

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3748

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՋԵԼՅԱՆ

Ի. Դ. ՋԱՍԼԱՎԱԿԻ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԱՐԱՅԱՆ

գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են Հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ Համառոտ Հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5-6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով Հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի Հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (Հայերեն) ներկայացված Հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ Հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա Հեղինակների Հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել Համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են Համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծազրկերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց Համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է Հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի Համար նշվում է՝ Հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, Հոդվածների Համար նշվում է՝ Հեղինակը, Հոդվածի անունը, ամսագիրը, Համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի Համապատասխան տեղում:

6. Մրբագրության ժամանակ Հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով Հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես Հոդվածի ստացման ժամկետ Համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում Հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրազեկն է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն Հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի Հոդվածը, նշի իր լրիվ Հասցեն, անունը և Հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց Հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության Հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

ФУНКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

Вводится понятие функции собственных значений семейства операторов Дирака. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности функции этому классу.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим краевую задачу

$$ly \equiv \left\{ B \frac{d}{dx} + \Omega(x) \right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

$$y_1(0) \cos \gamma + y_2(0) \sin \gamma = 0, \quad (1.2)$$

$$y_1(\pi) = 0, \quad (1.3)$$

для канонической (см. [1]) системы (1.1) дифференциальных уравнений Дирака, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$.

Если p и q — действительные и абсолютно суммируемые функции на $[0, \pi]$, т. е. $p, q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, то дифференциальные операторы $L(\Omega, \gamma)$, порожденные в гильбертовом пространстве $L^2(0, \pi; \mathbb{C}^2)$ двухкомпонентных вектор-функций дифференциальным выражением l на области определения¹

$$\mathcal{D}_{L(\Omega, \gamma)} = \left\{ y: \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_k \in AC[0, \pi], \quad (ly)_k \in L^2[0, \pi], \quad k = 1, 2; \right.$$

$$\left. y_1(0) \cos \gamma + y_2(0) \sin \gamma = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \right\},$$

¹ $AC[0, \pi]$ — множество абсолютно непрерывных функций на $[0, \pi]$

самосопряженные при любых действительных γ . Известно ([1], [2]), что $L(\Omega, \gamma)$ имеет простой дискретный спектр однократных собственных значений $\lambda_n(\Omega, \gamma)$, $n \in \mathbb{Z}$, образующих неограниченную (и сверху и снизу) последовательность.

Имея целью дать корректную нумерацию собственных значений, рассмотрим сначала оператор $L(\Omega, \frac{\pi}{2})$. Пронумеруем собственные значения $\lambda_n(\Omega, \pi/2) = \lambda_n(\pi/2)$ в порядке возрастания индекса $n \in \mathbb{Z}$, причем через $\lambda_0(\pi/2)$ обозначим наименее удаленное от нуля неположительное собственное значение оператора $L(\Omega, \pi/2)$, т.е.

$$\dots < \lambda_{-2}(\pi/2) < \lambda_{-1}(\pi/2) < \lambda_0(\pi/2) \leq 0 < \lambda_1(\pi/2) < \lambda_2(\pi/2) < \dots \quad (1.4)$$

Лемма 1.1. Если $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, то между $\lambda_n(\pi/2)$ и $\lambda_{n+1}(\pi/2)$ лежит ровно одно собственное значение оператора $L(\Omega, \alpha)$.

Это собственное значение мы обозначим через $\lambda_n(\alpha)$, т.е. для $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$\lambda_n(\pi/2) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\pi/2), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Лемма 1.2. Если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то между $\lambda_n(\pi/2)$ и $\lambda_n(\alpha)$ лежит ровно одно собственное значение оператора $L(\Omega, \beta)$.

Это собственное значение пронумеруем номером n , т.е.

$$\lambda_n(\pi/2) < \lambda_n(\beta) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\pi/2), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

Неравенства (1.4) и (1.5) дают однозначную нумерацию собственных значений операторов $L(\Omega, \alpha)$ для всех $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Чтобы задать нумерацию собственных значений для всех действительных значений параметра γ из (1.2), поступим следующим образом. Произвольное действительное γ представим в виде $\gamma = \alpha - \pi m$ при некоторых $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ и $m \in \mathbb{Z}$. Собственное значение $\lambda_n(\gamma)$ определим следующим образом :

$$\lambda_n(\gamma) = \lambda_n(\alpha - \pi m) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{n+m}(\alpha). \quad (1.7)$$

Формула (1.7) задает едиую нумерацию собственных значений для всех действительных значений параметра γ из краевого условия (1.2).

Определение. Функцию, определенную для каждого действительного числа $\gamma = \alpha - \pi m$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$, $m \in \mathbb{Z}$, по формуле

$$\lambda(\gamma) = \lambda(\alpha - \pi m) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_m(\alpha),$$

где $\lambda_m(\alpha)$, $m \in \mathbb{Z}$ — собственные значения оператора $L(\Omega, \alpha)$, пронумерованные согласно (1.4) — (1.5), будем называть функцией собственных значений ($\Phi CЗ$) семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha): \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$.

Замечание. По существу, мы назвали $\Phi CЗ$ собственное значение $\lambda_0(\gamma)$, продолженное с $(-\pi/2, \pi/2]$ на всю действительную ось по формуле (1.7) (при $n = 0$).

Теорема 1. Пусть $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$. Тогда $\Phi CЗ$ $\lambda(\cdot)$ семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha), \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$ обладает следующими свойствами:

1. Как функция действительного переменного она строго монотонно убывающая действительнoзначная функция, определенная на всей оси. Существует точка $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2]$ такая, что $\lambda(\alpha_0) = 0$.

2. Для каждой действительной точки γ существует некоторая комплексная окрестность V_γ , в которой определена однозначная аналитическая функция $\tilde{\lambda}(\cdot)$, совпадающая с $\lambda(\cdot)$ при действительных значениях аргумента.

3. Функция $c(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\gamma) + \gamma/\pi$ обладает свойством:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c^2(\alpha - \pi n) < \infty \quad \text{для каждого } \alpha \in (-\pi/2, \pi/2].$$

4. Для любых α и β таких, что $-\pi/2 < \alpha < \beta \leq \pi/2$ и любого $n \in \mathbb{Z}$

$$\left. \frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\alpha-\pi n} = \frac{\lambda(\alpha - \pi n) - \lambda(\beta - \pi n)}{\sin(\beta - \alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda(\beta - \pi k) - \lambda(\alpha - \pi n)}{\lambda(\alpha - \pi k) - \lambda(\alpha - \pi n)}. \quad (1.8)$$

Теорема 2. Пусть функция $\lambda(\cdot)$ обладает свойствами 1) — 4) из теоремы 1. Тогда существует единственная матрица-функция $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что $\lambda(\cdot)$ есть $\Phi CЗ$ семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha), \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$, т.е. для любого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ значение $\lambda(\alpha - \pi n)$ есть собственное значение $\lambda_n(\Omega, \alpha)$ оператора $L(\Omega, \alpha)$, пронумерованное согласно (1.4) — (1.5).

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим через $\varphi(x, \lambda, \alpha)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} ly = \lambda y, \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ -\cos \gamma \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.1)$$

При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ компоненты $\varphi_1(x, \lambda, \gamma)$ и $\varphi_2(x, \lambda, \gamma)$ есть целые функции двух комплексных переменных λ и γ ([3]). Через $u(x, \lambda)$ обозначим решение задачи Коши

$$\begin{cases} ly = \lambda y, \\ y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Компоненты $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ есть целые функции λ . Рассмотрим мероморфную по λ функцию

$$m(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_2(0, \lambda)}, \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (2.2)$$

Нули функции $m(\lambda)$ есть собственные значения $\lambda_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$ оператора $L(\Omega, \alpha)$, а полюса – собственные значения $\lambda_n(\pi/2)$ оператора $L(\Omega, \pi/2)$. Нетрудно показать, что имеет место тождество

$$\operatorname{Im}\{m(\lambda)\} = \frac{\int_0^\pi |u(x, \lambda)|^2 dx \cdot \cos \alpha}{|u_2(0, \lambda)|^2} \cdot \operatorname{Im} \lambda,$$

откуда следует, что $m(\lambda)$ есть “вещественная” (т.е. $\operatorname{Im}\{m(\lambda)\} = 0$ при $\operatorname{Im} \lambda = 0$) мероморфная функция, переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю. Для таких функций известна следующая (см. [5], стр. 388)

Теорема 2.0. Чтобы некоторая вещественная мероморфная функция $m(\lambda)$ переводила верхнюю полуплоскость в верхнюю, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде

$$m(\lambda) = c \frac{\lambda - a_0}{\lambda - b_0} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{a_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{b_k}\right)^{-1}, \quad (2.3)$$

где $c > 0$ и

$$b_k < a_k < b_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a_{-1} < 0 < b_1. \quad (2.4)$$

В случае функции (2.2) $a_k = \lambda_k(\alpha)$, $b_k = \lambda_k(\pi/2)$ и поэтому, из теоремы 2.0, в частности, следует лемма 1.1. Кроме того, именно в принятой нами нумерации (1.4) и (1.5) верны представление (2.3) и неравенства (2.4).

Рассмотрим также мероморфную функцию

$$\tilde{m}(\lambda) = \frac{u_1(0, \lambda) \cos \alpha + u_2(0, \lambda) \sin \alpha}{u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta}, \quad \text{где } -\pi/2 < \alpha < \beta \leq \pi/2, \quad (2.5)$$

нули которой есть опять $\lambda_n(\alpha)$, а полюса – собственные значения $\lambda_n(\beta)$, $n \in \mathbb{Z}$ оператора $L(\Omega, \beta)$. Из тождества ([4])

$$\operatorname{Im}\{\tilde{m}(\lambda)\} = \frac{\int_0^\pi |u(x, \lambda)|^2 dx \cdot \sin(\beta - \alpha)}{|u_1(0, \lambda) \cos \beta + u_2(0, \lambda) \sin \beta|^2} \cdot \operatorname{Im} \lambda$$

следует, что $\tilde{m}(\lambda)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, для нее имеют место представление (2.3) и неравенства (2.4), где $a_k = \lambda_k(\alpha)$, $b_k = \lambda_k(\beta)$. Отсюда следует лемма 1.2 и неравенства (1.6), из которых следует, что (при нашей нумерации) каждое собственное значение $\lambda_n(\cdot)$ есть строго монотонно убывающая функция на отрезке $(-\pi/2, \pi/2]$.

Из определения $\Phi CЗ$ следует, что она есть строго монотонно убывающая функция на отрезках $(\pi t - \pi/2, \pi t + \pi/2]$, $t \in \mathbb{Z}$, покрывающих действительную ось. Докажем теперь, что определенная нами $\Phi CЗ$ есть аналитическая функция на действительной оси. Для этого мы воспользуемся теоремой о неявной функции в следующей формулировке (см. [6], стр. 166) :

Теорема 2.1. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $F(\lambda, \gamma): U \rightarrow \mathbb{C}$ – аналитическая в некоторой окрестности U точки (λ_0, γ_0) функция, причем

$$\frac{\partial F(\lambda_0, \gamma_0)}{\partial \lambda} \neq 0.$$

Тогда равенство $F(\lambda, \gamma) = F(\lambda_0, \gamma_0)$ определяет единственным образом функцию $\lambda = \lambda(\gamma): V \rightarrow \mathbb{C}$, аналитическую в некоторой окрестности V точки γ_0 и такую, что при $\gamma \in V$ $(\lambda(\gamma), \gamma) \in U$, $\lambda(\gamma_0) = \lambda_0$ и $F(\lambda(\gamma), \gamma) = F(\lambda_0, \gamma_0)$ при всех $\gamma \in V$.

В качестве $F(\lambda, \gamma)$ мы возьмем $F(\lambda, \gamma) = \varphi_1(\pi, \lambda, \gamma)$, которая является целой функцией двух комплексных переменных λ и γ . Собственные значения оператора $L(\Omega, \gamma)$ есть нули (по λ) функции $\varphi_1(\pi, \lambda, \gamma)$. Пусть γ_0 – произвольное действительное число, которое мы представим в виде $\gamma_0 = \alpha_0 - \pi m$, где $\alpha_0 \in (\pi/2, \pi/2]$, $m \in \mathbb{Z}$, и пусть $\lambda_0 = \lambda(\gamma_0) = \lambda(\alpha_0 - \pi m) = \lambda_m(\alpha_0)$ есть значение $\Phi CЗ$ в γ_0 . Тогда $\varphi_1(\pi, \lambda_0, \gamma_0) = \varphi_1(\pi, \lambda_m(\alpha_0), \alpha_0 - \pi m) = 0$, ибо собственная функция

$\varphi(x, \lambda_m(\alpha_0), \alpha_0 - \pi m)$ удовлетворяет краевому условию (1.3). Покажем, что значение производной $\frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda_0, \gamma_0)}{\partial \lambda}$ в точке (λ_0, γ_0) отлично от нуля. Для этого заметим, что для решения $\varphi(x, \lambda, \gamma)$ задачи Коши (2.1) имеет место тождество

$$\frac{\partial \varphi_2(\pi, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} \varphi_1(\pi, \lambda, \gamma) - \frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} \varphi_2(\pi, \lambda, \gamma) = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda, \gamma) + \varphi_2^2(x, \lambda, \gamma)] dx$$

(см., например, [1], стр. 81). Учитывая, что $\varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) = 0$, получаем

$$\frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\varphi_2(\pi, \lambda(\gamma), \gamma)} \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda(\gamma), \gamma) + \varphi_2^2(x, \lambda(\gamma), \gamma)] dx. \quad (2.6)$$

В силу самосопряженности операторов $L(\Omega, \gamma)$ при действительных γ компоненты φ_1 и φ_2 собственных вектор-функций $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)$ можно считать действительными, поэтому $|\varphi|^2 \equiv |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$. Отсюда следует, что квадрат L^2 -нормы

$$a(\gamma) = \int_0^\pi |\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)|^2 dx \quad (2.7)$$

собственной функции $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)$, который обычно называют нормировочной постоянной, совпадает с интегралом в правой части формулы (2.6) и всегда отличен от нуля при $\gamma \in \mathbb{R}$. Очевидно также, что $\varphi_2(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) \neq 0$, ибо иначе, из единственности решения задачи Коши последовало бы (поскольку $\varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) = 0$), что $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma) \equiv 0$, а это противоречит тому, что $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)$ есть собственная функция.

Таким образом, согласно (2.6) значение производной $\frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma)}{\partial \lambda}$ отлично от нуля для любой действительной точки γ . Поэтому, согласно теореме 2.1 существует комплексная окрестность $V \subset \mathbb{C}$ действительной точки γ_0 , в которой определена однозначная аналитическая функция $\lambda(\gamma)$, $\gamma \in V$ такая, что $\lambda(\gamma_0) = \lambda_0$ и $\varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) = 0$ для всех $\gamma \in V$. Поскольку γ_0 — произвольное действительное число, то нами доказана аналитичность $\lambda(\cdot)$ на всей действительной оси. Точнее, существует некоторое открытое множество, содержащее действительную ось, где определена однозначная аналитическая функция $\tilde{\lambda}(\cdot)$, совпадающая с определенной нами ФСЗ при действительных значениях аргумента.

Из непрерывности $\Phi CЗ \lambda(\gamma)$ следует, что при изменении γ на $[-\pi/2, \pi/2]$ эта функция принимает все значения от

$$\lambda(-\pi/2) = \lambda(\pi/2 - \pi) = \lambda_1(\pi/2) > 0 \quad \text{до} \quad \lambda(\pi/2) = \lambda_0(\pi/2) \leq 0.$$

Следовательно, существует точка $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2]$ такая, что $\lambda(\alpha_0) = 0$. Таким образом, доказаны утверждения 1) и 2) теоремы 1.

Известно ([7], [8]), что если $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, то для собственных значений операторов $L(\Omega, \alpha)$ имеет место асимптотика :

$$\lambda_n(\alpha) = n - \frac{\alpha}{\pi} + c_n(\alpha), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2(\alpha) < \infty \quad (2.8)$$

для любого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$. В терминах $\Phi CЗ$ эту асимптотику можно записать в виде $\lambda(\gamma) = -\frac{\gamma}{\pi} + c(\gamma)$, где $c(\gamma)$ – аналитическая в каждой действительной точке функция ($c(\alpha - \pi n) \stackrel{\text{def}}{=} c_n(\alpha)$), обладающая свойством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2(\alpha) < \infty \quad \text{для любого} \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Для доказательства представления (1.8), во-первых, заметим, что для любых действительных γ и β имеет место тождество

$$[\lambda(\gamma) - \lambda(\beta)] \cdot (\varphi(\cdot, \lambda(\gamma), \gamma), \varphi(\cdot, \lambda(\beta), \beta)) = \sin(\beta - \gamma), \quad (2.9)$$

где (φ, ψ) означает скалярное произведение.

Разделив обе стороны (2.9) на $\gamma - \beta$ и устремив $\beta \rightarrow \gamma$, получаем

$$\frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} \cdot \|\varphi(\cdot, \lambda(\gamma), \gamma)\|^2 = -1,$$

т.е. (см. (2.7))

$$\frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{a(\gamma)}. \quad (2.10)$$

С другой стороны, хорошо известно ([7], [4]) представление нормировочных постоянных $a_n(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} a(\alpha - \pi n)$ через два спектра :

$$\frac{1}{a_n(\alpha)} = \frac{\lambda_n(\beta) - \lambda_n(\alpha)}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)} \quad (2.11)$$

для любых β таких, что $-\pi/2 < \alpha < \beta \leq \pi/2$. Из определения $\lambda(\alpha - \pi n) = \lambda_n(\alpha)$ $\Phi CЗ$ и равенств (2.10) и (2.11) следует представление (1.8). Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть α и α_1 — произвольные точки из $(-\pi/2, \pi/2]$, $-\pi/2 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi/2$.

Рассмотрим последовательности

$$\mu_k = \lambda(\alpha - \pi k), \quad \nu_k = \lambda(\alpha_1 - \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из строгой убываемости функции $\lambda(\cdot)$ следует, что последовательности $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ перемежаются, т.е.

$$\dots < \nu_k < \mu_k < \nu_{k+1} < \mu_{k+1} < \dots, \quad (3.1)$$

и имеют асимптотики (см. свойство 3) :

$$\begin{cases} \mu_k = k - \frac{\alpha}{\pi} + c(\alpha - \pi k) = k - \frac{\alpha}{\pi} + c_k(\alpha), & \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(\alpha) < \infty, \\ \nu_k = k - \frac{\alpha_1}{\pi} + c(\alpha_1 - \pi k) = k - \frac{\alpha_1}{\pi} + c_k(\alpha_1), & \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(\alpha_1) < \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

Известна следующая ([7], теорема 4.2, [8])

Теорема 3.1. Чтобы последовательности $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ были спектрами $L(\Omega, \alpha)$ и $L(\Omega, \alpha_1)$, соответственно, с матрицей $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, где $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы они перемежались и имели асимптотики (3.2).

Из этой теоремы следует, что существует матрица $\Omega_1(x)$ с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что

$$\lambda_k(\Omega_1, \alpha) = \mu_k \quad \text{и} \quad \lambda_k(\Omega_1, \alpha_1) = \nu_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом (см. [7], теорема 2.1) величины $a_n(\Omega_1, \alpha)$, определенные равенствами

$$\frac{1}{a_n(\Omega_1, \alpha)} = \frac{\nu_n - \mu_n}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\nu_k - \mu_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются нормировочными постоянными оператора $L(\Omega_1, \alpha)$, т.е. квадратами норм собственных функций $\varphi(x, \mu_n, \alpha)$, являющихся решениями задач Коши

$$\begin{cases} \left\{ B \frac{d}{dx} + \Omega_1(x) \right\} y = \mu_n y, \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Обозначим через $\{\lambda_k(\pi/2)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ последовательность значений $\lambda_k(\pi/2) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\pi/2 - \pi k)$ функции $\lambda(\cdot)$. Из свойства 1 следует, что эта последовательность будет удовлетворять неравенствам (1.4), а последовательность $\lambda_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\alpha - \pi k)$ — неравенствам (1.5) для любого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Если взять вместо α_1 любую другую точку α_2 такую, что $\alpha < \alpha_2 \leq \pi/2$, то, совершенно аналогично, последовательности

$$\mu_k = \lambda(\alpha - \pi k) \quad \text{и} \quad \xi_k = \lambda(\alpha_2 - \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

будут перемежаться ($\dots < \xi_k < \mu_k < \xi_{k+1} < \mu_{k+1} < \dots$) и ξ_k будут иметь асимптотику

$$\xi_k = k - \frac{\alpha_2}{\pi} + c_k(\alpha_2), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(\alpha_2) < \infty.$$

Согласно упомянутой выше теореме 3.1 существует каноническая матрица $\Omega_2(x)$ с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что

$$\mu_k = \lambda_k(\Omega_2, \alpha), \quad \xi_k = \lambda_k(\Omega_2, \alpha_2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом величины $a_n(\Omega_2, \alpha)$, определяемые равенствами

$$\frac{1}{a_n(\Omega_2, \alpha)} = \frac{\xi_n - \mu_n}{\sin(\alpha - \alpha_2)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k - \mu_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются нормировочными постоянными оператора $L(\Omega_2, \alpha)$. В силу свойства 4 получаем, что $a_n(\Omega_2, \alpha) = a_n(\Omega_1, \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, имеем

$$\lambda_n(\Omega_1, \alpha) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha), \quad a_n(\Omega_1, \alpha) = a_n(\Omega_2, \alpha), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Согласно теореме В. А. Марченко ([10], [11]) отсюда следует, что $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду.

Аналогичная ситуация будет иметь место для любой пары (α, α_n) такой, что $-\pi/2 < \alpha < \alpha_n \leq \pi/2$. Если выбрать последовательность α_n сходящейся к α , то из вышеприведенных рассуждений следует, что существует единственная каноническая матрица Ω с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что

$$\lambda_k(\Omega, \alpha_n) = \lambda(\alpha_n - \pi k)$$

для любых $k \in \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Отсюда будет следовать, что $\Phi C3$ семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha), \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$ совпадает с функцией $\lambda(\cdot)$ на сходящихся последовательностях $\alpha_n - \pi k \rightarrow \alpha - \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку обе эти функции аналитические (свойство 2), то совпадают всюду, где они определены.

Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The concept of an eigenvalue function of a family of Dirac operators is introduced. Necessary and sufficient conditions ensuring that a function belongs to this class are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, Наука, М., 1970.
2. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения, Наукова Думка, Киев, 1977.
3. Э. А. Котдингтон, Н. Левинсон, "Теория обыкновенных дифференциальных уравнений", М., 1955.
4. Т. Н. Арутюнян, "Обратная задача для системы Дирака на полуоси с дискретным спектром", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 20, № 4, стр. 245 – 268, 1985.
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
6. Ю. Н. Бибиков, Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1981.
7. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, "Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам", Труды летней школы по спектральной теории операторов и теории представлений групп, Элм, Баку, стр. 46 — 71, 1975.
8. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, I", Теория функций, функциональный анализ и их приложения, т. 30, Харьков, стр. 90 – 101, 1978.
9. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, II", Теория функций, функциональный анализ и их приложения, т. 31, Харьков, стр. 102 – 109, 1979.
10. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы дифференциальных операторов второго порядка, I", Труды ММО, т. 1, 1951.
11. Т. Н. Арутюнян, "Изоспектральные операторы Дирака", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 2, стр. 1 – 10, 1994.

О ПОСТРОЕНИИ ЦЕЛЫХ И КВАЗИЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, РАВНОМЕРНО УБЫВАЮЩИХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ, I

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

В настоящей работе рассматривается задача о наиболее быстром убывании целой функции в угловой области $|\arg z| \leq \alpha/2$ для случая $0 < \alpha < \pi$. В отличие от теоремы Н. У. Аракеляна не делается каких-либо утверждений относительно расположения нулей целых функций. Целью является выяснение вопроса о существенности условия $p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, а также вывод условий, при которых оставались бы в силе аналоги результатов Аракеляна для целых и квазицелых функций. Случай $\pi \leq \alpha < 2\pi$ рассматривается нами в другой работе того же названия, но с индексом II.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования целых функций со свойствами наибо́льшего убывания в угловых областях были начаты М. В. Келдышем [1] (см. приведенную в [2] библиографию). Исследование доведено до конца Н. У. Аракелян, установившим следующий результат (см. [2], стр. 189).

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max \left\{ \frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \right\}$, и пусть $p(r)$, $r \geq 1$ — неотрицательная функция такая, что

$$p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad \int_1^\infty r^{-(\pi/\alpha+1)} p(r) dr \leq k < \infty. \quad (1)$$

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ порядка ρ и нормального типа, все нули которой лежат вне угла $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ и которая удовлетворяет неравенствам

$$\exp(-k|z|^{\pi/\alpha}) < |\omega_\alpha(z)| < \exp(-[Re z^{\pi/\alpha} + p(|z|)]), \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geq 1.$$

(2)

Указанный порядок или тип нельзя понизить.

По данному вопросу известна также теорема К. Н. Хачатряна [3]:

Теорема. Пусть $0 < \alpha < 2\pi$, и пусть $p(r)$, $r \geq 1$ — положительная неубывающая функция такая, что

$$\int_1^\infty r^{-(\pi/\alpha+1)} p(r) dr < \infty \quad \text{и} \quad \rho^* = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln p(r)}{\ln r}. \quad (3)$$

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ порядка $\rho = \max \left[\frac{\pi}{2\pi - \alpha}, \rho^* \right]$ (и нормального типа в случае $\rho < \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$), удовлетворяющая в угле $\Delta = |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ неравенствам

$$\exp \left(-c|z|^{\pi/\alpha} \int_{|z|}^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha} + 1\right)} p(t) dt \right) < |\omega_\alpha(z)| < \exp(-p(|z|)), \quad |z| \geq 1. \quad (4)$$

Указанный порядок (и тип в случае $\rho < \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$) нельзя понизить.

Замечание 1. В случае $\pi < \alpha < 2\pi$ утверждения приведенных выше теорем сравнимы, чего нельзя сказать для $0 < \alpha \leq \pi$.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные задачи для случая $0 < \alpha < \pi$, но, в отличие от теоремы Аракеяна, без какого-либо утверждения относительно расположения нулей.

Мы хотим выяснить существенность условия $p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ в (1), а также вывести условия, при которых оставались бы в силе аналогии результатов Аракеяна для целых и квазичеслых функций.

Пусть задана последовательность чисел $\{\lambda_k\}$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} = \infty, \quad (5)$$

и пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \quad (6)$$

— заданная функция, определенная на римановой поверхности логарифмической функции $\text{Ln} z$.

Если радиус сходимости ряда (6) равен бесконечности, то его сумма $f(z)$ будет называться квазицелой функцией. Для таких функций порядок и тип можно определить так же как это делается для целых функций, а именно

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln |a_n|^{-1/\lambda_n}}, \quad (\sigma \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{1/\rho} |a_n|^{1/\lambda_n}. \quad (7)$$

Как для целых, так и для квазицелых функций мы устанавливаем аналоги вышеуказанных теорем (без условия $p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и какого-либо утверждения относительно расположения нулей) при условии, что плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ не выше плотности $\{n\}$.

Наши методы в корне отличаются от методов [1] — [3] и основаны на изучении ненулевого решения уравнения Ватсона для угловой области, что позволяет нам представить искомые целые или квазицелые функции в явном виде.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Мы будем использовать следующие теоремы А и В С. Мандельброята (см. [5]), стр. 24–29 и [6], стр. 14) :

Теорема А. Пусть $\{m_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Если существует функция $0 \neq \varphi(x) \in C^\infty[0, 1]$, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq m_n, \quad \varphi^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

то существует также функция $\psi(x)$, $x \in [0, 1]$, удовлетворяющая условиям

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1) \psi(x) \neq 0; & 2) \psi(x) \geq 0; & 3) \psi(x) = \psi(1-x); \\ 4) \psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(1) = 0; & 5) |\psi^{(n)}(x)| \leq (8e)^n m_n \end{array} \right. \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

Напомним (см. [6], стр. 12–15), что функция $A(t)$, $t \geq 0$ называется функцией следа последовательности $\{\alpha_n\}$ относительно $\omega(t)$, если

$$\sup_{n \leq \omega} (nt - \alpha_n) = A(t). \quad (10)$$

Последовательность $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условию (10), называется производящей последовательностью функции следа $A(t)$.

Теорема В. Среди всех производящих последовательностей функции следа $A(t)$ есть такая последовательность $\{a_n\}$, которая определяется равенством

$$a_n = \sup_{\omega(t) \geq n} [nt - A(t)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

и является наименьшей в том смысле, что последовательность $\{a_n\}$ является регуляризацией относительно $\omega(t)$ для всякой производящей последовательности $\{\alpha_n\}$ функции $A(t)$.

Примем $\omega(t) = \infty$, $t > 0$, $t = \ln x$

$$A(t) = A(\ln x) = \begin{cases} \ln T(x), & x \geq 1 \\ \ln T(1), & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad a_n = \ln m_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m_n \geq 1.$$

Тогда из (11) получим

$$\ln m_n = \sup_{r \geq 0} [n \ln r - \ln T(r)], \quad \text{т.е.} \quad m_n = \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)}, \quad (11')$$

где $\{m_n\}$ обладает свойством минимальности в смысле теоремы В.

Из объединения теорем А и В следует

Теорема С. Из сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr \quad (12)$$

следует существование функции $0 \neq \varphi \in C^\infty[u, 1]$, $0 < u < 1$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi^{(n)}(u) = \varphi^{(n)}(1) = 0; \quad |\varphi^{(n)}(x)| \leq c H^n m_n, \quad x \in [u, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

В самом деле, из сходимости интеграла (12) и теоремы В следует, что последовательность $\{m_n\}$ из (11') определяет неквазианалитический класс функций $C_m[u, 1]$, где $0 < u < 1$, $m = \{m_n\}$. Поэтому к функции $\varphi(x)$ применима теорема А.

Приведем теперь аналог теоремы С в терминах обобщенных производных типа введенных в [7].

Пусть задана последовательность чисел

$$\beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots \quad (14)$$

По определению (см. [7]) обобщенными производными функции $\varphi(x)$ являются

$$\varphi^{[0]}(x) = \varphi(x)_\beta, x > 0; \varphi^{[k+1]}(x)_\beta = \left(\varphi^{[k]}(x)_\beta / x^{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} \right)', k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Нам здесь понадобится более частный вид последовательности (14), а именно

$$\beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots, \quad \beta_{k+1} - \beta_k \geq h > 0, \quad 0 < \beta_n - c n < l < \infty, \quad (14')$$

где числа $c > 0$ и $l > 0$ не зависят от n .

Теорема 1. Пусть монотонно возрастающая функция $T(r)$ такая, что сходится интеграл (12). Тогда существует функция $0 \neq \varphi \in C^\infty[u, 1]$, где $0 < u < 1$, такая, что

$$\varphi^{[n]}(u)_\beta = \varphi^{[n]}(1)_\beta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\varphi^{[n]}(x)_\beta \leq c^{n+1} m_n, \quad x \in [u, 1], \quad (17)$$

где функции $\varphi^{[n]}(x)_\beta, n = 0, 1, 2, \dots$ определены в (15), а последовательность $\{m_n\}$ определена в (11').

Замечание 2. Заметим (см. [6], стр. 10 – 14), что в (17) последовательность $\{m_n\}$ может быть заменена на $\{m_n^c\}$, где $\{m_n^c\}$ – выпуклая регуляризация $\{m_n\}$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства равенств (16) следует заметить, что для функции $\varphi(x)$ из теоремы А имеем

$$\varphi^{[n]}(t)_\beta = \sum_{k=0}^n b_k(t) \varphi^{(k)}(t), \quad (18)$$

где $\varphi^{(k)}(x)$ – обычные производные $\varphi(x)$, а $b_k(t), t \in [u, 1], k = \overline{0, n}$ – ограниченные функции, не зависящие от $\varphi(x)$.

Для доказательства неравенств (17) представим функцию $\varphi(x)$ из теоремы С формулой Тейлора в левой окрестности точки $x = 1$. Будем иметь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_1^x \varphi^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = t \int_1^x \varphi^{(n+1)}(t) t^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(k/t)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \nu)} dt, \quad (19)$$

где контур C охватывает окрестности точек $0, -1, -2, \dots, -n$.

Путем последовательного обобщенного дифференцирования в (19) в смысле (15) получаем

$$\varphi^{[n+1]}(x)_\beta = Q_n(x) \varphi^{(n+1)}(x) x^{n-\beta_n} \pm \int_1^x \varphi^{(n+1)}(t) t^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \beta_\nu - 1)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \nu)} t^\zeta x^{-\zeta-\beta_n} d\zeta \right) dt, \quad (20)$$

где последовательность $\{\beta_\nu\}$ определена в (11'), $|Q_n(x)| \leq c_0 c_1^n$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ не зависят от n и x . Полагая $\zeta - 1 = \zeta'$ и $C = C_n = l_n \cup L_n$, где $l_n = l_n(\zeta = \delta + iy, -cn < y < cn)$, $c > 1$, $\delta > 0$, $L_n = L_n(|\zeta| = cn, \operatorname{Re} \zeta \geq \delta)$, получаем

$$|\varphi^{[n+1]}(x)_\beta| \leq c_1^{n+1} m_{n+1}, \quad x \in [u, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17')$$

где $c_1 > 0$ зависит от u ($0 < u < 1$) и не зависит от n и x .

2. ФУНКЦИИ $\dot{\omega}(t, \alpha)$ И $\dot{\omega}(t, \beta)$

Рассмотрим последовательности чисел $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ такие, что $\beta_\nu \geq \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$

и

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad \sum \frac{1}{\alpha_\nu} = \infty, \quad \sum \frac{1}{\alpha_\nu^2} < \infty, \quad (21)$$

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots, \quad \sum \frac{1}{\beta_\nu} = \infty. \quad (22)$$

Обозначим

$$\lambda_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu}, \quad \lambda'_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\beta_\nu}, \quad (23)$$

и положим

$$\sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(\lambda_n - \lambda'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n < \infty. \quad (24)$$

Определим функции $\dot{\omega}(t, \alpha)$:

$$\dot{\omega}(t, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\omega}_n(t, \alpha), \quad (25)$$

$$\dot{\omega}_n(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \tilde{e}_{1,\infty}(\zeta, \alpha)}, \quad t > 0, \sigma > 0, \quad (26)$$

где

$$\tilde{e}_{k,n}(\zeta, \alpha) = \prod_{\nu=k}^n \left(1 + \frac{\zeta}{\alpha_\nu} \right) \exp(-\zeta/\alpha_\nu), \quad \alpha = \{\alpha_\nu\}. \quad (27)$$

Теорема 2. Пусть $\{\alpha_\nu\}$ и $\{\beta_\nu\}$ удовлетворяют условиям (21) и (22). Тогда справедливо представление

$$\dot{\omega}(t, \alpha) = \int_0^{\sigma_0} \dot{\omega}\left(\frac{t}{t_0}, \beta\right) dg(t_0), \quad (28)$$

где функция $g(t_0)$ монотонно возрастает в $[0, \sigma_0]$ и

$$g(\sigma_0) - g(0) = V_0^{\sigma_0} g = 1.$$

Теорема 2 вытекает из следующих трех лемм.

Лемма 2.1. В условиях теоремы 2 справедливо равенство

$$\dot{\omega}_n(t, \alpha) = \int_{t \exp(-\lambda_{n-1})}^{\exp \sigma_n} \dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta) \dot{\omega}_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \beta\right) \frac{dt_0}{t_0}, \quad \sigma_n = \lambda_n - \lambda'_{n+1}, \quad (29)$$

где $t \in (0, \exp(\lambda_n))$ и

$$\dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} t_0^{-z} dz, \quad \sigma > 0. \quad (30)$$

Доказательство. Воспользуемся следующим равенством (см. [8], стр. 62) :

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right) = \int_t^u G_n\left(\frac{t_0}{u}, \alpha, \beta\right) \omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \beta\right) \frac{dt_0}{t_0}, \quad 0 \leq t \leq u \quad (31)$$

где

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(t/u)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^n (1 + \zeta/\alpha_\nu)}, \quad (32)$$

$$G_n\left(\frac{t_0}{u}, \alpha, \beta\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1 + z/\beta_\nu)}{\prod_{\nu=1}^n (1 + z/\alpha_\nu)} \left(\frac{t_0}{u}\right)^{-z} dt. \quad (33)$$

Положим $u = \exp(\lambda_n)$, $0 \leq t \leq u$ и обозначим

$$\omega_n(t \exp(-\lambda_n), \alpha) = \dot{\omega}_n(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta \dot{e}_{1,n}(\zeta, \alpha)}, \quad (34)$$

где

$$\dot{e}_{1,n}(\zeta, \alpha) = \prod_{\nu=1}^n (1 + \zeta/\alpha_\nu) \exp(-\zeta/\alpha_\nu). \quad (35)$$

После замены переменной $t_0 = t'_0 \exp(\lambda'_{n-1})$ из (31) получим

$$\dot{\omega}_n(t, \alpha) = \int_{t \exp(-\lambda_{n-1})}^{\exp \sigma_n} \dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta) \dot{\omega}_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \beta\right) \frac{dt_0}{t_0}, \quad (31')$$

где $\dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta)$ определена в (30), а $\sigma_n = \exp(\lambda_n - \lambda'_{n-1})$.

Этим, равенство (31') согласно (34) и (35) превращается в равенство (29) леммы 2.1, и доказательство завершено.

Лемма 2.2. В условиях теоремы 2 функция $g_n(t)$, где

$$dg_n(t_0) = \dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta) \frac{dt_0}{t_0},$$

монотонно возрастает на $[0, \sigma_0]$, притом

$$g_n(\sigma'_0) - g_n(0+) = 1, \quad \sigma'_0 \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(\lambda_n - \lambda'_{n-1}). \quad (36)$$

Доказательство. То, что $g(t_0)$ монотонно возрастает, следует из условия $\alpha_\nu \leq \beta_\nu$ и $\dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta) \geq 0$ (см. [8], стр. 82). Далее, при $\delta \in (0, \sigma_0)$ и $\sigma > 0$ имеем

$$\begin{aligned} g_n(\sigma'_0) - g_n(\delta) &= \int_{\delta}^{\sigma'_0} \dot{G}_n(t_0, \alpha, \beta) \frac{dt_0}{t_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{(\sigma'_0)^{-z} - \delta^{-z}}{-z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{\delta^{-z}}{z} dz, \end{aligned}$$

так как

$$\mathcal{J}_n(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{(\sigma'_0)^{-z}}{-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{(\frac{\sigma'_0}{\sigma_n})^{-z}}{-z} dz,$$

$$e_{1,n}(z, \alpha) = \prod_{\nu=1}^n (1 + z/\alpha_\nu),$$

где $\sigma'_0 \geq \sigma_0 \geq \sigma_n = \exp(\lambda_n - \lambda'_{n-1})$, и контур интегрирования можно замкнуть в правой полуплоскости, где подынтегральная функция не имеет особенностей и поэтому

$$\mathcal{J}_n(\sigma'_0) = \mathcal{J}_n(\sigma_0) = 0, \quad \text{при } \sigma'_0 \geq \sigma_0.$$

Легко проверить, что для $-\alpha_1 < \kappa < 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(\delta) &= \text{Res}_{z=0} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{\delta^{-z}}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{\delta^{-z}}{z} dz = \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{\dot{e}_{1,n-1}(z, \beta)}{\dot{e}_{1,n}(z, \alpha)} \frac{\delta^{-z}}{z} dz = 1 + o(\delta^{-\kappa}) = 1 + o(\delta^{|\kappa|}), \quad \delta \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (37')$$

Следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{J}_n(\delta) = 1$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Последовательность $\{\dot{\omega}_n(t, \beta)\}$ равномерно сходится к функции

$$\dot{\omega}(t, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\omega}_n(t, \beta), \quad t \in [0, \infty),$$

если только $\sum \frac{1}{\beta_\nu} = \infty$, $\sum \frac{1}{\beta_\nu^2} < \infty$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\dot{\omega}_n(0, \beta) = \dot{\omega}(0, \beta) = 1$, а при $t > 0$ и $0 < A < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} |\dot{\omega}_n(t, \beta) - \dot{\omega}(t, \beta)| &< \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iA}^{\sigma+iA} \left| 1 - \frac{1}{\dot{e}_{n+1, \infty}(\zeta, \beta)} \right| \left| \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \dot{e}_{1, n}(\zeta, \beta)} \right| + \\ &+ \frac{t^{-\sigma}}{2\pi i} \int_{\sigma+iA}^{\sigma+i\infty} \left| \frac{1}{\dot{e}_{1, n}(\zeta, \beta)} + \frac{1}{\dot{e}_{1, \infty}(\zeta, \beta)} \right| \left| \frac{d\zeta}{\zeta} \right| + \\ &+ \frac{t^{-\sigma}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-iA} \left| \frac{1}{\dot{e}_{1, n}(\zeta, \beta)} + \frac{1}{\dot{e}_{1, \infty}(\zeta, \beta)} \right| \left| \frac{d\zeta}{\zeta} \right|. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2 вытекает из лемм 2.1 — 2.3 •

3. УСЛОВИЯ КВАЗИЦЕЛОСТИ ФУНКЦИИ $\dot{\omega}(x, \alpha)$

В работе [9] (стр. 1198 — 1200) доказано, что для последовательности $\{\alpha_n\}$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n \geq h > 0, \quad \alpha_n < cn, \quad (37'')$$

функция (26) квазицелая и имеет представление

$$\dot{\omega}(x, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha_n}, \quad a_n = -\frac{1}{2\tilde{\Gamma}(\alpha_n, \alpha)} \prod_{n \neq \nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}\right), \quad \tilde{\Gamma}(\alpha_n, \alpha) = \frac{1}{\zeta \dot{e}_{1, \infty}(\zeta, \alpha)}. \quad (25')$$

Порядок ρ этой функции конечен, если только

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_n}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu}} < \infty.$$

Для точного определения порядка ρ требуется некоторое усиление теоремы 2 ([9]):

Теорема 3. Для функции

$$\tilde{\Gamma}(x, \alpha) = \frac{1}{x \dot{e}_{1, \infty}(x, \alpha)}, \quad x > 0$$

справедливы неравенства

$$\exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} - C_1 x \right) \leq x \tilde{\Gamma}(x, \alpha) \leq \exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} + C_2 x \right), \quad (38)$$

где числа C_1 и C_2 не зависят от x .

Доказательство. Второе неравенство в (38) вытекает из оценок (см. [9], доказательство теоремы 2)

$$\begin{aligned} 0 < x \tilde{\Gamma}(x, \alpha) &= \exp \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t dt}{\alpha_\nu (t + \alpha_\nu)} \right) \leq \\ &\leq \exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} + x^2 \sum_{\alpha_\nu > x} \frac{1}{\alpha_\nu^2} \right) < \exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} + C_2 x \right). \end{aligned}$$

Для доказательства первого заметим, что

$$\begin{aligned} x \tilde{\Gamma}(x, \alpha) &= \exp \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t dt}{\alpha_\nu (t + \alpha_\nu)} \right) \geq \exp \left(\sum_{\alpha_\nu \leq x} \int_0^x \frac{t dt}{\alpha_\nu (t + \alpha_\nu)} \right) = \\ &= \exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} - \ln \prod_{\alpha_\nu \leq x} \frac{x + \alpha_\nu}{\alpha_\nu} \right) \geq \exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} - \ln \prod_{\nu=1}^{n(x)} \frac{[2x+1]}{\alpha_\nu} \right), \end{aligned}$$

где $n(x)$ — числовая функция последовательности $\{\alpha_\nu\}$. Согласно (37') имеем

$n(x) = O(x)$, $x \rightarrow \infty$ и

$$\prod_{\nu=1}^{n(x)} \left(\frac{[2x+1]}{\alpha_\nu} \right) \leq h_1^{n(x)} \prod_{\nu=1}^{n(x)} \left(\frac{[2x+1]}{\nu} \right) \leq \exp(C_1 x), \quad C_1 > 0.$$

Следовательно

$$x \tilde{\Gamma}(x, \alpha) \geq \exp \left(x \sum_{\alpha_\nu \leq x} \frac{1}{\alpha_\nu} - C_1 x \right).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 1. Порядок ρ квазицелой функции (26) определяется как

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_n}{\sum_{\alpha_\nu \leq \alpha_n} \frac{1}{\alpha_\nu}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_n}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu}}. \quad (39)$$

Доказательство. Имеем

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_n}{\ln |a_n|^{-1/\alpha_n}},$$

где a_n определены в (25'). Так как $\prod_{n \neq \nu=1}^{\infty} (1 - \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}) = o(\tilde{\Gamma}(\alpha_n, \alpha))$, то получаем

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_n}{\ln |\alpha_n|^{-1/\alpha_n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_n}{\sum_{\nu=1}^n 1/\alpha_\nu}.$$

Замечание 3. В случае конечного ρ тип функции (25') также окажется конечным, и его значение может быть точно определено только при достаточной регулярности последовательности $\alpha = \{\alpha_n\}$. Например, функция (25') будет нормального типа, если $0 \leq n\rho' - \alpha_n \leq 1$, $n = 1, 2, \dots, \rho' > 1$.

§3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 4. Пусть $\rho \geq 1$ ($\rho = \frac{\pi}{\alpha} \geq 1$), и пусть для монотонно возрастающей функции $T_*(r)$, $r > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\rho}} dr. \quad (40)$$

Тогда для любых $\rho' \geq \rho$ и последовательности чисел $\{\alpha'_n\}$, где

$$0 < \alpha'_n \leq \rho' n, \quad n\rho' - \alpha'_n \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \alpha'_0 = 0, \quad (41)$$

существует целая (если α'_n — целые числа) или квазипцелая (если α'_n — произвольные числа) функция

$$0 \neq f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\alpha'_n} \quad (42)$$

порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющая условию

$$|f(z)| \leq \frac{\exp(-C_0 \operatorname{Re} z^\rho)}{T_*(|z|^{\rho'/\rho})}, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho'}, \quad (43)$$

где числа $\{a_n\}$ определяются в явном виде

$$C_0 = C(\sigma_0), \quad \sigma_0 = \exp \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha'_\nu} - \frac{1}{\rho'\nu} \right) \right) < \infty. \quad (44)$$

Доказательство. Обозначим

$$T(r^\rho) = T_*(r). \quad (45)$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\rho}} dr = \int_0^\infty \frac{\ln T(r^\rho)}{r^{1+\rho}} dr = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{(1+\rho)/\rho}} r^{(1-\rho)/\rho} dr = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr,$$

то из (40) следует сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr. \quad (40')$$

Обозначим

$$m_n = \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)} \quad (T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}, \quad r > 0). \quad (46)$$

Из сходимости интеграла (40') следует сходимость ряда

$$\sum_{n \geq 0} \frac{m_n^c}{m_{n+1}^c}, \quad (47)$$

где $\{m_n^c\}$ – выпуклая регуляризация определенной в (46) последовательности $\{m_n\}$. Составим теперь функцию

$$f_1(z) = \int_u^1 \dot{\omega}(zt, \alpha') \varphi(t) dt, \quad (48)$$

где последовательность $\alpha' = \{\alpha'_\nu\}$ удовлетворяет условиям (41), функция $\varphi(t)$ согласно (47) – условиям теоремы 1. Докажем, что при удобно подобранной постоянной $C > 0$ функция $f_1(Cz)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4.

Нам следует доказать, что

1) $f_1(Cz)$ – целая или квазипцелая функция порядка $\rho' \geq \rho$ и нормального типа.

2) $f_1(Cz)$ удовлетворяет неравенству (43).

Согласно следствию 1 и (41) для функции $\dot{\omega}(z, \alpha')$, определенной в (26), имеем

$$\rho_\omega = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha'_n}{\sum_{\nu=1}^n 1/\alpha'_\nu} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\rho'n) + O(1)}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\rho'\nu} + O(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho' \ln n}{\sum_{\nu=1}^n 1/\nu} = \rho'.$$

Это означает, что (см. [9]) функция

$$\dot{\omega}(t, \alpha') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \tilde{e}_{1,\infty}(\zeta, \alpha')} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\alpha'_n}, \quad (49)$$

где $\alpha' = \{\alpha'_\nu\}$, определена в (41) и

$$a_n = \left(-e \prod_{n \neq \nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha'_n}{\alpha'_\nu} \right) \exp \left(\frac{\alpha'_n}{\alpha'_\nu} \right) \right)^{-1} \quad (50)$$

— целая или квазицелая функция порядка ρ' и нормального типа σ , который определяется из равенства

$$(\sigma \rho')^{1/\rho'} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{1/\rho'} |a_n|^{1/\alpha'_n}.$$

Очевидно, что теми же свойствами обладает функция

$$f_1(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^{\alpha'_k}, \quad (48')$$

где

$$C_0 = \int_u^1 \varphi(t) dt, \quad C_k = a_k \int_u^1 t^{\alpha'_k} \varphi(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а числа $\{a_k\}$ определены в (50). Этим доказано утверждение 1).

Для доказательства 2) проинтегрируем по частям интеграл (48) n раз, при этом каждый раз будем создавать обобщенные производные функции $\varphi(t)$ относительно последовательности $\{\beta_n = n\rho'\}$ в смысле (15).

Полагая $\beta_n - \beta_{n-1} - 1 = \rho' - 1$ и $z = \operatorname{Re} z > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_u^1 \dot{\omega}(zt, \alpha') t^{\rho'-1} \frac{\varphi(t)}{t^{\rho'-1}} dt = \\ &= \frac{\varphi(t)}{t^{\rho'-1}} \left(\int_t^\infty \dot{\omega}(t\tau, \alpha') \tau^{\rho'-1} d\tau \right) \Big|_{t=u}^1 + \int_u^1 \omega^{[-1]}(z, t, \alpha') \varphi^{[1]}(t)_{\beta} dt, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\omega^{[-1]}(z, t, \alpha') = - \int_t^\infty \dot{\omega}(z\tau, \alpha') \tau^{\rho'-1} d\tau, \quad (52)$$

откуда согласно теореме 1 получаем

$$f_1(z) = \int_u^1 \omega^{[-1]}(z, t, \alpha') \varphi^{[1]}(t)_{\beta} dt. \quad (51')$$

Повторяя этот процесс n раз, получим

$$f_1(z) = \int_u^1 \omega^{[-n]}(z, t, \alpha') \varphi^{[n]}(t)_{\beta} dt, \quad (51'')$$

где

$$\omega^{[-n]}(z, t, \alpha') = (-1)^n \int_t^\infty \tau_n^{\rho'-1} d\tau_n \int_{\tau_n}^\infty \tau_{n-1}^{\rho'-1} d\tau_{n-1} \dots \int_{\tau_2}^\infty \dot{\omega}(z\tau, \alpha') \tau_1^{\rho'-1} d\tau_1. \quad (52')$$

Если теперь в теореме 2 примем $0 < \alpha_n = \alpha'_n \leq \beta_n = \rho'n$, $\beta_n - \alpha'_n \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то будем иметь

$$\dot{\omega}(z\tau, \alpha') = \int_0^{\sigma_0} \dot{\omega}\left(\frac{z\tau}{t_0}, \beta\right) dg(t_0), \quad (28')$$

где

$$\sigma_0 = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha'_\nu} - \frac{1}{\beta_\nu}\right)\right) < \infty, \quad V_0^{\sigma_0} g = g(\sigma_0) - g(0) = 1.$$

Согласно равенству (28')

$$\omega^{[-n]}(z, t, \alpha') = \int_0^{\sigma_0} \omega^{[-n]}\left(\frac{z}{t_0}, t, \beta\right) dg(t_0). \quad (53)$$

С другой стороны (см. [10], стр. 511–512)

$$\dot{\omega}(x, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\rho'\nu}\right) \exp\left(-\frac{\zeta}{\rho'\nu}\right)} = \exp\left(-x^{\rho'} e^{-C_e}\right),$$

где C_e – постоянная Эйлера. Это значит, что для любого $\rho' \geq \rho$

$$-\int_t^{\infty} \tau^{\rho'-1} \exp(-\tau^{\rho'} C_e) d\tau = \frac{1}{\rho' C_e} \int_t^{\infty} d\left(\exp(-C_e \tau^{\rho'})\right) = \frac{\exp(-C_e t^{\rho'})}{\rho' C_e}.$$

Поэтому из (53) уже для комплексных z из области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ и $t \in [u, 1]$ будем иметь

$$\omega^{[-n]}(z, t, \alpha') = \frac{\exp(nC_e)}{\rho'^n z^{n\rho'}} \int_0^{\sigma_0} \exp\left(-\left(\frac{zt}{t_0}\right)^{\rho'} \exp(-C_e)\right) t_0^{n\rho'} dg(t_0). \quad (53')$$

Ясно, что (53') остается в силе и тогда, когда $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$, и поэтому получаем неравенство

$$|\omega^{[-n]}(z, t, \alpha')| \leq \frac{C_*^n}{|z|^{n\rho'}} \exp\left(\exp(-C_e) \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{\rho'} \operatorname{Re} z^{\rho'}\right), \quad (53'')$$

где $C_* = e^{C_0 \sigma_0^{\rho'}}$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $\rho' \geq \rho \geq 1$.

Возвращаясь к (51''), согласно (53'') получаем

$$\begin{aligned} |f_1(z)| &\leq \frac{C_*^n}{|z|^{n\rho'}} \int_u^1 |\varphi^{[n]}(t)_\beta| \exp\left(-\exp(-C_e) \left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{\rho'} \operatorname{Re} z^{\rho'}\right) dt \leq \\ &\leq \frac{C_*^n m_n}{|z|^{n\rho'}} \exp\left(-\exp(-C_e) \left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^{\rho'} \operatorname{Re} z^{\rho'}\right), \end{aligned}$$

если только $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho'}$, где постоянная $C_* > 0$ не зависит от n и z .

Далее, согласно теореме 1 получаем

$$|f_1(z)| \leq \frac{C_*^n m_n}{|z|^{\rho' n}} \exp(-C_1 \operatorname{Re} z^{\rho'}),$$

где $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $|z| \geq 1$, $C_1 = \exp(-C_e) \left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^{\rho'}$, $C_* = e^{C_*} \sigma_0^{\rho'}$.

Значит для $f(z) = f_1(C_*^{-1/\rho'} z)$ имеем

$$|f(z)| = |f_1(C_*^{-1/\rho'} z)| \leq \frac{m_n}{|z|^{\rho' n}} \exp(-C_1 C_*^{-1} \operatorname{Re} z^{\rho'}),$$

где $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $|z| \geq 1$, $C_1 = \exp(-C_e) \sigma_0^{-\rho'} u^{\rho'}$, $C_* = e^{C_*} \sigma_0^{\rho'}$.

Так как последние неравенства имеют место для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то они остаются в силе и при

$$\inf_{n \geq 0} \frac{m_n}{|z|^{\rho' n}} = \left(\sup \frac{|z^{\rho'}|^n}{m_n} \right)^{-1} = \frac{1}{T(|z|^{\rho'})}.$$

Поэтому

$$|f(z)| \leq \frac{\exp(-C' \operatorname{Re} z^{\rho'})}{T_*(|z|^{\rho'/\rho})}, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho},$$

где $C' > 0$ — постоянная, не зависящая от z . Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Для $\rho = \frac{\pi}{\alpha} \geq 1$ теоремой 4 устанавливается связь между раствором угла, где целая или квазичеслая функция убывает с наибольшей быстротой, и характером лакуарности его разложения в виде ряда (42).

Замечание 5. Условие (40) теоремы 4 не подлежит улучшению, потому что из решения проблемы Ватсона для угловой области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ (здесь $\alpha = \pi/\rho \leq \pi$) следует, что функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям

$$|f(z)| \leq \frac{1}{T_*(|z|)}, \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2\rho}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\rho}} dr = \int_0^\infty r^{-(\frac{\pi}{\alpha} + 1)} \ln[T_*(r)] dr = \infty$$

равняется нулю тождественно.

ABSTRACT. The present paper considers the problem of maximal rate of decrease of an entire function in an angular domain $|\arg z| \leq \alpha/2$

for the case $0 < \alpha < \pi$. In contrast to N. U. Arakelian's theorem, no a priori assumption concerning positions of zeros of entire functions is done. The purpose is to clarify whether the condition $p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ is essential and to derive conditions under which analogs of Arakelian's results remain valid for entire and quasi-entire functions. The case $\pi \leq \alpha < 2\pi$ will be considered in the second paper under the same title.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми функциями", ДАН СССР, т. 47, № 4, стр. 243 — 245, 1945.
2. Н. У. Аракелян, "Построение целых функций, равномерно убывающих в угле", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 1, № 3, стр. 162 — 191, 1966.
3. К. Н. Хачатрян, "Построение целых функций минимального порядка, убывающих в угле с заданной скоростью", Изв. АН АрмССР, т. 11, № 1, стр. 34 — 55, 1976.
4. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, Наука, М., 1968.
5. С. Мандельброт, Квазианалитические классы функций, ОНТИ, М., 1937.
6. С. Мандельброт, Примаыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955.
7. Г. В. Бадалян, "Обобщенные факториальные ряды", Сообщ. ин-та матем. и мех. АН АрмССР, т. 50, стр. 13 — 64, 1950.
8. Г. В. Бадалян, Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций, Наука, М., 1990.
9. Г. В. Бадалян, "О некоторых свойствах единственности целых и квазиполых функций, представляемых лакунарными рядами", Сиб. мат. журнал, т. 12, № 6, стр. 1192 — 1210, 1971.
10. Г. В. Бадалян, "Применение преобразования типа свертки к теории обобщенной проблемы моментов Стилттьеса", Изв. АН СССР, Математика, т. 31, стр. 491 — 530, 1967.

2 июля 1996

Ереванский государственный университет

ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

В статье рассматриваются классы обобщенных аналитических функций такие, как пространства Харди, определенные в терминах рядов Фурье (пространства Харди-Хельсона-Лауденслэга H^p) и пространства Харди, связанные с аналитическими почти периодическими функциями (пространства Харди-Бора H^p). Целью является распространение теоремы Фату о радиальных пределах на перечисленные выше пространства, а также на классы обобщенных гармонических функций (пространства Безикевича B^p и пространства типа Степанова S^p).

§0. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, пространство Харди в единичном круге можно определить двумя способами. Первый : те функции из L^p на единичной окружности, у которых отрицательные коэффициенты Фурье равны нулю, и второй : те аналитические функции в единичном круге, сужения которых на окружности (с центром в начале координат) равномерно ограничены в L^p -норме. При переходе к обобщенным аналитическим функциям эти два определения приводят к разным не эквивалентным классам (см. [1] – [12]). Пространства Харди, определенные в терминах рядов Фурье, были исследованы в известных работах Г. Хельсона и Д. Лауденслэга [2], [3]. В дальнейшем такие пространства будем называть пространствами Харди-Хельсона-Лауденслэга (H^p). Второе определение приводит к пространствам Харди, связанным с аналитическими почти периодическими функциями, т.е. к пространствам Харди-Бора (H^p).

Аналогичная ситуация возникает и при переходе к гармоническим функци-

ям. И тут возникают два класса обобщенных гармонических функций. Это пространства Безиковича (B^p) и пространства типа Степанова (S^p). Данная статья в основном посвящена распространению теоремы Фату о радиальных пределах на перечисленные выше пространства. В первых трех параграфах исследуются радиальные пределы пространств HB^p и S^p , $p \geq 1$. Предлагаемый здесь подход позволяет дать законченный результат о структуре пространств функций, порожденных этими пределами (см. [4], [5]). Отмечается, что пространства HB^p и S^p также являются банаховыми алгебрами относительно произведения Адамара. Полное описание идеалов этих алгебр дается в §4. В §5 исследуются пространства HL^p и B^p и для этих пространств доказывается аналог теоремы Фату.

§1. ОБОБЩЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть G – компактная абелева группа, и $\hat{G}$ – группа ее характеров. Предположим, $\hat{G}$ изоморфна аддитивной подгруппе Γ группы вещественных чисел $\mathbb{R}$. Для $a \in \Gamma$ пусть $\chi^a \in G$ – соответствующий характер. Каждую функцию $f \in \mathcal{L}^1(G, d\sigma)$, где σ – нормированная мера Хаара группы G , можно представить в виде формального ряда Фурье

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^f \chi^a$$

с коэффициентами Фурье

$$c_a^f = \int_G f \chi^{-a} d\sigma = \langle f, \chi^{-a} \rangle.$$

Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f \neq 0$, называется спектром функции f ($\text{Sp} f$).

Пусть $C(G)$ – банахова алгебра всех непрерывных функций на G с нормой $\|f\|_\infty = \sup_G |f|$. Обозначим через A подалгебру тех функций из $C(G)$, спектр которых содержится в $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Тогда A – максимальная алгебра Дирихле, и ее пространство максимальных идеалов есть компакт Δ , полученный из декартова произведения $G \times [0, 1]$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$. В дальнейшем 0 будет обозначать эту точку. Множество Δ – полугруппа с единицей $\alpha_0 \cdot 1$ (α_0 – единица группы G) и нулем 0 . Произведение элементов $\xi = \alpha\tau$ и $\eta = \beta\rho$ из Δ есть $\xi\eta = (\alpha\beta)(\tau\rho)$. Группу G можно отождествлять с множеством $G \times \{1\}$, а отрезок $(0, 1]$ – с $\{\alpha_0\} \times (0, 1]$.

Везде в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что Γ не изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, так как в противном случае круг вопросов, рассматриваемых в данной работе, хорошо известен.

Обозначим через $C(\Delta^0)$, где $\Delta^0 = \Delta \setminus G$, пространство всех непрерывных функций на Δ^0 . Для $r > 1$ отображение $f \rightarrow f_r$, $f_r(\alpha\rho) = f(\alpha r\rho)$ задает гомоморфизм на $C(\Delta^0)$. Сужение этого гомоморфизма на преобразование Гельфанда $\hat{A}$ алгебры A порождает инъективный гомоморфизм на $\hat{A}$.

Определение 1.1. Функция $f \in C(\Delta^0)$ называется обобщенной аналитической функцией, если $f_r \in \hat{A}$ для всех $r < 1$.

Пространство всех обобщенных аналитических функций будем обозначать через $\mathcal{V}(\Delta^0)$.

Для $\xi \in \Delta^0$ пусть m_ξ – представляющая мера этой точки для алгебры A . Так как A – алгебра Дирихле, то m_ξ – единственная представляющая мера точки ξ . В [1] показано, что свертка $m_\xi * m_\eta$ совпадает с мерой $m_{\xi\eta}$, т.е. для любой функции $f \in C(G)$

$$\iint_{G \times G} f(\alpha\beta) dm_\xi(\alpha) dm_\eta(\beta) = \int_G f(\alpha) dm_{\xi\eta}(\alpha). \quad (1.1)$$

Определение 1.2. Функция $f \in C(\Delta^0)$ называется обобщенной аналитической функцией или просто гармонической, если для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$ выполняется равенство

$$f_{r_1}(\alpha) = \int_G f_{r_2}(\alpha\beta) dm_r(\beta) = (f_{r_2} * m_r)(\alpha), \quad (1.2)$$

где $m_r = m_{\alpha_0 r}$, $r = r_1/r_2$.

Каждый характер χ^a группы G можно непрерывно расширить до гармонической функции φ^a , полагая

$$\varphi^a(\alpha r) = \chi^a(\alpha) r^{|a|}. \quad (1.3)$$

В дальнейшем конечные комбинации $\sum c_n \varphi^{a_n}$ будем называть обобщенными гармоническими полиномами.

Пусть $S(\Delta^0)$ – пространство обобщенных гармонических функций. Очевидно, $\mathcal{V}(\Delta^0) \subset S(\Delta^0)$.

Лемма 1.1. Пусть $f \in S(\Delta^0)$. Если $0 < r_1 < r_2 < 1$, то

$$\sup_G |f_{r_1}(\alpha)| \leq \sup_G |f_{r_2}(\alpha)|.$$

Доказательство. Полагая $r = r_1/r_2$, из (1.2) имеем

$$\sup_G |f_{r_1}(\alpha)| \leq \int_G \sup_\alpha |f_{r_2}(\alpha\beta)| dm_r(\beta) \leq \sup_G |f_{r_2}(\alpha)|$$

(m_r – вероятностная мера) •

Воспользовавшись равенством (1.2), нетрудно проверить, что $S(\Delta^0) = S_{\mathbf{R}}(\Delta^0) + iS_{\mathbf{I}}(\Delta^0)$, где $S_{\mathbf{R}}(\Delta^0)$ – пространство всех вещественных гармонических функций.

Пусть $Cr(\Delta)$ – пространство всех непрерывных функций на Δ , гармонических в Δ^0 .

Лемма 1.2. Сужение $Cr(\Delta)$ на G есть $C(G)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ – семейство всех гармонических полиномов. Очевидно, $\mathcal{P} \subset Cr(\Delta)$ и для всех $p \in \mathcal{P}$ справедливо $\sup_G |p| = \sup_\Delta |p|$ (лемма 1.1). Из непрерывности (1.2) в $\sup_\Delta$ -норме следует, что замыкание $\mathcal{P}$ в $\sup_\Delta$ -норме содержится в $Cr(\Delta)$. Сужение $\mathcal{P}$ на G плотно в $C(G)$, следовательно, $Cr(\Delta)|_G = C(G)$.

Функцию $f \in C(\Delta^0)$ можно разложить на $G_r = G \times \{r\}$ в ряд

$$f_r(\alpha) \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^f(r) \chi^a(\alpha) r^{|a|},$$

где $f_r(\alpha) = f(\alpha r)$, а коэффициенты

$$c_a^f(r) = \frac{1}{r^{|a|}} \int_G f_r(\alpha) \chi^{-a}(\alpha) d\sigma(\alpha),$$

вообще говоря, не зависят от r .

Отметим, что $c_a^f(r)$ – непрерывная функция на r .

Лемма 1.3. Функция $f \in C(\Delta^0)$ гармоническая тогда и только тогда, когда для всех $a \in \Gamma$ коэффициенты $c_a^f(r)$ не зависят от r .

Доказательство. Пусть $f \in S(\Delta^0)$. Для $0 < r_1 < r_2 < 1$ и $r = r_1/r_2$ имеем

$$\begin{aligned} c_a^f(r_1) &= \frac{1}{r_1^{|a|}} \int_G \left(\int_G f_{r_2}(\alpha\beta) dm_r(\beta) \right) \chi^{-a}(\alpha) d\sigma(\alpha) = \\ &= \frac{1}{r_1^{|a|}} \int_G \left(\int_G f_{r_2}(\alpha\beta) \chi^{-a}(\alpha) d\sigma(\alpha) \right) dm_r(\beta) = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{|a|} c_a^f(r_2) \int_G \chi^a(\beta) dm_r(\beta). \end{aligned}$$

Так как последний интеграл равен значению функции φ^a в точке $\alpha_0 r$, т.е. числу $(r_1/r_2)^{|a|}$, то $c_a^f(r_1) = c_a^f(r_2) = c_a^f$. Обратно, пусть $f \in C(\Delta^0)$ — такая функция, что c_a^f не зависит от r для всех $a \in \Gamma$. Зафиксируем $\rho < 1$, и пусть $g = f_\rho$. Тогда $g \in C(\Delta)$ и $c_a^g = c_a^f \rho^{|a|}$ для всех $a \in \Gamma$. По лемме 1.2 найдется такая функция $h \in Cr(\Delta)$, что $g = h$ на G . Отсюда $c_a^h = c_a^g$ для всех $a \in \Gamma$. Следовательно, в силу единственности ряда Фурье, $h = g$, т.е. $g \in S(\Delta^0)$. Поэтому для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$ справедливо

$$f_{r_1}(\alpha\rho) = \int_G f_{r_2}(\alpha\beta\rho) dm_r(\beta), \quad r = r_1/r_2.$$

Устремляя $\rho \rightarrow 1$, получим $f \in S(\Delta^0)$ •

Пусть теперь $\rho = e^{-1}$ ($e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$). Обозначим через $S^p(\Delta^0)$, $p < \infty$ семейство тех функций $f \in S(\Delta^0)$, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{r < 1} \sup_{\alpha \in G} \left(\int_G |f_r(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\beta) \right)^{1/p} < \infty. \quad (1.4)$$

Если $p = \infty$, то

$$S^\infty(\Delta^0) = \left\{ f \in S(\Delta^0): \|f\|_\infty = \sup_{\xi \in \Delta^0} |f(\xi)| < \infty \right\}. \quad (1.5)$$

Отметим, что

$$S^p(\Delta^0) = S_{\mathbb{R}}^p(\Delta^0) + iS_{\mathbb{R}}^p(\Delta^0),$$

где $S_{\mathbb{R}}^p(\Delta^0)$ — пространство вещественных функций из $S^p(\Delta^0)$.

Лемма 1.4. Если $0 < r_1 < r_2 < 1$ и $f \in S(\Delta^0)$, то при $p \geq 1$ выполняется неравенство

$$\sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_1}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha) \leq \sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_2}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $r = r_1/r_2$. Воспользовавшись неравенством Гёльдера и теоремой Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_1}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha) &= \sup_{\beta \in G} \int_G \left| \int_G f_{r_2}(\alpha\beta\gamma) dm_r(\gamma) \right|^p dm_\rho(\alpha) \leq \\ &\leq \sup_{\beta \in G} \iint_{G \times G} |f_{r_2}(\alpha\beta\gamma)|^p dm_\rho(\alpha) dm_r(\gamma) \leq \sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_2}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha). \end{aligned}$$

Приведем три утверждения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 1.1 (см. [6]). $S^p(\Delta^0)$ – банахово пространство в норме $\|\cdot\|_p$.

Обозначим $HB^p(\Delta^0) = S^p(\Delta^0) \cap \mathcal{V}(\Delta^0)$. Пусть $M(G)$ – пространство всех регулярных борелевских мер на группе G .

Теорема 1.2 ([4]). Пусть $f \in S^p(\Delta^0)$, $1 \leq p \leq \infty$ или $f \in HB^p(\Delta^0)$. Тогда

- а) предел $f^*(\alpha) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\alpha)$ существует по мере m_ξ для всех $\xi \in \Delta^0$;
- б) $f^*(\alpha) \in \bigcap_{\xi \in \Delta^0} L^p(G, dm_\xi)$;
- в) если $1 < p < \infty$, то для всех $\xi \in \Delta^0$

$$\|f_r\|_{L^p(G, dm_\xi)} \rightarrow \|f^*\|_{L^p(G, dm_\xi)} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1;$$

- г) при $r \rightarrow 1$

$$\|f_r\|_{L^\infty(G, dm_\xi)} \rightarrow \|f^*\|_{L^\infty(G, dm_\xi)};$$

- д) если $p = 1$, то последовательность мер $f_r m_r$ сходится при $r \rightarrow 1$ в слабой топологии к некоторой мере $\mu \in M(G)$ и $\|\mu\|_\infty = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r m_r\|_\infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $M(G)$.

Замыкание $Cr(\Delta)$ в норме пространства $S^p(\Delta^0)$ будем обозначать через $Cr^p(\Delta)$.

Теорема 1.3 ([12]). Для всех $1 \leq p \leq \infty$ $C_r^p(\Delta^0)$ – замкнутое собственное подпространство пространства $S^p(\Delta^0)$.

В дальнейшем пространство функций $\left\{f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r : f \in S^p(\Delta^0)\right\}$ будем обозначать через S^p , а пространство $\left\{f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r : f \in C_r^p(\Delta^0)\right\}$ – через Cr^p .

Непосредственным следствием теорем 1.2 и 1.3 является

Теорема 1.4. а) $Cr^p \subset S^p$, $1 < p \leq \infty$;

- б) если $1 \leq p < \infty$, то S^p и C_r^p – банаховы пространства в норме

$$\|f^*\|_p = \sup_{\beta \in G} \left(\int_G |f^*(\beta\alpha)|^p dm_p(\alpha) \right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

§2. ПРОСТРАНСТВА S^p , $1 < p < \infty$

Пусть $L^p(G, dm_p)$ – пространство всех функций, интегрируемых в L^p -норме по мере m_p ($p = e^{-1}$). Обозначим через $L_A^p(G)$, $1 < p < \infty$, семейство всех

тех измеримых функций, которые удовлетворяют следующему условию : для $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$ и $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$, $q = \frac{p}{p-1}$ функция

$$f^g(\beta) = \int_G f(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha) \quad (2.1)$$

непрерывна на G .

Теорема 2.1. $\mathcal{L}_A^p(G)$ – банахово пространство в норме

$$\|f\|_p = \left(\sup_{\beta \in G} \int_G |f(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$. Покажем, что $\|f\|_p < \infty$. Из (2.1) следует, что семейство непрерывных линейных функционалов, F_β , $\beta \in G$, определенных на $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$ формулой

$$F_\beta(g) = \int_G f(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha),$$

удовлетворяет неравенству

$$|F_\beta(g)| \leq C = \sup_G |f^g|.$$

Применяя теорему Банаха–Штейнгауза к семейству функционалов F_β , $\beta \in G$, получим

$$\sup_{\beta} \|F_\beta\|_q^* < \infty, \quad (2.3)$$

где $\|F_\beta\|_q^*$ – норма функционала F_β в пространстве, сопряженном к $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$.

И поскольку

$$\|F_\beta\|_q^* = \left(\int_G |f(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p},$$

из (2.3) следует, что $\|f\|_p < \infty$.

Покажем теперь, что $\mathcal{L}_A^p(G)$ полно в норме (2.1). Пусть $\{f_n\}$ – последовательность Коши функций из $\mathcal{L}_A^p(G)$. Тогда при каждом фиксированном $\beta \in G$ семейство $\{f_n(\beta \alpha)\}$ будет последовательностью Коши в пространстве $\mathcal{L}^p(G, dm_\rho)$. Пусть $f_0(\beta \alpha)$ – предел этой последовательности. Из (2.1) следует, что для любого $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$ последовательность

$$f_n^g(\beta) = \int_G f_n(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha)$$

фундаментальна в $C(G)$. Поэтому функция

$$f_0^g(\beta) = \int_G f_0(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha)$$

непрерывна на G . Отсюда $f_0(\beta) \in \mathcal{L}_A^p(G)$ •

Для $t \in \mathbb{R}$ определим $\alpha_t(a) = e^{iat} \in G$, $a \in \Gamma$. Хорошо известно, что отображение $t \rightarrow \alpha_t$ порождает плотное вложение вещественной оси $\mathbb{R}$ в группу G . Это вложение отображает меру Пуассона

$$\frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (t_0 - t)^2} dt, \quad y > 0 \quad (2.4)$$

в меру m_ξ , где $\xi = \alpha_{t_0} e^{-y}$. В частности, меру m_ρ можно отождествить с мерой $\frac{1}{\pi} \frac{dt}{1+t^2}$ и, следовательно

$$\mathcal{L}^q(G, dm_\rho) = \mathcal{L}^q\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{1+t^2}\right). \quad (2.5)$$

Пусть $K_\rho^\xi(\alpha)$ — производная Радона–Никодима меры m_ξ , где $\xi = \alpha_t e^{-y}$ относительно меры m_ρ . Так как эти меры взаимно абсолютно непрерывны, то $m_\xi = K_\rho^\xi m_\rho$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ линейное многообразие, порожденное функциями K_ρ^ξ , $\xi = \alpha_t e^{-y}$, $t \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

Лемма 2.1. $\mathcal{L}$ плотно в банаховом пространстве $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}^p(G, dm_\rho)$ — такая функция, что

$$\int_G f g dm_\rho = 0$$

для всех $g \in \mathcal{L}$. Отсюда в силу (2.4) и (2.5) для всех $y > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t) \frac{y dt}{y^2 + (t_0 - t)^2} = 0.$$

Так как интеграл Пуассона от ненулевой функции не обращается в нуль, то $f \equiv 0$. Пространство, сопряженное к $\mathcal{L}^q$ есть $\mathcal{L}^p$. Поэтому по теореме о биполярах $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{L}^q$ •

Лемма 2.2. Функцию $f^* \in \mathcal{L}_A^p(G)$ можно расширить до функции $f \in S^p(\Delta^0)$ так, что $f^*(\alpha) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\alpha)$ для почти всех $\alpha \in G$ по мерам m_ξ , $\xi \in \Delta^0$.

Доказательство. Поскольку $m_r = K_r^* m_\rho$ и $K_\rho^* \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$, то из определения пространства $\mathcal{L}_A^p(G)$ следует, что функция

$$f_r(\beta) = \int_G f^*(\beta \alpha) dm_r(\alpha)$$

непрерывна на G . Если $r \rightarrow r_0$, то $K_r^* \rightarrow K_{r_0}^*$ в норме пространства $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$. Отсюда функция $f(\beta r) = f_r(\beta)$ непрерывна на Δ^0 . Подсчитаем коэффициенты $c_a^f(r)$, $a \in \Gamma$:

$$c_a^f(r) = \frac{1}{r|a|} \iint_{G \times G} f^*(\alpha \beta) \chi^{-a}(\beta) d\sigma(\beta) dm_r(\alpha) = \frac{c_a^{f^*}}{r|a|} \int_G \chi^a(\alpha) dm_r(\alpha) = c_a^{f^*}.$$

Воспользовавшись леммой 1.3, получим $f \in S(\Delta^0)$. Покажем, что $f \in S^p(\Delta^0)$.

Действительно

$$\sup_{\substack{r < 1 \\ \beta \in G}} \left(\int_G |f_r(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p} \leq \sup_{\substack{r < 1 \\ \beta \in G}} \left(\int_G \left| \int_G f^*(\beta \alpha \gamma) dm_r(\gamma) \right|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p}.$$

Применив к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера, а затем используя теорему Фубини, получим $\|f\|_p \leq \|f^*\|_p$.

Таким образом, $\mathcal{L}_A^p$ содержится в S^p .

Теорема 2.2. $S^p = \mathcal{L}_A^p(G)$.

Доказательство. Пусть $f^* \in S^p$ и $f \in S^p(\Delta^0)$ — такая функция, что $f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r$.

Для $\xi \in \Delta^0$ функция

$$f_\xi(\beta) = \int_G f^*(\beta \alpha) dm_\xi(\alpha) = \int_G f^*(\beta \alpha) K_\rho^\xi(\alpha) dm_\rho(\alpha) \quad (2.6)$$

непрерывна на G . Очевидно

$$\sup_{\beta \in G} |f_\rho^g(\beta)| = \|f_\rho^g\|_\infty \leq \|f^*\|_p \|g\|_q, \quad (2.7)$$

где

$$f_\rho^g(\beta) = \int_G f^*(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha), \quad g \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho).$$

Так как $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{L}^q(G, dm_p)$, то из (2.6) и (2.7) следует, что f_p^g можно на G равномерно приблизить линейными комбинациями функций f_ξ , $\xi \in \Delta^0$. Поэтому f_p^g — непрерывная функция и, следовательно, $f^* \in \mathcal{L}_a^p(G)$. Теперь, воспользовавшись леммой 2.2, получим $S^p = \mathcal{L}_a^p(G)$.

Определим на $\mathcal{L}_a^p(G)$ слабую топологию. За базу окрестностей функции $f_0 \in \mathcal{L}_a^p(G)$ возьмем множество вида

$$U(f_0; g_1, \dots, g_n, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{L}_a^p(G) : \|f^{g_i} - f_0^{g_i}\|_\infty < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

где $\varepsilon > 0$ и $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$.

Скажем, что сеть $\{f_i\}_I \subset \mathcal{L}_a^p(G)$ слабо сходится, если существует такая функция $f \in \mathcal{L}_a^p(G)$, что для всех $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$ справедливо

$$\lim_I \|f_i^g - f^g\|_\infty = 0.$$

В дальнейшем слабую и равномерную сходимости будем обозначать, соответственно, $f = \omega - \lim_I f_i$ и $f^g = \|\cdot\|_\infty - \lim_I f_i^g$.

Теорема 2.3. Пространство $\mathcal{L}_a^p(G)$ слабо полно, т.е. если сеть $\{f_i^g\}_I$ фундаментальна в $C(G)$ для всех $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$, то найдется такая функция $f_0 \in \mathcal{L}_a^p(G)$, что

$$f_0 = \omega - \lim_I f_i.$$

Доказательство. Пусть K_p^r — производная Радона–Никодима меры m_r относительно m_p . Тогда функции

$$\widehat{f}_i(\beta r) = \int_G f_i(\alpha \beta) K_p^r(\alpha) dm_p(\alpha)$$

принадлежит $S^p(\Delta^0)$. Так как $K_p^r \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$, то предел

$$\widehat{f}_r(\beta) = \widehat{f}(\beta r) = \|\cdot\|_\infty - \lim_I \widehat{f}_i(\beta r) \quad (2.8)$$

существует при каждом фиксированном $r < 1$. Поскольку все $f_i \in S^p(\Delta^0)$, $i \in I$, из (2.8) и леммы 1.4 следует, что $f \in S(\Delta^0)$. Покажем, что $f \in S^p(\Delta^0)$.

Пусть $F: \mathcal{L}^q(G, dm_\rho) \rightarrow C(G)$ – линейный оператор, порожденный сетью f_i , $i \in I$: $F(g) = \|\cdot\|_\infty - \lim_I f_i^g$. Расширим функцию $F(g)$ до функции $\widehat{F}(g) \in Cr(\Delta)$. Согласно лемме 1.1

$$\limsup_I \sup_{\Delta} |\widehat{F}(g) - \widehat{f}_i^g| = \lim_I \|F(g) - f_i^g\|_\infty = 0.$$

Следовательно

$$\|\cdot\|_\infty - \lim_{r \rightarrow 1} \widehat{f}_r^g = \|\cdot\|_\infty - \lim_{r \rightarrow 1} \lim_I (f_i^g)_r = F(g).$$

Применяя снова теорему Банаха–Штейнгауза к семейству непрерывных операторов

$$F_r: \mathcal{L}^q(G, dm_\rho) \rightarrow C(G),$$

где $F_r(g) = \widehat{f}_r^g$, а операторная норма F_r равна $\|f_r\|_p$, получим, что семейство F_r , $r \in (0, 1)$ равномерно ограничено. Пусть E – единичный шар в $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$. Тогда

$$\|F_r\| = \sup_{\beta \in G} \sup_{g \in E} \left| \int_G \widehat{f}_r(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha) \right| = \sup_{\beta \in G} \left| \int_G |\widehat{f}(\beta r)|^p dm_\rho(\alpha) \right|^{1/p} < c,$$

где постоянная c не зависит от r . Поэтому $\widehat{f} \in S^p(\Delta^0)$. Отсюда $f \in S^p$ •

Теорема 2.4. Пространство $C(G)$ слабо плотно в $\mathcal{L}_A^p(G)$.

Доказательство. Если $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$, то $\widehat{f}_r \in C(G)$ и $f = \omega - \lim_{r \rightarrow 1} f_r$ •

Все теоремы данного параграфа имеют аналоги в теории обобщенных аналитических функций.

Пусть НВ^p – множество всех функций $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$ таких, что спектр $S_p f$ содержится в Γ_+ . Используя ту же технику, которая была приведена выше, можно доказать следующее.

Теорема 2.5. а) Пространство НВ^p , $1 < p < \infty$, является слабо замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}_A^p(G)$;

б) НВ^p – банахово пространство в норме

$$\|f\|_p = \sup_{\beta \in G} \left(\int_G |f(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p};$$

в) HB^p совпадает с пространством

$$\left\{ f^* = \|\cdot\|_p - \lim_{r \rightarrow 1} f_r : f \in HB^p(\Delta^0) \right\}.$$

Теорема 2.6. а) Замыкание A в норме $\|\cdot\|_p$ есть собственное подпространство в HB^p ;

б) A слабо плотно в HB^p .

§3. ПРОСТРАНСТВА $S^1(\Delta^0)$

В данном параграфе изучим радиальные пределы функций из $S^1(\Delta^0)$. Для обобщенных гармонических функций существуют два подхода к исследованию этих пределов.

I. Пусть $M(G)$ – пространство всех регулярных борелевских мер на G . Каждую меру $\mu \in M(G)$ можно представить в виде формального ряда Фурье–Стилтьеса

$$\mu \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^\mu \chi^a$$

с коэффициентами Фурье–Стилтьеса

$$c_a^\mu = \int_G \chi^{-a} d\mu.$$

Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^\mu \neq 0$, называется спектром меры μ и обозначается через $S_p \mu$. Заметим, что так как

$$\int_G \chi^a dm_r = r^{|a|}, \quad (3.1)$$

то $S_p m_r = \Gamma$ для всех $0 < r < 1$. Поэтому спектр свертки $\mu_r = \mu * m_r$ совпадает с $S_p \mu$.

Лемма 3.1. Пусть $f \in S^1(\Delta^0)$ и $\mu(\alpha) = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Тогда $\mu * m_r = f_{r\rho}(\alpha) d\sigma(\alpha)$.

Доказательство. Поскольку a -тый коэффициент Фурье–Стилтьеса свертки двух мер равен произведению a -тых коэффициентов сомножителей, то из (3.1) следует, что a -тый коэффициент меры $\mu * m_r$ совпадает с $c_a^f(r\rho)^{|A|}$. Из леммы 1.3 следует, что $c_a^f(r\rho)^{|A|}$ – a -тый коэффициент меры $f_{r\rho}(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Поэтому эти меры равны •

Пусть $S^1(\sigma)$ – семейство тех мер $\mu \in M(G)$, для которых мера $\mu_r = \mu * m_r$ представима в виде $f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$, где $f_r(\alpha) \in C(G)$ и

$$\sup_{\substack{r < 1 \\ \beta \in G}} \int_G |f_r(\alpha)| dm_\rho(\beta) < \infty. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1 (ср. [7]). *Отображение $\mu_r \rightarrow f_r$ порождает взаимно однозначное отображение пространства $S^1(\sigma)$ на $S^1(\Delta^0)$.*

Доказательство. Для фиксированного $f \in S^1(\Delta^0)$ определим семейство мер $\mu_r = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$, $0 < r < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mu_r\|_\infty &= \int_G |f_r(\alpha)| d\sigma(\alpha) = \iint_{G \times G} |f_r(\alpha\beta)| d\sigma(\alpha) dm_\rho(\beta) \leq \\ &\leq \int_G \left(\sup_{r < 1} \int_G |f_r(\alpha\beta)| dm_\rho(\beta) \right) d\sigma(\alpha) = \|f\|_1, \end{aligned}$$

поэтому найдутся последовательность $r_n \rightarrow 1$ и мера $\mu \in M(G)$ такие, что $\mu = \omega^* - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{r_n}$. Из $\mu_r = \mu * m_r = \omega^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{r_n} * m_r) = \|\cdot\|_\infty - \lim_{n \rightarrow \infty} f_r(\alpha r_n) d\sigma(\alpha) = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$, поскольку $f_n \in C(G)$, мы заключаем, что $\mu \in S^1(\sigma)$.

Из единственности ряда Фурье–Стилтьеса и равенства $S_\rho m_r = \Gamma$ следует независимость μ от выбора последовательности $r_n \rightarrow 1$. Пусть теперь $\mu \in S^1(\sigma)$ и $\mu_r = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Покажем, что функция $f(\alpha r) = f_r(\alpha)$ принадлежит $S^1(\Delta^0)$. Так как $\mu * m_r = f_r d\sigma$, то $c_a^\mu r^{|a|} = c_a^{f_r} r^{|a|}$ для всех $a \in \Gamma$. Отсюда, из леммы 1.3 и формулы (3.2) следует $f \in S^1(\Delta^0)$ •

Отметим, что для любого $f \in C(G)$ мера $\mu^f = f d\sigma \in S^1(\sigma)$. Поэтому замыкание $S^1(\sigma)$ в норме пространства $M(G)$ содержит меры вида $g d\sigma$, где $g \in \mathcal{L}^1(G, d\sigma)$. Но не каждую интегрируемую по мере σ функцию можно расширить до гармонической функции на Δ^0 . Отсюда следует, что $S^1(\sigma)$ не замкнуто на $M(G)$.

II. Каждой функции $f \in S^1(\Delta^0)$ поставим в соответствие семейство мер $\mu^f = \{\mu_\beta^f\}_{\beta \in G}$, где

$$\mu_\beta^f = \omega^* - \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\alpha) dm_\rho(\beta^{-1} \alpha)$$

(существование μ_β^f следует из теоремы 1.2 д)). Семейство мер μ^f , $f \in S^1(\Delta^0)$ обозначим через $S^1(m_\rho)$. Очевидно $\mu^f + \mu^g = \mu^{f+g}$.

Теорема 3.2. а) $S^1(m_\rho)$ – банахово пространство в норме

$$\|\mu^f\|_\infty = \sup_{\beta \in G} \|\mu_\beta^f\|_\infty;$$

$$б) \|\mu^f\|_\infty = \|f\|_1.$$

Доказательство. Из теоремы 1.2 д) следует

$$\|\mu_\beta^f\|_\infty = \lim_{r \rightarrow 1} \int_G |f_r(\beta \alpha)| dm_\rho(\alpha).$$

Следовательно, $\|\mu^f\|_\infty = \|f\|_1$ и отображение $\mu^f \rightarrow f$ является взаимно однозначным изометрическим отображением нормированного пространства $S^1(\Delta^0)$.

Отсюда вытекает а) •

Следующая теорема является фактически переформулировкой для обобщенных гармонических функций известной теоремы Фату о поведении гармонических функций в единичном круге.

Теорема 3.3. Пусть $f \in S^1(\Delta^0)$ и $f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r$ (см. теорему 1.2). Тогда

$$а) \mu_\beta^f = f^*(\alpha) dm_\rho(\beta^{-1} \alpha) + \gamma^f,$$

где мера γ^f сингулярна относительно меры $m_\rho(\beta^{-1} \alpha)$;

$$б) f_{\beta r} = (f^* * m_r)(\beta) + (K_r^* * \gamma^f)(\beta), \quad m_r = K_r^* m_\rho.$$

Из нижеприведенного примера следует, что сингулярная мера может по сути быть любой.

Пример. Пусть $2\pi \in \Gamma$ и $K = \{\alpha \in G: \chi^{2\pi}(\alpha) = 1\}$. Очевидно, $\alpha_n \in K$ ($\chi^a(\alpha_n) = e^{ia_n}$). Группа G получается из декартова произведения $K \times [0, 1]$ путем отождествления точки $(\alpha, 1)$ с $(\alpha\alpha_1, 0)$. Изоморфизм $\psi: K \times [0, 1] \rightarrow G$ определяется следующим образом: $\psi(\beta, t) = \beta \alpha_t$. Зафиксируем $\beta_0 \in K$. Пусть $f(\alpha, t)$ – такая функция на $X = K \times [0, 1]$, что а) $f(\beta, 0) = f(\beta, 1) = 0$ для всех $\beta \in K$;

$$б) f(\beta, t) \text{ непрерывен на } X \setminus (\beta_0, 1/2) \text{ и } f(\beta_0, t) = 0 \text{ для всех } t \in [0, 1];$$

$$в) f \geq 0 \text{ и для любой сети } \beta \rightarrow \beta_0, \int_0^1 f(\beta, t) dt \rightarrow 1.$$

Пусть δ_0 – атомарная мера, сосредоточенная в точке $(\beta_0, 1/2)$. Из в) следует, что если $\beta \rightarrow \beta_0$, то

$$\delta_0 = \omega^* - \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \mu(\beta),$$

где $\mu(\beta) = f(\beta, t) dt$. Поэтому функция

$$g(\beta\tau) = (\hat{f} * m_\tau)(\beta) + (K_\rho^\tau * \delta_0)(\beta), \quad m_\tau = K_\rho^\tau m_\rho,$$

где $\hat{f} = f \circ \psi^{-1}$, принадлежит $S^1(\Delta^0)$.

§4. СТРУКТУРА БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ НА $S^p(\Delta^0)$, $1 < p < \infty$

Произведением Адамара функций $f, g \in S^p(\Delta^0)$ называется функция $h = f \times g$, равная $(f \times g)(\alpha\tau) = (f_{\tau_1} * g_{\tau_2})(\alpha)$, где $\tau = \tau_1\tau_2$.

Теорема 4.1 (см. [7]). Для любых $f, g \in S^p(\Delta^0)$, $1 \leq p < \infty$

$$f \times g \in S^p(\Delta^0) \quad \text{и} \quad \|f \times g\|_p \in \|f\|_p \cdot \|g\|_p.$$

Приведем доказательство этой теоремы, которое намного проще, чем в [7].

Доказательство. Поскольку $p \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_G |(f \times g)(\alpha\tau^2)|^p dm_\rho(\alpha) &\leq \iint_{G \times G} |f_\tau(\alpha\beta^{-1}) g_\tau(\beta)|^p d\sigma(\beta) dm_\rho(\alpha) \leq \\ &\leq \int_G |g_\tau(\beta)|^p \left(\int_G |f_\tau(\alpha\beta^{-1})|^p dm_\rho(\alpha) \right) d\sigma(\beta) \leq \|f\|_p^p \int_G |g_\tau(\beta)|^p d\sigma(\beta). \end{aligned}$$

Поскольку m_ρ — вероятностная мера, а мера σ инвариантна, то

$$\int_G |g_\tau(\beta)|^p d\sigma(\beta) \leq \int_G \left(\int_G |g_\tau(\beta\alpha)|^p dm_\rho(\beta) \right) d\sigma(\alpha) \leq \|g\|_p^p.$$

Таким образом, произведение Адамара задает структуру банаховой алгебры на $S^p(\Delta^0)$. Опишем идеалы этой алгебры.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{J}$ — одномерный идеал алгебры $S^p(\Delta^0)$. Тогда найдется $a \in \Gamma$ такое, что $\mathcal{J} = I_a$, где $I_A = \mathcal{C}\varphi^a$.

Доказательство. Можно проверить, что

$$f \times \varphi^a = c_a^f \varphi^a \in \mathcal{J}$$

для всех $f \in \mathcal{J}$ и $a \in \Gamma$. Поэтому конечные линейные комбинации вида

$\sum_{f \in \mathcal{J}} c_a^f \varphi^a$ принадлежат $\mathcal{J}$. Отсюда и из условия $\dim \mathcal{J} = 1$ следует существование единственного $a \in \Gamma$ такого, что $c_A^f \neq 0$ для всех $f \in \mathcal{J}$, $f \neq 0$. Поэтому $\mathcal{J} = \mathcal{C}\varphi^a$.

Пусть I — замкнутый идеал алгебры $S^p(\Delta^0)$. Оболочкой идеала I называется множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f = 0$ для всех $f \in I$.

Теорема 4.2. Между слабо замкнутыми идеалами алгебры $S^p(\Delta^0)$ и подмножествами группы Γ существует взаимно однозначное соответствие.

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}$ – слабо замкнутый идеал алгебры $S^p(\Delta^0)$ и $\text{hull } \mathcal{J}$ – оболочка идеала $\mathcal{J}$. Из леммы 4.1 следует, что если $a \notin \text{hull } \mathcal{J}$, то $I_a \subset \mathcal{J}$. Следовательно, $I = \{f \in Cr(\Delta): Spf \cap \text{hull } \mathcal{J} = \emptyset\}$ содержится в $\mathcal{J}$. Поэтому $\mathcal{J}_1$ – слабое замыкание I в $S^p(\Delta^0)$ – содержится в $\mathcal{J}$. Из определения слабой замкнутости в $S^p(\Delta^0)$ следует, что любую функцию $f \in S^p(\Delta^0)$ можно слабо аппроксимировать гармоническими полиномами p такими, что $Sp(p) \subset Spf$. Поэтому $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$. Обратно, пусть $F \subset \Gamma$ и $I_F = \{f \in S^p(\Delta^0): Spf \cap F = \emptyset\}$. Тогда I_F слабо замкнуто и $\text{hull } I_F = F$. •

Свертка двух функций из $\mathcal{L}^p(G, d\sigma)$ принадлежит $C(G)$. Следовательно, произведение Адамара двух функций из $S^p(\Delta^0)$ принадлежит $Cr(\Delta)$.

Теорема 4.3. $Cr^p(\Delta)$ – минимальный среди замкнутых идеалов в $S^p(\Delta^0)$ такой, что $\text{hull } Cr^p(\Delta) = \emptyset$.

Доказательство. Так как $Cr(\Delta) \subset Cr^p(\Delta)$, то $Cr^p(\Delta)$ – замкнутый идеал в $S^p(\Delta^0)$. Очевидно, $\text{hull } Cr^p(\Delta) = \emptyset$ и $Cr^p(\Delta)$ – минимальный среди замкнутых идеалов, содержащих $Cr(\Delta)$. •

Следствием теорем 4.2 и 4.3 является следующее утверждение.

Следствие 4.1. Пусть I – замкнутый максимальный идеал в $S^p(\Delta^0)$. Тогда либо существует такой элемент $a \in \Gamma$, что $I = \{f \in S^p(\Delta^0): c_a^f = 0\}$, либо I – замкнутая гиперповерхность в $S^p(\Delta^0)$, содержащая $Cr(\Delta^0)$.

Замечание. Поскольку $HB^p(\Delta^0)$ является идеалом в $S^p(\Delta^0)$, то любой идеал алгебры $HB^p(\Delta^0)$ является также идеалом и для $S^p(\Delta^0)$. Поэтому исследование идеалов алгебры $HB^p(\Delta^0)$ можно свести к исследованию тех идеалов из $S^p(\Delta^0)$, оболочка которых содержит $\Gamma_- = \{a \in \Gamma: a < 0\}$.

§5. ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ B^p , $1 \leq p \leq \infty$

Теорема Фату о радиальных пределах гармонических функций может быть отнесена скорее к результату из теории мер, чем к теории функций. Особенно это видно при $p = 1$, когда формулировка теоремы Фату приводится на языке

мер. В данном и в следующем параграфе мы используем именно такой взгляд при изучении пространств HL^p и B^p .

Определение 5.1 Отображение

$$\mu: (0, 1) \mapsto M(G)$$

называется обобщенно гармонической мерой, если для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\mu(r_1) = \mu(r_2) * m_r$, где $r = r_1/r_2$.

Так как оператор свертки является линейным, то пространство всех обобщенных гармонических мер является линейным пространством.

Простейшим примером обобщенной гармонической меры является отображение вида $\mu(r) = \mu_0 * m_r$, где $\mu_0 \in M(G)$. Действительно, если $r = r_1 r_2$, то $m_r = m_{r_1} * m_{r_2}$. Отсюда $\mu(r_1) = \mu(r_2) * m_r$.

Лемма 5.1. Пусть $\mu \in B$. Тогда

а) отображение μ непрерывно в $\|\cdot\|_\infty$ -норме;

б) $\|\mu(r_1)\|_\infty \leq \|\mu(r_2)\|_\infty$ при $r_1 < r_2$.

Доказательство. а) Не теряя общности предположим, что $\mu(r) = \mu_0 * m_r$, где $\mu_0 \in M(G)$. В противном случае, зафиксировав $r_0 \in (0, 1)$, можно рассмотреть гармоническую меру $\nu \in B$ такую, что $\nu(r) = \mu(r_0) * m_r$. Очевидно, $\nu(r) = \mu(r_0 r)$. Пусть $\mu(r) = \mu_0 * m_r$. Поскольку $\lim_{r' \rightarrow r} K_r^r = 1$ по мере m_r (см. (2.4)), то $m_r = \|\cdot\|_\infty - \lim_{r' \rightarrow r} m_{r'}$. Отсюда

$$\lim_{r' \rightarrow r} \|\mu(r') - \mu(r)\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty \lim_{r' \rightarrow r} \|m_{r'} - m_r\|_\infty = 0.$$

б) очевидно •

Если $f \in C(G)$, то $f(\alpha r) = (f * m_r)(\alpha)$ является непрерывной на Δ и гармонической в Δ^0 функцией. Пусть $\mu^f \in B$, где $\mu^f(r) = (f d\sigma) * m_r$. Тогда $\mu^f(r) = (f * m_r)(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Следовательно, обобщенная гармоническая мера μ^f однозначно определяется гармонической функцией $f(\alpha r)$. Отметим, что μ^f продолжается до непрерывного отображения из $[0, 1]$ в $M(G)$.

Лемма 5.2. Пусть формальный ряд Фурье функции $f \in L^1(G, d\sigma)$ равен

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^f \chi^a.$$

Тогда для любого $\tau \in [0, 1]$ существует функция $f_\tau \in L^1(G, d\sigma)$ такая, что

$$а) \text{ ряд Фурье функции } f_\tau \text{ есть } \sum_{a \in \Gamma} c_a^f \chi^a \tau^{|a|};$$

б) f_τ как функция от τ порождает непрерывное отображение из $[0, 1]$ в $L^1(G, d\sigma)$.

Доказательство. Пусть последовательность непрерывных функций $\{f^{(n)}\}_1^\infty$ сходится в L^1 -норме к f . Тогда

$$\mu^f = \|\cdot\|_\infty - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)},$$

где $\mu^{(n)} = f^{(n)} d\sigma$, $\mu^f = f d\sigma$. Из вышесказанного следует, что обобщенная гармоническая мера $\mu^{(n)}: (0, 1) \mapsto M(G)$, $\mu^{(n)}(\tau) = f_\tau^{(n)} d\sigma$, $(f_\tau^{(n)}) = f^{(n)} * m_\tau$ непрерывно продолжается до отображения из $[0, 1]$ в $M(G)$. По теореме 3.2, б) последовательность $\mu^{(n)}(\tau)$ равномерно на $[0, 1]$ сходится в $\|\cdot\|_\infty$ -норме к $\mu^f(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность функций $f_\tau^{(n)}$ равномерно на $[0, 1]$ сходится к некоторой непрерывной функции f_τ на $[0, 1]$ со значениями в $L^1(G, d\sigma)$. Так как $f_1^{(n)} \rightarrow f$, то ряд Фурье функции $f_1^{(n)}$ сходится (покоэффициентно) к ряду функции f . Применяя теперь свойства ряда гармонической функции, получим, что ряд f_τ есть $\sum c_a^f \chi^a \tau^{|a|}$.

Заметим, что $f_0 = c_0^f$.

Следствие 5.1. Пусть $\mu: (0, 1) \mapsto M(G)$ — такая обобщенная гармоническая мера, что $\mu(\tau_0) = f d\sigma$ для некоторого $\tau_0 \in (0, 1)$. Тогда μ расширяется до непрерывного отображения $\mu': [0, 1] \rightarrow M(G)$.

Определение 5.2. Обобщенная гармоническая мера $\mu: (0, 1) \mapsto M(G)$ называется p -гармонической, $p \geq 1$, если

$$а) \mu(\tau) = f_\tau d\sigma, \text{ где } f_\tau \in L^p(G, d\sigma);$$

$$б) \sup_\tau \|f_\tau\|_p < \infty.$$

Пространство p -гармонических мер будем обозначать через B^p . Заметим, что на B^p естественным образом можно распространить свойства пространства L^p .

Теорема 5.1. Пусть $\mu: (0, 1) \rightarrow M(G)$ — p -гармоническая мера. Тогда

а) если $1 < p \leq \infty$, то найдется функция $f \in L^p(G, d\sigma)$ такая, что $\mu(r) = \mu^f * m_r$, где $\mu^f = f d\sigma$ и μ продолжается до непрерывного отображения $\mu': [0, 1] \rightarrow M(G)$;

б) если $p = 1$, то найдется функция $\mu \in M(G)$ такая, что $\mu(r) = \mu_0 * m_r$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться леммой 5.1 и методом доказательства теоремы Фату о радиальных пределах для гармонической функции [14] (стр. 55).

§6. ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ HL^p

Мера $\mu \in M(G)$ называется A -аналитической, если $Sp\mu \subset \Gamma_+$. Пространство A -аналитических мер будем обозначать через M_A . Если Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, то любая мера из M_A абсолютно непрерывна относительно меры σ и ее производная Радона-Никодима принадлежит пространству Харди (теорема Рисса). В случае, когда Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, существуют A -аналитические меры, сингулярные относительно σ .

Теорема 6.1. Пусть $\mu \in M_A$. Предположим, что $\mu(r) = \mu * m_r$ при некотором $r \in (0, 1)$ абсолютно непрерывна относительно нормированной меры Хаара σ группы G . Тогда найдется такая функция $f \in L^1(G, d\sigma)$, что $Spf \subset \Gamma_+$ и $\mu = f d\sigma$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы укажем на одно свойство A -аналитических мер (см. [15]).

Не теряя общности допустим, что $2\pi \in \Gamma$. Пусть $K = \{\alpha \in G: \chi^{2\pi}(\alpha) = 1\}$. Для $t \in \mathbb{R}$ пусть $\alpha_t \in G$ — такой элемент, что $\chi^a(\alpha_t) = e^{iat}$ для всех $a \in \Gamma$. Отображение $t \rightarrow \alpha_t$ является вложением аддитивной группы $\mathbb{R}$ в G . С помощью этого отображения определим гомоморфизм $\Phi: K \times \mathbb{R} \rightarrow G$, $\Phi(\alpha, t) = \alpha \cdot \alpha_t$. Очевидно, ядро Φ есть $\mathcal{F} = \{(\alpha_n, -n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, а фундаментальной областью является $F = K \times [0, 1)$.

В дальнейшем мы будем отождествлять группу G с множеством F . Пусть M — пространство локально конечных мер на $K \times \mathbb{R}$, инвариантных относительно сдвигов элементами группы $\mathcal{F}$. Сужение M на F совпадает с $M(G)$. При этом мера $\gamma \times dt$, где γ — нормированная мера Хаара группы K , переходит в меру σ .

Пусть H^1 – пространство Харди на единичной окружности T . Конформное отображение $\omega(z) = \frac{i-z}{i+z}$ порождает отображение $\mathbb{R}$ на $T \setminus \{1\}$. Обозначим через $\mathcal{H}^1$ пространство тех функций на $\mathbb{R}$, которые можно представить в виде суперпозиции $(f \circ \omega)(t)$, $f \in H^1$. Каждую функцию из $\mathcal{H}^1$ можно расширить (по мере Лебега) до аналитической функции в верхней полуплоскости.

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство мер на $K \times \mathbb{R}$ вида $f(\alpha, t)\nu \times dt$, где

- а) ν – вероятностная мера на K ;
- б) $f(\alpha, t) \in \mathcal{L}^1\left(\nu \times \frac{dt}{1+t^2}\right)$ и при каждом фиксированном $\alpha \in K$ принадлежит $\mathcal{H}^1$ (почти для всех α по мере ν);
- в) мера $f(\alpha, t)\nu \times dt$ принадлежит M ;
- г) меры $|f(\alpha, t)|\nu \times dt$ и $\nu \times dt$ взаимно абсолютно непрерывны.

Из теоремы 3.2 [15] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.1. Пространство M_A совпадает с сужением $\mathcal{H}$ на F .

Лемма 6.2. Пусть $\mu \in M(G)$ – A -аналитическая мера и $\mu' = f(\alpha, t)\nu \times dt \in \mathcal{H}$ – такая мера, что $\mu'|_F = \mu$. Тогда мере $\mu'(\tau) = f_\tau(\alpha, t)\nu \times dt$ соответствует мера $\mu(\tau) = \mu * m_\tau$, где

$$f_\tau(\alpha, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha, x+t) \frac{y_0 dx}{y_0^2 + x^2}, \quad y_0 = -\log \tau.$$

Доказательство. Линейные комбинации мер $\mu = \chi^a d\sigma$, $a \in \Gamma_+$ слабо* плотны в M_A . Оператор свертки сохраняет слабую сходимость. Поэтому лемму достаточно доказать для меры вида $\mu = \chi^a d\sigma$. Этой мере соответствует мера $\mu' = \chi^a(\alpha) e^{iat} \gamma \times dt$ из $\mathcal{H}$. Мере $\mu(\tau) = \mu * m_\tau = \chi^a \tau^{|a|} d\sigma$ будет соответствовать мера $\mu'(\tau) = \chi^a(\alpha) e^{iat} \tau^{|a|} \gamma \times d\sigma$. Очевидно

$$e^{iat} \tau^{|a|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ia(t+x)} \frac{y_0 dx}{y_0^2 + x^2}.$$

Лемма 6.2 доказана.

Заметим, что для любых $\mu \in M_A$ и $a > 0$

$$\int_G \chi^a d\mu = 0,$$

т.е. мера μ ортогональна к идеалу I алгебры A , порожденному характеристиками χ^a , $a > 0$. По теореме 7.7, гл. II из [5] меру μ можно представить в виде

$$\mu = \mu^f + \mu_s,$$

где $\mu^f = f d\sigma$, μ_s сингулярна относительно σ и $\mu^f, \mu_s \in M_A$.

Доказательство теоремы 6.1. Покажем, что если $\mu \in M_A$, μ сингулярна относительно σ и $\mu(r)$ абсолютно непрерывна относительно σ , то $\mu = 0$. Допустим противное. Так как $\mu \in M_A$, то соответствующая ей мера $\mu' \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$\mu' = f(\alpha, t) \nu \times dt,$$

где ν сингулярна относительно γ -нормализованной меры Хаара группы K . Для любого $r \in (0, 1)$ $\mu'(r) = f_r(\alpha, t) \nu \times dt$. Поэтому $\mu'(r)|_F$ сингулярна относительно σ , т.е. мы пришли к противоречию. •

Определение 6.2. Отображение

$$\mu: (0, 1) \rightarrow M_A$$

называется обобщенной аналитической мерой, если $\mu(r_1) = \mu(r_2) * m_r$, где $r_1 < r_2$ и $r = r_1 \cdot r_2$.

Обозначим через HL пространство обобщенных аналитических мер. Пространство обобщенных аналитических мер, являющихся p -гармоническими, обозначим через HL^p .

Теорема 6.2. Пусть $\mu \in HL^p$, $p \geq 1$. Тогда найдется такая мера $\mu_0 \in M_A$, что $\mu(r) = \mu_0 * m_r$, $\mu_0 = f d\sigma$.

Доказательство. При $p > 1$ теорема 6.2 является следствием теоремы 5.1 а), а при $p = 1$ – следствием теоремы 6.1 •

ABSTRACT. The paper considers classes of generalized analytic functions such as : Hardy spaces defined in terms of Fourier series (Hardy–Helson–Lowdenslager or HL^p spaces) and Hardy spaces connected with analytic almost periodic functions (Hardy–Bohr or HB^p). The purpose is to extend Fatou's theorem on radial limits to these spaces as well as to the classes

of generalized harmonic functions (Bezikovitch or B^p and Stepanov type or S^p spaces).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. M. Singer, "Generalized analytic functions", T. A. M. S., vol. 81, pp. 379 — 393, 1956.
2. H. Helson, D. Lowdenslager, "Prediction theory and Fourier series in several variables, I", Acta Math., vol. 99, pp. 165 — 202, 1958.
3. H. Helson, D. Lowdenslager, "Prediction theory and Fourier series in several variables, II", Acta Math., vol. 106, pp. 175 — 213, 1961.
4. K. Hoffman, "Boundary behavior of generalized analytic function", T. A. M. S., vol. 87, pp. 447 — 466, 1958.
5. Т. В. Гамелин, Равномерные алгебры, Мир, М., 1973.
6. J. P. Milaszewicz, "Hardy spaces of almost periodic functions", Ann Scuola Norm, Sup. Pisa, vol. 24, № 4, pp. 401 — 428, 1970.
7. J. P. Milaszewicz, "Cleason part and certain counter examples in the big disc context", Amer. Math. Soc., vol. 45, № 1, pp. 217 — 224, 1974.
8. H. Helson, "Analyticity on compact Abelian groups", In : Algebras in Analysis, Academic Press, New York, pp. 1 — 62, 1975.
9. T. V. Tonev, "The algebra of bounded hyperanalytic functions on the big disc has no corona", Analytic Function (Kozubnik 1979), Lecture Notes in Math., vol. 798, pp. 435 — 438, 1979.
10. P.A. Owens, "A density problem for Hardy spaces of almost periodic functions", Bull. Austral. Math. Soc., vol. 29, pp. 315 — 327, 1984.
11. R. Curto, P. Muhly and J. Xia, "Wiener-Hopf operators and generalized analytic functions", Integral Equations Operator Theory, vol. 8, pp. 650 — 673, 1985.
12. С. А. Григорян, "Об одном свойстве почти периодических аналитических функций", Матем. заметки, т. 45, № 4, стр. 13 — 18, 1989.
13. S. A. Grigorian, T. V. Tonev, "Inductive limits of algebra of generalized analytic functions", Michigan Math. J., vol. 42, pp. 615 — 619, 1995.
14. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
15. С. А. Григорян, "Обобщенные аналитические функции", УМН, т. 49, № 2 (296), стр. 3 — 42, 1994.

18 октября 1996

Институт математики
НАН Армении

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ N-СВЯЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Г. Р. Оганесян, Е. А. Тароян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

Известно, что для линейного гармонического осциллятора отношение энергии к частоте есть адиабатический инвариант. В данной работе найдены новые адиабатические инварианты для обыкновенного линейного дифференциального уравнения порядка $2n$ (n -связанные осцилляторы). Знаменатели этих инвариантов стремятся к нулю, если какая-нибудь разность частот стремится к нулю (резонанс). Установлены оценки изменений рассмотренных инвариантов.

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x(t, \epsilon)$ – решение уравнения линейного гармонического осциллятора

$$D_t^2 x + \omega^2(\epsilon t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $D_t = d/dt$ и $\epsilon > 0$ – произвольный малый параметр. Отношение энергии к частоте

$$J(t, \epsilon) = \frac{[D_t x]^2 + \omega^2 x^2}{2\omega} = \frac{E}{\omega} \quad (1.0)$$

называется *адиабатическим инвариантом*, а полное изменение $J(t, \epsilon)$ определяется как $J(\epsilon) = J(\infty, \epsilon) - J(-\infty, \epsilon)$. В работах [1], [3], [4] показано, что $J(\epsilon) = O(\epsilon^\infty)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, если ω и x удовлетворяют некоторым условиям.

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$D_t^{2n} x + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 D_t^{2(n-k)} x = 0, \quad (1.1)$$

где $D_t = \frac{d}{dt}$, $\omega_m = \omega_m(\epsilon t)$, $m = 1, \dots, n$, а $\epsilon > 0$ – произвольный малый параметр. Всюду ниже будем предполагать, что частоты $\{\omega_m(\tau)\}_{m=1}^n$, где $\tau = \epsilon t$, удовлетворяют следующим условиям :

(i) $\omega_m(\tau) \in C^{2n}(R)$, функции $\omega_m(\tau)$ - положительны и $\omega_m \neq \omega_k$, если $m \neq k$;

(ii) функции $\omega_m(\tau)$ имеют конечные, положительные пределы $\omega_m(\pm\infty) = \omega_m^\pm$ и $\omega_m^\pm \neq \omega_k^\pm$, если $m \neq k$;

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\omega_m^{(k)}(\tau)| d\tau < \infty, \quad k = 1, \dots, 2n.$

Пусть $\varphi_j(t, \varepsilon)$ - некоторые функции, линейно независимые, $2n$ раз непрерывно дифференцируемые по $t \in R$, которые являются двойными асимптотическими решениями уравнения (1.1) вблизи бесконечности, т.е.

$$D_t^{k-1} \psi_j = [1 + \varepsilon \delta_{jk}(t, \varepsilon)] D_t^{k-1} \varphi_j, \quad j, k = 1, \dots, 2n,$$

где $\{\psi_j(t, \varepsilon)\}_{j=1}^{2n}$ - фундаментальная система решений (1.1), $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{jk}(t, \varepsilon) = 0$ и $|\delta_{jk}(t, \varepsilon)| \leq c$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Пусть $W(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}) = \det(D_t^{k-1} \varphi_j)_{k,j=1}^{2n}$ - вронскиан и $x(t, \varepsilon)$ - точное решение уравнения (1.1). Назовем величины

$$I_k(t, x, \varepsilon) = \left| \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, x, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{2n})}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})} \right|^2 + \varepsilon f_k(t, x, \varepsilon)$$

адиабатическими инвариантами уравнения (1.1). Здесь мы предполагаем, что функции $f_k(t, x, \varepsilon)$ для решений x , ограниченных со своими производными $D_t^k x$ $k = 0, \dots, 2n-1$ в $R \times (0, \varepsilon_0)$, удовлетворяют следующим условиям: $\lim_{t \rightarrow \infty} f_k = 0$, $|f_k| \leq c$, где c - абсолютная константа. Взяв

$$\varphi_{12} = \omega^{-1/2} \exp \left[\pm i \int_0^t \omega(\varepsilon s) ds \right],$$

можно получить классическую формулу (1.0) для уравнения осциллятора. Обозначим

$$P_m = D_t^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ m \notin \{i_p\}_{p=1}^k}} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 D_t^{2(n-k-1)},$$

$$K_{mi}(\tau) = \omega_m^2(\tau) - \omega_i^2(\tau); \quad K = \prod_{1 \leq m < i \leq n} K_{mi}, \quad E_m = (P_m(D_t x))^2 + \omega_m^2(P_m x)^2.$$

Можно заметить, что величины E_m - первые интегралы (1.1), т.е. $D_t E_m = 0$ для $\omega_m = \text{const}$. Подставляя в P_m $\tau = \varepsilon t$, получим оператор

$$L_m = \varepsilon^{2n-2} D_\tau^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ m \notin \{i_p\}_{p=1}^k}} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 \varepsilon^{2(n-k-1)} D_\tau^{2(n-k-1)}.$$

В этой статье мы показываем (§3, Теорема 2), что если условия (i) – (iii) выполнены, то величины

$$J_m(t, x, \varepsilon) = \frac{E_m}{\omega_m} \exp \left(2 \int_0^t \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_\tau [\omega_l^2(\tau)]}{K_{ml}(\tau)} d\tau \right), \quad m = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

-адиабатические инварианты (1.1). Также мы показываем, что для решений $x = x(t, \varepsilon)$ уравнения (1.1), ограниченных со своими производными $D_t^k x$, $k = 1, \dots, 2n - 1$ при $t \in (-\infty, \infty)$ и $\varepsilon > 0$, инварианты $J_m(t, x, \varepsilon)$, $m = 1, \dots, n$ и

$$J_0(t, x, \varepsilon) = \frac{J_1 \cdots J_n}{K(0)^2} = \frac{E_1 \cdots E_n}{\omega_1 \cdots \omega_n K^2}$$

удовлетворяют следующим условиям :

1° существуют некоторые константы $C > 0$ и $\varepsilon' > 0$ такие, что

$$|J_k(t_1, x, \varepsilon) - J_k(t_2, x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon \quad (1.3)$$

для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon'$;

$$2^\circ J_k(\varepsilon) = J_k(\infty, x, \varepsilon) - J_k(-\infty, x, \varepsilon) = O(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, k = 0, \dots, n. \quad (1.4)$$

Пример. Для уравнения четвертого порядка

$$D_t^4 x + [\omega_1^2(\varepsilon t) + \omega_2^2(\varepsilon t)] D_t^2 x + \omega_1^2(\varepsilon t) \omega_2^2(\varepsilon t) x = 0 \quad (1.5)$$

имеем

$$J_1(t, x, \varepsilon) = \frac{E_1}{\omega_1} \exp \left(2 \int_0^t \frac{D_t [\omega_2^2(\varepsilon t)]}{K} dt \right), \quad (1.6)$$

$$J_2(t, x, \varepsilon) = \frac{E_2}{\omega_2} \exp \left(-2 \int_0^t \frac{D_t [\omega_1^2(\varepsilon t)]}{K} dt \right), \quad (1.7)$$

$$J_0(t, x, \varepsilon) = \frac{J_1(t, x, \varepsilon) J_2(t, x, \varepsilon)}{K^2(0)} = \frac{E_1 E_2}{\omega_1 \omega_2 K^2}, \quad (1.8)$$

где

$$E_k = (D_t^3 x + \omega_{3-k}^2 D_t x)^2 + \omega_k^2 (D_t^2 x + \omega_{3-k}^2 x)^2, \quad K = \omega_1^2 - \omega_2^2.$$

§2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$Lu = D_\tau^{2n}u + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 \varepsilon^{-2k} D_\tau^{2(n-k)}u = 0, \quad (2.1)$$

где $\tau = \varepsilon t$ и $u(\tau, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)$. Решения этого уравнения выражаются через корни $\pm(i\omega_m)/\varepsilon$ соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^{2n} + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 \varepsilon^{-2k} \lambda^{2(n-k)} = 0.$$

В силу обобщения асимптотической теоремы Левинсона ([7], Теорема 2) из (i) – (iii) следует, что для $\tau \in [T^+, \infty)$ существуют решения $\{u_j^+(\tau, \varepsilon)\}_{j=1}^{2n} \in C_r^{2n}([T^+, \infty))$ уравнения (2.1), представимые в виде

$$D_\tau^{k-1}u_j^+ = D_\tau^{k-1}\tilde{u}_j[1 + h_{jk}^+(\tau, \varepsilon)], \quad 1 \leq j, k \leq 2n,$$

где при $m = 1, \dots, n$

$$\tilde{u}_{2m-1} = \omega_m^{-1/2} \exp \int_0^\tau \left(\frac{i\omega_m(t)}{\varepsilon} - \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_t[\omega_m^2(t)]}{K_{ml}(t)} \right) dt, \quad \tilde{u}_{2m} = \bar{\tilde{u}}_{2m-1}.$$

Функции $h_{jk}^+(\tau, \varepsilon)$ для некоторого $c > 0$ удовлетворяют оценке

$$c|h_{jk}^+(\tau, \varepsilon)| \leq \max_{1 \leq s, q \leq 2n} \left\{ \exp \int_\tau^\infty |\Phi_s^{2n} L \tilde{u}_q(t) W^{-1}(t, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n})| dt \right\} - 1.$$

Здесь $W(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n}) = \det \Phi$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & \dots & \tilde{u}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_\tau^{2n-1}\tilde{u}_1 & \dots & D_\tau^{2n-1}\tilde{u}_{2n} \end{pmatrix}$$

и Φ_s^{2n} – миноры матрицы Φ , полученные вычеркиванием его $2n$ -ой строки и s -го столбца. Проверим, что из (i) – (iii) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} D_\tau^k \omega_m(\tau) = 0, \quad k = 1, \dots, 2n-1. \quad (2.2)$$

Действительно, так как

$$D_\tau \omega_1 = \int_a^\tau D_s^2 \omega_1(s) ds + D_\tau \omega_1(a),$$

то пределы $D_\tau \omega_1(\pm\infty)$ конечны. С другой стороны, существует $\int_{-\infty}^{\infty} D_s \omega_1 ds$. Следовательно, $D_\tau \omega_1(\pm\infty) = 0$ (см. [8]). Теми же рассуждениями завершим доказательство (2.2).

Используя (4.2), прямыми вычислениями получим

$$K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n}) = (-2i)^n + \varepsilon \rho(\tau, \varepsilon),$$

$$|L\tilde{u}_q| \leq \frac{C}{\varepsilon^{2n-2}}, \quad |\Phi_s^{2n}| \leq \frac{C}{\varepsilon^{(n-1)(2n-1)}},$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Следовательно решения $\{u_j^+\}_{j=1}^{2n}$ примут вид

$$D_\tau^{k-1} u_j^+ = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + \varepsilon \rho_{jk}^+(\tau, \varepsilon)], \quad 1 \leq j, k \leq 2n, \quad (2.3)$$

где $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \rho_{jk}^+(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_{jk}^+(\tau, \varepsilon)| \leq C$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in [T^+, \infty)$.

Также существуют решения $\{u_j^-\}_{j=1}^{2n} \in C^{2n}((-\infty, T^-])$ уравнения (2.1), которые при $\tau \in (-\infty, T^-]$ могут быть представлены в виде

$$D_\tau^{k-1} u_j^- = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + \varepsilon \rho_{jk}^-(\tau, \varepsilon)], \quad 1 \leq j, k \leq 2n, \quad (2.3')$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \rho_{jk}^-(\tau, \varepsilon) = 0, \quad |\rho_{jk}^-(\tau, \varepsilon)| \leq C(T)$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in (-\infty, T^-]$. Предполагая u решением уравнения (2.1) при $[T^-, T^+]$ определим функции σ_j формулами

$$D_\tau^{k-1} u = \sum_{j=1}^{2n} \sigma_j D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Отсюда получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} D_\tau \sigma_j D_\tau^{m-1} \tilde{u}_j &= 0, \quad m = 1, \dots, 2n-1, \\ \sum_{j=1}^{2n} D_\tau \sigma_j D_\tau^{2n-1} \tilde{u}_j &= - \sum_{j=1}^{2n} \sigma_j L \tilde{u}_j, \end{aligned}$$

решениями которой являются

$$D_\tau \sigma_k = \sum_{j=1}^{2n} B_{jk} \sigma_j, \quad B_{jk} = -W^{-1}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n}) L \tilde{u}_j \Phi_k^{2n}.$$

Интегрируя $D_\tau \sigma_k$, получим

$$\sigma_k = C_k + \int_0^\tau \sum_{j=1}^{2n} B_{jk} \sigma_j ds, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Используя очевидную оценку

$$\sum_{j=1}^{2n} |\sigma_j| \leq \sum_{j=1}^{2n} |C_j| + 2n \int_0^\tau B \sum_{j=1}^{2n} |\sigma_j| ds,$$

где $B(s) = \max_{ij} |B_{ij}(s)| \leq C\varepsilon$, и хорошо известную лемму Гронуолла, получаем

$$\sum_{j=1}^{2n} |\sigma_j| \leq \sum_{j=1}^{2n} |C_j| \exp \left(2n \int_0^\tau B ds \right).$$

Следовательно

$$\varepsilon |\delta_k| \leq \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} |C_j| \left(\exp \left(2n \int_0^\tau B ds \right) - 1 \right),$$

где $\sigma_k = C_k + \varepsilon \delta_k$. Из условий

$$D_\tau^{k-1} u(T^+, \varepsilon) = D_\tau^{k-1} u_j^+(T^+, \varepsilon), \quad k = 1, \dots, 2n$$

следует, что

$$C_k + \varepsilon \delta_k(T^+, \varepsilon) = \begin{cases} 1 + \varepsilon a_j, & k = j, \\ \varepsilon a_k, & k \neq j, \end{cases} \quad \{a_i\}_{i=1}^{2n} = \text{const}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \left(2 - \exp \left(2n \int_0^{T^+} B ds \right) \right) &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{2n} (|C_k| - \varepsilon |\delta_k(T^+, \varepsilon)|) \leq \left| 1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{2n} a_k \right|. \end{aligned}$$

Следовательно C_k и δ_k ограничены по $\varepsilon > 0$ и

$$D_\tau^{k-1} u = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + \varepsilon \rho_{jk}(\tau, \varepsilon)], \quad |\rho_{jk}(\tau, \varepsilon)| \leq C.$$

Тем же путем можно продолжить решения (2.3) на $(-\infty, T^-]$. Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. Уравнение (2.1) имеет решения $u_j^\pm \in C_r^{2n}(R)$, $j = 1, \dots, 2n$ видов (2.3), (2.3'), где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho_{jk}^\pm(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_{jk}^\pm| < C$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in (-\infty, \infty)$.

Легко можно проверить, что

$$K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W^\pm = (-2i)^n + o(1), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (2.4)$$

где $W^\pm = W(\tau, u_1^\pm, \dots, u_{2n}^\pm) = \det \Phi^\pm$ и

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} u_1^\pm & \dots & u_{2n}^\pm \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_\tau^{2n-1} u_1^\pm & \dots & D_\tau^{2n-1} u_{2n}^\pm \end{pmatrix}.$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно, что $W^\pm$ не зависят от τ . Поэтому при $\tau \rightarrow \pm\infty$ (2.4)

$$K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W^\pm = (-2i)^n.$$

Так как $\{u_j^+\}_{j=1}^{2n}$ и $\{u_j^-\}_{j=1}^{2n}$ — фундаментальные решения уравнения (2.1), то любое решение u уравнения (2.1) представимо в виде

$$u = a_1^+ u_1^+ + \dots + a_{2n}^+ u_{2n}^+ = a_1^- u_1^- + \dots + a_{2n}^- u_{2n}^-, \quad (2.5)$$

где $\{a_j^\pm\}_{j=1}^{2n}$ зависят от ε . Введем матрицу

$$\alpha(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2n,1} & \dots & \alpha_{2n,2n} \end{pmatrix}, \quad (\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j}(\varepsilon)),$$

определенную формулой

$$u^- = \alpha u^+, \quad \text{где} \quad u^\pm = \text{colon}(u_1^\pm, \dots, u_{2n}^\pm). \quad (2.6)$$

Используя очевидные равенства $\det \Phi^- = \det \Phi^+$,

$$\Phi^{-T} = (u^-, \dots, D_\tau^{2n-1} u^-) = \alpha(u^+, \dots, D_\tau^{2n-1} u^+) = \alpha \Phi^{+T}$$

и $\Phi^- = \Phi^+ \alpha^T$, где $u^\pm, \dots, D_\tau^{2n-1} u^\pm$ — вектор-столбцы, получим $\det \alpha = 1$.

Используя (2.5), можно легко показать, что

$$a^+ = \alpha^T a^-, \quad \text{где} \quad a^\pm = \text{colon}(a_1^\pm, \dots, a_{2n}^\pm). \quad (2.7)$$

Лемма 1. Если условия (i) – (iii) выполнены, то

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + O(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Доказательство. Дифференцируя (2.6) k раз ($0 \leq k \leq 2n - 1$) и решая полученные системы по α_{ij} , получаем

$$\alpha_{ij} = \frac{W(\tau, u_1^+, \dots, u_{j-1}^+, u_i^-, u_{j+1}^+, \dots, u_{2n}^+)}{W^+}$$

и

$$\alpha_{ij} = \frac{W(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{j-1}, \tilde{u}_i, \tilde{u}_{j+1}, \dots, \tilde{u}_{2n})}{W^+} + \varepsilon \kappa_{ij}(\tau, \varepsilon), \quad (2.9)$$

где $1 \leq i, j \leq 2n$, $|\kappa_{ij}(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Теперь (2.8) легко следует из (2.9). Следовательно, если $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в некотором интервале $(0, \varepsilon_0)$, то $\{a_j^+\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в другом интервале $(0, \varepsilon_1)$.

§3. ОЦЕНКИ ИЗМЕНЕНИЙ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Лемма 2. Если условия (i) – (iii) выполнены и решение уравнения (2.1) представимо в виде (2.5), где $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в некотором интервале $(0, \varepsilon_0)$, то

$$4Q_m(0)^{-2} J_m(\varepsilon) = a_{2m-1}^+ a_{2m}^+ - a_{2m-1}^- a_{2m}^-, \quad m = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где $Q_m = \prod K_{ml}$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq m$ и $J_m(\varepsilon)$ определены в (1.4).

Доказательство. Дифференцируя (2.5) k раз ($0 \leq k \leq 2n - 1$) и решая полученную систему по a_k , получаем $W_k^\pm = a_k^\pm$, где

$$W_k^\pm = (-2i)^{-n} K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W(\tau, u_1^\pm, \dots, u_{k-1}^\pm, u, u_{k+1}^\pm, \dots, u_{2n}^\pm).$$

С другой стороны, используя ограниченность $\{a_j^\pm\}_{j=1}^{2n}$ и (4.4), получаем следующие две формулы:

$$W_{2m-1}^\pm = (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon L_m D_\tau u + i\omega_m L_m u}{2iQ_m(0)\omega_m^{1/2}} \exp \int_0^\tau \left(-\frac{i\omega_m(t)}{\varepsilon} + \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_t[\omega_l^2(t)]}{K_{ml}(t)} \right) dt + \\ + \varepsilon \rho_{2m-1}^\pm(\tau, \varepsilon),$$

$$W_{2m}^\pm = (-1)^n \frac{\varepsilon L_m D_\tau u - i\omega_m L_m u}{2iQ_m(0)\omega_m^{1/2}} \exp \int_0^\tau \left(\frac{i\omega_m(t)}{\varepsilon} + \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_t[\omega_l^2(t)]}{K_{ml}(t)} \right) dt +$$

$$+\varepsilon\rho_{2m}^{\pm}(\tau,\varepsilon),$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Итак, если решение имеет вид (2.5), где $\{a_j^{\pm}\}_{j=1}^{2n}$ ограничены, то

$$\frac{J_m(t, x, \varepsilon)}{4Q_m(0)^2} = a_{2m-1}^- a_{2m}^- + \varepsilon \tilde{\rho}_m^-(t, \varepsilon) = a_{2m-1}^+ a_{2m}^+ + \varepsilon \tilde{\rho}_m^+(t, \varepsilon), \quad (3.2)$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Из (3.2) легко можно получить (3.1).

Теорема 2. Если условия (i) – (iii) выполнены и решение уравнения (2.1) имеет вид (2.5), где $\{a_j^{\pm}\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в $(0, \varepsilon_0)$, то справедливы оценки (1.3) и (1.4).

Доказательство. Из (2.7) и (3.1) следует, что

$$4Q_m(0)^{-2} J_m(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{j, 2m-1} a_j^- \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{j, 2m} a_j^- - a_{2m-1}^- a_{2m}^-, m = 1, \dots, n.$$

Из (2.8) следует, что $J_m(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Очевидно

$$\begin{aligned} K(0)^2 J_0(\varepsilon) &= K(0)^2 [J_0(\infty, x, \varepsilon) - J_0(-\infty, x, \varepsilon)] = \\ &= \sum_{m=1}^n \{ J_1(\infty, x, \varepsilon) \dots J_{m-1}(\infty, x, \varepsilon) [J_m(\infty, x, \varepsilon) - J_m(-\infty, x, \varepsilon)] \times \\ &\quad \times J_{m+1}(-\infty, x, \varepsilon) \dots J_n(-\infty, x, \varepsilon) \} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из (3.2) следует, что

$$|J_m(t_1, x, \varepsilon) - J_m(t_2, x, \varepsilon)| \leq C_m \varepsilon.$$

Так как

$$\begin{aligned} K(0)^2 [J_0(t_1, x, \varepsilon) - J_0(t_2, x, \varepsilon)] &= \sum_{m=1}^n \{ J_1(t_1, x, \varepsilon) \dots J_{m-1}(t_1, x, \varepsilon) \times \\ &\quad \times [J_m(t_1, x, \varepsilon) - J_m(t_2, x, \varepsilon)] J_{m+1}(t_2, x, \varepsilon) \dots J_n(t_2, x, \varepsilon) \}, \end{aligned}$$

то имеем

$$|J_0(t_1, x, \varepsilon) - J_0(t_2, x, \varepsilon)| \leq C_0 \varepsilon.$$

Можно легко убедиться в том, что если решение (1.1) ограничено со своими соответствующими производными, то (2.1) имеет вид (2.5), где $\{a_j^{\pm}\}_{j=1}^{2n}$ ограничены.

Теорема доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФОРМУЛ

Пусть $(a_{ij})^{2n+1} - (2n+1) \times (2n+1)$ -матрица. Предположим, что имеет место один из случаев:

- а) $a_{ij} = 0$, если $i + j$ четно,
 б) $a_{ij} = 0$, если $i + j$ нечетно.

Обозначим $b_{ij} = a_{2i-1, 2j-1}$, $c_{ij} = a_{2i, 2j}$

$$A_{2n+1} = \det(a_{ij})^{2n+1}, \quad B_{n+1} = \det(b_{ij})^{n+1}, \quad C_n = \det(c_{ij})^n$$

и докажем формулу

$$A_{2n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если а) выполнено,} \\ B_{n+1}C_n, & \text{если б) выполнено.} \end{cases} \quad (4.1)$$

В этой формуле первая строка правильна, т.е. детерминант равен нулю, так как $a_{1,i_1}a_{2,i_2} \dots a_{2n+1,i_{2n+1}} = 0$. Заметим, что эти произведения будут отличны от нуля, только если индексы i_{2k+1} ($k = 0, \dots, n$) четны. Однако, число четных столбцов детерминанта равно n . Следовательно, $a_{1,i_1}a_{2,i_2} \dots a_{2n+1,i_{2n+1}} = 0$.

Второй случай может быть доказан методом индукции. Имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если $A_{2n-1} = B_n C_{n-1}$ и $\{a_{1,2j-1}\}_{j=1}^{n+1}, \{a_{2,2j}\}_{j=1}^n \neq 0$, то

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= a_{11} \dots a_{1,2n+1} a_{22} \dots a_{2,2n} \begin{vmatrix} \frac{a_{33}}{a_{13}} - \frac{a_{31}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{3,2n+1}}{a_{1,2n+1}} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{2n+1,3}}{a_{13}} - \frac{a_{2n+1,1}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{2n+1,2n+1}}{a_{1,2n+1}} - \frac{a_{2n+1,1}}{a_{11}} \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \frac{a_{44}}{a_{24}} - \frac{a_{42}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{4,2n}}{a_{2,2n}} - \frac{a_{42}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{2n,4}}{a_{24}} - \frac{a_{2n,2}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n,2n}}{a_{2,2n}} - \frac{a_{2n,2}}{a_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1,2n+1} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n+1,1} & a_{2n+1,3} & \dots & a_{2n+1,2n+1} \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2,2n} \\ a_{42} & a_{44} & \dots & a_{4,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n,2} & a_{2n,4} & \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить что последняя формула справедлива и без этих условий.

Приведем также хорошо известную формулу для детерминанта Ван дер Монда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i). \quad (4.2)$$

Методом индукции можно доказать формулу

$$\begin{vmatrix} f_0 & 1 & \dots & 1 \\ f_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i) [f_m + \sum_{k=1}^m (-1)^k f_{m-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}]. \quad (4.3)$$

Теперь мы можем вычислить следующий детерминант :

$$A = \begin{vmatrix} u_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ u_1 & -x_1 & x_2 & -x_2 & \dots & x_n & -x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{2n-2} & x_1^{2n-2} & x_2^{2n-2} & x_2^{2n-2} & \dots & x_n^{2n-2} & x_n^{2n-2} \\ u_{2n-1} & -x_1^{2n-1} & x_2^{2n-1} & -x_2^{2n-1} & \dots & x_n^{2n-1} & -x_n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Путем элементарных преобразований получим

$$A = 2^{n-1} x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} u_0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ u_1 + x_1 u_0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{2n-2} & x_1^{2n-2} & 0 & x_2^{2n-2} & \dots & 0 & x_n^{2n-2} \\ u_{2n-1} + x_1 u_{2n-2} & 0 & x_2^{2n-2} & 0 & \dots & x_n^{2n-2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись первой формулой в (4.1), получим

$$A = -2^{n-1} x_2 \dots x_n \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{2k-4} & 0 & \dots & x_n^{2k-4} & 0 \\ x_1^{2k-2} & 0 & x_2^{2k-2} & \dots & 0 & x_n^{2k-2} \\ 0 & x_2^{2k} & 0 & \dots & x_n^{2k} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{2n-2} & 0 & x_2^{2n-2} & \dots & 0 & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} (u_{2k-1} + x_1 u_{2k-2}).$$

Учитывая теперь (4.2) и вторую формулу в (4.1), получим

$$A = (-1)^n 2^{n-1} x_2 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{2k-4} & \dots & x_n^{2k-4} \\ x_2^{2k} & \dots & x_n^{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{2n-2} & \dots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} (u_{2k-1} + x_1 u_{2k-2})$$

и

$$A = (-1)^n 2^{n-1} x_2 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \begin{vmatrix} u_1 + x_1 u_0 & 1 & \dots & 1 \\ u_3 + x_1 u_2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2n-1} + x_1 u_{2n-2} & x_2^{2n-2} & \dots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

И наконец, учитывая (4.3), находим

$$A = -2^{n-1} x_2 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \times \\ \times \left[u_{2n-1} + x_1 u_{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} ((-1)^k u_{2(n-k)-1} + x_1 u_{2(n-k)-2}) \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}^2 \dots x_{i_k}^2 \right]. \quad (4.4)$$

ABSTRACT. The energy to frequency ratio is an adiabatic invariant for linear harmonic oscillators. In the paper some new adiabatic invariants are found for the linear ordinary differential equation of order $2n$ corresponding to n -connected oscillators. The denominators of these invariants vanish when differences of certain frequencies tend to zero (resonance). The variances of the invariants are estimated. A new definition of adiabatic invariants is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, Наука, М., 1979.
2. М. В. Федорук, "Адиабатический инвариант системы нелинейных осцилляторов и теория рассеяния", Дифференц. уравнения, т. 12, № 6, стр. 1012-1018, 1976.
3. А. С. Бакай, Е. Г. Степановский, Адиабатические инварианты, Наукова Думка, Киев, 1981.
4. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, "Связанные осцилляторы в адиабатическом приближении", ДАН СССР, т. 161, стр. 213-231, 1965.
5. Г. М. Заславский, В. П. Мейтлис, Н. Н. Филоненко, Взаимодействие волн в неоднородной среде, Наука, Новосибирск, 1982.
6. Г. Р. Оганесян, "Единственность решения весовой задачи Коши и новая формула для энергии", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, № 5, стр. 376 - 386, 1991.
7. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 1, стр. 9 - 28, 1996.
8. Л. Д. Кудрявцев, Курс математического анализа, т. 1, М. 1988.

15 июля 1995

Институт математики
НАН Армении
E-mail : instmath@pnas.sci.am

ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ВЕЙЛЮ В ОБОБЩЕННЫХ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССАХ

Н. К. Карапетянц, З. У. Муссалаева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

Исследуется дробное интегродифференцирование по Вейлю в обобщенных гельдеровских классах $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$. Характеристика $\omega(t)$ предполагается принадлежащей классам $A_{\lambda, \mu}$ или классам Φ_s^m типа Бари–Стечкина, где число m характеризует порядок производной, а k – порядок конечной разности. Основным результатом заключается в изоморфизме, устанавливаемом дробным интегральным оператором $J_{(\alpha)}\varphi = \psi_\alpha * \varphi$ при произвольном $\alpha > 0$, между пространствами

$H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ и $H_p^{\omega_\alpha, m, k}(0, 2\pi)$, где

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}, \quad \omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t),$$

а параметры m, k, ω удовлетворяют некоторым условиям согласования. Для $\omega \in A_{\lambda, \mu}$ эти условия $0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m+k$, а для $\omega \in \Phi_s^m$ эти условия даются в терминах так называемых индексных чисел.

Помимо этого в работе получены оценки типа Зигмунда интегрального модуля непрерывности и изучено действие операторов дробного интегродифференцирования.

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется дробное интегродифференцирование по Вейлю произвольного порядка $\alpha > 0$ в обобщенных гельдеровских классах $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$. Характеристика $\omega(t)$ берется из классов $A_{\lambda, \mu}$, $0 \leq \lambda < \mu$ неотрицательных непрерывных функций таких, что $t^{-\lambda}\omega(t)$ почти возрастает, а $t^{-\mu}\omega(t)$ почти убывает, либо из классов Φ_s^m типа Бари–Стечкина, где число m характеризует порядок производной, а k – порядок конечной разности (подробнее об этих классах и их свойствах см. [3], [8], [10], [13] – [15]).

Известно, что оператор дробного интегрирования устанавливает изоморфизм в гильбертовской шкале между пространствами $H_0^\lambda(0, 1)$ и $H_0^{\lambda+\alpha}(0, 1)$, где $\alpha > 0$ – порядок дробного интеграла, $\lambda + \alpha < 1$ и H_0 соответствует условию. При переходе к классам $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ возникает необходимость найти замену нулевому начальному условию. В непериодическом случае это сделано в [4], [6], [9], [10]. В периодическом случае эта проблема решается отчасти легче за счет возможности периодического продолжения вне $[0, 2\pi]$, при этом рассматриваются функции со средним значением на $[0, 2\pi]$, равным нулю. В [13] рассмотрено дробное интегродифференцирование в пространствах периодических функций $H_\infty^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$. В указанных работах даны оценки типа Зигмунда модулей непрерывности первого порядка дробного интеграла Вейля и дробных производных Маршо при $0 < \alpha < 1$.

В настоящей работе нам удастся рассмотреть случай $p < \infty$ и произвольного порядка $\alpha > 0$. Возможность перехода к произвольному α основывается на двух подходах. Один связан с выяснением условий на характеристику $\omega(t)$, при которых классы $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ не зависят от параметров m и k . Например, для классов $A_{\lambda, \mu}$ это будет при $0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m + k$, а для Φ_ω^m подобное условие дается в терминах индексных чисел m_ω и M_ω .

Другой подход связан с получением оценок для L_p -модулей непрерывности ω_p^k дробного интеграла J_α и дробной производной D^α при любом $\alpha > 0$. На основании этих подходов устанавливается основной результат работы – теорема об изоморфизме обобщенных периодических гильбертовских пространств, осуществляемом дробным интегралом при произвольном $\alpha > 0$. В свою очередь этот результат опирается на два центральных утверждения: теорему о действии дробного интеграла

$$J_\alpha \varphi : H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi) \longrightarrow H_p^{\omega_\alpha, m, k}(0, 2\pi),$$

где $\omega_\alpha(h) = h^\alpha \omega(h)$ при условии согласования m, k с характеристикой ω , и аналогичного утверждения

$$D^\alpha f : H_p^{\omega_\alpha, m, k}(0, 2\pi) \longrightarrow H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$$

для дробной производной. Отметим, что дробное интегродифференцирование

Вейля встречается в различных приложениях (см., например, [2], [14], [15], а также [1] и [17]).

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ

И КЛАССЫ ХАРАКТЕРИСТИК

Через $L_p = L_p(0, 2\pi)$, $p \geq 1$ будем обозначать пространства 2π -периодических функций с нормой $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in (0, 2\pi)} |f(x)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Пусть Δ_h^k обозначает нецентрированную конечную разность порядка k с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+k} C_k^i f(x + ih), \quad k \in \mathcal{N}, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел. Модулем непрерывности порядка k функции $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ для $\delta \geq 0$ называют величину

$$\omega_p^k(f, \delta) = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \|\Delta_t^k f(x)\|_p, \quad k \in \mathcal{N}. \quad (1.2)$$

Напомним, что функция $\omega(t)$ называется *почти возрастающей* (почти убывающей), если для $t_1 < t_2$ существует постоянная $c > 0$ такая, что $\omega(t_1) \leq c\omega(t_2)$ ($\omega(t_1) \geq c\omega(t_2)$).

Определение 1. Классом W называется множество почти возрастающих непрерывных на $[0, \infty)$ функций, удовлетворяющих условиям $\omega(0) = 0$ и $\omega(t) > 0$ при $t > 0$.

Определение 2. Для $\mu > \lambda \geq 0$ класс $A_{\lambda, \mu}$ определяется как множество тех функций $\omega(t) \in W$, для которых $\omega(t)t^{-\lambda}$ почти возрастает, а $\omega(t)t^{-\mu}$ почти убывает.

Определение 3. Для $l > 0$ и $0 \leq m < s$ класс $\Phi_s^m = \Phi_s^m[0, l]$ определяется как множество тех функций $\omega(t) \in W$, для которых

$$\int_0^t \frac{\omega(\xi)}{\xi^{m+1}} d\xi \leq c_\omega \frac{\omega(t)}{t^m}, \quad \int_t^l \frac{\omega(\xi)}{\xi^{s+1}} d\xi \leq c_\omega \frac{\omega(t)}{t^s},$$

где c_ω — постоянные. Заметим, что при $m \geq s$ класс Φ_s^m пуст.

Определение 4. Для целых $m \geq 0$, $k > 0$ и для $p \geq 1$, $\omega(t) \in W$ класс $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ определяется как множество тех функций $f \in L_p(0, 2\pi)$, которые имеют обобщенные производные $f^{(j)}$ до порядка m и удовлетворяют неравенству

$$\|\Delta_h^k f(x)\|_p \leq \frac{M\omega(h)}{h^m}, \quad (1.3)$$

где $M > 0$ – постоянная, не зависящая от $h \in \mathbb{R}_+^1$. Положим

$$\|f\|_{H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)} = \|f\|_p + M_f, \quad f \in H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi),$$

где M_f – наименьшая постоянная в (1.3). В нижеследующих оценках будем писать $M = M_{p, \omega, m, k}(f)$. Пусть $\omega(h) \in W$. Пространство $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ не зависит от выбора параметров m и k , если

$$H_p^{\omega, m_1, k_1}(0, 2\pi) = H_p^{\omega, m_2, k_2}(0, 2\pi). \quad (1.4)$$

Теорема 1.1. Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$, и пусть m_i, k_i , $i = 1, 2$ – целые числа, удовлетворяющие условию

$$\max(m_1, m_2) \leq \lambda < \mu \leq \min(m_1 + k_1, m_2 + k_2). \quad (1.5)$$

Тогда равенство (1.4) справедливо.

Доказательство теоремы проводится по аналогии с [11], стр. 255 и опирается на следующую легко проверяемую лемму (ср. [11], стр. 200).

Лемма 1.1. Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$ и $0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m + k$. Если для наилучшего приближения $E_\nu(f)_p$ в метрике L_p , $p \geq 1$ тригонометрическими полиномами порядка ν выполняется неравенство $E_\nu(f)_p \leq k\omega((\nu + 1)^{-1})$, $\nu \in \mathbb{N}$, то $f \in H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$.

Отметим некоторые свойства классов $W, A_{\lambda, \mu}, \Phi_\#^m$. Прежде всего они замкнуты относительно сложения, а класс W еще и относительно умножения. Пусть $u \circ v$ обозначает суперпозицию функций u и v , т.е. $(u \circ v)(x) = u(v(x))$.

Лемма 1.2. Справедливы следующие утверждения :

- 1) если $u \in A_{\lambda, \mu}$, $v \in A_{\eta, \nu}$, то $uv \in A_{\lambda+\eta, \mu+\nu}$, $u \circ v \in A_{\lambda\eta, \mu\nu}$;

- 2) если $u \in \Phi_s^m$, $v \in \Phi_{r,s}^p$, то $uv \in \Phi_{r+s}^{m+p}$, $u \circ v \in \Phi_{r,s}^{mp}$;
- 3) если $u \in \Phi_s^m$, то $u^\alpha \in \Phi_{\alpha s}^{\alpha m}$, где $\alpha > 0$;
- 4) если $u \in A_{\lambda,\mu}$, $v \in W$, то $uv \in W$;
- 5) если $u \in \Phi_s^m$, $v \in W$, то $uv \in W$;
- 6) если $u, v \in W$, v возрастает, u почти возрастает, то $u \circ v \in W$.

Доказательство следует из определений классов $W, A_{\lambda,\mu}, \Phi_s^m$ и следующего важного утверждения: если $\omega(t) \in \Phi_s^m$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $t^{-m-\varepsilon}\omega(t)$ почти возрастает, а $t^{-s+\varepsilon}\omega(t)$ почти убывает.

Следующий пример показывает, что 6) не влечет $v \circ u \in W$.

Пример. Пусть

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad u(x) = x^\gamma \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Очевидно, $v(x)$ убывает, а $u(x)$ почти возрастает. Следовательно, $u \circ v \in W$, а $v \circ u \notin W$.

Для классов Φ_s^m и W можно ввести понятие *индексных чисел* (см., например, [18]). Функции $\bar{\Omega}(\xi)$ и $\underline{\Omega}(\xi)$, определенные как

$$\bar{\Omega}(\xi) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)}, \quad \underline{\Omega}(\xi) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)}, \quad (1.6)$$

называются *верхней и нижней индексными функциями*, соответственно.

Определение 5. Для функции $\omega \in W$ (или $\omega \in \Phi_s^m$) числа m_ω и M_ω , определенные из

$$m_\omega = \sup_{\xi > 1} \frac{\ln \underline{\Omega}(\xi)}{\ln \xi} = \sup_{\xi > 1} \left\{ \frac{1}{\ln \xi} \ln \left[\underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)} \right] \right\}, \quad (1.7)$$

$$M_\omega = \inf_{\xi > 1} \frac{\ln \bar{\Omega}(\xi)}{\ln \xi} = \inf_{\xi > 1} \left\{ \frac{1}{\ln \xi} \ln \left[\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)} \right] \right\}, \quad (1.8)$$

называются *нижней и верхней индексными числами* функции ω , соответственно.

Отметим некоторые свойства m_ω и M_ω при условии их конечности. Прежде всего заметим, что если $\omega \in W$, то $\omega \in \Phi_s^m$ тогда и только тогда, когда $m < m_\omega \leq M_\omega < s$. Среди функций класса W выделим те, которые удовлетворяют одному из условий

$$(A) \text{ существует } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(xh)}{u(h)},$$

$$(B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(xh)}{u(h)} = x^\mu.$$

Лемма 1.3 (см. [10]). Пусть $u, v \in W$. Тогда

а) если выполнено условие (А), то

$$m_{u^{\alpha}} = \alpha m_u, \quad M_{u^{\alpha}} = \alpha M_u, \quad \alpha > 0, \quad m_{uv} \leq m_u + m_v, \quad M_{uv} \geq M_u + M_v;$$

б) если выполнено условие (В), то

$$m_u = M_u = \mu, \quad m_{uv} = \mu + m_v, \quad M_{uv} = \mu + M_v.$$

Отметим еще (см. [18] и [7], стр.76), что если $u, v \in W$ не убывают и существуют конечные индексные числа m_u, m_v, M_u и M_v , то из сравнимости $c_1 u \leq v \leq c_2 u$ следует, что $m_u = m_v, M_u = M_v$, причем это утверждение необратимо. Наконец, отметим, что если $\omega \in \Phi_s^m$ и удовлетворяет условию (А), то $m_{\omega} = M_{\omega}$.

Важное значение для дальнейшего имеют следующие две теоремы из [10].

Теорема 1.2. Пусть $\omega(t) \in W$ и существуют индексные числа m_{ω}, M_{ω} , причем $0 < m_{\omega} \leq M_{\omega} < \infty, t < m_{\omega}, s > M_{\omega}$. Тогда

$$\Phi_s^m = \bigcup_{m < \lambda < m_{\omega}} \bigcup_{M_{\omega} < \mu < s} A_{\lambda, \mu}. \quad (1.9)$$

Теорема 1.1'. Пусть $\omega(t) \in W$ и существуют индексные числа m_{ω}, M_{ω} , причем $0 < m_{\omega} \leq M_{\omega} < \infty$. Если

$$t < m_{\omega} \leq M_{\omega} < t + k, \quad (1.10)$$

то пространство $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ не зависит от выбора параметров m и k .

Для дальнейшего важна следующая лемма, выводимая из неравенства Маршо (см. [14]).

Лемма 1.4. Пусть

$$\varphi \in H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \omega(h) \in A_{\lambda, \mu}, \quad m \leq \lambda < \mu, \quad k_0 = [\mu] + 1, \quad k > k_0,$$

где $[\mu]$ — целая часть μ . Тогда

$$\omega_p^{k_0}(\varphi, h) \leq \alpha \omega(h) \left(\|\varphi\|_p + \sup_{h>0} \frac{\omega_p^k(\varphi, h)}{\omega(h)} \right). \quad (1.11)$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $m = 0$. Воспользуемся неравенством Маршо. Имеем

$$\omega_p^{k_0}(\varphi, h) \leq ch^{k_0} \int_h^\pi \frac{\omega_p^k(\varphi, t)}{t^{k_0+1}} dt + h^{k_0} \|\varphi\|_p \leq cM_\varphi h^{k_0} \frac{\omega(h)}{h^\mu} \int_h^\pi \frac{dt}{t^{k_0+1-\mu}} + h^{k_0} \|\varphi\|_p.$$

Так как $k_0 > \mu$, то $h^{k_0} \leq c\omega(h)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \omega_p^{k_0}(\varphi, h) &\leq c\omega(h) \left(M_\varphi h^{k_0-\mu} \int_h^\infty \frac{dt}{t^{k_0+1-\mu}} + \|\varphi\|_p \right) \leq \\ &\leq c\omega(h) \left(\|\varphi\|_p + \sup_{h>0} \frac{\omega_p^k(\varphi, h)}{\omega(h)} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогичную лемму можно доказать для характеристик из класса $\Phi_\#^m$.

В заключение этого пункта остановимся на вопросе о том, сохраняется ли гладкость функций при периодическом продолжении. Пусть

$$\tilde{\omega}_p^k(f, \delta) = \sup_{0 < h < \delta} \left(\int_0^{2\pi - kh} |(\Delta_h^k f)(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < \delta \leq \frac{2\pi}{k} \quad (1.12)$$

– неперiodический модуль непрерывности. Будем говорить, что периодическое продолжение сохраняет гладкость, если $\omega_p^k(f, \delta) \sim \tilde{\omega}_p^k(f, \delta)$, т.е. существуют постоянные $c_2 > c_1 > 0$ такие, что

$$c_1 \tilde{\omega}_p^k(f, \delta) \leq \omega_p^k(f, \delta) \leq c_2 \tilde{\omega}_p^k(f, \delta).$$

Нетрудно проверить, что эта эквивалентность имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0 < h < \delta} \left(\int_{2\pi - kh}^{2\pi} |(\Delta_h^k f)(x)|^p dx \right)^{1/p} \sim \tilde{\omega}_p^k(f, \delta). \quad (1.13)$$

Простые примеры (см. также [12]) показывают, что периодическое продолжение, вообще говоря, не сохраняет свойство гладкости.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^n & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi, \\ f(x - 2\pi) & \text{при } x > 2\pi, \end{cases} \quad n \in \mathcal{N}.$$

Учитывая, что

$$\Delta_h^k x^n = \begin{cases} 0 & \text{при } n < k, \\ (-1)^k k! h^k & \text{при } n = k, \end{cases}$$

нетрудно понять, что $\tilde{\omega}_p^k(f, \delta) = 0$ при $k > n \geq 2$, в то время как $\omega_p^k(f, \delta) \neq 0$, $k > n \geq 2$. Различны эти модули и при $k \geq n = 1$. Имеем $\tilde{\omega}_p^k(f, \delta) \leq c\delta^k$, в то время как $\omega_p^k(f, \delta) \sim \delta^{1/p}$. Если ввести классы

$$\tilde{H}_p^\mu(0, 2\pi) = \{f : \tilde{\omega}_p^1(f, \delta) \leq c\delta^\mu\}, \quad H_p^\mu(0, 2\pi) = \{f : \omega_p^1(f, \delta) \leq c\delta^\mu\},$$

то из сказанного выше следует, что $f(x) = x \in \tilde{H}_p^\mu(0, 2\pi)$ для всех $0 < \mu \leq 1$, в то время как $f(x) = x \in H_p^\mu(0, 2\pi)$ лишь для $0 < \mu \leq 1/p$.

§2. СВЕРТКА В $L_p(0, 2\pi)$

Через $L_{p,\sigma} = L_{p,\sigma}(0, 2\pi)$ будем обозначать те функции $\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi)$, для которых $\varphi_k = 0$, $k \in \sigma \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел), где

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \exp(-ikx) dx$$

– коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. Если $\sigma = \emptyset$, то пишем $L_{p,\sigma} = L_p$, если $\sigma = \{0\}$, то $L_{p,\sigma} = L_{p,0}$. Очевидно, что $L_{p,\nu} \subset L_{p,\sigma}$, если $\sigma \subset \nu$. Напомним, что интегральный оператор

$$u * v = (u * v)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x-t)v(t) dt \quad (2.1)$$

называют *оператором свертки*.

Лемма 2.1. Пространство $L_{p,\sigma}$, $p \geq 1$ есть коммутативное нормированное кольцо относительно свертки. Если $\mathbb{Z} \setminus \sigma$ не ограничено, то это кольцо без единицы. Если $\sigma \subset \nu$, то $L_{p,\nu}$ есть идеал кольца $L_{p,\sigma}$. Если $u \in L_p$ и $v \in L_{1,\sigma}$, то $u * v \in L_{p,\sigma}$.

Доказательство. То, что $L_{p,\sigma}$ есть кольцо относительно свертки, следует из вложений $L_{p,\sigma} \subset L_{1,\sigma}$, $p \geq 1$ и $L_p * L_1 \subset L_p$. Для коэффициентов Фурье справедливо равенство

$$(u * v)_k = 2\pi v_k u_k = (v * u)_k. \quad (2.2)$$

Из единственности коэффициентов Фурье и (2.2) следует, что $L_{p,\sigma}$ – коммутативное кольцо. Кроме того, если $u \in L_{p,\sigma}$ то для любого $v \in L_{p,\nu}$ имеем $(u * v)_k = 0$

для любого $k \in \nu$, т.е. $(u * v)(x) \in L_{p\sigma}$. То, что $(u * v)(x)$ – периодическая функция, очевидно. Наконец, из (2.2) следует отсутствие единицы кольца. Иначе, пользуясь произволом в выборе $u(x)$ и выбирая $u_n(x) = e^{inx} \in L_{p,\sigma}$, $n \notin \sigma$, получим, что $v_k = 1/2\pi$ для любого $k \in \mathbb{Z} \setminus \sigma$, что невозможно, т.к. $v_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отметим еще, что $\|u * v\|_p \leq c\|u\|_p\|v_p\|$. Наконец, последнее утверждение леммы следует из (2.2) и теоремы о свертке.

Отметим, что если $v(x)$ периодична и $(\Delta_h^k v)(x) \equiv 0$ для любого $h > 0$ при некотором $k \in \mathcal{N}$, то $v(x) = \text{const}$. Обозначим через $(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x + h)$ оператор сдвига.

Лемма 2.2. Пусть $u, v \in L_{p,\sigma}$, $1 \leq p \leq \infty$. Оператор свертки инвариантен относительно сдвига

$$\tau_h(u * v) = \tau_h u * v = u * \tau_h v, \quad \Delta_h^k(u * v) = u * \Delta_h^k v, \quad (2.3)$$

так что

$$\|\Delta_h^k(u * v)\|_p \leq \|u\|_p \int_{-\pi}^{\pi} |(\Delta_h^k v)(t)| dt, \quad (2.4)$$

$$\|\Delta_h^k(u * v)\|_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} |(\Delta_h^k v)(t)| \omega_p^1(u, |t|) dt, \quad \sigma \neq \emptyset. \quad (2.5)$$

Доказательство. (2.3) следует из периодичности функций u и v , а уже из него применением теоремы о свертке получаем (2.4). Что касается (2.5), то при его доказательстве следует дополнительно воспользоваться тем, что $v_0 = 0$.

§3. ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ВЕЙЛЮ

Всюду в дальнейшем рассматриваем класс $L_p = L_{p,0}$. Пусть $J_{(\alpha)}$ обозначает дробный интеграл по Вейлю (см. [13], стр. 264)

$$J_{(\alpha)} \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x - t) \psi_{\alpha}(t) dt, \quad (3.1)$$

где

$$\psi_{\alpha}(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (3.2)$$

причем при целых α имеем $\psi_n(t) = c_n B_n(t/(2\pi))$, $0 < t < 2\pi$, где $B_n(t)$ – многочлены Бернулли. Можно выписать явный вид $\psi_n(t)$ при $n \in \mathcal{N}$ и $t \in [0, 2\pi]$.

При этом $\psi_1(t) = \pi - t$, $c_2 = \pi^2/6$ и

$$\psi_{2n+1}(t) = \frac{(\pi - t)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{j=0}^{n-1} c_{2(n-j)} \frac{(\pi - t)^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\psi_{2n}(t) = -\frac{(\pi - t)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{j=0}^{n-1} c_{2(n-j)} \frac{(\pi - t)^{2j}}{(2j)!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$c_{2n} = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{j=1}^{n-1} c_{2(n-j)} \frac{\pi^{2j}}{(2j+1)!}, \quad n = 2, 3, \dots$$

В дальнейшем нам понадобится неравенство ($t \in (-\pi, \pi)$)

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} \psi_\alpha(t) \right| \leq c |t|^{\alpha-1-j}, \quad j \geq [\alpha], \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \quad (3.3)$$

доказанное в [13] для $0 < \alpha < 1$. Покажем, что (3.3) верно и для $\alpha > 1$. Действительно, подействовав на $J_{(\alpha)}\varphi = c\psi_\alpha * \varphi$ при $1 < \alpha < 2$ оператором $D^1 = \frac{d}{dx}$, получим $D^1 J_{(\alpha)}\varphi = J_{(\alpha-1)}\varphi = c\psi_{\alpha-1} * \varphi$. Имеем $\psi_{\alpha-1} * \varphi = \frac{d}{dx} \psi_\alpha * \varphi$. Теперь для $\frac{d}{dx} \psi_\alpha(x)$ уже применима оценка из [13]. Аналогично можно рассуждать при произвольном $\alpha \in (s, s+1)$ и $s \in \mathcal{N}$.

Отметим, что анализируя сходимость ряда для $\psi_\alpha(x)$, можно показать, что равенство

$$\frac{d^s}{dx^s} \psi_\alpha(x) = \psi_{\alpha-s}(x) \quad (3.3')$$

имеет место при $\alpha > 2$, $\alpha - s > 1$, $x \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha > 1$, $\alpha - s \in (0, 1)$, $x \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Кроме того, из приведенных рассуждений видно, что при целых α дробный интеграл $J_{(\alpha)}$ можно сводить к обычному дробному интегрированию, но при этом возникает добавка, связанная с тем, что должно выполняться условие $(J_{(\alpha)}\varphi)_0 = 0$. Например

$$J_{(1)}\varphi = \int_0^x \varphi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y - 2\pi)\varphi(y) dy = J_1\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (y - 2\pi)\varphi(y) dy.$$

Всюду ниже будем использовать обозначение $\omega_\alpha(h) = h^\alpha \omega(h)$, $\alpha > 0$. Пусть теперь $\alpha = s \in \mathcal{N}$.

Лемма 3.1. Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$ и

$$0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m + k - s. \quad (3.4)$$

Тогда

$$J_{(s)}\varphi: H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi) \mapsto H_p^{\omega_s, m, k}(0, 2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Доказательство. В силу (3.4) пространства $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ и $H_p^{\omega_s, m, k}(0, 2\pi)$ не зависят от m и k , поэтому можно написать

$$\begin{aligned} M_{p, \omega_s, 0, k}(J_{(s)}\varphi) &\leq c \left(M_{p, \omega_s, s, k}(J_{(s)}\varphi)^{(s)} + \|J_{(s)}\varphi\|_p \right) = \\ &= c \left(M_{p, \omega, 0, k}(\varphi) + \|J_{(s)}\varphi\|_p \right) \leq c(M_{p, \omega, 0, k}(\varphi) + \|\varphi\|_p), \end{aligned}$$

т.е. $M_{p, \omega_s, 0, k}(J_{(s)}\varphi) < \infty$. Лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим теперь случай нецелых α , полагая

$$J_{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\psi_{\alpha}(t) dt, \quad x \in (-\pi, \pi). \quad (3.5)$$

Лемма 3.2. Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$ и

$$0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m + k - [\alpha] - 1, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \quad (3.6)$$

Тогда

$$J_{(\alpha)}\varphi: H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi) \mapsto H_p^{\omega_{\alpha}, m, k}(0, 2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Доказательство. Пользуясь независимостью $H_p^{\omega, m, k}(0, 2\pi)$ и $H_p^{\omega_{\alpha}, m, k}(0, 2\pi)$ от m и k , положим $m = 0$. Покажем (ср. [6]), что $M_{p, \omega_{\alpha}, 0, k}(J_{(\alpha)}\varphi) < \infty$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Будем использовать соотношения

$$\tau_h J_{(\alpha)} = J_{(\alpha)} \tau_h, \quad \Delta_h^k J_{(\alpha)} = J_{(\alpha)} \Delta_h^k, \quad h > 0. \quad (3.7)$$

Имеем

$$(\Delta_h^k J_{(\alpha)}\varphi)(x) = \bar{J}\varphi + \tilde{J}\varphi, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}\varphi &= \int_{|t| < h} \psi_{\alpha}(t)(\Delta_h^k \varphi)(x-t) dt, \\ \tilde{J}\varphi &= \int_{h < |t| < \pi} \psi_{\alpha}(t)(\Delta_h^k \varphi)(x-t) dt. \end{aligned}$$

В силу обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\|\bar{J}\varphi\|_p \leq \int_{-h}^h |\psi_{\alpha}(t)| dt \left(\int_0^{2\pi} |(\Delta_h^k \varphi)(x-t)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Сделаем замену $x - t = y$. Тогда с учетом периодичности рассматриваемых классов и (3.3), получим

$$\|\tilde{J}\varphi\|_p \leq c \|\Delta_h^k \varphi\|_p \int_0^h t^{\alpha-1} dt \leq ch^\alpha \|\Delta_h^k \varphi\|_p.$$

При $p = \infty$ доказательство аналогично. Оценим теперь $\|\tilde{J}\varphi\|_p$ при $0 < \alpha < 1$. В силу тождества $D^1 J_1 = I$, где I – тождественный оператор, а также равенства (3.7), имеем $\Delta_h^k \varphi = D^1 J_1 \Delta_h^k \varphi = D^1 \Delta_h^k J_1 \varphi$. Следовательно

$$\tilde{J}\varphi = \int_{h < |t| < \pi} \psi_\alpha(t) (D^1 \Delta_h^k J_1 \varphi)(x - t) dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \tilde{J}\varphi &= \psi_\alpha(-h) (\Delta_h^k J_1 \varphi)(x + h) - \psi_\alpha(h) (\Delta_h^k J_1 \varphi)(x - h) + \\ &+ c \int_{h < |t| < \pi} D^1 \psi_\alpha(t) (\Delta_h^k J_1 \varphi)(x - t) dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство треугольника, найдем

$$\|\tilde{J}\varphi\|_p \leq c_1 h^{\alpha-1} \|\Delta_h^k J_1 \varphi\|_p + c_2 \left(\int_0^{2\pi} dx \left| \int_{h < |t| < \pi} D^1 \psi_\alpha(t) (\Delta_h^k J_1 \varphi)(x - t) dt \right|^p \right)^{1/p}.$$

Сделаем замену $x - t = y$ и применим неравенство Минковского. Тогда с учетом (3.3) получим

$$\|\tilde{J}\varphi\|_p \leq c_1 h^{\alpha-1} \|\Delta_h^k J_1\|_p + c_3 \|\Delta_h^k J_1\|_p \int_h^\infty t^{\alpha-2} dt \leq ch^{\alpha-1} \|\Delta_h^k J_1\|_p. \quad (3.9)$$

При $p = \infty$ получаем аналогичную оценку. Пусть теперь $\alpha > 1$. С учетом тождества $D^s J_s = I$, $D^s = \frac{d^s}{dt^s}$ и равенства (3.7) имеем $\Delta_h^k = D^s J_s \Delta_h^k = D^s \Delta_h^k J_s$, где $s = [\alpha] + 1$. Поэтому

$$J_{(\alpha)} \varphi = \int_{|t| < \pi} \psi_\alpha(t) (D^s \Delta_h^k J_s \varphi)(x - t) dt. \quad (3.10)$$

Интегрируя (3.10) по частям $(s - 1)$ раз, получим $J_{(\alpha)} \varphi = J' \varphi + J'' \varphi$, где (ср. (3.8))

$$\begin{aligned} J' \varphi &= c \int_{|t| < h} D^{s-1} \psi_\alpha(t) (D^1 \Delta_h^k J_s \varphi)(x - t) dt, \\ J'' \varphi &= c \int_{h < |t| < \pi} D^{s-1} \psi_\alpha(t) (D^1 \Delta_h^k J_s \varphi)(x - t) dt. \end{aligned}$$

Оценка $J'\varphi$ аналогична случаю $0 < \alpha < 1$. Для J'' имеем

$$J''\varphi = c_s D^{s-1} \psi_\alpha(-h) (\Delta_h^k J_s \varphi)(x+h) - c_s D^{s-1} \psi_\alpha(h) (\Delta_h^k J_s \varphi)(x-h) + \\ + c \int_{h < |t| < \pi} D^s \psi_\alpha(t) (\Delta_h^k J_s \varphi)(x-t) dt. \quad (3.11)$$

Сделаем замену $x-t = y$ и применим неравенство Минковского. Получим

$$\|J''\varphi\|_p \leq b_s h^{\alpha-s} \|(\Delta_h^k J_s \varphi)(\cdot)\|_p + \|(\Delta_h^k J_s \varphi)(\cdot)\|_p \int_h^\infty t^{\alpha-s-1} dt. \quad (3.12)$$

Следовательно

$$\|J''\varphi\|_p \leq b_s h^{\alpha-s} \|(\Delta_h^k J_s \varphi)(\cdot)\|_p. \quad (3.13)$$

При $p = \infty$ оценка аналогична. Таким образом, при $\alpha > 0$

$$\|(\Delta_h^k J_{(\alpha)} \varphi)(\cdot)\|_p \leq \sum_{j=s-1}^s b_j h^{\alpha-j} \|(\Delta_h^k J_j \varphi)(\cdot)\|_p, \quad (3.14)$$

откуда

$$M_{p, \omega_\alpha, 0, k}(J_{(\alpha)} \varphi) \leq c \sum_{j=s-1}^s b_j M_{p, \omega_j, 0, k}(J_j \varphi), \quad (3.15)$$

и остается воспользоваться леммой 3.1. Лемма 3.2 доказана.

§4. ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ВЕЙЛЯ-МАРШО.

ИЗОМОРФИЗМ

Для произвольного $\alpha > 0$ введем дробную производную Вейля-Маршо

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\pi d_l(\alpha)} \int_0^{2\pi} (\Delta_{-t}^l f)(x) \frac{d}{dt} \psi_{1-\alpha}(t) dt, \quad l > \alpha, \quad x \in (0, 2\pi), \quad (4.1)$$

усеченную производную Вейля-Маршо

$$(\mathcal{D}_\epsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\pi d_l(\alpha)} \int_\epsilon^{2\pi} (\Delta_{-t}^l f)(x) \frac{d}{dt} \psi_{1-\alpha}(t) dt, \quad l > \alpha, \quad x \in (0, 2\pi), \quad (4.2)$$

а также усеченную производную Маршо

$$(\mathbb{D}_\epsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_l(\alpha)} \int_\epsilon^\infty \frac{(\Delta_{-t}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad l > \alpha, \quad x \in (0, \infty). \quad (4.3)$$

Во всех этих производных

$$d_l(\alpha) = -\Gamma(-\alpha) \sum_{n=0}^l (-1)^{n-1} C_l^n n^\alpha, \quad \alpha > 0$$

(см. [13], стр. 100 – 102). Очевидно, производные (4.2) и (4.3) определены для всех $f \in L_{p,0}$ и переводят это пространство в себя.

Лемма 4.1. Пусть $f(x) \in L_p$, $1 \leq p < \infty$. Усеченные дробные производные $\mathcal{D}_\varepsilon^\alpha f$ и $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ сходятся (как по норме так и для почти всех x) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{D}_\varepsilon^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f. \quad (4.4)$$

Доказательство. Отметим вначале, что эта лемма для $l = 1$ есть в [13], стр. 270. Для простоты докажем лемму для $l = 2$. Общий случай можно доказать аналогично. Из того, что

$$\psi_{1-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2\pi \sum_{k=0}^n (t + 2\pi k)^{-\alpha} - \frac{(2\pi n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right],$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \psi_{1-\alpha}(t) = -\frac{2\pi\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (t + 2\pi n)^{-1-\alpha}, \quad 0 < t \leq 2\pi. \quad (4.5)$$

С учетом (4.5) имеем для производной (4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varepsilon^\alpha f = & -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)d_2(\alpha)} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{(\Delta_{-t}^2 f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt - \int_{2\pi}^\infty \frac{(\Delta_{-t}^2 f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt + \right. \\ & \left. + \int_\varepsilon^{2\pi} (\Delta_{-t}^2 f)(x) \sum_{n=1}^{\infty} (t + 2\pi n)^{-1-\alpha} dt \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поменяем во втором слагаемом порядок суммирования и интегрирования, сделаем замену $t + 2\pi n = y$ и учтем, что $(\Delta_{-t}^2 f)(x) = (\Delta_{-y}^2 f)(x)$. В результате будем иметь

$$(\mathcal{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = (\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) + c_\alpha \int_{2\pi}^\infty \frac{b_\varepsilon(t)}{t^{1+\alpha}} (\Delta_{-t}^2 f)(x) dt, \quad (4.7)$$

где c_α — постоянная и

$$b_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (2\pi k, \varepsilon + 2\pi k), \\ 0 & \text{при } t \notin (2\pi k, \varepsilon + 2\pi k), \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \quad t^{-\alpha-1} b_\varepsilon(t) \in L_1(0, \infty).$$

Далее, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{2\pi}^\infty \frac{b_\varepsilon(t)}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} [(2\pi n)^{-\alpha} - (2\pi n + \varepsilon)^{-\alpha}] \rightarrow 0.$$

Поэтому из (4.7) в силу неравенства Минковского имеем

$$\|\mathcal{D}_\varepsilon^\alpha f - \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\|_p \leq c \|f\|_p \int_{2\pi}^\infty \frac{b_\varepsilon(t)}{t^{1+\alpha}} dt \rightarrow 0,$$

откуда следует сходимость по норме L_p . Из (4.6) в силу теоремы Лебега о предельном переходе следует сходимость почти всюду. Лемма 4.1 доказана.

Как известно (см. [13], стр. 267) на функциях $\varphi \in L_{1,0}(0, 2\pi)$ дробный интеграл Вейля совпадает с дробным интегралом Римана-Лиувилля по всей прямой :

$$J_{(\alpha)}\varphi = J_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.8)$$

где интеграл справа понимается как условно сходящийся :

$$\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-2\pi n}^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (4.9)$$

Если обозначить

$$J_N^{(\alpha)}\varphi = \int_0^{2\pi N} \xi^{\alpha-1} \varphi(x-\xi) d\xi, \quad (4.10)$$

то из сказанного выше следует, что для $\varphi \in L_{p,0}$ почти всюду $\lim_{N \rightarrow \infty} (J_N^{(\alpha)}\varphi)(x) = J_{(\alpha)}\varphi$. Можно дать оценку сходимости и по норме

$$\|J_N^{(\alpha)}\varphi - J_{(\alpha)}\varphi\|_q \leq cN^{\alpha-1+1/q-1/p} \|\varphi\|_p, \quad p \leq q < \infty. \quad (4.11)$$

Лемма 4.2. Пусть $f \in L_{p,0}$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$J_{(\alpha)}\mathcal{I}_\varepsilon^\alpha f = \mathcal{I}_\varepsilon^\alpha J_{(\alpha)}f. \quad (4.12)$$

Доказательство. Заметим, что (4.12) имеет место, если $J_{(\alpha)}$ заменить на $J_N^{(\alpha)}$ при любом N , после чего можно воспользоваться (4.11) в случае $p = q$. В результате получим (4.12).

Теорема 4.1. Пусть $\alpha > 0$. Для $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ следующие утверждения эквивалентны :

- 1) существует $\varphi \in L_{p,0}$ такая, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{I}_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p = 0$;
- 2) $f(x) = f_0 + J_{(\alpha)}\varphi$, где $f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$;
- 3) $\|\mathcal{I}_\varepsilon^\alpha f\|_p \leq c$, где c не зависит от ε .

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $f_0 = 0$, так как если

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \mathcal{I}_\varepsilon^\alpha f = \varphi, \text{ то } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \mathcal{I}_\varepsilon^\alpha (f - f_0) = \varphi \text{ и } (f - f_0)_0 = 0.$$

а) Пусть выполнено 2), т.е. $f(x) = J_{(\alpha)}\varphi$, $\varphi \in L_{p,0}$, но в силу (4.8) отсюда следует, что $f(x) = J_{\alpha}\varphi$. Применяя формулу (6.6) из [13], стр. 106 и переходя в ней к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме L_p , получим

$$\|\mathcal{D}_{\varepsilon}^{\alpha} f - \varphi\|_p \leq \int_0^{\infty} K_{l,\alpha}(t) \|\varphi(x - \varepsilon t) - \varphi(x)\|_p dt,$$

откуда с учетом свойств $K_{l,\alpha}(t)$ (см. [13]) в силу мажорантной теоремы Лебега следует 1) а с ним и 3).

б) Пусть теперь выполнено 1). Тогда в силу ограниченности оператора $J_{(\alpha)}$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|J_{(\alpha)} \mathcal{D}_{\varepsilon}^{\alpha} f - J_{(\alpha)}\varphi\|_p = 0.$$

Поскольку

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \mathcal{D}_{\varepsilon}^{\alpha} J_{(\alpha)} f = \int_0^{\infty} K_{l,\alpha}(t) f(x - \varepsilon t) dt = f(x),$$

то с учетом (4.12) получаем 2).

с) Наконец, пусть выполнено 3). В этом случае доказательство аналогично доказательству достаточной части теоремы 6.2 в [13] (стр. 107 – 108). Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. Пусть $\alpha > 0$ и $1 \leq n \leq l$. Для оператора дробного дифференцирования (4.1) справедлива оценка типа Зигмунда :

$$\omega_p^n(\mathcal{D}^{\alpha} f, \delta) \leq c \left(\int_0^{\delta} \frac{\omega_p^l(f, t)}{t^{1+\alpha}} dt + \delta^{-\alpha} \omega_p^n(f, \delta) \right). \quad (4.13)$$

Доказательство. Отметим вначале, что при $n = l > \alpha$ в правой части (4.13) остается лишь первое слагаемое. Имеем

$$(\Delta_h^n \mathcal{D}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f)(x) \frac{d}{dt} \psi_{1-\alpha}(t) dt. \quad (4.14)$$

Применяя (3.3) и неравенство Минковского, получим

$$\|(\Delta_h^n \mathcal{D}^{\alpha} f)(x)\|_p \leq J' \varphi + J'' \varphi, \quad (4.15)$$

где

$$J' \varphi = c \int_{|t| < h} \frac{\|(\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f)(x)\|_p}{|t|^{1+\alpha}} dt,$$

$$J''\varphi = c \int_{h < |t| < \pi} \frac{\|(\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f)(x)\|_p}{|t|^{1+\alpha}} dt.$$

Для оценки $J'\varphi$ и $J''\varphi$ воспользуемся неравенствами

$$\|\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f\|_p \leq c \omega_p^n(f, h), \quad (4.16)$$

$$\|\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f\|_p \leq c \omega_p^l(f, |t|), \quad (4.17)$$

$$\omega_p^l(f, |t|) \leq c \omega_p^n(f, |t|), \quad l \geq n. \quad (4.18)$$

С учетом (4.17) имеем

$$J'\varphi \leq c \int_{|t| < h} \frac{\omega_p^l(f, |t|)}{|t|^{1+\alpha}} dt \leq c \int_0^h \frac{\omega_p^l(f, |t|)}{|t|^{1+\alpha}} dt.$$

Из (4.16) получим $J''\varphi \leq ch^{-\alpha} \omega_p^n(f, h)$. Из этих оценок с учетом (4.15) легко выводится нужная оценка.

Теорема 4.3. Пусть $\alpha > 0$ и $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$. Тогда операторы $\mathcal{D}^\alpha$ и $\mathcal{I}^\alpha$ ограниченно действуют из $H_p^{\omega_\alpha, m, k}(0, 2\pi)$ в $H_p^{m, k}(0, 2\pi)$, где

$$\omega_\alpha(h) = h^\alpha \omega(h), \quad 0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m + k - \alpha.$$

Доказательство. Оценка для $\sup_{h>0} \frac{\omega_p^k(\mathcal{D}^\alpha f, h)}{\omega(h)}$ немедленно следует из (4.13).

Замечание. При $m = \lambda = 0$ теорема 4.3 верна при дополнительном условии

$$\int_0^h t^{-1} \omega(t) dt \leq c \omega(h).$$

Из результатов §§3,4 вытекает следующее утверждение об изоморфизме.

Теорема 4.4. Пусть $0 < \lambda < \mu$, $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$ и

$$k \geq \begin{cases} \mu + \alpha, & \text{при } \alpha \in \mathcal{N}, \\ \mu + [\alpha] + 1, & \text{при } \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \end{cases}$$

Тогда оператор дробного интегрирования Вейля изоморфно отображает пространство $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$ на пространство $H_p^{\omega_\alpha, 0, k}(0, 2\pi)$.

Доказательство. В силу лемм 3.1, 3.2 и теоремы 4.3 имеем

$$J_{(\alpha)} : H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi) \mapsto H_p^{\omega_\alpha, 0, k}(0, 2\pi),$$

$$\mathbb{D}^\alpha : H_p^{\omega_\alpha, 0, k}(0, 2\pi) \mapsto H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать представимость функций из $H_p^{\omega_\alpha, 0, k}(0, 2\pi)$ функциями $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$. Так как $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi) \subset L_p(0, 2\pi)$, то согласно теореме 4.1 функция $f(x) \in H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$ представима дробным интегралом Вейля от функций из $L_p(0, 2\pi)$, если $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ сходится по норме $L_p(0, 2\pi)$. Так как $\omega(t)/t^\alpha$ почти возрастает при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{\varepsilon_1}^\alpha f - \mathbb{D}_{\varepsilon_2}^\alpha f\|_p &\leq \frac{1}{d_1(\alpha)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{(\Delta_{-t}^k f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\omega_p^k(f, t)}{t^{1+\alpha}} dt \leq c \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\omega_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}} dt \leq c \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\omega(t)}{t} dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому $f = J_{(\alpha)}\varphi$, $\varphi \in L_p(0, 2\pi)$. Так как $\mathbb{D}^\alpha J_\alpha \psi = \psi$, $\psi \in L_1(0, 2\pi)$ и $p \geq 1$, то $\varphi \in H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$. Теорема 4.4 доказана.

§5. ОЦЕНКИ ТИПА ЗИГМУНДА

ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Такие оценки при $0 < \alpha < 1$ имеются в монографии [13], стр. 272 – 273, и их также используют при решении задачи об изоморфизме пространств $H_\infty^\omega(0, 2\pi)$. Здесь мы покажем, что эти оценки можно получить и при произвольном $\alpha > 0$.

Теорема 5.1. Если

$$\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}, \quad l \geq [\alpha] + 1, \quad (5.1)$$

то справедливо следующее неравенство :

$$\omega_p^l(J_{(\alpha)}\varphi, \delta) \leq c \left(\int_0^\delta \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{1-\alpha}} dy + \delta^l \int_\delta^\pi \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{l+1-\alpha}} dy \right). \quad (5.2)$$

Доказательство. Используя представление типа (3.8), находим

$$\|\Delta_h^l J_{(\alpha)}\varphi\|_p \leq A_1 + A_2, \quad (5.3)$$

где

$$A_1 = \int_{|t| < (1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|) |(\Delta_h^l \psi_\alpha)(t)| dt,$$

$$A_2 = \int_{|t| > (1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|) |(\Delta_h^l \psi_\alpha)(t)| dt,$$

Так как $[\alpha] \leq m \leq l$, то

$$|(\Delta_h^l \psi_\alpha)(t)| \leq ch^m |t|^{\alpha-1-m}. \quad (5.4)$$

Для оценки A_1 применим (5.4) с $m = [\alpha]$:

$$A_1 \leq \int_{|t| < (1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|) h^{[\alpha]} |t|^{\alpha-[\alpha]-1} dt \leq ch^\alpha \omega_p^l(\varphi, h).$$

При оценке A_2 в (5.4) берем $m = l$:

$$A_2 \leq \int_{|t| > (1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|) h^l |t|^{\alpha-l-1} dt, \quad l \geq [\alpha] + 1.$$

При $\alpha > 0, l > 0, \delta \in (0, 1)$ функция

$$\int_0^\delta \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{1-\alpha}} dy + \delta^l \int_\delta^1 \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{l+1-\alpha}} dy \quad (5.5)$$

почти возрастает (см. [5]). Объединение оценок для A_1, A_2 дает следующее :

$$\|\Delta_h^l J_{(\alpha)} \varphi\|_p \leq c \left(\int_0^h \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{1-\alpha}} dy + h^l \int_h^\pi \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{l+1-\alpha}} dy \right).$$

В силу монотонности по h отсюда, переходя к впр по $|h| < \delta$, получаем требуемое.

Следствие 5.1. Пусть

$$\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}, \quad l \geq [\alpha] + 2. \quad (5.6)$$

Тогда

$$\omega_p^l(J_{(\alpha)} \varphi, \delta) \leq c \delta^\alpha \omega_p^1(\varphi, \delta). \quad (5.7)$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.1 и того, что функции (5.5) и $\delta^\alpha \omega_p^1(\varphi, \delta)$ эквивалентны.

Теорема 5.2. Пусть

$$\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha \in \mathcal{N}, \quad l \geq \alpha + 1. \quad (5.8)$$

Тогда

$$\omega_p^l(J_{(\alpha)} \varphi, \delta) \leq c \delta^\alpha \omega_p^1(\varphi, \delta). \quad (5.9)$$

Доказательство. Пусть вначале $\alpha = 1$. В этом случае $\psi_1(t) = \pi - t$. При $l \geq 2$ имеем

$$(\Delta_h^l \psi_1)(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in (0, 2\pi - lh), \\ c, & \text{при } t \in (2\pi - lh, 2\pi). \end{cases}$$

Поэтому в (5.3) будем иметь

$$\|\Delta_h^l J_{(1)} \varphi\|_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} \omega_p^1(\varphi, |t|) |(\Delta_h^l \psi_1)(t)| dt \leq \int_{-lh}^0 \omega_p^1(\varphi, |t|) dt \leq ch \omega_p^1(\varphi, h),$$

откуда следует (5.9) при $\alpha = 1$. Пусть $\alpha = k \in \mathcal{N}$, $l \geq k+1$. Так как $\psi_k(t)$ является многочленом степени k , то для $t \in (0, 2\pi - lh)$ имеем $(\Delta_h^l \psi_k)(t) = 0$. Функция $\psi_k(t)$ непрерывно дифференцируема при $k > 2$. Поэтому можно использовать формулу (3.3'). В оценке (5.4) при $m = k - 1$

$$|(\Delta_h^l \psi_k)(t)| \leq ch^{k-1} |t|^{k-1-(k-1)} = ch^{k-1}, \quad t \in (-lh, 0).$$

Следовательно

$$\|\Delta_h^l J_{(k)} \varphi\|_p \leq ch^{k-1} \int_{-lh}^0 \omega_p^1(\varphi, t) dt \leq ch^k \omega_p^1(\varphi, h),$$

что доказывает теорему 5.2.

Теорема 5.3. Пусть $0 \leq \lambda < \mu < 1$, $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$. Тогда оператор дробного интегрирования Вейля $J_{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ ограниченно действует из $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$ в $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$, где $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 1 + \alpha$.

Доказательство немедленно следует из леммы 1.3 и оценки (5.9).

Теорема 5.4. Для $0 \leq \lambda < \mu < 1$, $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$ оператор дробного интегрирования Вейля $J_{(\alpha)}$, $\alpha \notin \mathcal{N}$, $\alpha > 0$ ограниченно действует из $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$ в $H_p^{\omega, 0, k}(0, 2\pi)$, где $1 \leq p \leq \infty$, $k > \mu + \alpha$.

Доказательство вытекает из леммы 1.3 и оценки (4.13).

Дадим теперь формулировку теоремы об изоморфизме, которая при данном подходе несколько отличается от формулировки теоремы 4.4.

Теорема 5.5. Пусть $0 < \lambda < \mu < 1$, $\omega(h) \in A_{\lambda, \mu}$ и

$$k \geq \begin{cases} 1 + \alpha, & \text{при } \alpha \in \mathcal{N}, \\ [\mu + \alpha] + 1, & \text{при } \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \end{cases}$$

Тогда оператор дробного интегрирования Вейля изоморфно отображает пространство $H_p^{\omega,0,k}$ на пространство $H_p^{\omega_\alpha,0,k}$.

Доказательство с учетом теорем 5.3 и 5.4 аналогично доказательству теоремы 4.4 и поэтому опускается. Отметим лишь, что подход, связанный с оценками Зигмунда, не требует использования независимости пространств и в некоторых случаях позволяет понизить порядок конечной разности в определении пространств.

В заключение отметим, что результаты §§3–5 легко переносятся на случай характеристик из классов Φ_s^m типа Бари–Стечкина.

ABSTRACT. The paper studies fractional integro-differentiation by Weyl in the generalized periodic Hölder classes $H_p^{\omega,m,k}(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$. These classes depend on the characteristic $\omega(t)$ from the classes $A_{\lambda,\mu}$ or from the Bary–Stechkin type classes Φ_s^m , where m stands for the order of derivative and k for the order of finite difference. The main result is an isomorphism theorem asserting, that for an arbitrary order $\alpha > 0$ the Weyl's fractional integration operator $J_{(\alpha)}\varphi = \psi_\alpha * \varphi$ is an isomorphism between the spaces $H_p^{\omega,m,k}(0, 2\pi)$ and $H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0, 2\pi)$, where

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{\alpha\pi}{2})}{k^\alpha}, \quad \omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t).$$

The parameters m, k, ω satisfy certain consistency conditions. For $\omega \in A_{\lambda,\mu}$ we require $0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m + k$, while for $\omega \in \Phi_s^m$ these conditions are given in terms of index numbers.

We also establish Zigmund type bounds for integral modulus of continuity and investigate the properties of fractional integro-differentiation operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Баба-заде, "Дробный интеграл в модулях гладкости", Спец. вопросы теории функций, т. 4, стр. 57–73, 1989.
2. С. С. Волосивец, "Об ε -энтропии и поперечниках одного компакта гладких функций в пространстве функций ограниченной p -вариации", Вестник МГУ, сер. 1, № 5, стр. 81–84, 1992.
3. А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1980.
4. Н. К. Карапетянц, Х. М. Мурдаев, А. Я. Якубов, "Об изоморфизме, осуществляемом дробными интегралами в обобщенных классах Гельдера", ДАН СССР, т. 314, № 2, стр. 288–291, 1990.
5. Н. К. Карапетянц, З. У. Муссалаева, "Дробное интегрирование по Вейлю в обобщенных классах Гельдера", Деп. ВИНТИ, № 2100-b93, 1993.
6. Г. П. Костомаров, "О свойствах интегральных операторов Вейля", Проблемы

- матем. анализ, ЛГУ, № 2, стр. 187 – 191, 1984.
7. С. Г. Крейн, Ю. И. Петурин, Е. М. Семенов, Интерполяция линейных операторов, Наука, М., 1978.
 8. Х. М. Мурдаев, “Весовые оценки модулей непрерывности дробных интегралов от функций, имеющих с весом заданный модуль непрерывности”, Деп. ВИНТИ, № 3351-b, 1986.
 9. З. У. Муссалаева, “Обобщенные гильбертовские пространства с характеристиками из класса типа Бари–Стечкина. 1. Изоморфизм”, Деп. ВИНТИ, № 3724-b92, 1992.
 10. З. У. Муссалаева, “Обобщенные гильбертовские пространства с характеристиками из класса типа Бари–Стечкина. 2. Классы характеристик”, Деп. ВИНТИ, № 3725-b92, 1992.
 11. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1980.
 12. К. В. Руновский, “О соотношениях между периодическими и непериодическими модулями гладкости”, Матем. заметки, т. 52, № 2, стр. 111 – 113, 1992.
 13. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Наука и техника, Минск, 1987.
 14. С. Г. Самко, А. Я. Якубов, “Оценка Зигмунда для модуля непрерывности дробного порядка сопряженной функции”, Изв. Вузов, Матем., т. 12, стр. 49 – 53, 1985.
 15. С. Г. Самко, “Об ограниченности сингулярного оператора в весовых обобщенных гильбертовских пространствах $H_0^\mu(\tau, \rho)$ в терминах верхнего и нижнего индексов”, Деп. ВИНТИ, № 349-b91, 1990.
 16. С. А. Теляковский, “О приближении суммами Фурье дифференцируемых функций высокой гладкости”, Труды ин-та. РАН, т. 198, стр. 183 – 211, 1992.
 17. M. N. Khatib, “About one-dimensional fractional integrals of classes”, Сообщения АН Груз.ССР, т. 139, № 1, стр. 41 – 43, 1990.
 18. L. Maligranda, Indices and Interpolation. Dissertationes mathematicae, vol. 220-14, PAN, Warsaw, 1985.

20 марта 1995

Ростовский государственный университет
Россия

О ЧИСЛЕ РАЗЛИЧНЫХ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНА

М. А. Мкртчян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

В работе [1] Р. Браун получил некоторые результаты относительно числа различных нулей многочлена. Тому же вопросу посвящена настоящая заметка.

Теорема 1. *Количество различных нулей многочлена*

$$P(z) = 1 + a_k z^k + \dots + a_n z^n,$$

где $n \geq k$, $a_n \neq 0$, не меньше k .

Теорема 2. *Количество различных нулей многочлена*

$$P(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_k z^k + a_m z^m + \dots + a_n z^n,$$

где $n \geq m > k \geq 0$, $a_n a_k a_m \neq 0$, не меньше $\frac{n}{n - m + k + 1}$.

При $m = n$ из теоремы 2 получаем

Следствие. *Количество различных нулей многочлена*

$$P(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_k z^k + a_n z^n,$$

где $n > k \geq 0$ и $a_n a_k \neq 0$, не меньше $\frac{n}{k + 1}$.

Замечание. Если в теореме 2 положить $k = 0$ и $m = k$, то оценка числа различных нулей многочлена $P(z)$ будет $\frac{n}{n - k + 1}$. Так как $n \geq k$, то

$$\frac{n}{n - k + 1} = 1 + \frac{k - 1}{n - k + 1} \leq 1 + k - 1 = k,$$

т.е. результат теоремы 1 сильнее результата теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. При $P(z)$ точка $z = 0$ является 1-точкой кратности k . Следовательно, число различных 1-точек $P(z)$, т.е. число различных корней уравнения $P(z) - 1 = 0$, не больше чем $n - k + 1$ ($z = 0$ есть k -кратный корень, а остальные могут быть простыми корнями).

Известен следующий факт (см. [2]) : количество различных точек, в которых многочлен степени n принимает значения 0 или 1, не больше $n + 1$. Если обозначить через $N(a)$ количество различных a -точек многочлена $P(z)$, т.е. количество различных корней уравнения $P(z) - a = 0$, то из вышесказанного следует

$$N(1) \leq n - k + 1, \quad N(0) + N(1) \geq n + 1.$$

Отсюда $N(0) \geq k$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $P(\xi) = 0$, то в условиях теоремы 2 кратность $z = \xi \neq 0$ не больше $n - m + k + 1$. Действительно, $k + 1$ -ая производная многочлена $P(z)$ представляется в виде

$$P^{(k+1)}(z) = z^{m-k-1}Q(z),$$

где $Q(z)$ - многочлен степени $n - m$. Следовательно, $z = \xi$ может быть нулем многочлена $P^{(k+1)}(z)$ с кратностью не больше $n - m$. Тогда кратность нуля $z = \xi$ многочлена $P(z)$ не больше $n - m + k + 1$. А так как число нулей многочлена $P(z)$ с учетом их кратностей равно n , то $N(0) \cdot (n - m + k + 1) \geq n$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Brown, A. Robert, "A topological bound on the number of distinct zeros of an analytic function", Pacific J. of Mathem., vol. 118, № 1, 1985.
2. М. А. Мкртчян, "Об одной задаче Янга", - в кн : Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, стр. 237, Красноярск, 1980.

26 февраля 1995

Красноярский региональный
центр развития образования
Россия

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 31

НОМЕРА 1 — 6

1996

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

	НОМЕР
О задаче Римана-Гильберта для n -голоморфных функций Г. М. Айрапетян.....	3
О решениях типа Жевре гипозэллиптических уравнений Г. О. Акопян, В. Н. Маркарян.....	2
Смешанная краевая задача для квазилинейных вырождающихся эволюционных уравнений высокого порядка Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбадян.....	3
Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях Р. В. Амбарцумян.....	4
Модель случайных пуассоновских плоскостей в туннелестроении Р. В. Амбарцумян, А. дер Кюрегян, В. К. Оганян, Г. С. Сукиасян, Р. Г. Арамян.....	2
Функция собственных значений семейства операторов Дирака Т. Н. Арутюнян.....	6
Об интерполяции пространств функций обобщенной гладкости и их представление с помощью анизотропных классов А. Г. Багдасарян.....	1
О построении целых и квазицелых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угловой области, I Г. В. Бадалян.....	6
Обобщение теоремы Сегё А. А. Вагаршакян.....	1
Эквивалентное обобщение теоремы Аренса-Иллза П. С. Геворкян.....	5
Асимптотические верхние границы для риска оценок линейных функционалов от спектральной плотности М. С. Гиновян.....	5
Вопросы разрешимости для одного класса интегральных уравнений Винера-Хопфа Г. А. Григорян.....	2
Теорема Фату для обобщенных аналитических функций С. А. Григорян.....	6

Об одном представлении функции $E_p(z, \mu)$ Э. А. Даниелян, З. С. Микаелян	5
Дробные интегралы по Вейлю в обобщенных гильбертовских классах Н. К. Карапетянц, З. У. Муссалаева	6
О коммутативности образа A -значной аналитической функции М. И. Караханян	1
О сильно гипозллиптических многочленах В. Н. Маргарян	5
Существенно-совершенные и существенно-орсовершенные графы С. Е. Маркосян	5
О характеристической функции диссипативного канонического оператора П. Э. Мелик-Адамян	2
S -полупараллельные подмногообразия в пространствах постоянной кривизны как огибающие S -параллельных подмногообразий В. А. Мирзоян	5
О числе различных нулей многочлена М. А. Мкртчян	6
Модификация метода резолюций Робинсона на случай использования встроенных предикатов С. А. Нигиян	5
Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений Г. Р. Оганесян	1
Асимптотические решения сингулярных гиперболических уравнений Г. Р. Оганесян	3
Адиабатические инварианты для n связанных линейных осцилляторов Г. Р. Оганесян, Е. А. Тароян	6
Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II В. К. Оганян, А. Н. Давтян	4
Весовые интегральные представления функций в полидиске и в пространстве C^n А. И. Петросян	1
О сходимости и явлении Гиббса рядов Франклина О. Г. Саргсян	1
О многомерных простых фреймовых валкуациях Г. С. Сукиасян	4
Лемма Шварца для гармонических функций в шаре и ее применение Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева	5
О замыкании системы многочленов в весовом пространстве <u>И. О. Хачатрян</u>	2
Обобщенные В-сплайны Г. Р. Чугуриян	2
ВКБ-представление для уравнений с точкой поворота бесконечного порядка К. А. Ягджян	3

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 31

НОМЕР 6

1996

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

Функция собственных значений семейства операторов Дирака Т. Н. Арутюнян	5
О построении целых и квазичеслых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угловой области, I Г. В. Бадалян.....	15
Теорема Фату для обобщенных аналитических функций С. А. Григорян	31
Адиабатические инварианты для n связанных линейных осцилляторов Г. Р. Оганесян, Е. А. Тароян	53
Дробные интегралы по Вейлю в обобщенных гильбертовских классах Н. К. Карапетянц, З. У. Муссалаева.....	65
Краткие сообщения	
О числе различных нулей многочлена М. А. Мкртчян	87
Содержание тома 31.....	89

CONTENTS

VOLUME 31

NUMBER 6

1996

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

PAGES

The eigenvalue function of a family of Dirac operators T. N. Arutyunyan	1
On construction of entire and quasi-entire functions of finite order uniformly decreasing in the angular domain, I H. V. Badalyan	11
Fatou theorem for generalized analytic functions S. A. Grigorian	26
Adiabatic invariants for N -connected linear oscillators G. R. Hovhannisyanyan, Y. A. Taroyan	47
Weyl fractional integrals in the generalized Hölder classes N. K. Karapetianz, Z. U. Mussalaeva	58
Brief Communications	
On the number of distinct zeros of a polynomial M. A. Mkrtchian	78
Contents of Volume 31	80

©1997 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.