1(z)| \le c e^{c'n} \frac{\mathring{M}_n}{|z|^{\sigma_n}}, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2}\,(2\rho-1), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Заменяя z на lz^ρ, где $l > 0$ – удобно выбранное число, для функции (37) получим

$$|f(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* z^k\right| \le \frac{\mathring{M}_n}{|z|^{\sigma_n\,\rho}} = \frac{|z|^{l_0}\, M_n^\rho}{|z|^{n\,\rho}}$$

для любого $n - k_0 < \sigma_n < n$, если только

$$|\arg z| \le \frac{\pi}{2}\, \frac{2\rho-1}{\rho} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

где $\gamma \in (1/2, 1]$, $l_0 = \rho k_0 \ge 4\rho$.

Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. In the first paper under the same title (this Journal, vol. 31, no. 6, pp. 11 – 25, 1996) the problem of maximal decrease rate of an entire or quasi–entire functions in an angular domain $|\arg z| \le \alpha/2$ for $0 < \alpha < \pi$ was considered. In contrast to N. U. Arakelian's theorem, no assumption concerning positions of zeros of entire functions was done. The purpose was to clarify whether the condition $p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ as $r \to \infty$ is essential, and to derive conditions under which the analogs of the Arakelian's results remain valid for entire and quasi–entire functions. The present paper considers the same problem for $\pi \le \alpha < 2\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Построение целых функций, равномерно убывающих в угле", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 1, № 3, стр. 162 — 191, 1966.
2. К. Н. Хачатрян, "Построение целых функций минимального порядка, убывающих в угле с заданной скоростью", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 11, № 1, стр. 34 – 55, 1976.
3. Г. В. Бадалян, "О целых и квазицелых функциях конечного порядка, равномерно убывающих в угле, I", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 6, стр. 11 – 25, 1996.
4. С. Мандельбройт, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955.
5. Г. В. Бадалян, "Построение бесконечно дифференцируемой функции с нулевыми моментами производных", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 3, стр. 1 – 12, 1995.
6. Г. В. Бадалян, "Обобщенная квазианалитичность и критерий единственности для одного класса аналитических функций", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 38, № 2, стр. 339 – 378, 1974.
7. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, Наука, 1968.

2 июля 1996 Ереванский государственный университет

Посвящается 60–летию
А. Б. Нерсесяна

ЯВНАЯ ОБОБЩЕННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Г. Камалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В работе представлены некоторые явные формулы обобщенной факторизации Винера–Хопфа относительно замкнутого контура ограниченных голоморфных матриц–функций. Приводятся формулы для частных индексов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Явная факторизация Винера–Хопфа имеет ряд применений в теории систем сингулярных интегральных уравнений, уравнений Винера–Хопфа и в теории нелинейных уравнений математической физики (см., например, [1 – 4]). Под факторизацией Винера–Хопфа матрицы–функции W, определенной на замкнутом контуре γ, который разделяет замкнутую комплексную плоскость на части $\mathcal{D}_+$ ($\ni 0$) и $\mathcal{D}_-$ ($\ni \infty$), понимают представление $W(t) = W_-(t)\Lambda(t)W_+(t)$ $(t \in \gamma)$, где $W_\pm$ – граничные значения голоморфных и неособых в $\mathcal{D}_\pm$ матриц–функций, а $\Lambda(t) =\mathrm{diag}[t^{æ_1}, \cdots, t^{æ_n}]$. При достаточно общих условиях целые числа $æ_1, \cdots, æ_n$ однозначно определяются (с точностью до порядка) матрицей–функцией W и называются частными индексами W.

В данной работе найдены явные формулы для обобщенной факторизации Винера–Хопфа (включая формулы для частных индексов) в случае когда $W(t)$ – ограниченная, измеримая матрица–функция на γ, допускающая голоморфное продолжение в $\mathcal{D}_+$ или в $\mathcal{D}_-$. Матрица–функция такого типа не всегда допускает обобщенную факторизацию Винера–Хопфа. Необходимые и достаточные условия существования факторизации хорошо известны (см. [5]). Алгоритм, состоящий из конечного числа шагов, также известен ([5]). Ниже получены формулы в терминах рангов конечного числа блочных ганкелевых матриц. Компоненты этих матриц состоят из конечного числа степенных моментов матрицы–функции $W^{-1}(t)$. Ранее результаты подобного характера получены для полиномиальных матриц [6] и для непрерывных обратимых матриц–функций, допускающих мероморфное продолжение в $\mathcal{D}_+$ ([7]). Мы изучаем также задачу обобщенной обратимости произведения двух обобщенно–обратимых операторов. Найдены необходимые и достаточные условия существования и явная формула для вычисления обобщенного обратного упомянутого произведения.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Фредгольмовость и обобщенная обратимость. Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства. Всюду ниже через $\mathcal{L}$ (X, Y) будем обозначать пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из X в Y, наделенное обычной операторной нормой. Мы записываем $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$. Тождественный на X оператор обозначается через I_X или просто через I.

Будем говорить, что $A \in \mathcal{L}$ (X, Y) – оператор *Фредгольма*, если его образ замкнут, а размерности ядра и коядра конечномерны. Индекс Ind$A$ оператора Фредгольма есть разность размерностей ядра и коядра. Говорят, что оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ имеет обобщенный обратный $A^{(-1)}$, как только $A = AA^{(-1)}A$. Если дополнительно $A^{(-1)} = A^{(-1)}AA^{(-1)}$, то будем говорить, что $A^{(-1)}$ – обобщенный обратный к A в сильном смысле.

Наконец, мы обозначаем через X^n ($n \in \mathbb{N}$) линейное пространство n–векторов с компонентами из линейного пространства X и через $X^{n\times n}$ – линейное пространство квадратных матриц размерности n с элементами из X.

2.2. Матричное сцепление. Пусть $A \in \mathcal{L}$ (X_1, Y_1) и $B \in \mathcal{L}$ (X_2, Y_2). Мы говорим, что A и B *матрично сцеплены*, если существует обратный матричный оператор

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & A_{12} \\ & \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{matrix} \mathrm{X}_1 & & \mathrm{Y}_1 \\ \oplus & \to & \oplus \\ \mathrm{X}_2 & & \mathrm{Y}_2 \end{matrix},$$

обратный к которому имеет вид

$$\Psi : \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ & \\ B_{21} & B \end{bmatrix} : \begin{matrix} \mathrm{Y}_1 & & \mathrm{X}_1 \\ \oplus & \to & \oplus \\ \mathrm{Y}_2 & & \mathrm{X}_2 \end{matrix}.$$

Равенство $\Phi^{-1} = \Psi$ называют *соотношением сцепления* операторов A и B. Как только известны компоненты входящих в соотношение сцепления, то обратный, обобщенный обратный, ядро, образ и т.д. оператора A с помощью явных формул могут быть выражены в терминах соответствующих величин оператора B (см. [8]). В частности

$$KerA = B_{12}(KerB). \tag{2.1}$$

Далее, A имеет обобщенный обратный тогда и только тогда, когда B имеет обобщенный обратный. Если $B^{(-1)}$ – обобщенный обратный к B, то

$$A^{(-1)} = B_{11} - B_{12}B^{(-1)}B_{21} \tag{2.2}$$

является обобщенным обратным к A. Кроме того, A фредгольмов тогда и только тогда, когда B фредгольмов, и в этом случае

$$dimKerA = dimKerB, \quad IndA = IndB. \tag{2.3}$$

2.3. Факторизация. Пусть $\mathcal{D}_+$ ($\ni 0$) – область комплексной плоскости $\mathbf{C}$, полученная из ограниченной односвязной области $\mathcal{D}_0$ удалением попарно непересекающихся односвязных областей $\mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}_0$ $(j = 1, \dots, N)$ и $\mathcal{D}_- = \overline{\mathbf{C}} \backslash \overline{\mathcal{D}}_+$. Предполагается, что границы γ_j $(j = 0, \dots, N)$ областей $\mathcal{D}_j$ являются карлесоновыми кривыми. Мы допускаем, что контур $\gamma = \bigcup_{j=0}^{N} \gamma_j$ ориентирован в положительном направлении. Тогда сингулярный оператор Коши

$$S(\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau$$

является ограниченным в пространствах $L_p = L_p(\gamma)$, $1 < p < \infty$ (см. [9]). Рассмотрим проекторы $P_\pm = (I \pm S)/2$ и функциональные классы $L_p^+ = P_+ L_p$, $\overset{\circ}{L}{}_p^- = P_- L_p$, $L_p^- = \overset{\circ}{L}{}_p^- \oplus \{1\}$. Проекторы $\mathcal{P}_\pm \in \mathcal{L}(L_p^n)$ определим равенствами

$$\mathcal{P}_\pm [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^T = [P_\pm \varphi_1, \dots, P_\pm \varphi_n]^T.$$

Для матрицы–функции V, определенной на γ, оператор умножения $f \mapsto Vf$ ($f \in L_p^n$) обычно обозначается через VI и пользуются записью VIB = VB. Ясно, что VI $\in \mathcal{L}(L_p^n)$ для каждого $V \in L_\infty^{n\times n}$. Запись W $\in GL_\infty^{n\times n}$ означает, что $\mathrm{W}^{\pm 1} \in L_\infty^{n\times n}$. Обобщенная факторизация Винера–Хопфа (GWH–факторизация) матрицы–функции W $\in GL_\infty^{n\times n}$ относительно контура γ в пространстве L_p^n есть представление

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_-\Lambda \mathrm{W}_+$$

где факторы удовлетворяют условиям

1) $\mathrm{W}_+ \in (L_q^+)^{n\times n}$, $\mathrm{W}_+^{-1} \in (L_p^+)^{n\times n}$, $\mathrm{W}_- \in (L_p^-)^{n\times n}$, $\mathrm{W}_-^{-1} \in (L_q^-)^{n\times n}$ $(q = p/(p-1))$,

2) $\Lambda = diag\,[t^{æ_1},\cdots,t^{æ_n}]$, $æ_1 \le \cdots \le æ_n$ – целые числа, называемые частными индексами W,

3) $\mathrm{W}_-\mathcal{P}_+\mathrm{W}_-^{-1}I \in \mathcal{L}(L_p^n)$.

Число $æ = æ_1 + \cdots + æ_n$ называтеся суммарным индексом W.

2.4. Факторизация и сингулярные операторы. Хорошо известно, что если $T(\mathrm{W}) = \mathrm{W}\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-$ $(\tilde{T}(\mathrm{W}) = \mathcal{P}_+\mathrm{W}I + \mathcal{P}_-)$ – фредгольмов оператор в L_p^n, то матрица–функция W $\in L_\infty^{n\times n}$ допускает факторизацию в $L_p^n(1 < p < \infty)$ (см. [10],[1],[5]). При этих условиях

$$dimKerT(\mathrm{W}) = dimKer\tilde{T}(\mathrm{W}) = -\sum_{æ_i\le 0} æ_i, \quad IndT(\mathrm{W}) = Ind\tilde{T}(\mathrm{W}) = æ. \tag{2.4}$$

Положим $\mathrm{W}_j = t^{-j}\mathrm{W}(j \in \mathbb{Z})$. Если W допускает GWH–факторизацию, то пространства $KerT(\mathrm{W}_j)$ и $Ker\tilde{T}(\mathrm{W}_j)$ совпадают с множеством вектор–функций $\mathrm{W}_+^{-1}q - \mathrm{W}_-\Lambda q$ и $\mathrm{W}_+^{-1}q$, соответственно, где $q = [q_1,\cdots,q_n]^T$, а q_i – полином степени не более чем $j - æ_i - 1$ и равный нулю при $æ_i \ge j$ (см. [12]).

Допустим, что частные индексы матрицы–функции W принимают значения $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ и $\mu(\eta_j) = n_j$, где

$$\mu(j) = card\,\{i|\quad æ_i = j, \quad i = 1,\cdots,n\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем пользоваться следующими двумя предложениями, показывающими, что GWH–факторизация W может быть получена только лишь на основе пространств $\Omega_j = \mathcal{P}_+(KerT(\mathrm{W}_j)) = Ker\tilde{T}(\mathrm{W}_j)$.

Предложение 2.1. *Пусть матрица–функция $W \in GL_\infty^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию в L_p^n и $\eta_-, \eta_+ \in \mathbb{Z}$ – произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям : $\eta_- \leq \eta_1$, $\eta_+ \geq \eta_s$, $\eta_- < \eta_+$. Тогда для частных индексов $æ_1 \leq \cdots \leq æ_n$ матрицы–функции W имеют место следующие равенства*

$$æ_i = \eta_- + card\{j \mid \alpha_j - \alpha_{j-1} < i, \quad j = \eta_- + 1, \cdots, \eta_+\}, \quad i = 1, \cdots n, \qquad (2.5)$$

где $\alpha_j = dim\,\Omega_j$.

Доказательство. Из первого равенства (2.4) следует, что

$$\alpha_j = \sum_{m\leq j} (j-m)\mu(m), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \sum_{m\leq j} \mu(m), \qquad j \in \mathbb{Z}. \qquad (2.6)$$

Положим $n_0 = 0$. Для $n_0 + n_1 + \cdots + n_{l-1} < i \leq n_0 + n_1 + \cdots n_l$ имеем

$$card\{j \mid \sum_{m\leq j} \mu(m) < i, \quad j = \eta_-, \cdots, \eta_+ - 1\} = \eta_l - \eta_- = æ_i - \eta_-.$$

Отсюда, используя (2.6), мы получим (2.5). Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. *Пусть матрица–функция $W \in L_\infty^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Тогда пространства $\Omega_j (j \in \mathbb{Z})$ имеют следующие свойства :*

1. $\Omega_j = \{0\}, \quad j \leq \eta_1$.
2. $\Omega_{j+1} = \Omega_j + t\Omega_j, \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{\eta_1, \cdots, \eta_s\}$.

3. Пространства $\Omega_{\eta_m} + t\Omega_{\eta_m}$ имеют прямое дополнение Ξ_m в пространстве Ω_{η_m+1}, $dim\Xi_m = n_m$ $(m = 1, \cdots, s)$.

4. Для произвольного базиса $h_{m,1}, \cdots, h_{m,n_m}$ пространства Ξ_m $(m = 1. \cdots, s)$ и матриц–функций

$$U = [h_{11}, \cdots, h_{1,n_1}, h_{2,1}, \cdots, h_{s,n_s}], \quad \Lambda = diag[t^{æ_1}, \cdots, t^{æ_n}],$$

$$W_+ = U^{-1},\ W_- = WU\Lambda^{-1}$$

представление $W = W_-\Lambda W_+$ есть GWH–факторизацией матрицы–функции W.

Это утверждение доказано в [11].

2.5. Факторизация голоморфной матрицы–функции. Обозначим через $\mathcal{R}$ линеал рациональных функций с полюсами вне γ, а через $\mathcal{M}_\infty^\pm$ – класс функций $L_\infty^\pm + \mathcal{R}$.

Известно (см. теорему 3.15 [5]), что функция $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ $((L_\infty^-)^{n\times n})$ допускает GWH–факторизацию в $L_p^n(1 < p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ $((\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n})$. При этих условиях суммарный индекс æ матрицы-функции W равен $ind_+detW(ind_-detW)$, где $ind_+detW(-ind_-detW)$ – число нулей (с учетом кратностей) голоморфного продолжения функции $detW$ из контура γ в $\mathcal{D}_+(\mathcal{D}_-)$. Условие $(detW)^{-1} \in \mathcal{M}_\infty^+(\mathcal{M}_\infty^-)$ гарантирует конечность $ind_+detW(ind_-detW)$.

§3. ОБОБЩЕННЫЙ ОБРАТНЫЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

3.1. Матричное соотношение. Пусть X_1, X_2 – комплексные банаховы пространства, $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y), A_2 \in \mathcal{L}(Y, X_2)$, и пусть $A_i^{(-1)}(i = 1,2)$ – обобщенные обратные к A_i в сильном смысле. Мы имеем

$$X_1 = KerA_1 \oplus ImA_1^{(-1)}, \quad X_2 = KerA_2^{(-1)} \oplus ImA_2,$$

$$Y = KerA_1^{(-1)} \oplus ImA_1 = KerA_2 \oplus ImA_2^{(-1)}.$$

Рассмотрим следующие операторы :

$$\pi_{1,i} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerA_i \to \begin{matrix} KerA_i \\ \oplus \\ ImA_i^{(-1)} \end{matrix}, \qquad \sigma_{1,i} = [I, 0] : \begin{matrix} KerA_i \\ \oplus \\ ImA_i^{(-1)} \end{matrix} \to KerA_i,$$

$$\pi_{2,i} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerA_i^{(-1)} \to \begin{matrix} KerA_i^{(-1)} \\ \oplus \\ ImA_i \end{matrix}, \qquad \sigma_{2,i} = [I, 0] : \begin{matrix} KerA_i^{(-1)} \\ \oplus \\ ImA_i \end{matrix} \to KerA_i^{(-1)},$$

где $i = 1, 2$. Легко проверить следующие тождества (i=1,2) :

$$A_1A_1^{(-1)} = I_Y - \pi_{21}\sigma_{21}, \quad A_1^{(-1)}A_1 = I_{X_1} - \pi_{11}\sigma_{11},$$

$$A_2A_2^{(-1)} = I_{X_2} - \pi_{22}\sigma_{22}, \quad A_2^{(-1)}A_2 = I_Y - \pi_{12}\sigma_{12}, \tag{3.1}$$

$$A_i\pi_{1i} = A_i^{(-1)}\pi_{2i} = \sigma_{2i}A_i = \sigma_{1i}A_i^{(-1)} = 0, \quad \sigma_{1i}\pi_{1i} = I_{KerA_i}, \quad \sigma_{2i}\pi_{2i} = I_{KerA_i^{(-1)}}. \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. *Пусть* $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y), A_2 \in \mathcal{L}(Y, X_2)$ *и* $A_i^{(-1)}(i = 1,2)$ – *обобщенные обратные к* A_i *в сильном смысле. Тогда* $A_2A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *и*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{21}\pi_{12} \end{pmatrix} : \begin{matrix} KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix}$$

матрично сцеплены соотношением $\Phi^{-1} = \Psi$, *где*

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_2A_1 & \pi_{22} & A_2\pi_{21} \\ -\sigma_{11} & 0 & 0 \\ -\sigma_{12}A_1 & 0 & -\sigma_{12}\pi_{21} \end{pmatrix} : \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix} \to \begin{matrix} X_2 \\ \oplus \\ KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_1^{(-1)}A_2^{(-1)} & -\pi_{11} & -A_1^{(-1)}\pi_{12} \\ \sigma_{22} & 0 & 0 \\ \sigma_{21}A_2^{(-1)} & 0 & -\sigma_{21}\pi_{12} \end{pmatrix} : \begin{matrix} X_2 \\ \oplus \\ KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix}.$$

Доказательство совершается путем непосредственной проверки (используя формулы (3.1), (3.2)).

Ясно, что оператор B имеет обобщенный обратный тогда и только тогда, когда оператор $\sigma_{12}\pi_{12} : KerA_2 \to KerA_1^{(-1)}$ имеет обобщенный обратный. Если $(\sigma_{21}\pi_{12})^{(-1)}$ является обобщенным обратным к $\sigma_{21}\pi_{12}$, то

$$B^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma_{21}\pi_{12})^{(-1)} \end{pmatrix} : \begin{matrix} KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix} \to \begin{matrix} KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix}$$

является обобщенным обратным к B. В силу теоремы 2.1 гл.4 [1] оператор $\sigma_{21}\pi_{12}$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда линеал $KerA_2 + ImA_1$ замкнут в Y. Поскольку $KerA_2 + ImA_1 = \sigma_{21}(KerA_2) \oplus ImA_1$, то подпространства $KerA_2 + ImA_1$ и $\sigma_{21}(KerA_2)$ одновременно дополняемы, соответственно, в пространствах Y и $KerA_1^{(-1)}$. Нормально разрешимый оператор обобщенно обратим тогда и только тогда, когда его ядро и образ дополняемы (см. теорему 5.1 гл.4 [1]). Таким образом, пользуясь (2.2) и (3.2), мы приходим к следующей теореме :

Теорема 3.1. *Пусть* $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y), A_2 \in \mathcal{L}(Y, X_2)$ *и* $A_i^{(-1)}(i = 1,2)$ *является обобщенным обратным к* A_i *в сильном смысле. Тогда* $A_2A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *имеет обобщенный обратный тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия :*

1) Линеал $KerA_2 + ImA_1$ замкнут и дополняем в Y.

2) Подпространство $KerA_2 \cap ImA_1$ дополняемо в $KerA_2$.

Если эти условия выполнены, то обобщенный обратный $(A_2A_2)^{(-1)}$ может быть вычислен по формуле

$$(A_2A_1)^{(-1)} = A_1^{(-1)}A_2^{(-1)} - A_1^{(-1)}\pi_{12}(\sigma_{21}\pi_{12})^{(-1)}\sigma_{21}A_2^{(-1)}.$$

Оператор A_2A_1 фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия :

$$dimKerA_1 < \infty, \quad dimcokerA_2 < \infty,$$

$$dim(KerA_2 \cap ImA_1) < \infty, \quad dimY/(KerA_2 + ImA_1) < \infty.$$

Если выполнены последние условия, то

$$dimKer(A_2A_1) = dimKerA_1 + dim(KerA_2 \cap ImA_1),$$

$$dimcoker(A_2A_1) = dimcokerA_2 + dimY/(KerA_2 + ImA_1).$$

Заметим, что в специальном случае $X_1 = Y = X_2$ вторая часть теоремы есть простое следствие теоремы 1.12 из [5].

3.2 Пример 1. Допустим, что $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Пусть I_n – тождественный оператор в $\mathbf{C}^n$ и $H(W^{-1}) \in \mathcal{L}(L_\infty^n)$ – ганкелев оператор : $H(W^{-1}) = \mathcal{P}_-W^{-1}\mathcal{P}_+$. Оператор $T(W)^{(-1)} = T(W^{-1}) - H(W^{-1})$ является левым обратным к оператору $T(W)$ и $KerT(W) = \{0\}$. Из равенства $I - T(W)T(W)^{(-1)} = WH(W^{-1})$ следует, что оператор $WH(W^{-1})$ есть проектор на $KerT(W)^{(-1)}$ вдоль $ImT(W)$ и $KerT(W)^{(-1)} = WH(W^{-1})(L_p^n)$.

Пусть $\mathcal{L}_j (j \in \mathbf{N})$ – линейное пространство всех n–вектор–полиномов степени не более чем $j-1$:

$\mathcal{L}_j = \left\{ f = \sum\limits_{m=0}^{j-1} y_k t^k | y_k \in \mathbf{C}^n \right\}$. Для $j \in \mathbf{N}$ оператор $T(t^jI_n)$ является правым обратным к $T(t^{-j}I_n)$. Очевидно, что $KerT(t^{-j}I_n) = (1 - t^{-j})\mathcal{L}_j$ и $KerT(t^jI_n) = \{0\} (j \in \mathbf{N})$.

Рассмотрим операторы

$$\pi_1(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerT(t^{-j}I_n) \to \begin{matrix} KerT(t^{-j}I_n) \\ \oplus \\ ImT(t^jI_n) \end{matrix},$$

$$\pi_2(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerT(\mathrm{W})^{(-1)} \to \begin{matrix} KerT(\mathrm{W})^{(-1)} \\ \oplus \\ ImT(\mathrm{W}) \end{matrix},$$

$$\sigma_1(j) = [I, 0] : \begin{matrix} KerT(t^{-j}I_n) \\ \oplus \\ ImT(t^j I_n) \end{matrix} \to KerT(t^{-j}I_n),$$

$$\sigma_2(j) = [I, 0] : \begin{matrix} KerT(\mathrm{W})^{(-1)} \\ \oplus \\ ImT(\mathrm{W}) \end{matrix} \to KerT(\mathrm{W})^{(-1)}, \qquad j \in \mathbf{N}.$$

Из определения операторов $\sigma_2(j), \pi_1(j)$ следует, что произведение $\sigma_2(j)\pi_1(j)$ совпадает с оператором

$$F_j = \mathrm{W}H(\mathrm{W}^{-1})\Big|_{KerT(t^{-j}I_n)} : KerT(t^{-j}I_n) \to KerT(\mathrm{W})^{(-1)}, \qquad j \in \mathbf{N}.$$

В силу предложения 3.1 и $T(\mathrm{W}_j) = t(T^{-j}I_n)T(\mathrm{W})$ $(j \in \mathbb{Z})$ мы имеем следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Если* $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}$ *допускает* GWH*–факторизацию, то операторы* $T(W_j)$ *и* $-F_j (j \in \mathbf{N})$ *матрично сцеплены соотношением* $\Phi_j = \Psi_j^{-1}$, *где*

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} T(W_j) & T(t^{-j}I_n)\pi_2(j) \\ -\sigma_1(j)T(W) & -\sigma_1(j)\pi_2(j) \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^n_p \\ \oplus \\ KerT(W)^{(-1)} \end{matrix} \to \begin{matrix} L^n_p \\ \oplus \\ KerT(t^{-j}I_n) \end{matrix}$$

и

$$\Psi_j = \begin{pmatrix} T(W)^{(-1)}T(t^j I_n) & -T(W)^{(-1)}\pi_1(j) \\ \sigma_2(j)T(t^j I_n) & -F_j \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^n_p \\ \oplus \\ KerT(t^{-j}I_n) \end{matrix} \to \begin{matrix} L^n_p \\ \oplus \\ KerT(W)^{(-1)} \end{matrix}.$$

3.3. Пример 2. Предположим, что матрица–функция $\mathrm{W} \in (L^-_\infty)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Пусть $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$ является ганкелевым оператором : $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \mathcal{P}_+\mathrm{W}^{-1}\mathcal{P}_-$. Оператор $\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)} = \tilde{T}(\mathrm{W}^{-1}) - \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$ есть правый обратный к оператору $\tilde{T}(\mathrm{W})$ и $I - \tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)}\tilde{T}(\mathrm{W}) = \tilde{H}(\mathrm{W}^{(-1)})\mathrm{W}I$. Следовательно $Ker\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)} = \{0\}$ и оператор $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\mathrm{W}I$ является проектором на $Ker\tilde{T}(\mathrm{W})$ вдоль $Im\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)}$. В частности, $Ker\tilde{T}(\mathrm{W}) = Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Для $j \in \mathbf{N}$ мы имеем $Ker\tilde{T}(t^{-j}I_n) = \mathcal{L}_j$ и $Ker\tilde{T}(t^j I) = \{0\}$.

Рассмотрим операторы

$$\tilde{\pi}_1(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \to \begin{matrix} Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \\ \oplus \\ Im\tilde{T}(\mathrm{W}^{-1}) \end{matrix}, \qquad \tilde{\pi}_2(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{L}_{-j} \to \begin{matrix} \mathcal{L}_{-j} \\ \oplus \\ Im\tilde{T}(t^{-j}I_n) \end{matrix},$$

$$\bar\sigma_1(j) = [I,0] : \begin{matrix} Im\bar H(W^{-1}) \\ \oplus \\ Im\bar T(W)^{(-1)} \end{matrix} \to Im\bar H(W^{-1}),$$

$$\bar\sigma_2(j) = [I,0] : \begin{matrix} \mathcal{L}_{-j} \\ \oplus \\ Im\bar T(t^{-j}I_n) \end{matrix} \to \mathcal{L}_{-j},$$

$$\bar F_j = \bar\sigma_2(j)\bar\pi_1(j) = \bar\sigma_2(j)\Big|_{Im\bar H(W^{-1})} : Im\bar H(W^{-1}) \to \mathcal{L}_{-j}, \quad j \in -\mathbf{N}. \qquad (3.3)$$

Следующее предложение является следствием равенств $\bar T(W_j) = \bar T(W)\bar T(t^{-j}I_n)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и предложения 3.1.

Предложение 3.3. *Если $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию, то операторы $\bar T(W_j)$ и $-\bar F_j (j \in -\mathbf{N})$ матрично сцеплены соотношением $\bar\Phi_j = \bar\Psi_j^{-1}$, где*

$$\bar\Phi_j = \begin{pmatrix} \bar T(W_j) & \bar T(W)\bar\pi_2(j) \\ -\bar\sigma_1(j)\bar T(t^{-j}I_n) & -\bar\sigma_1(j)\bar\pi_2(j) \end{pmatrix} : \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ L_{-j} \end{matrix} \to \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ Im\bar H(W^{-1}) \end{matrix}$$

и

$$\bar\Psi_j = \begin{pmatrix} \bar T(t^jI_n)\bar T(W)^{(-1)} & -\bar T(t^jI_n)\bar\pi_1(j) \\ \bar\sigma_2(j)\bar T(W)^{(-1)} & -\bar F_j \end{pmatrix} : \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ Im\bar H(W^{-1}) \end{matrix} \to \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ \mathcal{L}_{-j} \end{matrix}, \quad j \in -\mathbf{N}.$$

§4. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ $(L_\infty^+)^{n\times n}$

4.1. Ядро ганкелева оператора $H(W^{-1})$. Допустим, что матрица–функция $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathcal{D}_+$ – нули, соответственно, с кратностями $m_1, \cdots, m_l$, голоморфного продолжения функции $det W$ из γ в $\mathcal{D}_+$ и $\text{æ} = ind_+ det W = m_1 + \ldots + m_l$. Определим полиномы $\Delta_k(z) (k = 0, \ldots, l-1)$ и матрицы $w_m (m \in \mathbb{Z})$ следующим образом :

$$\Delta_0(z) = \prod_{i=1}^{l}(z-\lambda_i)^{m_i} = z^{\text{æ}} + a_1 z^{\text{æ}-1} + \ldots + a_{\text{æ}},$$

$$\Delta_k = \prod_{i=k+1}^{l}(z-\lambda_i)^{m_i}, \quad k = 1, \ldots, l-1,$$

$$w_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma W^{-1}(t)t^{-m-1}dt, \quad m \in \mathbb{Z}. \qquad (4.1)$$

Через $Q_k(z, f, \lambda)$ обозначим многочлен Тейлора степени k в точке $z = \lambda$ голоморфной в некоторой окрестности $z = \lambda$ вектор (матрицы)–функции $f(z)$.

Предложение 4.1. *Пусть* $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}, W^{-1} \in (\mathcal{M}^+_\infty)^{n\times n}$ *и* $æ = ind_+ det W$. *Тогда*

1. Матрица–функция W^{-1} *допускает представление вида* $W^{-1} = V_+ + V_-$, *где* $V_+ \in (L^+_\infty)^{n\times n}, V_- \in \left(\overset{\circ}{L}{}^-_\infty\right)^{n\times n}$ *и* $V = \Delta_0 V_-$ *является полиномиальной матрицей степени не более чем* $æ - 1$.

2. Имеет место следующее равенство :

$$w_{-æ-m} + a_1 w_{-æ-m+1} + \ldots + a_æ w_{-m} = 0, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ясно, что $\tilde{W}_0 = \Delta_0 W^{-1} \in (L^+_\infty)^{n\times n}$. Для построения $V_\pm$ мы нуждаемся в матриц–функциях $\tilde{W}_k \in (L^+_\infty)^{n\times n}\,(k = 1, \cdots, l)$, определенных равенствами

$$\tilde{W}_{k-1}(z) = Q_{m_k-1}(z, \tilde{W}_{k-1}, \lambda_k) + (z - \lambda_k)^{m_k} \tilde{W}_k(z).$$

Ясно, что

$$W^{-1} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\Delta_{k-1}} Q_{m_k-1}(z, \tilde{W}_{k-1}, \lambda_k) + \tilde{W}_l.$$

Взяв $\tilde{W}_l = V_+$, получим наше первое утверждение.

Применяя теорему 1.24 из [5], получим

$$w_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma V_-(t) t^{m-1} dt, \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Сравнивая коэффициенты степенных рядов правой и левой части равенства $V = \Delta_0 V_-$ в точке $z = \infty$, получим (4.2). Предложение 4.1 доказано.

Рассмотрим отображения $\psi_j : \mathbf{C}^{nj} \to \mathcal{L}_j (j \in \mathbf{N})$, определенные равенством

$$\psi_j \bar{y} = \sum_{m=0}^{j-1} y_m t^m,$$

где $\bar{y} = [y_0, \cdots, y_{j-1}] \in \mathbf{C}^{nj}, \quad y_i \in \mathbf{C}^n, \quad i = 1, \cdots, j-1.$

Предложение 4.2. *Пусть* $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}, \quad W^{-1} \in (\mathcal{M}^+_\infty)^{n\times n}$ *и* $æ = ind_+ det W$. *Тогда*

$$\mathcal{L}_j \cap Ker H(W^{-1}) = \psi_j Ker K_j, \quad j \in \mathbf{N},$$

где

$$\mathcal{K}_j = \begin{pmatrix} w_{-1} & w_{-2} & \cdots & w_{-j} \\ w_{-2} & w_{-3} & \cdots & w_{-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{-æ} & w_{-æ-1} & \cdots & w_{-æ-j+1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для $y(t) \in \mathcal{L}_j \cap KerH(\mathrm{W}^{-1})$ имеем $\mathcal{P}_-(V_-y) = 0$. Разлагая вектор–функцию $\mathcal{P}_-(V_-y)$ в степенной ряд в бесконечности, получим

$$w_{-m}y_0 + w_{-m-1}y_1 + \ldots + w_{-m-j+1}y_{j-1} = 0, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{4.3}$$

где $[y_0, \cdots, y_{j-1}] = \bar{y} = \psi_j^{-1}y$. Следовательно $\bar{y} \in Ker\mathcal{K}_j$. С другой стороны, в силу (4.2) $\bar{y} = [y_0, \cdots, y_{j-1}] \in Ker\mathcal{K}_j$ удовлетворяет (4.3), т.е. $\mathcal{P}_-(V_-\psi_j\bar{y}) = 0$. Поэтому $\psi_j\bar{y} \in \mathcal{L}_j \cap KerH(\mathrm{W}^{-1})$. Предложение 4.2 доказано.

4.2. Основные теоремы. Следующая теорема является нашим основным результатом относительно частных индексов матрицы–функции $\mathrm{W} \in (L_\infty^+)^{n\times n}$.

Теорема 4.1. *Пусть* $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ *и* $æ = ind_+ detW > 0$. *Тогда частные индексы* W *равны*

$$æ_i = card\{\ j | n + r_{j-1} - r_j < i; \quad j = 1, \ldots, æ\}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

где $r_0 = 0$ *и* $r_j = rank\mathcal{K}_j$ *для* $j = 1, \cdots, æ$. *Если* $æ = 0$, *то* $æ_1 = æ_2 \cdots = æ_n = 0$.

Доказательство. Имеем $\alpha_j = dimKerT(\mathrm{W}_j) = dimKerF_j (j \in \mathbf{N})$ в силу подпункта 2.2 и предложения 3.2. Так как

$$KerF_j = KerH(\mathrm{W}^{-1}) \cap (1 - t^{-j})\mathcal{L}_j = (1 - t^{-j})(KerH(\mathrm{W}^{-1}) \cap \mathcal{L}_j), \quad j \in \mathbf{N},$$

то из предложения 4.2 имеем

$$KerF_j = (1 - t^{-j})\psi_j Ker\mathcal{K}_j, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{4.5}$$

Следовательно

$$\alpha_j = dimKer\mathcal{K}_j = nj - r_j, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{4.6}$$

Поскольку $KerT(\mathrm{W}) = \{0\}$, то из (2.4) имеем $0 \le \text{æ}_1 \le \ldots \le \text{æ}_n \le \text{æ}$. Положим $\eta_- = 0, \eta_+ = \text{æ}$. Поскольку $\alpha_0 = 0$, то из предложения 2.1 и (4.6) получим (4.4). Теорема доказана.

Теперь мы докажем, что факторы $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}$ могут быть построены с помощью базисов пространств $\mathcal{N}_j = \psi_j Ker\mathcal{K}_j (j \in \mathbf{N})$ с конечным числом значений j.

Теорема 4.2. *Пусть $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}, W^{-1} \in (\mathcal{M}^+_\infty)^{n\times n}, \text{æ} = ind_+ det W$, и пусть частные индексы $\text{æ}_1 \le \text{æ}_2 \le \ldots \le \text{æ}_n$ матрицы-функции W принимают значения $\eta_1 < \ldots < \eta_s$. Тогда пространства $\mathcal{N}_j (j \in \mathbf{N})$ имеют следующие свойства :*

1.$\mathcal{N}_j = \{0\}$ для $j \le \eta_1$ и $\mathcal{N}_{j+1} = \mathcal{N}_j + t\mathcal{N}_j$ для $j \in \mathbf{N} \setminus \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$.

2. Каждое пространство $\mathcal{N}_{\eta_m} + t\mathcal{N}_{\eta_{m-1}+1}, \quad m = 1, \ldots, s$ имеет прямое дополнение Θ_m в пространстве $\mathcal{N}_{\eta_m+1}$ размерности $\mu(\eta_m) = n_m$. Здесь $\eta_0 = 0$ и $\mathcal{N}_0 = \{0\}$.

3. Для произвольного базиса $X_{m,1}, \cdots, X_{m,n_m}$ пространства Θ_m $(m = 1, \cdots, s)$ и матриц–функций

$$U = \left[X^T_{1,1}, \ldots, X^T_{1,n_1}, X^T_{2,1}, \ldots, X^T_{s,n_s}\right],$$

$$W_- = \left[t^{-\eta_1} X^T_{1,1}, \ldots, t^{-\eta_1} X^T_{1,n_1}, t^{-\eta_2} X^T_{2,1}, \ldots, t^{-\eta_s} X^T_{s,n_s}\right],$$

$$W_+ = U^{-1} W, \qquad \Lambda = diag\left[t^{\text{æ}_1}, \ldots, t^{\text{æ}_n}\right],$$

представление $W = W_- \Lambda W_+$ есть GWH–факторизация матрицы–функции W.

Доказательство. В силу подпункта 2.2 и предложения 3.2

$$KerT\left(\mathrm{W}_j\right) = T\left(\mathrm{W}\right)^{(-1)}\left(KerF_j\right) =$$

$$= \mathrm{W}^{-1}\mathcal{P}_+\left(KerF_j\right) + \mathcal{P}_-\left(KerF_j\right) - H\left(\mathrm{W}^{-1}\right)\left(KerF_j\right), \quad j \in \mathbf{N}.$$

Поэтому из предложения 4.2 и равенства (4.5) имеем

$$\Omega_j = \mathcal{P}_+\left(KerT\left(\mathrm{W}_j\right)\right) = \mathcal{P}_+\mathrm{W}^{-1}\mathcal{P}_+\left(KerF_j\right) = \mathrm{W}^{-1}\mathcal{N}_j, \qquad j \in \mathbf{N}.$$

Остается применить предложение 2.2. Теорема 4.2 доказана.

§5. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ $(L_\infty^-)^{n\times n}$

5.1. Некоторые свойства ганкелева оператора $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Пусть матрица-функция $\mathrm{W} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию (т.е. $\mathrm{W}^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$), и пусть точки $\nu_1, \dots, \nu_l \in \mathcal{D}$ ($\nu_i \neq \infty$) – нули, соответственно, с кратностями $m_1, \dots, m_l$ ($m_i > 0$) голоморфного продолжения из контура γ в $\mathcal{D}_-det\mathrm{W}$ функции $det\mathrm{W}$. Обозначим через m_0 порядок нуля $det\mathrm{W}$ в ∞. Ясно, что $\text{æ} = -ind_-det\mathrm{W} = m_0 + m_1 + \dots + m_l$. Матрицы $w_m (m \in \mathbb{Z})$ определим равенствами (4.1). Рассмотрим также функции $\Delta(z), \Delta_-(z)$:

$$\Delta_-(z) = \prod_{i=1}^{l}(z-\nu_i)^{m_i} = z^{\text{æ}_0} + c_1 z^{\text{æ}_0-1} + \dots + c_{\text{æ}_0}, \qquad \Delta(z) = z^{-m_0}\Delta_-(z),$$

где $\text{æ}_0 = \text{æ} - m_0$.

Предложение 5.1. *Пусть $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ и $\text{æ} = -ind_-detW$. Тогда*

1) Матрица–функция W^{-1} допускает представление $W^{-1} = V_+ + V_-$, где $V_+ \in (L_\infty^+)^{n\times n}$, $V_- \in (\overset{\circ}{L}{}_\infty^-)^{n\times n}$, и матрица–функция $V = \Delta_- V_+$ является полиномиальной со степенью не выше чем æ.

2) Существуют $b_1, \dots, b_{\text{æ}} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$-w_{\text{æ}+m} = b_1 w_m + b_2 w_{m+1} + \dots + b_{\text{æ}} w_{\text{æ}+m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\mathrm{W}}_0 = z^{-\text{æ}}\Delta \mathrm{W}^{-1} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$. Определим матрицы–функции $\tilde{\mathrm{W}}_k, V_- \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ ($k = 1, \dots, l$) следующими равенствами :

$$\tilde{\mathrm{W}}_{k-1}(z) = Q_{m_k-1}\left(z, \hat{\mathrm{W}}_{k-1}, \nu_k\right) + (z-\nu_k)^{m_k}\tilde{\mathrm{W}}_k(z), \qquad k = 1, \cdots, l,$$

$$\tilde{\mathrm{W}}_l(z) = Q_{\text{æ}}(z, \hat{\mathrm{W}}_l, \infty) + z^{-\text{æ}}V_-(z).$$

Представляя W^{-1} через V_-, мы получим доказательство нашего первого утверждения. По теореме 1.24 из [5]

$$w_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma V_+(t)t^{-m-1}dt, \quad m = 0, 1, \cdots \tag{5.2}$$

Сравнивая коэффициенты степенных рядов правой и левой частей равенства $V = \Delta_- V_+$ в $z = 0$, находим

$$w_{\text{æ}-\text{æ}_0+m} + c_1 w_{\text{æ}-\text{æ}_0+m+1} + \dots + c_{\text{æ}_0} w_{\text{æ}+m} = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Если $\varkappa_0 > 0$ ($m.e.l > 0$), то $c_{\varkappa_0} = (-1)^l \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_l \neq 0$ и (5.3) влечет (5.1). Если $\varkappa_0 = 0$, то $w_{\varkappa+m} = 0$ ($m \in \mathbf{N}$) и (5.1) снова имеет место. Предложение доказано.

Пусть $\bar{\mathcal{L}}_j$ ($j \in -\mathbf{N}$) – линейное пространство вектор–функций $f(z)$ вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{-j} y_k z^{-k} \qquad (y_m \in \mathbf{C}^n, m = 1, \ldots, -j).$$

Определим отображения $\bar{\psi}_j : \mathbf{C}^{-nj} \to \bar{\mathcal{L}}_j$ ($j \in -\mathbf{N}$), взяв

$$\bar{\psi}_j \bar{y} = \sum_{k=1}^{-j} y_k t^{-k},$$

где $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_{-j}] \in \mathbf{C}^{-nj}$, $y_m \in \mathbf{C}^n$, $m = 1, \ldots, -j$. Рассмотрим матрицы

$$\bar{\mathcal{K}}_j = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_\varkappa \\ w_2 & w_3 & \ldots & w_{\varkappa+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{-j} & w_{-j+1} & \ldots & w_{-j+\varkappa-1} \end{pmatrix}, \quad j \in -\mathbf{N}.$$

Предложение 5.2. Пусть $\mathrm{W} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $\mathrm{W}^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ и $\varkappa = -ind\_det\mathrm{W}$. Тогда

1) $Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \bar{H}(W^{-1})(\bar{\mathcal{L}}_{-\varkappa})$,

2) $Ker\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) \cap \bar{\mathcal{L}}_{-\varkappa} = \bar{\psi}_{-\varkappa}(Ker\bar{\mathcal{K}}_{-\varkappa})$,

3) $\varkappa = dimIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = rang\bar{\mathcal{K}}_{-\varkappa}$.

Доказательство. Пусть $f \in (\overset{\bullet}{L}{}_p^-)^n$. Определим $f_0 \in (L_p^-)^n$ и $f_k \in (\overset{\bullet}{L}{}_p^-)^n$ ($k = 1, \ldots, l$) равенствами

$$f(z) = Q_{\varkappa-1}(z, f, \infty) + z^{-\varkappa} f_0(z),$$

$$f_{k-1}(z) = Q_{m_k-1}(z, f_{k-1}, \nu_k) + (z - \nu_k)^{m_k} f_k(z), \quad k = 1, \ldots, l.$$

Легко видеть, что $f(z) = q(z) + z^{-\varkappa}\Delta_-(z) f_l(z)$, где $q \in \bar{\mathcal{L}}_{-\varkappa}$. Пользуясь предложением 5.1, получим $\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})f = \bar{H}(V_+)q = \bar{H}(\mathrm{W}^{-1})q$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_\varkappa], y_k \in \mathbf{C}^n (k = 1, \ldots, \varkappa)$ и $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{\varkappa} y_k t^{-k}$. Степенной ряд рациональной вектор–функции $\widetilde{H}\mathrm{W}^{-1}y$ в $z = 0$ имеет вид

$$(\widetilde{H}(\mathrm{W}^{-1})y)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (w_{m+1}y_1 + w_{m+2}y_2 + \ldots + w_{m+\varkappa}y_\varkappa) z^m.$$

Следовательно, если $y \in Ker\bar{H}(W^{-1})$, то $\bar{y} \in Ker\bar{\mathcal{K}}_{-æ}$. С другой стороны, если $\bar{y} \in Ker\bar{\mathcal{K}}_{-æ}$, то благодаря (5.1) имеем $\bar{H}(W^{-1})y = 0$, дающее наше второе утверждение. Поскольку оператор $\bar{T}(W)$ обратим справа, то из (2.4), подпунктов 2.5 и 3.3 имеем $dimKer\bar{T}(W^{-1}) = Ind\bar{T}(W^{-1}) = æ = dimIm\bar{H}(W^{-1})$.

Из утверждения 2) следует, что $dimKer(H(W^{-1})|_{\bar{\mathcal{L}}_{-æ}}) = dimKer\bar{\mathcal{K}}_{-æ}$. Отсюда $dimIm(H(W^{-1})|_{\bar{\mathcal{L}}_{-æ}}) = rang\bar{\mathcal{K}}_{-æ}$. Из утверждения 1) мы заключаем, что $dimIm\left(H(W^{-1})|_{\bar{\mathcal{L}}_{-æ}}\right) = dimImH(W^{-1})$. Предложение доказано.

5.2 Формулы для частных индексов. Для доказательства основного результата относительно частных индексов $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ мы нуждаемся в следующем предложении :

Предложение 5.3. *Пусть $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$, $æ = -ind\_detW$ и $\bar{F}_j$ $(j \in -\mathbf{N})$ определена равенством (3.3). Тогда*

1) $Im\bar{F}_j = \psi_{-j}\left(Im\bar{\mathcal{K}}_j\right), \quad j \in -\mathbf{N}$,

2) $Ker\bar{F}_j = \bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j), \quad j \in -\mathbf{N}$,

3) $\Omega_j = Ker\bar{T}(W_j) = t^j Ker\bar{F}_j, \quad j \in -\mathbf{N}$.

Доказательство. Пусть $j \in -\mathbf{N}$ и $g \in Im\bar{H}(W^{-1})$. Из 1) предложения 5.2 мы заключаем, что существует $\bar{y} = [y_1, \dots y_æ] \in \mathbf{C}^{næ}$ $(y_1, \dots y_æ \in \mathbf{C}^n)$ такой, что $g = \bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-æ}\bar{y}$. Из предложения 5.1 следует, что $g = \mathcal{P}_+V_+\bar{\psi}_{-æ}\bar{y} \in \mathcal{R}^n \cap (L_p^+)^n$. Теперь, с помощью (5.2), степенной ряд вектор–функции $g(z)$ в окрестности $z = 0$ может быть записан в виде

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(w_{k+1}y_1 + w_{k+2}y_2 + \ldots + w_{k+æ}y_æ)z^k.$$

Положим

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{-j-1}(w_{k+1}y_1 + w_{k+2}y_2 + \ldots + w_{k+æ}y_æ)\,t^k, \qquad (j \in -\mathbf{N}).$$

Вектор–функция $h = t^{-j}(g - g_j)$ принадлежит $(L_\infty^+)^n$ и $\bar{T}(t^{-j}I_n)h = \mathcal{P}_+t^{-j}h = g-$ $-g_j$, т.е. $g - g_j \in Im\bar{T}(t^{-j}I_n)$. Следовательно, $g_j = \bar{F}_j g$ $(j \in -\mathbf{N})$ и доказательство 1), 2) завершено.

Если $g \in Ker\bar{F}_j$ $(j \in -\mathbf{N})$, то

$$g(z) = t^{-j}\sum_{k=-j}^{\infty}(w_{k+1}y_1 + w_{k+2}y_2 + \ldots + w_{k+æ}y_æ)t^{k+j}$$

в окрестности $z = 0$ и поэтому $t^j g(z) \in (L_p^+)^n$. В силу предложения 3.3 и формулы (2.1)

$$\Omega_j = \bar{T}\left(t^j I_n\right)\bar{\pi}_j\left(Ker\bar{F}_j\right) = \mathcal{P}_+ t^j I\left(KerF_j\right) = t^j KerF_j.$$

Предложение доказано.

Теорема 5.1. *Пусть* $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in \left(\mathcal{M}_\infty^-\right)^{n\times n}$ *и* $\text{æ} = -ind\_detW > 0$. *Тогда частные индексы* $\text{æ}_1 \le \ldots \le \text{æ}_n$ *матрицы-функции* W *равны*

$$\text{æ}_i = -\text{æ} + card\{\quad j| \quad r_{j-1} - r_j < i; \quad j = -\text{æ}+1,\ldots,0\}, \tag{5.4}$$

где $r_j = rank\bar{\mathcal{K}}_j$ $(j = -\text{æ},\ldots,-1)$ *и* $r_0 = 0$. *Если* $\text{æ} = 0$, *то* $\text{æ}_1 = \text{æ}_2 = \ldots = \text{æ}_n = 0$.

Доказательство. Из 3) прделожения 5.2 и 1) предложения 5.3 следует, что $dimKer\bar{F}_j = \text{æ} - r_j$ $(j \in -\mathbb{N})$. Пользуясь предложением 3.3 и (2.3), получим $dim\Omega_j = \text{æ} - r_j$. Вспомним, что $dim\Omega_0 = dimIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \text{æ} - r_0$. Поскольку оператор $\bar{T}(\mathrm{W})$ обратим справа, то из (2.4) имеем $-\text{æ} \le \text{æ}_1 \le \ldots \le \text{æ}_n \le 0$. Взяв $\eta_- = -\text{æ}$, $\eta_+ = 0$, с помощью предложения 2.1 получим (5.4). Теорема доказана.

5.3 Формулы для факторов. Определим $\tau \in \mathcal{L}\left(\mathbf{C}^{n\text{æ}}\right)$ согласно формуле $\tau\bar{y} = [-b_1 y_\text{æ}, y_1 - b_2 y_\text{æ}, \ldots, y_{\text{æ}-1} - b_\text{æ} y_\text{æ}]$, где $\bar{y} = [y_1,\ldots,y_\text{æ}]$ $(y_i \in \mathbf{C}^n, i = 1,\ldots,\text{æ})$.

Предложение 5.4. *Пусть* $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in \left(\mathcal{M}_\infty^-\right)^{n\times n}$ *и* $\text{æ} = -ind\_detW$. *Тогда*

1) $\tau Ker\bar{\mathcal{K}}_j \subset Ker\bar{\mathcal{K}}_{j+1}, \quad j = -\text{æ},\ldots,-2,$

2) $\bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(\bar{y}) = t\bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(\tau\bar{y}) + \bar{\mathcal{K}}_{-1}\bar{y}$ *для каждого* $\bar{y} \in C^{n\text{æ}}$,

3) $t\bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(\tau Ker\bar{\mathcal{K}}_j) = \bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j)$, $j = -\text{æ},\ldots,-1$.

Доказательство. Пусть $\bar{y} = [y_1,\ldots,y_\text{æ}]$ и $\bar{h} = \tau\bar{y} = [h_1,\ldots,h_\text{æ}]$ $(y_i, h_i \in \mathbf{C}^n, i = 1,\ldots,\text{æ})$. Из определения τ и (5.1) имеем

$$w_i h_1 + w_{i+1}h_2 + \ldots + w_{i+\text{æ}-1}h_\text{æ} = w_{i+1}y_1 + w_{i+2}y_2 + \ldots + w_{i+\text{æ}}y_\text{æ}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Легко проверить, что утверждение 1) следует из (5.5). Разлагая вектор-функции $\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(\bar{y})$, $\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(\bar{h})$ в степенные ряды вокруг $z = 0$ и пользуясь (5.5), будем иметь

$$t\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\text{æ}}(\bar{h}) = t\sum_{s=0}^{\infty}(w_{s+1}h_1 + w_{s+2}h_2 + \ldots + w_{s+\text{æ}}h_\text{æ})t^s =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+1}y_1 + w_{s+2}y_2 + \ldots + w_{s+\text{æ}}y_{\text{æ}})t^s = \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(\bar{y}) - (w_1y_1 + \ldots + w_{\text{æ}}y_{\text{æ}}),$$

откуда следуют 2) и 3). Предложение 5.4 доказано.

Предложение 5.5.. *Пусть* Θ_j $(j = -\text{æ}, \ldots, -1)$ *– линейные пространства, удовлетворяющие условиям*

$$(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) \oplus \Theta_j = Ker\tilde{\mathcal{K}}_{j+1}, \qquad j = -\text{æ}, \ldots, -2;$$

$$(Ker\tilde{\mathcal{K}}_{-1} + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_{-1}) \oplus \Theta_{-1} = \mathbf{C}^{n\text{æ}}. \tag{5.6}$$

Тогда

$$\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_{j+1}) =$$

$$= \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) \oplus \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(\Theta_j) \quad j = -\text{æ}, \ldots, -1 \tag{5.7}$$

и $dim\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(\Theta_j) = dim\Theta_j$.

Доказательство. Пусть $f \in \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) \cap \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(\Theta_j)$ $(j = -\text{æ}, \ldots, -1)$. Существуют $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \in Ker\tilde{\mathcal{K}}_j$ и $\bar{y} \in \Theta_j$ такие, что $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}$ $(\bar{y} - \bar{h}_1 - \tau\bar{h}_2) = 0$. Из второго утверждения предложения 5.2 заключаем, что $\bar{y} - \bar{h}_1 - \tau\bar{h}_2 \in Ker\tilde{\mathcal{K}}_j$. Отсюда $\bar{y} \in Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j$. Поэтому $\bar{y} = 0$ и $f = 0$. Равенства (5.7) доказаны.

Пусть $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \Theta_j$ и $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = 0$. Из 2) предложения 5.2 имеем

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \in \Theta_j \cap (Ker\mathcal{K}_j \cap \tau Ker\mathcal{K}_j).$$

Следовательно, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. Доказательство завершено.

Теорема 5.2. *Пусть* $W \in (L^-_\infty)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}^-_\infty)^{n\times n}$ *и* $\text{æ} = -ind\_detW$, *и пусть частные индексы* $\text{æ}_1 \leq \ldots \leq \text{æ}_n$ *матрицы–функции* W *принимают значения* $\eta_1 < \ldots < \eta_s$ *с* $\mu(\eta_i) = n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. *Если пространства* Θ_j $(j = -\text{æ}, \ldots, -1)$ *определены с помощью (5.6) и пространство* Θ_0 *есть прямое дополнение* $Im\tilde{\mathcal{K}}_{-1}$ *в* $\mathbf{C}^n$, *т.е.* $Im\tilde{\mathcal{K}}_{-1} \oplus \Theta_0 = \mathbf{C}^n$, *то* $\Theta_i = \{0\}$ *для* $i \notin \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ *и* $dim\Theta_{\eta_i} = n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Пусть $\{\bar{y}_{\eta_i,1}, \ldots, \bar{y}_{\eta_i,n_i}\}$ $(i = 1, \ldots, s)$ *– базис пространства* Θ_{η_i}. *Если вектор–функции* $u_{\eta_i,j}$ $(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i)$ *и матрицы–функции* U, W_+, Λ, W_- *определены следующим образом :*

$$u_{\eta_i,j} = t^{\eta_i+1}\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\text{æ}}\bar{y}_{\eta_i,j} \qquad \text{при} \quad \eta_i < 0; \quad i = 1, \ldots, s; \quad j = 1, \ldots, n_i,$$

$$u_{0,j} = \bar{y}_{0,j} \quad if \quad \eta_s = 0; \quad j = 1, \ldots, n_s,$$

$$U = \left[u^T_{\eta_1,1}, \ldots, u^T_{\eta_1,n_1}, u^T_{\eta_2,1}, \ldots, u^T_{\eta_s,n_s}\right],$$

$$W_+ = U^{-1}, \quad \Lambda = diag\left[t^{æ_1}, \ldots, t^{æ_n}\right], \quad W_- = WW_+^{-1}\Lambda^{-1},$$

то представление $W = W_-\Lambda W_+$ является GWH–факторизацией матрицы–функции W.

Доказательство. Из 2), 3) предложения 5.3 и 1) предложения 5.4 имеем

$$\Omega_j = t^j \bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j) = t^{j+1}\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(\tau Ker\bar{\mathcal{K}}_j), \quad j = -æ, \ldots, -1.$$

В силу 1) предложения 5.2

$$\Omega_0 = Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(\mathbf{C}^{næ}).$$

Следовательно

$$\Omega_j + t\Omega_j = t^{j+1}\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\bar{\mathcal{K}}_j), \quad j = -æ, \ldots, -1.$$

Из предложения 5.5 пространство $\Xi_j = t^{j+1}\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(\Theta_j)$ $(j = -æ, \ldots, -1)$ является прямым дополнением пространства $\Omega_j + t\Omega_j$ в Ω_{j+1}. Более того, $dim\,\Xi_j = dim\Theta_j$ $(j = -æ, \ldots, -1)$.

Из подпункта 2.5 и (2.4) следует, что $\dim\Omega_1 = n + æ$. Так как $\mathbf{C}^n \subset \Omega_1$ и $t\Omega_0 \subset \Omega_1$, то

$$\Omega_1 = \mathbf{C}^n \oplus t\Omega_0 = \mathbf{C}^n \oplus tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}). \tag{5.8}$$

С другой стороны, из предложения 5.4 следует, что $Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) + tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$ совпадает с пространством вектор–функций вида $t\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-æ}(\tau\bar{y} + \bar{h}) + \bar{\mathcal{K}}_{-1}\bar{y}$, где $\bar{y}, \bar{h} \in \mathbf{C}^{næ}$. Взяв $\bar{h} = -\tau\bar{y}$, получим $Im\bar{\mathcal{K}}_{-1} \subset Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) + tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Следовательно

$$\Omega_0 + t\Omega_0 = Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) + tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = Im\bar{\mathcal{K}}_{-1} \oplus t\Omega_0.$$

Сравнивая последнее тождество с (5.8), заключаем, что пространство $\Xi_0 = \Theta_0$ – прямое дополнение $\Omega_0 + t\Omega_0$ в Ω_1.

С помощью предложения 2.2 получим доказательство теоремы.

5.4. Замечание. Из определения $\mathcal{M}^+_\infty(\mathcal{M}^-_\infty)$ следует, что для каждой мероморфной матрицы–функции W, удовлетворяющей условию $W^{\pm 1} \in (\mathcal{M}^+_\infty)^{n\times n}$ $(W^{\pm 1} \in (\mathcal{M}^-_\infty)^{n\times n})$, существует скалярная функция $f \in \mathcal{R}$, не исчезающая на γ и удовлетворяющая условию $fW \in (L^+_\infty)^{n\times n}$ $(fW \in (L^-_\infty)^{n\times n})$ (см. [5]). Это замечание позволяет редуцировать задачу GWH–факторизации мероморфной матрицы–функции W к задаче GWH–факторизации голоморфной матрицы–функции fW.

ABSTRACT. The paper presents some explicit formulas for generalized Wiener–Hopf factorization of bounded holomorphic matrix-functions, relative to a closed contour. Formulas for the partial indices are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. C. Gohberg, N. Krupnik, One Dimensional Linear Singular Integral Equations, vol. I, Introduction, vol. II, General Theory and Applications, OT, vol. 53 — 54, Birkauser Verlag, Basel, 1992.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами от разности аргументов", УМН, т. 13, вып. 2, стр. 3 – 72, 1958.
3. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, "Уравнение в свертках и проекционные методы их решения", Наука, М., 1971.
4. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Гамильтонов подход в теории солитонов, Наука, М., 1986.
5 G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Function, Akademic - Verlag, Berlin, 1987.
6. I. C. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 — 277, 1978.
7. В. М. Адуков, "Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц–функций", Алгебра и анализ, т. 4, № 1, стр. 54 – 74, 1992.
8. H. Bart, I. C. Gohberg, M. A. Kaashoek, "The coupling method for solving integral equations", OT 12, pp. 39 — 73, Birkhauser, Basel, 1984.
9. G. David, L'integrale de Cauchy sur le Courbes Rectifiables, Prepublications Univ. Paris - Sud., Dept. Math., 82T05, 21 pp., 1982.
10. И. Б. Симоненко, "Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана", Изв. АН СССР, т. 2, № 5, стр. 1091 – 1099, 1968.
11. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "Метод конструктивного построения факторизации для одного класса матриц–функций", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 1 — 15, 1993.
12. K. Clancey, I. C. Gohberg, Factorization of Matrix–Functions and Singular Integral Operators, OT, vol. 3, Birkauser, Basel, 1981.

14 ноября 1996

Институт математики
НАН Армении

ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ

А. О. Карапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

Пусть M_{mn} – пространство всех комплексных $m \times n$–матриц. Через μ_{mn} обозначим меру Лебега в пространстве $M_{mn} \cong \mathbf{C}^{mn}$. При $1 \le m \le n$ любая матрица $\omega \in M_{mn}$ может быть записана как $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in M_{mm}$, $\omega_2 \in M_{m,n-m}$. В работе рассматриваются матричные области Зигеля $\pi_{mn} = \{(\omega_1, \omega_2) \in M_{mn} : \mathrm{Im}\, \omega_1 - \omega_2\omega_2^*$ положительно определена$\}$, где ω^* – эрмитово сопряженная к ω матрица, а также классы $H_\alpha^p(\pi_{mn})$ голоморфных в π_{mn} функций, принадлежащих пространству $L^p\{\pi_{mn};\ [\det(\mathrm{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega)\}$. Установлены весовые интегральные представления классов $H_\alpha^p(\pi_{mn})$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

0.1. В [1], [2] М. М. Джрбашян ввел и изучил классы $H^p(\alpha)$ $(1 \le p < \infty,\ \alpha > -1)$ голоморфных функций $f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{D} = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < 1\}$ с конечным интегралом

$$\iint_{\mathbf{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha \, d\xi \, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Классы $H^p(\alpha)$ намного шире, чем хорошо известные классы H^p. Одно важное свойство, установленное в [1], [2], может быть сформулировано следующим образом :

Теорема 0.1. *Каждая функция $f \in H^p(\alpha)$ $(1 \le p < \infty,\ \alpha > -1)$ имеет интегральное представление*

$$f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \iint_{\mathbf{D}} \frac{f(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\zeta})^{2+\alpha}} \, d\xi \, d\eta, \quad z \in \mathbf{D}. \tag{0.1}$$

Интегральный оператор, порожденный правой частью (0.1), является ортогональной проекцией пространства $L^2\{\mathbf{D}; (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\xi\, d\eta\}$ на свое подпространство $H^2(\alpha)$, $\alpha > -1$.

В [1], [2] этот основополагающий результат был применен к построению теории факторизации мероморфных функций в $\mathbb{D}$. Кроме того, в обзорах М. М. Джрбашяна [3], [4] и в монографии А. Э. Джрбашяна и Ф. А. Шамояна [5] содержится много других применений теоремы 0.1 к различным вопросам комплексного анализа.

В последующих исследованиях были установлены аналоги формулы (0.1) для других областей (включая многомерные). В следующем пункте содержится обзор соответствующих результатов.

0.2. Через M_{mn} обозначим множество всех комплексных $m \times n$–матриц. Через $\zeta^* \in M_{nm}$ обозначим эрмитово сопряженную к $\zeta \in M_{mn}$ матрицу, через I^m – единичную матрицу в M_{mm}, $m \geq 1$ и через μ_{mn} – меру Лебега в пространстве $M_{mn} \cong \mathbb{C}^{mn}$. При $m, n \geq 1$ и для комплексного числа β с $\operatorname{Re}\beta > -1$ положим

$$c_{mn}(\beta) = \frac{1}{\pi^{mn}} \prod_{l=1}^{m+n} \Gamma(l+\beta) \left[\prod_{k=1}^{m} \Gamma(k+\beta) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(j+\beta) \right]^{-1}.$$

Область

$$R_{mn} = \{\zeta \in M_{mn} : \ I^m - \zeta\zeta^* \text{ положительно определена}\}$$

назовем *обобщенным единичным кругом* в M_{mn}. Заметим, что R_{1n} есть единичный шар $B_n = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| < 1\}$. Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Обозначим через $L^p_\alpha(R_{mn})$ пространство всех комплекснозначных измеримых функций $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{mn}$ с конечной "нормой"

$$\|f\|_{p,\alpha} \stackrel{def}{=} \left(\int_{R_{mn}} |f(\zeta)|^p [\det(I^m - \zeta\zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{mn}(\zeta) \right)^{1/p} \tag{0.2}$$

и положим

$$H^p_\alpha(R_{mn}) = \{f \in L^p_\alpha(R_{mn}) : \ f \text{ голоморфна в } R_{mn}\}.$$

Далее, если $1 \leq p < \infty$ и $\alpha > -1$, то будем писать $\beta \succ (p, \alpha)$, если $\beta \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\beta > \frac{\alpha+1}{p} - 1, \quad \text{если } 1 < p < \infty, \\ &\operatorname{Re}\beta \geq \alpha, \quad \text{если } p = 1. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Теорема 0.2. а) *Если* $1 \le p < \infty$, $\alpha > -1$, *то каждая функция* $f \in H^p_\alpha(R_{mn})$ *при* $m, n \ge 1$ *имет интегральное представление*

$$f(z) = c_{mn}(\beta) \int_{R_{mn}} \frac{f(\zeta)[\det(I^m - \zeta\zeta^*)]^\beta}{[\det(I^m - z\zeta^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\zeta), \tag{0.4}$$

где $\beta \succ (p, \alpha)$, $z \in R_{mn}$.

б) Если $1 \le p < \infty$, $\alpha > (p-1)\min\{m,n\} - p$ *и комплексное число* β *удовлетворяет условию*

$$Re\,\beta > \frac{\alpha + \min\{m,n\}}{p} - 1, \quad m, n \ge 1,$$

то интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.4), является ограниченным проектором $L^p_\alpha(R_{mn})$ *на* $H^p_\alpha(R_{mn})$.

в) Если $\alpha > -1$, *то интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.4) (с* $\beta = \alpha$*), есть ортогональный проектор* $L^2_\alpha(R_{mn})$ *на* $H^2_\alpha(R_{mn})$.

Заметим, что для $m = n = 1$ (когда $R_{mn} = R_{11}$ есть единичный диск $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$) утверждение а) с $\beta = \alpha$ и утверждение в) следуют из теоремы 0.1. Для $m, n \ge 1$ утверждение а) с $\beta = \alpha = 0$ и утверждение в) с $\alpha = 0$ были установлены Л. К. Хуа [6].

В случае $m = 1$, $n \ge 1$, когда $R_{mn} = R_{1n}$ есть единичный шар, $B_n \subset \mathbf{C}^n$ и формула (0.4) принимает вид

$$f(z) = c_{1n}(\beta) \int_{B_n} \frac{f(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^\beta}{(1 - z\zeta^*)^{1+n+\beta}} d\mu_{1n}(\zeta), \quad z \in B_n,$$

утверждения а), б) были установлены Ф. Форелли, У. Рудиным [7] (для $\alpha = 0$) и М. М. Джрбашяном [3], [4] (для $\alpha > -1$).

В [8] М. Столл рассматривал случай произвольных ограниченных симметрических областей (гораздо более общих, чем области R_{mn}, $m, n \ge 1$). Из результатов работы [8], сформулированных для области R_{mn}, следуют утверждения а) (с $\alpha = 0$, $\beta \ge 0$) и б) (с $p = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = m + n$).

Наконец, общие утверждения а) и б) – в) теоремы 0.2 были установлены в работах [9] и [10], соответственно.

В [11] С. Г. Гиндикин рассмотрел весьма общие многомерные неограниченные области (области Зигеля второго рода) и в явной форме построил воспроизводящие ядра для голоморфных в таких обастях функций из L^2-пространств.

Позже Р. Р. Койфман и Р. Рохберг [12] указали, что методы работы [11] позволяют построить (опять же в явной форме) воспроизводящие ядра для голоморфных в симметрических афинно–однородных областях Зигеля второго рода функций из некоторых весовых L^2-пространств. В [11], [12] в значительной степени использовалась техника преобразования Фурье.

0.3. В настоящей работе мы устанавливаем аналог теоремы 0.2 для неограниченных матричных областей. Для определения этих областей предположим, что $1 \le m \le n$ и каждую матрицу $\omega \in M_{mn}$ запишем как $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in M_{mm}$, $\omega_2 \in M_{m,n-m}$. Тогда матричная область Зигеля определяется как

$$\pi_{mn} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in M_{mn} : \ \mathrm{Im}\ \omega_1 - \omega_2\omega_2^* \text{ положительно определена } \}, \quad (0.5)$$

где $\mathrm{Im}\ \omega_1 = \dfrac{1}{2i}(\omega_1 - \omega_1^*)$. Очевидно, π_{mn} обобщает такие многомерные области как π_{1n} (область Зигеля в $\mathbf{C}^n$) и π_{nn} (так называемая обобщенная верхняя полуплоскость в пространстве квадратных матриц).

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом (см. теоремы 2.1 и 2.2) :

Теорема 0.3. *Пусть $1 \le m \le n$ и $1 \le p < \infty$. Тогда*
а) если $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$, $\beta \succ (p, \alpha)$, то каждая голоморфная функция $f(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$ с конечным интегралом

$$||f||_{p,\alpha} = \left(\int_{\pi_{mn}} |f(\omega)|^p [\ det(\ \mathrm{Im}\ \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha \, d\mu_{mn}(\omega)\right)^{1/p}$$

имеет интегральное представление

$$f(w) = 2^{m(n-m+\beta)} c_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} \frac{f(\omega)[\ det(\ Im\ \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\beta}{[\ det(i(\omega_1^* - w_1) - 2w_2\omega_2^*)]^{m+n+\beta}} \, d\mu_{mn}(\omega), \quad (0.6)$$
$$w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn};$$

б) если $\alpha > p(m-1) - m$, $Re\ \beta > \dfrac{\alpha + m}{p} - 1$, то интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.6), есть ограниченный проектор из пространства $\{f : ||f||_{p,\alpha} < \infty\}$ на свое подпространство голоморфных функций.

В случае $m = n = 1$ (когда $\pi_{mn} = \Pi_+$) этот результат был установлен М. М. Джрбашяном и А. Э. Джрбашяном [13] на основе формулы (0.1). В [14] – [17] теорема 0.3 была установлена для случаев $m = 1$, $n \ge 1$ и $m = n \ge 1$.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Приводимые в этом разделе необходимые предварительные факты хорошо известны (см., например, [6], [9], [17]). Напомним, что M_{mm} – пространство всех комплексных $m \times m$–матриц. Для произвольного $A \in M_{mm}$ положим

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Пусть H_m, $m \geq 1$ – множество всех эрмитовых матриц, т.е. $H_m = \{A \in M_{mm} : A = A^*\}$. Заметим, что $\operatorname{Re} A \in H_m$ и $\operatorname{Im} A \in H_m$ для произвольного $A \in M_{mm}$. Далее, положим

$$H_m^+ = \{A \in H_m : \ A \text{ положительно определена } \}, \quad m \geq 1.$$

Обычно факт $A \in H_m^+$ записывается как $A > 0$. Очевидно, что $\det \ A > 0$ для любого $A > 0$. Хорошо известно, что для любого $A > 0$ существует единственная матрица $B > 0$ такая, что $A = B \cdot B$. Эта матрица B обычно записывается как $B = \sqrt{A}$ и мы имеем $\det(\sqrt{A}) = \sqrt{\det A}$. Далее, для $m \geq 1$ рассмотрим следующие области в M_{mm} :

$$M_{mm}^* = \{A \in M_{mm} : \ \det \ A \neq 0\},$$

$$\widetilde{M}_{mm} = \{A \in M_{mm} : \ \operatorname{Re} A > 0, \text{ или } \operatorname{Im} A > 0, \text{ или } - \operatorname{Im} A > 0\}.$$

Легко проверить, что область $\widetilde{M}_{mm}$ звездна относительно единичной матрицы I^m. Следовательно, область $\widetilde{M}_{mm}$ односвязна. Это в совокупности с фактом $\widetilde{M}_{mm} \subset M_{mm}^*$ (т.е. $\det \ A \neq 0$, $A \in \widetilde{M}_{mm}$) влечет существование голоморфной функции $g(A)$, $A \in \widetilde{M}_{mm}$, однозначно определяемой свойствами

$$\exp[g(A)] = \det \ A, \quad A \in \widetilde{M}_{mm}, \quad g(I^m) = 0.$$

Мы используем обозачение $g(A) \equiv \ln \det(A)$. Очевидно, имеем

$$\operatorname{Re} \left(\ln \det(A)\right) = \ln |\det(A)|, \quad A \in \widetilde{M}_{mm}.$$

В [17] (Лемма 1.2) было установлено, что $|\operatorname{Im} \left(\ln \det(A)\right)| \leq \pi m$, $A \in \widetilde{M}_{mm}$. Определим степенную функцию в $\widetilde{M}_{mm}$ следующим образом : для произвольного $\beta \in \mathbf{C}$ положим

$$[\det \ A]^\beta = \exp[\beta \ln \det(A)], \quad A \in \widetilde{M}_{mm}.$$

1.2. Всюду дальше мы предполагаем $1 \le m \le n$ и рассматриваем пространство M_{mn}. Каждая матрица $\zeta \in M_{mn}$ может быть записана как $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, где $\zeta_1 \in M_{mm}$ и $\zeta_2 \in M_{m,n-m}$. Очевидно

$$\zeta^* = \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix} \in M_{nm}.$$

Следовательно

$$z\zeta^* = z_1\zeta_1^* + z_2\zeta_2^*, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in M_{mn}, \quad z = (z_1, z_2) \in M_{mn}.$$

В частности, имеем

$$\zeta\zeta^* = \zeta_1\zeta_1^* + \zeta_2\zeta_2^*, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in M_{mn}.$$

Поэтому

$$R_{mn} = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in M_{mn} : \ I^m - \zeta_1\zeta_1^* - \zeta_2\zeta_2^* \text{ положительно определена } \}.$$

Если $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}$, то $\zeta_1 \in R_{mm}$. Напомним, что матричная область Зигеля π_{mn} определена нами в (0.5). Заметим, что если $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$, то $\operatorname{Im} \omega_1 > 0$, т.е. $\omega_1 \in \pi_{mm}$. Оказывается, что области R_{mn} и π_{mn} биголоморфно эквивалентны. Более точно, рассмотрим следующие отображения (так называемые *обобщенные преобразования Кэли*) :

$$\Phi(\zeta) = i(I^m - \zeta_1)^{-1}(I^m + \zeta_1, \zeta_2) \equiv \left(\Phi_1(\zeta_1, \zeta_2), \Phi_2(\zeta_1, \zeta_2)\right), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn},$$

$$\Phi^{-1}(\omega) = (iI^m + \omega_1)^{-1}(\omega_1 - iI^m, 2\omega_2) \equiv$$

$$\equiv \left(\Phi_1^{-1}(\omega_1, \omega_2), \Phi_2^{-1}(\omega_1, \omega_2)\right), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\,(I^m - \zeta_1) > 0, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn},$$

$$\operatorname{Im}\,(\omega_1 + iI^m) > 0, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}.$$

Следовательно, матрицы $(I^m - \zeta_1)^{-1}$, $(\omega_1 + iI^m)^{-1}$ существуют и, значит, Φ и Φ^{-1} определены корректно.

Лемма 1.1. *Если* $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$ *и* $w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}$, *то*

$$|\det(\omega + iI^m)| \geq 1, \quad |\det(\omega + iI^m)| \geq \det(\operatorname{Im}\omega), \tag{1.1}$$

$$\det(\operatorname{Im}\omega_1) \geq \det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*), \tag{1.2}$$

$$Re\,[2i(\omega_1^* - w_1) - 4w_2\omega_2^*] > 0. \tag{1.3}$$

Доказательство. Неравенства (1.1) доказаны в [17] (лемма 2.1). Для доказательства (1.2) допустим $\operatorname{Im}\omega_1 > \omega_2\omega_2^*$. Запишем

$$\omega_2 = \sqrt{\operatorname{Im}\omega_1}\eta, \quad \eta \in M_{m,n-m}.$$

Тогда имеем

$$\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^* = \sqrt{\operatorname{Im}\omega_1}(I^m - \eta\eta^*)\sqrt{\operatorname{Im}\omega_1},$$

$$\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*) = \det(\operatorname{Im}\omega_1)\det(I^m - \eta\eta^*).$$

Следовательно, $\eta \in R_{m,n-m}$ и, таким образом, (1.2) сводится к неравенству $1 \geq \det(I^m - \eta\eta^*)$. Остается воспользоваться следующим хорошо известным фактом (см. [6], теорема 2.1.2) :

$$0 < \det(I^m - \zeta\zeta^*) \leq 1, \quad \zeta \in R_{mn}, \quad m, n \geq 1.$$

Далее, зафиксируем произвольное $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$ и $w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}$. Тогда

$$\operatorname{Re}\,[2i(\omega_1^* - w_1) - 4w_2\omega_2^*] =$$

$$= 2(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*) + 2(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*) + 2(w_2 - \omega_2)(w_2^* - \omega_2^*) > 0,$$

и утверждение (1.3) доказано.

Следующая лемма устанавливает основные свойства преобразований Кэли Φ и Φ^{-1}.

Лемма 1.2. 1^o. *Отображения* $\Phi : R_{mn} \longmapsto \pi_{mn}$ *и* $\Phi^{-1} : \pi_{mn} \longmapsto R_{mn}$ *являются биголоморфными изоморфизмами.*

2^o. *Пусть* $\Delta(\zeta)$, $\zeta \in R_{mn}$ *и* $\Delta^{-1}(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$, *соответственно, являются комплексными якобианами отображений* Φ *и* Φ^{-1}. *Тогда*

$$\Delta(\zeta) = \frac{2^{m^2} i^{mn}}{[\det(I^m - \zeta_1)]^{m+n}}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}, \tag{1.4}$$

$$\Delta^{-1}(\omega)=\frac{2^{mn}i^{m^2}}{[\det(\omega_1+iI^m)]^{m+n}},\quad \omega=(\omega_1,\omega_2)\in\pi_{mn}. \tag{1.5}$$

3°. *Имеют место следующие формулы замены переменной :*

$$d\mu_{mn}(\Phi(\zeta))=\frac{4^{m^2}}{|\det(I^m-\zeta_1)|^{2(m+n)}}\,d\mu_{mn}(\zeta),\quad \zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\in R_{mn}, \tag{1.6}$$

$$d\mu_{mn}(\Phi^{-1}(\omega))=\frac{4^{mn}}{|\det(\omega_1+iI^m)|^{2(m+n)}}\,d\mu_{mn}(\omega),\quad \omega=(\omega_1,\omega_2)\in\pi_{mn}. \tag{1.7}$$

4°. *Если $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\pi_{mn}$ и $w=(w_1,w_2)\in\pi_{mn}$, то*

$$\det[I^m-\Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*]=\frac{\det[2i(\omega_1^*-w_1)-4w_2\omega_2^*]}{\det(w_1+iI^m)\det(\omega_1^*-iI^m)}, \tag{1.8}$$

$$\det[I^m-\Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*]=\frac{\det[4(\,Im\,\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]}{\det(\omega_1+iI^m)\det(\omega_1^*-iI^m)}, \tag{1.9}$$

$$\ln\det[2i(\omega_1^*-w_1)-4w_2\omega_2^*]=$$

$$=\ln\det[I^m-\Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*]+\ln\det(w_1+iI^m)+\ln\det(\omega_1^*-iI^m). \tag{1.10}$$

5°. *Для любых матриц $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\pi_{mn}$ и $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\in R_{mn}$ таких, что $\omega=\Phi(\zeta)\Longleftrightarrow\zeta=\Phi^{-1}(\omega)$, имеем*

$$\ln\det(I^m-\zeta_1)=C-\ln\det(\omega_1+iI^m), \tag{1.11}$$

где постоянная C не зависит от ζ и ω.

Доказательство. Простые вычисления показывают, что а) Φ инъективно в R_{mn}, $\Phi(R_{mn})\subset\pi_{mn}$;

б) Φ^{-1} инъективно в π_{mn}, $\Phi^{-1}(\pi_{mn})\subset R_{mn})$;

в) $\Phi^{-1}(\Phi(\zeta))\equiv\zeta,\quad \zeta\in R_{mn}$; $\Phi(\Phi^{-1}(\omega))\equiv\omega,\quad \omega\in\pi_{mn}$.

Отсюда непосредственно следует 1°. Для доказательства 2° заметим, что

$$(I^m-\zeta_1)\Phi(\zeta)\equiv i(I^m+\zeta_1,\zeta_2),\quad \zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\in R_{mn}.$$

Дифференцируя, получим

$$(I^m-\zeta_1)\,d\Phi(\zeta)\equiv\big(d\zeta_1[\Phi_1(\zeta)+iI^m],\,d\zeta_1\Phi_2(\zeta)+i\,d\zeta_2\big).$$

Следовательно

$$d\Phi(\zeta)\equiv(I^m-\zeta_1)^{-1}(d\zeta_1,d\zeta_2)\begin{pmatrix}\Phi_1(\zeta)+iI^m & \Phi_2(z)\\ 0 & iI^{n-m}\end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$\Delta(\zeta) = [\det(I^m - \zeta_1)^{-1}]^n [\det(\Phi_1(\zeta) + iI^m)\det(iI^{n-m})]^m.$$

Последнее в совокупности с очевидным тождеством

$$\det(\Phi_1(\zeta) + iI^m) \equiv \frac{(2i)^m}{[\det(I^m - \zeta_1)]}$$

дает нужную формулу (1.4). Формула (1.5) может быть установлена сходным образом. Далее, 3^o непосредственно следует из 2^o. Что касается 4^o, оно может быть проверено прямым вычислением, используя свойства функции $\ln\det$. Наконец, если $\omega = \Phi(\zeta) \iff \zeta = \Phi^{-1}(\omega)$, то

$$\omega_1 = i(I^m - \zeta_1)^{-1}(I^m + \zeta_1) \iff \zeta_1 = (\omega_1 + iI^m)^{-1}(\omega_1 - iI^m).$$

Следовательно

$$(I^m - \zeta_1)\cdot(\omega_1 + iI^m) = 2iI^m,$$

а отсюда легко следует (1.11).

1.3. В этом разделе мы вычисляем некоторые важные для дальнейшего интегралы. Положим

$$J_{mn}(\alpha,\gamma) = \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^\gamma}\, d\mu_{mn}(\omega), \quad 1 \le m \le n, \quad \alpha,\gamma \in \mathbb{R}; \tag{1.12}$$

$$H_{mn}(\alpha) = \int_{M_{mn}} \frac{d\mu_{mn}(\zeta)}{[\det(I^m + \zeta\zeta^*)]^\alpha}, \quad 1 \le m \le n, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \tag{1.13}$$

$$I_{mn}(w;\alpha,\gamma) = \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha}{|\det(i(\omega_1^* - w_1) - 2w_2\omega_2^*)|^\gamma}\, d\mu_{mn}(\omega), \tag{1.14}$$

$\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$, $w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}$.

Лемма 1.3. *а) $J_{mn}(\alpha,\gamma) < \infty$, если и только если*

$$\alpha > -1, \quad \gamma - \alpha > n + 2m - 1. \tag{1.15}$$

б) $H_{mn}(\alpha) < \infty$, если и только если $\alpha > n + m - 1$.

в) $$I_{mn}(w;\alpha,\gamma) = \frac{J_{mm}(\alpha,\gamma)H_{m,n-m}(\gamma-\alpha-2m)}{[\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*)]^{\gamma-\alpha-m-n}}, \quad w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}. \tag{1.16}$$

г) При фиксированном $w \in \pi_{mn}$ неравенство $I_{mn}(w;\alpha,\gamma) < \infty$ справедливо только при условиях (1.15).

Доказательство. Прежде всего заметим, что в случае $m = n \geq 1$ утверждения а) и в) были установлены в [17] (предложения 2.3 и 2.4). В силу очевидного соотношения $J_{mn}(\alpha,\gamma) = I_{mn}(w;\alpha,\gamma)$ с $w = (iI^m, 0) \in \pi_{mn}$ утверждение а) непосредственно следует из утверждения г). Для доказательства б) нужно воспользоваться рекуррентным соотношением $H_{mn}(\alpha) = H_{m,n-1}(\alpha-1)H_{m1}(\alpha)$. И тогда остается провести индуктивное рассуждение и заметить, что $H_{m1}(\alpha) < \infty$, если и только если $\alpha > m$. Далее, при $w \in \pi_{mn}$ имеем

$$I_{mn}(w;\alpha,\gamma) =$$

$$= \int\limits_{M_{m,n-m}} d\mu_{m,n-m}(\omega_2) \int\limits_{\operatorname{Im}\omega_1 > \omega_2\omega_2^*} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha}{|\det(\omega_1^* - w_1 + 2iw_2\omega_2^*)|^\gamma} \, d\mu_{mm}(\omega_1).$$

После замены переменной $\tau = \omega_1 - i\omega_2\omega_2^* \in \pi_{mm}$ во внутреннем интеграле мы получим

$$I_{mn}(w;\alpha,\gamma) = \int_{M_{m,n-m}} d\mu_{m,n-m}(\omega_2) \int_{\pi_{mm}} \frac{[\det(\operatorname{Im}\tau)]^\alpha}{|\det(\tau^* - \eta)|^\gamma} \, d\mu_{mm}(\tau),$$

где $\eta = i\omega_2\omega_2^* + w_1 - 2iw_2\omega_2^* \in M_{mm}$. Можно проверить, что

$$\operatorname{Im}\eta = \operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^* + (\omega_2 - w_2)(\omega_2^* - w_2^*) > 0,$$

и поэтому $\eta \in \pi_{mm}$. Так как формула (1.16) известна для $m = n \geq 1$ (как уже отмечено выше), мы получаем

$$I_{mn}(w;\alpha,\gamma) = \int\limits_{M_{m,n-m}} \frac{J_{mm}(\alpha,\gamma)\, d\mu_{m,n-m}(\omega_2)}{[\det(\operatorname{Im}\eta)]^{\gamma-\alpha-2m}} =$$

$$= J_{mm}(\alpha,\gamma) \int\limits_{M_{m,n-m}} \frac{d\mu_{m,n-m}(\omega_2)}{[\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^* + \omega_2\omega_2^*)]^{\gamma-\alpha-2m}}.$$

Наконец, замена переменной

$$\omega_2 = \sqrt{\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*} \cdot \zeta, \quad \zeta \in M_{m,n-m}$$

в последнем интеграле дает нужную нам формулу (1.16). Далее, для фиксированного $w \in \pi_{mn}$, $I_{mn}(w;\alpha,\gamma) < \infty$, если и только если $J_{mm}(\alpha,\gamma) < \infty$ и $H_{m,n-m}(\gamma-\alpha-2m) < \infty$. Следовательно, имеем $\alpha > -1$, $\gamma - \alpha > 3m - 1$ и $\gamma - \alpha - 2m > n - 1$, что совпадает с (1.15).

1.4. Введем основные пространства функций. Предполагая $0 < p < \infty$ и $-\infty < \alpha < \infty$, для произвольной измеримой функции $f(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$, положим

$$||f||_{p,\alpha} = \left(\int_{\pi_{mn}} |f(\omega)|^p [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha \, d\mu_{mn}(\omega)\right)^{1/p}$$

и определим $L^p_\alpha(\pi_{mn}) = \{f : ||f||_{p,\alpha} < \infty\}$. Пусть $H^p_\alpha(\pi_{mn})$ – подпространство голоморфных функций в $L^p_\alpha(\pi_{mn})$.

Лемма 1.4. *Допустим, что* $0 < p < \infty$ *и* $-\infty < \alpha < \infty$. *Если* $f \in H^p_\alpha(\pi_{mn})$, *то*

$$g(\zeta) \equiv \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det(I^m - \zeta_1)]^{2(m+n+\alpha)/p}} \in H^p_\alpha(R_{mn}).$$

Если $g \in H^p_\alpha(R_{mn})$, *то*

$$f(\omega) \equiv \frac{g(\Phi^{-1}(\omega))}{[\det(\omega_1 + iI^m)]^{2(m+n+\alpha)/p}} \in H^p_\alpha(\pi_{mn}).$$

Лемма 1.4 является непосредственным следствием леммы 1.2. Как это следует из [9] (предложение 2.4), $H^p_\alpha(R_{mn}) = \{0\}$, если $0 < p < \infty$ и $\alpha \leq -1$. Следовательно, ввиду леммы 1.4 достаточно рассматривать пространство $H^p_\alpha(\pi_{mn})$ только для $0 < p < \infty$ и $-1 < \alpha < \infty$.

Лемма 1.5. *Допустим, что* $1 \leq p < \infty$, $1 \leq m \leq n$ *и* $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$. *Для функции* $f(\omega) \in L^p_\alpha(\pi_{mn})$ *положим*

$$F_\beta(\omega) \equiv \frac{f(\omega)[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\beta}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{m+n+\beta}}, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Тогда $F_\beta(\omega) \in L^1(\pi_{mn})$, *если* $\beta \succ (p, \alpha)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Тогда $f \in L^1_\alpha(\pi_{mn})$, $\alpha > -1$ и $\beta \geq \alpha$. Следовательно, как это следует из леммы 1.1, мы имеем

$$|F_\beta(\omega)| =$$

$$= |f(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{\beta-\alpha}}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{\beta-\alpha}} \frac{1}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{m+n+\alpha}} \leq$$

$$\leq |f(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha \in L^1(\pi_{mn}).$$

Что касается случая $1 < p < \infty$, то применение неравенства Гёльдера дает

$$\int_{\pi_{mn}} |F_\beta(\omega)| \, d\mu_{mn}(\omega) \leq J^{1/q} ||f||_{p,\alpha}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где

$$J=\int_{\pi_{mn}}\frac{[\det(\,\mathrm{Im}\,\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{q(\beta-\alpha/p)}}{|\det(\omega_1^*-iI^m)|^{q(m+n+\beta)}}\,d\mu_{mn}(\omega).$$

Согласно лемме 1.3а) $J<\infty$, если и только если

$$q\left(\beta-\frac{\alpha}{p}\right)>-1, \tag{1.17}$$

$$q(m+n+\beta)-q\left(\beta-\frac{\alpha}{p}\right)>n+2m-1. \tag{1.18}$$

Легко видеть, что условие (1.17) совпадает с условием $\beta\succ(p,\alpha)$, а (1.18) есть условие $\alpha>p(m-1)-(n+2m-1)$. Лемма 1.5 доказана.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть $1\le m\le n$ и $\mathrm{Re}\,\beta>-1$. Рассмотрим интегральный оператор

$$T^{\beta}_{mn}(f)(w)\equiv 2^{m(n-m+\beta)}c_{mn}(\beta)\int_{\pi_{mn}}\frac{f(\omega)[\det(\,\mathrm{Im}\,\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{\beta}}{[\det(i(\omega_1^*-w_1)-2w_2\omega_2^*)]^{m+n+\beta}}\,d\mu_{mn}(\omega),$$
$$w\in\pi_{mn}. \tag{2.1}$$

Из леммы 1.2 (4°) следует несколько иная форма записи (2.1) :

$$T^{\beta}_{mn}(f)(w)=\frac{4^{m(n+\beta)}c_{mn}(\beta)}{[\det(w_1+iI^m)]^{m+n+\beta}}\int_{\pi_{mn}}G^{\beta}_{mn}(w,\omega;f)\,d\mu_{mn}(\omega), \tag{2.2}$$

где

$$G^{\beta}_{mn}(w,\omega;f)=\frac{f(\omega)[\det(\,\mathrm{Im}\,\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{\beta}}{[\det(I^m-\Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}[\det(\omega_1^*-iI^m)]^{m+n+\beta}},$$
$$w,\omega\in\pi_{mn}. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $1\le p<\infty$, $\alpha>\max\{-1;p(m-1)-(n+2m-1)\}$ *и* $f\in L^p_\alpha(\pi_{mn})$. *Если* $K\subset\pi_{mn}$ *компактно и*

$$\begin{cases}\alpha\le a_1<a_2<\infty, & \text{если } p=1,\\ \frac{\alpha+1}{p}-1<a_1<a_2<\infty, & \text{если } 1<p<\infty,\end{cases}$$

то существует функция $\Psi\in L^1(\pi_{mn})$ *такая, что неравенство*

$$|G^{\beta}_{mn}(w,\omega;f)|\le\Psi(\omega),\quad \omega\in\pi_{mn} \tag{2.4}$$

имеет место равномерно по $w\in K$ *и* $\beta\in\mathbf{C}$ *с* $|\,\mathrm{Im}\,\beta|\le A<\infty$, $a_1\le\ \mathrm{Re}\,\beta\le a_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\eta(z,\zeta;\beta)=[\det(I^m-z\zeta^*)]^{m+n+\beta}=\exp[(m+n+\beta)\ln\det(I^m-z\zeta^*)],\quad \beta\in\mathbf{C}, \tag{2.5}$$

где $z \in R_{mn}$, $\zeta \in \overline{R_{mn}}$ (замыкание R_{mn}). Как было установлено в [9] (предложение 2.2), если $z \in R_{mn}$ и $\zeta \in \overline{R_{mn}}$, то $\operatorname{Re}(I^m - z\zeta^*) > 0$. Поэтому $I^m - z\zeta^*$ принадлежит $\widetilde{M_{mm}}$, где функция ln det определена и непрерывна (даже голоморфна). Поэтому функция (2.5) непрерывна по переменным z, ζ, β. Из этого следует неравенство

$$\left|[\det(I^m - \Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}\right| \geq \delta > 0$$

равномерно по $w \in K$, $\omega \in \pi_{mn}$ и $\beta \in \mathbf{C}$ с $|\operatorname{Im}\beta| \leq A$, $a_1 \leq \operatorname{Re}\beta \leq a_2$. Таким образом, при этих же условиях имеем

$$|G^{\beta}_{mn}(w,\omega;f)| \leq \frac{1}{\delta}\exp(\pi m|\operatorname{Im}\beta|)\frac{|f(\omega)|[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{m+n+\operatorname{Re}\beta}}.$$

Последнее вместе с (1.2), (1.1) дает

$$|G^{\beta}_{mn}(w,\omega;f)| \leq \frac{1}{\delta}\exp(\pi mA)\frac{|f(\omega)|[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{a_1}}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{m+n+a_1}} \equiv \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn}.$$

Согласно лемме 1.5, $\Psi \in L^1(\pi_{mn})$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$ и $f \in L^p_\alpha(\pi_{mn})$. Тогда

а) при фиксированном $\beta \succ (p,\alpha)$ (см. (0.3)) $T^{\beta}_{mn}(f)(w)$ голоморфна в области $w \in \pi_{mn}$;

б) при фиксированном $w \in \pi_{mn}$ функция $T^{\beta}_{mn}(f)(w)$ голоморфна в области $\operatorname{Re}\beta > (\alpha+1)/p - 1$ (если $p > 1$) и $T^{\beta}_{mn}(f)(w)$ голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\operatorname{Re}\beta \geq \alpha$ (если $p = 1$).

2.2. Теорема 2.1. *Пусть $1 \leq m \leq n$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > \max\{-1; p(m-1)-(n+2m-1)\}$ и $\beta \succ (p,\alpha)$. Тогда каждая функция $f \in H^p_\alpha(\pi_{mn})$ допускает интегральное представление*

$$f(w) = T^{\beta}_{mn}(f)(w), \quad w \in \pi_{mn}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из следствия 1б) и теоремы единственности для голоморфных функций следует, что достаточно установить (2.6) при дополнительном допущении $\beta \geq 0$. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det(I^m - \zeta_1)]^{m+n+\beta}}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}. \tag{2.7}$$

Затем положим $z = \Phi^{-1}(w) \in R_{mn}$ и выберем $\rho_0 \in (0,1)$ так, чтобы $z \in \rho R_{mn} \equiv$

$\equiv \{\rho\zeta : \zeta \in R_{mn}\}$ для $\rho_0 \le \rho < 1$. Как следствие теоремы 0.2a), мы имеем

$$g(z) = c_{mn}(\beta)\rho^{2m^2} \int_{\rho R_{mn}} \frac{g(\zeta)[\det(\rho^2 I^m - \zeta\zeta^*)]^\beta}{[\det(\rho^2 I^m - z\zeta^*)]^{m+n+\beta}}\, d\mu_{mn}(\zeta), \quad \rho_0 \le \rho < 1. \quad (2.8)$$

Подставим (2.7) в обе части (2.8) и произведем замену переменной $\zeta = \Phi^{-1}(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$ в правой части (2.8). Принимая во внимание соотношения $z = \Phi^{-1}(w)$ и

$$[\det(I^m - \zeta_1)]^{m+n+\beta} = \frac{C}{[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta}}, \quad \zeta = \Phi^{-1}(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn},$$

где константа C не зависит от $\zeta \in R_{mn}$ и ω (см. (1.11)), получим

$$f(w)[\det(w_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} = c_{mn}(\beta)\rho^{2m^2} \int_{\pi_{mn}} F_\rho(\omega)\, d\mu_{mn}(\Phi^{-1}(\omega)), \quad \rho_0 \le \rho < 1, \quad (2.9)$$

где

$$F_\rho(\omega) = f(\omega)[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} \frac{[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}}\, \chi_\rho(\omega), \quad (2.10)$$

и χ_ρ – характеристическая функция области $\pi^\rho_{mn} = \Phi(\rho R_{mn})$. Теперь мы намерены искать функцию $\Psi \in L^1(\pi_{mn}; d\mu_{mn}(\Phi^{-1}\omega))$ такую, что

$$|F_\rho(\omega)| \le \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn}, \quad \rho_0 \le \rho < 1. \quad (2.11)$$

С этой целью заметим, что $z \in \rho R_{mn}$ и $\operatorname{Re}(\rho^2 I^m - z\zeta^*) > 0$ для $\rho_0 \le \rho \le 1$, $\zeta \in \rho\overline{R_{mn}}$ [9] (предложение 2.2). Следовательно, из соображений компактности имеем

$$|\det(\rho^2 I^m - z\zeta^*)| \ge \delta > 0$$

равномерно по $\rho_0 \le \rho \le 1$, $\zeta \in \rho\overline{R_{mn}}$. Отсюда

$$\left| \frac{\chi_\rho(\omega)}{[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}} \right| \le \delta^{-(m+n+\beta)} \quad (2.12)$$

равномерно по $\rho_0 \le \rho < 1$, $\omega \in \pi_{mn}$. Далее, мы также имеем

$$\chi_\rho(\omega)[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta \le [\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta, \quad \rho_0 \le \rho < 1. \quad (2.13)$$

Неравенства (2.12), (2.13) вместе с (2.10) дают (2.11) с

$$\Psi(\omega) \equiv \text{const}\, |f(\omega)| \cdot |\det(\omega_1 + iI^m)|^{m+n+\beta} [\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta, \quad \omega \in \pi_{mn}.$$

Остается показать, что $\Psi \in L^1(\pi_{mn}; d\mu_{mn}(\Phi^{-1}\omega))$, а это очевидно ввиду (1.7), (1.9) и леммы 1.5. Итак, мы можем применить к (2.9) теорему Лебега об ограниченной сходимости. В результате получим

$$f(w)[\det(w_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} = c_{mn}(\beta)\int_{\pi_{mn}} f(\omega)[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta}\times$$

$$\times\frac{[\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(I^m - \Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}}\, d\mu_{mn}(\Phi^{-1}(\omega)). \tag{2.14}$$

Используя (1.7) – (1.9), (2.14) может быть записано как (2.6), что и завершает доказательство.

2.3. Установим теперь соответствующую теорему проектирования.

Теорема 2.2. *Пусть* $1 \le m \le n$, $1 \le p < \infty$, $\alpha > p(m-1) - m$, *и комплексное число* β *такое, что* $\operatorname{Re}\beta > (\alpha + m)/p - 1$. *Тогда оператор* T^β_{mn} *– ограниченный проектор из* $L^p_\alpha(\pi_{mn})$ *на* $H^p_\alpha(\pi_{mn})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что предположения теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 2.1. Следовательно, ввиду следствия 1а), $T^\beta_{mn}(f)$ голоморфна в π_{mn} для любой функции $f \in L^p_\alpha(\pi_{mn})$. Так что достаточно установить ограниченность интегрального оператора T^β_{mn} в пространстве $L^p_\alpha(\pi_{mn})$. С этой целью заметим, что

$$|T^\beta_{mn}(f)(w)| \le A_{mn}(\beta)\int_{\pi_{mn}} \frac{|f(\omega)|[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(i(\omega_1^* - w_1) - 2w_2\omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re}\beta}}\, d\mu_{mn}(\omega), \tag{2.15}$$

$w \in \pi_{mn}$,

где

$$A_{mn}(\beta) = |2^{m(n-m+\beta)}c_{mm}(\beta)|\cdot\exp[\pi m|\operatorname{Im}\beta|].$$

Сначала положим $p = 1$. Тогда

$$||T^\beta_{mn}(f)||_{1,\alpha} = \int_{\pi_{mn}} |T^\beta_{mn}(f)(w)|\cdot[\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*)]^\alpha\, d\mu_{mn}(w) \le$$

$$\le A_{mn}(\beta)\int_{\pi_{mn}} [\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*)]^\alpha\, d\mu_{mn}(w)\times$$

$$\times\int_{\pi_{mn}} \frac{|f(\omega)|[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(i(\omega_1^* - w_1) - 2w_2\omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re}\beta}}\, d\mu_{mn}(\omega). \tag{2.16}$$

Перемена порядка интегрирования в (2.16) вместе с (1.14) дает

$$||T^\beta_{mn}(f)||_{1,\alpha} \le$$

$$\leq A_{mn}(\beta)\int_{\pi_{mn}} |f(\omega)|[\det(\operatorname{Im}\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{\operatorname{Re}\beta} I_{mn}(\omega;\alpha,m+n+\operatorname{Re}\beta)\,d\mu_{mn}(\omega).$$

Ввиду леммы 1.3в) отсюда следует, что

$$||T^{\beta}_{mn}(f)||_{1,\alpha}\leq A_{mn}(\beta)J_{mm}(\alpha,m+n+\operatorname{Re}\beta)H_{m,n-m}(\operatorname{Re}\beta-\alpha+n-m)||f||_{1,\alpha}.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$J_{mm}(\alpha,m+n+\operatorname{Re}\beta)<\infty,\quad H_{m,n-m}(\operatorname{Re}\beta-\alpha+n-m)<\infty.$$

Для этого, ввиду леммы 1.3, необходимо выполнение следующих неравенств :

$$\alpha>-1,\quad m+n+\operatorname{Re}\beta-\alpha>3m-1,\quad \operatorname{Re}\beta-\alpha+n-m>n-1,$$

которые могут быть записаны как

$$\alpha>-1,\qquad \operatorname{Re}\beta>\alpha+m-1. \tag{2.17}$$

Остается заметить, что (2.17) совпадает с допущением теоремы (когда $p=1$).

Теперь рассмотрим случай $1<p<\infty$ и выберем $q\in(1,\infty)$ так, что $1/p+1/q=1$. Затем положим

$$d\nu(\omega)=[\det(\operatorname{Im}\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{\alpha}d\mu_{mn}(\omega),\quad \omega\in\pi_{mn},$$

$$Q(w,\omega)=\frac{[\det(\operatorname{Im}\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{\operatorname{Re}\beta-\alpha}}{|\det(i(\omega_1^*-w_1)-2w_2\omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re}\beta}},\quad w,\omega\in\pi_{mn}.$$

Из (2.15) для любой $f\in L^p_\alpha(\pi_{mn})$ мы имеем

$$|T^{\beta}_{mn}(f)(w)|\leq A_{mn}(\beta)\int_{\pi_{mn}}|f(\omega)|\,Q(w,\omega)\,d\nu(\omega),\quad w\in\pi_{mn}$$

для любой функции $f\in L^p_\alpha(\pi_{mn})$. Мы намерены доказать ограниченность оператора T^{β}_{mn} в пространстве $L^p_\alpha(\pi_{mn})$ при помощи леммы Форелли–Рудина (см. [7]). С этой целью мы найдем измеримую функцию $g(\omega)>0$, $\omega\in\pi_{mn}$ такую, что

$$\int_{\pi_{mn}}Q(w,\omega)[g(\omega)]^q\,d\nu(\omega)\leq \text{const}\,[g(w)]^q,\quad w\in\pi_{mn},$$

$$\int_{\pi_{mn}}Q(w,\omega)[g(w)]^p\,d\nu(w)\leq \text{const}\,[g(\omega)]^p,\quad \omega\in\pi_{mn}. \tag{2.18}$$

Для этого положим

$$g(\omega)=[\det(\operatorname{Im}\omega_1-\omega_2\omega_2^*)]^{-(\frac{m-1}{q}+\delta)},\quad \omega\in\pi_{mn},$$

где $\delta > 0$ произвольно. Для такой функции $g(\omega)$ неравенства (2.18) принимают такой вид :

$$\int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{\operatorname{Re}\beta-(m-1+q\delta)}}{|\det(i(\omega_1^* - w_1) - 2w_2\omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re}\beta}}\, d\mu_{mn}(\omega) \le$$

$$\le \frac{\text{const}}{[\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*)]^{m-1+q\delta}}, \quad w \in \pi_{mn},$$

$$\int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2w_2^*)]^{\alpha-p(\frac{m-1}{q}+\delta)}}{|\det(i(w_1^* - \omega_1) - 2\omega_2w_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re}\beta}}\, d\mu_{mn}(w) \le$$

$$\le \frac{\text{const}}{[\det(\operatorname{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^{p(\frac{m-1}{q}+\delta)+\operatorname{Re}\beta-\alpha}}. \tag{2.19}$$

Из леммы 1.3 следует, что неравенства (2.19) имеют место, если только

$$\operatorname{Re}\beta - (m-1+q\delta) > -1, \quad m+n+\operatorname{Re}\beta - \operatorname{Re}\beta + (m-1+q\delta) > n+2m-1,$$

$$\alpha - p\left(\frac{m-1}{q}+\delta\right) > -1, \quad m+n+\operatorname{Re}\beta - \alpha + p\left(\frac{m-1}{q}+\delta\right) > n+2m-1.$$

После упрощений эта группа условий может записана следующим образом :

$$\frac{\operatorname{Re}\beta - m+2}{q} > \delta, \quad \frac{\alpha+1}{p} - \frac{m-1}{q} > \delta, \quad \frac{\operatorname{Re}\beta - \alpha - m+1}{p} + \frac{m-1}{q} + \delta > 0.$$

Остается выбрать подходящее $\delta > 0$, удовлетворяющее последним условиям. Такой выбор возможен, если только

$$\operatorname{Re}\beta > m-2, \quad \frac{\operatorname{Re}\beta - m+2}{q} + \frac{\operatorname{Re}\beta-\alpha-m+1}{p} + \frac{m-1}{q} > 0,$$

$$\frac{\alpha+1}{p} > \frac{m-1}{q}, \quad \frac{\alpha+1}{p} - \frac{m-1}{q} + \frac{\operatorname{Re}\beta-\alpha-m+1}{p} + \frac{m-1}{q} > 0,$$

или, что эквивалентно

$$\operatorname{Re}\beta > m-2, \quad \alpha > p(m-1)-m, \quad \operatorname{Re}\beta > \frac{\alpha+m}{p} - 1. \tag{2.20}$$

Достаточно заметить, что (2.20) обеспечено условиями теоремы. Доказательство завершено.

Замечание 2.1. По сравнению с теоремой 2.1 в теореме 2.2 условия на параметры α, β более сильные.

ABSTRACT. Let M_{mn} be the space of all complex $m\times n$ matrices. Let μ_{mn} be Lebesgue measure in the space $M_{mn} \cong \mathbf{C}^{mn}$. For $1 \le m \le n$ each matrix $\omega \in M_{mn}$ can be written as $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, where $\omega_1 \in M_{mm}$, $\omega_2 \in M_{m,n-m}$. The paper considers matrix Siegel domains $\pi_{mn} = \{(\omega_1, \omega_2) \in M_{mn} : \mathrm{Im}\,\omega_1 - \omega_2\omega_2^*$ is positive definite$\}$, where ω^* is Hermitian conjugate of ω and the classes $H^p_\alpha(\pi_{mn})$ of those functions holomorphic in π_{mn}, which belong to $L^p\{\pi_{mn}\,;\,[\det(\mathrm{Im}\omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega)\}$. Weighted integral representations for classes $H^p_\alpha(\pi_{mn})$ are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О представимости некоторых классов функций, мероморфных в единичном круге", ДАН АрмССР, т. 3, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Мат. и Мех. АН АрмССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. М. М. Джрбашян, "Обзор некоторых достижений армянских математиков в теории интегральных представлений и факторизации аналитических функций", Мат. Вестник, т. 39, стр. 263 – 282, 1987.
4. М. М. Джрбашян, "Краткий обзор результатов, полученных армянскими математиками в области теории факторизаци мероморфных функций и ее приложений", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 6, стр. 517 – 545, 1988.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in Theory of A^p_α Spaces, Teubner-Texte zur Math, b. 105, Leipzig, 1988.
6. Л. К. Хуа, Гармонический анализ функций нескольких комплексных переменных в классических областях, Иностр. Литер., М., 1959
7. F. Forelli, W. Rudin, "Projections on spaces of holomorphic functions in balls", Ind. Univ. Math. J., vol. 24, pp. 593 – 602, 1974.
8. M. Stoll, "Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains", J. Reine Angew. Math., vol. 290, pp. 191 – 198, 1977.
9. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления в обобщенном единичном круге", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 24, № 6, стр. 1 – 25, 1989.
10. A. H. Karapetyan, "Bounded projections in weighted functions spaces in a generalized unit disk", Ann. Polon, Math., vol. 62, № 3, pp. 193 – 218, 1995.
11. С. Г. Гиндикин, "Анализ в однородных областях", Успехи Мат. Наук (УМН), т. 19, № 4, стр. 3 – 92, 1964.
12. R. R. Coifman, R. Rochberg, " Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p," Astérisque, vol. 77, pp. 11 – 66, 1980.
13. М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, "Интегральные представления для некоторых классов функций, аналитических в полуплоскости", ДАН СССР, т. 285, № 3, стр. 547 – 550, 1985.
14. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4, стр. 86 – 93, 1987.
15. M. M. Djrbashian, A. H. Karapetyan, "Integral representations for some classes of functions holomorphic in a Siegel domain", J. Math. Anal. Appl, vol. 179, № 1, pp. 91 – 109, 1993.
16. M. M. Djrbashian, A. H. Karapetyan, "Integral representations for some weighted classes of functions holomorphic in matrix domains", Ann. Polon, Math., vol. 55, pp. 87 – 94, 1991.
17. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления в обобщенной верхней полуплоскости", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 25, № 6, стр. 1 – 28, 1990.

22 октября 1996

Институт математики
НАН Армении

ВКЛЮЧЕНИЕ–ИСКЛЮЧЕНИЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛЬСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. Машурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В данной статье рассматривается проблема описания простых точечных процессов в польских пространствах с помощью приведенных моментных мер, используя формулы типа включения-исключения. Доказывается теорема, устанавливающая, что эти формулы обеспечивают полное описание точечных процессов в случае мажорируемости приведенных моментных мер. Рассматриваются два класса точечных процессов, играющих важную роль в теории гиббсовских точечных процессов. Аналогичные результаты для точечных процессов в евклидовых пространствах при условии существования плотностей были ранее получены Р. В. Амбарцумяном и Г. С. Сукиасяном.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Р. В. Амбарцумяном и Г. С. Сукиасяном в [1] была рассмотрена проблема описания точечных процессов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, начиная с абсолютных плотностей (корреляционных функций). Был применен критерий, основанный на комбинаторном принципе включения-исключения, устанавливающий, когда данная система функций превращается в систему абсолютных плотностей некоторого точечного процесса в $\mathbb{R}^d$. Этот критерий был применен в [1] к классу функций вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha^n \prod_n h(x_i, x_j), \tag{0}$$

где α – положительная константа, $h(x, y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longmapsto [0, 1]$ – симметричная функция, а произведение $\prod_n$ распространяется на все неупорядоченные пары $\{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. В [1] было получено достаточное условие, при котором функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ становятся корреляционными функциями некоторого точечного процесса. Точечные процессы с абсолютными плотностями такого вида играют важную роль (см. [2], [3]) в теории классических гиббсовских точечных процессов.

В данной статье мы рассматриваем аналогичную проблему описания точечных процессов в общих польских пространствах X в терминах их приведенных моментных мер. В §3 мы формулируем критерий включения-исключения для этого общего случая без предположения существования плотностей. Это дает возможность, в частности, обобщить результаты [1] на случаи точечных процессов на решетках и маркированных точечных процессов в $\mathbb{R}^d$. В §4 рассматриваются последовательности знакопеременных мер, зависящих от графов, и критерий включения-исключения применяется для получения условий, когда такая последовательность порождает точечный процесс в X. В последнем §5 получено утверждение, обобщающее результат о произведениях (0).

§2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СОГЛАСОВАННОСТЬ

В этом параграфе мы формулируем некоторые хорошо известные результаты из теории точечных процессов, которые будут применены в дальнейшем. Сначала введем некоторые обозначения. Через X обозначаем несущее *польское пространство*, $\mathcal{A}^{(n)}$ будет обозначать кольцо ограниченных борелевских множеств пространства X^n. В случае $n = 1$ пишем $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$. По определению, *реализация* m – это счетное подмножество X со свойством $card(\mathrm{m} \cap B) < \infty$ для всех $B \in \mathcal{A}$. Для каждого борелевского множества $D \subseteq X$ (не обязательно ограниченного) через $\mathcal{M}_D$ обозначаем класс $\mathcal{M}_D = \{\mathrm{m} \cap D\}$ (реализации, попадающие в D). Через $\mathcal{M}_D^{(n)}$ обозначаем класс $\mathcal{M}_D^{(n)} = \{\mathrm{m} \cap D : card(\mathrm{m} \cap D) = n\}$ (реализации из $\mathcal{M}_D$, имеющие n точек в D). Таким образом, $\mathcal{M}_D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_D^{(n)}$, если D ограничено. $\Im_D$ будет обозначать минимальную σ-алгебру подмножеств $\mathcal{M}_D$, при котором все функции $N(B, \mathrm{m}) = card(B \cap \mathrm{m}) : \mathcal{M}_D \longmapsto \mathbb{R}, \quad B \in \mathcal{A}$ измеримы. Вместо $\mathcal{M}_X$ и $\Im_X$ пишем $\mathcal{M}$ и $\Im$ соответственно.

Случайный точечный процесс в X – это измеримое отображение $\mathrm{m}(\omega) : \Omega \longmapsto \mathcal{M}$ некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \Re, P_1)$ в измеримое пространство $(\mathcal{M}, \Im)$. Вероятность P на $\Im$, индуцированная отображением $\mathrm{m}(\omega)$, называется *вероятностным распределением* процесса $\mathfrak{m}(\omega)$. В терминологии [5] это соответствует определению "простого" точечного процесса (кратные точки отсутствуют).

Пусть P – вероятность на $(\mathcal{M}, \Im)$ (эквивалентно, вероятностное распределение некоторого точечного процесса $\mathfrak{m}(\omega)$ в X). Значения $P\begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix}$ вероятности P на событиях

$$\begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix} = \{\mathfrak{m} \in \mathcal{M} : \ card(\mathfrak{m} \cap D_i) = k_i, \ i = 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где $D_1, \ldots, D_n$ – попарно непересекающиеся множества из $\mathcal{A}$, а $k_1, \ldots, k_n$ – неотрицательные целые числа, определяют т. н. *конечномерные вероятности* точечного процесса $\mathfrak{m}(\omega)$.

Предложение 1. *(см. [5]). Предположим, что для каждой конечной последовательности $D_1, ..., D_n \in \mathcal{A}$ попарно непересекающихся множеств и неотрицательных целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ дано значение $p(D_1, ..., D_n, k_1, ..., k_n)$. Семейство $\{p(D_1, \ldots, D_n, k_1, \ldots, k_n)\}$ является семейством конечномерных вероятностей некоторой вероятностной меры P на $(\mathcal{M}, \Im)$ в том и только в том случае, если выполнены следующие шесть условий :*

1) $p(D_1, \ldots, D_n, k_1, \ldots, k_n) \geq 0$,

2) $p(D_1, \ldots, D_n, k_1, \ldots, k_n) = p(D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}, k_{i_1}, \ldots, k_{i_n})$ *для каждой перестановки* $(i_1, \ldots, i_n)$,

3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p(D, k) = 1$,

4) $\sum\limits_{k_1=0}^{\infty} p(D_1, \ldots, D_n, k_1, \ldots, k_n) = p(D_2, \ldots, D_n, k_2, \ldots, k_n)$,

5) $p(D_1, \ldots, D_n, B, k_1, \ldots, k_n, l) =$

$= \sum\limits_{l_1 + \cdots + l_m = l} p(D_1, \ldots, D_n, B_1, \ldots, B_m, k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m)$, где $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ *с непересекающимися* B_i,

6) $p(D_1^{(s)}, \ldots, D_{n(s)}^{(s)}, 0, \ldots, 0) \to 1$ *при* $s \to \infty$ *для каждой последовательности* $(D_1^{(s)}, \ldots, D_{n(s)}^{(s)})$ *со свойством* $D^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n(s)} D_i^{(s)} \downarrow \emptyset$.

Вероятностная мера P единственна.

Ниже мы будем рассматривать отображение

$$\mathcal{M}_{D_2} \longmapsto \mathcal{M}_{D_1} : \ \pi_{D_2, D_1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \cap D_1, \quad \text{где } \mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{D_2}, \quad D_1 \subseteq D_2.$$

Определение 1. Система $\{P_D : D \in \mathcal{A}\}$, где P_D – вероятность на $\mathcal{M}_D$, называется *согласованной*, если для любых ее двух элементов P_{D_1} и P_{D_2} с $D_1 \subseteq D_2$ имеем

$$P_{D_1}(A) = P_{D_2}\left(\pi^{-1}_{D_2,D_1}(A)\right), \tag{2}$$

т.е. P_{D_1} – *сужение* P_{D_2} на $\mathcal{M}_{D_1}$.

Предложение 2. *(см. [5], стр. 43). Пусть для каждого $D \in \mathcal{A}$ определена вероятность P_D на $\mathcal{M}_D$. Необходимым и достаточным условием существования единственной вероятности P на $\mathcal{M}$ со свойством : каждая P_D есть сужение P на $\mathcal{M}_D$, является согласованность семейства $\{P_D : D \in \mathcal{A}\}$.*

§3. КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРЕМА О МОМЕНТНЫХ МЕРАХ

Начнем этот параграф, приводя одно предложение из [1]. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) : (\mathbb{R}^d)^n \longmapsto [0, +\infty)$ называется *абсолютной плотностью* n-ой степени (относительно n-ой степени лебеговской меры L_d в $\mathbb{R}^d$) точечного процесса $\mathrm{m}(\omega)$ с вероятностным распределением P, если для всех несовпадающих $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^d$

$$P(N(\overline{dx_1}, \mathrm{m}) = 1, \ldots, N(\overline{dx_n}, \mathrm{m}) = 1) = f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n,$$

где $\overline{dx_i}$ – "инфинитезимальная" окрестность точки x_i, $N(\overline{dx_i}, \mathrm{m})$ обозначает число точек реализации m в $\overline{dx_i}$, а dx_i – значение L_d на $\overline{dx_i}$. Эквивалентно, функция $f(x_1, \cdots, x_n)$ – плотность n-ой моментной меры $\mathrm{m}(\omega)$ (см. ниже определение 2).

Предложение 3. *(см. [1]). Пусть $\{f_n(x_1, \cdots, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – система неотрицательных симметричных функций, удовлетворяющих для некоторой константы $b > 0$ условию $f_n(x_1, \cdots, x_n) < b^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Если для почти всех $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^d$ и всех ограниченных борелевских множеств $D \subset \mathbb{R}^d$ имеют место неравенства*

$$V_D^0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \cdots \int_{D^n} f_n(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \geq 0,$$

$$V_D(x_1, \ldots, x_m) = f_m(x_1, \ldots, x_m) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \cdots \int_{D^n} f_{m+n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \geq 0, \quad m > 0,$$

то существует единственный точечный процесс P в $\mathbb{R}^d$, для которого

$$V_D^0 = P(N(D, \mathrm{m}) = 0), \qquad V_D(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \cdots dx_m =$$

$$= P\left(N(\overline{dx_1}, \mathrm{m}) = 1, \ldots, N(\overline{dx_m}, \mathrm{m}) = 1,\ N\left(D \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{dx_i}, \mathrm{m}\right) = 0\right).$$

В этом параграфе мы обобщаем предложение 3, описывая точечные процессы в польских пространствах X в терминах их приведенных моментных мер. Дадим необходимые определения. Предположим, что $\mathrm{m}(\omega)$ – точечный процесс в пространстве X с вероятностным распределением P. Для каждого натурального $n \geq 1$ рассмотрим n-ую степень $\mathrm{m}^n(\omega) = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathrm{m}(\omega), i = 1, \ldots, n\}$ случайного множества $\mathrm{m}(\omega)$. Ясно, что $\mathrm{m}^n(\omega)$ – точечный процесс в пространстве X^n.

Определение 2. n-ой *моментной мерой* вероятностного распределения P (или процесса $\mathrm{m}(\omega)$) называется мера в X^n, определенная равенством

$$m^{(n)}(A) = EN(A, \mathrm{m}^n(\omega)), \tag{3}$$

где A – борелевское подмножество X^n, а E – знак математического ожидания. По определению, $m^{(0)} = 1$.

Из определения следует, что моментные меры симметричны, т.е. для всех подмножеств $D_1, \ldots, D_n \subseteq X$ и всех перестановок $(i_1, \ldots, i_n)$ последовательности $(1, \ldots, n)$

$$m^{(n)}(D_1 \times \cdots \times D_n) = m^{(n)}(D_{i_1} \times \cdots \times D_{i_n}).$$

Множество всех n-ок $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ с по меньшей мере двумя совпадающими x_i называем *диагональю* пространства X^n.

Определение 3. *Приведенной n-ой моментной мерой* называется сужение моментной меры $m^{(n)}$ на дополнение к диагонали X^n. Для приведенных моментных мер будем использовать то же обозначение $m^{(n)}$.

Пусть дана система $\{m^{(n)} : n = 0, 1, \ldots\}$, где $m^{(n)}$ – мера в пространстве X^n, $m^{(0)} = 1$. Мы скажем, что такая система мер *мажорируема*, если существует локально–финитная (т.е. конечная на $\mathcal{A}$) мера ν в X такая, что имеет место неравенство

$$m^{(n)}(A) \leq \nu^n(A), \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Будем использовать следующее обозначение : для каждого $A \subseteq \mathcal{M}^{(n)}$ через A^{*} обозначаем множество

$$A^{*} = \{(x_1, \ldots, x_n): \ \{x_1, \ldots, x_n\} \in A\}.$$

Теорема 1. *Пусть для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определена симметричная мера $m^{(n)}$ в X^n, $m^{(0)} = 1$. Предположим, что каждая $m^{(n)}$ тождественно равна нулю на диагонали X^n и что система этих мер мажорируема. Тогда $\{m^{(n)} : n = 0, 1, \ldots\}$ является системой приведенных моментных мер некоторого вероятностного распределения P на $(\mathcal{M}, \Im)$ в том и только в том случае, если для всех $D \in \mathcal{A}$ и всех измеримых $A^{(n)} \subseteq \mathcal{M}_D^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ имеют место следующие неравенства :*

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} m^{(n+s)}(A^{(n)*} \times D^s) \geq 0. \tag{5}$$

В этом случае левая часть P_D в (5) является сужением P на $\mathcal{M}_D$. Вероятностное распределение P единственно.

Замечание. В случае $n = 0$, (5) имеет вид

$$P_D^0 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} m^{(s)}(D^s) \geq 0.$$

Если распределение P существует, то $P_D^0 = P\binom{D}{0}$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что дана вероятностная мера P на $(\mathcal{M}, \Im)$, и докажем, что (5) выполнено. Абсолютная сходимость

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} m^{(n+s)}(A^{(n)*} \times D^s) \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} \nu^{n+s}(A^{(n)*} \times D^s) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} \nu^n(A^{(n)*})[\nu(D)]^s = \frac{\nu^n(A^{(n)*})}{n!} \cdot e^{\nu(D)} < \infty$$

рядов в (5) гарантирует правомочность проведенных ниже преобразований. Рассмотрим функции множества $P_D(A^{(n)})$, полученные из мер $m^{(n)}$ через (5). Легко проверить, что P_D является знакопеременной мерой (следует из (4) и из факта, что $m^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ являются мерами). Пусть $\overline{P}_D$, $D \in \mathcal{A}$ – сужение на $\mathcal{M}_D$ вероятностного распределения P. Наша цель – доказать, что $P_D(A) = \overline{P}_D(A)$. Достаточно показать это только для случая $A = A^{(k)} = \begin{pmatrix} D_1 & \ldots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix}$, где

$D_1,\dots,D_n$ попарно не пересекаются, $D = D_1\cup\dots\cup D_n$, $k_1,\cdots,k_n$ – неотрицательные целые числа, и $k = k_1+\dots+k_n$. Имеем

$$P_D\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & \dots & k_n\end{pmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{k!s!}m^{(k+s)}\left(\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & \dots & k_n\end{pmatrix}^* \times D^s\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{k_1!\cdots k_n!s!}m^{(k+s)}(D_1^{k_1}\times\dots\times D_n^{k_n}\times D^s).$$

Учитывая тождество

$$m(A\times(D_1\cup\dots\cup D_n)^s) = \sum_{s_1+\dots+s_n=s}\frac{s!}{s_1!\cdots s_n!}m(A\times D_1^{s_1}\times\dots\times D_n^{s_n}), \qquad (6)$$

где m – любая симметричная мера, а $D_1,\dots,D_n$ попарно не пересекаются, получаем

$$P_D\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & \dots & k_n\end{pmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{s_1+\dots+s_n=s}\frac{(-1)^s}{k_1!\cdots k_n!s_1!\cdots s_n!}m^{(k+s)}(D_1^{k_1+s_1}\times\dots\times D_n^{k_n+s_n}).$$

Обозначим через $D^{(k+s)}$ множество $(D_1^{k_1+s_1}\times\dots\times D_n^{k_n+s_n})\setminus$диагональ X^{k+s}. Пусть $l_1,\dots,l_n$ – неотрицательные целые числа. Простым комбинаторным вычислением получаем

$$card(D^{(k+s)}\cap \mathrm{m}^{k+s}) =$$

$$= \begin{cases}\binom{l_1}{k_1+s_1}(k_1+s_1)!\cdots\binom{l_n}{k_n+s_n}(k_n+s_n)!, & \text{если } l_i\ge k_i+s_i,\quad i=1,\dots,n\\ 0 & \text{в противном случае ,}\end{cases}$$

где $\mathrm{m}\in\begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n\\ l_1 & \cdots & l_n\end{pmatrix}$, а m^{k+s} – $(k+s)$-ая степень множества m. Отсюда следует

$$m^{(k+s)}(D_1^{k_1+s_1}\times\dots\times D_n^{k_n+s_n}) =$$

$$= \sum_{l_1=k_1+s_1}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=k_n+s_n}^{\infty}\frac{l_1!\cdots l_n!}{(l_1-k_1-s_1)!\cdots(l_n-k_n-s_n)!}P\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ l_1 & \dots & l_n\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$P_D\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & \dots & k_n\end{pmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{s_1+\dots+s_n=s}\sum_{l_1-k_1=s_1}^{\infty}\cdots\sum_{l_n-k_n=s_n}^{\infty}(-1)^s\times$$

$$\times\binom{l_1}{k_1}\binom{l_1-k_1}{s_1}\cdots\binom{l_n}{k_n}\binom{l_n-k_n}{s_n}P\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ l_1 & \dots & l_n\end{pmatrix}.$$

Меняя порядок суммирования по s и $s_1,\dots,s_n$, для $t_i = l_i-k_i$, $i=1,\dots,n$ получаем

$$P_D\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & \dots & k_n\end{pmatrix} = \sum_{s_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{s_n=0}^{\infty}\sum_{t_1=s_1}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=s_n}^{\infty}(-1)^{s_1+\dots+s_n}\times$$

$$\times\binom{t_1+k_1}{k_1}\binom{t_1}{s_1}\cdots\binom{t_n+k_n}{k_n}\binom{t_n}{s_n}P\begin{pmatrix}D_1 & \dots & D_n\\ t_1+k_1 & & t_n+k_n\end{pmatrix}.$$

Заменами порядка суммирования по s_i и t_j, приходим к результату

$$P_D\begin{pmatrix}D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & & k_n\end{pmatrix}=\sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty}\binom{t_1+k_1}{k_1}\cdots\binom{t_n+k_n}{k_n}\times$$

$$\times P\begin{pmatrix}D_1 & \dots & D_n\\ t_1+k_1 & & t_n+k_n\end{pmatrix}\times\sum_{s_1=0}^{t_1}(-1)^{s_1}\binom{t_1}{s_1}\cdots\sum_{s_n=0}^{t_n}(-1)^{s_n}\binom{t_n}{s_n}.$$

Согласно тождеству

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}=\begin{cases}0, & \text{если } k>0\\ 1, & \text{если } k=0,\end{cases}\tag{7}$$

это означает, что

$$P_D\begin{pmatrix}D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & & k_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & & k_n\end{pmatrix}=\overline{P}_D\begin{pmatrix}D_1 & \dots & D_n\\ k_1 & & k_n\end{pmatrix}.$$

Доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Сначала докажем, что P_D – вероятность на $\mathcal{M}_D$. Счетная аддитивность P_D непосредственно следует из счетной аддитивности мер $m^{(n)}$. Поэтому, достаточно доказать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_D(\mathcal{M}_D^{(n)})=1$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_D(\mathcal{M}_D^{(n)})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!s!}m^{(n+s)}(D^{n+s})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\binom{n+s}{s}\frac{1}{(n+s)!}m^{(n+s)}(D^{n+s}).$$

Обозначая $n+s=k$ и используя (7), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_D(\mathcal{M}_D^{(n)})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}m^{(k)}(D^k)\cdot\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}=m^{(0)}=1.$$

Теперь докажем, что система $\{P_D : D\in\mathcal{A}\}$ согласованна. Пусть $P_1=P_{D_1}$ и $P_2=P_{D_2}$ – вероятности на $\mathcal{M}_{D_1}$ и $\mathcal{M}_{D_2}$ соответственно, $D_1\subseteq D_2$. Для того, чтобы доказать, что P_1 является сужением P_2 на D_1, достаточно доказать равенство (2) для событий $A^{(n)}\subseteq\mathcal{M}_{D_1}^{(n)}$, $n=0,1,\ldots$. Обозначая $\Delta=D_2\setminus D_1$, замечаем, что

$$\pi^{-1}_{D_2,D_1}(A^{(n)})=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(A^{(n)}\times\binom{\Delta}{k}\right).$$

Ясно, что события $\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$ попарно не пересекаются. Таким образом,

$$\Sigma = P_2\left(\pi^{-1}_{D_2,D_1}(A^{(n)})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P_2\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+k)!s!} m^{(n+k+s)}\left(\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k}\right)^* \times D_2^s\right).$$

Теперь, из симметричности $m^{(n+k+s)}$

$$m^{(n+k+s)}\left(\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k}\right)^* \times D_2^s\right) = \binom{n+k}{k} m^{(n+k+s)}(A^{(n)*} \times \Delta^k \times D_2^s).$$

Принимая во внимание (6) и то, что $D_2 = \Delta \cup D_1$, $\Delta \cap D_1 = \emptyset$, для Σ получаем

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{s} \frac{(-1)^s}{n!k!l!(s-l)!} m^{(n+k+s)}(A^{(n)*} \times \Delta^k \times \Delta^l \times D_1^{s-l}).$$

Заменой порядка суммирования по s и l, для $r = k + l$, $t = s - l$ получаем

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=l}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!k!l!(s-l)!} m^{(n+k+s)}(A^{(n)*} \times \Delta^{k+l} \times D_1^{s-l}) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{r}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{t+l}}{n!(r-l)!l!t!} m^{(n+r+t)}(A^{(n)*} \times \Delta^r \times D_1^t) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{n!t!} m^{(n+r+t)}(A^{(n)*} \times \Delta^r \times D_1^t) \left[\sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l}\right].$$

Наконец, на основании (7)

$$\Sigma = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{n!t!} m^{(n+t)}(A^{(n)*} \times D_1^t) = P_1(A^{(n)}),$$

что доказывает согласованность P_1 и P_2. На основании предложения 2, существует распределение P точечного процесса с сужениями P_D. Предположим, что $\overline{m}^{(n)}$ – приведенная n-ая моментная мера распределения P. Докажем, что $\overline{m}^{(n)} = m^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Для этого достаточно показать совпадение значений мер $\overline{m}^{(n)}$ и $m^{(n)}$ на множествах $D_1 \times \cdots \times D_n$ с попарно непересекающимися D_i. По определению моментных мер

$$\overline{m}^{(n)}(D_1 \times \cdots \times D_n) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1 \cdots k_n P\begin{pmatrix} D_1 & \ldots & D_n \\ k_1 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Беря в (5) $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ и $A^{(k)} = \begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix}$ с $k = k_1 + \cdots + k_n$, получаем

$$P\begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix} = P_D\begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k!s!} m^{(k+s)}\left(\begin{pmatrix} D_1 & \cdots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{pmatrix}^* \times D^s\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k_1! \cdots k_n! s!} m^{(k+s)}(D_1^{k_1} \times \cdots \times D_n^{k_n} \times D^s).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{m}^{(n)}(D_1 \times \cdots \times D_n) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k_1! \cdots k_n! s!} m^{(k+n+s)}(D_1^{k_1+1} \times \cdots \times D_n^{k_n+1} \times D^s) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} m^{(k+n+s)}(D_1 \times \cdots \times D_n \times D^s \times D_1^{k_1} \times \cdots \times D_n^{k_n}).$$

Обозначая $k = k_1 + \cdots + k_n$, из (6) получаем

$$\overline{m}^{(n)}(D_1 \times \cdots \times D_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \times$$

$$\times m^{(k+n+s)}(D_1 \times \cdots \times D_n \times D^s \times D_1^{k_1} \times \cdots \times D_n^{k_n}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} m^{(k+n+s)}(D_1 \times \cdots \times D_n \times D^{k+s}).$$

Наконец, заменой $r = k + s$ переменных приходим к

$$\overline{m}^{(n)}(D_1 \times \cdots \times D_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} m^{(n+r)}(D_1 \times \cdots \times D_n \times D^r) \times \left[\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\right].$$

Согласно (7) последнее выражение совпадает с $m^{(n)}(D_1 \times \cdots \times D_n)$. Теорема 1 доказана.

§4. ОДИН СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС МОМЕНТНЫХ МЕР

Теперь мы применяем критерий Теоремы 1 к одному классу моментных мер, представляющих собой суммы зависящих от конечных графов знакопеременных мер. Выводятся достаточные условия, при которых эти суммы становятся приведенными моментными мерами точечного процесса.

Определение 4. *Граф* – это пара $g = (V, E)$, где V – конечное множество натуральных чисел, E – множество неупорядоченных пар элементов V. Элементы V называются *вершинами* графа g; пара $\{v_1, v_2\} \in E$ называется *ребром*, соединяющим вершины v_1 и v_2. Вершина называется *изолированной*, если нет содержащих ее ребер. Через $|g|$ обозначаем число вершин графа g.

Определение 5. Для данных двух графов $g_1 = (V_1, E_1)$ и $g_2 = (V_2, E_2)$ пишем $g_1 \sim g_2$ или $g_2 = \tau g_1$, если существует биекция $\tau : V_1 \longmapsto V_2$ такая, что $\{v, w\} \in E_1$ тогда и только тогда, когда $\{\tau v, \tau w\} \in E_2$.

Мы будем рассматривать знакопеременные меры m_g, зависящие от графов g. Предполагаем, что m_g – знакопеременная мера в $X^{|g|}$. В случае $g_2 = \tau g_1$ пишем $m_{g_1} \sim m_{g_2}$, если знакопеременная мера m_{g_2} является образом знакопеременной меры m_{g_1} при отображении τ. Здесь применяем то, что, без ограничения общности, τ может быть рассмотрено как перестановка последовательности $(1, ..., n)$. Нам нужны следующие определения.

Для графов $g = (V, E)$, $g_1 = (V_1, E_1)$ и $g_2 = (V_2, E_2)$ пишем $g = g_1 + g_2$, если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Совокупность $\{m_g\}$ зависящих от графов знакопеременных мер называется *таблицей*, если

(I) из $\quad g_1 \sim g_2$ следует $m_{g_1} \sim m_{g_2}$,

(II) из $\quad g = g_1 + g_2$ следует $m_g = m_{g_1} \times m_{g_2}$.

$G(M)$ – это класс всех графов $g = (M, E)$ с множеством вершин M. В случае $M = \{1, \ldots, n\}$, вместо $G(M)$ пишем просто $G(n)$.

Для каждых двух непересекающихся множеств N и S натуральных чисел $\overline{B}(N, S)$ обозначает класс всех графов $g = (N \cup S, E)$, удовлетворяющих условию : для каждой вершины из S существует путь, соединяющий ее с некоторой вершиной из N. Если $N = \{1, \ldots, n\}$ и $S = \{n+1, \ldots, n+s\}$, то пишем $\overline{B}(n, s)$. Заметим, что класс $\overline{B}(N, S)$ графов был рассмотрен в [1] и [6].

Наконец, обозначаем $m^{(n,s)} = (-1)^s \sum\limits_{g \in \overline{B}(n,s)} m_g$, $n \geq 1$, $s \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть $\{m_g\}$ – таблица знакопеременных мер, тождественно равных нулю на диагонали. Если существует конечная на $\mathcal{A}$ мера ν, для которой*

$$0 \leq m^{(n,s)}(A^{(n)} \times B^{(s)}) \leq \nu^n(A^{(n)}) \cdot s! \cdot b^s, \tag{8}$$

где $A^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$ и $B^{(s)} \in \mathcal{A}^{(s)}$ – ограниченные измеримые множества, $b < 1$ – константа, не зависящая от $B^{(s)}$, то существует единственная вероятность P на $(\mathcal{M}, \mathfrak{I})$ с приведенными моментными мерами $m^{(n)} = \sum\limits_{g \in G(n)} m_g$.

Доказательство. Будем пользоваться теоремой 1. Так как $\overline{B}(n,0) = G(n)$, заключаем, что $m^{(n)} = m^{(n,0)}$, и из (8), в случае $s = 0$, следует, что $m^{(n)}$ мажорируема мерой ν^n. Для доказательства неотрицательности рядов (5) рассматриваем два случая : $n = 0$ и $n \geq 1$. Заметим, что (8) гарантирует абсолютную сходимость рядов (5), а этим и правомочность сделанных ниже шагов.

a) Случай $n = 0$. Имеем

$$P_D^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m^{(n)}(D^n) = 1 - m_1(D) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{g \in G(n)} m_g(D^n).$$

Здесь m_1 – мера в X, соответствующая графу g с $|g| = 1$. Пусть

$$G(n,k) = \{g \in G(n) : \ g \text{ имеет точно } n-k \text{ изолированных вершин}\}.$$

Тогда

$$G(n) = G(n,0) \cup \bigcup_{k=2}^{n} G(n,k).$$

Заметим, что $G(n,0)$ состоит из единственного элемента g_n без ребер. На основании условия (II) мера m_{g_n}, соответствующая графу g_n, факторизуется как $m_{g_n} = m_1^n$, и мы получаем

$$P_D^0 = 1 - m_1(D) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\sum_{g \in G(n,0)} m_g(D^n) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{g \in G(n,k)} m_g(D^n) \right] =$$

$$= 1 - m_1(D) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[-m_1(D)]^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=2}^{n} \sum_{g \in G(n,k)} m_g(D^n) =$$

$$= e^{-m_1(D)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=2}^{n} \sum_{g \in G(n,k)} m_g(D^n).$$

Пусть $g \in G(n,k)$. Тогда g имеет $n-k$ изолированных вершин, и, согласно условию (II), $m_g = m_{g'} \times m_1^{n-k}$, где g' – граф с k неизолированными вершинами. Из условия (I) следует, что $m_{g'}$ не зависит от выбора этих k вершин. Мы можем предположить, что $\{1,\ldots,k\}$ – множество вершин графа g'. Обозначая через $\overline{G}(k)$ множество всех графов g' с неизолированными вершинами $1,\ldots,k$, для P_D^0 получаем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} [m_1(D)]^{n-k} \sum_{g \in \overline{G}(k)} m_g(D^k).$$

Заменим порядок суммирования по n и k. Получаем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g\in\overline{G}(k)} m_g(D^k) \left[\sum_{n-k=0}^{\infty} \frac{[-m_1(D)]^{n-k}}{(n-k)!} \right].$$

Поэтому

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g\in\overline{G}(k)} m_g(D^k) \right]. \qquad (9)$$

Пусть G_k^m есть множество всех графов из $\overline{G}(k)$ с m компонентами связности. Итак, $\overline{G}(k) = \bigcup\limits_m G_k^m$. Каждый $g \in G_k^m$ может быть представлен в виде $g = \{g_1, \dots, g_m\}$ неупорядоченной последовательности его компонент связности. Согласно условию (II), $m_g = m_{g_1} \times \dots \times m_{g_m}$. Пусть $k_1, \dots, k_m$ – числа вершин подграфов $g_1, \dots, g_m$ соответственно. Теперь мы проводим суммирование в (5) по всем упорядоченным последовательностям $(g_1, \dots, g_m)$, компенсируя это множителем $(m!)^{-1}$.

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_m \sum_{g\in G_k^m} m_g(D^k) \right] = e^{-m_1(D)} \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_m \frac{1}{m!} \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_m)\\ k_1+\dots+k_m=k}} \frac{k!}{k_1!\cdots k_m!} \sum_{(g_1,\dots,g_m)\in G_{k_1}^1\times\dots\times G_{k_m}^1} \prod_{i=1}^m m_{g_i}(D^{k_i}) \right].$$

Замечая, что

$$\sum_{(g_1,\dots,g_m)\in G_{k_1}^1\times\dots\times G_{k_m}^1} \prod_{i=1}^m m_{g_i}(D^{k_i}) = \prod_{i=1}^m \sum_{g_i\in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i})$$

и меняя порядок суммирования по k и m, получаем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=2m}^{\infty} \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_m)\\ k_1+\dots+k_m=k}} \frac{(-1)^k}{k_1!\cdots k_m!} \prod_{i=1}^m \sum_{g_i\in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i}) \right] =$$

$$= e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1,\dots,k_m\geq 2} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_m}}{k_1!\cdots k_m!} \prod_{i=1}^m \sum_{g_i\in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i}) \right].$$

Окончательно, учитывая

$$\sum_{k_1,\dots,k_m\geq 2} \frac{(-1)^{k_1+\dots+k_m}}{k_1!\cdots k_m!} \prod_{i=1}^m \sum_{g_i\in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i}) = \prod_{i=1}^m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g\in G_k^1} m_g(D^k),$$

имеем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{m!}\right] = e^{-m_1(D)+q} \quad \text{с } q = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{g\in G_k^1} m_g(D^k).$$

Неотрицательность P_D^0 доказана.

b) Случай $n \geq 1$. Здесь имеем

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!s!}m^{(n+s)}(A^{(n)*}\times D^s) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!s!}\sum_{g\in G(n+s)} m_g(A^{(n)*}\times D^s).$$

Рассмотрим множество $B(n,k)$ графов с вершинами $1,\ldots,n,n+1,\ldots,n+k$, удовлетворяющих условию, что вершины $n+1,\ldots,n+k$ неизолированы. Аналогичными случаю a) шагами получаем.

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!s!}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}[m_1(D)]^{s-k}\sum_{g\in B(n,k)} m_g(A^{(n)*}\times D^k).$$

Замена порядка суммирования дает

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n!k!}\sum_{g\in B(n,k)} m_g(A^{(n)*}\times D^k)\left[\sum_{s-k=0}^{\infty}\frac{[-m_1(D)]^{s-k}}{(s-k)!}\right] =$$

$$= e^{-m_1(D)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n!k!}\sum_{g\in B(n,k)} m_g(A^{(n)*}\times D^k).$$

Пусть $g\in B(n,k)$. Рассмотрим разбиение $\{n+1,\ldots,n+k\} = S\cup M$, где S – множество вершин из $\{n+1,\ldots,n+k\}$, для каждой из которых существует путь, соединяющий ее с некоторой вершиной из $\{1,\ldots,n\}$, а $M = \{n+1,\ldots,n+k\}\setminus S$. Граф g представляется в виде $g = g_1+g_2$, где g_2 – подграф g с множеством вершин M, а g_1 – дополнение к g_2. Имеем $m_g = m_{g_1}\times m_{g_2}$. Очевидным образом, $g_1\in\overline{B}(n,S)$, и $g_2\in\overline{G}(M)$. Поэтому

$$\sum_{g\in B(n,k)} m_g(A^{(n)*}\times D^k) = \sum_{g\in\overline{B}(n,k)} m_g(A^{(n)*}\times D^k)+$$

$$+\sum_{\substack{(S,M)\\ M\neq\emptyset}}\ \sum_{g_1\in\overline{B}(n,S)} m_{g_1}(A^{(n)*}\times D^s)\times\sum_{g_2\in\overline{G}(M)} m_{g_2}(D^{k-s}), \tag{10}$$

где $s = |S|$. Суммы $\sum\limits_{g_1\in\overline{B}(n,S)}$ и $\sum\limits_{g_2\in\overline{G}(M)}$ в (10) зависят только от s. Это приводит к

$$P_D(A^{(n)}) = e^{-m_1(D)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n!k!}\sum_{g\in\overline{B}(n,k)} m_g(A^{(n)*}\times D^k)+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n!k!}\sum_{s=0}^{k-2}\binom{k}{s}\sum_{g_1\in\overline{B}(n,s)}m_{g_1}(A^{(n)*}\times D^s)\times\sum_{g_2\in\overline{G}(k-s)}m_{g_2}(D^{k-s})\Bigg].$$

Меняя местами суммы по s и k, получаем

$$P_D(A^{(n)})=e^{-m_1(D)}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n!k!}\sum_{g\in\overline{B}(n,k)}m_g(A^{(n)*}\times D^k)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=s+2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n!s!(k-s)!}\sum_{g_1\in\overline{B}(n,s)}m_{g_1}(A^{(n)*}\times D^s)\times\sum_{g_2\in\overline{G}(k-s)}m_{g_2}(D^{k-s})\Bigg]=$$

$$=e^{-m_1(D)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!s!}\sum_{g\in\overline{B}(n,s)}m_g(A^{(n)*}\times D^s)\times$$

$$\times\Bigg[1+\sum_{k-s=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-s}}{(k-s)!}\sum_{g\in\overline{G}(k-s)}m_g(D^{k-s})\Bigg].$$

На основании (9) заключаем, что

$$P_D(A^{(n)})=P_D^0\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!s!}\sum_{g\in\overline{B}(n,s)}m_g(A^{(n)*}\times D^s)=P_D^0\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{n!s!}m^{(n,s)}(A^{(n)*}\times D^s).$$

Теперь, $P_D(A^{(n)})\geq 0$ следует из неотрицательности P_D^0 и условия (8). Теорема 2 доказана.

§5. СЛУЧАЙ АБСОЛЮТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

В этом параграфе мы рассматриваем еще один специальный класс моментных мер. Предполагаем, что в пространстве X фиксирована локально–финитная мера ν и что знакопеременные меры m_g, рассмотренные в предыдущем параграфе, обладают абсолютными плотностями с видом произведения относительно степеней ν. Теорема 3 указывает на достаточные условия, при которых такие меры становятся приведенными моментными мерами. В конце параграфа рассматриваются некоторые следствия этого результата. Дадим необходимые определения.

Пусть дана симметричная функция $h(x,y) : X^2 \longmapsto [0,1]$, определенная на квадрате пространства X. Положим $\overline{h}(x,y) = h(x,y) - 1$. Для каждого графа $g = (V, E)$ введем обозначение

$$f_g(\{x_i\}_{i\in V})=\prod_{\{i,j\}\in E}\overline{h}(x_i,x_j).$$

Рассмотрим функции $f^{(N,S)}$, $n = |N| \geq 1, s = |S| \geq 0$, определенные как

$$f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) = \sum_{g \in \overline{B}(N,S)} f_g(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}),$$

где $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ и $S = \{i_{n+1}, \dots, i_{n+s}\}$ являются непересекающимися множествами натуральных чисел, причем $N \neq \emptyset$. В случае $N = N_0 = \{1, \dots, n\}$, $S = S_0 = \{n+1, \dots, n+s\}$ вместо $f^{(N,S)}$ пишем $f^{(n,s)}$. Для каждого множества $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ через N^* обозначаем множество $N \setminus \{i_1\}$ (для однозначности N^* считаем, что i_1 – минимальный элемент N).

Следующую лемму ([1]) будем использовать при доказательстве теоремы 3.

Лемма. *(см. [1]). Функции $f^{(N,S)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) =$$

$$= \prod_{k=2}^{n} h(x_{i_1}, x_k) \cdot \sum_{J \subseteq S} \prod_{i \in J} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \cdot f^{(N^* \cup J, S \setminus J)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}), \quad n \geq 2, \tag{11}$$

$$f^{(\{i_1\},S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{s+1}}) = \sum_{\substack{J \subseteq S \\ J \neq \emptyset}} \prod_{i \in J} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \cdot f^{(J, S \setminus J)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{s+1}}), \quad n = 1, \ s > 0.$$

Доказательство. Мы докажем только первое из приведенных соотношений (случай $n \geq 2$); второе может быть получено аналогично. Введем некоторые обозначения. Для каждого графа $g = (N \cup S, E)$ из $\overline{B}(N,S)$ пусть

$$g^* = (N^* \cup S, \{\{i,j\} \in E : \ i,j \neq i_1\}), \quad I = \{i \in N^* : \ \{i_1, i\} \in E\},$$

$$J = \{i \in S : \ \{i_1, i\} \in E\}, \quad J^c = S \setminus J.$$

Для каждого $g \in \overline{B}(N,S)$ граф $g^* \in \overline{B}(N^* \cup J, J^c)$. Действительно, пусть $j_0 \in J^c$. Так как $g \in \overline{B}(N,S)$, то существует путь $p_k = ((j_0, j_1), \dots, (j_{k-2}, j_{k-1}), (j_{k-1}, j_k))$ в g, соединяющий вершину j_0 с некоторой вершиной j_k из N. Если $j_k \neq i_1$, то $j_k \in N^* \cup J$ и, таким образом, $g^* \in \overline{B}(N^* \cup J, J^c)$. Если $j_k = i_1$, то $j_{k-1} \in N^* \cup J$ (в J^c нет вершин, соединенных с вершиной i_1), и $p_{k-1} = ((j_0, j_1), \dots, (j_{k-2}, j_{k-1}))$ является путем, соединяющим j_0 с некоторой вершиной из $N^* \cup J$. Теперь получаем

$$f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) = \sum_{g \in \overline{B}(N,S)} f_g(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) =$$

$$= \sum_{g\in\overline{B}(N,S)} \prod_{i\in I} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \prod_{i\in J} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \cdot f_{g^*}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}) =$$

$$= \sum_{I\subseteq N^*} \prod_{i\in I} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \sum_{J\subseteq S} \prod_{i\in J} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \sum_{g^*\in\overline{B}(N^*\cup J, J^c)} f_{g^*}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}).$$

Из равенства $\sum_{I\subseteq N^*} \prod_{i\in I} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) = \prod_{k=2}^{n} [\overline{h}(x_{i_1}, x_k) + 1] = \prod_{k=2}^{n} h(x_{i_1}, x_k)$, очевидно, следует утверждение леммы.

Теорема 3. *Пусть X – польское пространство, а $h(x,y) : X^2 \longmapsto [0,1]$ – симметричная функция, т.е. $h(x,y) = h(y,x)$ для всех $x,y \in X$. Пусть ν_1 – конечная на A мера в X. Если имеет место неравенство*

$$c = \sup_x \int_X [1 - h(x,y)]\, \nu_1(dy) < \frac{1}{e},$$

где e – основание натурального логарифма, и знакопеременные меры

$$m_g(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \prod_{\{i,j\}\in g} [h(x_i, x_j) - 1]\, \nu_1(dx_1) \cdots \nu_1(dx_n),$$

тождественно равные нулю на диагонали, то семейство $\{m_g\}$ является таблицей и удовлетворяет условию (8) Теоремы 2. Приведенная n-ая моментная мера $m^{(n)}$ соответствующего распределения P имеет вид

$$m^{(n)}(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \prod_{\{i,j\}\subseteq\{1,\dots,n\}} h(x_i, x_j)\, \nu_1(dx_1) \cdots \nu_1(dx_n).$$

Доказательство. Условия (I) и (II) непосредственно следуют из определения мер m_g. Покажем (8). Так как знакопеременная мера $m^{(n,s)}$ является интегралом функции $(-1)^s f^{(n,s)}$ (относительно меры ν^{n+s}), то достаточно доказать, что $(-1)^s f^{(N,S)} \geq 0$ для всех N и S. Применяем индукцию по $n + s = |N| + |S|$. Случай $n + s = 1$ очевиден. Рассмотрим только случай $n \geq 2$. Согласно (11), получаем

$$(-1)^s f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) =$$

$$= \prod_{k=2}^{n} h(x_{i_1}, x_{i_k}) \sum_{J\subseteq S} \left[(-1)^j \prod_{i\in J} \overline{h}(x_{i_1}, x_i) \right] \cdot \left[(-1)^{s-j} f^{(N^*\cup J, J^c)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}) \right].$$

Теперь, неотрицательность $(-1)^s f^{(N,S)}$ следует из неравенств $h(x,y) \geq 0$, $\overline{h}(x,y) \leq 0$ и индукционного предположения. Для доказательства того, что $m^{(n,s)}$ может быть мажорируема как указано в условии (8), индукцией по $n+s$ покажем, что равномерно для всех $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{X^s}(-1)^s f^{(N,S)}(x_{i_1},\dots,x_{i_n},x_{i_{n+1}},\dots,x_{i_{n+s}})\nu_1(dx_{i_{n+1}})\cdots\nu_1(dx_{i_{n+s}}) \leq s!c^s e^{n+s-1}, \tag{12}$$

где $N=\{i_1,\dots,i_n\}$, $S=\{i_{n+1},\dots,i_{n+s}\}$. Если $n+s=1$, то ясно, что (12) выполнено. Далее, для случая $n\geq 2$, согласно (11), получаем

$$\Sigma_1=\int_{X^s}(-1)^s f^{(N,S)}(x_{i_1},\dots,x_{i_{n+s}})\nu_1(dx_{i_{n+1}})\cdots\nu_1(dx_{i_{n+s}}) \leq$$

$$\leq \sum_{J\subseteq S}\int\limits_{X^s}[(-1)^j\prod_{i\in J}\overline{h}(x_{i_1},x_i)]\times$$

$$\times[(-1)^{s-j}f^{(N^*\cup J,J^c)}(x_{i_2},\dots,x_{i_{n+s}})]\nu_1(dx_{i_{n+1}})\cdots\nu_1(dx_{i_{n+s}}).$$

Замечая, что интеграл в правой части этого неравенства зависит лишь от $j=|J|$, имеем

$$\Sigma_1\leq\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\int\limits_{X^j}\prod_{k=n+1}^{n+j}[1-h(x_{i_1},x_{i_k})]\nu_1(dx_{i_{n+1}})\cdots\nu_1(dx_{i_{n+j}})\times$$

$$\times\int\limits_{X^{s-j}}(-1)^{s-j}f^{(N^*\cup J,J^c)}(x_{i_2},\dots,x_{i_{n+s}})\nu_1(dx_{i_{n+j+1}})\cdots\nu_1(dx_{i_{n+s}})\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}(s-j)!c^{s-j}e^{n+s-2}\cdot\left[\int\limits_X[1-h(x_{i_1},y)]\nu_1(dy)\right]^j\leq$$

$$\leq s!c^s e^{n+s-2}\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{j!}\leq s!c^s e^{n+s-1}.$$

Таким образом, (12) выполнено. Для $m^{(n,s)}$ получаем

$$m^{(n,s)}(A^{(n)}\times B^{(s)})=\int\limits_{A^{(n)}}\int\limits_{B^{(s)}}(-1)^s f^{(n,s)}(x_1,\dots,x_{n+s})\nu_1(dx_1)\cdots\nu_1(dx_{n+s})\leq$$

$$\leq\int\limits_{A^{(n)}}\nu_1(dx_1)\cdots\nu_1(dx_n)\int\limits_{X^s}(-1)^s f^{(n,s)}(x_1,\dots,x_{n+s})\nu_1(dx_{n+1})\cdots\nu_1(dx_{n+s})\leq$$

$$\leq s!c^s e^{n+s-1} \cdot \nu_1^n(A^{(n)}) \leq [e\nu_1]^n(A^{(n)}) \cdot s!(ce)^s.$$

Итак, условие (8) выполнено при $\nu = e\nu_1$ и $b = ce$. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы хотим рассмотреть теорему 3 в трех частных случаях. Утверждение примера 1 – один из результатов [1]. Точечные процессы на целочисленных решетках из примера 2 рассматриваются в статистической механике. Мы предполагаем, что точечные процессы из примера 3 играют важную роль в теории маркированных гиббсовских точечных процессов.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^d$, и пусть дана симметричная функция $h(x,y) : \mathbb{R}^d \times \times \mathbb{R}^d \longmapsto [0,1]$. Пусть α – неотрицательное вещественное число. Рассматривая в качестве ν_1 лебеговскую меру в $\mathbb{R}^d$ с интенсивностью α и меры m_g, определенные в теореме 3, получаем : если имеет место неравенство $\alpha ce < 1$, где

$$c = \sup_x \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h(x,y)]dy,$$

то существует единственный точечный процесс с приведенной n-ой моментной мерой

$$m^{(n)}(dx_1 \times \cdots \times dx_n) = \alpha^n \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} h(x_i, x_j) dx_1 \cdots dx_n.$$

Пример 2. Пусть X – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, т.е. $X = Z^d$. Предположим, что даны две функции $\nu : X \longmapsto [0,\infty)$ и $0 \leq h(x,y) \leq 1$, где $h(x,y)$ симметрична и равна нулю при совпадающих значениях аргументов. Если имеет место неравенство

$$ce < 1, \quad \text{где } c = \sup_x \sum_{y \in Z^d} [1 - h(x,y)]\nu(y),$$

то существует единственный точечный процесс на Z^d, для которого значения функций

$$f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,\dots,n\}} h(x_i,x_j)\nu(x_1)\cdots\nu(x_n), \quad n = 1,2,\dots$$

служат вероятностями того, что имеется по одной точке реализации в положениях x_i, $i = 1,\dots,n$ (в случае $n = 1$, $f(x) = \nu(x)$).

Пример 3. (Маркированные точечные процессы в $\mathbb{R}^d$). Предположим, что $X = \mathbb{R}^d \times \{1,\ldots,r\}$. Пусть дано семейство

$$\{h_{ij}(x) : \mathbb{R}^d \longmapsto [0,1] : \ h_{ij} = h_{ji}, \ h_{ij}(x) = h_{ji}(-x), \ 1 \leq i,j \leq r\}$$

симметричных функций и неотрицательные вещественные числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$. Полагая $h((x,i),(y,j)) = h_{ij}(x-y) : X^2 \longmapsto [0,1]$ и рассматривая в качестве меры ν_1 ту, сужение которой на $\mathbb{R}^d \times \{i\}$, $i = 1,\ldots,r$ есть лебеговская мера в R^d с интенсивностью α_i, из теоремы 3 получаем : если выполнено неравенство $ce < 1$, где $c = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} [1 - h_{ij}(x)]dx$, то функции

$$\begin{cases} f(x,i) \equiv \alpha_i, \\ f((x_1,k_1),\ldots,(x_n,k_n)) = \prod_{\{i,j\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} h_{k_ik_j}(x_i - x_j) \end{cases}$$

являются абсолютными плотностями (относительно степеней меры ν_1) единственного маркированного точечного процесса в $\mathbb{R}^d$ с марками $1,\ldots,r$. Вероятность того, что в каждом интервале (x_i, x_i+dx_i) имеется по одной точке с маркой k_i, $i = 1,\ldots,n$, равна $\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_n} f((x_1,k_1),\ldots,(x_n,k_n))dx_1\cdots dx_n$.

ABSTRACT. The paper considers the problem of description of simple point processes in Polish spaces by means of their reduced moment measures basing on Inclusion-Exclusion type formulae. A theorem is proved stating that these formulae provide complete description of point processes for dominated sequences of moment measures. Two types of point processes are considered, playing a role within the theory of Gibbs point processes. Similar results for point processes in Euclidean spaces under assumption of existence of densities have been obtained earlier by R. V. Ambartzumian and H. S. Sukiasian.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, H. S. Sukiasian, "Inclusion-Exclusion and Point Processes", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 15 – 31, 1991.
2. R. V. Ambartzumian, "Random graph approach to Gibbs processes with pair interaction", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 3 – 14, 1991.
3. R. V. Ambartzumian, "On condensable point processes", New Trends in Prob. and Stat., VSP/ Mokslas, vol. 1, pp. 655 – 667, 1991.
4. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Наука, Москва, 1989.
5. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, Безгранично делимые точечные процессы, Наука, Москва, 1982.
6. Д. Рюэль, Статистическая механика, Мир, Москва, 1971.

19 ноября 1996

Ереванский государственный университет

ОБ УРАВНЕНИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

О. Р. Назарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В настоящей работе рассматривается следующее уравнение восстановления : $f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)dt$, где ядро K удовлетворяет условиям $0 \leq K \in L_1 \cap L_p$, $p > 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$, $K(\pm\infty) = 0$, $\chi = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx \neq 0$. Доказывается, что если $g \in L_1(-\infty, \infty)$ и $g(\pm\infty) = 0$, то для основного решения уравнения восстановления выполняются равенства $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = \chi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В теории вероятностей и математической физике важные применения имеют следующие интегральные уравнения :

1) уравнения восстановления на полуоси

$$f(x) = g(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где ядро V удовлетворяет условиям

$$V \geq 0, \quad V \in L_p^+, \quad \gamma \equiv \int_0^\infty V(x)\,dx = 1. \tag{1.2}$$

Здесь $L_p^+ \equiv L_p(0, \infty)$, $p \geq 1$;

2) уравнения восстановления на всей прямой

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^\infty K(x-t)f(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где ядро K удовлетворяет условиям

$$0 \leq K \in L_1 \equiv L_1(-\infty, \infty), \quad \int_{-\infty}^\infty K(x)\,dx = 1. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что функция $K(x)$ является плотностью вероятности некоторой случайной величины ξ. Уравнение (1.1) является частным случаем (1.3), когда ξ принимает только неотрицательные значения, $g(x) = K(x) = 0$, при $x < 0$.

В теории восстановления важное значение имеет задача изучения асимптотических свойств в бесконечности решений уравнений (1.1) и (1.3). Эта задача достаточно подробно изучена в случае уравнения (1.1), (1.2). Ниже мы сформулируем два классических результата в этом направлении, принадлежащих В. Л. Смиту и С. Карлину.

Пусть $\Phi(x)$ – резольвентная функция (*функция восстановления*) уравнения (1.1), определяемая из уравнения восстановления

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.1) можно выразить через $\Phi(x)$:

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)g(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Теорема С. *(В. Л. Смит [3], [4]) Пусть $V \in L_p^+$ для некоторого $p > 1$ и существует $V(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = 0$. Тогда*

$$\Phi(+\infty) = \nu^{-1}, \quad \nu \equiv \int_0^\infty xV(x)\,dx. \tag{1.7}$$

Если $\nu = \infty$, то $\nu^{-1} = 0$.

Нижеприводимая теорема С. Карлина относится к уравнению восстановления на всей прямой. В частном случае, когда случайная величина ξ обладает плотностью K, теорема Карлина принимает следующий вид :

Теорема К. *(С. Карлин [1], [2]) Пусть ядро K уравнения (1.3) удовлетворяет условиям*

$$\int_{-\infty}^\infty |x|K(x)\,dx < \infty, \quad \chi \equiv \int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx \neq 0. \tag{1.8}$$

Если $g \in L_1(\mathbb{R})$, $g(\pm\infty) = 0$ и f – ограниченная функция, удовлетворяющая уравнению (1.3), то существуют пределы $f(\pm\infty)$ и

$$f(+\infty) - f(-\infty) = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^\infty g(x)\,dx. \tag{1.9}$$

Теорема К не содержит утверждения о существовании решения уравнения (1.3), (1.4). В работе Н. Б. Енгибаряна [5] получено усиление теоремы К, которое мы также сформулируем в частном случае уравнения (1.3).

Рассмотрим банаховы пространства $M \equiv L_\infty$, M_u, M_0, C_M, C_u, C_0 функций, определенных на $\mathbb{R}$. Через M и $C_M \subset M$ обозначаются, соответственно, пространства ограниченных и непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$. Если $f \in M_u \subset M$ или $f \in C_u \subset C_M$, то существуют конечные пределы $f(\pm\infty)$. Если $f \in M_0 \subset M$ или $f \in C_0 \subset C_u$, то $f(\pm\infty) = 0$.

Теорема Е. *(см. [5]). Если $g \in L_1 \cap M_0$ и $\chi \neq 0$, то основное решение уравнения (1.3), (1.4) имеет вид*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1 \in C_u, \quad f_2 \in L_1 \cap M_0$$

и обладает свойствами

$$f(-\infty) = f_1(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = f_1(+\infty) = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx. \tag{1.10}$$

Целью настоящей работы является обобщение теоремы С на случай уравнения (1.3), (1.4). Применяемый метод основан на использовании теоремы С и метода доказательства теоремы Е.

§2. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (1.3)

Пусть Ω – алгебра интегральных операторов $\mathcal{K}$ вида

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)\, dt, \quad K \in L_1, \tag{2.1}$$

и пусть E – одно из следующих банаховых пространств, определенных на $\mathbb{R}$ функций : L_p $(p \geq 1)$, $M \equiv L_\infty$, M_u, M_0, C_M, C_u, C_0. Оператор $\mathcal{K} \in \Omega_A$ действует в любом из пространств E, причем (см. [5])

$$||\mathcal{K}||_E \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|\, dx. \tag{2.2}$$

Мы будем исследовать уравнение (1.3) в случае, когда ядро K удовлетворяет условиям (1.4), (1.8) и дополнительным условиям

$$K \in L_1 \cap L_p, \quad p > 1, \quad K(\pm\infty) = 0. \tag{2.3}$$

Перепишем уравнение (1.3) в операторной форме

$$(I-\mathcal{K})f=g, \quad \mathcal{K}\in\Omega, \tag{2.4}$$

где I – единичный оператор и рассмотрим факторизацию

$$I-\mathcal{K}=(I-\mathcal{V}_-)(I-\mathcal{V}_+), \tag{2.5}$$

где $\mathcal{V}_\pm\in\Omega$ – искомые (формально) вольтерровые операторы вида

$$(\mathcal{V}_+f)(x)=\int_{-\infty}^{x}V_+(x-t)f(t)\,dt,\ (\mathcal{V}_-f)(x)=\int_{x}^{\infty}V_-(t-x)f(t)\,dt,\ V_\pm\in L_1(0,\infty).$$

Факторизация (2.5) эквивалентна следующей системе нелинейных уравнений факторизации (см. [7])

$$V_\pm(x)=K_\pm(x)+\int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t)\,dt, \quad x>0, \tag{2.6}$$

где $K_\pm(x)=K(\pm x)$. В случае выполнения условий (1.4) система (2.6) имеет так называемое *каноническое решение* (см. [7]), которое обладает свойствами

$$V_\pm\ge 0, \quad V_\pm\in L_1^+, \quad \gamma_\pm\equiv\int_0^\infty V_\pm(x)\,dx\le 1, \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+)=0. \tag{2.7}$$

Пусть выполнены условия (1.8), т.е. существует конечное, отличное от нуля математическопе ожидание χ случайной величины ξ. Если $\chi>0$, то $\gamma_+=1$, $\gamma_-<1$. Если $\chi<0$, то $\gamma_+<1$, $\gamma_-=1$.

Теперь мы докажем одно важное свойство канонического решения (V_+,V_-) системы (2.6).

Лемма 1. *Пусть ядро K удовлетворяет условиям (1.4), (1.8) и (2.3). Тогда*

$$V_\pm\in L_p^+, \quad V(\pm\infty)=0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\chi>0$. Тогда $\gamma_+=1$ и $\gamma_-<1$. Первое из уравнений (2.6) можно интерпретировать как линейное уравнение относительно V_+ с ядром V_- и переписать в операторном виде

$$V_+=K_++\mathcal{V}_-V_+. \tag{2.9}$$

Из $\gamma_-<1$ и неравенств (2.2) следует, что $\mathcal{V}_-$ – сжимающий оператор в пространствах E. Следовательно, (2.9) имеет единственное решение V_+ и

$$V_+(x)=K_+(x)+\int_x^\infty \Phi_-(t-x)K_+(t)\,dt, \tag{2.10}$$

где Φ_- – резольвентная функция оператора $\mathcal{V}_-$, определяемая из уравнения восстановления

$$\Phi_-(x) = V_-(x) + \int_0^x V_-(x-t)\Phi_-(t)\, dt. \tag{2.11}$$

Имеем $\Phi_- \in L_1^+$ и $\Phi_- \geq 0$. Из (2.10), $K_+ \in L_p^+$ и $\Phi_- \in L_1^+$ следует $V_+ \in L_p^+$.

Покажем, что $V_+(+\infty) = 0$. Из $K_+(+\infty) = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 0$ такое, что при $x > r$ выполнены неравенства

$$K_+(x) \int_0^\infty \Phi_-(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad K_+(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $x > r$ из (2.10) получаем $V_+(x) < \varepsilon$. Мы показали, что $V_+ \in L_p^+$ и $V_+(+\infty) = 0$.

Рассмотрим теперь второе из уравнений (2.6). Имеем $V_- = K_- + \varphi$, где

$$\varphi(x) = \int_0^\infty V_+(t)V_-(x+t)\, dt. \tag{2.12}$$

Из $V_+ \in L_p^+$ и $V_- \in L_1^+$ следует $\varphi \in L_p^+$. Поэтому $V_- \in L_p^+$. Нам остается показать, что $V_-(+\infty) = 0$. Пусть $U \in \Omega$ – оператор вида

$$(Uf)(x) = \int_x^\infty V_+(t-x)f(t)\, dt.$$

Перепишем второе соотношение (2.6) в виде линейного уравнения относительно V_- :

$$V_- = K_- + UV_-. \tag{2.13}$$

Из (2.13) (см. [7])

$$V_-(x) = K_-(x) + \int_x^\infty \Phi_+(t-x)K_-(t)\, dt, \tag{2.14}$$

где Φ_+ – резольвентная функция оператора $\mathcal{V}_+$, определяемого из уравнения восстановления

$$\Phi_+(x) = V_+(x) + \int_0^x V_+(x-t)\Phi_+(t)\, dt. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15) удовлетворяет условиям теоремы С. Поэтому

$$\Phi_+(+\infty) = \nu^{-1} \geq 0, \quad \nu = \int_0^\infty xV_+(x)\, dx. \tag{2.16}$$

Из (2.14) имеем $V_- = K_- + \psi$, где

$$\psi(x) = \int_0^\infty \Phi_+(t)K_-(x+t)\, dt.$$

Покажем, что $\psi(+\infty) = 0$. Выберем число $r > 0$ такое, что $\Phi_+(x) < \nu^{-1} + 1$ при $x > r$. При $x > r$ имеем

$$\psi(x) \le \int_0^r \Phi_+(t) K_-(x+t)\, dt + (1+\nu^{-1}) \int_{x+r}^{\infty} K_-(y)\, dy. \tag{2.17}$$

Очевидно, оба слагаемых в правой части (2.17) стремятся к нулю при $x \to \infty$. Поэтому $\psi(+\infty) = 0$, откуда следует $V_-(+\infty) = 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть в уравнении восстановления (1.5) ядро V удовлетворяет условиям*

$$V \ge 0, \quad V \in L_1^+ \cap L_p^+, \quad p \ge 1; \quad \gamma = \int_0^{\infty} V(x)\, dx < 1, \quad V(+\infty) = 0.$$

Тогда $\Phi(+\infty) = 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (1.5) в виде $\Phi = V + V * \Phi$, где $*$ – операция свертки

$$(\Phi * V)(x) = \int_0^x \Phi(x-t) V(t)\, dt.$$

Эта операция коммутативна и ассоциативна в L_1^+. В работе [6] доказана следующая

Лемма ГЕ. *а) Пусть $u \in L_1^+$ и $v \in M_u$. Тогда $(u * v) \in C_u$ и*

$$(u * v)(+\infty) = u(+\infty) \int_0^{\infty} v(t)\, dt. \tag{2.18}$$

б) Пусть $u \in L_1^+$, $v \in L_1^{loc}$, $u(+\infty) = 0$ и существует предел $v(+\infty)$. Тогда $(u * v) \in L_1^{loc}(0, \infty)$ и имеет место равенство (2.18).

Через $(V*)^n$ обозначается сверточная n-ая степень V. С помощью неравенства Гёльдера можно доказать, что если $V \in L_1^+ \cap L_p^+$, $p > 1$, то существует целое число n такое, что

$$V_n = (V*)^n \in M_0 \cap L_1^+. \tag{2.19}$$

Пусть число n удовлетворяет условию (2.19), где V – функция, фигурирующая в (1.5). Из уравнения (1.5) имеем

$$\Phi - \Phi_{n-1} = V_n + V * (\Phi - \Phi_{n-1}), \quad \Phi_n = V + (V*)^2 + \cdots + (V*)^n. \tag{2.20}$$

Следовательно, Φ удовлетворяет уравнению

$$\Phi = \Phi_n + V_n * \Phi. \tag{2.21}$$

Имеем $\Phi_n \in L_1^+$ и $\Phi_n(+\infty) = 0$. Так как $\Phi \in L_1^+$ и $V_n \in M_0$, то $V_n * \Phi \in M_0$. Поэтому из (2.21) следует $\Phi(+\infty) = 0$. Лемма 2 доказана.

§3. ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Факторизация (2.5) будет применена к изучению уравнения (1.3). Предположим, что в (1.3) $\chi > 0$ и

$$g \in L_1, \qquad g(\pm\infty) = 0. \tag{3.1}$$

С учетом (2.5) из (2.4) имеем

$$(I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+)f = g. \tag{3.2}$$

Обозначив $(I - \mathcal{V}_+)f = h$, мы получим следующие два уавнения :

$$h(x) = g(x) + \int_x^\infty V_-(t-x)h(t)\,dt, \tag{3.3}$$

$$f(x) = h(x) + \int_{-\infty}^x V_+(x-t)f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Лемма 3. *При $\chi > 0$ уравнение (3.3), (3.1) имеет единственное решение $h \in L_1^+$ и $h(\pm\infty) = 0$.*

Доказательство. Так как в условиях леммы $\gamma_- < 1$, то оператор $\mathcal{V}_-$ сжимающий в пространстве L_1. Поэтому из $g \in L_1$ следует существование и единственность решения $h \in L_1$ уравнения (3.3). Из (3.3) имеем

$$h(x) = g(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t)g(x+t)\,dt. \tag{3.5}$$

Доказательство равенства $h(+\infty) = 0$ идентично доказательству равенства $V_+(+\infty) = 0$ в лемме 1. Нам остается доказать равенство $h(-\infty) = 0$. Согласно равенству $\Phi_-(+\infty) = 0$ (см. лемму 2) существует число $r > 0$ такое, что

$$\Phi_-(t)\int_{-\infty}^\infty |g(y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t > r.$$

Тогда из (3.5) будем иметь

$$|h(x)| \le |g(x)| + \int_0^r \Phi_-(t)|g(x+t)|\,dt + \left|\int_r^\infty \Phi_-(t)g(x+t)\,dt\right| \le$$

$$\le |g(x)| + \int_0^r \Phi_-(t)|g(x+t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда легко следует, что $h(-\infty) = 0$. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь уравнение (3.4) с необратимым оператором $I - \mathcal{V}_+$. Из $h \in L_1$ и из результатов работы [7] следует, что консервативное уравнение (3.4) имеет *основное решение* f и

$$f(x) = h(x) + \int_{-\infty}^x \Phi_+(x-t)h(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Из (3.6) имеем $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + h(x)$, где

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{0} \Phi_+(x-t)h(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_+(x+y)h(-y)\,dy,$$

$$f_2(x) = \int_0^x \Phi_+(x-t)h(t)\,dt, \quad h(+\infty) = 0, \quad h \in L_1.$$

Легко проверить, что

$$f_1(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty h(-y)\,dy = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^0 h(t)\,dt.$$

Согласно лемме ГЕ имеем

$$f_2(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty h(t)\,dt.$$

Поэтому

$$f(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^\infty h(t)\,dt.$$

Займемся вычислением предела функции f в $-\infty$. Из (3.6) имеем

$$f(x) = h(x) + \int_0^\infty \Phi_+(y)h(x-y)\,dy. \tag{3.7}$$

Как и в лемме 1 выберем число $r > 0$ так, чтобы при $y > r$ выполнялось неравенство $\Phi_+(y) < \nu^{-1} + 1$. Пусть число $r_1 > 0$ выбрано так, что при $x < -r_1$ выполнены неравенства

$$|h(x)|\int_0^r \Phi_+(y)\,dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\nu^{-1}+1)\int_{-\infty}^{-r_1} |h(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда из (3.7) при $x < -r_1$ будем иметь

$$|f(x)| \le |h(x)| + \int_0^r \Phi_+(y)|h(x-y)|\,dy + \int_r^\infty \Phi_+(y)|h(x-y)|\,dy < \varepsilon.$$

Мы показали, что $f(-\infty) = 0$. Итак, при выполнении условий (1.4), (1.8), (2.3) и (3.1) нами построено основное решение f уравнения (1.3), причем

$$f \in L_1^{loc}, \quad f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^\infty h(x)\,dx.$$

Нам остается вычислить предел $f(+\infty)$ в терминах функций, фигурирующих в исходном уравнении (1.3). Из уравнения (3.3) нетрудно получить следующее равенство :

$$\frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^\infty h(x)\,dx = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^\infty g(x)\,dx.$$

Нами доказана

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1.3) ядро K удовлетворяет условиям (1.4), (1.8) и (2.3), а свободный член g удовлетворяет условию (3.1). Тогда существует решение $f \in L_1^{loc}$ уравнения (1.3) и*

$$f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx.$$

В заключение выражаю благодарность Н. Б. Енгибаряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ABSTRACT. **The present paper we consider the following renewal equation : $f(x) = g(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)dt$ with kernel K satisfying the conditions $0 \le K \in L_1 \cap L_p$, $p > 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$, $K(\pm\infty) = 0$, $\chi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx \neq 0$. It is proved, that if $g \in L_1(-\infty, \infty)$ and $g(\pm\infty) = 0$, then for the basic solution of renewal equation the equalities $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = \chi^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ hold.**

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, Мир, М., 1984.
2. У. Рудин, Функциональный анализ, Мир, М., 1975.
3. W. L. Smith, "Asymptotic renewal theorems", Proc. Roy. Soc. Edinb., vol. 64, pp. 9 – 48, 1954.
4. W. L. Smith, "Extensions of renewal theorem", Proc. Comb. Phil. Soc., vol. 51, pp. 629 – 638, 1955.
5. Н. Б. Енгибарян, "Уравнение восстановления на всей прямой" (не опубликовано).
6. Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян, "Новая теорема восстановления для интегрального уравнения на полуоси", Изв. НАН Армении, Математика, т. 32, № 1, стр. 2 – 16, 1997.
7. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники. Мат. анализ, т. 22, стр. 175 – 244, 1984.

4 ноября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

О РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ В $\mathbb{R}^2$, ДЛЯ КОТОРЫХ КРАТЧАЙШИМИ ЯВЛЯЮТСЯ ПРЯМЫЕ

В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В статье продолжается начатое Р.В. Амбарцумяном и В.К. Оганяном исследование параметрической 4–ой проблемы Гильберта, в части относящейся к описанию метрик Римана–Гильберта. Выводится критерий, устанавливающий необходимые и достаточные условия для того, чтобы геодезические римановой метрики, определенной в $\mathbb{R}^2$, были обычными евклидовыми прямыми. В качестве примера применения критерия описаны метрики Римана–Гильберта в $\mathbb{R}^2$ для так называемой радиально–нормальной функции ориентации.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие параметрической 4–ой проблемы Гильберта впервые определено в [1]. В важном случае римановых метрик эта задача формулируется следующим образом : описать все римановы метрики на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых обычные евклидовы прямые являются геодезическими. Для римановых метрик индикатриса направлений в каждой точке $\mathbb{R}^2$ является эллипсом. Параметрами, от которых зависит эллипс, являются длины $a > b$ полуосей и ориентация большой оси эллипса. Соответствующие параметры мы рассматриваем как функции, определенные на плоскости : $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ и $\alpha = \alpha(x, y)$. Риманова метрика является финслеровой метрикой с плотностью

$$\rho(\varphi, x, y)\, dl = dl \cdot \sqrt{a^2(x, y)\cos^2(\varphi + \alpha(x, y)) + b^2(x, y)\sin^2(\varphi + \alpha(x, y))}, \qquad (1)$$

последнее соответсвует выражению для опорной функции эллипса (см. [1]). В (1) dl – элемент евклидовой длины в точке (x, y), а угол φ соответствует

Исследование, описанное в данной работе, проведено при частичной поддержке АО "Прометей".

направлению dl.

В случае, когда геодезические линии метрики являются прямыми линиями, метрика называется *гильбертовой* (см. [1]). В случае, когда геодезические кривые метрики (1) являются прямыми линиями, мы называем (1) метрикой *Римана–Гильберта* .

Общий необходимый и достаточный критерий гильбертовости финслеровой метрики, индикатриса которой зависит от конечного числа параметров, была получена в работе [1]. Критерий имеет вид дифференциального уравнения в частных производных для параметров, от которых зависит метрика. В случае метрики (1) соответствующее уравнение (т.е. необходимое и достаточное условие того, что метрика (1) – гильбертова) имеет вид

$$q_1(\varphi)\frac{\partial a}{\partial x}+q_2(\varphi)\frac{\partial a}{\partial y}+q_3(\varphi)\frac{\partial b}{\partial x}+q_4(\varphi)\frac{\partial b}{\partial y}+q_5(\varphi)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+q_6(\varphi)\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
q_1(\varphi)&=\frac{a\sin\alpha\cos(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}+\frac{ab^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\cos\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_2(\varphi)&=\frac{a\cos\alpha\cos(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}+\frac{ab^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\sin\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_3(\varphi)&=-\frac{b\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}-\frac{ba^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\cos\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_4(\varphi)&=\frac{b\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}-\frac{ba^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\sin\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_5(\varphi)&=\frac{b^2-a^2}{\sigma^3(\varphi)}\left[-a^2\cos\alpha\cos^3(\varphi+\alpha)+b^2\sin\alpha\sin^3(\varphi+\alpha)\right],\\
q_6(\varphi)&=\frac{b^2-a^2}{\sigma^3(\varphi)}\left[a^2\sin\alpha\cos^3(\varphi+\alpha)+b^2\cos\alpha\sin^3(\varphi+\alpha)\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Относительно уравнения (2) и, в частности, связь с комбинаторной интегральной геометрией и 4–ой проблемой Гильберта читатель может найти в работах [1]–[8]. Результаты этой статьи дополняют работу, начатую в [1], по описанию метрик Римана–Гильберта (Теоремы 1 и 2). Выводится критерий, устанавливающий необходимые и достаточные условия для того, чтобы геодезические римановой метрики, определенной в $\mathbb{R}^2$, были прямыми линиями. В качестве примера применения полученного критерия, описаны метрики Римана–Гильберта в $\mathbb{R}^2$ для так называемой радиально–нормальной функции ориентации.

§2. КРИТЕРИЙ

Изучение уравнения (2) в [1] привело, в частности, к следующим результатам.

Лемма 1. *Функции $q_i(\varphi)$, $i = 1, 2, 3, 4$, линейно независимы. Для q_5 и q_6 имеем линейные соотношения*

$$q_5(\varphi) = c_1 q_1(\varphi) + c_2 q_2(\varphi) + c_3 q_3(\varphi) + c_4 q_4(\varphi), \tag{4}$$

$$q_6(\varphi) = d_1 q_1(\varphi) + d_2 q_2(\varphi) + d_3 q_3(\varphi) + d_4 q_4(\varphi), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{(b^2-a^2)(2a^2+b^2)}{ab^2}\sin\alpha\cos\alpha, & c_2 &= \frac{(b^2-a^2)(-b^2\cos^2\alpha+2a^2\sin^2\alpha)}{ab^2},\\
c_3 &= -\frac{(b^2-a^2)(a^2+2b^2)}{ba^2}\sin\alpha\cos\alpha, & c_4 &= \frac{(b^2-a^2)(-2b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)}{ba^2},\\
d_1 &= \frac{(b^2-a^2)(b^2\sin^2\alpha-2a^2\cos^2\alpha)}{ab^2}, & d_2 &= -c_1,\\
d_3 &= \frac{(b^2-a^2)(2b^2\sin^2\alpha-a^2\cos^2\alpha)}{ba^2}, & d_4 &= -c_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из леммы 1 следуют дифференциальные соотношения (см. [1]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x} &= -c_1\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_1\frac{\partial\alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial a}{\partial y} &= -c_2\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_2\frac{\partial\alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial b}{\partial x} &= -c_3\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_3\frac{\partial\alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial b}{\partial y} &= -c_4\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_4\frac{\partial\alpha}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 2. *Линейную алгебраическую систему (7) можно преобразовать к виду*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial x} &= -k_1\frac{\partial a}{\partial y} + k_2\frac{\partial b}{\partial y},\\
\frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \quad k_1\frac{\partial a}{\partial x} - k_2\frac{\partial b}{\partial x},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$k_1 = \frac{2b^2+a^2}{3a(b^2-a^2)}, \qquad k_2 = \frac{b^2+2a^2}{3b(b^2-a^2)}. \tag{9}$$

Следующая теорема дает необходимые условия на функцию ориентации $\alpha(x, y)$ метрики Римана–Гильберта.

Теорема 1. *Если плоская риманова метрика (1) гильбертова, то функция ориентации $\alpha(x,y)$ необходимо гармоническая, т.е.*

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}=0 \tag{10}$$

и удовлетворяет следующему дополнительному уравнению :

$$\cos 2\alpha\left[4\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right]+\sin 2\alpha\left[2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\right]=0. \tag{11}$$

Доказательство. Гармоничность $\alpha(x,y)$ была доказана в работе [1]. Докажем (11). Нетрудно убедиться в том, что любая гармоническая функция $\alpha(x,y)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered}\cos 2\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\sin 2\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}+\sin 2\alpha\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]+2\cos 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\\ =\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right].\end{gathered} \tag{12}$$

Поэтому из (10) следует, что (11) эквивалентно соотношению

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]+\\ +\sin 2\alpha\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]+2\cos 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0.\end{gathered} \tag{13}$$

Используя (6) и (7), получим

$$\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-\frac{ab}{3(b^2-a^2)}\left[a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}+b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}\right] \tag{14}$$

и

$$-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{ab}{3(b^2-a^2)}\left[b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}+a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y}\right]. \tag{15}$$

Следовательно

$$A=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{ab}{b^2-a^2}\left[-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}\right]-$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ab}{b^2-a^2}\right)\cdot\left[a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}+b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}\right]+ \tag{16}$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ab}{b^2-a^2}\right)\cdot\left[a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y}+b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}\right].$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ab}{b^2-a^2}\right)=\frac{b^2+a^2}{3(b^2-a^2)^2}\left[b^3\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}-a^3\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y}\right], \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ab}{b^2-a^2}\right)=\frac{b^2+a^2}{3(b^2-a^2)^2}\left[b^3\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}-a^3\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}\right]. \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в (16), после преобразований получим

$$A=-\frac{4a^3b^3}{9(b^2-a^2)^2}\,\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Аналогично

$$\sin 2\alpha\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]+2\cos 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=-A.$$

Теорема доказана.

Возникает естественный вопрос : в какой мере уравнения (10) и (11) достаточны для существования метрики Римана–Гильберта с заданной функцией ориентации $\alpha(x,y)$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\alpha(x,y)$ удовлетворяет уравнениям (10) и (11). Если существует решение $a(x,y)$ и $b(x,y)$ уравнения (7) такое, что*

$$a(x,y)>b(x,y)>0, \tag{19}$$

то тройка

$$\alpha(x,y), \quad a(x,y), \quad b(x,y) \tag{20}$$

определяет по формуле (1) метрику Римана–Гильберта.

Доказательство. Достаточно проверить, что всякая тройка (20), удовлетворяющая уравнениям (7), (10), (11), удовлетворяет уравнению (2). Последнее является достаточным условием для того, чтобы (1) была метрикой Римана–Гильберта.

§3. ПРИМЕНЕНИЕ К КЛАССУ РАДИАЛЬНО–НОРМАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

Параметрический класс римановых метрик, к которым мы собираемся применить теорему 2, соответствует так называемому радиально–нормальному выбору функции ориентации $\alpha(x,y)$.

Функция ориентации называется радиально–нормальной, если *на любой прямой g, содержащей начало O, ориентация большой полуоси эллипса с центром $P \in g$, $P = (x,y) \neq O$ выбрана перпендикулярной* к g. В этом случае

$$\cos\alpha(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\alpha(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{21}$$

Отметим, что мы имеем $\alpha(x,y)$ в случае стереографической проекции полусферы $x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$, $z < R$ из центра $x = y = 0$, $z = R$ на плоскость $z = 0$. Однако каких–либо специальных условий на функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ не требуется.

Имеем

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{22}$$

Следовательно, функция (21) гармонична в $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

Проверим, что (21) удовлетворяет дополнительному уравнению (11). Так как $\tan\alpha = \dfrac{x}{y}$, то

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}. \tag{23}$$

С другой стороны, $\tan 2\alpha$ можно найти из (11) :

$$\tan 2\alpha = \frac{4\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}}{2\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2-2\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}, \tag{24}$$

т.е. подстановка значений из (22) приводит (24) к (23).

Остается проверить, что для функции (21) существуют неотрицательные решения системы (7). Используя (22) и соотношения

$$\sin^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{y^2}{x^2+y^2} \qquad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{x\,y}{x^2+y^2},$$

можем переписать систему (7) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{b^2-a^2}{a}\,\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{b^2-a^2}{a}\,\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{2(b^2-a^2)\cdot b}{a^2}\,\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{2(b^2-a^2)\cdot b}{a^2}\,\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{25}$$

Решения системы (25) – функции только от полярного радиуса $r = \sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $a(x,y) = a(r)$ и $b(x,y) = b(r)$. Для доказательства этого рассмотрим полярные координаты (r,φ) точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Определим φ как угол между x–осью и сегментом $(O,(x,y))$, отсчитываемый против часовой стрелки и запишем $a(x,y) = a(r,\varphi)$. Имеем

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{27}$$

Умножая (26) на $-\sin\varphi = -y/r$, (27) – на $\cos\varphi = x/r$ и складывая, получим

$$-\frac{\partial a}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial a}{\partial y}\cos\varphi = \frac{\partial a}{\partial r}\left[-\frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi\right] + \frac{\partial a}{\partial \varphi}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\varphi\right]. \tag{28}$$

Из (25)

$$-\frac{\partial a}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial a}{\partial y}\cos\varphi = 0.$$

Поскольку $\dfrac{\partial r}{\partial x} = x/r$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = y/r$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -y/r^2$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x/r^2$, то получим $\dfrac{\partial a}{\partial \varphi} \quad \dfrac{1}{r} = 0$. Аналогично можно доказать, что $\dfrac{\partial b}{\partial \varphi} = 0$. Покажем, что

$$a(r) = c\sqrt{b(r)}, \tag{29}$$

где $c \neq 0$ – постоянная.

Умножая первое и второе уравнения на $\sin\varphi$, второе и четвертое на $\cos\varphi$, после сложения получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial r} = \dfrac{b^2 - a^2}{a} \quad \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial b}{\partial r} = \dfrac{2(b^2 - a^2)\cdot b}{a^2} \quad \dfrac{1}{r} \end{cases} \tag{30}$$

Из (30) имеем

$$\frac{1}{b}\,\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{2}{a} \quad \frac{\partial a}{\partial r},$$

откуда следует (29).

Таким образом, общее решение системы (25) имеет вид

$$a(x,y) = a(r) = \frac{c^2}{\sqrt{1 + c^4 c_1 (x^2 + y^2)}} \quad \text{и} \quad b(x,y) = b(r) = \frac{c^2}{1 + c^4 c_1 (x^2 + y^2)}, \tag{31}$$

где c_1 и c – постоянные.

Ясно, что для $c_1 > 0$ и $c \neq 0$ всегда $a > b$ и $a > 0$, $b > 0$, т.е. условия Теоремы 2 в этом случае удовлетворяются. Поэтому для $c_1 > 0$ и $c \neq 0$ (31), действительно, определяет класс метрик Римана–Гильберта.

Замечание. Согласно хорошо известной теореме (см. [2 — 4]), каждой гильбертовой метрике соответствует мера в пространстве прямых на плоскости. Для метрик Римана–Гильберта, соответствующих (31), таковой является мера

$$\frac{c^2}{\sqrt{(1 + c^4 c_1 p^2)^3}}\, d\theta\, dp, \tag{32}$$

где p – расстояние прямой от начала O. Плотность не зависит от ориентации θ прямой, т.е. она изотропна.

Если $c = 1$ и $c_1 = \dfrac{1}{R^2}$, то мы получаем изометрическую модель полусферы с радиусом R. Отметим, что мера (32) конечна и мера всего пространства прямых равна $\frac{2\pi}{\sqrt{c_1}}$ (не зависит от c). Это значение равно длине прямой в соответствующей геометрии.

ABSTRACT. The paper continues the work started by R.V. Ambartzumian and V.K. Oganian on parametric versions of Hilbert's fourth problem, in the part referring to the description of Riemann–Hilbert metrics. A criterion is derived stating necessary and sufficient conditions that the geodesics of a Riemann metric defined in $\mathbb{R}^2$ are the usual straight lines. In an example of application of the criterion, unique Hilbert metric in a class of Riemann metrics with isotropic orientation function is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", vol.103, № 1, pp. 45 – 61, 1998.
2. А. В. Погорелов, Четвертая проблема Гильберта, Наука, М., 1974.
3. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
4. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo–metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
5. R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
6. В. К. Оганян, А. Абдаллах, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками" Изв. НАН Армении, Математика т. 27, № 5, стр. 69 – 80, 1992.
7. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
8. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

12 января 1997

Ереванский государственный университет
E–mail : rhambart@aua.am

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 32 **НОМЕР 2** **199**

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страниц

CONTENTS

VOLUME 32 NUMBER 2 1997

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)