ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5--6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение восстановления $\varphi(x) = g(x) + \int_0^x v(x-t)\varphi(t)\,dt$, где $0 \le v \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, $\int_0^\infty v(x)\,dx = 1$. Пусть Φ – резольвентная функция, определяемая из того же уравнения при $g = v$. Получены следующие разновидности классических теорем восстановления : а) $\Phi(x) = \nu^{-1} + \rho_0(x) + \Psi(x)$, где $\rho_0 \in C[0,\infty)$, $\rho_0(+\infty) = 0$, $\Psi \in L_1^+$, $\nu = \int_0^\infty x\,\nu(x)\,dx \le +\infty$, $\nu^{-1} \ge 0$. б) Если $g \in L_1^+$ ограничен и $g(+\infty) = 0$, то $\varphi(+\infty) = \nu^{-1}\int_0^\infty g(x)\,dx$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее, хотрошо известное в теории вероятностей и в математической физике, интегральное уравнение восстановления (см. [1] — [4])

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x v(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где ядро v удовлетворяет следующим условиям консервативности :

$$v \ge 0, \qquad v \in \mathrm{L}_1 \equiv \mathrm{L}_1(0;\infty), \qquad \int_0^\infty v(x)\,dx = 1. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) означает, что v является плотностью распределения вероятностей на $(0,\infty)$.

Теория уравнения (1.1) тесно связана со свойствами резольвентной функции Φ, определяемой из уравнения восстановления

$$\Phi(x) = v(x) + \int_0^x v(x-t)\,\Phi(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Пусть $\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$ – класс функций, локально интегрируемых на $[0,+\infty)$, т.е. $f \in \mathrm{L}_1(0,r)$ для любого $r < +\infty$. Известно (см. [3]), что если $v, g \in \mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$, то уравнение (1.1) имеет в L_1^{loc} единственное решение, которое представляется формулой

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)\, g(t)\, dt. \tag{1.4}$$

Если $v \geq 0$, то $\Phi \geq 0$. Если $v, g \geq 0$, то $\varphi \geq 0$.

Центральная проблема теории восстановления для уравнения (1.1), (1.2) связана с изучением асимптотических свойств функций Φ и φ. Основной результат в указанном направлении содержится в теореме восстановления (см. [1]), который мы сформулируем специально для уравнений (1.1), (1.2) и (1.3), (1.2).

Теорема В (восстановления).

a) **Основная форма.** *Решение $\Phi(t)$ уравнения (1.3), (1.2) обладает свойством*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+h} \Phi(t)\, dt = h\,\nu^{-1}, \qquad h > 0, \tag{1.5}$$

где

$$\nu = \int_0^\infty x\, v(x)\, dx \leq +\infty, \qquad \nu^{-1} \geq 0.$$

b) **Альтернативная форма.** *Если функция g из (1.1) непосредственно интегрируема по Риману (НИР) и выполняется (1.2), то*

$$\varphi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) \quad \text{существует и} \quad \varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x)\, dx. \tag{1.6}$$

Определение НИР будет дано в §3.

Настоящая работа посвящена усилению вышеуказанной теоремы восстановления. Для функции Φ мы получим следующее представление :

$$\Phi(x) = \nu^{-1} + \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \tag{1.7}$$

где $\Phi_1 \in C[0;\infty)$, $\Phi_1(+\infty) = 0$ и $\Phi_2 \in L_1$.

Также будет установлена справедливость (1.6) в случае, когда g – ограниченная функция из L_1, причем существует предел $g(+\infty)$, равный нулю.

§2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СВЕРТКИ

В настоящем параграфе будут установлены некоторые свойства свертки, используемые в дальнейшем . Рассмотрим банаховы пространства (БП) L_1, M, M_u, M_0, C_M, C_u, C_0 функций, определенных на $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$. Через M обозначим БП существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$, а через $C_M = M\bigcap C[0,\infty)$ – БП ограниченных, непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$. Классы $M_u \subset M$ или $C_u \subset C$ состоят из функций f, для которых существует предел $f(+\infty)$. Если $f \in C_0 \subset C_u$ или $f \in M_0 \subset M_u$, то $f(+\infty) = 0$. Через $\mathbb{E}$ обозначим одно из вышеуказанных БП. Через $L_1^{\rm loc}$ и $M^{\rm loc}$ обозначаются, соответственно, линейные топологические пространства локально суммируемых и локально ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$. Рассмотрим свертку $\Psi = f * g$ функций $f, g \in L_1^{\rm loc}$:

$$\Psi(x) = \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Операция $*$ свертки является коммутативной и ассоциативной билинейной операцией, как в $L_1^{\rm loc}$ так и в L_1. Хорошо известно, что если $g \in L_1^+$ и f принадлежат одному из пространств $\mathbb{E}$, то $\Psi \in \mathbb{E}$ (см. [5]).

Лемма 2.1. *Пусть $g \in L_1$, $f \in M$. Тогда $\Psi \in C_M$. Если $g \in L_1^{\rm loc}$ и $f \in M^{\rm loc}$, то $\Psi \in C[0,\infty)$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только второе утверждение, поскольку первое следует из второго и из того факта, что свертка ограниченной и суммируемой функции является ограниченной функцией. Пусть $x \in \mathbb{R}^+$ фиксировано и h – любое число с условием, что $|h| < x$. Введем обозначение $A = \sup\limits_{t\in[0,x]} \mathrm{ess}|f(t)|$. Тогда (для определенности предположим, что $h > 0$)

$$|\Psi(x+h) - \Psi(x)| \le \int_0^x |g(x+h-t) - g(x-t)|\,|f(t)|\,dt +$$

$$+\int_0^{x+h} |g(x+h-t)|\,|f(t)|\,dt \le A \sup_{|\delta|<h} \int_0^x |g(t+\delta) - g(t)|\,dt + A\int_0^h |g(t)|\,dt. \tag{2.2}$$

При $h \to 0$ второе слагаемое правой части (2.2) стремится к нулю в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, а первое слагаемое стремится к нулю в силу того, что интегрлаьный модуль непрерывности $\omega(g,h)$ интегрируемой функции g стрмится к нулю при $h \to 0$ (см. [7] (напомним, что $g \in L_1(0, 2x)$)). Лемма доказана.

Лемма 2.2.

а) Пусть $f \in L_1$ и $g \in M_u$. Тогда $\Psi \in C_u$

$$\Psi(+\infty) = g(+\infty) \int_0^\infty f(t)\, dt. \tag{2.3}$$

б) Пусть $f \in L_1$, $g \in L_1^{loc}$, $f(+\infty) = 0$ и существует $g(+\infty)$. Тогда $\Psi \in L_1^{loc}$ и выполняется равенство (2.3).

Доказательство. Имеем

$$\Psi(x) = \int_0^{x/2} f(x-t)\, g(t)\, dt + \int_{x/2}^{x} f(x-t)\, g(t)\, dt \equiv \Psi_1(x) + \Psi_2(x). \tag{2.4}$$

В обоих случаях а) и б) для $\Psi_2(x)$ получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi_2(x) = g(+\infty) \lim_{x \to +\infty} \int_{x/2}^{x} f(x-t)\, dt + \lim_{x \to +\infty} \int_{x/2}^{x} f(x-t)\, (g(t) - g(+\infty))\, dt. \tag{2.5}$$

Ясно, что

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{x/2}^{x} f(x-t)\, dt = \int_0^\infty f(t)\, dt,$$

$$\left| \int_{x/2}^{x} f(x-t)\, (g(t) - g(+\infty))\, dt \right| \le \sup_{t \ge x/2} |g(t) - g(+\infty)| \int_0^\infty |f(t)|\, dt. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi_2(x) = g(+\infty) \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

Для завершения доказательства нужно показать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi_1(x) = 0$. В случае а) это очевидно. В случае б) для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $y > 0$ такое, что

$$\sup_{t > y} |g(t)| \int_0^\infty |f(t)|\, dt < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Тогда из соотношения (2.7) и очевидного неравенства

$$\left| \int_0^y f(x-t)\, g(t)\, dt \right| \le \sup_{t > x-y} |f(t)| \int_0^y |g(t)|\, dt$$

получим $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi_1(x) = 0$. Лемма доказана.

Пусть u_0 – непрерывная ненулевая неотрицательная финитная функция на $\mathbb{R}^+$. Если выполнено неравенство $u_0(x) \le f(x)$, то функцию u_0 назовем непрерывной ячейкой функции f.

Лемма 2.3.. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ – любые множества с положительной мерой Лебега. Тогда существует отрезок $[a,b]$ и число $\gamma > 0$ такие, что при любом $z \in [a,b]$ неравенство*

$$\mu\{x \in A: \quad \text{существует} \quad y \in B,\, x + y = z\} > \gamma \tag{2.8}$$

имеет место, где $\mu(G)$ – лебегова мера множества G.

Доказательство. Существуют $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ и $\delta_1 > 0$ такие, что (см. [6], гл. 9, §6, Теорема 1)

$$\mu\left(A \bigcap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\right) > 2\delta_1\,(1 - 0.01) \tag{2.9}$$

и

$$\mu\left(B \bigcap (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)\right) > 2\delta_1\,(1 - 0.01). \tag{2.10}$$

Убедимся, что отрезок $[a,b] \equiv [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$, где $z_0 = x_0 + y_0$, $\delta = \dfrac{\delta_1}{100}$, удовлетворяет (2.8) при $\gamma = \dfrac{\delta_1}{2}$. Пусть $z = z_0 + 2t$ и $|t| \le \dfrac{\delta}{2}$. Тогда (см. (2.9), (2.10))

$$\mu\left(A \bigcap (x_0 + t - \delta_1, x_0 + t + \delta_1)\right) > 2\delta_1\,(1 - 0.02) \tag{2.11}$$

и

$$\mu\left(B \bigcap (y_0 + t - \delta_1, y_0 + t + \delta_1)\right) > 2\delta_1\,(1 - 0.02). \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует

$$\mu\Big\{h:\ x_0 + t + h \in A \bigcap (x_0 + t - \delta_1; x_0 + t + \delta_1),\, y_0 + t - h \in B \bigcap$$
$$\bigcap (y_0 + t - \delta_1; y_0 + t + \delta_1)\Big\} > \frac{\delta_1}{2}.$$

Следовательно, выполняется (2.8) для точки z. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть $f_i(x) \ge 0$ и $\int_0^\infty f_i(x)\,dx > 0$ при $i = 1, 2$. Тогда функция $f \equiv f_1 * f_2$ обладает непрерывной ячейкой.*

Доказательство. Существуют множества $A, B \subset (0, +\infty)$, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ и положительное число $\lambda > 0$ такие, что $f_1(x) > \lambda$ при $x \in A$ и $f_2(x) > \lambda$ при $x \in B$. В силу леммы 2.3 существуют отрезок $[a,b]$ и число γ, для которых имеет место (2.8) при любом $z \in [a,b]$. Следовательно, при $z \in [a,b]$ имеем

$$f(z) = \int_0^z f_1(z - x)\, f_2(x)\,dx > \gamma\,\lambda^2.$$

Теорема доказана.

§3. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ

Приведем определение НИР (см. работу [1]). Пусть П – следующее разбиение $\mathbb{R}^+ : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots,\ x_n \uparrow +\infty$. Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Пусть $\lambda = \sup_k \Delta x_k < +\infty$ – диаметр разбиения П. Пусть $\overline{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$ суть верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $f \geq 0$, определенной на $\mathbb{R}^+$:

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{m}_k \Delta x_k, \qquad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k \Delta x_k,$$

где $\overline{m}_k = \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$, и $\underline{m}_k = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$.

Функция f называется НИР, если $\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \to 0$ при $\lambda \to 0$. Обозначим через R_d класс НИР функций на $\mathbb{R}^+$. Через R_{dC} обозпачим класс непрерывных НИР функций. Имеем $R_d \subset M_0$ и $R_{dC} \subset C_0$. Пусть S – интегральная сумма для функции $f \geq 0$, соответствующая разбиению П :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f(r_k) \Delta x_k, \qquad r_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Ясно, что для того чтобы $f \in R_d$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел интегральных сумм S при $\lambda \to 0$.

Лемма 3.1. *Пусть $f \geq 0$. Для того чтобы $f \in \mathbb{R}_d$, необходимо и достаточно выполнение условий*

а) функция f интегрируема по Риману на каждом конечном отрезке $[0, a]$;

б) сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sup\limits_{x \in [k, k+1)} |f(x)|$.

Доказательство : достаточность. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $a < +\infty$, что

$$\int_a^{+\infty} f^*(x)\, dx < \varepsilon,$$

где $f^*(x) = c_k$, когда $x \in [k, k+1)$.

Пусть λ удовлетворяет следующему условию : если σ – интегральная сумма интеграла Римана на отрезке $[0, a]$ с диаметром разбиения меньше чем λ, то

$$\left| \sigma - \int_0^a f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$ – некоторое разбиение $[0, +\infty)$ с диаметром меньше чем λ, и $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ – интегральная сумма для непосредственного интеграла Римана. Без ограничения общности можно считать, что $a \in \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, например, $a = \xi_k$. Следовательно

$$\left|S - (L)\int_0^{\infty} f(x)\,dx\right| \le \left|\sum_{k=1}^{i} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) - \int_0^{a} f(x)\,dx\right| +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{\infty} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + \int_a^{\infty} f^*(x)\,dx \le \varepsilon +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{\infty} f^*(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + \varepsilon < 2\varepsilon + 2\int_a^{\infty} f^*(x)\,dx < 4\varepsilon.$$

Следовательно, $S \to (L)\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ и существует непосредственный интеграл Римана.

Необходимость. Соотношение б) есть прямое следствие конечности верхней интегральной суммы непосредственного интеграла Римана. Лемма доказана.

Замечание 3.1. Ограниченная функция интегрируема по Риману на конечном отрезке тогда и только тогда, когда она почти всюду непрерывна. Поэтому в лемме 3.1 условие а) можно заменить требованием почти всюду непрерывности функции f.

Замечание 3.2. Из леммы 3.1 и замечания 3.1 следует, что для существования НИР необходимо и достаточно, чтобы функция f была почти всюду непрерывной и верхня сумма Дарбу для нее была конечной.

Замечание 3.3. Из леммы 3.1 следует, что $f \in \mathbb{R}_{dC}$ тогда и только тогда, когда $f \in C(0, \infty)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$, где $c_k = \sup\limits_{x \in [k, k+1)} |f(x)|$.

Лемма 3.2. *Пусть в (2.1) $g \in L_1$ и $f \in \mathbb{R}_d$. Тогда $\Psi \in \mathbb{R}_{dC}$.*

Доказательство. Из леммы 3.1 следует ограниченность функции f. Применяя лемму 2.1, получим непрерывность функции Ψ. Учитывая замечание 3.1, для завершения доказательства леммы достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \quad \text{где} \quad b_k = \sup_{x \in [k, k+1]} |\Psi(x)|. \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1) следует из цепи простых неравенств

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \le \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in[k,k+1]} \int_0^x f(x-t)\,|g(t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in[k,k+1]} \sum_{j=0}^{k} \int_j^{j+1} f(x-t)\,|g(t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \sup_{\tau\in[k-j-1,k-j+1]} f(\tau) \int_j^{j+1} |g(t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} (c_{k-j-1} + c_{k-j}) \int_j^{j+1} |g(t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_j^{j+1} |g(t)|\,dt \sum_{k=0}^{\infty} (c_{k-j-1} + c_{k-j}) \right) < +\infty.$$

§4. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Пусть Ω – следующий класс интегральных операторов свертки : если $U \in \Omega$, то

$$(Uf)(x) = \int_0^x u(x-t)\,f(t)\,dt, \qquad u \in L_1.$$

Оператор $U \in \Omega$ ограничен в пространствах L_p, M, C, C_u (см. [3]). Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что U переводит M_u и M_0 в C_u и C_0, соответственно. Во всех пространствах E имеет место равенство

$$\|U\|_E = \gamma \equiv \int_0^\infty |u(x)|\,dx. \tag{4.1}$$

Класс Ω образует коммутативную алгебру. Ядром произведения $U = U_1 \cdot U_2$, где $U_1, U_2 \in \Omega$, служит свертка ядер сомножителей $u = u_1 * u_2$.

Уравнение (1.1) можно переписать в операторной форме :

$$(I-U)\varphi = g, \tag{4.2}$$

где I – единичный оператор, $U \in \Omega$.

Если $\gamma < 1$, то согласно (4.1), U – сжимающий в E. Поэтому при $g \in E$ уравнение (3.2) имеет единственное решение в E. Если $u \ge 0$, то $\Phi \ge 0$, где Φ – резольвентная функция, определяемая из уравнения

$$\Phi(x) = u(x) + \int_0^x u(x-t)\,\Phi(t)\,dt.$$

Если также $g \ge 0$, то $\varphi \ge 0$. При $\gamma < 1$ имеем

$$\int_0^\infty \Phi(x)\,dx = \gamma(1-\gamma)^{-1}, \qquad \int_0^\infty \varphi(x)\,dx = (1-\gamma)^{-1} \int_0^\infty g(x)\,dx. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Пусть в уравнении (4.2) $u \geq 0$, $\gamma < 1$ и $g \in \mathbb{R}_d$. Тогда $\varphi \in \mathbb{R}_d$. Если же $g \in \mathbb{R}_{dC}$, то $\varphi \in \mathbb{R}_{dC}$.*

Доказательство. В условиях леммы имеем $\Phi \in L_1$ и $\Phi \geq 0$. Утверждение леммы следует из формулы (1.4) и леммы 3.2. Лемма доказана.

Изучение уравнения (1.1), (1.2) связано с построением факторизации специального вида оператора $I - U$. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x u(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{4.4}$$

при предположении, что ядро u обладает непрерывной ячейкой u_1. Обозначим $u_2 = u - u_1$. Тогда

$$u_i \geq 0, \qquad \gamma_i \equiv \int_0^\infty u_i(x)\,dx \leq 1, \quad i = 1,2, \quad \gamma_2 < 1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1.$$

Пусть U_1 и U_2 – операторы из Ω с ядрами u_1 и u_2, соответственно. Имеем $U = U_1 + U_2$.

Рассмотрим факторизацию

$$I - U_1 - U_2 = (I - U_2)(I - W), \tag{4.5}$$

где W – искомый оператор из Ω с ядром $w \in \mathbb{R}_{dC}$. Из (4.5) имеем $(I - U_2)W = U_1$. Поэтому ядро w должно удовлетворять уравнению

$$w(x) = u_1(x) + \int_0^x u_2(x-t)\,w(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Из $\gamma_2 < 1$, $U_1 \in \mathbb{R}_{dC}$ и леммы 4.1 следует, что $0 \leq w \in \mathbb{R}_{dC}$. С учетом второго из равенств (4.3) и равенства $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ заключаем, что w удовлетворяет условиям консервативности (1.2) :

$$0 \leq w \in L_1, \qquad \int_0^\infty w(x)\,dx = 1. \tag{4.7}$$

Нам остается вычислить первый момент функции w. Пусть $\nu_k(f) < +\infty$ – момент порядка $k \geq 0$ измеримой функции $f \geq 0$ на $\mathbb{R}^+$:

$$\nu_k(f) = \int_0^\infty x^k f(x)\,dx (\leq +\infty).$$

Рассмотрим следующие итерации для (4.6) :

$$w_{n+1}(x) = u_1(x) + \int_0^x u_2(x-t)\, w_n(t)\, dt, \qquad w_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.8}$$

Итерации (4.8) монотонно возрастая сходятся в L_1 к решению w уравнения (4.6). Мы воспользуемся следующей легко проверяемой формулой (см. [3]) :

$$\nu_k(f * g) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \nu_m(f)\, \nu_{k-m}(g). \tag{4.9}$$

Применяя эту формулу к равенству (4.8) при $k = 1$, получаем

$$\nu_1(w_{n+1}) = \nu_1(u_1) + \nu_1(u_2)\nu_0(w_n) + \nu_0(u_2)\nu_1(w_n). \tag{4.10}$$

Согласно (4.7) имеем $\nu_0(w_n) \uparrow$ при $n \to +\infty$.

Если $\nu = \nu_1(u) = +\infty$, то хотя бы одно из чисел $\nu_1(u_1)$ и $\nu_1(u_2)$ равно $+\infty$. Тогда из (4.10) следует, что $\nu_1(w_n) = +\infty$ при $n \geq 2$. Пусть теперь $\nu = \nu_1(w) < +\infty$. Тогда из (4.10) индукцией по n проверяются оценки

$$\nu_1(w_n) \leq (1-\gamma_2)^{-1}\, \nu_1(u).$$

Следовательно $\nu_1(w) < +\infty$. Совершая в (4.10) предельный переход при $n \to +\infty$, приходим к равенству

$$\nu_1(w) = (1-\gamma_2)^{-1}\, [\nu_1(u_1) + \nu_1(u_2)] = (1-\gamma_2)^{-1}\, \nu. \tag{4.11}$$

Это равенство справедливо также при $\nu = +\infty$. Таким образом, нами доказана

Теорема 4.1. *Пусть консервативное ядро u обладает непрерывной ячейкой u_2. Тогда имеет место разложение (4.5), где $u_1 = u - u_2$. Ядро w удовлетворяет условиям консервативности (4.7) и имеет место равенство (4.11).*

§5. ТЕОРЕМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим консервативное уравнение (4.4) при предположении о существовании непрерывной ячейки u_1 у ядра u. С учетом разложения (4.5) рассматриваемое уравнение сводится к последовательному решению следующих двух уравнений восстановления :

$$(I - U_2)\Psi = g, \tag{5.1}$$

$$(I - W)\varphi = \Psi. \tag{5.2}$$

Заметим, что (5.1) является уравнением со сжимающим оператором. Если $g \in L_1$, то $\Psi \in L_1$ и имеет место равенство, вытекающее из второго равенства (4.3) :

$$\int_0^\infty \Psi(x)\, dx = (1 - \gamma_2)^{-1} \int_0^\infty g(x)\, dx. \tag{5.3}$$

Перейдем к уравнению (5.2) с консервативным ядром $w \in \mathbb{R}_{dC}$. Обозначим через Φ_1 резольвентную функцию этого уравнения. Она определяется из уравнения

$$\Phi_1(x) = w(x) + \int_0^x w(x - t)\, \Phi_1(t)\, dt. \tag{5.4}$$

Так как свободный член этого уравнения принадлежит $\mathbb{R}_{dC}$, то согласно теореме B (см. введение) существует предел $\Phi_1(+\infty)$, причем

$$\Phi_1(+\infty) = [\nu_1(w)]^{-1} \int_0^\infty w(x)\, dx = [\nu_1(w)]^{-1}\ (\geq 0). \tag{5.5}$$

Из непрерывности w и леммы 2.1 следует $\Phi_1 \in C[0, +\infty)$. Итак (см. (5.5)) $\Phi \in C_u$. Для решения уравнения (4.4), согласно (1.4), имеем выражение

$$\varphi(x) = \Psi(x) + \int_0^x \Phi_1(x - t)\, \Psi(t)\, dt \equiv \Psi(x) + \varphi_1(x). \tag{5.6}$$

Из $\Psi \in L_1$, $\Phi_1 \in C_u$ и леммы 2.2 следует, что $\varphi_1 \in C_u$, причем

$$\varphi_1(+\infty) = \Phi_1(+\infty) \int_0^\infty \Psi(x)\, dx.$$

С учетом равенств (5.5), (5.3) и (4.9) получаем

$$\varphi_1(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x)\, dx. \tag{5.7}$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 5.1.. *Пусть в консервативном уравнении (4.4) ядро u обладает непрерывной ячейкой u_1 и $g \in L_1$. Тогда решение уравнения имет вид (5.6), где $\Psi \in L_1$, $\varphi_1 \in C_u$ и имеет место равенство (5.7).*

Теорема 2.1 дает возможность существенно усилить результат теоремы 5.1, освободив ее от требования существования непрерывной ячейки. Для удобства вместо общего уравнения (1.1) мы рассмотрим уравнение (1.3) для резольвенты в консервативном случае (1.2). Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$\Phi = g_1 + V^2\Phi, \tag{5.8}$$

где $g_1 = V + V * V \in L_1$.

Ядром оператора V^2, фигурирующего в (5.8), служит функция w, определяемая по формуле $w = V * V$. Согласно теореме 2.1 функция u обладает непрерывной ячейкой. Поэтому уравнение (5.8) удовлетворяет условиям теоремы 5.1 и его решение Φ имеет вид

$$\Phi(x) = \widetilde{\mu} + \rho_0(x) + \Psi(x), \tag{5.9}$$

где $\rho_0 \in C_0$, $\Psi \in L_1$, $\widetilde{\mu} = (\nu_1(w))^{-1} \int_0^\infty [V(x) + w(x)]\, dx$.

Для определения значения $\widetilde{\mu}$ воспользуемся формулой (4.9) при $k = 0$ и $k = 1$. Получим $\nu_1(w) = 2\nu_1(V)$, $\nu_0(w) = \nu_0(V) = 1$. Поэтому $\widetilde{\mu} = \nu^1$. Нами доказана

Теорема 5.2 (Теорема восстановления, основная форма). *Резольвентная функция Φ консервативного уравнения (1.1), (1.2), определяемая из уравнения восстановления (1.3), имеет вид*

$$\Phi(x) = \nu^{-1} + \rho_0(x) + \Psi(x), \tag{5.10}$$

где $\rho_0 = C_0$, $\Psi \in L_1$.

Формула (5.10) в сочетании с (1.4) дает возможность получить асимптотические свойства решения уравнения (1.1) при тех или иных ограничениях на g. Из (5.10) и (1.4) имеем

$$\varphi(x) = g(x) + \nu^{-1} \int_0^x g(t)\, dt + \int_0^x \rho_0(x-t)\, g(t)\, dt + \int_0^x \Psi(x-t)\, g(t)\, dt.$$

Пусть $g \in L_1$. Тогда

$$\varphi(x) = \mu + \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \tag{5.10'}$$

где

$$\mu = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x)\, dx, \tag{5.11}$$

$$\varphi_2(x) = g(x) + \int_0^x \Psi(x-t)\, g(t)\, dt \in L_1, \qquad \varphi_1(x) = \int_0^x \rho_0(x-t)\, g(t)\, dt \in C_b.$$

Пусть теперь $g \in L_1 \cap M_0$. Тогда, согласно лемме 2.2, $\varphi_2 \in L_1 \cap M_0$. Мы пришли к такой теореме.

Теорема 5.3 (Теорема восстановления, альтернативная форма).

а) Если $g \in L_1$, то решение уравнения (1.1) имеет вид (5.10′), где $\varphi_0 = C_0$, $\varphi_2 \in L_1$ и μ определяется по формуле (5.11);

б) если $g \in L_1 \cap M_0$, то $\varphi_2 \in L_1 \cap M_0$ и

$$\varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^{\infty} g(x)\, dx. \tag{5.12}$$

§6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из теоремы 5.2 следует пункт а) теоремы В. А из теоремы 5.3 следует пункт б) теоремы В. Действительно, пусть $g \in \mathbb{R}_d$. Тодга, в силу леммы 3.1, $g \in L_1 \cap M_0$ и поэтому (см. теорему 5.3, пункт б)) имеет место (1.6). Теоремы 5.2 и 5.3 применимы для более широкого класса свободных членов g чем теорема В. Даже такая простая функция $g \in L_1$ как

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad x \in (n; n+1/n) \\ 0 & \text{если} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}(n; n+1/n) \end{cases}$$

не является непосредственно интегрируемой по Риману. Следовательно, к ней не применим пункт б) теоремы В, в то же время к ней применима теорема 5.3. Более того, любую ненулевую функцию можно умножить на ограниченную функцию так, чтобы произведение было разрывной на множестве положительной меры. Следовательно, произведение не будет НИР и к нему не применима теорема В. В этом смысле теорема 5.3 более устойчива, поскольку если $g \in L_1 \cap M_0$, то $gf \in L_1 \cap M_0$ при любом $f \in M$. Для иллюстрации докажем следующую лемму.

Лемма 6.1. *Пусть $f(x) \geq 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k) = +\infty$ для некоторого $x \in [0,1)$. Тогда существует $\varphi(x) \in C_0$ такое, что $f(x)\varphi(x) \notin \mathbb{R}_d$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = +\infty. \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует существование натуральных чисел $n_m \uparrow +\infty$ таких, что

$$\sum_{k=n_m}^{n_{m+1}} f(k) > n_m 2^{2m}. \tag{6.2}$$

Положим

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & \text{если}\quad x=k,\ n_m<k<n_{m+1}\\ 0, & \text{если}\quad x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(k-1/k^2;k+1/k^2\right),\end{cases}$$

и пусть φ линейна на отрезках $\left[k-1/k^2;k\right]$, $\left[k;k+1/k^2\right]$.

Пусть $\lambda>0$. Положим $x_n=\dfrac{n}{2^p}$, где p выбрано так, что $2^{-p}<\lambda$, и рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}f(\xi_n)\,\varphi(\xi_n)\,(x_n-x_{n+1}).$$

Если среди точек ξ_n будут все натуральные числа, то

$$\sigma\geq\sum_{n=n_m2^p+1}^{n_{m+1}2^p}f(\xi_n)\,\varphi(\xi_n)\,2^{-p}-n_m>\frac{1}{m}2^{-p}2^{2m}n_m-n_m\to+\infty\qquad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Аналогично можно установить, что если вместо условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f(x_0+k)=+\infty$ выполняется более слабое условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k=+\infty$, где $c_k=\sup_{x\in[k,k+1)}f(x)$, то можно построить функцию φ из C_0 такую, что $f\varphi\notin\mathbb{R}_d$.

Лемма 6.2.. *Пусть $\varphi\notin M$, $\varphi(+\infty)=0$ и $0\leq\varphi\in L_1$. Тогда существует $f(x)\in L_1$ такая, что функция*

$$\Psi(x)=\int_0^x f(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

не принадлежит $M(a,+\infty)$ при любом a.

Доказательство. Существует такое n, что $\varphi(x)\notin M(0,n)$ и $\varphi(x)<1$, когда $x\in(n,\infty)$. Обозначим

$E_k=\{t\in(0,n)\colon\ \varphi(x)>2^k\}$ и положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x-n(k-1)),\quad\text{где}\quad f_k(x)=\frac{1}{k^2\,\mu(E_k)}\,\chi_{E_k}(n-x).$$

Тогда очевидно, что

$$\int_0^{\infty}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^n f_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty\qquad\text{и}$$

$$\Psi(nm)=\int_0^{nm}f(nm-x)\,\varphi(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k<m}\int_0^{nm}f_k(nm-x)\,\varphi(x)\,dx+\int_0^n f_m(n-x)\,\varphi(x)\,dx=O(1)+\frac{2^k}{k^2}\to+\infty.\quad(6.3)$$

Поскольку $f(x)$ – локально ограниченная функция и $\varphi\in L_1$, то Ψ – непрерывная функция (см. лемму 2.1). Поэтому из (6.3) следует, что $\Psi\notin M(a,\infty)$ при любом a.

Теперь вернемся к теореме 5.3. Из леммы 5.2 следует, что если $g \notin M$, то существует $0 \le v \in L_1$ и $\nu_0(v) = 1$ такая, что функция

$$\Theta(x) = \int_0^x v(x-t)\, g(t)\, dt \tag{6.4}$$

не принадлежит $M(a,\infty)$ при любом a. Если φ – решение уравнения $\varphi = g + v * \varphi$, то $\varphi = g + \Phi * g$, где Φ определяется из уравнения (1.3) и

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)\, g(t)\, dt \ge g(x) + \int_0^x v(x-t)\, g(t)\, dt \ge \Theta(x).$$

Таким образом, для выполнения соотношения (5.12) необходимо, чтобы $g \in M$.

Мы увидели, что при любом $g \notin M$ существует ядро $v \in L_1$ такое, что решение $\varphi(x)$ уравнения восстановления (1.1), (1.2) не удовлетворяет (5.12).

Теперь укажем класс ядер v, удовлетворяющих условиям (1.2), для которых существуют функции $g \in L_1$, $g \notin M$ такие, что для решения φ уравнения (1.1) не выполняется (5.12).

Лемма 6.3. *Пусть функция $0 \le v \in L_1$ не принадлежит $M(a,\infty)$ при любом $a < \infty$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $g \in L_1 \bigcap M(\varepsilon,\infty)$ такая, что функция $\Theta(x)$, определяемая формулой (6.4), не принадлежит $M(a,\infty)$ при любом a.*

Доказательство. Существуют отрезки $I_k = [a_k - 2^k, a_k]$ такие, что $a_k > k$ и $\mu\left\{x \in I_k :\, \nu(x) > 2^{2k}\right\} = \alpha_k > 0$. Положим $g_k(x) = \dfrac{1}{2^k\,\alpha_k}\chi_k(a_k - x)$, где χ_k – характеристическая функция отрезка I_k. Тогда

$$(v * g_k)(a_k) = \int_0^{a_k} g_k(a_k - t)\, v(t)\, dt > 2^{2k} \int_{I_k} g_k(a_k - t)\, v(t)\, dt =$$

$$= \frac{2^{2k}}{2^k\,\alpha_k}\int_{I_k} \chi_k(t)\, dt = 2^k. \tag{6.5}$$

Для $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$

$$\int_0^\infty g(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty g_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Из (6.5), с учетом леммы 2.1, получим, что при любом $a < \infty$ $v * g \notin M(a,\infty)$. Ясно, что $g \in M(\varepsilon,\infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что если $0 \leq v \in L_1$ и $v \notin M(a, \infty)$ при любом $a < \infty$, то существует функция $g \in L_1 \left(\bigcap_{\varepsilon>0} M(\varepsilon, \infty)\right)$ с носителем в $[0,1]$ такая, что решение уравнения (1.1) не удовлетворяет (5.2). Отметим, что в указанный класс ядер v входят также функции из $\bigcap_{p<\infty} L_p$.

ABSTRACT. We consider the renewal equation $\varphi(x) = g(x) + \int_0^x v(x - t)\,\varphi(t)\,dt$, where $0 \leq v \in L_1^+ \equiv L_1(0, \infty)$, $\int_0^\infty v(x)\,dx = 1$. Let Φ be the resolvent function which is determined from the same equation with $g = v$. The following modifications of classical renewal theorems have been obtained : i) $\Phi(x) = v^{-1} + \rho_0(x) + \Psi(x)$, where $\rho_0 \in C[0, \infty)$, $\rho_0(+\infty) = 0$, $\Psi \in L_1^+$, $\nu = \int_0^\infty x\,\nu(x)\,dx \leq +\infty$, $\nu^{-1} \geq 0$. ii) If $g \in L_1^+$ is bounded and $g(+\infty) = 0$, then $\varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x)\,dx$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и ее Приложения, т. 2, Мир, М., 1967.
2. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально–Разностные Уравнения, Мир, М., 1967.
3. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
4. В. В. Соболев, Курс Теоретичекой Астрофизики, Наука, М., 1967.
5. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в Свертках и Проекционные Методы их Решения, М., Наука, 1971.
6. И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, М., Гостехиздат, 1957.
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Теория Ортогональных Рядов, М., Наука, 1984.

29 ноября 1996

Ереванский государственный университет,
Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Л. Г. Арабаджян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

Изучается проблема существования нетривиальных решений уравнения $G(x) = \int\limits_0^\infty K(x-t)Y(G(t))\,dt$ относительно G. Предполагается, что ядро K – четная неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию консервативности, а функция Y, определенная на $\mathbb{R}_\tau = [\tau, \infty)$, имеет вид $Y(x) = x - \omega(x)$, $\omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau) \cap C(\mathbb{R}_\tau)$. Строится однопараметрическое семейство решений этого уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается скалярное нелинейное уравнение

$$G(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(G(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty) \tag{1}$$

относительно искомой функции G, где ядро K – четная функция, удовлетворяющая условиям

$$K \geq 0, \quad K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^\infty K(t)\,dt = 1, \tag{2}$$

а функция Y, определенная на $\mathbb{R}_\tau = [\tau, \infty)$ при некотором $\tau \geq 0$ имеет вид

$$Y(x) = x - \omega(x), \quad x \in \mathbb{R}_\tau. \tag{3}$$

Предполагаем, что функция ω обладает свойствами

$$\omega \geq 0, \quad \omega \downarrow \text{ на } \mathbb{R}_\tau, \quad \omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau) \cap C(\mathbb{R}_\tau). \tag{4}$$

В работе автора [4] было построено семейство решений уравнения (1) – (4), зависящее от параметра. В настоящей работе решается аналогичная задача при более слабых ограничениях на функцию Y.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1°. Наряду с (1) рассмотрим следующее однородное консервативное уравнение Винера-Хопфа :

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

с тем же, что и в (1) ядром K. В работах [1], [2] (см. также [5]) построено положительное, абсолютно непрерывное, монотонно возрастающее неограниченное решение уравнения (5), (2). Решение этого уравнения определяется с точностью до числового множителя. Из результатов работ [1], [2] следует, что решение S уравнения (5), (2), удовлетворяющее условию $S(0) = \tau_0 > 0$, обладает следующими свойствами :

$a)$ $\tau_0 \le S(x) \uparrow, \quad x \in \mathbb{R}^+$;

$b)$ существуют $a, b \in \mathbb{R}^+$ такие, что $S(x) \le ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^+$;

$c)$ $S(x) \ge \dfrac{\tau_0 x}{\sqrt{\nu_2}}$ при $x \in \mathbb{R}^+$, где $\nu_2 = \int_0^\infty t^2 K(t)\,dt$;

$d)$ $$S(x) = \tau_0 \left(1 + \int_0^x \Phi(t)\,dt\right), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

где Φ – решение уравнения

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

причем V определляется из нелинейного уравнения Енгибаряна

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Согласно результатам работ [1], [2], для функции K, удовлетворяющей условию (2), существует решение уравнения (8), причем

$$0 \le V \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty V(t)\,dt = 1.$$

При этих условиях решение Φ уравнения (8) существует и $\Phi \notin L_1(\mathbb{R}^+)$.

Выберем параметр $\tau_0 \ge \tau$ так, чтобы

$$\omega(\tau_0) + \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0}^\infty \omega(t)\,dt \le \frac{\tau_0}{2}. \tag{9}$$

Такой выбор возможен ввиду $\omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau)$ и соотношения $\omega(\tau_0)/\tau_0 \to 0$ при $\tau_0 \to +\infty$.

2°. В работе [3] получено достаточное условие существования положительного решения уравнения

$$B_*(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t) B_*(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{10}$$

с ядром, удовлетворяющим условиям (2) и $0 < \lambda(x) \leq 1$. Там же доказано, что при условии

$$\int_0^\infty [1-\lambda(t)]t\, dt < \infty \tag{10'}$$

существует неотрицательное решение уравнения (10), (2), для которого справедливо асимптотическое соотношение $B_*(x) = O(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть S - решение уравнения (5) со свойствами a) – d). Тогда функция $\omega(S(x))$ определена на $\mathbb{R}^+$ и принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. Действительно, в силу свойства c) и монотонности функции ω, имеем

$$\int_0^\infty \omega(S(t))\, dt \leq \int_0^\sigma \omega(S(t))\, dt + \int_\sigma^\infty \omega\left(\frac{\tau_0 t}{\sqrt{\nu_2}}\right) dt < \infty, \quad \sigma = \sqrt{\nu_2}.$$

В равенстве (10) в качестве λ выберем функцию

$$\lambda(x) \stackrel{def}{=} 1 - \frac{\omega(S(x))}{S(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

Покажем, что для выбранного λ выполняются условия (10') и $0 < \lambda(x) \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^+$ и, следовательно, существует положительное решение B_* соответствующего уравнения (10). Так как функции ω и S неотрицательны, то из (9) следует, что для $x \in \mathbb{R}^+$ $0 < \lambda(x) \leq 1$. Выше было показано, что $\omega(S(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Поэтому

$$\int_0^\infty [1-\lambda(t)]S(t)\, dt < \infty,$$

что, в силу c), влечет за собой неравенство (10'). Итак, если λ выбрать согласно (11), то существует положительное решение B_* уравнения (10), (2). Оценим это решение. С этой целью представим B_* в виде $B_*(x) = 2S(x) - \rho(x)$. Относительно функции ρ получаем равенство

$$\rho(x) = 2\omega(S(x)) + \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)\rho(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Для оценки решения B_* достаточно оценить функцию ρ. В силу $\lambda \le 1$, на $\mathbb{R}^+$ функция ρ мажорируется п.в. на $\mathbb{R}^+$ решением (BS) неоднородного консервативного уравнения Винера–Хопфа (см. [2])

$$f(x) = 2\omega(S(x)) + \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{12}$$

Неравенства

$$2S(x) - f(x) \le B_*(x) \le 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

следуют из вышеуказанных фактов.

3°. Оценим решение уравнения (12), соответствующее уравнению (10). При этом воспользуемся вольтерровской факторизацией инегрального оператора Винера–Хопфа (см. [1], [2]). Указанная факторизация сводит решение уравнения (12) к последовательному решению следующих двух уравнений типа Вольтерра :

$$\varphi(x) = 2\omega(S(x)) + \int_x^\infty V(t-x)\varphi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{14}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{15}$$

где V – решение уравнения (8). Согласно результатам работ [1], [2], решение уравнения (14) можно представить в виде

$$\varphi(x) = 2\left[\omega(S(x)) + \int_0^\infty \Phi(t)\omega(S(t+x))\,dt\right], \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

где Φ – решение уравнения (7). Учитывая монотонность функций ω, S и соотношения (6), (7), из (16) мы получаем следующую цепочку неравенств :

$$\varphi(x) \le 2\left[\omega(S(x)) + \int_0^\infty \Phi(t)\omega(S(t))\,dt\right] \le$$

$$\le 2\left[\omega(\tau_0) + \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0}^\infty \omega(t)\,dt\right] \le \tau_0, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+.$$

Поэтому для решения f уравнения (15) (которое является также решением уравнения (12), см. [1], [2]) справедлива оценка

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x \Phi(x-t)\varphi(t)\,dt \le \tau_0\left(1 + \int_0^x \Phi(t)\,dt\right) \equiv S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

Из оценок (13) и (17) получаем

$$S(x) \le B_*(x) \le 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{18}$$

4°. Наряду с уравнениями (5) и (10) рассмотрим урвнение

$$B(x) = \int_0^\infty \lambda(t) K(x-t) B(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{19}$$

где ядро K совпадает с ядрами уравнений (5), (10) или (1) и удовлетворяет условию (2), а λ определена согласно (11). Пусть B_* – вышеуказанное решение уравнения (10). Тогда функция $B = B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{B_*(x)}{\lambda(x)}$ будет удовлетворять уравнению (19). Для B имеем оценки (см. также (18))

$$\tau_0 \le S(x) \le B(x) \le 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Действительно, так как $\lambda \le 1$, то очевидно, что $B(x) \ge B_*(x)$ на $\mathbb{R}^+$. С другой стороны, согласно результатам работ [2], [3] итерации

$$\begin{gathered} B_*^{(n+1)}(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t) B_*^{(n)}(t)\, dt, \\ B_*^{(0)}(x) \equiv 2S(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{21}$$

монотонно убывают по n на $\mathbb{R}^+$ и $B_*^{(n)} \to B_*$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. Поэтому для $n = 1$ п.в. на $\mathbb{R}^+$ имеем

$$B_*(x) \le B_*^{(1)}(x) = \lambda(x) \cdot 2S(x),$$

что влечет за собой неравенство $B(x) \le 2S(x)$, т.е. (20).

§2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть существует интеграл $\nu_2 = \int\limits_0^\infty t^2 K(t)\, dt$. Тогда уравнение (1) – (4) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, причем для любой функции G из этого семейства справедливо*

$$G(x) = O(x) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим итерации

$$\begin{gathered} G^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty K(x-t) Y(G^{(n)}(t))\, dt, \\ G^{(0)}(x) = 2S(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь S – решение соответствующего уравнения (5) с $S(0) = \tau_0$. Методом индукции покажем, что для любого $n = 0, 1, ...$

$$G^{(n)}(x) \geq B(x) \geq \tau_0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{24}$$

Для $n = 0$ имеем, по определению, $G^{(0)}(x) = 2S(x)$. В этом случае неравенство (24) очевидно. Если (24) выполняется для некоторого $n \geq 1$, то из (23) получаем

$$G^{(n+1)}(x) \geq \int_0^\infty K(x-t)B(t)\,dt - \int_0^\infty K(x-t)\omega(G^{(n)}(t))\,dt. \tag{25}$$

С учетом легко проверяемых оценок

$$\frac{\omega(B(x))}{B(x)} \leq \frac{\omega(S(x))}{S(x)}, \quad \omega(G^{(n)}(x)) \leq \omega(B(x)) \leq (1-\lambda(x))B(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

из (25) получаем $G^{(n+1)}(x) \geq B(x)$. Так как функция Y монотонно возрастает на $\mathbb{R}_{\tau_0}$, то итерации (23) монотонно убывают по n на $\mathbb{R}^+$. Действительно, для $n = 1$ имеем

$$G^{(1)}(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(2S(t))\,dt = 2S(x) - \int_0^\infty K(x-t)\omega(2S(t))\,dt \leq 2S(x),$$

т.е. $G^{(1)}(x) - G^{(0)}(x) \leq 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$.

Пусть теперь $n > 1$. Тогда из (23), в силу монотонности функции Y на $\mathbb{R}_{\tau_0}$, получим

$$G^{(n+1)}(x) - G^{(n)}(x) =$$
$$= \int_0^\infty K(x-t)\left[Y(G^{(n)}(t)) - Y(G^{(n-1)}(t))\right]\,dt \leq 0, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

если только $G^{(n)}(x) - G^{(n-1)}(x) \leq 0$. Таким образом, п.в. на $\mathbb{R}^+$ имеем $G^{(n)} \downarrow$ по n и $G^{(n)}(x) \geq B(x)$. Итак, п.в. на $\mathbb{R}^+$ существует предел $G(x) = \lim\limits_{n\to\infty} G^{(n)}(x)$. Покажем, что предельная функция G удовлетворяет уравнениям (1) – (4). Ввиду монотонности и непрерывности функции Y получаем, что для любого фиксированного значения x из $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^\infty K(x-t)Y\left(G^{(n)}(t)\right)\,dt \geq 0, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

а последовательность $K(x-t)Y\left(G^{(n)}(t)\right)$, монотонно убывая, сходится к функции $K(x-t)Y(G(t))$ при $n \to \infty$. В силу теоремы Леви (см. [5])

$$\int_0^\infty K(x-t)Y\left(G^{(n)}(t)\right)\,dt \to \int_0^\infty K(x-t)Y(G(t)\,dt, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+.$$

Совершая в (23) предельный переход, получаем (1) относительно предельной функции G.

Теперь покажем, что различным значениям параметра τ_0 соответствуют различные решения уравнения (1) – (4). Пусть $\tau_0 \leq \tau_1 < \tau_2$. Обозначим через S_1 и S_2 решения уравнения (5), соответствующие параметрам τ_i, $i = 1, 2$, т.е. $S_i(0) = \tau_i$ и рассмотрим разность $S_0(x) = S_2(x) - S_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Согласно соотношению (6) $S_0 > 0$ на $\mathbb{R}^+$ и $S_0(0) = \tau_2 - \tau_1$. Построим итерации (23), где в качестве $G^{(0)}$ выбрана функция $2S_1$ или $2S_2$. Итерации (23) и предел, соответствующий функции $G^{(0)} = 2S_i$, соответственно обозначим через $G_i^{(n)}$ и G_i, $i = 1, 2$. Докажем по индукции, что для любого $n = 0, 1, ...$

$$G_2^{(n)}(x) - G_1^{(n)}(x) \geq 2S_0(x) > 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{26}$$

Для $n = 0$ это очевидно. Пусть неравенство (26) выполняется для некоторого $n \geq 1$. Тогда из (23) получаем

$$G_2^{(n+1)}(x) - G_1^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty K(x-t)\left[G_2^{(n)}(t) - G_1^{(n)}(t)\right] dt +$$
$$+ \int_0^\infty K(x-t)\left[\omega(G_1^{(n)}(t)) - \omega(G_2^{(n)}(t))\right] dt.$$

Учитывая монотонность функции ω, оценки (26) и тот факт, что S_0 – решение уравнения (5), получаем $G_2^{(n+1)}(x) - G_1^{(n+1)}(x) \geq 2S_0(x) > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. В пределе при $n \to \infty$ имеем

$$G_2(x) - G_1(x) \geq 2S_0(x) > 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

что означает $G_1 \neq G_2$ на $\mathbb{R}^+$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Асимтотическое соотношение (22) следует из оценок

$$S(x) \leq G^{(n)}(x) \leq 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

которые слеуют из (20), (23), (24) и свойства b) функции S. Теорема доказана.

Замечание. Записав соотношения (23) в виде

$$G^{(n+1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} K(t) Y(G^{(n)}(x-t))\, dt,$$
$$G^{(0)}(x) = 2S(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, ...,$$

методом индукции можно доказать, что функции $G^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ монотонно возрастают по x на $\mathbb{R}^+$ (так как $G^{(0)}(x) = 2S(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$). Поэтому предельная функция G также монотонно возрастает по x.

Отмемтим, что на основе результатов работы [3] можно доказать нетривиальную разрешимость уравнения

$$\widetilde{G}(x) = \lambda_1(x) \int_0^\infty \lambda_2(t) K(x-t) Y\left(\widetilde{G}(t)\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где функции K и Y удовлетворяют условиям (2) -- (4), а функции λ_j – условиям

$$0 \le \lambda_j(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_j \ne 0, \quad \int_0^\infty t[1-\lambda_j(t)]\, dt < \infty, \quad j = 1, 2.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за ценные обсуждения.

ABSTRACT. The problem of existence of nontrivial solutions of the equation $G(x) = \int_0^\infty K(x-t) Y(G(t))\, dt$ with respect to G is studied. The main assumption is that the kernel K is an even nonnegative function from $L_1(\mathbb{R})$, satisfying the conservativity condition and the function Y defined on $\mathbb{R}_\tau = [\tau, \infty)$ has the form $Y(x) = x - \omega(x)$, $\omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau) \cap C(\mathbb{R}_\tau)$. A one-parameter family of positive solutions of this equation is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сборник, т. 97, № 5, стр. 35 – 58, 1975.
2. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники ВИНИТИ АН СССР, т. 22, стр. 175 – 244, М., 1984.
3. Л. Г. Арабаджян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса излучения в неоднородной среде", Диффер. уравн., т. 23, № 9, стр. 1619 – 1622, 1984.
4. Л. Г. Арабаджян, "О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки", Украин. Мат. Журнал, т. 41, № 12, стр. 1587 – 1595, 1989.
5. F. Spitzer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density", Duke. Math. Jour., vol. 24, pp. 327 – 343, 1957.
6. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, М., 1976.

20 июня 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА СВЕРТКИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

М. Т. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

Изучается уравнение $f(x,y) = g(x,y) + \iint\limits_G K(x-x', y-y')f(x',y')\,dx'\,dy'$, где G – неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, ядро K – неотрицательная функция, удовлетворяющая условию консервативности. Используя факторизацию Вольтерра, мы доказываем существование положительного решения однородного уравнения ($g = 0$) при некоторых дополнительных условиях на G и K.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению интегрального уравнения

$$f(x,y) = g(x,y) + \iint\limits_G K(x-x', y-y')f(x',y')\,dx'\,dy', \tag{1}$$

где область $G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию $\Pi_{r_1} \subset G \subset \Pi_r$, $r < r_1$, а Π_r – полуплоскость $(r,\infty) \times (-\infty,\infty)$. Для простоты будем считать, что граница ∂G области G является кусочно–гладкой. Предполагается также, что ядро $K(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\,dx\,dy = \mu \le 1, \quad K(x,y) \ge 0. \tag{2}$$

Случай $\mu = 1$ назовем *консервативным случаем*, а случай $\mu < 1$ – *диссипативным*. Основное внимание будет уделено изучению однородного уравнения (1) при $g = 0$ в консервативном случае. Как будет показано, консервативный случай относится к особым случаям уравнения (1). Применяемый подход опирается на построение вольтерровской факторизации уравнения (1).

§1. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Обозначим через $\lambda(x,y)$ характеристическую функцию области G :

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}1 & \text{при } (x,y)\in G,\\ 0 & \text{при } (x,y)\notin G.\end{cases}$$

Наряду с (1) – (2) рассмотрим следующее уравнение :

$$f_1(x,y)=g_1(x,y)+\int_r^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(x',y')K(x-x',y-y')f_1(x',y')\,dx'\,dy', \qquad (3)$$

где

$$g_1(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } (x,y)\in \Pi_r\setminus G,\\ g(x,y) & \text{при } (x,y)\in G.\end{cases}$$

Легко проверить, что если f_1 удовлетворяет уравнению (3), то сужение $f=f_1|_G$ функции f_1 в G удовлетворяет условиям (1) – (2). Отметим, что некоторые уравнения вида (3) изучны в [1].

Пусть $\mathbb{T}$ – следующий интегральный оператор :

$$(\mathbb{T}f)(x,y)=\int_r^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T(x,x',y,y')f(x',y')\,dx'\,dy',$$

где $T(x,x',y,y')=\lambda(x',y')K(x-x',y-y')$. Оператор $\mathbb{T}$ действует в целом семействе пространств измеримых на Π_r функций, в том числе в пространствах $L_p(\Pi_r)$, $p\geq 1$, $L_\infty(\Pi_r)=M(\Pi_r)$, $L_{\infty,1}(\Pi_r)$. В последнем пространстве норма определена следующим образом :

$$||f||=\sup_x \operatorname{ess}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dy.$$

Обозначим через E_r одно из указанных выше пространств. Обозначив через $||\mathbb{T}||_{E_r}$ норму $\mathbb{T}$ в E_r, имеем оценку $||\mathbb{T}||_{E_r}\leq\mu(\leq 1)$. Это следует из хорошо известных свойств интегрального оператора Винера–Хопфа ([2]). Все пространства E_r идеальны (см. [3]) : то есть если $0\leq f_1(x,y)\in E_r$ и $g_1(x,y)$ – измеримая функция на Π_r такая, что $|g_1(x,y)|\leq f_1(x,y)$, то $g_1\in E_r$.

Рассмотрим факторизацию

$$I-\mathbb{T}=(I-\Psi_-)(I-\Psi_+), \qquad (4)$$

где I - единичный оператор, Ψ_-, Ψ_+ – формально вольтерровые по x операторы вида

$$(\Psi_+ f)(x,y) = \int_r^x \int_{-\infty}^{\infty} \psi_+(x,x',y,y') f(x',y')\,dx'\,dy',$$
$$(\Psi_- f)(x,y) = \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x',x,y,y') f(x',y')\,dx'\,dy'. \tag{5}$$

Будем предполагать, что равенства (5) порождают операторы, действующие в пространствах E_r. Необходимые свойства функций $\psi_\pm$ мы рассмотрим позже.

Факторизация (4) понимается как равенство операторов, действующих в E_r. Она эквивалентна следующим двум нелинейным уравнениям относительно (ψ_+, ψ_-) (см. [4], [5]) :

$$\psi_\pm(x,x',y,y') = T_\pm(x,x',y,y') + \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\mp(t,x,z,y)\psi_\pm(t,x',z,y')\,dt\,dz, \tag{6}$$

где

$$T_+(x,x',y,y') = T(x,x',y,y'), \quad x > x', \quad T_-(x,x',y,y') = T(x',x,y',y), \quad x < x'.$$

Займемся вопросом построения решения нелинейных уравнений фактризации (6) в подходящем пространстве. Наряду с (6) рассмтрим следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений :

$$V_\pm(x,y) = K_\pm(x,y) + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_\mp(t,z) V_\pm(t+x, y-z)\,dt\,dz. \tag{7}$$

Решения $V_\pm(x,y)$ будем искать в пространстве $L_1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Эти уравнения являются аналогами нелинейных уравнений факторизации оператора Винера–Хопфа (см. [6], [7]). Они впервые изучены в [8]. Система (7) эквивалентна факторизации

$$I - \mathcal{K} = (I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+), \tag{8}$$

где операторы $\mathcal{V}_\pm$ определены равенствами

$$(\mathcal{V}_\pm f)(x,y) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_\pm[\pm(x-t), y-z] f(t,z)\,dt\,dz. \tag{9}$$

Прежде чем выяснить роль уравнений (7) в вопросе решения системы (6), мы остановимся на вопросах разрешимости и свойствах решения самой системы

(7). В работе [8] показано, что (7) имеет решение, которое является пределом итераций

$$V_{n+1}^{\pm}(x,y)=K_{\pm}(x,y)+$$
$$+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}V_n^{\mp}(t,z)V_n^{\pm}(t+x,y-z)\,dt\,dz,\quad n=0,1,\ldots,\quad V_0^{\pm}(x,y)=0.\qquad(10)$$

Это решенис назовем *каноническим решением.* Функции $V_{\pm}(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$а)\quad V_{\pm}(x,y)\geq 0,\qquad(11)$$
$$б)\quad \|V_{\pm}\|_E=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}V_{\pm}(x,y)\,dx\,dy=\gamma_{\pm}\leq\mu(\leq 1),\qquad(12)$$
$$в)\quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+)=1-\mu.\qquad(13)$$

Если $K(+x,y)=K(-x,y)$ и $V_{\pm}(x,y)=V(x,y)$, то

$$\gamma_{\pm}=1-\sqrt{1-\mu}.\qquad(14)$$

Интегрируя уравнения (7) по y от $-\infty$ до $+\infty$, получаем (см. [8])

$$U_{\pm}(x)=N(\pm x)+\int_0^{\infty}U_{\mp}(t)U_{\pm}(t+x)\,dt,\qquad(15)$$

где

$$U_{\pm}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}V_{\pm}(x,y)\,dy,\quad N(\pm x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(\pm x,y)\,dy.\qquad(16)$$

(15) представляет собой нелинейное уравнение факторизации для скалярных операторов типа Винера–Хопфа (см. [6], [7]). Из (13) следует, что в консервативном случае $(1-\gamma_-)(1-\gamma_+)=0$. С помощью дополнительных свойств функции $N(x)$ можем определить какое из чисел γ_+, γ_- равно 1. Если $N(+x)=N(-x)$, то $\gamma_+=\gamma_-=1$. Пусть абсолютно сходится интеграл

$$\nu_1=\int_{-\infty}^{\infty}xN(x)\,dx\qquad(17)$$

(ν_1 – первый момент функции $N(x)$ на $\mathbb{R}$). Тогда (см. [6])

$$а)\quad \nu_1>0\iff\gamma_+=1,\quad\gamma_-<1,$$
$$б)\quad \nu_1<0\iff\gamma_-=1,\quad\gamma_+<1,$$
$$в)\quad \nu_1=0\iff\gamma_-=\gamma_+=1.$$

Рассмотрим теперь итерации для уравнения (6)

$$\psi_{n+1}^{\pm}(x,x',y,y') = T_{\pm}(x,x',y,y')+$$
$$+\int_x^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^{\mp}(t,x,z,y)\psi_n^{\pm}(t,x',z,y')\,dt\,dz, \quad n=0,1,...,$$
$$\psi_0^{\pm}(x,x',y,y') = 0. \tag{18}$$

Можно показать индукцией по n, что

$$а)\quad \psi_n^{\pm}(x,x',y,y') \geq 0, \quad \psi_n^{\pm}\uparrow \quad \text{при } n\to\infty, \tag{19}$$
$$б)\quad \psi_n^{\pm}(x,x',y,y') \leq V_n^{\pm}(x-x',y-y'), \tag{20}$$
$$в)\quad \psi_{n+1}^{\pm}-\psi_n^{\pm} \leq V_{n+1}^{\pm}-V_n^{\pm}. \tag{21}$$

Свойства а) и б) легко проверяются. Докажем утверждение в). Обозначим

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^{\pm}(x-x',y-y') &= V_{n+1}^{\pm}(x-x',y-y')-V_n^{\pm}(x-x',y-y'),\\ \delta_{n+1}^{\pm}(x,x',y,y') &= \psi_{n+1}^{\pm}(x,x',y,y')-\psi_n^{\pm}(x,x',y,y').\end{aligned} \tag{22}$$

Для $n=0$ оценка (21) следует из (20). Имеем

$$\sigma_{n+1}^{\pm}-\sigma_n^{\pm} = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[V_n^{\pm}(x+t,y-z)\sigma_n^{\mp}(t,z)+V_{n-1}^{\mp}(t,z)\sigma_n^{\pm}(x+t,y-z)]\,dt\,dz,$$

$$\delta_{n+1}^{\pm}-\delta_n^{\pm} =$$
$$= \int_x^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n^{\pm}(t,x',z,y')\delta_n^{\mp}(t,x,z,y)+\psi_{n-1}^{\mp}(t,x,z,y)\delta_n^{\pm}(t,x',z,y')]\,dt\,dz. \tag{23}$$

Пусть (21) выполняется для некоторого $n \geq 1$. Из (20), (22) и (23), а также ввиду того, что $T \leq K$, получаем $\delta_{n+1}^{\pm}(x,x',y,y') \leq \sigma_{n+1}^{\pm}(x-x',y-y')$. Итак (21) доказана.

Последовательности ψ_n^+, ψ_n^- монотонно возрастают и согласно (20) ограничены сверху (20). Поэтому существует

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{\pm}(x,x',y,y') = \psi_{\pm}(x,x',y,y').$$

Из (21) следует, что итерации (18) сходятся не медленнее чем $V_n^{\pm}$. Если (x,y) фиксированы, то ψ_+ и ψ_- принадлежат L_1 как функции от (x',y'). Из (18) с учетом (19) получаем

$$\psi_n^{\pm}(x,x',y,y') \leq T(x,x',y,y')+\int_x^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^{\mp}(t,x,z,y)\psi^{\pm}(t,x',y',z)\,dt\,dz.$$

Так как неравенство верно для любого n, то

$$\psi^{\pm}(x,x',y,y') \le T(x,x',y,y') + \int_x^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{\mp}(t,x,z,y)\psi_n^{\pm}(t,x',y',z)\,dt\,dz. \quad (24)$$

С другой стороны

$$\psi^{\pm}(x,x',y,y') \ge T(x,x',y,y') + \int_x^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mp}(t,x,z,y)\psi_n^{\pm}(t,x',y',z)\,dt\,dz. \quad (25)$$

Из теоремы Леви следует законность предельного перехода в (25) при $n \to \infty$, откуда получаем

$$\psi^{\pm}(x,x',y,y') \ge T(x,x',y,y') + \int_x^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{\mp}(t,x,z,y)\psi^{\pm}(t,x',y',z)\,dt\,dz. \quad (26)$$

Поэтому неравенства (24) и (26) обращаются в равенство (6). Из (20) следует

$$\psi^{\pm}(x,x',y,y') \le V^{\pm}(x-x',y-y'). \quad (27)$$

Из вольтерровской структуры уравнения (6) в области Π_{r_1} следует, что

$$\psi_{\pm}(x,x',y,y') = V_{\pm}(x-x',y-y') \quad \text{при } x,x' > r_1. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь последовательность операторов $\Psi_n^{\pm}$, порожденных ядрами $\psi_n^{+}(x,x',y,y')$ и $\psi_n^{-}(x',x,y,y')$. Покажем, что последовательности $\Psi_n^{\pm}$ равномерно сходятся к $\Psi^{\pm}$ в пространстве E_r. Рассмотрим операторные ряды

$$\Psi_n^{\pm} = \sum_{k=0}^{n-1}(\Psi_{k+1}^{\pm} - \Psi_k^{\pm}). \quad (29)$$

Так как $0 \le \delta_n^{\pm} \le \sigma_n^{\pm}$, то используя (21), будем иметь

$$||\Psi_{k+1}^{\pm} - \Psi_k^{\pm}|| \le \gamma_{k+1} - \gamma_k.$$

Таким образом, ряды (29) мажорируются по норме в E_r сходящимися рядами $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\gamma_{k+1}^{\pm} - \gamma_k^{\pm})$. Отсюда следует равномерная сходимость операторных рядов (29), стало быть, и последовательностей $\psi_n^{+}(x,x',y,y')$, $\psi_n^{-}(x',x,y,y')$ в пространстве E_r. Нами доказана следующая

Теорема 1. *Оператор $I - \mathbb{T}$ допускает факторизацию (4), где Ψ_+, Ψ_- – суть операторы вида (5). Функции $\psi_\pm(x, x', y, y')$ являются основным решением нелинейных уравнений факторизации (6) и обладают свойствами (19) – (21). Последовательности операторов $\Psi_n^\pm$ сходятся к $\Psi_\pm$ равномерно в E_r.*

§2. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Факторизация (4) сводит однородное уравнение

$$S(x,y) = \int_r^\infty \int_{-\infty}^\infty T(x,x',y,y')S(x',y')\,dx'\,dy' \qquad (30)$$

к двум уравнениям

$$F(x,y) = \int_x^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi_-(x,x',y,y')F(x',y')\,dx'\,dy', \qquad (31)$$

$$S(x,y) = F(x,y) + \int_r^x \int_{-\infty}^\infty \psi_+(x,x',y,y')S(x',y')\,dx'\,dy'. \qquad (32)$$

Рассмотрим уравнение (31) в области Π_{r_1} $(r < r_1)$. Тогда равенства (28) выполняются и мы можем записать (31) в виде

$$F(x,y) = \int_x^\infty \int_{-\infty}^\infty V_-(x'-x, y-y')F(x',y')\,dx'\,dy'. \qquad (33)$$

В случае $\gamma_- = 1$ уравнение (33) имеет нетривиальное решение $F(x,y) \equiv 1$. Продолжим это решение в область Π_r $(r < r_1)$. При $r < x < r_1$ уравнение (31) будет иметь вид

$$F(x,y) = F^0(x,y) + \int_x^{r_1} \int_{-\infty}^\infty \psi_-(x',x,y',y)F(x',y')\,dx'\,dy', \qquad (34)$$

где

$$F^0(x,y) = \int_{r_1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi_-(x',x,y',y)\,dx'\,dy'. \qquad (35)$$

(34) представляет собой уравнение типа Вольтерра по первому аргументу. Покажем, что его решение удовлетворяет неравенству $0 \le F(x,y) \le 1$. В силу (27) и $\gamma_- = 1$ из (35) имеем $F^0(x,y) \le \gamma_-$. Рассмотрим итерации

$$F_{n+1}(x,y) = F^0(x,y) +$$

$$+ \int_x^{r_1} \int_{-\infty}^\infty \psi_-(x',x,y',y)F_n(x',y')\,dx'\,dy', \quad n = 0,1,\ldots, \quad F_0 = 0. \qquad (36)$$

Покажем индукцией по n, что $F_n(x,y) \le 1$. Для $n=0$ это неравенство очевидно выполняется. Пусть оно выполняется для некоторого $n \ge 0$. Из (36), с учетом (20), имеем

$$F_{n+1}(x,y) \le F^0(x,y) + \int_x^r \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x',x,y',y)\,dx'\,dy' \le$$
$$\le \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_-(x'-x,y-y')\,dx'\,dy' = 1. \qquad (37)$$

Из неравенства $F_n(x,y) \le 1$ и монотонности последовательности $F_n(x,y)$ следует сходимость $F_n(x,y)$ к функции $F(x,y) \in M$ по топологии $L_1^{loc}(\Pi_r)$. Поэтому уравнение (34) имеет нетривиальное решение $F(x,y)$ и $0 \le F(x,y) \le 1$.

Теперь рассмотрим уравнение (32). Вспомогательное уравнение

$$S^*(x,y) = 1 + \int_r^x \int_{-\infty}^{\infty} V_+(x-x',y-y')S^*(x',y')\,dx'\,dy' \qquad (38)$$

имеет локально–интегрируемое решение $S^*(x,y) = \varphi(x)$, зависящее только от x и удовлетворяющее уравнению восстановления

$$\varphi(x) = 1 + \int_r^x U_+(x-x')\varphi(x')\,dx', \qquad (39)$$

где $U_+(x)$ определяется из (16). Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами (см. [6]) :

а) $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, монотонно возрастает на $[r,\infty)$ и $\varphi(r)=1$;

б) если $\gamma_+ < 1$, то $\varphi(x)$ ограничена и $\varphi(+\infty) = \dfrac{1}{1-\gamma_+}$;

в) если $\gamma_+ = 1$, то $\varphi(x) = O(x)$ при $x \to \infty$.

Сопоставление простых итераций для (32) и (38) показывает, что уравнение (32) имеет решение

$$0 \le S(x,y) \le \varphi(x). \qquad (40)$$

Нами доказана

Теорема 2. . *Если в факторизации (4) $||\mathbb{T}|| \le 1$, то однородное уравнение (30) имеет положительное решение $S(x,y)$, удовлетворяющее неравенству (40), где $\varphi(x)$ обладает перечисленными выше свойствами а) – в).*

Факторизация (4) может быть также применена для изучения неоднородного консервативного уравнения.

В заключение выражаю благодарность Н. Б. Енгибаряну и Л. Г. Арабаджяну за полезные обсуждения и ценные советы.

ABSTRACT. The paper studies the integral equation $f(x,y) = g(x,y) + \iint_G K(x-x', y-y') f(x',y')\, dx'\, dy'$, where G is an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$, the kernel K is nonnegative function satisfying the conservativity condition. Using Volterra factorization, the existence of positive solution of homogeneous equation ($g = 0$) is proved under some additional conditions on G and K.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Арабаджян, М. А. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях теории переноса в неоднородной среде", Деп. в АрмНИИНТИ, № 31-АР-86, 1987.
2. М. Г. Крейн, "Интегральное уравнение на полуоси с ядром, зависящим от разности аргументов", Усп. Мат. Наук, т. 13, № 5, стр. 3 – 120, 1958.
3. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, Наука, М., 1966.
4. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "О фаторизации интегральных операторов", ДАН СССР, т. 206, № 4, стр. 792 – 795, 1972.
5. Н. Б. Енгибарян, "Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов", ДАН СССР, т. 230, № 5, стр. 1021 – 1024, 1976.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
7. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сб., т. 97, № 1, стр. 35 — 58, 1975.
8. Н. Б. Енгибарян, М. Т. Акопян, "О факторизационной задаче в $\mathbb{C}^n$", Дифф. и Инт. Ур., АрмГПИ, Ереван, 1979.

27 октября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКРАТНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ К ОДНОРОДНОМУ УРАВНЕНИЮ СВЕРТКИ

Б. Н. Енгибарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе изучается однородное интегральное уравнение $f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt$, где $\lambda \in \mathbf{C}$, $K_0 \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, $K \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$. С помощью трехфакторного разложения доказывается, что это уравнение обладает нетривиальным непрерывным решением f на $[0,\infty)$. Установлены некоторые свойства f.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению следующего однородного интегрального уравнения на полуоси и связанной с ним факторизационной задачи :

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt. \tag{0.1}$$

Предполагается, что $\lambda \in \mathbf{C}$, $K_0 \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, а ядро K удовлетворяет условиям

$$K \geq 0, \quad K \in L_1(-\infty,\infty), \quad \mu \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1. \tag{0.2}$$

Применяемый подход основан на факторизационном методе работы [1]. Будет показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий уравнение (0.1) имеет нетривиальное непрерывное на $[0,\infty)$ решение при произвольном $\lambda \in \mathbf{C}$. Специально изучается частный случай $K_0(x) = K(x)$, $x > 0$, который представляет существенный интерес в физической кинетике (см. [2], [3]). Строится положительное решение этого уравнения при $0 \leq \lambda \leq 1$.

§1. ФАКТОРИЗАЦИЯ

1. Функциональные пространства. Классы операторов. Будем полагать, что $E^+ = E([0,\infty))$ – одно из функциональных банаховых пространств L_p $(1 \le p < \infty)$, $M^+ \equiv L_\infty^+$, C_u^+, $C_0^+ \subset C_u^+$. Здесь C_u – пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций, имеющих конечный предел в ∞, а C_0 состоит из непрерывных на $[0,\infty)$ функций, стремящихся к 0 в ∞. Пусть L_+^{loc} – класс функций на $[0,\infty)$, интегрируемых по Лебегу на каждом конечном промежутке $[0,r]$, $r<\infty$.

Введем в рассмотрение следующие классы интегральных операторов свертки на полуоси $[0,\infty)$. Пусть Ω – класс интегральных операторов Винера–Хопфа, а $\Omega^\pm \subset \Omega$ – алгебры вольтерровых операторов :

$$\Omega = \left\{\mathcal{K}:\ (\mathcal{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt, \quad K \in L_1(-\infty,\infty)\right\}, \tag{1.1}$$

$$\Omega^+ = \left\{\mathcal{V}_+:\ (\mathcal{V}_+f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt, \quad V_+ \in L_1^+\right\}, \tag{1.2}$$

$$\Omega^- = \left\{\mathcal{V}_-:\ (\mathcal{V}_-f)(x) = \int_x^\infty V_-(x-t)f(t)\,dt, \quad V_- \in L_1^+\right\}.$$

Введем также следующий класс Ω_0 интегральных операторов с ядрами, зависящими от суммы аргументов :

$$\Omega_0 = \left\{\mathcal{K}_0:\ (\mathcal{K}_0f)(x) = \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt, \quad K_0 \in L_1^+\right\}. \tag{1.3}$$

Операторы из Ω и Ω_0 ограниченно действуют в E^+. Оператор $\mathcal{K}_0 \in \Omega_0$ является вполне непрерывным (компактным) в L_1^+, C_0^+ и в ряде других пространств (см. [4]). Интегральный оператор Винера–Хопфа $\mathcal{K} \neq 0$ не компактен ни в одном из пространств E^+. Оператор $\mathcal{K}_0 \in \Omega_0$ переводит C_u^+ в C_0^+. Кроме E^+, операторы из Ω^+ нами будут рассмотрены также в некоторых других классах функций из L_1.

Уравнение (0.1) в операторной форме имеет вид

$$(I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0)f = 0, \tag{1.4}$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0$ определяются согласно (1.1) и (1.3), соответственно, причем выполняется условие консервативности (0.2).

2. Факторизация оператора $I - \mathcal{K}$. Оператор $I - \mathcal{K}$ допускает факторизацию

$$I - \mathcal{K} = (I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+), \tag{1.5}$$

где $\mathcal{V}_\pm \in \Omega^\pm$ – операторы вида (1.2). Пара (V_+, V_-) ядер $\mathcal{V}_\pm$ является *каноническим решением* следующей системы *нелинейных уравнений факторизации* Н. Б. Енгибаряна (см. [5], [6]) :

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\pm(x+t)V_\mp(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Функции $\mathcal{V}_\pm$ обладают следующими свойствами :

$$V_\pm \geq 0, \quad \gamma_\pm \equiv \int_0^\infty V_\pm(x)\,dx \leq 1, \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+) = 0. \tag{1.7}$$

Если $\gamma_+ < 1$ (или $\gamma_- < 1$), то оператор $\mathcal{V}_+$ (или $\mathcal{V}_-$) сжимающий в E^+, а $I - \mathcal{V}_+$ (или $I - \mathcal{V}_-$) обладает положительным обратным. Если $\gamma_+ = 1$ (или $\gamma_- = 1$), то оператор $I - \mathcal{V}_+$ (или $I - \mathcal{V}_-$) необратим ни в одном из пространств E^+. Если K – четная функция *(симметрический случай)*, то $V_\pm = V$ и $\gamma_\pm = 1$.

Пусть первый момент ν_1 функции K

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)\,dx$$

существует и интеграл сходится абсолютно или в смысле главного значения Коши. Тогда

$$\begin{aligned}
&а)\ \ \nu_1 > 0 \iff \gamma_+ = 1, \quad \gamma_- < 1,\\
&б)\ \ \nu_1 < 0 \iff \gamma_+ < 1, \quad \gamma_- = 1,\\
&в)\ \ \nu_1 = 0 \iff \gamma_\pm = 1.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

3. Факторизация оператора $I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0$. Мы будем рассматривать трехфакторное разложение оператора $I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0$, следуя работе [1], в которой впервые было построено такое разложение. Начнем с рассмотрения факторизации

$$I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0 = (I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+ - \lambda\mathcal{U}_0), \tag{1.9}$$

где $\mathcal{V}_\pm$ суть операторы, фигурирующие в (1.5), а $\mathcal{U}_0 \in \Omega_0$ – искомый оператор. Ядро U_0 оператора $\mathcal{U}_0$ определяется из уравнения

$$U_0(x) = K_0(x) + \int_x^\infty V_-(t-x)U_0(t)\,dt. \tag{1.10}$$

При $\gamma_- < 1$ уравнение (1.10) имеет единственное решение $U_0 \in L_1^+$. Если $\gamma_- = 1$, то для любого $K_0 \in L_1^+$ уравнение (1.10) обладает так называемым ***основным решением*** U_0 (см. [6]), причем

$$\int_0^x |U_0(t)|\,dt = o(x), \quad x \to \infty. \tag{1.11}$$

Обозначим через $m_k(f)$ конечный момент порядка $k \geq 0$ функции f на $[0,\infty)$:

$$m_k(f) = \int_0^\infty x^k f(x)\,dx \leq \infty.$$

Пусть $\gamma_- = 1$, функция $|K_0|$ имеет конечные моменты до порядка n включительно : $\alpha_n \equiv m_n(|K_0|) < \infty$. Тогда функция $|U_0|$ имеет конечные моменты

$$\beta_k \equiv m_k(|U_0|) < \infty, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

В частности, из $\alpha_1 < \infty$ следует $U_0 \in L_1^+$. Основное решение уравнения (1.10) имеет вид

$$U_0(x) = K_0(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t)K_0(x+t)\,dt, \tag{1.12}$$

где резольвентная функция Φ_- определяется из следующего уравнения восстановления :

$$\Phi_-(x) = V_-(x) + \int_0^x \Phi_-(t)V_-(x-t)\,dt. \tag{1.13}$$

Рассмотрим теперь факторизацию

$$I - \mathcal{V}_- - \lambda\mathcal{U}_0 = (I - \lambda\mathcal{V}_0)(I - \mathcal{V}_+). \tag{1.14}$$

Как показано в [1], ядро V_0 оператора $\mathcal{V}_0$ определяется из уравнения

$$V_0(x) = U_0(x) + \int_x^\infty V_+(t-x)V_0(t)\,dt. \tag{1.15}$$

Уравнения (1.10) и (1.15) имеют одинаковую структуру. Поэтому сформулированные выше факты по уравнению (1.10) переходят к (1.15). Пусть выполнено одно из следующих условий :

а) $\gamma_\pm = 1$ и $\alpha_2 < \infty$,

б) либо $\gamma_+ < 1$ либо $\gamma_- < 1$ и $\alpha_1 < \infty$.

Тогда $V_0 \in L_1^+$ и существует факторизация (1.14). Из (1.9) и (1.14) имеем

$$I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0 = (I - \mathcal{V}_-)(I - \lambda\mathcal{V}_0)(I - \mathcal{V}_+). \tag{1.16}$$

Замечание. Факторизацию (1.16) можно было построить по другой последовательности, сперва построив факторизацию

$$I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0 = (I - \mathcal{V}_- - \lambda\tilde{\mathcal{U}}_0)(I - \mathcal{V}_+),$$

а затем факторизацию

$$I - \mathcal{V}_- - \lambda\tilde{\mathcal{U}}_0 = (I - \mathcal{V}_-)(I - \lambda\mathcal{V}_0).$$

§2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Используя факторизацию (1.16), вместо (0.1) будем иметь

$$(I - \mathcal{V}_-)(I - \lambda\mathcal{V}_0)h = 0, \tag{2.1}$$

где новая искомая функция h связана с f соотношением

$$(I - \mathcal{V}_+)f = h. \tag{2.2}$$

В §1 было отмечено, что операторы из Ω_0 компактны в C_u^+. Обозначим через Λ множество характеристических чисел оператора $\mathcal{V}_0$.

Лемма 1. *Пусть $\gamma_- = 1$. Тогда для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ существует нетривиальное решение $h \in C_u^+$ уравнения (2.1).*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\lambda \in \Lambda$. Тогда в качестве h можно взять нетривиальное решение $h = h_\lambda \in C_u^+$ уравнения

$$h(x) = \lambda \int_0^\infty V_0(x+t)h(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Имеем

$$|h(x)| \le |\lambda| a\eta(x), \tag{2.4}$$

где

$$a = \sup_{x\in[0,\infty)} |h(x)| < \infty, \quad \eta(x) = \int_x^\infty |V_0(t)|\,dt \in C_0^+.$$

Так как $\eta \in C_0^+$, то и $h \in C_0^+$. Функцию h можно нормировать условием $a = 1$. Пусть теперь $\lambda \notin \Lambda$. Обозначим

$$F = (I - \lambda \mathcal{V}_0)h. \tag{2.5}$$

Функция F удовлетворяет однородному уравнению

$$F(x) = \int_0^\infty V_-(t)F(x+t)\,dt. \tag{2.6}$$

Из равенства $\gamma_- = 1$ следует, что функция $F(x) \equiv 1$ является решением уравнения (2.6). Нам остается построить функцию h из уравнения

$$h(x) = 1 + \lambda \int_0^\infty V_0(x+t)h(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Так как $\lambda \notin \Lambda$, то уравнение (2.7) имеет единственное решение $h \in C_u^+$. Лемма 1 доказана.

Из (2.7) имеем

$$h(x) = 1 + h_0(x), \quad h_0(x) = \lambda \int_0^\infty V_0(x+t)h(t)\,dt \tag{2.8}$$

и

$$|h_0(x)| \le |\lambda| a\eta(x). \tag{2.9}$$

Для построения нетривиального решения уравнения (0.1) с помощью уже найденной функции h нам остается решить уравнение восстановления (2.2), т.е. уравнение

$$f(x) = h(x) + \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt. \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.10) имеет вид

$$f(x) = h(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t)h(t)\,dt, \tag{2.11}$$

где резольвентная функция Φ_+ определяется из уравнения

$$\Phi_+(x) = V_+(x) + \int_0^x V_+(x-t)\Phi_+(t)\,dt. \tag{2.12}$$

Если $\gamma_+ < 1$, то $\Phi_+ \in L_1^+$, $f \in C_u^+$ при $\lambda \notin \Lambda$ и $f \in C_0^+$ при $\lambda \in \Lambda$. Если $\gamma_+ = 1$, то можно использовать известные свойства решений консервативных уравнений восстановления (2.10) и (2.12) (см. [6] – [8]). При $\lambda \notin \Lambda$ будем иметь

$$f(x) = S(x) + S_1(x), \tag{2.13}$$

где S – решение уравнения

$$S(x) = 1 + \int_0^x V_+(x-t)S(t)\,dt, \tag{2.14}$$

а S_1 – решение уравнения

$$S_1(x) = h_0(x) + \int_0^x V_+(x-t)S_1(t)\,dt. \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.14) (при $\gamma_+ = 1$) является абсолютно непрерывной неубывающей функцией на $[0,\infty)$, причем

$$S(x) = 1 + \int_0^x \Phi_-(t)\,dt, \quad S(x) = \frac{x}{\alpha_1} + o(x), \quad x \to \infty, \tag{2.16}$$

где $\alpha_1 = m_1(V_+)$ – первый момент функции V_+. При $\alpha_1 = \infty$ числу α_1^{-1} приписывается значение 0. Из $h_0 \in C_0^+$, с учетом леммы 3.1 из [6], следует, что решение уравнения (2.15) обладает свойством

$$S_1(x) = o(S(x)), \quad x \to \infty. \tag{2.17}$$

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda$. Тогда (2.11) имеет решение f, которое обладает перечисленными выше свойствами функции S_1. Нами доказана

Теорема 1. *Пусть в уравнении (0.1) выполняется одно из условий*

а) $\gamma_\pm = 1$ и функция K_0 обладает конечным моментом второго порядка;

б) $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ и функция K_0 обладает конечным моментом первого порядка.

Тогда для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение (0.1) имеет нетривиальное решение $f \in \mathbb{C}[0,\infty)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} O(x), & x \to \infty \quad \text{при } \gamma_+ = 1, \\ O(1), & x \to \infty \quad \text{при } \gamma_+ < 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Замечание. Условия теоремы 1 можно сформулировать в терминах функции K. Так, если $K(-x) = K(x)$ или $\nu_1 = 0$, то $\gamma_\pm = 1$. Если же существует $\nu_1 < 0$, то $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ (см. §1).

§3. СЛУЧАЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЯДРА

В настоящем параграфе будет рассмотена задача построения положительного решения уравнения (0.1). Будем считать, что

$$K_0(x) \geq 0 \tag{3.1}$$

и

$$K_0(x) = K(x), \quad x > 0. \tag{3.2}$$

Этот частный случай представляет большой интерес в кинетической теории газов. Полученные результаты содержат обобщение некоторых результатов работы [3], в которой данная задача изучена в случае, когда K – нечетная функция, вполне монотонная на положительной полуоси и обладающая конечными моментами всех порядков; предполагается также, что $0 < \lambda < 1$. Из (3.1) имеем $V_0 \geq 0$. Если $\gamma_- < 1$ или $m_1(K_0) < \infty$, то существует решение $U_0 \in L_1^+$ уравнения (1.10) и $U_0 \geq 0$. Если же выполняется равенство (3.2), то из (1.10) и (1.6) имеем

$$U_0(x) = V_+(x) \geq 0,$$

то есть уравнение (1.10), (3.2) имеет основное решение $U_0 \in L_1^+$, $U_0 \geq 0$, независимо от существования моментов функции $K_0 = K$ или значения γ_-.

Для построения факторизации (1.16) нам остается рассмотреть уравнение (1.15). Если $\gamma_+ < 1$, то (1.15) имеет решение

$$V_0(x) \in L_1^+, \quad V_0(x) \geq 0. \tag{3.3}$$

Если $\gamma_+ = 1$, то для существования такого решения приходится потребовать конечность второго момента функции K_0 при $\gamma_- = 1$ и первого момента при $\gamma_- < 1$ (см. теорему 1). Итак справедлива

Лемма 2. *Пусть $K_0 \geq 0$ и выполняются условия (0.2), (3.1). Тогда при выполнении одного из следующих условий а), б) и в) существует факторизация (1.16) и V_0 обладает свойством (3.3) :*

а) функция K_0 имеет конечный момент второго порядка;

б) выполняется одно из неравенств $\gamma_+ < 1$ или $\gamma_- < 1$ и функция K имеет конечный момент первого порядка;

в) $\gamma_+ < 1$ и выполняется равенство (3.2).

Пусть выполняются условия леммы 2 и

$$0 \le \lambda < \lambda_1 \equiv \|\mathcal{V}_0\|_{C_0^+}.$$

Тогда оператор $I - \lambda\mathcal{V}_0$ обладает обратным $I + \Gamma$, который разлагается в равномерно сходящийся ряд Неймана

$$I + \Gamma \equiv (I - \lambda\mathcal{V}_0)^{-1} = I + \lambda\mathcal{V}_0 + \lambda^2\mathcal{V}_0^+ + \cdots, \tag{3.4}$$

где Γ – интегральный оператор с положительным ядром. Остается рассмотреть уравнение (0.1) в том случае, когда выполняется равенство (3.2). Рассмотрим уравнение

$$f_1(x) = \int_0^\infty K(x-t)f_1(t)\,dt + \int_0^\infty K(x+t)f_1(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Из консервативности ядра K следует, что функция $f_1(x) \equiv 1$ удовлетворяет (3.5), которая в этом случае приводится к

$$1 = \int_{-\infty}^x K(y)\,dy + \int_x^\infty K(y)\,dy..$$

Пусть выполняются условия леммы 2 и существует разложение (1.16) для (3.5). Тогда функция $h_1 = (I - \mathcal{V}_+)f_1$ удовлетворяет уравнению

$$(I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_0)h_1 = 0. \tag{3.6}$$

Имеем

$$h_1(x) = 1 - \int_0^x V_+(t)\,dt = (1-\gamma_+) + \int_x^\infty V_+(t)\,dt. \tag{3.7}$$

Обозначим

$$h_2 = (I - \mathcal{V}_0)h_1. \tag{3.8}$$

С учетом (3.7) получаем $h_2(x) = (1-\gamma_+) + h_3(x)$, где

$$h_3(x) = \int_x^\infty V_+(t)\,dt + \int_0^\infty V_0(x+t)h_1(t)\,dt.$$

Имеем, $h_2 \in C_u^+$ и $h_3 \in C_0^+$. Из (3.6) и (3.7) видно, что функция h_2 удовлетворяет однородному уравнению

$$h_2(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)h_2(t)\,dt.$$

Покажем, что $h_2 = 1-\gamma_+$. Если $\gamma_- < 1$, то $h_2(x) = 0$ – единственное ограниченное решение уравнения (3.8). Если $\gamma_- = 1$ и существует предел $C < \infty$ решения $h_2 \in L_1^{loc}$ уравнения (3.8), то по лемме 3.4 работы [6] $h_2 = Const$. Следовательно

$$h_2(x) = 1 - \gamma_+ \geq 0. \tag{3.9}$$

В случае $\gamma_+ = 1$, согласно (3.8) и (3.9), компактный в C_u^+ оператор $\mathcal{V}_0$ с положительным ядром V_0 имеет положительную неподвижную функцию h_1. Поэтому число $\lambda_1 = 1$ является наименьшим по модулю характеристическим числом оператора $\mathcal{V}_0$ в пространствах C_u^+ и C_0^+ (см. [9]) и

$$||\mathcal{V}_0||_{C_u^+} = ||\mathcal{V}_0||_{C_0^+} = 1.$$

Если $\gamma_+ < 1$, то функция h_2 удовлетворяет уравнению

$$h_2(x) = (1-\gamma_+) + \int_0^\infty V_0(t+x)h_2(t)\,dt,$$

и (см. [9]) имеем $||\mathcal{V}_0||_{C_u^+} < 1$. Поэтому для произвольного $\gamma_+ \leq 1$

$$\lambda_1 \equiv ||\mathcal{V}_0||_{C_u^+} \leq 1.$$

Из сказанного следует, что для произвольного $\lambda \in [0, \infty)$ оператор $I - \lambda\mathcal{V}_0$ обладает положительным обратным, который является суммой равномерно сходящегося в C_u^+ ряда Неймана (3.4). Если $\gamma_+ < 1$, то этот ряд сходится также при $\lambda = 1$.

Займемся вопросом применения результатов §2 к построению положительного решения уравнения

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda\int_0^\infty K(x+t)f(t)\,dt. \tag{3.10}$$

Будем считать, что $\gamma_- = 1$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Как и в §2 мы будем исходить из решения $F(x) \equiv 1$ уравнения (2.6), что приводит нас к уравнению (2.7). Если

$\gamma_+ < 1$ или $\gamma_+ = 1$ и $\lambda < 1$, то оператор обладает положительным обратным. Поэтому уравнение (2.7) имеет единственное решение $h \in C_u^+$. Из (2.7) имеем

$$h(x) = 1 + h_0(x), \quad h_0 \geq 0, \quad h_0 \in C_0^+.$$

Применяя результаты из §2 к уравнению (2.10) для f, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\gamma_- = 1$ и $0 \leq \lambda < 1$. Тогда уравнение (3.10) имеет положительное решение вида (2.13). Функция S определяется из (2.14). Имеют место асимптотики (2.16) – (2.18). Если $\gamma_+ < 1$, то $f \in C_u^+$.*

Используя разложение (3.4), можно получить разложение решения уравнения (2.14) по степеням λ.

ABSTRACT. The paper studies the homogeneous integral equation $f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt$, where $\lambda \in \mathbf{C}$, $K_0 \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, $K \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$. The corresponding three-factor decomposition proves that this equation possesses a non-trivial continuous solution f on $[0,\infty)$. Some properties of f are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
2. К. Черчиньяни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, М., 1978.
3. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях свертки в кинетической теории", Жур. Высш. Мат. и Мат. Физ. (в печати).
4. С. Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховом Пространстве, Мир, М., 1971.
5. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сб., т. 97, № 1, стр. 35 — 58, 1975.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
7. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально–Разностные Уравнения, Мир, М., 1967.
9. М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Физматиздат, М., 1962.

22 декабря 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

ОБ УРАВНЕНИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СО ВПОЛНЕ МОНОТОННЫМ ЯДРОМ

О. Р. Назарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение восстановления $f(x) = g(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)dt$, где ядро V – вполне монотонная функция, и доказываем, что если $g \in L_1(0,\infty)$ – вполне монотонная функция вида $g(x) = \int_a^b e^{-xs}G(s)d\sigma(s)$ и $G \geq 0$ – непрерывная возрастающая функция на $[a,b)$, то решение также вполне монотонно.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем интегральное уравнение восстановления (см. [1] – [6])

$$f(x) = g(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)\,dt \tag{1.1}$$

с ядром V вида

$$V(x) = \int_a^b e^{-xs}\,d\sigma(s), \quad 0 \leq a < b \leq \infty, \tag{1.2}$$

где σ – возрастающая функция со свойствами

$$\sigma(a) = 0, \quad \mu = \|V\|_{L_1^+} = \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma(s) \leq 1. \tag{1.3}$$

Представление (1.2) означает, что функция $V(x)$ вполне монотонна на $(0,\infty)$, т.е. $V(x)$ бесконечно дифференцируема на $(0,\infty)$ и $(-1)^k V^{(k)} \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

Такие уравнения часто возникают в теории радиационного переноса и в некоторых других разделах математической физики. В частности, известен ряд способов сведения интегральных уравнений Винера–Хопфа со вполне монотонными ядрами на полуоси к уравнениям вида (1.1), (1.2) (см. [1], [6]). Такой переход достигается путем решения известного нелинейного интегрального уравнения В.

А. Амбарцумяна. Для интегральных уравнений Амбарцумяна эффективные аналитические и численные методы решения содержатся в работах (см. [1], [6], [7]). Поэтому представляет существенный интерес разработка адекватной теории для уравнения (1.1), (1.2).

Важный результат в этом направлении был получен в работе [4]. Пусть $\Phi(x)$ – резольвентная функция уравнения (1.1), определяемая из уравнения восстановления

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.1) выражается через $\Phi(x)$:

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)g(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Из свойства (1.2) функции $V(x)$ следует, что резольвентная функция $\Phi(x)$ вполне непрерывна (см. [4]) :

$$\Phi(x) = \int_\alpha^\beta e^{-xp}\,d\omega(p), \quad 0 \le \alpha \le a < \beta \le b \le \infty, \tag{1.6}$$

где $\omega(p)$ – возрастающая функция, $\omega(\alpha) = 0$. В доказательстве работы [4] предлагается построение для $\omega(p)$. Отметим, что существование представления (1.6) можно вывести исходя из теории R-функций (см. [8]). Однако такой подход не дает информации относительно построения меры $d\omega$.

В настоящей работе мы доказываем, что из свойства полной монотонности ядра следует то же свойство для решения $f(x)$ уравнения (1.1), (1.2), когда функция $g(x)$ также вполне монотонна и имеет вид

$$g(x) = \int_a^b e^{-xs}G(s)\,d\sigma(s), \tag{1.7}$$

где $G(s)$ – непрерывная возрастающая функция на $[a,b)$ со свойствами

$$G(s) \ge 0, \qquad \int_a^b \frac{1}{s}G(s)\,d\sigma(s) < \infty. \tag{1.8}$$

Заметим, что в частном случае $G(s) = 1$ уравнение (1.1) обращается в (1.4). Получены новые результаты, связанные с процедурой построения представлений $\Phi(x)$ и $f(x)$. Нами будет систематически использован подход работы [4].

§2. СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНОЙ МЕРЫ

Сначала рассмотрим уравнение (1.1), (1.2) в том частном случае, когда функция $\sigma = \widetilde{\sigma}$ кусочно постоянная и имеет конечное число точек скачков :

$$\sigma = \widetilde{\sigma}(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \theta(s - s_k), \quad \theta(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s \le 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\{s_k\}_{k=1}^{n}$ – точки скачков, $0 < s_1 \cdots < s_n$ и a_k – величины соответствующих скачков. В этом случае

$$V(x) = \widetilde{V}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-xs_k}, \tag{2.2}$$

$$g(x) = \widetilde{g}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \gamma_k e^{-xs_k}, \tag{2.3}$$

где $\gamma_k = G(s_k)$ возрастают вместе с k. Пусть функция $\widetilde{f}(x)$ удовлетворяет усеченному уравнению восстановления

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{g}(x) + \int_0^x \widetilde{V}(x-t)\widetilde{f}(t)\, dt, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{V}$ и $\widetilde{g}$ задаются посредством (2.2) и (2.3) соответственно. Условие (1.3) принимает вид

$$\widetilde{\mu} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k} \le 1. \tag{2.5}$$

Обозначим $\nu_k = \gamma_k a_k$. Ищем решение уравнения (2.4) в виде

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m e^{-xp_m}, \tag{2.6}$$

где $\alpha_m, p_m > 0$ и $\{s_k\} \cap \{p_m\} = \emptyset$. Подставляя (2.2), (2.3) и (2.6) в (2.4), после несложных выкладок получаем

$$\sum_{m=1}^{n} \alpha_m e^{-xp_m} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k a_k e^{-xs_k} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \alpha_m e^{-xp_m} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k - p_m} - \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-xs_k} \sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m}{s_k - p_m}. \tag{2.7}$$

Из линейной независимости системы функций $\{e^{-xp_m}, e^{-xs_k}\}_{k,m=1}^{n}$ следует, что равенство (2.7) эквивалентно соотношениям

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k - p_m} = 1, \quad m = 1, \dots, n, \tag{2.8}$$

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m}{s_k - p_m} = \gamma_k, \quad k = 1, ..., n. \tag{2.9}$$

Из (2.8) следует, что $\{p_m\}$ должны быть корнями характеристического уравнения

$$\mathrm{L}(p) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k - p} = 1. \tag{2.10}$$

Это характеристическое уравнение было изучено в [4] в связи с построением резольвентной функции $\Phi(x)$. Было доказано, что все n корней уравнения (2.10) вещественны, различны и расположены в следующем порядке :

$$0 \le p_1 < s_1 < p_2 < \cdots < p_k < s_k < \cdots < p_n < s_n. \tag{2.11}$$

Рассмотрим систему (2.9) относительно $\{\alpha_m\}$. Вычитая из последнего уравнения предпоследнее, затем из предпоследнего уравнения предыдущее и т.д., получаем систему

$$\sum_{m=1}^{n} b_{km}\alpha_m = l_k, \quad k = 1, ..., n, \tag{2.12}$$

где $l_k = \gamma_k - \gamma_{k-1}$ и

$$b_{1m} = \frac{1}{s_1 - p_m}, \quad b_{km} = \frac{1}{s_k - p_m} - \frac{1}{s_{k-1} - p_m} = \frac{s_{k-1} - s_k}{(s_k - p_m)(s_{k-1} - p_m)}. \tag{2.13}$$

Так как $\{\gamma_k\}$ возрастает по k, то $l_k \ge 0$. Матрица $B = (b_{km})$ обладает положительной обратной B^{-1} (см. [11], глава 16). Из положительности правых частей (2.12) следует, что эта система обладает единственным, причем положительным решением $\{\alpha_m\}_{m=1}^{n}$ (см. [11], гл. 16). Нами доказана

Лемма 1. *Решение уравнения (1.1) в случае (2.2), (2.3) имеет вид*

$$\tilde{f}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xp}\, d\tilde{\rho}(p), \tag{2.14}$$

где

$$\tilde{\rho}(p) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \theta(p - p_m). \tag{2.15}$$

Далее нам понадобится равенство

$$\sum_{m=1}^{n} \alpha_m = \sum_{k=1}^{n} \nu_k. \tag{2.16}$$

Для его доказательства применим к (1.1) преобразование Лапласа. Получаем $\lambda_s = g_s + \mu_s\lambda_s$ или

$$\lambda_s = g_s(1-\mu_s)^{-1}, \quad s > 0, \tag{2.17}$$

где

$$\lambda_s = \int_0^\infty \widetilde{f}(x)e^{-xs}\,dx = \sum_{m=1}^n \frac{\alpha_m}{p_m + s}, \quad \mu_s = \int_0^\infty \widetilde{V}(x)e^{-xs}\,dx = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s_k+s},$$

$$g_s = \int_0^\infty \widetilde{g}(x)e^{-xs}\,dx = \sum_{k=1}^n \frac{a_k\gamma_k}{s_k+s} = \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k}{s_k+s}.$$

Если $\mu < 1$, то равенство (2.17) справедливо также при $s = 0$. Из (2.17) при $s > 0$ имеем

$$s\sum_{m=1}^n \frac{\alpha_m}{p_m+s} = \frac{s\sum\limits_{k=1}^n \frac{\nu_k}{s_k+s}}{1-\sum\limits_{k=1}^n \frac{a_k}{s_k+s}}.$$

Совершив в (2.16) предельный переход при $s \to +\infty$, приходим к (2.16).

§3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

В настоящем параграфе мы докажем возможность представления (2.14) в общем случае ядер (1.2). Предположим сначала, что $\mu < 1$. Тогда $f(x) \in L_1^+$ и $\|f\|_{L_1^+} = \nu(1-\mu)^{-1}$. Возьмем некоторый набор Π точек на $[a,b)$:

$$\Pi = \{s_k\}_{k=0}^n, \quad s_0 = a < s_1 \cdots < s_n \tag{3.1}$$

и положим $a_k = \sigma(s_k) - \sigma(s_{k-1}) > 0$, $k = 1, ..., n$. Каждому набору Π соответствуют функции $\sigma = \widetilde{\sigma}$ (см. (2.1)) и $\sigma_1 = \widetilde{\sigma}_1$, причем

$$\widetilde{\sigma}_1(s) = \int_0^s G(x)\,d\widetilde{\sigma}(x), \quad \nu_k = \widetilde{\sigma}_1(s_k) - \widetilde{\sigma}_1(s_{k-1}) > 0, \tag{3.2}$$

и функции $\widetilde{V}$ и $\widetilde{g}$ вида (2.2) и (2.3). Добавим новую точку s' к набору Π. Аналогично [4] доказывается, что соответствующие функции $\widetilde{V}$ и $\widetilde{g}$ возрастают. Пусть $\{p'_m\}$ – корни характеристического уравнения (2.10), соответствующие набору $\Pi' = \Pi \cup \{s'\}$, где $s' \in (s_k, s_{k+1})$. Имеем (см. [4]) $p'_m < p_m$ при $m \le k$ и $p'_{m+1} < p_m$ при $m > k$. Рассмотрим расширяющуюся последовательность множеств вида (3.1) :

$$\Pi_k = \{s_j\}_{j=0}^{n_k}, \quad s_0 = a, \quad \Pi_k \subset \Pi_{k+1}. \tag{3.3}$$

Пусть V_k и g_k – функции вида (2.2) и (2.3), соответственно, для набора Π_k. Пусть f_k – решение уравнения (2.4), причем $\widetilde{V} = V_k$ и $\widetilde{g} = g_k$. Имеем

$$f_k(x) = \int_\alpha^\beta e^{-xp}\, d\rho_k(p), \tag{3.4}$$

$$\rho_k(p) = \sum_{m=1}^{n_k} \alpha_m \theta(p - p_m). \tag{3.5}$$

В силу (3.3) функции V_k и g_k возрастают по k. Последовательность Π_k может быть выбрана так, чтобы $V_k \uparrow V$ и $g_k \uparrow g$ в смысле сходимости в L_1^+. Действительно, пусть $c \in [a, b)$, $G(c) > 0$. Возьмем последовательность множеств

$$\Pi_k' = \{s_j\}_{j=0}^{n_k'}, \quad s_0 = a, \quad s_{n_k'} = c, \quad \text{для интервала } [a, c],$$

$$\Pi_k'' = \{s_j\}_{j=n_k'+1}^{n_k}, \quad s_{n_k'+1} = c \quad \text{для интервала } [c, b).$$

На конечном интервале $[a, c]$ имеем

$$\sum_{j=0}^{n_k'} \frac{1}{s_j}[\sigma(s_j) - \sigma(s_{j-1})] \to \int_a^c \frac{1}{s}\, d\sigma(s)$$

при $\lambda(\Pi_k') \to 0$, где $\lambda(\Pi)$ – диаметр разбиения Π. Тогда очевидно

$$\sum_{j=0}^{n_k'} \frac{1}{s_j}[\sigma_1(s_j) - \sigma_1(s_{j-1})] \to \int_a^c \frac{1}{s}\, d\sigma_1(s) = \int_a^c \frac{1}{s} G(s)\, d\sigma(s)$$

при $\lambda(\Pi_k') \to 0$. В силу (1.8) на интервале $[c, b)$ существует последовательность множеств Π_k'' вида (3.1) такая, что при $\lambda(\Pi_k'') \to 0$

$$\sum_{j=n_k'+1}^{n_k} \frac{1}{s_j}[\sigma_1(s_j) - \sigma_1(s_{j-1})] \to \int_c^b \frac{1}{s}\, d\sigma_1(s). \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что при $\lambda(\Pi_k'') \to 0$

$$\sum_{j=n_k'+1}^{n_k} \frac{1}{s_j}[\sigma(s_j) - \sigma(s_{j-1})] \to \int_c^b \frac{1}{s}\, d\sigma(s).$$

Тогда $\Pi_k = \Pi_k' \cup \Pi_k''$ является такой последовательностью множеств вида (3.1) для интервала $[a, b)$, что

$$\sum_{j=0}^{n_k} \frac{1}{s_j}[\sigma(s_j) - \sigma(s_{j-1})] \to \int_a^b \frac{1}{s}\, d\sigma(s),$$

$$\sum_{j=0}^{n_k} \frac{1}{s_j}[\sigma_1(s_j) - \sigma_1(s_{j-1})] \to \int_a^b \frac{1}{s}\, d\sigma_1(s),$$

при $k \to \infty$. Таким образом

$$V_k \uparrow V \quad \text{и} \quad g_k \uparrow g \text{ in } L_1^+. \tag{3.7}$$

Функции $f_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$f_k(x) = g_k(x) + \int_0^x V_k(x-t) f_k(t)\, dt. \tag{3.8}$$

Из (3.7) следует, что f_k возрастает по k и $f_k \leq f$, где f – решение уравнения (1.1). Из теоремы Лебега следует, что $f_k \uparrow f^0$ в L_1^+ и $f^0 \leq f$. Совершая в (3.8) предельный переход, получаем что f^0 удовлетворяет уравнению (1.1). В силу единственности решения уравнения (1.1) в L_1^{loc}, получаем $f^0 = f$. Далее имеем

$$||f_k||_{L_1^+} = \frac{||g_k||_{L_1^+}}{1-\mu_k} \leq \frac{||g||_{L_1^+}}{1-\mu} = ||f||_{L_1^+}, \quad ||V_k||_{L_1^+} = \mu_k \leq \mu < 1. \tag{3.9}$$

Докажем, что функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \int_\alpha^\beta e^{-xp}\, d\rho(p), \quad 0 \leq \alpha \leq a < \beta \leq b, \tag{3.10}$$

где ρ – возрастающая функция, $\rho(\alpha) = 0$. Сначала рассмотрим случай $b < \infty$. Рассмотрим последовательность возрастающих функций $\{\rho_k\}$, ограниченных сверху одним и тем же числом $\rho_k(b) = \sigma_{1k}(b) < \infty$, $k \geq 1$ (см. 2.16)). Согласно второй теореме Хелли [9], можно выделить подпоследовательность $\{\rho_{k_l}\} \subset \{\rho_k\}$, которая $\{\rho_{k_l}\}$ в каждой точке $[a, b]$ сходится к некоторой функции $\rho : \rho(a) = 0$, $\rho(p)$ возрастает по p и $\rho(b) = \sigma_1(b)$. Согласно первой теореме Хелли [9], в представлении

$$f_{k_l}(x) = \int_\alpha^\beta e^{-xp}\, d\rho_{k_l}(p)$$

можно совершить предельный переход при $l \to \infty$. С другой стороны, $f_{k_l}(x)$ стремится к $f(x)$ в L_1^+, стало быть почти всюду. Следовательно, функция $f(x)$ представима в виде (3.10).

Лемма 2. *При $b < \infty$ последовательность ρ_k сходится к функции $\rho(p)$ в каждой точке непрерывности ρ на $[a, b]$.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует точка p_0 такая, что последовательность $\{\rho_k(p_0)\}$ не сходится к $\rho(p_0)$.

Имеем $\lim\limits_{l\to\infty}\rho_{k_l}(p_0)=\rho(p_0)$. Из $\{\rho_k(p_0)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\rho_{m_l}(p_0)\}$ такую, что

$$\lim_{l\to\infty}\rho_{m_l}(p_0)=C,\quad C\neq\rho(p_0). \tag{3.11}$$

Последовательность $\{\rho_{m_l}(P)\}$ также удовлетворяет требованиям второй теоремы Хелли, следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\{\rho_{m_{l_i}}\}$ такую, что

$$\lim_{i\to\infty}\rho_{m_{l_i}}(p)=\widetilde{\rho}(p). \tag{3.12}$$

Из (3.11) следует, что

$$\lim_{i\to\infty}\rho_{m_{l_i}}(p_0)=C=\widetilde{\rho}(p_0). \tag{3.13}$$

В силу (3.11) и (3.13), имеем $\rho(p_0)\neq\widetilde{\rho}(p_0)$. Согласно первой теореме Хелли [9] в представлении

$$f_{m_{l_i}}(x)=\int_\alpha^\beta e^{-xp}\,d\rho_{m_{l_i}}(p), \tag{3.14}$$

можно совершить предельный переход при $i\to\infty$. С другой стороны, $f_{m_{l_i}}(x)$ стремится к $f(x)$ в L_1^+, стало быть почти всюду. Следовательно, функция $f(x)$ представима в виде (3.10) и в виде

$$f(x)=\int_\alpha^\beta e^{-xp}\,d\widetilde{\rho}(p).$$

В силу $\rho(p_0)\neq\widetilde{\rho}(p_0)$ функции ρ и $\widetilde{\rho}$ не совпадают во всех точках непрерывности. Следовательно, представление (3.10) не единственно в существенном (см. [10]). Это противоречит тому, что $f(x)$ определяет меру $\rho(p)$ из представления (3.10) в существенном однозначно. Последнее следует из замечания к теореме Бернштейна, дополненной Д. Уиддером (см. [10]). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что последовательность мер $d\rho_k$ слабо сходится к мере $d\rho$. Докажем возможность представления (3.10) в случае $b=+\infty$. Пусть

$$h_k(p)=\int_0^p\frac{1}{x}\,d\rho_k(x). \tag{3.15}$$

Имеем

$$\lim_{p\to\infty}h_k(p)=\frac{\|g_k\|_{L_1^+}}{1-\mu_k}\leq\frac{\|g\|_{L_1^+}}{1-\mu}.$$

Из второй теоремы Хелли следует, что можно выделить подпоследовательность $\{h_{k_l}\}\subset\{h_k\}$ такую, что $\{h_{k_l}\}$ в каждой точке $[0,\infty)$ сходится к некоторой функции h. Перепишем (3.4) в виде (см. (3.15))

$$f_{k_l}(x)=\int_0^\infty e^{-xp}p\,dh_{k_l}(p). \tag{3.16}$$

Функция pe^{-xp} интегрируема по мере $dh(p)$ на $(0,\infty)$ при любом $x > 0$. Поэтому в (3.16) можно совершить предельный переход согласно первой теореме Хелли. Тогда будем иметь

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xp} p\, dh(p).$$

Обозначив $\rho(p) = \int\limits_0^p x\, dh(x)$, убедимся в справедливости представления (3.10) и в случае $b = +\infty$.

Лемма 3. *Последовательность $h_k(p)$ сходится к некоторой возрастающей $h(p)$ в каждой точке непрерывности h на $[0,\infty)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Из леммы 3 следует, что последовательность мер dh_k слабо сходится к мере dh. Рассмотрим теперь случай $\mu = 1$. Умножим обе части (1.1) на $e^{-\delta x}$, где $\delta > 0$. Это приведет к уравнению

$$f_\delta(x) = g_\delta(x) + \int_0^x V_\delta(x-t) f_\delta(t)\, dt, \tag{3.17}$$

где

$$g_\delta(x) = e^{-\delta x} g(x) = \int_{a+\delta}^{b+\delta} e^{-xs} G(s-\delta)\, d\sigma(s-\delta),$$

$$f_\delta(x) = e^{-\delta x} f(x), \quad V_\delta(x) = e^{-\delta x} V(x) = \int_{a+\delta}^{b+\delta} e^{-xs}\, d\sigma(s-\delta).$$

Для $f_\delta(x)$ справедливо представление (3.10), поскольку

$$\mu_\delta = \|V_\delta\|_{L_1^+} = \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s+\delta} < 1, \quad f_\delta(x) = \int_0^{b+\delta} e^{-xp}\, d\rho_\delta(p), \tag{3.18}$$

$$\int_0^{b+\delta} \frac{1}{p}\, d\rho_\delta(p) < \infty. \tag{3.19}$$

В силу (3.18) имеем

$$f(x) = \int_0^{b+\delta} e^{-x(p-\delta)}\, d\rho_\delta(p) = \int_{-\delta}^{b} e^{-xp}\, d\hat\rho_\delta(p),$$

где $\hat\rho_\delta(p) = \rho_\delta(p-\delta)$. Если $\mu = 1$, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\alpha}{m_1}, \tag{3.20}$$

где

$$\alpha = \int_0^\infty g(x)\, dx, \quad m_1 = \int_0^\infty x V(x)\, dx. \tag{3.21}$$

Для доказательства (3.20) воспользуемся леммой 2.2 работы [5]. Согласно пункту 6) этой леммы, если $g \in L_1$, $g(+\infty) = 0$, $\Phi \in L_1^{loc}$ и существует предел $\Phi(+\infty)$, то

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \Phi(x-t)g(t)\,dt = \Phi(+\infty)\int_0^\infty g(t)\,dt. \tag{3.22}$$

Совершив в (1.5) предельный переход при $x \to \infty$, с учетом (3.22) и равенства $\Phi(+\infty) = 1/m_1$ (см. [12], [13]), получаем (3.20). Из (3.20) следует, что $\hat{\rho}_\delta$ постоянна на $(-\delta, 0)$. Поэтому

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xp}\,d\hat{\rho}_\delta(p).$$

В силу единственности представления (3.10) функция $\hat{\rho}_\delta(p)$ не зависит от δ, т.е. $\hat{\rho}_\delta(p) = \hat{\rho}(p)$. Из (3.19) следует, что

$$\int_\delta^b \frac{1}{p}\,d\hat{\rho}(p) < \infty \quad \text{при всех } \delta > 0. \tag{3.23}$$

Нами доказана

Теорема 1. *Если функции $V(x)$ и $g(x)$ задаются по формулам (1.2) и (1.7), то решение уравнения (1.1) является вполне монотонной функцией вида (3.10), где ρ обладает следующими свойствами :*

а) если $\mu < 1$, то $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{p}\,d\rho(p) < \infty$, если $\mu = 1$, то ρ удовлетворяет условию (3.23);

б) если $b < \infty$, то $\rho(b) = \sigma_1(b) < \infty$, если $b = +\infty$ и $\mu = 1$, то $\rho(b) = \sigma_1(b) = \infty$ и

$$f(x) = \frac{\alpha}{m_1} + \int_{\alpha_1}^\beta e^{-xp}\,d\widetilde{\rho}(p),$$

где $d\widetilde{\rho}(p)$ – мера, непрерывная в точке $\alpha_1 \geq 0$.

Замечание 1. В работе [4] рассмотрено редуцированное уравнение вида (3.8) для резольвентной функции $\Phi(x)$, определляемой из (1.4) :

$$\Phi_n(x) = V_n(x) + \int_0^x V_n(x-t)\Phi(t)\,dt.$$

Как было показано $\Phi_n(x) = \int\limits_\alpha^\beta e^{-xp}d\omega_n(p)$, где ω_n – аналог ρ_n. В [4] было показано,что из последовательности $\{\omega_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\omega_{n_k}\}$, которая поточечно сходится к ω в $[a,b)$, фигурирующей в представлении (1.6). В настоящей работе нами доказана сходимость к ω самой последовательности $\{\omega_n\}$.

Замечание 2. Полная монотонность $f(x)$ (см. (3.10)), в отличие от полной монотонности $\Phi(x)$, не следует из результатов [8]. Поэтому примененный нами конструктивный метод работы [4] является более общим по сравнению с подходом, основанным на теории R-функций.

В заключение выражаю благодарность Н. Б. Енгибаряну, под руководством которого выполнена эта работа.

ABSTRACT. We consider renewal equation $f(x) = g(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)dt$, where the kernel V is completely monotone function and prove that if $g \in L_1(0,\infty)$ is a completely monotone function of the form $g(x) = \int_a^b e^{-xs}G(s)d\sigma(s)$, and $G \geq 0$ is a continuous increasing function on $[a,b)$, then the solution is also completely monotone.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Курс Теоретичекой Астрофизики, Наука, М., 1967.
2. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и ее Приложения, т. 2, Мир, М., 1967.
3. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально–Разностяые Уравнения, Мир, М., 1967.
4. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, "Об одном классе интегральных уравнений восстановления", Мат. Зам., т. 47, № 6, стр. 23 — 30, 1990.
5. Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян, "Новая теорема восстановления для интегрального уравнения на полуоси", Изв. НАН Армении, т. 32, № 1, стр. 2 – 16, 1997.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
7. В. А. Амбарцумян, Научные Труды, т. 1, 2, Ереван, 1960.
8. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмульян, "Уравнение Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 4, стр. 307 – 327; № 5, стр. 328 – 375, 1982.
9. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, М., 1976.
10. Н. И. Ахиезер, Классическая Проблема Моментов, Физматгиз, М., 1961.
11. Р. Беллман, Введение в Теорию Матриц, Наука, М., 1976.
12. W. L. Smith, "Asymptotic renewal theorems", Proc. Roy. Soc. Edinb., vol. 64, pp. 9 – 48, 1954.
13. W. L. Smith, "Extensions of renewal theorem", Proc. Comb. Phil. Soc., vol. 51, pp. 629 – 638, 1955.

4 сентября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА–ХОПФА В ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Г. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе изучаются интегральные уравнения Винера–Хопфа $\varphi(t) = f(t) + \int_0^\infty K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$, $t > 0$, с неотрицательными ядрами K, удовлетворяющими условию $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt > 1$. Основной результат гласит, что если $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^j K(t)\,dt < +\infty$ при $j = 1, \ldots, 4$ и норма μ достаточно близка к 1, то символ $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} K(t)\,dt$ этого уравнения либо невырождающийся, либо допускает разложение вида $A(\lambda) = \dfrac{\lambda^2 - \beta^2}{(\lambda + i)^2} \cdot B(\lambda)$, где $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $\beta > 0$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Интегральное уравнение Винера–Хопфа

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^\infty K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad t > 0 \tag{1}$$

с неотрицательным ядром $K \in L_1(\mathbb{R})$ было изучено многими авторами в том случае, когда $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt \leq 1$ (см., например, [1 – 5]). В закритическом случае (ЗКС) $\mu > 1$ уравнение (1), по видимому, было изучено лишь для вполне монотонных на $[0, +\infty)$ ядер K (см. [3 – 6]), когда

$$K(\pm t) = \int_a^b \exp(-\tau t)\,d\sigma_\pm(\tau), \quad t > 0,$$

где $0 \leq a < b \leq +\infty$ и $\sigma_\pm(\tau)$ – неотрицательные меры на $[a, b]$.

Исследование уравнения (1) как при $\mu \leq 1$, так и при $\mu > 1$ имеет большое теоретическое и прикладное значение. К уравнению (1) сводятся задачи теории вероятностей, теории переноса излучения и др. При $\mu > 1$ уравнение (1) связано с вопросами теории цепных ядерных реакций.

В настоящей статье уравнение (1) исследуется при $\mu > 1$ в более общей форме, чем в работах [3 – 6].

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть $K \in L_1(\mathbb{R}^+)$, где $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Введем некоторые обозначения :

$$\mu_n \stackrel{def}{=\!=} \mu_n(K) \equiv \int_0^\infty t^n K(t)\,dt, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

$$S(\lambda, K) \stackrel{def}{=\!=} \int_0^\infty \sin \lambda t\, K(t)\,dt, \quad C(\lambda, K) \stackrel{def}{=\!=} \int_0^\infty \cos \lambda t\, K(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В этом параграфе мы получим некоторые вспомогательные равенства и неравенства. Прежде всего докажем одну лемму, доказательство которой мы опускаем ввиду простоты.

Лемма 1.1. *Пусть $\lambda > 0$, $\tau > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\int_0^\tau (\tau - t)^m \sin \lambda t\, dt \le \min\left[\frac{\lambda\, \tau^{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \frac{\tau^{m+1}}{m+1}, \frac{2\,\tau^m}{\lambda}\right]. \tag{1.1}$$

В следующей лемме мы определим вид остаточного члена формулы Тейлора для функции $S(\lambda, K)$.

Лемма 1.2. *Пусть $\mu_p(|K|) < +\infty$, $p = 0, 1, ..., 2m+1$. Тогда*

$$S(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p\, \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!}\, \lambda^{2p+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^m\, \lambda^{2m+2}}{(2m+1)!} \int_0^\infty K(\tau)\,d\tau \int_0^\tau (\tau - t)^{2m+1} \sin \lambda t\, dt. \tag{1.2}$$

Доакзательство. Докажем формулу (1.2) сначала для $m = 0$. Предположим, что $K_1(t) = \int_t^\infty (\tau - t)\, K(\tau)\,d\tau$, $t \ge 0$. Тогда, очевидно, $S(\lambda, K) = S(\lambda, K_1'')$. Дважды применив формулу интегрирования по частям, получим

$$S(\lambda, K) = \mu_1(K)\,\lambda - \lambda^2 \int_0^\infty \sin \lambda t\, dt \int_t^\infty (\tau - t)\, K(\tau)\,d\tau, \tag{1.3}$$

откуда получаем (1.2) для $m = 0$. Пусть (1.2) справедливо для некоторого $m = m_0 \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно верно и для $m = m_0 + 1$. Поскольку

$$\int_0^\infty K(\tau)\,d\tau \int_0^\tau (\tau - t)^{2m_0+1} \sin \lambda t\, dt = S(\lambda, K_1),$$

где

$$K_1(\tau) = \int_t^\infty (\tau - t)^{2m_0+1} K(\tau)\,d\tau,$$

и по предположению (1.2) имеет место для $m = m_0$, то

$$S(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m_0} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} - \frac{(-1)^{m_0} \lambda^{2m_0+2}}{(2m_0+1)!} S(\lambda, K_1).$$

Заменим в (1.3) K на K_1 и подставим полученное выражение в правую часть последнего равенства. Тогда будем иметь

$$S(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m_0} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} - \left(\mu_1(K_1) - \lambda^2 S(\lambda, K_2)\right),$$

где

$$K_2(t) = \int_t^\infty (\tau - t) K_1(\tau)\, d\tau = \int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{2m_0+3} K(\tau)}{(2m_0+2)(2m_0+3)}\, d\tau.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\mu_1(K_1) = \int_0^\infty t\, dt \int_t^\infty (\tau - t)^{2m_0+1} K(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty K(\tau)\, d\tau \int_0^\tau t(\tau - t)^{2m_0+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2m_0+2)(2m_0+3)} \mu_{2m_0+3}(K),$$

получим

$$S(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m_0+1} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p+1} -$$

$$- \frac{(-1)^{m_0+1} \lambda^{2(m_0+1)+2}}{(2(m_0+1)+1)!} \int_0^\infty \sin \lambda t\, dt \int_t^\infty (\tau - t)^{2(m_0+1)+1} K(\tau)\, d\tau.$$

Изменив порядок интегрирования в последнем интеграле, приходим к (1.2) для $m = m_0 + 1$.

Пусть $0 \le K \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим многочлены

$$P_m(\lambda, K) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p \mu_{2p+1}(K)}{(2p+1)!} \lambda^{2p};$$

$$Q_m(\lambda, K) = P_{m-1}(\lambda, K) - \frac{\mu_{2m}(K)}{(2m)!} \lambda^{2m-1};$$

$$R_m(\lambda, K) = P_m(\lambda, K) - \frac{\mu_{2m+1}(K)}{(2m+1)!} \lambda^{2m+1}.$$

Для любых $\lambda > 0$ и K из лемм 1.1 и 1.2 получим следующее неравенство :

$$S(\lambda, K) \ge \lambda \cdot \max\{P_m(\lambda, K); Q_m(\lambda, K); R_m(\lambda, K)\}, \tag{1.4}$$

где m – нечетное число. Докажем, наконец, справедливость следующих равенств :

$$S(\lambda, K) = \int_0^{\pi/\lambda} \sin \lambda t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{K\left(t + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) - K\left(t + \frac{(2n+1)\pi}{\lambda}\right)\right\}\right] dt, \tag{1.5}$$

$$C(\lambda, K) = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos\lambda t \cdot K(t)\,dt - S(\lambda, K_\lambda), \tag{1.6}$$

где

$$\lambda > 0 \quad \text{и} \quad K_\lambda(t) = K\left(t + \frac{\pi}{2\lambda}\right). \tag{1.7}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$. Поскольку

$$\int_{n\pi/\lambda}^{(n+1)\pi/\lambda} \sin\lambda t\, K(t)\,dt = \int_0^{\pi/\lambda} \sin(\lambda t + \pi n)\, K(t + \pi n/\lambda)\,dt,$$

то

$$S(\lambda, K) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi/\lambda}^{(n+1)\pi/\lambda} \sin\lambda t\, K(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/\lambda} \sin(\lambda t + \pi n) \left(\sum_{n=0}^{\infty} K\left(t + \pi n/\lambda\right) \right) dt \Bigg),$$

и получаем (1.5). Для доказательства формулы (1.8) достаточно во втором интеграле равенства

$$C(\lambda, K) = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos\lambda t\, K(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2\lambda}}^{\infty} \cos\lambda t\, K(t)\,dt$$

произвести замену переменной $t = \tau + \dfrac{\pi}{2\lambda}$.

§2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ОРИГИНАЛОВ

Обозначим через $\mathcal{F}$ расширенную винеровскую алгебру функций вида

$$A(\lambda) = C + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} K(t)\,dt,$$

где $C \neq 0$ – действительная постоянная, $\lambda \in \mathbb{R}$, $K \in L_1(\mathbb{R})$. Функцию K будем называть оригиналом A.

Пусть

$$\widetilde{A}(\lambda) = C + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \widetilde{K}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{K}(t) = K(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_R$ подмножество функций из $\mathcal{F}$, оригиналы которых принимают только действительные значения. Отметим некоторые очевидные свойства функций из $\mathcal{F}_R$.

1^0. $\widetilde{A}(\lambda) = A(-\lambda)$; 2^0. $A \in \mathcal{F}_R$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_R$.

Следующая лемма, доказательство которой мы опускаем ввиду ее простоты, выявляет важное свойство функций из $\mathcal{F}_R$.

Лемма 2.1. *Для того, чтобы $A \in \mathcal{F}_R$, необходимо и достаточно, чтобы $A(-\lambda) = \overline{A(\lambda)}$.*

Из леммы 2.1 и известных свойств преобразования Фурье получаем

Следствие 2.1. *Множество нулей $A(\lambda) \in \mathcal{F}_R$ компактно в $\mathbb{R}$ и симметрично относительно точки $\lambda = 0$. Множества нулей функций A и $\widetilde{A}$ совпадают.*

Лемма 2.2. *Если $A \in \mathcal{F}_R$ и $A \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, то*

$$ind_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A(\lambda) = \begin{cases} 2k, & \text{если} \quad A(0)\,A(\infty) > 0, \\ 2k+1, & \text{если} \quad A(0)\,A(\infty) < 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Введем следующие функции :

$$A_1(\lambda) = \begin{cases} A(\lambda), & \text{если} \quad \lambda \leq 0, \\ a \cdot \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i} + b, & \text{если} \quad \lambda > 0; \end{cases}$$

$$A_2(\lambda) = \begin{cases} a \cdot \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i} + b, & \text{если} \quad \lambda \leq 0, \\ A(\lambda), & \text{если} \quad \lambda > 0, \end{cases}$$

где $a = (A(\infty) - A(0))/2$, $b = (A(\infty) + A(0))/2$. Константы a и b выбраны таким образом, чтобы функции $A_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ были непрерывны на $\mathbb{R}$ и $A_j(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $j = 1, 2$.

Очевидно $A_j(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $j = 1, 2$, причем $A_1(-\lambda) = \overline{A_2}(\lambda)$, что влечет за собой

$$\mathrm{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A_1(\lambda) = \mathrm{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A_2(\lambda) \equiv n. \tag{2.2}$$

Поскольку $A_1(\lambda) A_2(\lambda) = A(\lambda) r(\lambda)$, где $r(\lambda) = a \cdot \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i} + b$, то ввиду (2.2) будем иметь

$$\mathrm{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} A(\lambda) + \mathrm{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} r(\lambda) = 2n. \tag{2.3}$$

Вычислим индекс $r(\lambda)$. Легко показать, что $\lambda_1 = \dfrac{-A(0)A(\infty)}{A(\infty)^2} \cdot i$ является единственным однократным нулем $r(\lambda)$, а $\lambda_2 = -i$ – ее единственным однократным полюсом. Тогда в верхней полуплоскости функция $r(\lambda)$ не имеет полюсов; она имеет там единственный однократный нуль при $A(0)A(\infty) > 0$ и не имеет ни одного нуля с положительной мнимой частью при $A(0)A(\infty) < 0$. Следовательно

$$\mathrm{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq \infty} r(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad A(0)A(\infty) > 0 \\ 1, & \text{при} \quad A(0)A(\infty) < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из (2.3) получим (2.1).

§3. ГРАНИЦЫ НУЛЕЙ

В этом параграфе мы докажем две теоремы, позволяющие оценить модули нулей для некоторых функций из $\mathcal{F}_R$.

Лемма 3.1. *Пусть $K_0 \in L_1(\mathbb{R}^+)$ и для любого $c > 0$ $K_0(t) \geq K_0(t+c)$ почти всюду (п.в.) на $\mathbb{R}^+$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}^+) \bigcap C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ такая, что*

$$K'(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \|K_0 - K_\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^+)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и пусть

$$K_N(t) = \begin{cases} K_0(t) & \text{при} \quad 0 < t < N, \\ 0 & \text{при} \quad t \geq N. \end{cases}$$

Будем считать N настолько большим, что $\|K_0 - K_N\|_{L_1} < \varepsilon/4$. Очевидно, для любого $c > 0$ имеем $K_N(t) \geq K_N(t+c)$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. На $\mathbb{R}^+$ можно выбрать равномерную сеть t_p, $p = 1, ..., n$ и постоянную функцию $K_n(t) = k_{n,p}$, $t_p \leq t \leq t_{p+1}$, $p = 0, ..., n-1$ ($t_0 = 0$, $tn = N$) такую, что $k_{n,p} \geq k_{n,p+1}$, $p = 0, ..., n-1$ и $\|K_N - k_n\| < \varepsilon/4$. Пусть $\delta < (t_1 - t_0)/2$ и

$$K_{n,\delta} = \begin{cases} K_n(t) & \text{при} \quad t \notin (t_p - \delta, t_p + \delta),\ p = 0, ..., n, \\ A_p + B_p \sin\left(\dfrac{\pi}{2\delta(t_p - t)}\right) & \text{при} \quad t \in (t_p - \delta, t_p + \delta),\ p = 1, ..., n, \end{cases}$$

где $A_p = (K_n(t_p - \delta) + K_n(t_p + \delta))/2$, $B_p = (K_n(t_p - \delta) - K_n(t_p + \delta))/2$. Нетрудно видеть, что $K_{n,\delta} \in L_1(\mathbb{R}^+) \bigcap C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ и

$$\|K_n - K_{n,\delta}\| < 2NK_n(0)\,\delta, \qquad K'_{n,\delta} \leq 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+$$

(последнее неравенство следует из того, что $B_p \geq 0$, $p = 1, ..., n$).

Пусть $\delta < \dfrac{\varepsilon}{8NK_n(0)}$. Тогда функция $K_\varepsilon(t) = \varepsilon/4e^{-t} + K_{n,\delta}(t)$, $t > 0$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, $K'_\varepsilon(t) = -\varepsilon/4e^{-t} + K'_{n,\delta}(t) < 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ и

$$\|K_0 - K_\varepsilon\|_{L_1} \leq \|K_0 - K_N\|_{L_1} + \|K_N - K_n\|_{L_1} + \|K_n - K_{n,\delta}\|_{L_1} + \|\frac{\varepsilon}{4}e^{-t}\|_{L_1} < \varepsilon.$$

Теорема 3.1. *Пусть $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} K(t)\,dt$, где K удовлетворяет условию $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt > 1$. Предположим, что $K(t) + K(-t) = K_0(t) + \Delta K(t)$, где*

$\theta = \int_0^\infty |\Delta K(t)|\,dt < 1$, $K_0(t) \geq K_0(t+c)$ для любого $c > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. Тогда, если $\mathrm{Re}A(\lambda) = 0$, то $|\lambda| < 1/t$, где $\int_0^t K_0(\tau)\,d\tau = 1 - \theta$.

Доказательство. Приведем доказательство в том случае, когда функция $K_0(t)$ непрерывно–дифферницируема и $K_0'(t) \neq 0$ для $t \in \mathbb{R}^+$. Введем функцию $K(\tau, t)$:

$$K(\tau, t) = \begin{cases} K_0(t), & \text{если} \quad \tau \leq t; \\ K_0(\tau), & \text{если} \quad \tau > t. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathrm{Re}A(\lambda) = 1 - \int_0^\infty K_0(\tau)\cos(\lambda\tau)\,d\tau - \int_0^\infty \Delta K(\tau)\cos(\lambda\tau)\,d\tau \geq$$

$$\geq 1 - \theta - \int_0^\infty K_0(\tau)\cos(\lambda\tau)\,d\tau. \tag{3.1}$$

Поскольку $K_0(\tau)$ монотонно убывает на $\mathbb{R}^+$, то из (1.5) и (1.6) вытекает

$$C(\lambda, K_0) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda\tau)\,K_0(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда и из (3.1) для $\lambda > 0$ получим

$$\mathrm{Re}A(\lambda) \geq 1 - \theta - \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} K(\tau, t)\cos(\lambda\tau)\,d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (K_0(\tau) - K(\tau, t))\cos(\lambda\tau)\,d\tau \geq$$

$$\geq 1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau)\,d\tau + tK_0(t) - \frac{K_0(t)}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что если $\mathrm{Re}A(\lambda) = 0$, то для любого $t \in (0, t_0)$ имеем

$$|\lambda| \leq \frac{K_0(t)}{1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau)\,d\tau + t\,K_0(t)} \equiv F(t), \tag{3.2}$$

где t_0 – наименьший положительный нуль функции

$$Z(t) = 1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau)\,d\tau + t\,K_0(t), \quad t > 0.$$

Существование t_0 следует из непрерывности $Z(t)$ и из того, что

$$Z(0) = 1 - \theta > 0, \quad Z(+\infty) = 1 - \theta - \int_0^\infty K_0(\tau)\,d\tau \leq 1 - \mu < 0.$$

Заметим, что $F(t_0 - 0) = +\infty$ в силу того, что $K_0(t_0) \neq 0$. Следовательно, функция $F(t)$ достигает своего минимума на $[0, t_0)$. Найдем этот минимум. Нетрудно проверить, что $F'(+0) = K_0'(+0) < 0$, $F'(t_0 - 0) = +\infty$. Отсюда следует существование $t^* \in (0, t_0)$ такого, что $F'(t^*) = 0$. Так как $K_0'(t) \neq 0$ и функция $1 - \theta - \int_0^t K_0(\tau)\,d\tau$ строго монотонно убывает на $\mathbb{R}^+$, то t^* единственна и t^* – точка минимума $F(t)$ на $(0, t_0)$. Имеем $F(t^*) = \dfrac{1}{t^*}$. Следовательно, из оценки (3.2) получим требуемое в том частном случае, когда $K_0 \in C^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ и $K_0'(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Докажем теперь теорему в общем случае. Из леммы 3.1 следует, что существует последовательность $K_{0,n}(t)$ $(\in L_1(\mathbb{R}^+) \bigcap C^{(1)}(\mathbb{R}^+))$ такая, что $K_{0,n}'(t) \neq 0$ и $\{K_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к K_0 в $L_1(\mathbb{R}^+)$. По уже доказанному, если $\mathrm{Re}A(\lambda) = 0$, то $|\lambda| < \dfrac{1}{t_n^*}$ для достаточно больших значений n, где $\int_0^{t_n^*} K_{0,n}(\tau)\,d\tau = 1 - \theta_n$, а

$$\theta_n = \int_0^{+\infty} |\Delta K(t) + K_0(t) - K_{0,n}(t)|\,dt < 1.$$

Поскольку $K_{0,n}$ сходится к K_0 в $L_1(\mathbb{R}^+)$ и $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = \theta$, то $\lim_{n\to+\infty} t_n^* = t^*$, где $\int_0^{t^*} K_0(\tau)\,d\tau = 1 - \theta$. Тогда $|\lambda| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 1/t_n^* = 1/t^*$.

Теорема 3.2. *Пусть* $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t)\,dt \in \mathcal{F}_R$

$$K_0(t) = K(t) + K(-t), \quad t > 0, \quad K_0^{(p)}(t) \in L_1(\mathbb{R}^+) \bigcap C(\mathbb{R}^+), \quad p = 0, \dots, m,$$

и α_m *– наименьший положительныхй корень многочлена*

$$W_m(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^p K_0^{(2p-1)}(0) - x^m \int_0^{+\infty} |K_0^{(m)}(t)|\,dt,$$

где $K_0^{(p)}(0)$ *– правая* p*-я производная* $K_0(t)$ *в точке* $t = 0$*, в случае* $m = 1$ *сумма равна нулю. Тогда если* $\mathrm{Re}A(\lambda_0) = 0$, *то* $|\lambda_0| \leq \dfrac{1}{\alpha_m}$.

Доказательство. Очевидно $\mathrm{Re}A(\lambda) = 1 - \int_0^{+\infty} K_0(t)\cos(\lambda t)\,dt$. Интегрируя по частям m раз, получим

$$\mathrm{Re}A(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^p K_0^{(2p-1)}(0)}{\lambda^{2p}} - \frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{\lambda^m} \int_0^{\infty} Z_m(\lambda t)\, K_0^{(m)}(t)\,dt,$$

где

$$Z_m(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad m = 2k+1, \\ \cos x, & \text{если} \quad m = 2k. \end{cases}$$

Следовательно

$$\mathrm{Re}A(\lambda) \geq W_m\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{3.3}$$

Поскольку α_m – наименьший положительный корень $W_m(x)$ и $W_m(0) = 1$, то $W_n(x) > 0$, $x \in (0, \alpha_m)$. Из (3.3) следует, что $\mathrm{Re}A(\lambda) \geq 0$ при $0 < 1/\lambda < \alpha_m$. Следовательно, если $\mathrm{Re}A(\lambda_0) = 0$ и $\lambda_0 > 0$, то $\lambda_0 \leq 1/\alpha_m$. Случай $\mathrm{Re}A(\lambda_0) = 0$ и $\lambda_0 > 0$ сводится к предыдущему, если заменить λ_0 на $-\lambda_0$ и воспользоваться леммой 2.1 •

Пример. Пусть $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, e^{-|t|}\, dt$ и $\mathrm{Re}A(\lambda_0) = 0$. Применив теорему 3.1 к $A(\lambda)$, получим $|\lambda_0| \leq \frac{1}{\ln 2}$. Применив теорему 3.2, мы приходим к более точной оценке $|\lambda_0| \leq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$.

§4. ФУНКЦИИ ИЗ $\mathcal{F}_R$ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Пусть точки $\alpha_0(=0)$, $\alpha_1,\dots, \alpha_n$ – всевозможные положительные попарно различные нули функции $A \in \mathcal{F}_R$, кратностей m_0, $m_1,\dots, m_n$ соответственно. Тогда в силу леммы 2.1, точки $-\alpha_j$ – нули A тех же кратностей. Пусть K – оригинал A. Предположим, что $\mu_m(|K(\pm t)|) < \infty$, где $m = \max\{m_0, m_1, \dots, m_n\}$. Тогда функция $A(\lambda)$ допускает следующее представление (см. [3], теорема 2.9) :

$$A(\lambda) = \rho(\lambda)\, B(\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$\rho(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{m_0} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^2 - \alpha_j^2}{[\lambda+i]^2}\right)^{m_j}, \tag{4.2}$$

$B(\lambda) \in \mathcal{F}$, $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$. Из леммы 2.1 и очевидного соотношения $\rho(-\lambda) = \overline{\rho(\lambda)}$ следует, что $B(-\lambda) = \overline{B(\lambda)}$. Последнее равенство показывает, согласно лемме 2.1, что мы получим представления

$$\widetilde{A}(\lambda) = \rho(\lambda)\, \widetilde{B}(\lambda), \tag{4.3}$$

где $\widetilde{B}(\lambda) \in \mathcal{F}_R$, $\widetilde{B}(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и

$$\widetilde{B}(\lambda) = \left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)^{m_0 + 2\sum_{j=1}^{n} m_j} \cdot B(-\lambda). \tag{4.4}$$

Разделив (4.1) на (4.3) приходим к седующему важному соотношению :

$$\frac{B(\lambda)}{\widetilde{B}(\lambda)} = \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2, \quad \lambda \neq \pm\alpha_j, \quad j = 0, \dots, n. \tag{4.5}$$

Поскольку левая часть этого равенства непрерывна на $\mathbb{R}$, то его правую часть можно доопределить в точках $\pm\alpha_j$ по непрерывности. Поэтому (4.5) справедлива для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Введем обозначения

$$\tau = \operatorname{ind}_{-\infty\le\lambda\le\infty} B(\lambda), \quad \widetilde{\tau} = \operatorname{ind}_{-\infty\le\lambda\le\infty} \widetilde{B}(\lambda), \quad \chi = \operatorname{ind}_{-\infty\le\lambda\le\infty} \left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2$$

(существование χ следует из (4.5) и из существования τ и $\widetilde{\tau}$).

Из (4.4) и (4.5) получим

$$\begin{cases} \tau + \widetilde{\tau} & = -m_0 - 2\sum_{j=1}^{n} m_j, \\ \tau - \widetilde{\tau} & = \chi. \end{cases} \tag{4.6}$$

Разрешив эту систему относительно τ и $\widetilde{\tau}$, получим

$$\begin{cases} \tau & = -\dfrac{m_0}{2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j + \dfrac{\chi}{2}, \\ \widetilde{\tau} & = -\dfrac{m_0}{2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j - \dfrac{\chi}{2}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t)\, dt \in \mathcal{F}_R$. *Если*

а) $K(t) \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu_n(K_\pm) < +\infty$, $K_\pm(t) = K(\pm t)$, $n = 0, \ldots, 2m+2$ *для некоторого нечетного* m;

б) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\, dt > 1$;

в) $K(t) + K(-t) = K_0(t) + \Delta K(t)$, *где* $\theta = \int_0^\infty |\Delta K(t)|\, dt < 1$, $K_0(t) \ge K_0(t+c)$, *для любого* $c > 0$ *п.в. на* $\mathbb{R}^+$;

г) $\alpha = \max\{\alpha_m, \beta_m, \gamma_m\} > \beta$, *где* $\int_0^{1/\beta} K_0(\tau)\, d\tau = 1 - \theta$, α_m, β_m, γ_m *– наименьшие положительные корни соответственно многочленов* $P_m(\lambda, K)$, $Q_m(\lambda, K)$, $R_m(\lambda, K)$, $K_1(t) = t\,K(t)$, $t \in \mathbb{R}$;

то или $A(\lambda) \ne 0$ $-\infty \le \lambda \le +\infty$ *и* $ind_{-\infty\le\lambda\le+\infty} A(\lambda) = \pm 1$, *или существует* $\beta_0 > 0$ *такое, что*

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2} B(\lambda), \quad B(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B(\lambda) \ne 0, \quad -\infty \le \lambda \le +\infty$$

$$\text{и} \quad ind_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda) = -1.$$

Доказательство. Из условия б) следует, что $\operatorname{Re} A(\lambda)$ имеет хотя бы один корень на $\mathbb{R}$. Пусть $\beta_0 > 0$ – наибольший из этих корней, существование которого вытекает из следствия 2.1. Из а) и б) и из теоремы 3.1 следует, что $\beta_0 \le \beta$, где $\int_0^{1/\beta} K_0(\tau)\,d\tau = 1-\theta$. Используя условия а), г) и (1.4), получим $[\mathrm{Re}A(\lambda)]' > 0$, $\lambda \in (0,\beta_0]$. Поскольку $\mathrm{Re}A(\beta_0)=0$, то $\mathrm{Re}A(\lambda) < 0$, $\lambda \in (0,\beta_0]$. Из соотношений $\mathrm{Re}A(\lambda) \ne 0$ при $\lambda \in (\beta_0,+\infty)$ (т.к. β_0 наибольший из корней функции $\mathrm{Re}A(\lambda)$) и $\mathrm{Re}A(\pm\infty)=1$, то $\mathrm{Re}A(\lambda) > 0$, $\beta_0 < \lambda \le +\infty$. Следовательно, при изменении λ в интервале $(0,+\infty)$, кривая $A(\lambda)$, соединяющая точку 1 с точкой $1-\mu$, пересекает мнимую ось в точке $A(-\beta_0) = -i\xi$. Таким образом, кривая $A(\lambda)$ совершает один обход вокруг точки O либо в положительном либо в отрицательном направлении при изменении λ в $(-\infty,+\infty)$. Следовательно, при $A(\beta_0) \ne 0$ имеем $A(\lambda) \ne 0$ и $\mathrm{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} A(\lambda) = \pm 1$. Предположим теперь $A(\beta_0)=0$. Тогда поскольку $\mathrm{Re}A'(\beta_0) > 0$, то $A'(\beta_0) \ne 0$. Следовательно, β_0 является корнем кратности 1. Тогда в силу рассуждений, приведенных в начале этого параграфа (см. (4.1)), находим

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2-\beta_0^2}{(\lambda+i)^2}B(\lambda), \quad B(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B(\lambda) \ne 0, \quad -\infty \le \lambda \le +\infty.$$

В этом случае согласно (4.7) для индекса $B(\lambda)$ получим

$$\tau = -1 + \chi/2, \tag{4.8}$$

где $\tau = \mathrm{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda)$, $\chi = \mathrm{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty}\left(\dfrac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2$. Теперь покажем, что $|\chi| \le 2$. Поскольку $\mathrm{Re}A(\lambda) < 0$, $\lambda \in (0,\beta_0)$, $\mathrm{Re}A(\lambda) > 0$, $\lambda \in (\beta_0,+\infty)$, то $\left|\left[\mathrm{Arg}\left(\dfrac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2\right]\Bigg|_0^\infty\right| \le 2\pi$. Далее, используя лемму 2.1, получим следующее : $\left|\left[\mathrm{Arg}\left(\dfrac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2\right]\Bigg|_{-\infty}^0\right| \le 2\pi$ и

$$|\chi| \le \frac{1}{2\pi}\left\{\left|\left[\mathrm{Arg}\left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2\right]\Bigg|_{-\infty}^0\right| + \left|\left[\mathrm{Arg}\left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2\right]\Bigg|_0^{+\infty}\right|\right\} \le 2.$$

Исходя из этой оценки и из (4.8) покажем, что $\chi = 0$. Поскольку $B(0) = \dfrac{A(0)}{\beta_0^2} < 0$, $B(\pm\infty) = A(\pm\infty) = 1$, то $B(0)\cdot B(\pm\infty) < 0$. Из леммы 2.2 следует, что $\tau = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя это значение τ в (4.8), приходим к соотношению $\chi = 4(k+1)$. Тогда поскольку $|\chi| \le 2$, то $\chi = 0$. Используя (4.8). получим $\mathrm{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda) = \tau = -1$.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $A_c(\lambda) = 1 - c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t)\,dt$, $K(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$, $K_{\pm}(t) = K(\pm t)$; $\mu_n(K_{\pm}) < +\infty$, $n = 0, ..., 2m+2$ *для некоторого нечетного* m. *Тогда существует* $c_0 > 1$ *такое, что для любого* $c \in (1, c_0)$ *или* $A_c(\lambda) \neq 0$ $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ *и* $ind_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty} A_c(\lambda) = \pm 1$, *или существует* $\beta_c \in (1, c_0)$ *такое, что*

$$A_c(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_c^2}{(\lambda + i)^2} B_c(\lambda), \quad B_c(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B_c(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq +\infty$$

$$\text{и} \quad \lim_{c\to 1+0} \beta_c = 0.$$

Доказательство. Пусть $K_c(t) = ctK(t)$, $\widetilde{\beta}_c$ является наибольшим корнем $A(\lambda)$ $(c > 1)$ и пусть $\alpha_m(c)$, $\beta_m(c)$, $\gamma_m(c)$ – наименьшие положительные корни многочленов $P_m(\lambda, K)$, $Q_m(\lambda, K)$, $R_m(\lambda, K)$ соответственно. Из очевидных равенств $P_m(\lambda, K_c) = cP_m(\lambda, K_1)$, $Q_m(\lambda, K_c) = cQ_m(\lambda, K_1)$, $R_m(\lambda, K_c) = cR_m(\lambda, K_1)$ вытекает, что $\alpha_m(c) = \alpha_m(1)$, $\beta_m(c) = \beta_m(1)$, $\gamma_m(c) = \gamma_m(1)$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Поскольку $A_c(\lambda)$ непрерывна по c и $\widetilde{\beta}_1 = 0$, то $\widetilde{\beta}_c \to 0$ при $c \to 1 + 0$. Отсюда заключаем, что существует $c_0 > 1$ такое, что для любого $c \in (1, c_0)$ $\widetilde{\beta}_c < \max\{\alpha_m(1), \beta 1_m(1), \gamma_m(1)\}$. Из (1.4) следует, что $[\mathrm{Re}A_c(\lambda)]' > 0$, $\lambda \in (0, \widetilde{\beta}_c]$. Далее точно так же как и в теорем 4.1 мы придем к заключению, что или $A_c(\lambda) \neq 0$ $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и $\mathrm{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty} A_c(\lambda) = \pm 1$ или

$$A_c(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \beta_0^2}{(\lambda + i)^2} B_c(\lambda), \quad \mathrm{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty} B_c(\lambda) = -1, c \in (1, c_0).$$

Нам осталось показать, что $\lim_{c\to 1+0} \beta_c = 0$. Но это сразу получается из очевидных соотношений $0 \leq \beta_c \leq \widetilde{\beta}_c$.

§5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА–ХОПФА С ВЫРОЖДЕННЫМИ СИМВОЛАМИ

Пусть E_+ – одно из следующих банаховых пространств : $L_p^+ \equiv L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq$ $\leq +\infty$, $C^+ \equiv C^+(\mathbb{R}^+)$, $C_0^+ \equiv C_0^+(\mathbb{R}^+)$ (C^+ – пространство непрерывных на $\mathbb{R}^+$ функций, C_0^+ – пространство функций, непрерывных на $\mathbb{R}^+$ и стремящихся к нулю на бесконечности).

Пусть $\rho_{\pm}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda \pm i}\right)^{m_j^{\pm}}$, где $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, ..., n$, – некоторые действительные числа, и пусть $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ – операторы Винера–Хопфа с символами

ρ_+ и ρ_- соответственно. Хотя операторы $\mathcal{R}_\pm : E_+ \to E_+$ не являются Ф–операторами, но тем не менее (см. [3], стр. 144 – 147, 197 – 199) в этом случае можно построить банаховы пространства

$$\widetilde{E}_+ = \widetilde{E}_+(\rho_+)(\supset E_+), \qquad \overline{E}_+ = \overline{E}_+(\rho_-)(\subset E_+)$$

и операторы $\widetilde{\mathcal{R}}_+, \overline{\mathcal{R}}_-$ такие, что

а) $\widetilde{\mathcal{R}}_+ : \ \widetilde{E}_+ \to E_+, \qquad \overline{\mathcal{R}}_-$ – Ф–операторы;

б) $\widetilde{\mathcal{R}}_+|_{E_+} = \mathcal{R}_+, \qquad \widetilde{\mathcal{R}}_-\varphi = \mathcal{R}_-\varphi$ для любого $\varphi \in E_+$.

Пусть символ $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t)\,dt$ уравнения (1) имеет конечное число нулей целого порядка, т.е.

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda + i} \right)^{m_j} B(\lambda), \tag{5.1}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$, $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$.

Для символа $A(\lambda)$ можно записать представление $A(\lambda) = \rho_-(\lambda)\, C(\lambda)\, \rho_+(\lambda)$, где $m_j^+ + m_j^- = m_j$, $j = 1, ..., n$. Очевидно $C(\lambda) \neq 0$, $C(\lambda) \in \mathcal{F}$.

Это представление порождает факторизацию соответствующего оператора : $I - \overline{K} = \mathcal{R}_-\overline{C}\mathcal{R}_+$, где I - единичный оператор, $(\overline{K}\varphi)(t) \equiv \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ при $\varphi \in E_+$, $\overline{C}$ – Ф–оператор в E_+. Это представление приводит к оператору $\mathcal{R}_-\overline{C}\mathcal{R}_+ : \ \widetilde{E}_+ \to \overline{E}_+$. Наконец, получаем некоторый Ф–оператор, действующий из $\widetilde{E}_+$ в $\overline{E}_+$, который является продолжением оператора $I - \overline{K}$. Идея такого типа продолжения лежит в основе метода специальной факторизации, позволяющего свести вопрос о разрешимости уравнения (1) в $\widetilde{E}_+$ при $f \in \overline{E}_+$ к нахождению значения $\operatorname{ind}_{-\infty \leq \lambda \leq +\infty} C(\lambda)$. Этот факт, доказанный с помощью ряда теорем в [3] и теоремы, доказанной в §4, позволяет нам установить некоторые признаки разрешимости уравнения (1) в неэллиптическом случае.

Теорема 5.1. *Пусть ядро K уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям :*

а^0) $K(t) = K(-t), \quad t \in \mathbb{R}$;

б^0) существует $\varepsilon > 0$: $e^{\varepsilon|t|} K(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Тогда уравнение (1) при любом $f \in E_+$ имеет решение $\varphi(t) = O(t^s)$ при $t \to +\infty$, $s > 0$. Соответствующее однородное уравнение имеет конечное число линейно независимых решений $\varphi_l(t) = O(t^{s_l})$, $t \to +\infty$, $s_l > 0$, $l = 1, ..., n$.

Доказательство. Из условия b^0) следует, что для некоторого $\varepsilon > 0$ символ $A(\lambda)$ уравнения (1) аналитически продолжается в полосу $|\mathrm{Im}\lambda| < \varepsilon$. Тогда ввиду следствия 2.1, $A(\lambda)$ имеет конечное число нулей целого порядка. Кроме того из b^0) следует, что $\mu_n(K_\pm) < +\infty$, $n = 0, 1, \ldots$, $K_\pm(t) = K(\pm t)$. Используя теорему 2.9 из [3] (стр. 214), следует, что $A(\lambda)$ имеет вид (4.1), (4.2). Из условия a^0) легко вывести, что $\left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2 \equiv 1$. Тогда $\mathrm{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty}\left(\frac{A(\lambda)}{|A(\lambda)|}\right)^2 = 0$ и, согласно (4.7), $\tau = \mathrm{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty}B(\lambda) = -\frac{N}{2}$, где N – общее число нулей $A(\lambda)$ (с учетом их кратностей) и $A(\lambda)$ имеет вид (5.1). Тогда по теореме 2.6 из [3] (стр. 209) для любого $f \in E_+$ уравнение (1) имеет решение φ в $\widetilde{E}_+\left(\prod_{j=1}^n\left(\frac{\lambda-\alpha_j}{\lambda+i}\right)^{m_j}\right)$, которое имеет на $+\infty$ не более чем полиномиальный рост (см. [3], замечание к теореме 2.5, стр. 208).

Теорема 5.2. *Пусть ядро K уравнения (1) удовлетворяет условиям теоремы 4.1, и пусть символ (1) вырожден. Тогда для любого $f \in E_+$ уавнение (1) имеет решение $\varphi(t) = O(1)$ при $t \to +\infty$. Для некоторого $\beta_0 > 0$ соответствующее однородное уравнение имеет в $\widetilde{E}_+\left(\frac{\lambda^2-\beta_0^2}{(\lambda+i)^2}\right)$ ровно одно (с точностью до постоянного множителя) ограниченное решение $\varphi_* \notin C_+ \bigcup \bigcup_{1\leq p\leq\infty} L_p^+$.*

Доказательство. Пусть $A(\lambda)$ – символ уравнения (1). По теореме 4.1 существует $\beta_0 > 0$ такое, что

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2-\beta_0^2}{(\lambda+i)^2}B(\lambda), \tag{5.2}$$

$$B(\lambda) \in \mathcal{F}_R, \quad B(\lambda) \neq 0, \quad -\infty \leq \lambda \leq +\infty, \quad \mathrm{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty}B(\lambda) = -1. \tag{5.3}$$

Предположим, что $\widetilde{E}_+ = E_+(\rho_+)$, $\overline{E}_+(\rho_-)$, где $\rho_+(\lambda) = \frac{\lambda^2-\beta_0^2}{(\lambda+i)^2}$, $\rho_-(\lambda) \equiv 1$. Из (5.2), (5.3) и из теоремы 2.6 ([3], стр. 209) вытекает, что для любого $f \in E_+$ уравнение (1) имеет решение $\varphi \in E_+$. Следовательно, $\varphi(t) = O(1)$, $t \to +\infty$. Из (5.2), (5.3) и из указанной теоремы вытекает также, что соответствующее однородное уравнение имеет ограниченное решение $\varphi_*(t)$, которое единственно (с точностью до постоянного множителя) в $\widetilde{E}_+(\rho_+)$.

Чтобы показать, что $\varphi_* \notin C_+ \bigcup \bigcup_{1\leq p\leq\infty} L_p^+$, положим $\rho_+(\lambda) \equiv 1$, $\rho_-(\lambda) = \frac{\lambda^2-\beta_0^2}{(\lambda-i)^2}$ и используем теорему 2.6 из [3].

Автор выражает благодарность Енгибаряну Н. Б. и Арабаджяну Л. Г. за обсуждение полученных результатов.

ABSTRACT. In this paper Wiener–Hopf integral equation $\varphi(t) = f(t) + \int_0^\infty K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$, $t > 0$ is studied for nonnegative kernels K satisfying $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt > 1$. The main result states that if $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^j K(t)\,dt < +\infty$ for $j = 1, \dots, 4$ and the norm μ is sufficiently close to 1, then the symbol $A(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} K(t)\,dt$ of this equation is either nondegenerate or admits a decomposition of the form $A(\lambda) = \dfrac{\lambda^2 - \beta^2}{(\lambda + i)^2} \cdot B(\lambda)$, where $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, $\beta > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения свертки и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Матем. Анал., т. 22, ВИНИТИ, М., стр. 175 — 244, 1984.
2. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральные уравнения свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром", Мат. Сб., т. 187, № 10, стр. 53 — 72, 1996.
3. З. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, М., Мир, 1979.
4. М. Г. Крейн, Ю. А. Шмульян, "Уравнение Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 4, стр. 307 – 327; № 5, стр. 328 – 375, 1982;
5. М. И. Хайкин, "Об одном уравнении Винера–Хопфа с положительным ядром", Изв. ВУЗ-ов, Математика, № 4, стр. 56 — 63, 1982.
6. F. Spitzer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density", Duke Math. J., vol. 24, no. 3, pp 327 — 343, 1957; vol. 27, no. 3, pp. 363 — 372, 1960.

11 сентября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

М. Г. Мурадян, А. Г. Мурадян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В статье изучается матричное уравнение Риккати $\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = Q(t)$, где $Q = (Q_{ij}) - m \times m$–мерная непрерывная матрица–функция, удовлетворяющая условиям $Q_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{m} Q_{ij} \geq 0$, $0 < \sup_t Q_{ii}(t) < \infty$, $i = 1, ..., m$. Доказано, что это уравнение имеет ограниченное решение на полуоси, которое обладает свойствами $\rho_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \leq 0$. Предлагается редукционный способ определения этого решения. В случаях постоянной и периодической Q решения можно получить итерационным методом. Доказано, что если Q – постоянная матрица, то квадратный корень из матрицы Q обладает вышеуказанными свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучается матричное уравнение Риккати

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = Q(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{1}$$

где $Q = (Q_{ij}) - m \times m$–мерная непрерывная матрица–функция, удовлетворяющая условиям

$$Q_{ij} \leq 0 \quad \text{при } i \neq j, \qquad \sum_{j=1}^{m} Q_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$0 < \sup_t Q_{ii}(t) < \infty, \quad i = 1, ..., m. \tag{3}$$

Помимо различных прикладных задач, обильным источником уравнений типа (1), (2) являются краевые задачи для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2S}{dt^2} = Q(t)S + f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{4}$$

решаемые методом прогонки или инвариантного погружения. К системе (4), (2) сводится, например, стационарное уравнение диффузии при дискретизации по одной из переменных (см. [1]). К системе (4), (2) можно свести также стационарное интегро–дифференциальное уравнение переноса, когда интегралы заменяются конечными суммами [2].

§1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Одним из основных результатов настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение (1) – (3) имеет ограниченное решение всей полуоси* $[0,\infty)$, *которое обладает свойствами*

а) $\rho_{ij} \geq 0$ *при* $i \neq j$ *;*

б) $\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_{ij} \leq 0$ *при* $i = 1,...,m.$

Доказательство. Обозначим $a_i = \sqrt{\sup\limits_t Q_{ii}(t)}$, $i = 1,...,m$, $a_i > 0$. Пусть A – диагональная матрица с диагональными элементами a_i. Преобразуем уравнение (1) с помощью подстановки

$$\rho(t) = -A + AR(t), \tag{5}$$

в результате чего получим другое уравнение Риккати :

$$-\frac{dR}{dt} + AR + RA = RAR + A - A^{-1}Q(t). \tag{6}$$

Докажем, что уравнение (6) имеет решение $R = (R_{ij})$, удовлетворяющее условиям

$$R_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} R_{ij}(t) \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty, \quad i,j = 1,...,m. \tag{7}$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$-\frac{dR_{n+1}}{dt} + AR_{n+1} + R_{n+1}A = R_nAR_n + A - A^{-1}Q(t), \tag{8}$$

$$R_0(t) = 0, \quad R_{n+1}(t) = O(1), \quad \text{при } t \to +\infty, \quad n = 0,1,...$$

Из (8) следует, что

$$-\frac{d}{dt}\left(e^{-AT}R_{n+1}e^{-AT}\right) = e^{-AT}\left(R_nAR_n + A - A^{-1}Q(t)\right)e^{-AT}.$$

С учетом ограниченности матрицы-функции R_{n+1} на $[0,\infty)$, получаем

$$R_{n+1}(t) = \int_0^\infty e^{-A\tau}\left[R_n(t+\tau)AR_n(t+\tau) + A - A^{-1}Q(t+\tau)\right]e^{-A\tau}\,d\tau. \qquad (9)$$

Легко проверить, что $A - A^{-1}Q(t) \geq 0$ (поэлементно). По индукции нетрудно проверить, что $R_n(t) \geq 0$, $0 \leq t < \infty$, $n = 1,2,\dots$. Из (9) следует также, что последовательность $\{R_n(t)\}$ монотонно возрастает по n. Пусть σ – m–мерный вектор столбец, все компоненты которого равны 1. По индукции докажем, что $R_n\sigma \leq \sigma$, $n = 1,2,\dots$. Пусть это неравенство выполняется для некоторого n. Из (2) следует, что $A^{-1}Q(t)\sigma \geq 0$. Поэтому из (8) имеем

$$-\frac{dR_{n+1}\sigma}{dt} + AR_{n+1}\sigma + R_{n+1}A\sigma \leq R_nA\sigma + A\sigma.$$

Так как $R_{n+1} \geq R_n$, то

$$-\frac{dR_{n+1}\sigma}{dt} + AR_{n+1}\sigma \leq A\sigma$$

или

$$-\frac{d}{dt}\left(e^{-At}R_{n+1}\sigma\right) \leq e^{-At}A\sigma.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от t до ∞, получаем

$$R_{n+1}\sigma \leq \left(\int_0^\infty e^{-A\tau}A\,d\tau\right)\sigma = \sigma.$$

Таким образом, последовательность $\{R_n(t)\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Поэтому существует предел $R(t) = \lim_{n\to\infty} R_n(t)$, $0 \leq t < \infty$. Очевидно, $R(t)$ обладает свойствами (7). Переходя в (9) к пределу при $n \to \infty$ (в законности предельного перехода под знаком интеграла можно убедиться применением теоремы Лебега или Леви) получим интегральное уравнение

$$R(t) = \int_0^\infty e^{-A\tau}\left[R(t+\tau)AR(t+\tau) + A - A^{-1}Q(t+\tau)\right]e^{-A\tau}\,d\tau. \qquad (10)$$

Из (10) имеем

$$e^{-At}R(t)e^{-At} = \int_t^\infty e^{-A\tau}\left[R(\tau)AR(\tau) + A - A^{-1}Q(\tau)\right]e^{-A\tau}\,d\tau.$$

Отсюда следует, что $R(t)$ дифференцируема. Дифференцированием легко убедиться, что $R(t)$ удовлетворяет уравнению (6). Доказательство теоремы 1 следует из (5) и (7).

Следуя [3], предел $R(t)$ последовательных приближений (8) назовем *каноническим решением* уравнения (6). Матрицу–функцию $\rho(t) = -A + AR(t)$, аналогично, назовем *каноническим решением уравнения Риккати* (1).

Замечание. Из хода доказательства теоремы 1 видно, что условие (2) можно заменить более общим условием : существуют положительные числа $\sigma_1, ..., \sigma_m$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} Q_{ij}\sigma_j \geq 0$. В этом случае утверждение б) заменяется условием

$$\sum_{j=1}^{m} \rho_{ij}\sigma_j \leq 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Пусть $Q(t)$ – симметричная матрица. Тогда $\rho(t)$ также симметрична. Для доказательства этого определим $\{R_n\}$ посредством (8). Очевидно, $AR_n(t) \to AR(t)$ при $n \to \infty$. Если умножить (9) слева на матрицу A, то по индукции легко проверить, что $AR_n(t)$ – симметрическая матрица, $n = 1, 2, ...$. Таким образом, матрица $AR(t)$ также будет симметрической . Теперь доказательство утверждения следует из (5).

Каноническое уравнение $R(t) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(t)$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6). Для этого рассмотрим произвольное неотрицательное решение $\widetilde{R}(t)$ уравнения (6). Неравенства $R_n(t) \leq \widetilde{R}(t)$, $n = 1, 2, ...$ можно проверить по индукции, используя (9). Следовательно, $R(t) \leq \widetilde{R}(t)$.

§2. СВЯЗЬ С КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ

Теорема 2. *Пусть ρ – каноническое решение уравнения (1). Если s – решение задачи Коши*

$$\frac{ds}{dt} = \rho(t)s, \quad s(0) = \alpha, \quad t > 0, \tag{11}$$

то одновременно s является решением краевой задачи

$$\frac{d^2s}{dt^2} = Q(t)s, \quad s(0) = \alpha, \quad S(t) = O(1) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть s – решение задачи Коши (11). Дифференцируя (11) и учитывая (1), находим, что s удовлетворяет уравнению (12). Докажем, что $s(t)$ ограничена при $t \to +\infty$. Для этого заметим, что $s(t) = S(t)\alpha$, где $S(t)$ – решение матричной задачи Коши

$$\frac{dS}{dt} = \rho(t)S, \quad S(0) = I, \quad t > 0, \tag{13}$$

I – единичная матрица. С учетом (5) нетрудно проверить, что (13) эквивалентно интегральному уравнению

$$S(t) = e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}AR(\tau)S(\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

где R удовлетворяет условиям (7). Рассмотрим последовательные приближения

$$S_{n+1}(t) = e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}AR(\tau)S_n(\tau)\,d\tau, \quad S_0(t) = 0. \tag{15}$$

Пусть σ – m–мерный вектор–столбец, все компоненты которого равны 1. По индукции нетрудно проверить, что последовательность матриц $\{S_n(t)\}$ неотрицательна, монотонно возрастает по n и ограничена : $S_n\sigma \leq \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому существует предел $S(t) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(t)$, $0 \leq t < \infty$. Стандартным путем можно убедиться, что $S(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (14), тем самым задаче Коши (13). Очевидно, $S(t) \geq 0$ и $S(t)\sigma \leq \sigma$. Следовательно $S(t)$ и вектор–функция $s(t)$ ограничены на полуоси $(0, \infty)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Краевая задача (12) имеет решение, если матрица $Q(t)$ удовлетворчет условиям (2), (3).

Следствие 2. Если задача (12) однозначно разрешима, то решение уравнения (1), обладающее свойствами а) и б), единственно.

В математической экономике, теории случайных процессов, в математической медицие важную роль играют матрицы Q, удовлетворяющие условию (см. [4])

$$Q_{ij} \leq 0 \quad \text{при } i \neq j, \qquad \sum_{j=1}^{m} Q_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Из теоремы 1 следует, что при условиях (16), (3) уравнение Риккати (1) имеет ограниченное решение $\rho = (\rho_{ij})$, обладающее свойствами а) и б) на всей полуоси. Если задача (12) имеет единственное решение, то этот результат можно уточнить.

Следствие 3. Если задача (12), (16) однозначно разрешима, то каноническое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{m} \rho_{ij}(t) = 0, \quad i = 1, ..., m, \quad 0 \le t < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $s(t)$ – решение задачи Коши (11) с $\alpha = \sigma = (1, ..., 1)^T$. Из теоремы 2 следует, что $s(t)$ – решение уравнения (12). Из однозначной разрешимости задачи (12) следует, что $s(t) = \sigma$. Подставляя $s(t) = \sigma$ в (11), получим $\rho(t)\sigma = 0$. Следствие 3 доказано.

§3. КАНОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Определение канонического решения уравнения (1) сводится к определению канонического решения матричного уравнения (6). В интервале $0 \le t \le r$ рассмотрим задачу Коши

$$-\frac{dR}{dt} + AR + RA = RAR + A - A^{-1}Q(t), \quad R(r) = 0. \tag{18}$$

Аналогичным путем, как и в доказательстве теоремы 1, можно доказать лемму.

Лемма 1. *Задача Коши (18) имеет единственное решение $R = (R_{ij})$, удовлетворяющее условию (7).*

Отметим, что матрица-функция $R(t)$ является равномерным пределом на $[0, r]$ последовательных приближений

$$R_{n+1}(t) = \int_0^{r-t} e^{-A\tau}\left[R_n(t+\tau)AR_n(t+\tau) + A - A^{-1}Q(t+\tau)\right]e^{-A\tau}\, d\tau, \quad R_0(t) = 0. \tag{19}$$

Пусть $R(t, r)$ – решение задачи Коши (18) на $[0, r]$, $R(t, r) = 0$ при $t > r$. Используя последовательные приближения (9) и (19), нетрудно установить следующее утверждение.

Лемма 2. *Каноническое решение $R(t)$ уравнения (6) является оценкой сверху для $R(t,r)$, т.е. $R(t,r) \le R(t)$, $t \ge 0$.*

Используя последовательные приближения типа $R(t,r_1)$ и $R(t,r_2)$ как и в (19), можно доказать следующее :

Лемма 3. *Если $0 \le t < \infty$, $r_2 > r_1$, то $R(t,r_2) \ge R(t,r_1)$.*

Комбинируя вышеприведенные леммы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $r_1, r_2, \ldots$ – неограниченная, возрастающая последовательность положительных чисел. Пусть $R(t,r_n)$ – решение задачи Коши (18) на $[0,r_n]$ при $r = r_n$, и пусть $R(t,r_n) = 0$ при $t > r_n$. Тогда каноническое решение $R(t)$ уравнения (6) представляется в виде $R(t) = \lim\limits_{n\to\infty} R(t,r_n)$, $0 \le t < \infty$.*

По теореме Дини на каждом компакте сходимость равномерная.

§4. СЛУЧАЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Периодичские решения матричного уравнения Риккати возникают в различных приложениях (см. [5]). Пусть $Q(t)$ – периодическая матрица–функция с периодом T. По индукции легко проверить, что итерации $R_n(t)$, определенные посредством соотношений (9), также будут T–периодическими. Поэтому T–периодической будет также матрица функция $R(t) = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(t)$, т.е. каноническое решение уравнения (6). Следовательно, T–периодической будет также каноническое решение $\rho(t) = -A + AR(t)$ уравнения (1). Для определения последовательности $\{R_n(t)\}$ $(R_0(t) = 0)$ к уравнению (8) присоединим условия периодичности

$$R_{n+1}(0) = R_{n+1}(T). \tag{20}$$

Из (8) следует, что для элементов R^{ij}_{n+1} матрицы R_{n+1}

$$R^{ij}_{n+1}(t) = e^{-(a_i+a_j)(T-t)} R^{ij}_{n+1}(T) + \int_t^T e^{-(a_i+a_j)(\tau-t)} C^{ij}_n(\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

где $(C^{ij}_n) = R_n A R_n + A - A^{-1}Q(t)$. Из (20) и (21) имеем

$$R^{ij}_{n+1}(T) = \frac{1}{1 - e^{-(a_i+a_j)T}} \int_0^T e^{-(a_i+a_j)(\tau)} C^{ij}_n(\tau)\, d\tau. \tag{22}$$

Таким образом, $R_n(t)$, $0 \le t \le T$, $n = 1, 2, \ldots$ последовательно можно определить из (21) и (22).

§5. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ МАТРИЦЫ Q

Пусть Q – постоянная матрица, удовлетворяющая (2) и $Q_{ii} > 0$, $i = 1, ..., m$. Небольшие дополнительные усилия позволяют получить алгебраический результат – существование квадратного корня $\sqrt{Q}$, удовлетворяющего условиям типа (2).

Действительно, из теоремы 1 следует существование канонического решения уравнения Риккати (1) с матрицей Q, удовлетворяющей вышеуказанным условиям. Так как Q – постоянная матрица, то из результатов §4 следует, что каноническое решение ρ уравнения (1) тоже постоянная матрица. Поэтому ρ удовлетворяет уравнению $\rho^2 = Q$. Очевидно, матрица $-\rho$ – другой квадратный корень из Q. Из теоремы 1 следует, что элементы матрицы $-\rho$ удовлетворяют условиям типа (2). Согласно следствию 2, квадратный корень, обладающий этими свойствами, будет единственным, если задача (12) имеет единственное решение.

Отметим один важный случай, когда это условие выполнено. Пусть Q – неразложимая матрица (см. [6]). Если $\sum_{j=1}^{m} Q_{ij} > 0$ хотя бы для одного i, то вещественные части всех собственных значений матрицы Q положительны. Если $\sum_{j=1}^{m} Q_{ij} = 0$, $i = 1, ..., m$, то 0 являтся простым собственным значением матрицы Q, а остальные собственные значения имеют положительные вещественные части (см. [6]). В обоих случаях, используя явный вид решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, можно убедиться, что задача (12) имеет единственное решение.

Матрицы, удовлетворяющие условию (2), иногда называют M*-матрицами*. Извлечению квадратного корня из M-матриц посвящена работа [7].

Из (8) следует, что квадратный корень является пределом следующих итераций :

$$AR_{n+1} + R_{n+1}A = R_n A R_n + A - A^{-1}Q, \quad R_0 = 0.$$

Отметм, что общее решение системы (4) на интервале $a \le t \le b$ с $Q = Const$, $f = 0$ пишется в виде

$$s(t) = e^{-\sqrt{Q}(t-a)}\alpha + e^{-\sqrt{Q}(b-t)}\beta,$$

где α и β – произвольные m–мерные векторы.

Авторы выражают благодарность Н. Б. Енгибаряну за ценные обсуждения результатов работы.

ABSTRACT. The paper studies Riccati matrix equation $\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = Q(t)$, where $Q = (Q_{ij})$ is $m \times m$–dimensional continuous matrix-valued function, satisfying the conditions $Q_{ij} \leq 0$ for $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{m} Q_{ij} \geq 0$, $0 < \sup_t Q_{ii}(t) < \infty$, $i = 1, ..., m$. It is proved that this equation has a bounded solution on half-line, possessing the properties $\rho_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{m} \rho_{ij} \leq 0$. These solutions can be obtained by a reduction method. In the cases of constant and periodic Q the solutions can be obtained by iterations. It is proved that if Q is a constant matrix, then the square root of the matrix Q possesses the above properties.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Энджел, Р. Белман, Динамичекое Программирование и Уравнения в Частных Производных, Мир, М., 1974.
2. С. Чандрасекар, Перенос Лучистой Энергии, ИЛ, М., 1953.
3. Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, "Перенос излучения в плоском слое и уравнение Амбарцумяна", В сб. Принцип Инвариантности и Его Приложения, стр. 326 – 333, Ереван, 1989.
4. R. Bellman, Mathematical Methods in Medicine, World Scientific, 1983.
5. М. Г. Мурадян, "Периодические решения матричного уравнения Риккати", Диффер. ур., т. 20, № 12, стр. 2176 – 2178, 1984.
6. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, Матрицы и Вычисления, Наука, М., 1984.
7. G. Alefeld, N. Schneider, "On square roots of M-matrices", Linear Alg. and Appl., vol. 42, pp. 119 – 132, 1982.

14 августа 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СВЕРТКИ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

А. Х. Хачатрян, К. В. Папоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В статье излагается метод построения приближенных решений для интегральных уравнений свертки на конечных промежутках с вполне монотонными ядрами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетическая теория газов (КТГ) в полуплоскостях, как показано в работах [1 — 4], дает повод для изучения консервативных (особых) интегральных уравнений Винера–Хопфа (ИУВХ) и некоторых более общих интегральных уравнений свертки.

Это, в частности, относится к таким задачам КТГ, как задачи Куэтта и Пуайзеля. Задача Куэтта [2] связана с изучением течения разреженного газа между двумя бесконечными параллельными пластинками, движущимися друг относительно друга. Задача Пуайзеля изучает движение газа или жидкости между неподвижными пластинками, вызванное градиентом давления [1, 2, 5]. Задачи Куэтта и Пуайзеля в основном рассматривались в рамках БГК (Бхатнагар–Гросс–Крук) модели уравнения Больцмана. В рамках БГК модели задачи Куэтта и Пуайзеля сводятся к некоторым уравнениям свертки на конечном промежутке.

Настоящая работа посвящена применению метода к изучению и решению интегрального уравнения свертки на конечном промежутке, предложенного в работе [6] для двух вышеуказанных задач.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках линеаризованной БГК модели задачи Куэтта и Пуайзеля сводятся к следующему интегральному уравнению свертки относительно среднемассовой скорости (см. [1,2]) :

$$\varphi(x) = T_0\left(\frac{r}{2} - x\right) - T_0\left(\frac{r}{2} + x\right) + \int_{-r/2}^{r/2} T_{-1}(|x-t|)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где r - расстояние между пластинками, $T_n(x)$ – функции Велландера :

$$T_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-s^2)\exp\left(-\frac{x}{s}\right)s^n\,ds, \quad n = -1, 0, 1, ... \tag{2}$$

В задаче Пуайзеля представляет определлнный физический интерес не только само решение уравнения (1), но и нахождение значения интеграла $J = \int_{-r/2}^{r/2}\varphi(x)\,dx$ (так называемый объемный расход).

Решение уравнения (1) выражается по формуле

$$\varphi(x) = f\left(\frac{r}{2} - x\right) - f\left(\frac{r}{2} + x\right), \qquad x \in [-r/2, r/2], \tag{3}$$

где $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(x) = T_0(x) + \int_0^r T_{-1}(|x-t|)\,f(t)\,dt. \tag{4}$$

Итак задача (1) сводится к решению интегрального уравнения (4). Свободный член и ядро уравнения (4) являются вполне монотонными и допускают следующее представление :

$$T_0(x) = \int_0^\infty \exp(-xs)\,G_0(s)\,ds = \int_0^\infty \exp(-xs)\,d\sigma_0(s), \tag{5}$$

$$T_{-1}(x) = \int_0^\infty \exp(-xs)\,G(s)\,ds = \int_0^\infty \exp(-xs)\,d\sigma(s), \tag{6}$$

где

$$G_0(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,s^2}\exp(-s^{-2}), \qquad G(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,s}\exp(-s^{-2}). \tag{7}$$

Имеем

$$\mu \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} T_{-1}(x)\,dx = 1. \tag{8}$$

§2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Применяемый нами метод работы [6] основан на установлении связи между решением рассматриваемого уравнения (4) и решением интегрального уравнения Винера–Хопфа на полуоси с тем же ядром.

В том случае, когда ядро последнего уравнения является суперпозицией экспонент, известное нелинейное интегральное уравнение В. А. Амбарцумяна (см. [7, 8]) становится эффективным орудием решения уравнения Винера–Хопфа (см. [8, 9]).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Y(x,s) = e^{-xs} + \int_0^r T_{-1}(|x-t|)\,Y(t,s)\,dt, \tag{9}$$

где $s > 0$ – параметр. Решение уравнения (4) выражается через $Y(x,s)$ по формуле

$$f(x) = \int_0^\infty Y(x,s)\,d\sigma_0(s). \tag{10}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение Винера–Хопфа

$$P(x,s) = e^{-xs} + \int_0^\infty T_{-1}(|x-t|)\,P(t,s)\,dt. \tag{11}$$

Существует связь ([6]) между решением уравнения (9) и (11), которая может быть использована для решения (9) при $\mu < 1$ (диссипативный случай). Консервативный случай $\mu = 1$ требует особого подхода.

Мы укажем две возможности преодоления трудностей, возникающих в консервативном случае. Первая возможность, излагаемая в настоящем параграфе, заключается в следующем. Вместо (11) мы будем рассматривать уравнение с "усеченным" свободным членом

$$P_R(x,s) = e^{-xs}\Theta(R-x) + \int_0^\infty T_{-1}(|x-t|)\,P_R(t,s)\,dt, \tag{12}$$

где $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$ при $x \geq 0$.

Под $P_R(x,s)$ мы будем подразумевать так называемое основное решение (ОР) уравнения (12), которое является пределом простых итераций для (12). Существование ОР уравнения (12) следует из теоремы 6.3 работы [8]. ОР является минимальным положительным решением уравнения (12). Мы укажем некоторые свойства P_R.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$P_R(x,s) = Y(x,s) + \int_0^\infty U_R(s,s')\,Y(R-x,s')\,d\sigma(s'), \tag{13}$$

где

$$U_R(s,s') = e^{-Rs'} \int_R^\infty P_R(t,s)\,e^{-ts'}\,dt. \tag{14}$$

Вкратце опишем вывод формулы (13), который сходен с доказательством формулы (15) работы [6].

С учетом (6) перепишем (12) в виде

$$\begin{gathered} P_R(x,s) = e^{-xs} + \int_R^\infty T_{-1}(x-t)\,P_R(t,s)\,dt + \int_0^R T_{-1}(x-t)\,P_R(t,s)\,dt = \\ = e^{-xs} + \int_0^R T_{-1}(x-t)\,P_R(t,s)\,dt + \int_0^\infty \int_R^\infty P_R(t,s)\,e^{-ts'}\,e^{xs'}\,dt\,d\sigma(s'). \end{gathered} \tag{15}$$

Заменяя x на $R-x$ в (9), имеем

$$e^{Rs'}\,Y(R-x,s') - \int_0^R T_{-1}(x-t)\,Y(R-t,s')\,e^{Rs'}\,dt = e^{xs'}. \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), приходим к (13).

Для нас основной интерес представляет формула (12) при $R=r$ и $R=+\infty$. При $R=+\infty$, (12) обращается в формулу (11). Ниже мы будем заниматься получением выражений для P_R и U_R.

Для решения уравнения (12) относительно P_R, перепишем его в операторном виде $(I-T)P_R = P_0$.

Пусть $\varphi(s)$ – каноническое решение уравнения Амбарцумяна (см. [8])

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_0^\infty \frac{\varphi(p)\,d\sigma(p)}{s+p}. \tag{17}$$

Каноническое решение является пределом естественного итерационного процесса к уравнению (17) (см. [8]).

Рассмотрим функцию

$$V(x) = \int_0^\infty e^{-xs}\,\varphi(s)\,d\sigma(s), \qquad V \in L_1^+. \tag{18}$$

Согласно [9] имеет место факторизация

$$I - T = (I - V_-)(I - V_+), \tag{19}$$

где $V_\pm$ – операторы Вольтерра

$$(V_- f)(x) = \int_x^\infty V(t-x)\, f(t)\, dt; \qquad (V_+ f)(x) = \int_0^x V(x-t)\, f(t)\, dt. \tag{20}$$

Факторизация (19) сводит задачу (12) к последовательному решению уравнений

$$F_R(x,s) = e^{-xs}\Theta(R-x) + \int_x^\infty V(t-x)\, F_R(t,s)\, dt \tag{21}$$

и

$$P_R(x,s) = F_R(x,s) + \int_0^x V(x-t)\, P_R(t,s)\, dt. \tag{22}$$

Решение уравнения (21) имеет вид

$$F_R(x,s) = e^{-xs} + \int_x^R \Phi(t-x)\, e^{-ts}\, dt, \tag{23}$$

где $\Phi(x)$ – резольвентная функция уравнения (21) :

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\, \Phi(t)\, dt. \tag{24}$$

В работе [10] построено следующее представление для $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xs}\, d\omega(s), \tag{25}$$

где $\omega(s) \uparrow s$, $\omega(0) = 0$.

С учетом (25) и (23) имеем

$$F_R(x,s) = e^{-xs}\varphi(s) - \int_0^\infty \frac{e^{xp}\, e^{-(p+s)R}}{s+p}\, d\omega(p) \le F_\infty(x,s) = e^{-xs}\, \varphi(s). \tag{26}$$

Теперь рассмотрим уравнение (22). Имеем

$$P_R(x,s) = F_R(x,s) + \int_0^x \Phi(x-t)\, F_R(t,s)\, dt. \tag{27}$$

Подставляя (26) и (25) в (27), получим

$$\begin{aligned} P_R(x,s) = \varphi(s)\left[e^{-xs} + \int_0^\infty \frac{e^{-xs} - e^{-xp}}{p-s}\, d\omega(p)\right] - \\ - e^{-Rs}\int_0^\infty \frac{e^{-Rp}}{s+p}\, d\omega(p)\left[\varphi(p)\, e^{xp} - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda+p}\, d\omega(\lambda)\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Из (28) и (14) получим следующее выражения для $U_R(s,s')$:

$$U_R(s,s') = \varphi(s)e^{-Rs}\int_0^\infty \frac{d\omega(p)}{p-s}\left[\frac{1}{s+s'} - \frac{e^{-Rp}}{s'+p}\right] - \\ - e^{-Rs}\int_0^\infty \frac{d\omega(p)}{s+p}\left[\frac{\varphi(p)}{s'-p} - \int_0^\infty \frac{e^{-(p+\lambda)R}\,d\omega(\lambda)}{(\lambda+p)(\lambda+s')}\right]. \tag{29}$$

Ясно, что P_R и U_R являются неотрицательными строго возрастающими функциями от R. Поэтому

$$U_R \leq U_\infty, \qquad P_R < P_\infty. \tag{30}$$

Из соотношения (13) с $R = r$ может быть опредслена функция $Y(x,s)$.

Рассмотрим функции

$$P_\pm(x,s) = P_r(x,s) \pm P_r(r-x,s), \tag{31}$$

$$Y_\pm(x,s) = Y(x,s) \pm Y(r-x,s). \tag{32}$$

Из (13) имеем

$$Y_\pm(x,s) = P_\pm(x,s) \mp \int_0^\infty U_r(s,s')\,Y_\pm(x,s')\,d\sigma(s'). \tag{33}$$

Равенства (33) предтсавляют собой интегральные уравнения относительно $Y_\pm$, зависяшие от параметра $x \in [0, r/2]$.

§3. РАЗРЕШИМОСТЬ

Уравнение (33) допускает операторное представление

$$Y_\pm = P_\pm \mp U_r Y_\pm, \tag{34}$$

где U_r – интегральный оператор

$$(U_R f)(s) = \int_0^\infty U_R(s,s')\,f(s')\,d\sigma(s'). \tag{35}$$

Пусть $\overline{L}_1 = L_1\left[\frac{1}{s}\,d\sigma(s)\right]$ – банахово пространство функций на $(0,+\infty)$ с нормой

$$\|f\|_{\overline{L}_1} \equiv \int_0^\infty |f(s)|\,\frac{|d\sigma(s)|}{s} < +\infty. \tag{36}$$

Вопрос о разрешимости уравнений (34) в пространствах $\overline{L}_1$ связан с обратимостью операторов $I \mp U$, где I – единичный оператор. В [6] доказана оценка

$$\int_0^\infty |U(s,s')|\,\frac{|d\sigma(s)|}{s} \leq \frac{\mu}{s'}. \tag{37}$$

Из (37) непосредственно следует $\|U\|_{\overline{L}_1} \leq \mu$.

Используя (30) и строго монотонную зависимость спектрального радиуса оператора U_R на R, можно доказать обратимость оберaтора $I - U_R$ в $\overline{L}_1$ в консервативном случае (см [11]). Ниже мы опишем другой подход к нашей задаче, основанный на (12).

§4. РЕДУКЦИОННЫЙ МЕТОД

В настоящем параграфе мы обсудим метод приближенного аналитического решения рассматриваемых уравнений. Этот метод основан на замене исходного ядра $T_{-1} = T$ "редукционным" ядром $\widetilde{T}$, представляющим собой конечную линейную комбинацию экспонент.

Пусть s_k – набор точек на $(0, +\infty)$. Составим усеченное ядро в виде

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-x s_k},$$

где $c_k = \sigma(s_{k+1}) - \sigma(s_k)$. Имеем $0 \leq \widetilde{T}(x) \leq T(x)$.

Пусть $E_r = E[0, r]$ – одно из банаховых пространств $L_p[0, r]$, $M[0, r]$ или $C[0, r]$. Имеют место следующие легко проверяемые оценки для каждого из пространств E_r :

$$\|T\|_{E_r} \leq \mu_r = 2 \int_0^{r/2} |T(x)|\, dx < 1,$$

$$\|\widetilde{T}\|_{E_r} \leq \widetilde{\mu}_r = 2 \int_0^{r/2} |\widetilde{T}(x)|\, dx < \mu_r.$$

Так как $\|T\|_{E_r} < 1$, то мы можем аппроксимировать решение уравненияf (9) решением $\widetilde{Y}(x, s)$ "усеченного" уравнения

$$\widetilde{Y}(x, s) = e^{-xs} + \int_0^r \widetilde{T}(x - t)\, \widetilde{Y}(t, s)\, dt. \tag{38}$$

Имеют место легко проверяемые оценки

$$\frac{\|Y - \widetilde{Y}\|_{E_r}}{\|Y\|_{E_r}} \leq \frac{(\mu_r - \widetilde{\mu}_r)}{1 - \mu_r} \leq \delta\, (1 - \mu_r)^{-1}, \tag{39}$$

$$\|Y - \widetilde{Y}\|_{E_r} \leq \delta\, (1 - \mu_r)^{-2}, \tag{40}$$

где $\delta = 1 - \widetilde{\mu}$.

Если выбрать δ достаточно малым, то сможем сделать числа $\|Y-\widetilde{Y}\|_{E_r}$ и $\frac{\|Y-\widetilde{Y}\|}{\|Y\|}$ сколь угодно малыми. Для обеспечения малости δ можно выбрать число n достаточно большим и использовать метод работы [6].

Следующим шагом является применение метода, описанного в §2, к "усеченному" уравнению (38) с диссипативным ядром $\widetilde{T}$ (т.е. $\widetilde{\mu}<1$).

Заменяя интегралы $\int_0^\infty f(s)\,G(s)\,ds$ конечной суммой вида $\sum_{k=1}^n c_k\,f(s_k)$, мы преобразуем уравнение Амбарцумяна (17) в конечную нелинейную алгебраическую систему

$$\widetilde{\varphi}_k=1+\widetilde{\varphi}_k\sum_{m=1}^n\frac{c_m\,\widetilde{\varphi}_m}{s_k+s_m},$$

где $\widetilde{\varphi}_m=\widetilde{\varphi}(s_m)$.

Аналогично, "усеченное" уравнение (33) обращается в линейную алгебраическую систему

$$\widetilde{Y}_k^{\pm}=\widetilde{P}_k^{\pm}\mp\sum_{m=1}^n c_m\,\widetilde{U}_{km}\,\widetilde{Y}_m^{\pm}. \tag{41}$$

Мы получили конечные (линейные или нелинейные) алгебраические системы, для которых простые итерации сходятся. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Линейная алгебраическая система (41) при $x\in[0,r/2]$ имеет единственное решение и имеют место оценки (39) и (40).*

В заключение остановимся на вопросе вычисления величины

$$Q(s)=\int_0^R Y(x,s)\,dx.$$

Интегрируя (13) по x от 0 до R, будем иметь $Q=Q_0-UQ$, где

$$Q_0(s)=\int_0^R P_R(t,s)\,dt.$$

Мы видим, что возможно вычислить функцию Q, не решая уравнения (13).

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за обсуждение и полезные советы.

ABSTRACT. For convolution-type integral equations on finite intervals with completely monotone kernels a method for construction of approximate solution is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Черчиньяни, Теорея и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, М., 1978.
2. М. Н. Коган, Динамика Разреженного Газа, Наука, М., 1962.
3. А. В. Латушев, Г. А. Манучарян, Ю. И. Яламов, "Интегральные уравнения типа свертки в граничных задачах кинетической теории газов", ДАН СССР, т. 284, № 2, стр. 331 — 333, 1985.
4. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории", ЖВММФ, т. 38, № 3, 1998.
5. C. Cercignani, "Plane Poiseuille Flow according to the method of elementary solutions", Journal of Math. Analysis and Appl., vol. 12, no. 2, pp. 254 — 262, 1965.
6. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "Об одном интегральном уравнении с разностным ядром", Мат. Зам., т. 19, № 6, стр. 927 — 932, 1976.
7. В. А. Амбарцумян, Научные Труды, т. 1, 2, Ереван, 1960.
8. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 -- 244, 1984.
9. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сб., т. 97, № 1, стр. 35 — 58, 1975.
10. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, "Об одном классе интегральных уравнений восстановления", Мат. Зам., т. 47, № 6, стр. 23 — 30, 1990.
11. М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Физматиздат, М., 1962.

7 октября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория НАН Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 32 НОМЕР 1 1997

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Сборник статей

Страницы

CONTENTS

VOLUME 32 NUMBER 1 1997

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

CONVOLUTION-TYPE INTEGRAL EQUATIONS WITH POSITIVE KERNELS

Collection of Papers

PAGES

Посвящается памяти
академика
Виктора А. Амбарцумяна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

сборник статей

под редакцией Н. Б. Енгибаряна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Интегральные уравнения свертки второго рода с положительными ядрами представляют большой теоретический интерес и имеют важные применения во многих областях – от теории восстановления до теории радиоактивного переноса и кинетической теории газов. В современной теории уравнений свертки большую роль играют факторизационные методы, берущие начало от классической факторизации Винера–Хопфа. Возникли новые подходы, основанные на принципе инвариантности В. А. Амбарцумяна и его нелинейных уравнениях. Комбинирование факторизации с принципом инвариантности привело к методу нелинейного уравнения факторизации.

Настоящий сборник статей содержит новые исследования по интегральным уравнениям свертки второго рода, выполненные в центре математической физики Бюраканской астрофизической обсерватории. Основными математическими методами являются метод уравнения Амбарцумяна в сопряжении с факторизационным методом.

Статья Г.Г. Геворкяна и Н.Б. Енгибаряна представляет усиления некоторых классических теорем восстановления. Статья Г. А. Григоряна содержит результаты, касающиеся разрешимости уравнения Винера–Хопфа в закритическом случае. Б. Н. Енгибарян доказал существование фиксированного элемента для связки операторов, которая состоит из сверточных операторов с прямым и обратным сдвигом. Другие статьи содержат результаты в задачах, возникающих в теории радиоактивного переноса и кинетической теории газов.

Настоящий сборник статей посвящен памяти В. А. Амбарцумяна, чей вклад в математические основания данной области неоценим.

Бюракан, январь 1997 — Норайр Б. Енгибарян