ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, ովքեր ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը ոչ ավելի քան 5–6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ РИСКА ОЦЕНОК ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ*

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

Пусть $X(u)$ – стационарный гауссовский процесс со средним нуль, и спектральной плотностью $f(\lambda)$. Мы рассматриваем задачу непараметрического статистического оценивания линейного функционала $L(f)$ на основе выборки $\{X(u),\ 0 \le u \le T\}$. Для спектральных плотностей из гельдеровских классов и функций потерь $w(x)$, удовлетворяющих условию $0 \le w(x) \le C_1 \exp\{C_2|x|\}$ с положительными постоянными C_1 и C_2, мы получаем асимптотические верхние границы для рисков $\mathrm{E}\{w(|L_T - L(f)|)\}$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(u)$, $u \in U$ – центрированный стационарный гауссовский процесс, обладающий спектральной плотностью (с.п.) $f(\lambda)$, причем $f(-\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in Q$. Рассматривается одновременно два случая : случай непрерывного параметра (н.п.), где $U = (-\infty, \infty)$, и случай дискретного параметра (д.п.), где $U = \{0, \pm1, \pm2, \dots\}$. В случае н.п. областью изменения Q переменной λ является $Q = (-\infty, \infty)$, а в случае д.п. – $Q = [-\pi, \pi]$. В случае непрерывного параметра процесс $X(u)$ предполагается измеримым и среднеквадратично непрерывным.

В настоящей работе мы рассматриваем следующую общую задачу непараметрического статистического оценивания (ср. с [6] – [9], [12]). Пусть нам известна частная реализация $\mathrm{X}_T = \{X(u),\ 0 \le u \le T$ (или $u = \overline{1,T}$ в случае д.п.)$\}$ процесса $X(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in Q$. Пусть $L(\cdot)$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_p = L_p(Q)$, $p > 1$. Задача

---

*Статья написана при частичной финансовой поддержке АО "Прометевс"

состоит в оценивании значения $L(f)$ на основе наблюдения $\mathbf{X}_T$ при условии, что с.п. $f(\lambda)$ принадлежит заданному множеству Σ спектральных плотностей.

Предположим, что функционал $L(\cdot)$ непрерывен в $L_p(Q)$, $p > 1$. Как известно (см., например, [16]), такой функционал допускает представление

$$L(f) = \int_Q f(\lambda)g(\lambda)d\lambda, \tag{1}$$

где $g(\lambda) \in L_q(Q)$; $1/p + 1/q = 1$ и $||L|| = ||g||_q$. Здесь и ниже $||\cdot||_q$ обозначает L_q-норму. Обозначим через $\mathrm{H}_p(\beta)$, $\beta = \alpha + r$, $0 < \alpha < 1$, $r \in N$ гельдеровский класс функций, т.е. класс тех функций $\psi(\lambda) \in L_p$, которые имеют r-ые производные в L_p и удовлетворяют условию

$$||\psi^{(r)}(\cdot + h) - \psi^{(r)}(\cdot)||_p \leq C\,|h|^\alpha. \tag{2}$$

(Здесь и всюду ниже буквой C будем обозначать различные положительные постоянные).

Обозначим через $\Sigma_p(\beta)$ множество всех спектральных плотностей, принадлежащих пространству $\mathrm{H}_p(\beta)$, а через $\mathbf{W}$ – множество всех симметрических, неубывающих на положительной полуоси функций потерь $w : \mathbb{R}^1 \longmapsto \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условию : $0 \leq w(x) \leq C_1 \exp\{C_2|x|\}$ для некоторых положительных постоянных C_1 и C_2. Обозначим через $L_T = L_T(\mathbf{X}_T)$ статистическую оценку функционала $L(f)$, построенную на основе наблюдения $\mathbf{X}_T$. Отметим, что в качестве статистической оценки для $L(f)$ можно выбрать любое измеримое отображение $L_T : \mathbb{R}^T \longmapsto \mathbb{R}^1$. Качество оценки L_T функционала $L(f)$ мы измеряем величиной

$$\Delta_T(L_T, f) = \mathbf{E}_f\{w(|L_T - L(f)|)\},$$

где $\mathbf{E}_f\{\cdot\}$ обозначает математическое ожидание относительно меры, порожденной спектральной плотностью f. Пусть Δ_T обозначает минимаксный риск статистической оценки L_T, т.е.

$$\Delta_T = \sup_{||L||=1} \inf_{L_T} \sup_{f \in \Sigma} \mathbf{E}\{w(|L_T - L(f)|)\}.$$

В настоящей работе мы получаем асимптотические верхние границы для рисков Δ_T при $T \to \infty$. Эти границы зависят от свойств функционала $L(f)$ и множества

Σ. Отметим, что в случае квадратичной функции потерь эта задача была рассмотрена автором в работе [8], аналогичная задача для плотности распределения была рассмотрена И. А. Ибрагимовым и Р. З. Хасьминским в работе [14].

§1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим статистическую оценку $L_{T,A}$ линейного функционала $L(f)$ (ср. [2], [6] – [9], [14]) :

$$L_{T,A} = \int_Q I_T(\lambda) g_A(\lambda) d\lambda, \tag{3}$$

где $A = A(T) \leq T$, $A(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, $g_A(\lambda)$ – сингулярный интеграл Дирихле, соответствующий функции $g(\lambda)$ (см. формулу (5) ниже), а $I_T(\lambda)$ – так называемая *периодограмма* процесса $X(u)$:

$$I_T(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi T} \left| \sum\limits_{u=1}^{T} X(u) e^{-iu\lambda} \right|^2, & \text{в случае д.п.,} \\ \frac{1}{2\pi T} \left| \int\limits_{0}^{T} X(u) e^{-iu\lambda}\, du \right|^2, & \text{в случае н.п..} \end{cases}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть функционал $L(f)$ непрерывен в L_p, и пусть $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$. Тогда для любой функции потерь $w(x) \in \mathbf{W}$ существует значение A такое, что справедливы следующие утверждения :*

А) если $p \geq 2$ и $\beta > 1/p$, то

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{f\in\Sigma} \mathbf{E}_f \left\{ w\left(T^{\frac{p\beta}{p-2+2p\beta}} \left| L_{T,A} - L(f) \right| \right) \right\} < \infty; \tag{4}$$

Б) если либо $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$, либо $1 < p \leq 2$ и $\beta > 1/2$, то

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{f\in\Sigma} \mathbf{E}_f \left\{ w\left(T^{\beta} \left| L_{T,A} - L(f) \right| \right) \right\} < \infty;$$

В) если $1 < p \leq 2$ и $\beta \leq 1/2$, то

$$\limsup_{T\to\infty} \sup_{f\in\Sigma} \mathbf{E}_f \left\{ w\left(T^{1/2} \left| L_{T,A} - L(f) \right| \right) \right\} < \infty.$$

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к сингулярным интегралам Дирихле, и норм Шаттена усеченных теплицевых операторов (или теплицевых матриц). Обозначим через $\psi_A(\lambda)$ сингулярный интеграл Дирихле, определенный для функции $\psi(\lambda) \in L_p$, $1 \le p < \infty$ следующим образом :

$$\psi_A(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin A(\lambda-x)}{\sin(\lambda-x)}\psi(x)dx & \textit{при} \quad \lambda \in [-\pi,\pi] \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin A(\lambda-x)}{\lambda-x}\psi(x)dx & \textit{при} \quad \lambda \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \tag{5}$$

Перечислим некоторые свойства функции $\psi_A(\lambda)$.

а1) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, $1 < p < \infty, \beta > 0$. *Тогда*

$$||\psi_A||_p \le C(p)||\psi||_p \quad \textit{и} \quad ||\psi - \psi_A||_p \le C(p,\beta,M)\, A^{-\beta}.$$

б1) Пусть $\psi(\lambda) \in L_p$, $p \ge 1$. *Тогда*

$$||\psi_A||_q \le 2\, A^{1/p-1/q}||\psi_A||_p, \quad \textit{где} \quad p < q \le \infty.$$

в1) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, $p \ge 1$ *с* $0 < \beta \le 1/p$ *и* $p < p_1 < p/(1-\beta p)$. *Тогда*

$$\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_{p_1}(\beta - \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}).$$

г1) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, *где* $p \ge 1$ *и* $\beta > 1/p$. *Тогда* $\psi(\lambda)$ *непрерывна и* $||\psi||_\infty < \infty$.

д1) Пусть $\psi(\lambda) \in \mathrm{H}_p(\beta)$, $p \ge 1, \beta > 0$, $q > p$ *и* $\beta \ne 1/p - 1/q$. *Тогда*

$$||\psi_A||_q \le C \cdot \max\{1; A^{1/p-1/q-\beta}\}.$$

Доказательства утверждений а1) – г1) можно найти в монографии Никольского [15], а доказательство утверждения д1) – в работе [14].

Обозначим через $\{s_j(B)\}_{j\ge1}$ множество сингулярных значений компактного оператора B, т.е. множество собственных значений оператора $K = (B^*B)^{1/2}$, где B^* – сопряженный к B. Для числа p, $1 \le p \le \infty$ p–норма Шаттена компактного оператора B определяется формулой

$$||B||_p = \begin{cases} (\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(B))^{1/p}, & \text{при } 1 \le p < \infty \\ \sup_j s_j(B), & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Для $1 \le p \le \infty$ через S_p обозначим класс всех компактных операторов B, для которых $||B||_p < \infty$. Перечислим некоторые свойства классов S_p.

а2) $|tr\,[B]| \le ||B||_1$, *причем знак равенства достигается при неотрицательном* B, *где* $tr[B]$ *обозначает след оператора* B.

б2) Если $B_j \in \mathcal{S}_{p_j}$, $p_j \ge 1$, $j = \overline{1,n}$ *и* $p^{-1} = \sum_{k=1}^{n}(p_k)^{-1} \le 1$, *то* $B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{S}_p$, *и*

$$||B||_p \le ||B_1||_{p_1} \cdot \cdots \cdot ||B_n||_{p_n}$$

в2) $||B||_\infty = ||B||$, *где* $||B||$ *– операторная норма* B, *т.е.*

$$||B|| = \sup_{||u||_2=1} |(Bu, u)|.$$

Доказательства можно найти в монографии Гохберга и Крейна [10], стр. 120 – 122 и стр. 135.

Пусть $\psi(\lambda)$ – 2π–периодическая функция класса $L_1(-\pi,\pi)$, и пусть

$$\hat{\psi}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda}\psi(\lambda)\,d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, ...$$

– ее коэффициенты Фурье. Матрицы

$$B_T(\psi) = ||\hat{\psi}_{k-j}||_{k,j=\overline{0,T}}, \qquad T = 0, 1, ...,$$

называются *теплицевыми матрицами*, порожденными функцией $\psi(\lambda)$. Усеченный теплицев оператор $B_T(\psi)$, порожденный функцией $\psi(\lambda) \in L_1(-\infty,\infty)$, определяется следующим образом : для $u(\lambda) \in L_2[0,T]$

$$B_T(\psi)u(\lambda) = \int_0^T \hat{\psi}(\lambda-\mu)u(\mu)d\mu,$$

где $\hat{\psi}(\cdot)$ – преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$. Нормы Шаттена усеченых теплицевых матриц и операторов удовлетворяют следующим неравенствам, справедливым для $\psi(u) \in L_1 \cap L_p$ и $1 \le p < \infty$:

а3) $||B_T(\psi)||_p \le ||\psi||_p T^{1/p}$.

б3) $||B_T(\psi)||_\infty \le 2||\psi||_p T^{1/p}$.

Доказательство утверждения а3) можно найти в [1] (для теплицевых матриц) и в [8] (для усеченых теплицевых операторов), доказательство же б3) – в [2], [6] и [7].

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Мы докажем только утверждение А) теоремы, утверждения Б) и В) доказываются аналогично. Начнем с двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $f \in \Sigma_p(\beta)$, $\beta > 0$, $p > 1$ и $g \in L_q$, $1/p + 1/q = 1$. Тогда*

$$\mathbf{E}|L_{T,A} - L(f)| \le C\, A^{-\beta} + \begin{cases} CT^{-\beta} & \text{при } \beta < 1 \\ CT^{-1}\ln T & \text{при } \beta = 1 \\ CT^{-1} & \text{при } \beta > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство можно найти в [8].

Обозначим через $|\mathrm{Cum}_k(L_{T,A})|$ кумулянт(семиинвариант) порядка k случайной величины $L_{T,A}$.

Лемма 2. *Пусть $f \in \Sigma_p(\beta)$, $p \ge 2$, $\beta > 1/p$ и $g \in L_q$, причем $1/p + 1/q = 1$. Тогда для всех $k = 3, 4, \ldots$*

$$|\mathrm{Cum}_k(L_{T,A})| \le (k-1)!\mathbf{D}(L_{T,A}) \left(||f||_\infty ||g||_q T^{-1} A^{\frac{1}{q}} \right)^{k-2}, \tag{7}$$

где $\mathbf{D}(L_{T,A})$ – дисперсия случайной величины $L_{T,A}$.

Доказательство. Хорошо известно (см. [2], [11], [13]), что

$$\mathrm{Cum}_k(L_{T,A}) = T^{-k} 2^{k-1} (k-1)! \ \mathrm{tr}[B_T(f) B_T(g_A)]^k. \tag{8}$$

Из утверждений в2), а3) и б1) следует, что

$$||B_T(g_A)||_\infty \le ||g_A||_\infty \le 2A^{\frac{1}{q}} ||g_A||_q. \tag{9}$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} &\left| \ \mathrm{tr}[B_T(f)B_T(g_A)]^k \right| \le ||[B_T(f)B_T(g_A)]^k||_1 && \text{(в силу а2))} \\ &\le ||[B_T(f)B_T(g_A)]^2||_1 \cdot ||[B_T(f)B_T(g_A)]^{k-2}||_\infty && \text{(в силу б2))} \\ &\le \mathrm{tr}[B_T(f)B_T(g_A)]^2 \cdot ||B_T(f)||_\infty^{k-2} ||B_T(g_A)||_\infty^{k-2} && \text{(в силу а2) и б2))} \\ &\le \ \mathrm{tr}[B_T(f)B_T(g_A)]^2 \cdot \left(||f||_\infty ||g_A||_q A^{1/q} \right)^{k-2} && \text{(в силу б3) и (9)).} \end{aligned}$$

Учитывая утверждение а1) и равенство

$$\mathbf{D}(L_{T,A}) = \frac{2}{T^2} \ \mathrm{tr}[B_T(f)B_T(g_A)]^2, \tag{10}$$

получим (7).

Доказательство утверждения А) теоремы. Нетрудно убедиться, что соотношение (4) достаточно доказать для функций потерь вида

$$w(x) = \exp\{\pm cx\},$$

где c – положительная постоянная. Полагая $\gamma = \dfrac{p\beta}{p-2+2p\beta}$, мы можем написать

$$\mathbf{E}_f\left\{w\left(T^{\frac{p\beta}{p-2+2p\beta}}\left|L_{T,A}-L(f)\right|\right)\right\} = \mathbf{E}_f\left\{\exp\{\pm cT^{\gamma}|L_{T,A}-L(f)|\}\right\} \le$$

$$\le \exp\{\pm cT^{\gamma}|\mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}-L(f)|\}\mathbf{E}_f\left\{\exp\{\pm cT^{\gamma}|L_{T,A}-\mathbf{E}_f\{L_{T,A}\})|\}\right\}. \tag{11}$$

Таким образом, нам нужно доказать следующие два неравенства :

$$\exp\{\pm cT^{\gamma}|\mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}-L(f)|\} \le C < \infty \tag{12}$$

и

$$\mathbf{E}_f\left\{\exp\{\pm cT^{\gamma}|L_{T,A}-\mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}|\}\right\} \le C < \infty. \tag{13}$$

Неравенство (12) непосредственно вытекает из леммы 1. Действительно, полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, из леммы 1 получаем

$$|\mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}-L(f)| \le CT^{-\frac{p\beta}{p-2+2p\beta}},$$

откуда немедленно следует (12).

Для доказательства неравенства (13) покажем, что в условиях утверждения А) имеет место неравенство

$$\mathbf{D}(L_{T,A}) \le C\,T^{-2p/(p-2+2p\beta)}. \tag{14}$$

Поскольку $\beta > 1/p$, то с учетом г1) имеем $\Sigma_p(\beta) \subset L_\infty$. Поэтому полагая $p_1 = \infty$, $p_2 = 2$ и последовательно применяя утверждения в2), а3) и (10), получим

$$\mathbf{D}(L_{T,A}) = 2T^{-2}||B_T(f)B_T(g_A)||_2^2 \le$$

$$\le 2T^{-2}||B_T(f)||_\infty^2||B_T(g_A)||_2^2 \le C\,T^{-1}||f||_\infty^2||g_A||_2^2.$$

Поскольку $q = p/(p-1) \le 2$, то из б1) имеем $||g_A||_2 \le C\,A^{1/q-1/2}||g||_q$. Из г1) имеем $||f||_\infty < \infty$. Из последних двух неравенств получаем

$$\mathbf{D}(L_{T,A}) \le C\,T^{-1}A^{2/q-1}.$$

Полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, получим (14). Далее, полагая

$$\xi_{T,A} = T^{p/(p-2+2p\beta)}|L_{T,A}-\mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}|,$$

из леммы 2 и (14) имеем

$$|\mathbf{Cum}_k(\xi_{T,A})| \le C\,(k-1)!T^{-\frac{2p\beta}{(p-2+2p\beta)}}\left(||f||_\infty||g||_qT^{-1}A^{\frac{1}{q}}\right)^{k-2}.$$

Снова полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, прямыми вычислениями получим

$$|\mathbf{Cum}_k(\xi_{T,A})| \le C\,(k-1)!\left(||f||_\infty||g||_q\,T^{\frac{-p\beta+1}{(p-2+2p\beta)}}\right)^{k-2}.$$

Следовательно

$$|\mathbf{Cum}_k(\xi_{T,A})| \le \frac{(k-1)!}{\Delta^{k-2}}, \qquad k = 2,3,\ldots, \tag{15}$$

где

$$\Delta = (||f||_\infty ||g||_q)^{-1} T^{\frac{p\beta-1}{(p-2+2p\beta)}}.$$

Учитывая (15) (ср. [3]), имеем

$$\mathbf{E}_f \{\exp\{\pm cT^\gamma |L_{T,A} - \mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}|\}\} = \mathbf{E}_f \{\exp\{\pm c\xi_{T,A}\}\} \leq$$

$$\leq 2 \exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty} |\mathrm{Cum}_k(\xi_{T,A})| \frac{|c|^k}{k!}\right\} \leq 2 \exp\left\{c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{c}{\Delta}\right)^{k-2}\right\}.$$

Так как по предположению $p \geq 2$ и $\beta \geq 1/p$, то $\Delta^{-1} \to 0$ при $T \to \infty$. Следовательно, для всех достаточно больших T имеем

$$\mathbf{E}_f \{\exp\{\pm cT^\gamma |L_{T,A} - \mathbf{E}_f\{L_{T,A}\}|\}\} \leq 2 \exp\{Cc^2\} < \infty,$$

откуда следует (13). Доказательство завершено.

Автор выражает благодарность рецензенту и редактору за полезные замечания.

ABSTRACT. **Let $X(u)$ be a zero mean real–valued stationary Gaussian process in continuous or discrete time u, possessing a spectral density $f(\lambda)$. We consider the problem of nonparametric statistical estimation of a linear functional $L(f)$ on the basis of a sample $\{X(u),\ 0 \leq u \leq T\}$. For spectral densities from Hölder classes and loss functions $w(x)$ satisfying $0 \leq w(x) \leq C_1 \exp\{C_2|x|\}$ with positive constants C_1 and C_2, we obtain asymptotic upper bounds for the risks $\mathrm{E}\{w(|L_T - L(f)|)\}$.**

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Theor. Rel. Fields, vol. 79, pp. 37 – 45, 1988.
2. Р. Бентвус, Р. Рудзкис, "Большие уклонения для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности, Литовск. Матем. Сб., т. 16, стр. 63 – 77, 1976.
3. Р. Бентвус, Р. Рудзкис, "Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин", Литовск. Матем. Сб., т. 20, стр. 15 – 30, 1980.
4. Р. Бентвус, Р. Рудзкис, В. Статулявичус, "Экспоненциальные неравенства для оценок спектра гауссовских стационарных временных рядов", Литовск. Матем. Сб., т. 15, стр. 25 – 39, 1975.
5. P. L. Butzer, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation I, Birkhäuser, Basel, 1971.
6. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", Теория вероятн. и ее примен., т. 33, вып. 2, стр. 315 – 322, 1988.
7. М. С. Гиновян, "Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности гауссовского стационарного процесса", Теория вероятн. и ее примен., т. 33, вып. 4, стр. 777 – 781, 1988.
8. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals of stationary Gaussian process", Probab. Theory and Rel. Fields, vol. 100, pp. 395 – 406, 1994.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 1,

стр. 3 – 20, 1995.
10. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Наука, М., 1965.
11. U. Grenander, G. Szegö, Toeplitz Forms and Their Applications, Univ. of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1958.
12. R. Z. Has'minski, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of spectral density function", Probab. Theory. Rel. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.
13. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория вероятн. и ее примен., т. 8, вып. 4, стр. 391 – 430, 1963.
14. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, "Об оценке значения линейного функционала от плотности распределения", Зап. Научн. Семин. ЛОМИ, т. 153, стр. 45 – 59, 1987.
15. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1969
16. F. Riesz, B. Sz. Nagy, Lecons d'Analyse Functionnelle. Akademiai Kiado, Budapest, 1972.

15 августа 1996

Институт математики
НАН Армении
E-mail : mamgin@pnas.sci.am

О СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ

В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

В работе найдены необходимые и достаточные условия для сильной гипоэллиптичности многочленов с постоянными коэффициентами.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ – n-мерные вещественные и комплексные эвклидовы пространства

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0, \ j = 1, ..., n\},$$

и пусть $\mathbb{Z}^n_+$ – n-мерное пространство мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ положим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad ||\xi|| = \left[\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right]^{1/2}, \quad |\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1} \cdots |\xi_n|^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, ..., n.$$

Определение 1. Многочлен $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, где $(P) = \{\alpha^j\}_1^r \subset \mathbb{Z}^n_+$, называется *гипоэллиптическим*, если при $||\xi|| \to \infty$

$$\frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \to 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}^n_+, \quad |\beta| \neq 0.$$

Для данного многочлена P положим $\mathcal{D}(P) = \{\xi \in \mathbb{C}^n : P(\xi) = 0\}$, а через $d_P(\xi)$ обозначим расстояние точки ξ от множества $\mathcal{D}(P)$. Известно (см. [1], лемму 4.1.1), что для любого многочлена P с постоянными коэффициентами существует постоянная $c = c_p > 0$, для которой

$$c \geq d_P(\xi) \sum_{|\beta|>0} \left|\frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\beta|} \geq c^{-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \tag{0.1}$$

Из оценки (0.1) немедленно следует, что если многочлен P гиппоэллиптичен, то $d_P(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$. Поэтому, не умаляя общности, всюду ниже будем считать, что $d_P(\xi) \geq 1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, если многочлен P гипоэллиптичен.

Определение 2. Функция $h(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ называется *весом гипоэллиптичности* многочлена P, если для некоторой постоянной $c > 0$

$$h(\xi) \leq c\, d_P(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 3. Многочлен P называется *сильно гипоэллиптическим*, если $P(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$ и с некоторыми постоянными $c, M > 0$

$$|P(\xi)| \leq c\, d_P^m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad ||\xi|| \geq M, \quad m = \mathrm{ord} P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|.$$

Пусть R – однородный многочлен и $\tau \in S = \{\xi \in \mathbb{R}^n : ||\xi|| = 1\}$ является его нулем, $R(\tau) = 0$. Обозначим через $\mathrm{ord}_R \tau$ порядок нуля τ, т.е. натуральное число r, для которого $D^\beta R(\tau) = 0$ при $|\beta| < r$ и $\sum\limits_{|\beta|=r} |D^\beta R(\tau)| \neq 0$. Пусть $\mathcal{S}(R) = \{\tau \in S : R(\tau) = 0\}$. Для многочлена $P(\xi)$ при $t > 0$ положим

$$\widetilde{P}(\xi, t) = \left[\sum_\alpha |D^\alpha P(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}\right]^{1/2}.$$

В настоящей работе мы находим необходимые и достаточные алгебраические условия для сильной гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$ с постоянными коэффициентами.

§1. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть многочлен P с постоянными коэффициентами сильно гипоэллиптичен. Тогда в силу оценки (0.1) для некоторых постоянных $c, M > 0$

$$c^{-1}|P(\xi)| \leq d_P^m(\xi) \leq c|P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad ||\xi|| \geq M, \quad m = \mathrm{ord} P. \tag{1.1}$$

Лемма 1.1. *Пусть P – многочлен с постоянными коэффициентами, а T – линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$. Тогда для некоторой постоянной $c = c(T) > 0$ и для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$, $r = 0, 1, ..., m$ имеем*

$$c^{-1} \sum_{|\alpha|=r} |D_\eta^\alpha P(T\eta)| \leq \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha P(T\eta)| \leq c \sum_{|\alpha|=r} |D_\eta^\alpha P(T\eta)|. \tag{1.2}$$

Доказательство очевидно.

Следствие 1.1. Если многочлен P с постоянными коэффициентами сильно гипоэллиптичен, а T – линейное ограниченное обратимое отображение $T: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, то многочлен $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$ также сильно гипоэллиптичен.

Лемма 1.2. *Пусть* $P_m(\xi) \not\equiv 0$ *– однородный многочлен порядка* m, *и пусть* $\tau', \tau'' \in S(P_m)$. *Если порядок нуля многочлена* P_m *в точке* τ' *равен* m, *то для любых чисел* t_1, t_2

$$P_m(t_1\tau' + t_2\tau'') = 0.$$

Доказательство. В силу того, что $\operatorname{ord}_{P_m}\tau' = m$, $\tau'' \in S(P_m)$, учитывая формулу Тейлора, имеем

$$P_m(t_1\tau' + t_2\tau'') = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha P_m(t_1\tau')}{\alpha!}(t_2\tau'')^\alpha = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha P_m(t_1\tau')}{\alpha!}(t_2\tau'')^\alpha =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} t_1^{m-j} \frac{D^\alpha P_m(\tau')}{\alpha!}(t_2\tau'')^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha P_m(\tau')}{\alpha!}(t_2\tau'')^\alpha = t_2^m P_m(\tau'') = 0. \tag{1.3}$$

Лемма 1.2 доказана.

Следствие 1.2. Если в условиях леммы 1.2 $\operatorname{ord}_{P_m}\tau'' = m$, то $\operatorname{ord}_{P_m}(t_1\tau' + t_2\tau'') = m$.

Лемма 1.3. *Пусть* $P(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{m} P_j(\xi)$, *где* $P_j(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, *– многочлен с постоянными коэффициентами и* $P(\tau) = 0$, $\tau \in \mathbb{R}^n$. *Если* $\operatorname{ord}_P \tau = m$, *то для любого* $\eta \in \mathbb{R}^n$ $P(\tau + \eta) = P_m(\eta)$.

Доказательство. В силу формулы Тейлора

$$P(\tau + \eta) = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha P(\tau)}{\alpha!}\eta^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha P(\tau)}{\alpha!}\eta^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha \eta^\alpha = P_m(\eta).$$

Лемма 1.4. *Если многочлен* $P(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{m} P_j(\xi)$, $P_m(\xi) \not\equiv 0$ *порядка* m *сильно гипоэллиптичен, то для любого* $\tau \in S(P_m)$ $r \equiv \operatorname{ord}_{P_m}\tau = m$.

Доказательство. Пусть $t > 0$ – любое число. Тогда для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$, $c_3 \geq 0$ имеем

$$|P(t\tau)| \leq c_1 t^{m-1},$$

$$\sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha P(t\tau)| \geq \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha P_m(t\tau)| - \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha [P(t\tau) - P_m(t\tau)]| \geq c_2 t^{m-r} - c_3 t^{m-r-1}.$$

Отсюда, из оценки (0.1) и сильной гипоэллиптичности многочлена P при всех $t \geq 1$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем

$$\infty > c \geq d_P(t\tau) \sum_{|\alpha|=r} \left[\frac{|D^\alpha P(t\tau)|}{|P(t\tau)|}\right]^{1/r} \geq$$

$$\geq c_4 \sum_{|\alpha|=r} \left[\frac{|D^\alpha P(t\tau)|}{|P(t\tau)|^{1-r/m}}\right]^{1/r} \geq c_4 \left[\frac{c_2 t^{m-r} - c_3 t^{m-r-1}}{c_1 t^{(m-1)(1-r/m)}}\right]^{1/r},$$

откуда немедленно следует, что $r = m$.

Лемма 1.5. *Пусть $P_m(\xi) \not\equiv 0$ – однородный многочлен порядка m, и пусть $\tau^1, ..., \tau^k \in \mathcal{S}(P_m)$ линейно независимы. Если*

$$\mathrm{ord}_{P_m} \tau^j = m, \quad j = 1, ..., k, \quad P_m(\xi) \neq 0 \text{ при } \xi \in \mathbb{R}^n \ominus \overline{\{\tau^1, ..., \tau^k\}},$$

где $\overline{\{\tau^1, ..., \tau^k\}}$ – линейная оболочка, натянутая на векторы $\{\tau^1, ..., \tau^k\}$, то существует линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен $Q(\eta) = P_m(T\eta)$ удовлетворяет следующим условиям :

а) Q однороден порядка m,

б) $Q(\eta)$ не зависит от переменных $\eta_{n-k+1}, ..., \eta_n$,

в) $Q(\eta) \neq 0$ при $|\eta_1| + \cdots + |\eta_{n-k}| \neq 0$, т.е. Q эллиптичен относительно переменных $\eta_1, ..., \eta_{n-k}$.

Доказательство. Дополним точки до базиса в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\theta^1, ..., \theta^{n-k}, \tau^1, ..., \tau^k$ является базисом в $\mathbb{R}^n$. Через T обозначим оператор

$$T : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \theta_1^1 \dots \theta_1^{n-k} & \tau_1^1 \dots \tau_1^k \\ \dots & \dots \\ \theta_n^1 \dots \theta_n^{n-k} & \tau_n^1 \dots \tau_n^k \end{pmatrix}.$$

В силу линейности оператора T и однородности порядка m многочлена P_m для любого $t > 0$ имеем

$$Q(t\eta) = P_m(Tt\eta) = P_m(tT\eta) = t^m P_m(T\eta) = t^m Q(\eta),$$

т.е. утверждение пункта а) леммы.

Покажем, что многочлен $Q(\eta)$ не зависит от переменной η_n. В силу утверждения пункта а) леммы многочлен $Q(\eta)$ можно представить в следующем виде :

$$Q(\eta) = \sum_{j=1}^{m} \eta_n^j \sum_{|\alpha'|=m-j} \delta_{(\alpha',j)}(\eta')^{\alpha'}, \quad \alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}), \quad \eta' = (\eta_1, ..., \eta_{n-1}).$$

В силу леммы 1.1

$$e^{(n)} = (0, ..., 0, 1) = T^{-1}\tau^k \in \mathcal{S}(Q), \quad \text{ord}_Q e^{(n)} = m.$$

Используя это, получим, что $0 = Q(e^{(n)} = \delta(0', m)$. Допустим, что

$$\delta(\alpha', j) = 0, \quad m \geq j \geq r > 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}, \quad |\alpha'| = m - j.$$

Покажем, что $\delta(\alpha', r-1) = 0$ для всех $\alpha' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha'| = m - r + 1 < m$. Пусть $\beta' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $|\beta'| = m - r + 1$ – любой мультииндекс. Так как, в силу предположения

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{r-1} \eta_n^j \sum_{|\alpha'|=m-j} \delta_{(\alpha',j)}(\eta')^{\alpha'}$$

и $D^\gamma Q(e^{(n)}) = 0$ для всех $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\gamma| \leq m-1$, то

$$0 = |D^{\beta'} Q(e^{(n)})| = \beta'!\delta(\beta', r-1),$$

т.е. $\delta(\beta', r-1) = 0$. В силу индукции отсюда получим

$$Q(\eta) = \sum_{|\alpha'|=m} \delta_{(\alpha',0)}(\eta')^{\alpha'},$$

т.е. многочлен $Q(\eta)$ не зависит от η_n. Аналогичным образом доказывается, что многочлен $Q(\eta)$ не зависит от $\eta_{n-1}, ..., \eta_{n-k+1}$, т.е. $Q(\eta) \equiv Q(\eta_1, ..., \eta_{n-k}, 0, ..., 0)$. Утверждение пункта б) доказано.

Теперь докажем утверждение пункта в) леммы. Пусть, наоборот, существует точка $e = (e_1, ..., e_{n-k}, 0, ..., 0)$, $||e|| \neq 0$ такая, что $Q(e) = 0$. Так как $e, e^{n-k+1}, ..., e^n$ линейно независимы, то $Te, \tau^1, ..., \tau^k$ также линейно независимы и $P_m(Te) = Q(e) = 0$. Это в силу леммы 1.3 и следствия 1.2 противоречит условию $P_m(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n \ominus \overline{\{\tau^1, ..., \tau^k\}}$, так как Te можно представить в виде $\overline{\xi} + \hat{\xi}$, где $\overline{\xi} \in \overline{\{\tau^1, ..., \tau^k\}}$, $\overline{\xi} \perp \hat{\xi}$ и $\hat{\xi} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения пункта в). Лемма 1.5 доказана.

Теорема 1.1. *Пусть многочлен P порядка m сильно гипоэллиптичен. Тогда существует натуральное число k, $1 \le k \le n$ и линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен*

$$Q(\eta) \equiv P(T\eta) \equiv \sum_{j=1}^{m} Q_j(\eta)$$

удовлетворяет следующим условиям :

а) Q сильно гипоэллиптичен,

б) многочлен $Q_m(\eta) \equiv Q_m(\eta_1, ..., \eta_k, 0, ..., 0)$ эллиптичен относительно переменных $\eta_1, ..., \eta_k$.

в) $Q(0, ..., 0, \eta_{k+1}, ..., \eta_n)$ гипоэллиптичен как многочлен от переменных η_{k+1}, ..., η_n с весом $|Q(0, ..., 0, \eta_{k+1}, ..., \eta_n)|^{1/m}$.

Доказательство. Утверждение пункта а) следует из леммы 1.1. Утверждение пункта б) следует из лемм 1.4 и 1.5. Докажем утверждение пункта в) теоремы. Так как в силу утверждения пункта а) теоремы с некоторой постоянной $c > 0$

$$|Q(\eta)|^{1/m} \sum_{|\alpha|>0} \left|\frac{D^\alpha Q(\eta)}{Q(\eta)}\right|^{1/|\alpha|} \le c, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad Q(\eta) \ne 0,$$

то для всех $\eta'' = (\eta_{k+1}, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ таких, что $Q(0', \eta'') \ne 0$, имеем

$$|Q(0', \eta'')|^{1/m} \sum_{\substack{|\alpha|>0 \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_k=0}} \left|\frac{D^\alpha Q(0', \eta'')}{Q(0', \eta'')}\right|^{1/|\alpha|} \le c.$$

Отсюда немедленно следует утверждение пункта в) теоремы, так как $Q(0', \eta'') \to \to \infty$ при $||\eta''|| \to \infty$. Теорема 1.1 доказана.

Для натурального k, $1 \le k \le n$, через A_k обозначим множество тех сильно гипоэллиптических многочленов P, для коорых

I) $P_m(\xi', 0'') \ne 0$ при $||\xi'|| \ne 0$, $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, $m =$ord P ;

II) $P(0', \xi'')$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$ гипоэллиптичен с весом $|P(0', \xi'')|^{1/m}$.

Положим $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Теорему 1.1 можно переформулировать следующим образом :

Теорема 1.1′. *Многочлен P сильно гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда существует линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ такое, что $P(T\eta) \in A$.*

§2. РОСТ МНОГОЧЛЕНА И СИЛЬНАЯ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

Предложение 2.1. *Пусть P – многочлен с постоянными коэффициентами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $|P(\xi+\eta)| \leq \delta|P(\xi)|$ при $||\eta|| \leq \varepsilon d_P(\xi)$.*

Доказательство. В силу оценки (3.3.7) работы [1] и нашей оценки (1.1) для всех $||\eta|| \leq \varepsilon d_P(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|P(\xi+\eta)| \leq \sup_{||\eta|| \leq \varepsilon d_P(\xi)} |P(\xi+\eta)| \leq$$

$$\leq c_1 \widetilde{P}(\xi, \varepsilon d_P(\xi)) \leq c_2 \sum_\alpha |D^\alpha P(\xi)| d_P^{|\alpha|}(\xi)) \leq c_3 |P(\xi)|,$$

где $c_1, c_2, c_3 > 0$ – некоторые постоянные.

Следствие 2.1. Если многочлен P сильно гипоэллиптичен, то для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $|P(\xi+\eta)| \leq \delta|P(\xi)|$ при $||\eta|| \leq \varepsilon|P(\xi)|^{1/m}$, $m = \text{ord}\, P$.

Предложение 2.2. *Для любого многочлена P существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$d_P(\xi+\eta) \geq \delta d_P(\xi) \quad \text{при} \quad ||\eta|| \leq \frac{1}{2} d_P(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Доказательство. Выполнение неравенства (2.1) достаточно показать для тех ξ, для которых $d_P(\xi) \neq 0$. Пусть, наоборот, существуют последовательности $\{\xi^s\}_1^\infty$ и $\{\eta^s\}_1^\infty$ такие, что

$$||\eta^s|| \leq \frac{1}{2} d_P(\xi^s) \neq 0, \quad s = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad \frac{d_P(\xi^s+\eta^s)}{d_P(\xi^s)} \to 0 \text{ при } s \to \infty.$$

В силу замкнутости множества $\mathcal{D}(P)$ для любого s существует точка $\zeta^s \in \mathcal{D}(P)$ такая, что $d_P(\xi^s+\eta^s) = ||\xi^s+\eta^s-\zeta^s||$. Отсюда, при достаточно больших s, имеем

$$||\xi^s - \zeta^s|| = ||\xi^s + \eta^s - (\zeta^s - \eta^s)|| \leq ||\xi^s + \eta^s - \zeta^s|| + ||\eta^s|| \leq$$

$$\leq d_P(\xi^s + \eta^s) + \frac{1}{2} d_P(\xi^s) \leq \frac{2}{3} d_P(\xi^s),$$

что противоречит определению $d_P(\xi)$. Предложение 2.2 доказано.

Следствие 2.2. Если многочлен P порядка m сильно гипоэллиптичен, то для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $|P(\xi+\eta)| \geq \delta|P(\xi)|$ при $||\eta|| \leq 1/2|P(\xi)|^{1/m}$.

Доказательство немедленно следует из предложения 2.2 и определения сильной гипоэллиптичности.

Предложение 2.3. *Пусть для многочлена P порядка m $\widetilde{P}(\xi) \equiv \widetilde{P}(\xi, 1) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$. Если для некоторых чисел $\delta, \kappa > 0$ и достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ $|P(\xi+\eta)| \leq \delta|P(\xi)|$ при $||\eta|| \leq 1/2|P(\xi)|^\kappa$, то $P(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$.*

Доказательство. В силу оценки (3.3.7) работы [1] с некоторой постоянной $c > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\widetilde{P}\left(\xi, \frac{1}{2}|P(\xi)|^\kappa\right) \leq c \sup_{||\eta|| \leq 1/2|P(\xi)|^\kappa} |P(\xi+\eta)| \leq c\delta|P(\xi)|. \tag{2.2}$$

Отсюда, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и при достаточно больших ξ имеем

$$\widetilde{P}(\xi) \leq c_1 \frac{|P(\xi)|}{\sum_{|\alpha| \leq m} |P(\xi)|^{\kappa|\alpha|}}. \tag{2.3}$$

Утверждение предложения немедленно следует из неравенства (2.3), так как в противном случае существовала бы последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $||\xi^s|| \to \infty$ при $s \to \infty$ такая, что $|P(\xi^s)| =$const$\neq 0$.

Предложение 2.4. *Если в условиях предложения 2.3 $\kappa = 1/m$, то многочлен P сильно гипоэллиптичен.*

Доказательство немедленно следует из предложения 2.3 и неравенства (2.2).

Лемма 2.1. *Если для однородного многочлена $P_m(\xi) \not\equiv 0$ с некоторой постоянной $c > 0$*

$$\sum_{j=1}^n |D_j P_m(\xi)| \leq c|P_m(\xi)|^{(m-1)/m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

то для любого $\tau \in S(P_m)$ $\text{ord}_{P_m}\tau = m$.

Доказательство. При $m \leq 2$ доказательство немедленно следует из неравенства (2.4). Пусть $m > 2$, $\tau \in S$, $P_m(\tau) = 0$ и $\text{ord}_{P_m}\tau = l$. Покажем, что $l = m$. В силу оценки (3.3.7) работы [1] с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ имеем, что при $t > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} |\widetilde{D_j P_m}(\tau, t)| \le c_1 \sum_{j=1}^{n} \sup_{\|\eta^j\| \le t} |D_j P_m(\tau + \eta^j)| \le$$

$$\le c_1 c \sum_{j=1}^{n} \sup_{\|\eta^j\| \le t} |P_m(\tau + \eta^j)|^{(m-1)/m} \le c_2 \sum_{|\alpha| \ge l} \left(|D^\alpha P_m(\tau)| \frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!} \right)^{(m-1)/m}.$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=l-1} |D_j D^\beta P_m(\tau)| \le c_2 \sum_{|\alpha| \ge l} \left(\frac{|D^\alpha P_m(\tau)|}{\alpha!} \right)^{(m-1)/m} t^{|\alpha| \frac{m-1}{m} - l + 1}.$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=l-1} |D_j D^\beta P_m(\tau)| \ne 0, \quad \mathrm{ord}_{P_m} \tau = l,$$

то отсюда имеем, что $l \frac{m-1}{m} - l + 1 \le 0$, т.е. $l \ge m$. Лемма 2.1 доказана.

Предложение 2.5. *Пусть P_m – однородный многочлен порядка m. Если для любого $\tau \in \mathcal{S}(P_m)$, $\mathrm{ord}_{P_m} \tau = m$, то неравенство (2.4) выполняется.*

Доказательство немедленно получается использованием лемм 2.1 и 1.5.

Лемма 2.2. *Если однородный многочлен P_m удовлетворяет неравенству (2.4), то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| > 0$ существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что*

$$|D^\alpha P_m(\xi)| \le c_1 |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть $\tau^1, ..., \tau^k \in S$ – все независимые корни многочлена P_m. В силу предложения 2.5 имеем $\mathrm{ord}_{P_m} \tau^j = m$, $j = 1, ..., k$. По лемме 1.5 существует линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен $Q_m(\eta) = P_m(T\eta)$ не зависит от $\eta_1, ..., \eta_k$ и с некоторой постоянной $\chi > 0$

$$|Q_m(\eta)| \ge \chi(|\eta_{k+1}|^2 + \cdots + |\eta_n|^2)^{m/2}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Используя это, получим с некоторыми постоянными $\chi_1, \chi_2, \chi_3 > 0$, $\xi = T\eta$

$$|D_\xi^\alpha P_m(\xi)| \le \chi_1 \sum_{|\beta|=|\alpha|} |D^\beta Q_m(T^{-1}\xi)| \le \chi_2(|\eta_{k+1}|^2 + \cdots + |\eta_n|^2)^{(m-k)/2} \le$$

$$\le \chi_3 |Q_m(T^{-1}\xi)|^{(m-|\alpha|)/m} = \chi_3 |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 2.2 доказана.

Предложение 2.6. *Если однородный многочлен P_m удовлетворяет неравенству (2.4), то для любого m_1, $0 < m_1 < m$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$|P_m(\xi+\eta)| + ||\xi+\eta||^{m_1} \le \delta(|P_m(\xi)| + ||\xi||^{m_1})$$

при

$$||\eta|| \le \frac{1}{2}\left(|P_m(\xi)|^{\frac{1}{m}} + ||\xi||^{\frac{m_1}{m}}\right), \quad ||\xi|| \ge 1. \tag{2.5}$$

Доказательство. С некоторыми постоянными $c_1, c_2, c_3 > 0$ в силу леммы 2.2 имеем

$$|P_m(\xi+\eta)| \le |P_m(\xi)| + c_1 \sum_{|\alpha|\ge 0} |D^\alpha P_m(\xi)| \frac{||\eta||^{|\alpha|}}{\alpha!} \le$$

$$\le |P_m(\xi)| + c_2 \sum_{|\alpha|\ge 0} |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m} \left(|P_m(\xi)|^{\frac{|\alpha|}{m}} + ||\xi||^{\frac{|\alpha|m_1}{m}}\right) \le$$

$$\le c_3 \left[|P_m(\xi)| + \sum_{|\alpha|\ge 0} |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m} ||\xi||^{|\alpha|m_1/m}\right].$$

Применяя неравенство Гёльдера, отсюда для η, удовлетворяющей неравенству (2.5), получим

$$|P_m(\xi+\eta)| \le c_4(|P_m(\xi)| + ||\xi||^{m_1}), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

С некоторыми постоянными $c_5, c_6 > 0$ и при всех ξ, η, удовлетворяющих неравенству (2.5), получим

$$||\xi+\eta||^{m_1} \le c_5(||\xi||^{m_1} + ||\eta||^{m_1}) \le c_6||\xi||^{m_1}.$$

Из этих двух неравенств немедленно следует предложение 2.6.

Лемма 2.3. *Если многочлен $P(\xi) = \sum_{j=1}^{m} P_j(\xi)$, $P_j(\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ сильно гипоэллиптичен, то неравенство (2.4) выполняется с некоторой постоянной $c > 0$.*

Доказательство немедленно следует из леммы 1.4 и предложения 2.5.

Лемма 2.4. *Пусть $P(\xi) \equiv P_m(\xi) + P_{m_1}(\xi) + R(\xi)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, где*

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad R(\xi) = \sum_{|\alpha|<m_1} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad \mathcal{S}(P_m) \cap \mathcal{S}(P_{m_1}) = \emptyset, \quad m > m_1 > 0.$$

Для сильной гипоэллиптичности многочлена P необходимо и достаточно выполнение условий (2.4) и

$$P(\xi) \to \infty \qquad \text{при} \quad \|\xi\| \to \infty. \tag{2.6}$$

Доказательство необходимости немедленно следует из леммы 2.3 и определения сильной гипоэллиптичности. Для доказательства необходимости покажем, что

$$|P_m(\xi)| + |P_{m_1}(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

где $c > 0$ – постоянная. Предположим обратное, что существует последовательнсоть $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \to \infty$, для которой

$$\frac{|P(\xi^s)| + 1}{|P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)|} \to 0 \quad \text{при } s \to \infty. \tag{2.8}$$

Тогда для некоторой подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}$ (не умаляя общности, возьмем саму последовательнось $\{\xi^s\}$)

$$\frac{\xi^s}{\|\xi^s\|} \to \tau \in S(P_m).$$

Из условия $P_{m_1}(\tau) \neq 0$, $\tau \in S(P_m)$ леммы и соотношения (2.6) следует, что $P_{m_1}(\tau)$ имеет тот же знак, что и $P(\xi)$ на бесконечности (пусть, ради определенности, положительный). В силу вещественности $P(\xi)$ и соотношения (2.6) $P_m(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Прк достаточно больших s с некоторыми постоянными $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ имеем

$$|P(\xi^s)| + 1 \geq |P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)| - |(P - P_m - P_{m_1})(\xi^s)| =$$

$$= |P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)| - |R(\xi^s)| \geq |P_m(\xi^s)| + c_1\|\xi^s\|^{m_1} - c_2\|\xi^s\|^{m_1-1} \geq$$

$$\geq |P_m(\xi^s)| + c_3\|\xi^s\|^{m_1} \geq c_4[|P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)|].$$

Это противоречит соотношению (2.8) и доказывает неравенство (2.7). Теперь достаточность утверждения леммы немедленно следует из оценки (2.7) и предложений 2.6 и 2.4.

§3. ВИД СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Теорема 3.1. *Пусть $Q(\xi_2, ..., \xi_n)$ – гипоэллиптический многочлен от $(n-1)$ переменных с вещественными коэффициентами. Тогда существует сильно гипоэллиптический многочлен $P(\xi_1, ..., \xi_n)$ такой, что $P(0, \xi_2, ..., \xi_n) = Q(\xi_2, ..., \xi_n)$.*

Доказательство. В силу условия теоремы для некоторого четного $m > 0$ имеем

$$|Q(\xi')|^{1/m} \sum_{|\alpha'|>0} \left[\frac{|D^{\alpha'}Q(\xi')|}{|Q(\xi')|}\right]^{1/|\alpha|} \leq \text{const} < \infty,$$

$$\alpha' = (\alpha_2, ..., \alpha_n), \quad \xi' = (\xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad Q(\xi') \neq 0.$$

Положим $P(\xi) = \theta\xi_1^m + Q(\xi')$, где

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Q(\xi') \to +\infty \text{ при } ||\xi'|| \to \infty, \\ -1, & \text{если} \quad Q(\xi') \to -\infty \text{ при } ||\xi'|| \to \infty. \end{cases}$$

Тогда с некоторыми постоянными $c_1, c_2, c_3 > 0$ и при достаточно больших ξ имсем

$$|P(\xi)|^{1/m} \sum_{|\alpha|>0} \left|\frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|} \leq$$

$$\leq c_1[|\xi_1| + |Q(\xi')|^{1/m}] \sum_{r=1}^{m} \sum_{\alpha_1=r=|\alpha'|} \left[\frac{|D_1^{\alpha_1}\xi_1^m| + |D^{\alpha'}Q(\xi')|}{|\xi_1|^m + |Q(\xi')|}\right]^{1/r} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{\alpha_1=r=|\alpha'|} \left[\frac{|D_1^{\alpha_1}\xi_1^m| + |D^{\alpha'}Q(\xi')|}{|\xi_1|^{m(1-\frac{r}{m})} + |Q(\xi')|^{1-\frac{r}{m}}}\right]^{1/r} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{\alpha_1=r=|\alpha'|} \left[\frac{m!|\xi_1|^{m-r}}{r!(|\xi_1|^{m-r} + |Q(\xi')|^{1-\frac{r}{m}})} + \frac{|D^{\alpha'}Q(\xi')|}{|\xi_1|^{m-r} + |Q(\xi')|^{1-\frac{r}{m}}}\right]^{1/r} \leq c_3 < \infty.$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы 3.1.

Лемма 3.1. *Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha\xi^\alpha \in A_k$ – многочлен порядка m, а k, $1 \leq k \leq n$ – натуральное число. Тогда*

$$|P(\xi', 0'')| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi' = (\xi_1, ..., \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Доказательство. В силу сильной гипоэллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем, что

$$|P(\xi)|^{1/m} \sum_{|\alpha|=m-1} \left[\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)|}\right]^{1/(m-1)} \leq c_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Так как в силу условия $P \in A_k$

$$\sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_{(\alpha',0'')} (\xi')^{\alpha'},$$

то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = m - 1$ имеем

$$D^\alpha P(\xi) = D^\alpha P_m(\xi) + D^\alpha (P - P_m)(\xi) = D^\alpha P_m(\xi', 0'') + \mathrm{const} = D^\alpha P(\xi', 0'') + \mathrm{const}.$$

Поскольку однородный многочлен $R_m(\eta)$ может быть представлен в виде

$$R_m(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m-1} D^\alpha R_m(\eta) \eta^\alpha,$$

то в силу условия $P \in A_k$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi)| \geq \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi', 0'')| \geq$$
$$\geq \frac{c_2}{m} |P_m(\xi', 0'')|^{1/m} \geq \frac{c_2}{2m} |P(\xi', 0'')|^{1/m} - \mathrm{const}.$$

Из неравенства (3.1) получаем

$$c_1 \geq \frac{c_2}{2m} |P(\xi)|^{1/m} \left[\frac{|P(\xi', 0'')|^{1/m}}{|P(\xi)|} \right]^{1/(m-1)} - \mathrm{const} \frac{|P(\xi)|^{1/m}}{|P(\xi)|^{1/(m-1)}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

откуда следует утверждение леммы, так как $|P(\xi)| \to \infty$ при $\|\xi\| \to \infty$.

Лемма 3.2. *Пусть функция $h(\xi) > 0$, для которой $h(\xi + \eta) \geq \delta h(\xi)$ при $\|\eta\| \leq 1/2h(\xi)$, является весом гипоэллиптичности для многочлена P. Если для многочлена Q с некоторой постоянной $c > 0$ и числом $r > 0$*

$$h^r(\xi)|Q(\xi)| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то с некоторой, быть может другой, постоянной $c_1 > 0$

$$h^{|\alpha|+r}(\xi)|D^\alpha Q(\xi)| \leq c_1[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Доказательство. В силу оценки (3.3.7) работы [1] и предложения 2.1, настоящей заметки с некоторыми постоянными $c_2, c_3 > 0$ имеем

$$h^r(\xi)\widetilde{Q}(\xi, h(\xi)/2) \leq h^r(\xi) \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} |Q(\xi + \eta)| \leq c_2 \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} |h^r(\xi + \eta) Q(\xi + \eta)| \leq$$
$$\leq c_2 c \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} [|P(\xi + \eta)| + 1] \leq c_3[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Лемма 3.3. *Пусть* $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ *– многочлен порядка* m, *а* k, $1 \leq k \leq n$ *– натуральное число. Тогда для любого мультииндекса* $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $|\beta| > 0$ *существует постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$|Q_\beta(\xi)| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

где

$$Q_\beta(\xi) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in (P) \\ \alpha' = \beta}} \gamma_{\alpha',\alpha''} (\xi')^{\alpha'} (\xi'')^{\alpha''}, \quad \xi' = (\xi_1, ..., \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n).$$

Доказательство проведем методом индукции по $|\beta| \leq m$. При $|\beta| = m$ утверждение настоящей леммы совпадает с утверждением леммы 3.2. Пусть неравенство (3.2) верно при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 < |\beta| = r \leq m$. Докажем его для $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $|\beta| = r - 1$. В силу сильной гипоэллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} \leq c_1 < \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как

$$P(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k} Q_\gamma(\xi),$$

то для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi) \neq 0$

$$c_1 \geq |P(\xi)|^{1/m} \left| \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k \\ \gamma \geq \beta}} \frac{D^\beta Q_\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} =$$

$$= |P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \gamma \geq \beta} D^\beta Q_\gamma(\xi) + D^\beta Q_\beta(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} \geq$$

$$\geq |P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta Q_\beta(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} - \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \gamma \geq \beta} \left| |P(\xi)|^{|\beta|/m} \frac{D^\beta Q_\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)}.$$

В силу леммы 3.2 и нашего предположения с некоторой постоянной $c_2 > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta Q_\beta(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} \leq c_2.$$

Поскольку

$$D^\beta Q_\beta(\xi) = \beta! \frac{Q_\beta(\xi)}{(\xi')^\beta},$$

то отсюда с некоторой постоянной $c_3 > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\frac{|P(\xi)|^{(r-1)/m}}{P(\xi)} \left| \frac{Q_\beta(\xi)}{(\xi')^\beta} \right| \leq c_3, \quad \xi_1, \ldots, \xi_k \neq 0.$$

В силу непрерывности многочленов Q и P с некоторой постоянной $c_4 > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ отсюда имеем

$$|Q_\beta(\xi)| \leq c_4 |P(\xi)|^{1-(r-1)/m} (\xi')^\beta. \tag{3.3}$$

Так как из определения множества A и леммы 3.1

$$||\xi'||^m \leq c_5[|P(\xi', 0'')| + 1] \leq c_6[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то утверждение леммы немедленно следует из неравенства (3.3).

3.4. *Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ – многочлен порядка m, а k, $1 \leq k \leq n$ – натуральное число. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$*

$$|P(0', \xi'')| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n).$$

Доказательство немедленно следует из леммы 3.3 и неравенства треугольника, так как

$$P(0', \xi'') = P(\xi) - \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k \\ \gamma > 0}} Q_\gamma(\xi),$$

где многочлены $Q_\gamma(\xi)$ определены выше.

Лемма 3.5. *Пусть $P(\xi) \in A_k$ – многочлен с вещественными коэффициентами, а k, $1 \leq k \leq n$ – натуральное число. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$*

$$\begin{gathered} 1 + |P(0', \xi'') + P(\xi', 0'')| \geq c[|P(0', \xi'') + P(\xi', 0'')|], \\ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Доказательство. Так как $P(\xi', 0'')$ эллиптичен относительно ξ', а $P(0', \xi'')$ гипоэллиптичен относительно ξ'' и оба являются многочленами с вещественными коэффициентами, то знаки на бесконечности они не меняют. Поэтому для доказательства неравенства (3.4) достаточно показать, что $P(\xi',0'')P(0',\xi'') \geq 0$ при достаточно больших ξ',ξ''. Пусть, наоборот, существуют последовательности $\{\xi'^s\}_1^\infty$ и $\{\xi''^s\}_1^\infty$, $||\xi'^s|| \to \infty$, $||\xi''^s|| \to \infty$ при $s \to \infty$ такие, что

$$P(\xi'^s,0'')P(0',\xi''^s) < 0, \quad s = 1,2,...$$

Тогда в силу непрерывности и вещественности многочлена P существует последовательность $\{\tau^s\}_1^\infty$, для которой

$$||\tau^s|| \geq \min\left(||\xi'^s||, ||\xi''^s||\right), \quad P(\tau^s) = 0, \quad s = 1,2,...$$

Это противоречит гипоэллиптичности многочлена P. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы 3.5.

Как показывает следующий пример, утверждение леммы 3.5 перестает быть справедливым для многочленов $P \in A$ с комплексными коэффициентами.

Пример. Пусть $P(\xi_1,\xi_2) = \xi_1^4 + i\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^2$. Тогда $P \in A_1$, так как P семиэллиптичен, но соотношение

$$\frac{|P(\xi_1,0)| + |P(0,\xi_2)|}{1 + |P(\xi_1,0) + P(0,\xi_2)|}$$

неограничено на $\mathbb{R}^2$.

Лемма 3.6. *Пусть* $P(\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ *– многочлен порядка* m, *а* k, $1 \leq k \leq n$ *– натуральное число. Тогда для любого мультииндекса* $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$ *существует постоянная* $c_\beta > 0$ *такая, что*

$$|\overline{Q}_\beta(\xi'')| \leq c_\beta[|P(0',\xi'')|^{1-|\beta|/m} + 1], \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}, \tag{3.5}$$

где

$$Q_\beta(\xi'') \equiv \sum_{\substack{\alpha\in(P)\\ \alpha'=\beta}} \gamma_\alpha(\xi'')^{\alpha''}, \quad \xi' = (\xi_1,....,\xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1},....,\xi_n).$$

Доказательство. При достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|P(\xi)|^{1/m}\left|\frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\beta|} \leq c.$$

Следовательно, при достаточно больших $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ имеем, что

$$|P(0',\xi'')|^{1/m} \left| \frac{D^\beta P(0',\xi'')}{P(0',\xi'')} \right|^{1/|\beta|} \le c. \tag{3.6}$$

Так как $D^\beta P(0',\xi'') = \beta! \overline{Q}_\beta(\xi'')$, то неравенство (3.5) немедленно следует из соотношения (3.6).

Лемма 3.7. *Пусть для многочлена $P(\xi)$ выполняются условия предыдущей леммы. Тогда для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$ существует постоянная $c_\beta > 0$ такая, что*

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}_\beta(\xi'')| \le c_\beta[|P(\xi',0'')| + |P(0',\xi'')| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно для $|\beta| = m$ и $\beta = 0$. Пусть $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 \le |\beta| \le m-1$. Тогда в силу неравенства

$$|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}, \quad p,q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3.7}$$

имеем

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}_\beta(\xi'')| \le |\beta| \frac{m-|\beta|}{m} \left(|\xi'|^\beta\right)^{\frac{m}{|\beta|(m-|\beta|)}} + \frac{m-|\beta|}{m} |\overline{Q}_\beta(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}} \le$$

$$\le |\beta| \frac{m-|\beta|}{m} \|\xi'\|^{\frac{m}{m-|\beta|}} + \frac{m-|\beta|}{m} |\overline{Q}_\beta(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Применяя неравенство (3.5) и учитывая, что $P(\xi',0)$ эллиптичен относительно ξ', получим утверждение леммы.

Следствие 3.1. Пусть k, $1 \le k \le n$ – натуральное число, а $P(\xi) \in A_k$, $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1},\dots,\xi_n)$. Тогда с некоторой постоянной $c_\beta > 0$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$c^{-1}[|P(0',\xi'')| + |P(\xi',0'')|] \le 1 + |P(\xi)| \le c[|P(0',\xi'')| + |P(\xi',0'')| + 1].$$

Лемма 3.8. *Пусть k, $1 \le k \le n$ – натуральное числое, $P(\xi')$ – многочлен порядка m, $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1},\dots,\xi_n)$, $R(\xi'')$ и $\overline{Q}(\xi'')$ – многочлены от ξ''. Если для некоторого мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$ и постоянной $c > 0$*

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}(\xi'')| \le c[|P(\xi')| + |R(\xi'')| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то с некоторой другой постоянной $c_1 > 0$

$$|\overline{Q}(\xi'')| \le c_1[|R(\xi'')|^{1-\frac{|\beta|}{m}} + 1], \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Доказательство. Очевидно, $|\beta| \le m$ и утверждение леммы при $|\beta| = m$ тривиально, ибо тогда $\overline{Q}(\xi'') \equiv$const. Пусть

$$\xi_1 = \dots = \xi_k = t|\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{1}{m-|\beta|}}, \quad 0 \le |\beta| \le m-1, \quad t > 0.$$

Тогда

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}(\xi'')| = t^{|\beta|}|\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{|\beta|}{m-|\beta|}+1} = t^{|\beta|}|\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}}$$

и, следовательно, с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$t^{|\beta|}|\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}} \le c[|P(\xi')| + |R(\xi'')| + 1] \le c_2[t^m|\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}} + |R(\xi'')| + 1].$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы 3.8.

Пусть B – некоторое множество из $\mathbb{Z}_+^k$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$.

Теорема 3.2. *Пусть $\overline{Q}_\beta(\xi'')$, $\beta \in B$ – такие многочлены с постоянными коэффициентами, что для многочлена*

$$P(\xi) \equiv \sum_{\beta \in B} |\xi'|^\beta \overline{Q}_\beta(\xi'')$$

выполнены следующие условия :

I) $P(\xi', 0'')$ эллиптичен относительно ξ' ;

II) $P(0', \xi'')$ гипоэллиптичен с весом $|P(0', \xi'')|^{1/m}$, $m =$ord P ;

III) с некоторой постоянной $c > 0$

$$1 + |P(\xi)| \ge \frac{1}{c}\sum_{\beta \in B} |\xi'|^\beta |\overline{Q}_\beta(\xi'')|,$$

$$|\overline{Q}_\beta(\xi'')| \le c[|P(0', \xi'')|^{1-\frac{|\beta|}{m}} + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in B.$$

Тогда многочлен P сильно гипоэллиптичен.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|P(\xi)|^{|\alpha|/m}\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)|} \le \text{const} < \infty.$$

Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|P(\xi)|^{|\alpha|/m}\left|\frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)}\right| \le \sum_{\substack{\beta\in B\\ \beta\ge\alpha'}} \frac{|D^{\alpha'}(\xi')^\beta D^{\alpha''}\overline{Q}_\beta(\xi'')|}{|P(\xi)|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} \le$$

$$\le \frac{2}{c}\sum_{\substack{\beta\in B\\ \beta\ge\alpha'}} \frac{|D^{\alpha'}(\xi')^\beta|\cdot|D^{\alpha''}\overline{Q}_\beta(\xi'')|}{|P(0',\xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}+|P(\xi',0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} \le \frac{2}{c}\sum_{\substack{\beta\in B\\ \beta\ge\alpha'}} S_\beta,$$

где

$$S_\beta = \frac{||\xi'||^{|\beta|-|\alpha'|}|D^{\alpha''}\overline{Q}_\beta(\xi'')|}{|P(0',\xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}+|P(\xi',0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}}.$$

Так как при $|\alpha''| > m-|\beta|$ $D^{\alpha''}\overline{Q}_\beta(\xi'') = 0$, то

$$\sum_{\beta\in B,\beta\ge\alpha'} S_\beta = \sum_{\substack{\beta\in B,\beta\ge\alpha'\\ |\beta|\le m-|\alpha''|}} S_\beta.$$

Применим неравенство (3.7). Для любых $\beta\in B$, $\alpha'\le\beta$, $|\beta|\le m-|\alpha''|$, постоянных $c_1, c_2 > 0$ и достаточно больших $\xi\in\mathbb{R}^n$, из условий I), II) и лемм 3.2, 3.8 получим

$$S_\beta \le$$

$$\le c_1\left[\frac{||\xi'||^{m-|\alpha'|}}{|P(0',\xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}+|P(\xi',0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} + \frac{|D^{\alpha''}\overline{Q}_\beta(\xi'')|^{\frac{m-|\alpha|}{m-|\alpha''|-|\beta|}}}{|P(0',\xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}+|P(\xi',0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}}\right] \le c_2.$$

Этим утверждение теоремы 3.2 доказано.

Следствие 3.2. Многочлен R сильно гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда существуют натуральное число k, $1\le k\le n$ и линейное обратимое ограниченное отображение $T:\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ такие, что для многочлена $P(\eta) = R(T\eta)$ выполнены следующие условия :

i) $P(\xi',0'')$ эллиптичен относительно ξ, $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_k)$;

ii) $P(0',\xi'')$, $\xi'' = (\xi_{k+1},\dots,\xi_n)$ является гипоэллиптичным многочленом с весом $|P(0',\xi'')|^{1/m}$, $m = \mathrm{ord}\, P$;

iii) для некоторой постоянной $c > 0$

$$c^{-1}\sum_{\alpha'}|\xi'|^{\alpha'}|\overline{Q}_{\alpha'}(\xi'')| \le 1+|P(\xi)| \le c[|P(0',\xi'')|+|P(\xi',0'')|+1], \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

где многочлены $\overline{Q}_{\alpha'}(\xi'')$ определены выше.

Доказательство следует из теорем 1.1, 3.2 и лемм 3.3, 3.4.

ABSTRACT. The paper presents necessary and sufficient conditions for the strong hypoellipticity of polynomials with constant coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Мир, М., 1963.
2. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Матем. Сборник, т. 11, стр. 339 – 356, 1985.
3. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 58 – 81, 1967.

19 марта 1996 Ереванский государственный университет

СУЩЕСТВЕННО–СОВЕРШЕННЫЕ И СУЩЕСТВЕННО–ОРСОВЕРШЕННЫЕ ГРАФЫ

С. Е. Маркосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

В настоящей работе продолжены исследования тех понятий и проблем, которые впервые были приведены в [1]. Определены новые классы совершенных графов : класс существенно-совершенных графов и класс существенно-орсовершенных графов. Описаны определенные подклассы совершенных графов и сформулированы некоторые проблемы.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжены исследования тех понятий и проблем, которые впервые были приведены в [1]. Определены новые классы совершенных графов : класс существенно-совершенных графов (EP) и класс существенно-орсовершенных графов (EDP). Описаны некоторые известные подклассы EP и EDP, а также другие классы совершенных графов, сформулированы некоторые проблемы. В частности показано :

$$EDP \subset EP, \quad EP \subset Perf, \quad Comp \subset EDP,$$

где $Perf$ – класс совершенных графов, $Comp$ – класс графов сравнения.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $G = (V, E)$ – простой граф без параллельных ребер и петель. Введем следующие обозначения :

$\alpha(G)$ – число независимости,

$\omega(G)$ – плотность (число вершин наибольшей клики),

$K(G)$ – кликоматическое число (наименьшее число клик, покрывающих все вершины графа G),

$\chi(G)$ – хроматическое число.

Нечетной дыркой C_{2k+1} будем называть цикл нечетной длины $2k+1 \geq 5$ без диагоналей. Скажем, что граф имеет *α-покрытие*, если $k(G) = \alpha(G)$. Класс графов, не содержащий нечетных дырок и их дополнений, называется ***классом Бержа***. Ребро e графа называется *критическим*, если $\alpha(G-e) > \alpha(G)$. Цепь называется критической, если все ребра этой цепи критические. Критической компонентой графа G называется максимальный по включению подграф, вершины которого связаны критическими цепями. Ясно, что если граф G имеет α-покрытие, то критические компоненты этого графа полные. Граф G называется *совершенным*, если каждый подграф графа G имеет α-покрытие. Сильная гипотеза (СГБ), которая остается до сих пор открытой, следующая :

Предположение СГБ. *Граф G совершенный тогда и только тогда, когда G и $\overline{G}$ не содержат нечетных дырок.*

В работах [1], [3] приведены два предположения, которые вместе взятые равносильны СГБ.

Предположение 1. . *Если граф G из класса Бержа, то критические компоненты G полные.*

Предположение 2. *Если критические компоненты любого подграфа графа G полные, то G совершенный.*

Несмотря на то, что оба эти предположения до сих пор остаются открытыми, доказано [3], [4], что только предположение 2 отдельно взятое равносильно СГБ. Последнее утверждение получается из нижеследующей теоремы [4]. *Монстром* называется минимальный несовершенный граф, принадлежащий классу Бержа.

Теорема 1 ([4]). *Критические компоненты монстра полные.*

Из вышеприведенных фактов видно какое важное значение имеют понятия критического ребра, критической компоненты в исследовании совершенных графов. Немаловажное значение имеют в этом направлении также понятия *существенного ребра и существенной компоненты* (см. [1]). *Разрезом* будем называть множество всех ребер $(V_1, V_2) \subset E$ графа $G(V, E)$, соединяющих вешины из V_1 и

V_2, где $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Скажем, что разрез (V_1, V_2) *разделяет* вершины u и v, если $u \in V_1$, $v \in V_2$ (или $u \in V_2$, $v \in V_1$). Разрез (V_1, V_2) называется *увеличивающим*, если

$$\alpha(G(V_1)) + \alpha(G(V_2)) > \alpha(G),$$

где $G(V_i)$ – подграф, порожденный подмножеством вершин V_i ($i = 1, 2$). Ребро $e = uv$ назовем *существенным*, если любой разделяющий разрез u, v является увеличивающим. Из определений следует, что критическое ребро существенное, но обратное утверждение неверно, более того, есть графы, которые не содержат критических ребер, но содержат существенные ребра.

Цепь назовем *существенной*, если все ребра этой цепи существенные. *Существенной компонентой* графа Gназыается максимальный (по включению) подграф, вершины которого связаны существенной цепью. В отличие от критических компонент, ребра которых могут быть не критическими, все ребра существенных компонент существенные. Критическая компонента целиком входит в одну существенную компоненту, котороая может состоять из многих критических компонент.

Ясно, что если граф G имеет α-покрытие, то его существенные компоненты полные. Нетрудно убедиться, что если существенные компоненты любого подграфа G полные, то граф G совершенный [1].Отсюда и из предположения 2 следует, что СГБ равносильна следующему :

Предположение 3. *Если критические компоненты любого подграфа графа G полные, то и существенные компоненты G полные.*

§2. КЛАССЫ EP И EDP

Определение 1. Граф Бержа G назовем *существенно-совершенным (essentially perfect)*, если в каждом подграфе G' графа G концы любого существенного ребра соединены критической цепью.

Класс существенно-совершенных графов обозначим через EP. Ясно, что если $G \in EP$, то критические и существенные компоненты в любом подграфе $G' \subset G$ совпадают. Обозначим через $Perf$ класс совершенных графов [2].

Теорема 2. $EP \subset Perf$.

Доказательство. Если теорема 2 неверна, то существет монстр $M \in EP$. Значит, критические и существенные компоненты в любом подграфе монстра M совпадают. В силу теоремы 1 эти критические компоненты полные, следовательно, существенные компоненты любого подграфа $M' \subset M$ тоже полные. Нетрудно доказать, что такой граф совершенный (утверждение 7 [1]). Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Теорему 2 можно сформулировать и так : *СГБ верна для графов класса EP*.

Пусть $G = (V, E)$ – простой граф, $\longmapsto$ – некоторая ориентация. графа G, а $\vec{G}$ – орграф, полученный из G после этой ориентации. Ориентацию $\longmapsto$ назовем *существенно-совершенной (essentially diperfect)*, если в каждом подграфе $\vec{G}' \subset \vec{G}$ для любой существенной дуги $e = xy$ существует ориентированная кририческая цепь, соединяющая начало дуги x с концом дуги y.

Определение 2. G назовем *существенно-совершенным (essentially diperfect)* графом, если G допускает существенно-совершенную ориентацию.

Обозначим через EDP класс существенно-орсовершенных графов. Из определения следует $EDP \subset EP$. Обозначим через $Comp$ класс графов сравнения [2].

Теорема 3. $Comp \subset EDP$.

Доказательство. Пусть $G \in Comp$ и $\vec{G}$ – транзитивно ориентированный граф, полученный из G. Дугу $e = xy \in \vec{G}$ назовем *неудлиняющейся*, если в $\vec{G}$ не существует пара дуг xz и zy. Орцепь назовем *неудлиняющейся*, если каждая дуга этой цепи неудлиняющаяся. Нетрудно проверить, что если существенная дуга e неудлиняющаяся, то e критическая. Действительно, если e не критическая, то подграф $G - e$ не обладает α-покрытием, т.к. e существенная. С другой стороны, $\vec{G} - e$ – транзитивно ориентированный граф, т.к. e неудлиняющаяся и, следовательно, имеет α-покрытие. Полученное противоречие доказывает, что e должна быть критической.

Теперь предположим, что теорема 3 неверна. Пусть $\vec{G}$ – минимальный (по числу дуг) транзитивно ориентированный граф, который не принадлежит EDP.

Тогда $\vec{G}$ содержит такую существенную дугу $e = xy$, что x не соединена с y критической орцепью. Нетрудно убедиться, что в качестве дуги e можно выбрать такую, что из x не выходят, а в y не входят критические дуги, которые принадлежат орцепям, соединяющим x с y. Ясно, что существует неудлиняющаяся цепь $P_1 = x, x_1, ..., x_k, y$, в противном случае e была бы неудлиняющейся и существенной, т.е. критической, что противоречит предположению. Тогда граф $\vec{G} - e_1$, где дуга $e_1 = xx_1$, транзитивно ориентирован, т.к. дуга e_1 не критическая (в силу выбора дуги xy) и неудлиняющаяся. Следовательно, $G - e_1$ существенно орсовершенный и существует критическая цепь $P_2 = x, y_1, ..., y_m, y$, соединяющая x с y. Дуга $f_m = y_m y$ стала критической после удаления дуги e_1 (в силу выбора дуги xy). Но это невозможно. Действительно, множество дуг $\{e_1, f_m\}$ критическое, т.е.

$$\alpha\left(\vec{G} - \{e_1, f_m\}\right) > \alpha\left(\vec{G}\right)$$

и, значит, подграф, порожденный множеством вершин $\{x, x_1, y_m, y\}$, содержит только дуги e_1 и f_m. Но это неверно, т.к. в силу транзитивной ориентируемости $\vec{G}$ должен содержать дуги xy_m, x_1y и, конечно, дугу xy. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

G называется графом *Мейниела (Meyniel)* [4], если каждый нечетный цикл длины $n \geq 5$ содержит хотя бы две диагонали. Класс всех таких графов обозначим через Mey.

Теорема 4. $Mey \subset EDP$.

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из следующего утверждения (см. [4]) : *В графе Мейниела существенное ребро является критическим.*

Ниже приведено взаимоотношение EDP и EP с другими известными классами графов (обозначения взяты из [2]). Доказательства этих утверждений приведены в скобках, а для некоторых утверждений доказательства опускаем, т.к. их проверить не сложно.

$$EDP \subset EP, \qquad EDP \neq EP \tag{1}$$

(для цикла C_6 длины 6 $\overline{C}_6 \in EP$, $\overline{C}_6 \notin EDP$).

$$Mey \subset EDP, \qquad Comp \subset EDP, \qquad bip \subset EDP. \tag{2}$$

$$\overline{bip} \subset EP, \qquad \overline{bip} \not\subset EDP \tag{3}$$

(для цикла C_6 имеем $C_6 \in bip$, $\overline{C}_6 \notin EDP$).

$$EP \not\subset strong\ perf, \quad EP \not\subset alt\ or, \quad EP \not\subset perf\ or \tag{4}$$

(для цикла C_6 имеем $\overline{C}_6 \in EP$, $\overline{C}_6 \notin strong\ perf$, $\overline{C}_6 \notin alt\ or$ и $\overline{C}_6 \notin perf\ or$).

$$perf\ or \not\subset EP, \quad alt\ or \not\subset EP \tag{5}$$

(для графа G_1 (см рис. 1) имеем $G_1 \in perf\ or$, $G_1 \in alt\ or$, $G_1 \notin EP$).

$$EDP \not\subset superperf, \quad EDP \not\subset P_4 - Comp \tag{6}$$

(для графа S_3 (см. рис. 1) имеем $\overline{S}_3 \in EDP$, $\overline{S}_3 \notin superperf$ и $\overline{S}_3 \notin P_4 - Comp$).

$$loc.perf \not\subset EP, \quad circl \not\subset EP \tag{7}$$

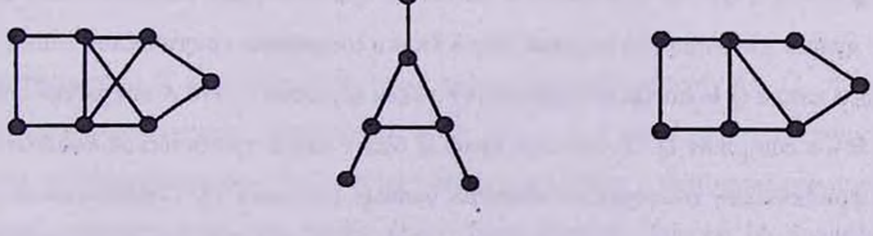
(для графа G_2 (см. рис. 1) имеем $G_2 \in loc.perf$, $G_2 \in circl$, $G_2 \notin EP$).

$$EP \not\subset loc.perf \tag{8}$$

(для графа $G_3 = C_{2k+1} \cup e$, где e – триангулятор, имеем $G_3 \in EP$, $G_3 \notin loc.perf$).

$$G \in EP \quad \not\Rightarrow \quad \overline{G} \in EP \tag{9}$$

(для графа G_1 (см. рис. 1) имеем $\overline{G}_1 \in EP$, $G_1 \notin EP$).



G_1 $\qquad$ S_3 $\qquad$ G_2

Рис. 1. Графы G_1, S_3 и G_2.

§3. ПРОБЛЕМЫ

Существуют разные расширения класса $Comp$ (см. [2]), однако они не входят в класс EP, как это видно из вышеприведенного списка. Но два класса $P_4 - Comp$ и $superperf$, как нам кажется, являются подклассами EP. Здесь приведены три предположения, которые в частном случае мы докажем ниже, но в общем случае они остаются открытыми проблемами.

Предположение 4. $P_4 - Comp \subset EP$.

Предположение 5. $P_4 - Comp \subset EDP$ *(усиление предположения 4).*

Предположение 6. $Superperf \subset EP$.

Для исследования этих классов было бы полезно полностью описать класс EP (EDP) с помощью запрещенных подграфов. К сожалению, это нам кажется очень трудным делом, поэтому мы попытаемся найти некоторую неполную систему подграфов, которую содержит любой граф $G \notin EP$. Это даст нам возможность доказать предположения 4 и 6 в частном случае. Пока мы будем изучать свойства минимального (по включению множества вершин) графа Бержа H, который не является существенно-совершенным, т.е. $H \notin EP$, но любой его подграф $H' \subset H$ существенно-совершенный, т.е. $H' \in EP$.

Теорема 5. *Граф H совершенный.*

Доказательство. Из определения графа H и теоремы 2 следует, что для каждой вершины $z \in H$ подграф $H - z$ совершенный, значит, если H несовершенный, то H – монстр. Тогда для каждой вершины $z \in H$ существенными компонентами подграфа $H - z$ являются клики α-покрытия этого подграфа (теорема 2 [1]). Т.к. граф $H - z \in EP$, то эти клики и являются критическими компонентами $H - z$, т.е. любые две вершины каждой такой клики соединены критической цепью. Для любой клики Q монстра H существует такая вершина z, что α-покрытие подграфа $H - z$ содержит Q. Тогда весь граф H будет одной критической компонентой. Но критические компоненты монстра полные (теорема 1). Следовательно, H – полный граф, т.е. совершенный. Полученное противоречие доказывает теорему.

Существенное ребро назовем *сильным*, если концы этого ребра соединены критической цепью. Если существенное ребро не сильное, назовем его *слабым*. В свойствах 1–4 предполагается, что $e = xy$ – *слабое существенное ребро.* Тогда граф $H = (V, E)$ обладает следующими свойствами :

Свойство 1. *Через каждую вершину $z \neq x, y$ проходят хотя бы два α-независимых множества, одно из которых не содержит x, а другое не содержит y, а через $x(y)$ хотя бы одно α-независимое множество.*

Доказательство. Пока докажем, что через каждую вершину $z \neq x, y$ проходит α-независимое множество. Действительно, если через z не проходит никакое α-независимое множество, то подграф $H - z$ имеет такое α-покрытие, при котором вершины x и y принадлежат разным полным подграфам Q_x и Q_y α-покрытия. Тогда

$$\alpha(H - Q_x) = \alpha - 1, \quad x \in Q_x, \quad y \in Q_y, \quad Q_x \neq Q_y.$$

Т.к. $H - Q_x$ совершенный, то $H - Q_x$ имеет $(\alpha - 1)$-покрытие, т.е. $e = xy$ не существенное в H. Аналогично можно доказать, что и через x и через y также проходят α-независимые множества. Из вышеприведенных рассуждений видно, что через любую вершину $z \neq x, y$ проходят два α-независимых множества, одно из которых не содержит x, а другое не содержит y.

Свойство 2. *Для любой вершины $z \neq x, y$ существует такое α-покрытие $\{Q_x, Q_y, ...\}$ графа $H - z$ (покрытие разделяет x и y) и такие α-независимые множества $S(Q_x)$ и $S(Q_y)$, что*

$$S(Q_x) \cap Q_x = \emptyset, \quad S(Q_y) \cap Q_y = \emptyset, z \in S(Q_x) \cap S(Q_y), x \in Q_x, y \in Q_y, Q_x \neq Q_y.$$

Свойство 3. *Для любого α-покрытия $\{Q_1, Q_2, ..., Q_\alpha\}$ графа H каждое Q_i является кликой (максимальный полный подграф) и $|Q_i| \geq 2$; если $\{x, y\} \subset Q_i$, то $|Q_i| \geq 3$, $i = 1, ..., \alpha$.*

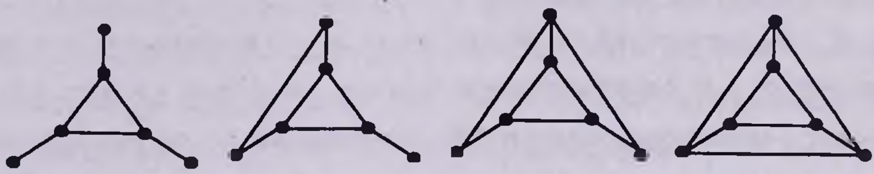
Доказательство. Т.к. в силу свойства 2 через каждую вершину $t \in Q_j$ графа G проходит α-независимое множество, то в Q_i, $i \neq j$ должна существовать вершина, которая не смежна с t. Поэтому никакую вершину t, не принадлежащую Q_i, нельзя добавить к Q_i так, чтобы $Q_i \cup t$ была кликой. Значит, Q_i является кликой. Если $Q_i = \{x, y\}$, т.е. $|Q_i| = 2$, то из свойства 1 вытекает, что

$$z \neq x, y, \quad x \in S(Q_y), \quad y \in S(Q_x) \quad \Rightarrow \quad z \in S(Q_y) \cap S(Q_x),$$

т.е. z не смежна ни с x, ни с y. Но тогда ребро $e = xy$ было бы критическим, что противоречит предположению, что e – слабое существенное ребро. Значит, $|Q_i| \geq 3$.

Свойство 4. *Для любой вершины $z \neq x, y$ в подграфе $H - z$ ребро $e = xy$ не существенное, а для любого α-покрытия $\{Q_1, ..., Q_\alpha\}$ графа H в подграфе $H - Q_i$ ребро e, где $e \notin Q_i$, сильное, существенное.*

Доказательство. Из определения H следует, что подграф $H - z$ имеет x, y-разделяющее α-покрытие, поэтому в $H - z$ ребро e не существенное. Ясно, что в подграфе $H - Q_i$ ребро e опять существенное, в противном случае e не было бы существенным в H. Но граф $(H - Q_i) \in EP$, поэтому ребро e сильное.



$\overline{S_3^0} = \overline{S_3}$ $\quad$ $\overline{S_3^1}$ $\quad$ $\overline{S_3^2}$ $\quad$ $\overline{S_3^3}$

Рис. 2. Графы $\overline{S_3^i}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Обозначим через $\overline{S_3^i}$ граф, полученный из $\overline{S_3}$ ("3-sun", см. Рис. 1 и [2]), добавлением i ребер $i = 0, 1, 2, 3$ (см. Рис. 2).

Предположение 7. *Если граф $G \notin EP$, то G содержит подграф $\overline{S_3^i}$ хотя бы для одного значения $i = 0, 1$.*

Теорема 6 (частный случай предположения 7). *Если $G \notin EP$ и $\omega(G) \leq 3$, то G содержит подграф $\overline{S_3^i}$ хотя бы для одного значения $i = 0, 1$.*

Доказательство. Ясно, что граф G содержит подграф H, поэтому мы покажем, что H содержит подграф $\overline{S_3^i}$. Из определения графа H следует, что H содержит слабое существенное ребро $e = xy$. Т.к. $\omega(H) \leq 3$, в силу свойства 3 для любого α-покрытия H существует такая клика Q, что $Q = \{x, y, z\}$, $|Q| = 3$. Пусть S_x – независимое множество, содержащее x и x_1, $x \neq x_1$. Из свойства 2 следует, что Q содержит такую вершину t, отличную от x, которая вместе с x_1 находится в некотором α-независимом множестве S_1 ($t = y$ или $t = z$). Ясно, что в S_x существует такая вершина x_1, которая смежна с y, в противном случае ребро e было бы критическим. Значит, для такой вершины x_1 $t = z$, т.е. x_1 не смежна с x и z, но смежна с y. Аналогично существует вершина $y_1 \in S_y$, которая смежна с x, но не смежна с y и z. Теперь остается доказать, что существует вершина z_1, которая смежна с z, но не смежна с x и y. Из свойства 2 следует, что существует такая веершина z_1 из $S_x \cup S_y$, которая смежна с z и не цмежна с x и y. Ясно, что z_1 не смежна или с x_1 или с y_1. Мы доказали, что H содержит подграф $\overrightarrow{S_3^i}$ хотя бы для одного значения $i = 0, 1, 2$. Но $\overrightarrow{S_3^2}$ несовершенный, а H совершенный, поэтому H не содержит $\overrightarrow{S_3^2}$.

Следствие 1. Если граф $G \in P_4 - Comp$ и $\omega(G) \leq 3$, то $G \in EP$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что если $G \in P_4 - Comp$, то G не может содержать подграфы $\overrightarrow{S_3^i}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Но в силу теоремы 5 любой граф, который не принадлежит классу EDP, содержит $\overrightarrow{S_3^i}$ для некоторого значения $i = 0, 1$. Следовательно, $G \in EP$.

Следствие 2. Если $G \in superperf$ и $\omega(G) \leq 3$, то $G \in EP$.

Доказательство. Аналогично следствию 1 можно убедиться, что если граф $G \in superperf$, то G не содержит $\overrightarrow{S_3^i}$.

ABSTRACT. The paper continues the study of notions and problems first considered in [1]. We defined new classes of perfect graphs : the class of essentially perfect and essentially diperfect graphs. Certain subclasses of perfect graphs are studied and several problems are formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Markossian, G. Gasparian, A. Markossian, "On essential components and critical sets of graph", Discrete Mathematics, ISSN : 0012-365X, vol /Iss : 178/ 1-3, pp. 137-153, 1997.
2. A. Bradstadt, Special Graph Class, SM-DU-199, 1993.
3. S. Markossian, G. Gasparian, A. Markossian, "On a conjecture of Berge", J. of Comb. Theory, ser. B, vol. 56, № 1, pp. 97 – 107, 1992.
4. A. Sebo, "On critical edges in minimal imperfect graphs", Lab. Artemis, RR 924-M, 1993.
5. С. Маркосян, И. Карапетян, "Совершенные графы", ДАН Арм.ССР, т. 15, № 5, стр. 292 – 296, 1976.
6. С. Маркосян, "Совершенные и критические графы", ДАН Арм.ССР, т. 11, № 1, стр. 218 – 223, 1975.

2 сентября 1996

Ереванский государственный университет
E-mail : diskmath@ysu.am

S–ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ КАК ОГИБАЮЩИЕ S–ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

В. А. Мирзоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

Доказано, что в пространствах постоянной кривизны $M_n(\theta)$ m-мерное подмногообразие M класса C^∞ является огибающим s-го ($s \geq 3$) порядка семейства m-мерных s-параллельных подмногообразий тогда и только тогда, когда M имеет полупараллельные фундаментальные формы α_{s-1} и α_s. Рассмотрен случай симметрических фундаментальных форм. Показано, что подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами α_{s-1} и α_s удовлетворяют условию $R(X,Y) \cdot R = 0$.

§1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Подмногообразие M в пространстве постоянной кривизны $M_n(\theta)$ называется *полусимметрическим* (см. [1]), если его вторая фундаментальная форма (ф.ф.) α_2 удовлетворяет следующему условию :

$$\overline{R}(X,Y) \cdot \alpha_2 = 0 \tag{1.1}$$

для любых касательных к M векторных полей X и Y, где $\overline{R}(X,Y) = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X - \overline{\nabla}_{[X,Y]}$ – оператор кривизны связности Ван дер Вардена–Бортолотти $\overline{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ (∇ – риманова связность, а $\nabla^\perp$ – нормальная связность). Условие (1.1) называется также *условием полупараллельности* ф.ф. α_2 (см. [2] – [4]).

В 1990 г. Ю. Г. Лумисте получил один из центральных в теории полусимметрических подмногообразий результатов. Им была доказана следующая характеристическая

Статья написана при финансовой поддержке "Zakneftegazstroy–Prometheus" Joint-Stock Company.

Теорема 1 ([5]). *m-мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ является полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства m-мерных локально симметрических подмногообразий.*

Напомним, что подмногообразие M называется *локально симметрическим*, если его вторая ф.ф. α_2 параллельна, т.е. удовлетворяет условию $\overline{\nabla}\alpha_2 = 0$ (см. [6]).

Теорема 1 сформировала новый взгляд на природу полусимметрических подмногообразий и открыла новые возможности в решении классификационных задач и геометрического описания полусимметрических подмногообразий. Обзор важнейших результатов относительно этого класса подмногообразий и подробная библиография приведены в [7] – [10]. Теорему 1 можно обобщать и развивать в двух диаметрально противоположных направлениях : в направлении усиления закона огибания или, наоборот, в направлении его ослабления.

В настоящей работе рассматривается обобщение в первом направлении : в случае объемлющего пространства постоянной кривизны дается положительное решение следующей общей задачи : являются ли подмногообразия с полупараллельными ф.ф. высших порядков огибающими для подмногообразий с параллельными ф.ф. соответствующих порядков ? Эта задача представляет из себя часть следующей более общей проблемы : являются ли полупараллельные структуры огибающими для соответствующих параллельных структур ? Например, являются ли подмногообразия, удовлетворяющие условию $R(X,Y)\cdot R = 0$ или $R(X,Y)\cdot Ric = 0$ (R – тензор кривизны, Ric – тензор Риччи, а $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$) огибающими для семейств подмногообразий, удовлетворяющих, соответственно, условию $\nabla R = 0$ или $\nabla Ric = 0$?

Для того чтобы сформулировать полученные результаты, приведем сначала некоторые определения. Пусть M и $\widetilde{M}$ – два m-мерных подмногообразия в пространстве постоянной кривизны $M_n(\theta)$, имеющие общую точку x. Говорят, что x является *точкой касания второго порядка* для M и $\widetilde{M}$, если для каждой кривой $\gamma \in M$, проходящей через x, существует кривая $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{M}$, проходящая через x и имеющая в этой точке общую с γ касательную и вектор кривизны. В [5] доказано, что $x \in M$ является точкой касания второго порядка тогда и только тогда, когда совпадают касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$, а также вторые ф.ф. α_{2x} и $\widetilde{\alpha}_{2x}$. В последней форме понятие касания второго порядка допускает следующее обобщение.

Определение 1. Общая точка x двух m-мерных подмногообразий M и $\widetilde{M}$ в $M_n(\theta)$ называется *точкой касания s-го порядка $(s \geq 2)$*, если в точке x совпадают :

1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$,

2) все соответствующие ф.ф. подмногообразий M и $\widetilde{M}$ до s-го порядка включительно, т.е. $\alpha_{rx} = \widetilde{\alpha}_{rx}$, $r = 2, \ldots, s$.

Такое понимание касания s-го порядка подмногообразий отличается от общепринятого (см. [11], стр. 190), но оно имеет то преимущество, что определяется с помощью фундаментальных объектов самих подмногообразий, характеризующих всю их геометрию.

Определение 2. m-мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ называется *огибающим s-го порядка $(s \geq 2)$* некоторого семейства m-мерных подмногообразий $\{G\}$, если в каждой своей точке $x \in M$ оно имеет касание s-го порядка с каким-либо подмногообразием этого семейства.

Другие подходы в теории огибающих освещены, например, в монографии [12] и цитированной там литературе.

Ф.ф. α_s называется *параллельной*, если $\overline{\nabla}_X \alpha_s = 0$ для любого X и *полупараллельной*, если $\overline{R}(X,Y) \cdot \alpha_s = 0$ для любых X и Y. Подмногообразия, удовлетворяющие первому условию, называются *s-параллельными*, а второму условию – *s–полупараллельными*.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты работы.

Теорема 2. *В пространстве постоянной кривизны $M_n(\theta)$ m-мерное подмногообразие класса C^∞ является огибающим s-го порядка некоторого семейства m-мерных s-параллельных подмногообразий тогда и только тогда, когда оно имеет полупараллельные ф.ф. α_{s-1} и α_s при $s > 2$ и полупараллельную ф.ф. α_2 при $s = 2$.*

В частном случае симметрических фундаментальных форм имеет место более сильное утверждение :

Теорема 3. *Пусть m-мерное подмногообразие класса C^∞ в пространстве $M_n(\theta)$ имеет симметрические ф.ф. $\alpha_3, ..., \alpha_{s-1}$ ($s > 4$). Тогда его ф.ф. α_s будет симметрической тогда и только тогда, когда M является огибающим $(s-2)$-го порядка семейства m-мерных $(s-2)$-параллельных подмногообразий, у каждого из которых все ф.ф. до $(s-2)$-го порядка включительно также являются симметрическими.*

Как известно (см. [2]) условие (1.1) влечет $R(X,Y) \cdot R = 0$. Эта импликация является частным проявлением следующего общего принципа.

Теорема 4. *В пространстве $M_n(\theta)$ каждое подмногообразие, удовлетворяющее условиям $\overline{R}(X,Y) \cdot \alpha_{s-1} = 0$, $\overline{R}(X,Y) \cdot \alpha_s = 0$ ($s \geq 3$), удовлетворяет также условию $R(X,Y) \cdot R = 0$.*

Условие $R(X,Y) \cdot R = 0$ характеризует полусимметрические римановы пространства, которым посвящено значительное количество публикаций (см., например, обзорную статью [8]). Их локальная классификация получена в [13].

§2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И УРАВНЕНИЯ

В настоящем параграфе, используя формализм расслоения адаптированных ортонормированных реперов подмногообразия, мы получаем основные уравнения и формулы, используемые в доказательствах основных результатов. Пусть $\omega = \omega^a \otimes e_a$ является канонической 1-формой на $M_n(\theta)$, а ω_a^b – формы связности Леви–Чивита в главном расслоении $O(M_n(\theta))$ ортонормированных реперов $\{x, e_1, ..., e_n\}$ в $M_n(\theta)$, где $a, b = 1, ..., n$. Тогда $\omega_a^b + \omega_b^a = 0$ и имеют место следующие структурные уравнения :

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b - \theta\omega^a \wedge \omega^b.$$

Пусть M – m-мерное подмногообразие класса C^∞ в $M_n(\theta)$. Тогда расслоение

$O(M_n(\theta))$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, M_n(\theta))$ адаптированных реперов $\{x, e_1, ..., e_n\}$, характеризуемых тем, что векторы $e_1, ..., e_m$ принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а векторы $e_{m+1}, ..., e_n$ – нормальному пространству $T_x^{\perp}(M)$ (см. [14], т. 2, стр. 11 – 15). В силу этого и первой группы структурных уравнений имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \tag{2.1}$$

где вторая группа уравнений получается из первой путем внешнего дифференцирования и последующего применения леммы Картана. Аналогично, из второй группы уравнений в (2.1) получаются соотношения

$$\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha \; (= \overline{\nabla}_j h_{ik}^\alpha), \tag{2.2}$$

где $\overline{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти, а ковариантный дифференциал $\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha$ определяется формулой

$$\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k. \tag{2.3}$$

В (2.1) и (2.2) функции $h_{ij}^\alpha, h_{ijk}^\alpha$, симметрические по нижним индексам, являются компонентами второй α_2 и третьей α_3 фундаментальных форм (ф.ф.), соответственно. Это – $T^{\perp}(M)$-значные формы, действующие, соответственно, по правилам

$$\alpha_2 : (X, Y) \longmapsto h_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha, \tag{2.4}$$

$$\alpha_3 : (X, Y, Z) \longmapsto h_{ijk}^\alpha X^i Y^j X^k e_\alpha, \tag{2.5}$$

где $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$. Из (2.2) следует, что $\alpha_3 = \overline{\nabla}\alpha_2$. Компоненты $h_{i_1 \dots i_{s+1}}^\alpha$ фундаментальных форм α_{s+1} определяются соотношениями

$$\overline{\nabla} h_{i_1 \dots i_s}^\alpha = h_{i_1 \dots i_{s+1}}^\alpha \omega^{i_{s+1}}, \quad s = 3, 4, ..., \tag{2.6}$$

где левые части раскрываются по той же схеме, что и в (2.3). Формы α_s, $s = 4, 5, ...$ также являются $T^{\perp}(M)$-значными и их действие определяется по формулам, аналогичным (2.4) и (2.5). Однако эти формы, в отличие от форм

α_2 и α_3, симметричны только по первым трем аргументам и в общем случае симметрическими не являются. Из соотношений (2.6) следует, что $\alpha_{s+1} = \overline{\nabla}\alpha_s$.

Говорят, что ф.ф. α_s подмногообразия M является *параллельной* или *ковариантно постоянной*, если ее компоненты $h^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ удовлетворяют условию

$$dh^\alpha_{i_1\ldots i_s} + h^\beta_{i_1\ldots i_s}\omega^\alpha_\beta - h^\alpha_{ki_2\ldots i_s}\omega^k_{i_1} - \cdots - h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k}\omega^k_{i_s} = 0. \qquad (2.7)$$

Это условие более коротко можно записать в виде $\overline{\nabla} h^\alpha_{i_1\ldots i_s} = 0$ или $\overline{\nabla}\alpha_s = 0$. В силу (2.6) условие (2.7) равносильно условию $h^\alpha_{i_1\ldots i_s i_{s+1}} = 0$, т.е. равенству $\alpha_{s+1} = 0$. Очевидно, что тогда $\alpha_j = 0$ для любого $j > s$.

Перейдем теперь к определению полупараллельности ф.ф. α_s. Дифференцируя внешним образом уравнения

$$dh^\alpha_{i_1\ldots i_s} + h^\beta_{i_1\ldots i_s}\omega^\alpha_\beta - h^\alpha_{ki_2\ldots i_s}\omega^k_{i_1} - \cdots - h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k}\omega^k_{i_s} = h^\alpha_{i_1\ldots i_s k}\omega^k,$$

получим

$$h^\alpha_{i_1\ldots i_s kl}\omega^k \wedge \omega^l = h^\alpha_{ki_2\ldots i_s}\Omega^k_{i_1} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k}\Omega^k_{i_s} - h^\beta_{i_1\ldots i_s}\Omega^\alpha_\beta. \qquad (2.8)$$

Формы

$$\Omega^j_i = d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k = -\left(\sum_\alpha h^\alpha_{i[k} h^\alpha_{l]j} + \theta\delta_{i[k}\delta_{l]j}\right)\omega^k \wedge \omega^l, \qquad (2.9)$$

$$\Omega^\beta_\alpha = d\omega^\beta_\alpha - \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma = -\sum_i h^\alpha_{i[k} h^\beta_{l]j}\omega^k \wedge \omega^l \qquad (2.10)$$

являются 2-формами кривизны связности Ван дер Вардена–Бортолотти $\overline{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, где ∇ обозначает риманову связность на подмногообразии M, определенную 1-формами ω^j_i, а $\nabla^\perp$ – нормальную связность, определенную 1-формами ω^β_α.

Говорят, что ф.ф. α_s подмногообразия M является *полупараллельной*, если ее компоненты удовлетворяют следующему условию :

$$h^\alpha_{ki_2\ldots i_s}\Omega^k_{i_1} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k}\Omega^k_{i_s} - h^\beta_{i_1\ldots i_s}\Omega^\alpha_\beta = 0. \qquad (2.11)$$

Из (2.8) следует, что (2.11) равносильно симметричности компонент $h^\alpha_{i_1\ldots i_s kl}$ ф.ф. α_{s+2} по двум последним нижним индексам, что, в свою очередь, равносильно симметричности выражения $\alpha_{s+2}(X_1,...,X_s,X,Y)$ по аргументам X и Y. В формулах (2.9) и (2.10) коэффициенты

$$R^j_{ikl} = -\left(\sum_\alpha h^\alpha_{i[k} h^\alpha_{l]j} + \theta\delta_{i[k}\delta_{l]j}\right), \quad R^\beta_{\alpha kl} = -\sum_i h^\alpha_{i[k} h^\beta_{l]j} \qquad (2.12)$$

при $\omega^k \wedge \omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$, соответственно. Если $R = 0$, то подмногообразие M называется *локально-эвклидовым*. Если $R^\perp = 0$, то говорят о подмногообразии с *плоской нормальной связностью*.

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.11) и учитывая, что 2-формы $\omega^p \wedge \omega^q$ являются базисными, получим следующее алгебраическое условие полупараллельности ф.ф. α_s :

$$h^\alpha_{ki_2\ldots i_s} R^k_{i_1pq} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k} R^k_{i_spq} - h^\beta_{i_1\ldots i_s} R^\alpha_{\beta pq} = 0. \qquad (2.13)$$

Таким образом, как α_s, так и α_{s-1} являются полупараллельными, если ф.ф. α_s является параллельной. Действительно, если $\overline{\nabla}\alpha_s = 0$, то $h^\alpha_{i_1\ldots i_sk} = 0$ и $h^\alpha_{i_1\ldots i_skl} = 0$. Первое равенство влечет полупараллельность α_{s-1}, а второе – полупараллельность α_s. Итак, если ф.ф. α_s является параллельной, то выполняются следующие условия :

$$\begin{cases} h^\alpha_{ki_2\ldots i_{s-1}} \Omega^k_{i_1} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-2}k} \Omega^k_{i_{s-1}} - h^\beta_{i_1\ldots i_{s-1}} \Omega^\alpha_\beta = 0, \\ h^\alpha_{ki_2\ldots i_s} \Omega^k_{i_1} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k} \Omega^k_{i_s} - h^\beta_{i_1\ldots i_s} \Omega^\alpha_\beta = 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.2) и все уравнения системы (2.6), получим

$$h^\alpha_{i_1\ldots i_srt}\omega^r \wedge \omega^t = h^\alpha_{ki_2\ldots i_s} \Omega^k_{i_1} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}k} \Omega^k_{i_s} - h^\beta_{i_1\ldots i_s} \Omega^\alpha_{\beta}, \quad s = 2, 3\ldots \qquad (2.15)$$

Эта система и дает нам фактически условия интегрируемости системы уравнений (2.2) и (2.6).

Из системы (2.15) непосредственно следует, что ф.ф. $\alpha_4, ..., \alpha_s$ подмногообразия M одновременно будут симметрическими тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия :

$$h^\alpha_{ki_2\ldots i_t} \Omega^k_{i_1} + \cdots + h^\alpha_{i_1\ldots i_{t-1}k} \Omega^k_{i_t} - h^\beta_{i_1\ldots i_t} \Omega^\alpha_\beta = 0, \quad t = 2, ..., s-2. \qquad (2.16)$$

Очевидно, что у локально эвклидовых подмногообразий с плоской нормальной связностью ф.ф. всех порядков являются симметрическими.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Необходимость. Пусть m-мерное подмногообразие M пространства $M_n(\theta)$ является огибающим s-го порядка семейства m-мерных подмногообразий $\{G\}$, имеющих параллельные ф.ф. α_s порядка s. Докажем, что ф.ф. α_{s-1} и α_s подмногообразия M являются полупараллельными (при $s = 2$ имеется ввиду только полупараллельность α_2).

Действительно, пусть $x \in M$ – произвольная фиксированная точка, а $\widetilde{M}$ – подмногообразие семейства $\{G\}$, которое в точке x имеет с M касание s-го порядка. Тогда имеем

$$\alpha_{2x} = \widetilde{\alpha_{2x}}, \quad \cdots \quad , \alpha_{sx} = \widetilde{\alpha_{sx}}, \tag{3.1}$$

где $\widetilde{\alpha_r}$ $(r = 2, ..., s)$ – ф.ф. подмногообразия $\widetilde{M}$. Так как $\widetilde{\alpha_s}$ параллельна, то как $\widetilde{\alpha_{s-1}}$, так и $\widetilde{\alpha_s}$ являются полупараллельными. Следовательно, их компоненты $\widetilde{h}^{\alpha}_{i_1 \dots i_{s-1}}$ и $\widetilde{h}^{\alpha}_{i_1 \dots i_s}$ в любом базисе пространств $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ удовлетворяют условиям (ср. с (2.14)) :

$$\begin{cases} \widetilde{h}^{\alpha}_{ki_2 \dots i_{s-1}} \widetilde{R}^{k}_{i_1 pq} + \dots + \widetilde{h}^{\alpha}_{i_1 \dots i_{s-2}k} \widetilde{R}^{k}_{i_{s-1}pq} - \widetilde{h}^{\beta}_{i_1 \dots i_{s-1}} \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta pq} = 0, \\ \widetilde{h}^{\alpha}_{ki_2 \dots i_s} \widetilde{R}^{k}_{i_1 pq} + \dots + \widetilde{h}^{\alpha}_{i_1 \dots i_{s-1}k} \widetilde{R}^{k}_{i_s pq} - \widetilde{h}^{\beta}_{i_1 \dots i_s} \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta pq} = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\widetilde{R}^{k}_{ijl}$ – компоненты тензора кривизны подмногообразия $\widetilde{M}$. Условия (3.2)выполняются в любой точке подмногообразия $\widetilde{M}$, в частности, в точке x. В силу (3.1) компоненты форм α_2, α_{s-1} и α_s подмногообразия M в точке x будут совпадать с соответствующими компонентами форм $\widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_{s-1}$ и $\widetilde{\alpha}_s$. Следовательно, в точке x они будут удовлетворять таким же алгебраическим условиям, что и (3.2), т.е. условиям, эквивалентным (2.14).

Таким образом, мы доказали, что в каждой точке $x \in M$ компоненты ф.ф. α_{s-1} и α_s удовлетворяют условиям (2.14), что и доказывает их полупараллельность.

Достаточность. Доказательство будем проводить с помощью метода подвижного репера Картана и теории вполне интегрируемых дифференциальных систем Фробениуса–Картана. Идейная сторона доказательства такая же, как и в [5].

Пусть E_n – n-мерное евклидово пространство, $x \in E_n$ – произвольная точка, T – m-мерная плоскость, проходящая через x, γ_r $(r = 2, ..., s)$ – линейное отображение из $\underbrace{T\times\cdots\times T}_{r \text{ раз}}$ в $T^{\perp}$, где $T^{\perp}$ – ортогональное дополнение к T в E_n, причем γ_2 и γ_3 симметричны. Пусть L_s обозначает многообразие всех наборов $(x,T,\gamma_2,...,\gamma_s)$ в евклидовом пространстве E_n. Число $s\geq 2$ будем называть *длиной набора* L_s. Если мы дополним такой набор адаптированным ортонормированным репером $(x,e_1,...,e_n)$, где $e_i\in T$ при $i=1,...,m$ и $e_\alpha\in T^{\perp}$ при $\alpha=m+1,...,n$, то получим *реперированный набор.* Многообразие всех реперированных наборов длины s в E_n обозначим через L_s^{fr}. Локальными координатами в L_s^{fr} являются $(x_1,....,x_n)$–координаты точки x, параметры φ_p, $p=1,...,n(n-1)/2$ таких ортогональных матриц A в $O(n,R)$, которые преобразуют базис $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ в базис $\{e_a\}$ после стандартной ортогонализации, компоненты $\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_k}$ форм γ_k, $k=2,...,s$ в базисе $\{e_a\}$.

На многообразии L_s^{fr} рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{cases}\omega^\alpha=0,\\ \omega_i^\alpha-\overline{h}^{\alpha}_{ij}\omega^j=0,\\ d\overline{h}^{\alpha}_{ij}+\overline{h}^{\beta}_{ij}\omega_\beta^\alpha-\overline{h}^{\alpha}_{kj}\omega_i^k-\overline{h}^{\alpha}_{ik}\omega_j^k-\overline{h}^{\alpha}_{ijk}\omega^k=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ d\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_{s-1}}+\overline{h}^{\beta}_{i_1...i_{s-1}}\omega_\beta^\alpha-\overline{h}^{\alpha}_{ki_2...i_{s-1}}\omega_{i_1}^k-\cdots-\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_{s-2}k}\omega_{i_{s-1}}^k-\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_s}\omega^{i_s}=0,\\ d\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_s}+\overline{h}^{\beta}_{i_1...i_s}\omega_\beta^\alpha-\overline{h}^{\alpha}_{ki_2...i_s}\omega_{i_1}^k-\cdots-\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_{s-1}k}\omega_{i_s}^k=0,\end{cases} \tag{3.3}$$

в предположении, что функции $\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_k}$, $k=2,...,s$, удовлетворяют

1) второму уравнению системы (2.14) при $s=2$,

2) уравнениям (2.14) при $s=3$,

3) системе (2.14) и первым $s-3$ уравнениям системы (2.15) при $s>3$.

Определим $\overline{R}^{i}_{jkl}$, $\overline{R}^{\beta}_{\alpha kl}$, $\overline{\Omega}^{j}_{i}$ и $\overline{\Omega}^{\beta}_{\alpha}$, используя (2.12), (2.9), (2.10), соответственно, при этом подставим $\overline{h}^{\alpha}_{ij}$ вместо h^{α}_{ij}. Путем прямых вычислений можно убедиться, что внешние дифференциалы левых частей уравнений системы (3.3) равны нулю. Это значит, что система (3.3) вполне интегрируема.

Реперированные наборы $(x,T,\gamma_2,...,\gamma_s,e_1,...,e_n)$ и $(x',T',\gamma_2',...,\gamma_s',e_1',...,e_n')$ длины s называются *эквивалентными*, если $e_i'=A_i^je_j$ и $e_\alpha'=A_\alpha^\beta e_\beta$, где

$$||A_i^j||\in O(m,R),\qquad ||A_\alpha^\beta||\in O(n-m,R).$$

Для любого $r=2,...,s$ имеем

$$\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_r}=\overline{h}^{\beta}_{j_1...j_r}A_\beta^\alpha A_{i_1}^{j_1}\cdots A_{i_r}^{j_r}.$$

Эта эквивалентность определяет отображение $L_s^{fr} \longmapsto L_s$, которое проецирует систему (3.3) в корректно определенную, вполне интегрируемую дифференциальную систему на L_s. Отсюда следует, что для каждого фиксированного набора из L_s локально существует единственное интегральное подмногообразие этой дифференциальной системы, которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволютного распределения на L_s, соответствующего этой системе, т.е. m. Уравнения системы (3.3) показывают, что фундаментальными формами этого подмногообразия будут $\gamma_2, ..., \gamma_s$. Последнее уравнение системы (3.3) показывает, что форма γ_s параллельна.

Пусть у m-мерного подмногообразия M в $M_n(\theta)$ ф.ф. α_{s-1} и α_s являются полупараллельными (при $s = 2$ полупараллельной будем считать только α_2). Если $x \in M_n(\theta)$, то в качестве E_n будем рассматривать касательное n-мерное евклидово пространство в этой точке. Если к тому же $x \in M$, то в качестве m-мерной плоскости T будем брать касательное пространство $T_x(M)$. Тогда каждый фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, ..., \alpha_{sx})$ определит некоторое m-мерное подмногообразие $\widetilde{M}$ (проходящее через точу x), порожденное соответствующим интегральным подмногообразием системы (3.3). Так как в точке $x \in M \cap \widetilde{M}$ наборы $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, ..., \alpha_{sx})$ и $(x, T_x(\widetilde{M}), \widetilde{\alpha}_{2x}, ..., \widetilde{\alpha}_{sx})$ совпадают, то M является огибающим s-го порядка всех таких $\widetilde{M}$.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Необходимость. Будем рассуждать так же, как и при доказательстве достаточности условий теоремы 2. Однако теперь на многообразии L_s^{fr} мы рассмотрим дифференциальную систему, которая получается из системы (3.3) при замене s на $s-2$. Обозначим эту новую систему через (3.3') и будем предполагать, что в ней функции $\overline{h}^{\alpha}_{i_1...i_k}$, $k = 2, ..., s-2$ удовлетворяют условиям (2.16). Тогда непосредственной проверкой можем убедиться, что система (3.3') является вполне интегрируемой. Далее, рассуждая так же, как и в §3, приходим к выводу, что для каждого фиксированного набора из L_s локально существует единственное интегральное подмногообразие дифференциальной системы (3.3'), которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволютивного распределения на L_s, соответствующего этой системе, т.е. m. Из (3.3') следует, что фундаментальными формами этого подмногообразия являются $\gamma_2, ..., \gamma_{s-2}$. Так как их компоненты удовлетворяют условиям (2.16), то все эти формы являются симметрическими. Последнее уравнение системы (3.3') показывает, что форма γ_{s-2} параллельна.

Если теперь m-мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ имеет симметрические ф.ф. $\alpha_4, ..., \alpha_s$, то ф.ф. $\alpha_2, ..., \alpha_{s-2}$ одновременно будут полупараллельными, а их компоненты будут удовлетворять условиям (2.16). Как и в §3, каждый фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, ..., \alpha_{sx})$ подмногообразия M определит некоторое m-мерное подмногообразие $\widetilde{M}$ (проходящее через точку x), у которого все ф.ф. до порядка $s-2$ включительно будут симметрическими, а ф.ф. порядка $s-2$ будет параллельной. Очевидно, M и $\widetilde{M}$ будут иметь в точке x касание $s-2$-го порядка. Это и означает, что M является огибающим $(s-2)$-го порядка всех таких $\widetilde{M}$.

Достаточность. Пусть M – m-мерное подмногообразие в $M_n(\theta)$, имеющее симметрические ф.ф. $\alpha_3, ..., \alpha_{s-1}$ $(s \geq 4)$, и пусть M является огибающим $(s-2)$-го порядка семейства m-мерных подмногообразий $\{G\}$, обладающих свойствами, указанными в теореме 3. Докажем, что ф.ф. α_s подмногообразия M симметрическая. Действительно, так как ф.ф. строятся по рекуррентной формуле $\alpha_r = \overline{\nabla}\alpha_{r-1}$ (см. §2), то из симметричности ф.ф. $\alpha_3, ..., \alpha_{s-1}$ следует симметричность формы α_s по первым $s-1$ аргументам. Докажем, что α_s симметрична также по последним двум аргументам.

Пусть $x \in M$ – произвольная точка, и пусть $\widetilde{M}$ – подмногообразие семейства $\{G\}$, которое в точке x имеет касание с M $(s-2)$-го порядка. Тогда выполняются равенства

$$\alpha_{2x} = \widetilde{\alpha}_{2x}, \quad \cdots \quad, \alpha_{(s-2)x} = \widetilde{\alpha}_{(s-2)x}, \tag{4.1}$$

где $\widetilde{\alpha_r}$ $(r = 2, ..., s-2)$ – ф.ф. подмногообразия $\widetilde{M}$. Так как $\widetilde{\alpha}_{s-2}$ параллельна по условию, то она автоматически полупараллельна. В силу алгебраического характера условия полупараллельности, равенств (4.1) и произвольности точки x мы заключаем, что ф.ф. α_{s-2} также является полупараллельной, что, в свою очередь, равносильно симметричности α_s по последним двум аргументам. Теорема 3 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Пусть m-мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ удовлетворяет условиям $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_{s-1}=0$, $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_s=0$, и пусть $x\in M$ – произвольная точка. Согласно теореме 2 M является огибающим s-го порядка семейства m-мерных s-параллельных подмногообразий $\{G\}$. Пусть $\widetilde{M}\in\{G\}$ – подмногообразие с параллельной ф.ф. $\widetilde{\alpha_s}$, которое в точке x имеет касание s-го порядка с M. Так как $\overline{\nabla}\widetilde{\alpha_s}=0$, то непосредственной проверкой, с учетом первой формулы в (2.12) для компонент тензора кривизны $\widetilde{R}$ подмногообразия $\widetilde{M}$, убеждаемся, что $\nabla^{2s-3}\widetilde{R}=0$. Отсюда, на основании известного результата К. Номидзу и X. Одзеки, утверждающего, что для любого риманова многообразия с тензором кривизны R условие $\nabla^k R=0$ для некоторого $k\geq 1$ влечет $\nabla R=0$ (см. [14], т. 1, стр. 279), получаем $\nabla\widetilde{R}=0$. (Подробнее о результатах К. Номидзу и X. Одзеки см. [15].) Тогда $\widetilde{R}(X,Y)\cdot\widetilde{R}=0$ и, в силу тождества Риччи

$$(\widetilde{R}(X,Y)\cdot\widetilde{R})(U,V)=$$

$$=\widetilde{R}(X,Y)\cdot\widetilde{R}(U,V)-\widetilde{R}(\widetilde{R}(X,Y)U,V)-\widetilde{R}(U,\widetilde{R}(X,Y)V)-\widetilde{R}(U,V)\cdot\widetilde{R}(X,Y),$$

имеем

$$\widetilde{R}(X,Y)\cdot\widetilde{R}(U,V)-\widetilde{R}(\widetilde{R}(X,Y)U,V)-\widetilde{R}(U,\widetilde{R}(X,Y)V)-\widetilde{R}(U,V)\cdot\widetilde{R}(X,Y)=0. \quad (5.1)$$

Пусть $\widetilde{R}^j_{ikl}$ – компоненты тензора $\widetilde{R}$ в некотором адаптированном к $\widetilde{M}$ поле ортонормированных реперов. Легко показать, что последнее равенство равносильно следующему :

$$\widetilde{R}^t_{ikl}\widetilde{R}^j_{tpq}-\widetilde{R}^j_{tkl}\widetilde{R}^t_{ipq}-\widetilde{R}^j_{itl}\widetilde{R}^t_{kpq}-\widetilde{R}^j_{ikt}\widetilde{R}^t_{lpq}=0. \quad (5.2)$$

Так как $\widetilde{R}^j_{ikl}$ выражаются через компоненты $\widetilde{h}^\alpha_{ij}$ ф.ф. $\widetilde{\alpha_2}$ подмногообразия M алгебраически (см. (2.12)), то (5.2) фактически является условием на $\widetilde{h}^\alpha_{ij}$ и кривизну объемлющего пространства. Это условие выполняется в любой точке подмногообразия $\widetilde{M}$ и, в частности, в точке x. Так как в общем для M и $\widetilde{M}$ ортонормбазисе в x $\widetilde{h}^\alpha_{ij}$ будут совпадать с компонентами h^α_{ij} второй ф.ф. α_2 подмногообразия M (это следует из того, что x – точка касания s-го порядка, где $s\geq 3$), то последние в точке x будут удовлетворять такому же алгебраическому условию, что и

(5.2). Следовательно, в точке x тензор кривизны R подмногообразия M будет удовлетворять условию $R(X,Y)\cdot R = 0$. Так как точка $x \in M$ – произвольная, то теорема 4 доказана.

ABSTRACT. We prove that an m-dimensional submanifold M of class C^∞ in a space of constant curvature $M_n(\theta)$ is an s-order ($s \geq 3$) envelope of a family of m-dimensional s-parallel submanifolds if and only if M has semi-parallel fundamental forms α_{s-1} and α_s. The case of symmetric fundamental forms is considered. We show that the semi-parallelism of α_{s-1} and α_s implies the condition $R(X,Y)\cdot R = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ü. Lumiste, "Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions", Izv. AN Est.SSR, Fiz. Math., vol. 36, № 4, pp. 414 – 417, 1987.
2. J. Deprez, "Semi-parallel surfaces in Euclidean space", J. Geom., vol. 25, pp. 192 – 200, 1985.
3. F. Mercuri, "Parallel and semi-parallel immersions into space forms", Riv. Mat. Univ. Parma (4), vol. 17, pp. 91 – 108, 1991.
4. F. Dillen, S. Nölker, "Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property", J. Reine Angew. Math., vol. 435, pp. 33 – 63, 1993.
5. Ü. Lumiste, "Semi-symmetric submanifolds as the second order envelope of symmetric submanifolds", Izv. AN Est.SSR, Fiz. Math., vol. 39, № 1, pp. 1 – 8, 1990.
6. D. Ferus, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", Math. Ann., vol. 247, № 1, pp. 81 – 93, 1980.
7. Ю. Г. Лумисте, "Полусимметрические подмногообразия", Итоги науки и техн. Проблемы геометрии, т. 23, стр. 3 – 28, 1991.
8. В. А. Мирзоян, "Ric-полусимметрические подмногообразия", Итоги науки и техн. Проблемы геометрии, т. 23, стр. 29 – 66, 1991.
9. Ü. Lumiste, "Symmetric orbits of the orthogonal Veronese actions and their second order envelopes", Result. Math., vol. 27, pp. 284 – 301, 1995.
10. Ü. Lumiste, "Modified Nomizu problem for semi-parallel submanifolds", Geom. Topol. of Submanifolds, VII. World Scien., Singapore, pp. 176 – 181, 1995.
11. Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, "Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии", Итоги науки и техн., Совр. пробл. мат. фунд. направл., т. 28, стр. 5 – 289, 1988.
12. В. А. Залгаллер, Теория огибающих, Наука, Москва, 1975.
13. Z. I. Szabo, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$. The local version", J. Different. Geom., vol. 17, № 4, pp. 531 – 582, 1982.
14. С. Кобаяси, К. Номидзу, Основы дифференциальной геометрии, т. 1 – 2, Наука, М., 1981.
15. В. А. Мирзоян, "О подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой α_s ($s \geq 3$)", Уч. зап. Тартуск. ун-та., т. 930, стр. 97 – 112, 1991.

4 апреля 1996

Государственный инженерный университет Армении

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ РОБИНСОНА НА СЛУЧАЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВСТРОЕННЫХ ПРЕДИКАТОВ

С. А. Нигиян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

К известному правилу резолюции Робинсона добавляется правило унарной резолюции *Ru*. Правило *Ru* применяется к дизъюнкту, использующему интерпретированный на эрбрановском универсуме вычислимый предикат. Рассматриваются так называемые разумные ограничения *Ru* и доказывается полнота модифицированного правила резолюции в случае любых разумных ограничений *Ru*.

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой работе модифицируется метод резолюций Робинсона на случай использования встроенных предикатов (интерпретированных на эрбрановском универсуме вычислимых предикатов. Модификация заключается в определении обобщенного правила резолюции R, которое помимо правила резолюции Робинсона включает в себя правило унарной резолюции Ru, применяемое к дизъюнкту, использующему встроенный предикат. Правило Ru оказывается не эффективным правилом, так как вопрос о том можно ли Ru именно таким образом применить к дизъюнкту или нет сталкивается с алгоритмически неразрешимой проблемой. Поэтому нас будут интересовать его эффективные ограничения, а если точнее, то так называемые эффективные разумные ограничения, которые по своим возможностям эквивалентны Ru.

Правило резолюции Робинсона, дополненное некоторым (эффективным) разумным ограничением Ru, будем называть *(эффективным) разумным ограничением правила* R. Нами доказана полнота любого разумного ограничения правила R (теорема о полноте). Полнота понимается следующим образом : из конечного множества дизъюнктов S выводим пустой дизъюнкт тогда и только тогда, когда S противоречиво на множестве эрбрановских интерпретаций.

В §1 вводятся необходимые понятия и обозначения, в §2 дается определение модифицированного правила резолюции R и его (эффективных) разумных ограничений, §3 посвящен доказательству теоремы о полноте.

§1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим три непересекающихся счетных множества F, P и X. F – множество функциональных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$, F содержит счетное число символов местности n. X – множество предметных переменных. Из элементов множеств F и X строятся *термы* :

1. каждый 0-местный символ из F есть терм,

2. каждая переменная из X есть терм,

3. если $t_1, ..., t_n$ $(n > 0)$ – термы и f – n-местный символ из F, то $f(t_1, ..., t_n)$ есть терм,

4. никаких других термов не существует.

Через M обозначим множество всех термов, не использующих переменных.

Пусть P_1 – множество предикатных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$ P_1 содержит счетное число местности n; P_2 – некоторое множество интерпретированных предикатных символов (*встроенных предикатов*), каждый k-местный $(k > 0)$ встроенный предикат является вычислимым отображением $M^k \longmapsto \{true, false\}$. Положим $P = P_1 \cup P_2$.

Атом определяется традиционным образом :

1. каждый 0-местный символ из P есть атом,

2. если $t_1, ..., t_n$ $(n > 0)$ – термы и p – n-местный символ из P, то $p(t_1, ..., t_n)$ есть атом,

3. никаких других атомов не существует.

Литерой назовем атом или его отрицание. Литеру, использующую предикатный символ из P_2, назовем *интерпретированной литерой (и.литерой)*. *Дизъюнкт* представляет собой литеру, либо дизъюнкцию конечного числа литер. Пустой дизъюнкт условимся обозначать $\diamond$. Далее, говоря "выражение E" мы будем понимать терм, литеру, дизъюнкт или множество дизъюнктов. Обозначим через $Var(E)$ множество всех переменных, входящих в выражение E.

Напомним определения подстановки, унификатора, наиболее общего унификатора, взятые из [2]. *Подстановка* σ есть множество вида

$$\sigma = \{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}, \quad t_i \neq x_i, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, \quad i, j = 1, ..., n, \quad n \geq 0,$$

где t_i – терм, x_i – переменная. Пустую подстановку условимся обозначать через ε. Традиционным образом вводится композиция подстановок, которая является ассоциативной операцией. Введем обозначения :

$$Arg(\sigma) = \{x_1, ..., x_n\} \quad \text{и} \quad Var(\sigma) = Var(t_1) \cup \cdots \cup Var(t_n).$$

Пусть E – выражение. Через $E\sigma$ обозначим выражение, полученное из E путем одновременной подстановки термов t_i, $i = 1, ..., n$ вместо соответствующих переменных x_i, $i = 1, ..., n$. Напомним, что для любых подстановок σ, δ и выражения E имеем $(E\sigma)\delta = E(\sigma\delta)$.

Будем говорить, что выражения $E_1, ..., E_n$ $(n > 1)$ *унифицируемы*, если существует такая подстановка δ, что $E_1\delta = \cdots = E_n\delta$. Подстановку δ назовем *унификатором* этих выражений. Унификатор σ называется *наиболее общим унификатором* выражений $E_1, ..., E_n$ $(\sigma = \mathrm{mgu}(E_1, ..., E_n))$, если для любого их унификатора δ существует подстановка γ такая, что $\sigma\gamma = \delta$.

Опишем рассматриваемые нами интерпретации. Предметным множеством рассматриваемых интерпретаций будет множество M. Функциональные символы интерпретируются следующим образом : каждому 0-местному символу из F сопоставляется он сам, каждому n-местному $(n > 0)$ символу $f \in F$ сопоставляется отображение $M^n \longmapsto M$, которое n-ке $(t_1, ..., t_n) \in M^n$ ставит в соответствие терм $f(t_1, ..., t_n)$. Каждому 0-местному символу из P_1 сопоставляется один из элементов множества $\{true, false\}$, а каждому n-местному $(n > 0)$ символу из P_1 сопоставляется некоторое отображение $M^n \longmapsto \{true, false\}$. Заметим, что описанные интерпретации могут отличаться одна от другой лишь отображениями, сопоставляемыми символам множества P_1. Обозначим через H описанное множество интерпретаций.

Пусть D – непустой дизъюнкт, $Var(D) = \emptyset$ и I – интерпретация из H. Через $Val_I(D)$ условимся обозначать значение дизъюнкта D на интерпретации I. Если дизъюнкт не использует символов из P_1, то значение D на любой интерпретации из H будет одним и тем же. Условимся обозначать его $Val(D)$. Будем говорить, что *интерпретация* $I \in H$ *есть модель непустого дизъюнкта* D, если $Val(D\sigma) = true$ для любой подстановки σ такой, что $Var(D\sigma) = \emptyset$.

Пусть S – непустое множество непустых дизъюнктов. Будем говорить, что множество S *противоречиво*, если не существует такой интерпретации $I \in H$, которая была бы моделью всех дизъюнктов множества S.

§2. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРАВИЛО РЕЗОЛЮЦИИ R И ЕГО РАЗУМНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Модифицированное правило резолюции R может быть применено как к паре дизъюнктов, так и к одному дизъюнкту. В обоих случаях результатом является дизъюнкт. Может оказаться так, что R не применимо к данной паре дизъюнктов или к данному дизъюнкту. Правило R определяется, используя следующие три вспомогательных правила : склейку Rs, бинарную резолюцию Rb, унарную резолюцию Ru. Напомним правила Rs и Rb, используемые в определении правила резолюции Робинсона, и введем правило Ru. Ввиду того, что дизъюнкция является коммутативной и ассоциативной логической операцией, то дизъюнкт мы будем рассматривать как множество литер.

Правило Rs применимо к любому непустому дизъюнкту D. $Rs(D) = D\sigma$, где либо $\sigma = \varepsilon$, либо $\sigma =$mgu$(L_1, ..., L_m)$, где $L_1, ..., L_m$ – некоторые унифицируемые литеры из D, $m > 1$.

Правило Rb применимо к паре дизъюнктов D, D', если они не имеют общих переменных и существуют такие унифицируемые атомы A и A', что $A \in D$ и $\neg A' \in D'$.

$$Rb(D, D') = Rb(D', D) = (D\sigma \setminus \{A\sigma\}) \cup (D'\sigma \setminus \{\neg A'\sigma\}), \quad \sigma = \text{mgu}(A, A').$$

Правило Ru применимо к дизъюнкту D, если существуют такие и.литера $L \in D$ и подстановка σ, которые удовлетворяют следующим трем условиям :

a) $Arg(\sigma) \subset Var(L)$;

b) $Var(\sigma) \cap (Var(D) \setminus Var(L)) = \emptyset$;

c) $Val(L\sigma\gamma) = false$ для любой подстановки γ такой, что $Var(L\sigma\gamma) = \emptyset$.

В этом случае будем говорить, что Ru *L-применимо к* D и $Ru(D) = D\sigma \setminus \{L\sigma\}$.

Определение правила R :

$$R(D) = Ru(Rs(D)), \quad R(D, D') = Rb(Rs(D), (Rs(D')),$$

где D, D' – дизъюнкты, не имеющие общих переменных.

Рассмотрим правило Ru. Правило Ru является не эффективным правилом, так как проверка пункта c) "упирается" в алгоритмически неразрешимую проблему (см, например, [3]). Введем понятие *разумного ограничения* Ru. Пусть Ru L-применимо к дизъюнкту D, где L – и.литера из D. Рассмотрим множество всех L-применений Ru к D. Каждое такое L-применение определяется некоторой подстановкой σ. Пусть $\Xi(D, L)$ – множество подстановок, определяющих все возможные L-применения Ru к D. Рассмотрим подмножество некоторых L-применений Ru к D, определяемое подмножеством подстановок $\Xi'(D, L) \subset \Xi(D, L)$. Будем говорить, что данное подмножество L-применений Ru к D *разумно*, если для любой подстановки δ такой, что $Var(L\delta) = \emptyset$ и $Val(L\delta) = false$, существуют такие подстановки $\sigma \in \Xi'(D, L)$, γ и γ_1, что

$$\sigma\gamma = \delta\gamma_1, \quad \text{и} \quad x \in Var(D) \setminus Var(L) \quad \Longrightarrow \quad t/x \in \gamma \Leftrightarrow t/x \in \delta,$$

где t – терм. Очевидно, что в этом случае $D\sigma\gamma = D\delta$.

Пример. Пусть c – 0-местный, g – 1-местный, f – 2-местный символы из F; p – 2-местный символ из P_1; π – 1-местный, $=$ – 2-местный встроенные предикаты из P_2; x, y – различные переменные из X и

$$Val(\pi(t)) = false \quad \Longleftrightarrow \quad t = f(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \in M.$$

Пусть дизъюнкт $D = \{L_1, L_2, L_3\}$, где L_1 есть $\neg(x = f(c, g(y)))$, L_2 есть $\pi(x)$, L_3 есть $p(x, y)$. Тогда

$$\Xi'(D, L_1) = \{\ \mathrm{mgu}\ (x, f(c, g(y)))\}$$

есть разумное множество L_1-применений Ru к D;

$$\Xi'(D, L_2) = \{\{f(x,z)/x\} :\ z \in X,\ z \neq x,\ z \neq y\}$$

есть разумное множество L_2-применений Ru к D.

Пусть для каждого дизъюнкта D и каждой н.литеры L таких, что Ru L-применимо к D, выделено некоторое разумное подмножество $\Xi'(D, L)$ L-применений Ru к D. Ограничимся только такими применениями Ru. В этом случае будем говорить, что имеем некоторое *разумное ограничение* Ru. Обозначим его через $R'u$. Правило $R'u$ назовем *эффективным разумным ограничением* Ru, если вопрос о принадлежности подстановки к множеству $\Xi'(D, L)$ решается эффективным образом для любых D и L.

Заметим, что если для любых D и L $\Xi'(D, L) = \Xi(D, L)$, то $R'u = Ru$ и $R'u$ есть разумное ограничение Ru, однако эффективность $R'u$ зависит от множества встроенных предикатов P_2. Если для любых D и L подмножество $\Xi'(D, L)$ состоит из всех тех подстановок $\sigma \in \Xi(D, L)$, для которых $Var(L\sigma) = \emptyset$ и $Val(L\sigma) = false$, то $R'u$ будет эффективным разумным ограничением Ru при любом P_2.

Будем говорить, что правило R' есть *(эффективное) разумное ограничение* правила R, если для некоторого $R'u$ – эффективного разумного ограничения Ru имеем

$$R'(D) = R'u(Rs(D)), \qquad R'(D, D') = R(D, D')),$$

где D, D' – дизъюнкты, не имеющие общих переменных.

§3. ПОЛНОТА ЛЮБОГО РАЗУМНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ ПРАВИЛА R

Пусть R' – некоторое разумное ограничение правила R и S – некоторое непустое множество дизъюнктов. Мы считаем, что дизъюнкты множества S не имеют общих переменных, так как в противном случае их всегда можно переименовать. Будем говорить, что из множества S R'-*выводим* дизъюнкт D и обозначать это $S \vdash_{R'} D$), если существует конечная последовательность дизъюнктов $D_1, ..., D_n$ $(n > 1)$ такая, что $D_n = D$, и каждый дизъюнкт D_i $(1 \leq i \leq n)$ либо принадлежит

S. либо получен из предыдущих дизъюнктов последовательности с помощью правила R'. Последовательность $D_1, ..., D_n$ назовем *R'-выводом* дизъюнкта D из S.

Теорема о полноте. *Пусть R' – разумное ограничение правила R и S – конечное непустое множество непустых дизъюнктов. Тогда S противоречиво тогда и только тогда, когда $S \vdash_{R'} \diamond$.*

Перед тем, как перейти к непосредственному доказательству теоремы докажем три леммы.

Лемма 1. *Пусть D, D' – дизъюнкты, $D'' = R'(D, D')$ (или $D'' = R'(D)$), $D'' \neq \diamond$ и интерпрстация $I \in H$ есть модель дизъюнктов D, D'. Тогда I будет моделью дизъюнкта D''.*

Доказательство. Пусть

$$D'' = R'(D, D') = Rb(Rs(D), Rs(D')) = Rb(D\sigma_1, D'\sigma_1) =$$

$$= (D\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}) \cup (D'\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg A'\sigma_1\sigma_2\}),$$

где σ_1 – подстановка, A, A' – атомы

$$\sigma_2 = \mathrm{mgu}(A\sigma_1, A'\sigma_1), \quad A \in D, \quad \neg A' \in D'.$$

Пусть θ – подстановка такая, что

$$Arg(\theta) = Var(D\sigma_1\sigma_2) \cup Var(D'\sigma_1\sigma_2), \quad Var(\theta) = \emptyset.$$

Тогда $Val_I(D''\theta) = true$, так как

$$Val_I(D\sigma_1\sigma_2\theta) = Val_I(D'\sigma_1\sigma_2\theta) = true, \quad A\sigma_1\sigma_2\theta = A'\sigma_1\sigma_2\theta.$$

Следовательно, I – модель D''. Пусть теперь

$$D'' = R'(D) = R'u(Rs(D)) = R'u(D\delta_1) = D\delta_1\delta_2 \setminus \{L\delta_1\delta_2\},$$

где L – и.литера из D, δ_1, δ_2 – подстановки. Пусть γ – подстановка такая, что

$$Arg(\gamma) = Var(D\delta_1\delta_2), \quad Var(\gamma) = \emptyset.$$

Тогда $Val_I(D''\gamma) = true$, так как $Val_I(D\delta_1\delta_2\gamma) = true$ и $Val(L\delta_1\delta_2\gamma) = false$. Следовательно, I – модель D''. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть D, D' – дизъюнкты и $\diamond = R'(D, D')$ (или $\diamond = R'(D)$). Тогда не существует такой интерпретации $I \in H$, которая была бы моделью дизъюнктов D и D'.*

Доказательство. Пусть

$$\diamond = R'(D, D') = (D\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}) \cup (D'\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg A'\sigma_1\sigma_2\}).$$

Тогда $D\sigma_1\sigma_2\theta = A\sigma_1\sigma_2\theta$ и $D'\sigma_1\sigma_2\theta = \neg A'\sigma_1\sigma_2\theta$, где $\sigma_1, \sigma_2, \theta$ – подстановки из доказательства леммы 1. Так как $A\sigma_1\sigma_2\theta = A'\sigma_1\sigma_2\theta$, то не существует такой интерпретации $I \in H$, для которой

$$Val_I(D\sigma_1\sigma_2\theta) = Val_I(D'\sigma_1\sigma_2\theta) = true.$$

Пусть

$$\diamond = R'(D) = D\delta_1\delta_2 \setminus \{L\delta_1\delta_2\}).$$

Тогда $D\delta_1\delta_2\gamma = L\delta_1\delta_2\gamma$, где $\delta_1, \delta_2, \gamma$ – подстановки из доказательства леммы 1. Так как $Val(L\delta_1\delta_2\gamma) = false$, то для любой интерпретации $I \in H$ $Val_I(D\delta_1\delta_2\gamma) = false$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть S_0 – бесконечное противоречивое множество дизъюнктов, не использующих встроенных предикатов. Тогда $S_0 \vdash_{R'} \diamond$.*

Доказательство. Множество S_0 содержит конечное противоречивое подмножество S_0', так как полному семантическому дереву множества S_0 соответствует конечное замкнутое семантическое дерево (см. [2]). Из [2] имеем $S_0' \vdash_{R'} \diamond$, так как правило R', применяемое к дизъюнктам, не использующим встроенных предикатов, является по существу правилом резолюции Робинсона. Следовательно, $S_0 \vdash_{R'} \diamond$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть $S \vdash_{R'} \diamond$ и $D_1, ..., D_n$ $(n > 1)$ есть R'-вывод пустого дизъюнкта из S такой, что $D_i \neq \diamond$, $i = 1, ..., n-1$. Предположим, что S не противоречиво. Это означает существование интерпретации $I \in H$, являющейся моделью всех дизъюнктов из S. Но тогда по лемме 1 I будет моделью дизъюнктов $D_1, ..., D_{n-1}$. Получили противоречие, так как $D_n = \diamond$, а по лемме 2 это невозможно.

Необходимость. Пусть S – противоречие. Покажем, что $S \vdash_{R'} \diamond$. Обозначим через $P_2(S)$ множество предикатов из S. Каждому встроенному предикату π из $P_2(S)$ сопоставим предикатный символ $p_\pi \in P_1$ так, что местность p_π совпадает с местностью π, p_π не входит в S и если $\pi', \pi'' \in P_2(S)$, $\pi' \neq \pi''$, то $p_{\pi'} \neq p_{\pi''}$. Если в выражении E каждый встроенный предикат $\pi \in P_2(S)$ заменить на p_π, то такое выражение будем обозначать через $\overline{E}$. Пусть S_1, S_2 – два множества дизъюнктов :

$$S_1 = \{p_\pi(t_1, ..., t_k) : \ \pi \in P_2(S), \ \ Val(\pi(t_1, ..., t_k)) =$$

$$= true, \ \ t_i \in M, \ i = 1, ..., k, \ k > 0\},$$

$$S_2 = \{\neg p_\pi(t_1, ..., t_k) : \ \pi \in P_2(S), \ Val(\pi(t_1, ..., t_k)) =$$

$$= false, \ t_i \in M, \ i = 1, ..., k, \ k > 0\}$$

и $S_0 = \overline{S} \cup S_1 \cup S_2$. Легко видеть, что из противоречивости S следует противоречивость S_0. Применяя лемму 3, получим $S_0 \vdash_{R'} \diamond$. Пусть $D_1, ..., D_n = \diamond$ $(n > 1)$ есть R'-вывод пустого дизъюнкта из S_0. Покажем существование R'-вывода пустого дизъюнкта из S. Из последовательности $D_1, ..., D_n$ выделим подпоследовательность $D_{i_1}, ..., D_{i_m}$ $(1 < m \leq n)$ всех таких дизъюнктов, которые не принадлежат множеству $S_1 \cup S_2$. Покажем, что существует R'-вывод $D'_1, ..., D'_m$ из S такой, что $\overline{D'_j}\theta_j = D_{i_j}$ для некоторой подстановки θ_j, $j = 1, ..., m$. Отсюда будет следовать, что $D'_m = \diamond$ и $S \vdash_{R'} \diamond$.

Дизъюнкт D'_1 определим следующим образом : $\overline{D'_1} = D_{i_1}$ и $\theta_1 = \varepsilon$. Пусть $1 \leq k < m$, $\overline{D'_j}\theta_j = D_{i_j}$ для всех $1 \leq j \leq k$ и $D'_1, ..., D'_k$ есть R'-вывод из S. Покажем, что существуют такие D'_{k+1} и θ_{k+1}, что $\overline{D'_{k+1}}\theta_{k+1} = D_{i_{k+1}}$ и $D'_1, ..., D'_k, D'_{k+1}$ есть R'-вывод из S. Возможны три случая :

1) $D_{i_{k+1}} \in \overline{S}$.

2) $D_{i_{k+1}} = R'(D_{i_v}, D_r)$, где $D_r \in S_1 \cup S_2$, $1 \leq r < i_{k+1}$, $1 \leq v \leq k$.

3) $D_{i_{k+1}} = R'(D_{i_v}, D_u)$, где $1 \leq v, u \leq k$.

Случай 1. Положим $D'_{k+1} \in S$ и $\overline{D'_{k+1}} = D_{i_{k+1}}$. Очевидно, что в этом случае $\theta_{k+1} = \varepsilon$.

Случай 2. Пусть

$$D_{i_{k+1}} = Rb(Rs(D_{i_v}), Rs(D_r)) = Rb(D_{i_v}\sigma_1, D_r) = D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{L\sigma_1\sigma_2\},$$

где L – и.литера из D_{i_v}, σ_1 – подстановка, $\sigma_2 = \mathrm{mgu}(L\sigma_1, \neg D_r)$, где $\neg D_r$ мы отождествляем с атомом, если D_r использует отрицание. Рассмотрим дизъюнкт D'_v. Так как $v \leq k$, то $\overline{D'_v}\theta_v\sigma_1\sigma_2 = D_{i_v}\sigma_1\sigma_2$. Пусть $L'_1, ..., L'_s$ – все такие и.литеры из D'_v, что $\overline{L'_j}\theta_v\sigma_1\sigma_2 = L\sigma_1\sigma_2$, $j = 1, ..., s$, $s \geq 1$. Пусть для некоторой подстановки δ

$$\sigma'_1 = \begin{cases} \mathrm{mgu}(L'_1, ..., L'_s) & \text{при } s > 1, \\ \varepsilon & \text{при } s = 1, \end{cases} \qquad \sigma'_1\delta = \theta_v\sigma_1\sigma_2$$

и L' – и.литера из D'_v такая, что $\overline{L'}\theta_v = L$. Так как

$$\overline{L'}\theta_v\sigma_1\sigma_2 = L\sigma_1\sigma_2 = \neg D_r, \quad D_r \in S_1 \cup S_2,$$

то

$$Val(L'\sigma'_1\delta) = Val(L'\theta_v\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{false}.$$

Так как R' является разумным ограничением R, то к дизъюнкту $Rs(D'_v) = D'_v\sigma'_1$ можно применить правило $R'u$ так, что $R'u(D'_v\sigma'_1) = D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{L'\sigma'_1\sigma'_2\}$, где σ'_2 – подстановка, для которой существуют такие подстановки γ и γ_1, что $\sigma'_2\gamma = \delta\gamma_1$ и $D'_v\sigma'_1\sigma'_2\gamma = D'_v\sigma'_1\delta$.

Дизъюнкт D'_{k+1} определим следующим образом :

$$D'_{k+1} = R'(D'_v) = D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{L'\sigma'_1\sigma'_2\}.$$

Далее получим

$$\overline{D'_{k+1}}\gamma = \overline{D'_v}\sigma'_1\sigma'_2\gamma \setminus \{\overline{L'}\sigma'_1\sigma'_2\gamma\} = \overline{D'_v}\sigma'_1\delta \setminus \{\overline{L'}\sigma'_1\delta\} =$$

$$= \overline{D'_v}\theta_v\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\overline{L'}\theta_v\sigma_1\sigma_2\} = D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{L\sigma_1\sigma_2\} = D_{i_{k+1}}$$

и $\theta_{k+1} = \gamma$.

Случай 3. Пусть

$$D_{i_{k+1}} = R'(D_{i_v}, D_{i_u}) = Rb(Rs(D_{i_v}), Rs(D_{i_u})) = Rb(D_{i_v}\sigma_1, D_{i_u}\sigma_1) =$$

$$= \big(D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}\big) \cup \big(D_{i_u}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg B\sigma_1\sigma_2\}\big),$$

где σ_1 - подстановка, A, B - атомы, $\sigma_2 = \mathrm{mgu}(A\sigma_1, B\sigma_1)$, $A \in D_{i_v}$, $\neg B \in D_{i_u}$. Рассмотрим дизъюнкты D'_v и D'_u. Мы считаем, что дизъюнкты D'_v и D'_u не имеют общих переменных. Тогда $\theta = \theta_v \cup \theta_u$ есть подстановка и $\overline{D'_v}\theta = D_{i_v}$, $\overline{D'_u}\theta = D_{i_u}$. Пусть $A'_1, ..., A'_s$ - все такие атомы из D'_v, что $\overline{A'_j}\theta\sigma_1\sigma_2 = A\sigma_1\sigma_2$, $j = 1, ..., s$; пусть $\neg B'_1, ..., \neg B'_r$ - все такие литеры из D'_u, что $\overline{B'_h}\theta\sigma_1\sigma_2 = B\sigma_1\sigma_2$, $h = 1, ..., r$. Пусть

$$\delta_1 = \begin{cases} \mathrm{mgu}(A'_1, ..., A'_s) & \text{при } s > 1, \\ \varepsilon & \text{при } s = 1, \end{cases}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \mathrm{mgu}(B'_1, ..., B'_r) & \text{при } r > 1, \\ \varepsilon & \text{при } r = 1, \end{cases} \qquad \sigma'_1 = \delta_1 \cup \delta_2$$

и $\sigma'_1\delta = \theta\sigma_1\sigma_2$ для некоторой подстановки δ. Пусть A' - атом из D'_v такой, что $\overline{A'}\theta = A$ и $\neg B'$ - литера из D'_u такая, что $\overline{B'}\theta = B$. Так как $A\sigma_1\sigma_2 = B\sigma_1\sigma_2$, то $A'\theta\sigma_1\sigma_2 = B'\theta\sigma_1\sigma_2$ и $A'\sigma'_1\delta = B'\sigma'_1\delta$. Следовательно $A'\sigma'_1$ и $B'\sigma'_1$ унифицируемы и Rb применимо к дизъюнктам $Rs(D'_v) = D'_v\sigma'_1$ и $Rs(D'_u) = D'_u\sigma'_1$. Пусть

$$Rb(D'_v\sigma'_1, D'_u\sigma'_1) = \big(D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{A'\sigma'_1\sigma'_2\}\big) \cup \big(D'_u\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{\neg B'\sigma'_1\sigma'_2\}\big),$$

где $\sigma'_2 = \mathrm{mgu}(A'\sigma'_1, B'\sigma'_1)$. Пусть γ - такая подстановка, что $\sigma'_2\gamma = \delta$. Дизъюнкт D'_{k+1} определим следующим образом :

$$D'_{k+1} = R'(D'_v, D'_u) = \big(D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{A'\sigma'_1\sigma'_2\}\big) \cup \big(D'_u\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{\neg B'\sigma'_1\sigma'_2\}\big).$$

Далее получим

$$\overline{D'_{k+1}}\gamma = \big(\overline{D'_v}\sigma'_1\sigma'_2\gamma \setminus \{\overline{A'}\sigma'_1\sigma'_2\gamma\}\big) \cup \big(\overline{D'_u}\sigma'_1\sigma'_2\gamma \setminus \{\neg\overline{B'}\sigma'_1\sigma'_2\gamma\}\big) =$$

$$= \big(\overline{D'_v}\sigma'_1\delta \setminus \{\overline{A'}\sigma'_1\delta\}\big) \cup \big(\overline{D'_u}\sigma'_1\delta \setminus \{\neg\overline{B'}\sigma'_1\delta\}\big) =$$

$$= \big(\overline{D'_v}\theta\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\overline{A'}\theta\sigma_1\sigma_2\}\big) \cup \big(\overline{D'_u}\theta\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg\overline{B'}\theta\sigma_1\sigma_2\}\big) =$$

$$= \big(D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}\big) \cup \big(D_{i_u}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg B\sigma_1\sigma_2\}\big) = D_{i_{k+1}}$$

и $\theta_{k+1} = \gamma$. Теорема доказана.

ABSTRACT. **A unary resolution rule *Ru* is considered together with the well-known Robinson's resolution rule. The rule *Ru* is applied to a disjunct, which uses a computable predicate interpreted in the Herbrand's universe. The so-called reasonable restrictions of *Ru* are considered and completeness of the modified resolution rule for any reasonable restrictions of *Ru* is proved.**

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Robinson, "A machine-oriented logic based on the resolution principle", Journal of ACM, vol 12, № 1, pp. 23 – 41, 1965.
2. Ch. Chang, R. Lee, Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, NY, 1973.
3. С. А. Нигиян, "О разрешимости алгоритмических проблем", сб. Прикладная математика, ЕГУ, № 2, стр. 82 – 90, 1983.

12 апреля 1996

Ереванский государственный университет
E-mail : algoritm@ysu.am

ЛЕММА ШВАРЦА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

В работе доказано, что если $u(x,y,z)$ – гармоническая функция в шаре $x^2+y^2+z^2<1$ и удовлетворяет условиям $|u(x,y,z)|\leq 1$ в этом шаре, $u(0,0,0)=0$, то справедлива оценка

$$|u(x,y,z)|\leq \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)}-1,$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Полученные результаты применены для эффективного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое.

ВВЕДЕНИЕ

Если функция $u(x,y)$ гармонична в круге $x^2+y^2<1$, $|u(x,y)|\leq 1$, то для нее справедлива следующая оценка [1] (стр. 102) :

$$|u(x,y)-u(0,0)|\leq \frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}.$$

Эта оценка называется *arcsinus-формулой*. В книге [2] (стр. 169, задача 288) эта оценка уточняется (аналог леммы Шварца для аналитических в круге фукнций) :

Лемма 1. *Если функция $u(x,y)$ гармонична в круге $x^2+y^2<1$ и удовлетворяет условиям $|u(x,y)|\leq 1$, $u(0,0)=0$, то имеет место оценка*

$$|u(x,y)|\leq \frac{4}{\pi}\arctan\sqrt{x^2+y^2}.$$

В данной работе лемма Шварца распространяется на случай гармнических в шаре функций :

Лемма 2. *Если функция $u(x,y,z)$ гармонична в шаре $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r<1$, внутри которого удовлетворяет условиям $|u(x,y,z)|\leq 1$ и $u(0,0,0)=0$, то*

$$|u(x,y,z)|\leq \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)}-1. \tag{1}$$

При доказательстве леммы Шварца для гармонических в круге функций существенно используются методы теории функций комплексного переменного, неприменимые в трехмерном случае, поэтому здесь предлагается иной метод доказательства указанной леммы. Далее, оценка (1) применяется для эффективного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ ШВАРЦА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ

Лемма 3. *Пусть $u_1(x,y,z)$ – гармоническая в шаре $x^2+y^2+z^2<1$ функция, удовлетворяющая условиям $|u(x,y,z)|\leq 1$ при $x^2+y^2+z^2<1$ и*

$$u_1(x,y,z)=\begin{cases}1 & \text{при } x^2+y^2+z^2=1, \quad z>0,\\ -1 & \text{при } x^2+y^2+z^2=1, \quad z<0.\end{cases} \tag{2}$$

Тогда

$$u_1(0,0,r)=\frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)}-1, \quad 0\leq r\leq 1. \tag{3}$$

Доказательство. Как известно, $u_1(0,0,r)$ определяется формулой Пуассона (см. [3], стр. 326)

$$\begin{aligned} u_1(0,0,r)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta\right)d\varphi-\\ -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta\right)d\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Для функции $u(x,y,z)=1$ эта формула примет вид

$$1=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta\right)d\varphi. \tag{5}$$

Суммируя (4) и (5), получим

$$u_1(0,0,r)+1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta\right)d\varphi. \tag{6}$$

Интегрируя (6), получим формулу (1). Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $u(x,y,z)$ гармонична в шаре $x^2+y^2+z^2<1$, непрерывна в замкнутом шаре $x^2+y^2+z^2\le 1$ и удовлетворяет условиям $|u(x,y,z)|\le 1$ при $x^2+y^2+z^2\le 1$, $u(0,0,0)=0$. Покажем, что функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет неравенству (1). Сначала покажем справедливость неравенства (1) в точках с координатами $(0,0,r)$, $0\le r<1$. Согласно формуле Пуассона

$$u(0,0,r)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}u(p)\,d\theta\right)\,d\varphi, \tag{7}$$

где

$$p=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta). \tag{8}$$

Пусть $u_1(x,y,z)$ – гармоническая функция, определенная в лемме 3. Суммируя (4) и (7), получим

$$u_1(0,0,r)+u(0,0,r)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}f(\varphi,\theta)\,d\theta\right)\,d\varphi, \tag{9}$$

где

$$f(\varphi,\theta)=\begin{cases}1+u(p) & \text{при}\quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\\ -1+u(p) & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases} \tag{10}$$

Здесь координаты точки p определяются формулой (8). Подставляя в (7) $r=0$ и используя условие $u(0,0,0)=0$, получим

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}u(p)\sin\theta\,d\theta\right]\,d\varphi=0. \tag{11}$$

Из (10) и условия $|u_1(x,y,z)|\le 1$ следует

$$f(\varphi,\theta)\ge 0\quad\text{при}\quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

$$f(\varphi,\theta)\le 0\quad\text{при}\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi. \tag{13}$$

Из (10) и (12) следует равенство

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}f(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\theta\right]\,d\varphi=0. \tag{14}$$

Равенство (9) можно записать в виде

$$u_1(0,0,r)+u(0,0,r)=I_1(r)+I_2(r), \tag{15}$$

где

$$I_1(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}f(\varphi,\theta)\,d\theta\right)d\varphi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{(1-r^2)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^{3/2}}f(\varphi,\theta)\,d\theta\right)d\varphi.$$

Очевидно, что

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \ge \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{при} \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{16}$$

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \le \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \tag{17}$$

Поэтому из неравенств (12), (13), (16) и (17) имеем

$$I_1(r) \ge \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1-r^2}{1+r^2}\sin\theta f(\varphi,\theta)\,d\theta\right)d\varphi, \tag{18}$$

$$I_2(r) \ge \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1-r^2}{1+r^2}\sin\theta f(\varphi,\theta)\,d\theta\right)d\varphi. \tag{19}$$

Суммируя (18) и (19) и используя равенство (14), получим $I_1(r) + I_2(r) \ge 0$. Следовательно

$$u_1(0,0,r) + u(0,0,r) \ge 0. \tag{20}$$

Аналогично мы получим, что

$$u(0,0,r) - u_1(0,0,r) \le 0. \tag{21}$$

Неравенства (20) и (21) можно записать в виде

$$|u(0,0,r)| \le u_1(0,0,r),$$

где $u_1(0,0,r)$ определяется формулой (3).

Пусть теперь (x_0, y_0, z_0) – произвольная точка, $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < 1$. Тогда при помощи поворота координатной системы доказательство оценки (1) в точке (x_0, y_0, z_0) сведем к доказательству этой же оценки в точке $(0,0,r)$ при $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. Таким образом, лемма 2 доказана для гармонических функций, непрерывных в замкнутом шаре $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ и удовлетворяющих условиям $|u(x,y,z)| \le 1$ и $u(0,0,0) = 0$.

Пусть теперь $|u(x,y,z)| \le 1$ при $x^2+y^2+z^2<1$ и $u(0,0,0)=0$. Здесь не требуется непрерывности $u(x,y,z)$ в замкнутом шаре $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Рассмотрим функцию $W(x,y,z)=u(Rx,Ry,Rz)$, $0 \le R < 1$. Ясно, что $W(x,y,z)$ непрерывна в замнкутом шаре $x^2+y^2+z^2 \le 1$. Поэтому для $W(x,y,z)$ имеет место оценка (1), т.е.

$$|u(Rx,Ry,Rz)| \le \psi(r), \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{22}$$

где $\psi(r)$ определяется формулой (1), т.е.

$$\psi(r)=\frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)}-1. \tag{23}$$

Переходя в (22) к пределу при $R \to 1$, получим неравенство (1). Лемма 2 доказана.

Замечание. Легко установить, что функция $\psi(r)$, определенная формулой (23), удовлетворяет оценке

$$0 \le \psi(r) \le \frac{3}{2}r, \quad 0 \le r \le 1. \tag{24}$$

§2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ШАРОВОМ СЛОЕ

Пусть D – шаровой слой, ограниченный сферами σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_1: \ x^2+y^2+z^2=R_1^2, \quad \sigma_2: \ x^2+y^2+z^2=R_2^2, \quad R_1>R_2.$$

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad (x,y,z)\in D \tag{25}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(x,y,z)=f_1(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\sigma_1, \tag{26}$$

$$u(x,y,z)=f_2(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\sigma_2, \tag{27}$$

где $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ – заданные вещественные непрерывные на σ_1 и σ_2, соответственно, функции.

Задача (25) – (27) рассмотрена в монографии [4] (стр. 293). Там же эта задача решалась следующим образом. Заданные на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ функции

$f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ разлагались в ряд по сферическим функциям, а решение $u(x,y,z)$ представлялось в виде

$$u(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)J_n(\theta,\varphi),$$

где A_n и B_n – постоянные, (r,θ,φ) – сферические координаты точки (x,y,z), а $J_n(\theta,\varphi)$ – сферическая функция порядка n.

В [4] не оценивается остаточный член полученного ряда. В случае, когда $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ – лишь непрерывные функции, получение такой оценки предложенным методом представляет значительные трудности.

Мы предлагаем искать решение этой задачи в виде ряда по определенным гармоническим функциям. Используя лемму 2 Шварца, нам удается получить оценку остаточного члена полученного ряда для любых непрерывных данных $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $f_1(x,y,z)=c_1$ и $f_2(x,y,z)=c_2$, где c_1 и c_2 – заданные вещественные постоянные. Тогда решение задачи (25) – (27) определяется формулой

$$u(x,y,z)=\frac{a_1}{r}+a_2,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{28}$$

где

$$a_1=\frac{(c_2-c_1)R_1R_2}{R_1-R_2},\quad a_2=\frac{c_1R_1-c_2R_2}{R_1-R_2}.$$

2) Пусть $f_2(x,y,z)=0$, а $f_1(x,y,z)$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{\sigma_1}f_1(x,y,z)\,dS=0. \tag{29}$$

Обозначим через $V(x,y,z)$ гармоническую в шаре $x^2+y^2+z^2<R_1^2$ функцию, удовлетворяющую условию Дирихле

$$V(x,y,z)=f_1(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\sigma_1. \tag{30}$$

Как известно $V(x,y,z)$ определяется формулой Пуассона

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi R_1}\iint\limits_{\sigma_1}\frac{f_1(Q)(R_1^2-r^2)}{r_0^3}\,dS_Q, \tag{31}$$

где dS_Q – элемент площади сферы σ_1, а

$$Q = (\xi, \eta, \zeta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Из условия (21) следует, что $V(0,0,0) = 0$. Согласно принципу максимума

$$|V(x,y,z)| \le A, \quad A = \max_{(x,y,z)\in\sigma_1} |f_1(x,y,z)|. \tag{32}$$

Поэтому для функции $\frac{1}{A}V(xR_1, yR_1, zR_1)$ имеет место утверждение леммы 2, т.е.

$$\frac{|V(xR_1, yR_1, zR_1)|}{A} \le \psi(r) \le \frac{3}{2}r, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad 0 \le r \le 1. \tag{33}$$

Из (24) и (33) получим

$$|V(x,y,z)| \le \frac{3}{2}A\frac{r}{R_1}, \quad 0 \le r \le 1. \tag{34}$$

Как известно (см. [3]), решение $u(x,y,z)$ уравнения Лапласа в области D представляется в виде

$$u(x,y,z) = V_1(x,y,z) - V_2(x,y,z), \tag{35}$$

где $V_1(x,y,z)$ гармонична в шаре $x^2+y^2+z^2 < R_1^2$, а $V_2(x,y,z)$ гармонична вне шара $x^2+y^2+z^2 < R_2^2$ и $V_2(x,y,z) \to 0$ при $r \to \infty$. Подставляя (35) в (26) и (27) (при $f_2(x,y,z) = 0$), получим

$$V_1(p) - V_2(p) = f_1(p), \quad \text{при} \quad p = (x,y,z) \in \sigma_1, \tag{36}$$

$$V_1(p) - V_2(p) = 0, \quad \text{при} \quad p \in \sigma_2. \tag{37}$$

Пусть $p = (x,y,z)$ – точка в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Через $\alpha(p)$ обозначим точку, симметричную точке p относительно сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, т.е.

$$\alpha(p) = \left(\frac{R^2x}{r^2}, \frac{R^2y}{r^2}, \frac{R^2z}{r^2}\right), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Пусть $W_1(x,y,z)$ – некоторая функция в шаре $x^2+y^2+z^2 < R^2$ (или вне этого шара). Тогда функция

$$W_2(p) = \frac{R}{r}W_1(\alpha(p))$$

называется *преобразованием Кельвина* функции $W_1(p)$. Известно (см. [3], стр. 302), что если $W_1(p)$ гармонична в шаре $x^2+y^2+z^2<R^2$, то $W_2(p)$ гармонична вне этого шара и наоборот.

Условия (36) и (37) можно представить в виде

$$V_1(x,y,z)-\frac{R_1}{r}V_2\left(\frac{R_1^2x}{r^2},\frac{R_1^2y}{r^2},\frac{R_1^2z}{r^2}\right)=f_1(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\sigma_1, \tag{38}$$

$$\frac{R_2}{r}V_1\left(\frac{R_2^2x}{r^2},\frac{R_2^2y}{r^2},\frac{R_2^2z}{r^2}\right)-V_2(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in\sigma_2. \tag{39}$$

Левая часть (38) – гармоническая функция внутри шара $x^2+y^2+z^2<R_1^2$, а левая чатсь (39) – гармоническая функция вне шара $x^2+y^2+z^2<R_2^2$ и обращается в нуль в бесконечности, поэтому из граничных условий (38) и (39) эти функции определяются при помощи формулы Пуассона

$$V_1(x,y,z)-\frac{R_1}{r}V_2\left(\frac{R_1^2x}{r^2},\frac{R_1^2y}{r^2},\frac{R_1^2z}{r^2}\right)=V(x,y,z),\quad \text{при } r<R_1, \tag{40}$$

$$\frac{R_2}{r}V_1\left(\frac{R_2^2x}{r^2},\frac{R_2^2y}{r^2},\frac{R_2^2z}{r^2}\right)-V_2(x,y,z)=0,\quad \text{при } r>R_2, \tag{41}$$

где $V(x,y,z)$ определяется формулой (31). Из (41) получим

$$V_2(x,y,z)=\frac{R_2}{r}V_1\left(\frac{R_2^2x}{r^2},\frac{R_2^2y}{r^2},\frac{R_2^2z}{r^2}\right). \tag{42}$$

Подставляя $V_2(x,y,z)$ из (42) в (40), получим

$$V_1(x,y,z)=qV_1(q^2x,q^2y,q^2z)+V(x,y,z),\quad q=\frac{R_2}{R_1},\quad x^2+y^2+z^2<R_1^2. \tag{43}$$

Так как $0<q<1$, то уравнение (43) можно решить методом последовательных приближений :

$$V_1(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}q^kV(q^{2k}x,q^{2k}y,q^{2k}z). \tag{44}$$

Подставляя $V_2(x,y,z)$ из (44) в (42), получим

$$V_2(x,y,z)=\frac{R_2}{r}\sum_{k=0}^{\infty}q^kV\left(q^{2k}\frac{R_2^2x}{r^2},q^{2k}\frac{R_2^2y}{r^2},q^{2k}\frac{R_2^2z}{r^2}\right). \tag{45}$$

Так как $0<q<1$ и V удовлетворяет оценке (32), то ряды (44) и (45) сходятся равномерно в замкнутом шаровом слое $R_2^2\le x^2+y^2+z^2\le R_1^2$. Таким образом, решение задачи (25) – (27) определяется формулой (35), где $V_1(x,y,z)$ и $V_2(x,y,z)$ определяются при помощи рядов (44) и (45). Следовательно, в качестве n-го приближения решения задачи (25) – (27) берем следующую функцию :

$$u_n(x,y,z) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k V(q^{2k}x, q^{2k}y, q^{2k}z) - \frac{R_2}{r}\sum_{k=0}^{n-1} q^k V\left(q^{2k}\frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2k}\frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2k}\frac{R_2^2 z}{r^2}\right). \tag{46}$$

Так как $V(x,y,z)$ – гармоническая функция в шаре $x^2+y^2+z^2 < R_1^2$, то каждый член рядов (44) и (45) является гармонической функцией в области D.

Оценим погрешность решения $u(x,y,z) - u_n(x,y,z)$, где $u(x,y,z)$ – точное решение задачи (25) – (27). Из условия (30) следует, что гармоническая в области D функция $u_n(x,y,z)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u_n(x,y,z) = -\frac{R_2}{r}q^{n-1}V\left(q^{2n-2}\frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2n-2}\frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2n-2}\frac{R_2^2 z}{r^2}\right) + \\ + f_1(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\sigma_1, \end{aligned} \tag{47}$$

$$u_n(x,y,z) = 0, \qquad (x,y,z)\in\sigma_2. \tag{48}$$

Из (26), (27) (при $f_2(x,y,z)=0$), (47) и (48) получим

$$\begin{aligned} u(x,y,z) - u_n(x,y,z) = \frac{R_2}{r}q^{n-1}V\left(q^{2n-2}\frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2n-2}\frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2n-2}\frac{R_2^2 z}{r^2}\right), \\ (x,y,z)\in\sigma_1, \end{aligned} \tag{49}$$

$$u(x,y,z) - u_n(x,y,z) = 0, \qquad (x,y,z)\in\sigma_2. \tag{50}$$

Так как $u(x,y,z) - u_n$, $n = 1,2,...$ – гармонические функции в области D, то из условий (49), (50) и принципа максимума для гармонических функций получим

$$|u(x,y,z) - u_n(x,y,z)| \le R_2 q^{n-1} \max_{(x,y,z)\in\sigma_1}\left|\frac{1}{r}V\left(q^{2n-2}\frac{R_2^2 x}{r^2}, q^{2n-2}\frac{R_2^2 y}{r^2}, q^{2n-2}\frac{R_2^2 z}{r^2}\right)\right|. \tag{51}$$

Из оценок (34) и (51) имеем

$$|u(x,y,z) - u_n(x,y,z)| \le \frac{3}{2}Aq^{3n}, \quad A = \max_{p\in\sigma_1}|f_1(p)|.$$

Следовательно, погрешность n-го приближения не превышает $\frac{3}{2}Aq^{3n}$ и при $n\to\infty$ стремится к нулю, как убывающая геометрическая прогрессия.

Пусть теперь в граничном условии (26), (27) $f_1(x,y,z) = 0$, а $f_2(x,y,z)$ удовлетворяет условию $\iint\limits_{\sigma_2} f_2(x,y,z) = 0$. После применения преобразования Кельвина

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \tag{52}$$

этот случай приводится к вышерассмотренному.

3) Теперь рассмотрим общий случай. Представим функции f_1 и f_2 в виде

$$f_k(x,y,z) = g_k(x,y,z) + c_k, \quad k = 1,2, \tag{53}$$

где

$$c_k = \frac{1}{4\pi R_k^2}\iint\limits_{\sigma_k} f_k(x,y,z)\,dS, \quad k = 1,2.$$

Очевидно, что

$$\iint\limits_{\sigma_k} g_k(x,y,z)\,dS = 0, \quad k = 1,2.$$

Используя представление (53), общий случай приведем к случаям 1) и 2).

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области, ограниченной сферами

$$\begin{cases} \sigma_1': & x^2+y^2+z^2 = R_1^2, \\ \sigma_2': & (x-d)^2+y^2+z^2 = R_2^2, \end{cases} \qquad d > 0, \quad d + R_2 < R_1. \tag{54}$$

При помощи параллельного переноса системы координат эту задачу можно рассматривать в области D_0, ограниченной сферами

$$\begin{cases} \sigma_1: & (x-x_0)^2+y^2+z^2 = R_1^2, \\ \sigma_2: & (x-x_0-d)^2+y^2+z^2 = R_2^2, \end{cases}$$

где x_0 – произвольно заданная отрицательная постоянная, $x_0 < -R_1$. В дальнейшем будем выбирать x_0 таким образом, чтобы обратное преобразование

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \zeta = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

переводило сферы σ_1 и σ_2 в концентрические сферы γ_1 и γ_2. Центры сфер γ_1 и γ_2 расположены на оси ξ и их координаты равны

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0-R_1} + \frac{1}{x_0+R_1}\right) \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d+x_0-R_2} + \frac{1}{d+x_0+R_2}\right).$$

Радиусы этих сфер, соотвественно, равны ρ_1 и ρ_2 :

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x_0 - R_1} + \frac{1}{x_0 + R_1}\right] \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{d + x_0 - R_2} + \frac{1}{d + x_0 + R_2}\right].$$

Следовательно, при обратном преобразовании образами σ_1 и σ_2 будут концентрические сферы тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \xi_2$, т.е.

$$\frac{1}{x_0 - R_1} + \frac{1}{x_0 + R_1} = \frac{1}{d + x_0 - R_2} + \frac{1}{d + x_0 + R_2}. \tag{55}$$

Найдем решение уравнения (55), удовлетворяющее условию $x_0 < -R_1$. Уравнение (55) можно переписать в виде

$$dx_0^2 + x_0(d^2 - R_2^2 + R_1^2) + dR_1^2 = 0. \tag{56}$$

Из условий (54) следует, что дискриминант уравнения (56) положительный, и одно из решений определяется формулой

$$x_0 = \frac{1}{2d}\left[R_2^2 - d^2 - R_1^2 - \sqrt{(R_2^2 - d^2 - R_1^2)^2 - 4d^2R_1^2}\right]. \tag{57}$$

Из условия (54) следует, что $x_0 < -R_1$. Пусть значение x_0 выбрано по формуле (57). Тогда, после преобразования Кельвина (52) с $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, задача Дирихле для уравнения Лапласа в области D_0 сводится к той же задаче в шаровом слое

$$\rho_2^2 < (x - \xi_1)^2 + y^2 + z^2 < \rho_1^2.$$

ABSTRACT. We prove that if $u(x,y,z)$ is harmonic in the ball $x^2+y^2+z^2 < 1$ and satisfies the conditions $|u(x,y,z)| \le 1$ in the same ball and $u(0,0,0) = 0$, then

$$|u(x,y,z)| \le \frac{2(1+r)}{\sqrt{1+r^2}(\sqrt{1+r^2}+1-r)} - 1,$$

where $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. This inequality is applied for an efficient solution of the Dirichlet problem for Laplace equation in a spheric shell.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Hurwitz, R. Courant, Funktionentheorie, vol. 3, Springer, Berlin, 1929.
2. Г. Полиа, Г. Сегё, Задачи и теоремы из анализа, том I, Наука, М., 1978.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Наука, М.,, 1972.
4. С. Г. Михлин, Курс математической физики, Наука, М., 1968.

21 апреля 1995

Ереванский политехнический институт,
Мелитопольский педагогический институт, Украина
E-mail : hterzian@seua.am

ЭКВИВАРИАНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АРЕНСА–ИЛЛЗА

П. С. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

В работе [1] Р. Аренсом и Р. Иллзом были получены теоремы о замкнутом равномерно (изометричном) вложении равномерного (метризуемого) пространства в локально-выпуклое (нормируемое) топологическое пространство. В настоящей работе получены эквивариантные аналоги указанных результатов (теоремы 2 и 4), которые являются теоремами линеаризации тихоновских (метризуемых) G-пространств, обобщающие известные результаты Г. Д. Мостова [2] и Р. С. Палле [3] в случае компактной группы Ли, Ю. М. Смирнова [4] и Ян де Вриса [5] в случае любой локально-компактной группы.

Пусть X – произвольное множество. Обозначим через $M(X)$ множество действительных функций $m : X \longmapsto \mathbb{R}$ следующего вида :

$$m(x) = \begin{cases} \lambda_i \neq 0 & \text{для } x = x_i, \quad i = 1, ..., n, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество $M(X)$ является вещественным линейным пространством с поточечно определенными алгебраическими операциями. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in X$ условимся через λx обозначить ту функцию, определенную на X, которая принимает значение λ в точке x и 0 в осталных точках. Тогда ясно, что всякую функцию $m \in M(X)$ можно представить в виде $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $x_i \in X$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

Для фиксированной точки $x_0 \in X$ обозначим

$$B_{x_0} = \{x - x_0 : \ x \in X, \ x \neq x_0\}.$$

Лемма 1 (Аренс–Иллз, [1]). *B_{x_0} является базисом Гамеля линейного пространства $M(X)$.*

B_{x_0} называется *базисом Гамеля в точке* x_0. Если для пространства $M(X)$ выбран базис Гамеля B_{x_0}, то это пространство обозначим через $M(X, x_0)$. Оказывается, что если X – равномерное (метризуемое) пространство, то $M(X)$ – локально–выпуклое линейное (нормируемое) топологическое пространство. В самом деле, пусть $P = \{\rho_a : a \in A\}$ – комплект псевдометрик, порождающий равномерность на X. Каждой псевдометрике из комплекта $\rho \in P$ сопоставляется некоторая псевдонорма s_a на линейном пространстве $M(x)$ формулой

$$s_a(m) = \inf\left\{\sum_j |\mu_j|\rho_a(y_j, z_j)\right\}, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $m = \sum\limits_j \mu_j(y_j - z_j)$ элемента m. Тем самым комплекту псевдометрик P будет соответствовать семейство псевдонорм $S = \{s_a : a \in A\}$ на линейном пространстве $M(X)$. Этим семейством S порождается совместимая с линейной структурой локально–выпуклая топология. При этом, как нетрудно заметить, если X метризуемо, то $M(X)$ нормируемо (см. [1]).

Лемма 2 (Аренс–Иллз, [1]). *Для любых $x, y \in X$ и $a \in A$*

$$s_a(x - y) = \rho_a(x, y).$$

Пусть теперь (X, ρ) – метризуемое G-пространство, где G – произвольная группа. Действие группы G на X обозначим через $\pi : G \times X \longmapsto X$. Условимся вместо $\pi(g, x)$ писать gx, если из контекста ясно о каком действии идет речь. Рассмотрим соответствующее X нормируемое пространство $M(X, x_0)$. Определим отображение $\widetilde{\pi} : G \times M(X, x_0) \longmapsto M(X, x_0)$ формулой

$$\widetilde{\pi}(g, m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(gx_i - x_0), \quad g \in G, \tag{2}$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i - x_0)$ – произвольная точка из $M(X, x_0)$.

Лемма 3. *Пусть X – метрическое G-пространство с инвариантной метрикой ρ и неподвижной точкой x_0. Тогда отображение, определенное формулой (2), задает линейнос действие группы G на нормируемое пространство $M(X, x_0)$.*

Доказательство. Следует доказать :

1. $em = m$, где e – единичный элемент группы G;
2. $g'(gm) = (g'g)m$,
3. $g(\lambda m) = \lambda(gm)$,
4. $g(m + m') = gm + gm'$ для любых $g, g' \in G$, $m, m' \in M(X, x_0)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;
5. $\widetilde{\pi}$ – непрерывное отображение.

Пункты 1 – 4 доказываются просто. Проверим, например, пункт 2. Предположим, что $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i - x_0)$. Тогда

$$g'(gm) = g'\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(gx_i - x_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g'(gx_i) - x_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i((g'g)x_i - x_0) = (g'g)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i - x_0) = (g'g)m.$$

Для доказательства непрерывности отображения $\widetilde{\pi}$ оказываются существенными следующие две леммы :

Лемма 4. *Пусть L – линейное топологическое пространство, а B – его базис Гамеля. Линейное действие $\pi : G \times L \longmapsto L$ группы G непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в точках подмножества $G \times B$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность, как нетрудно заметить, вытекает из следующих двух утверждений :

а) если линейное действие π непрерывно в точке (g, x), то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ оно будет непрерывным и в точке $(g, \lambda x)$,

б) если π непрерывно в точках (g, x_1) и (g, x_2), то оно непрерывно и в точке $(g, x_1 + x_2)$.

Докажем а) (утверждение б) доказывается аналогичным образом). Пусть U – произвольная окрестность точки $\pi(g, \lambda x) = g(\lambda x)$ в пространстве L. Так как операция умножения на скаляр непрерывна и $g(\lambda x) = \lambda \cdot gx \in U$, то существует такая окрестность U_1 точки gx, что $\lambda \cdot U_1 \subset U$. А так как действие π непрерывно и в точке (g, x), то для выбранного U_1 существуют такие окрестности V и U_2 элементов g и x, соответственно, что $V \cdot U_2 \subset U_1$. Положим $W = \lambda \cdot U_2$. Нетрудно проверить, что V и W – искомые окрестности точек g и λx, соответственно, т.е. $V \cdot W \subset U$.

Лемма 5. *Если X – метрическое G-пространство с инвариантной метрикой ρ, то норма s G-пространства $M(X)$, порожденная формулой (1), тоже инвариантна относительно $\tilde{\pi}$.*

Доказательство. Следует доказать равенство $s(gm) = s(m)$. Рассмотрим всевозможные представления $\sum\limits_k \nu_k(h_k - t_k)$ элемента gm. Согласно формуле (1) имеем

$$s(gm) = \inf\left\{\sum_k |\nu_k|\rho(h_k, t_k)\right\} = \inf\left\{\sum_k |\nu_k|\rho(gg^{-1}h_k, gg^{-1}t_k)\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_k |\nu_k|\rho(g^{-1}h_k, g^{-1}t_k)\right\} = s(m).$$

Теперь мы в состоянии доказать непрерывность отображения $\tilde{\pi}$. В силу леммы 4 достаточно доказать непрерывность отображения $\tilde{\pi}$ в точках множества $G \times B_{x_0}$. Пусть $(g_0, y_0 - x_0) \in G \times B_{x_0}$ – произвольная точка, а $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое число. Так как $\pi : G \times X \longmapsto X$ непрерывно, то существует такая окрестность V точки g_0, что $\rho(gy_0, g_0y_0) < \varepsilon/2$ для всех $g \in V$. В пространстве $M(X, x_0)$ рассмотрим открытый шар $B(y_0 - x_0, \varepsilon/2)$ радиуса $\varepsilon/2$ с центром в точке $y_0 - x_0$. V и $B(y_0 - x_0, \varepsilon/2)$ – искомые окрестности точек g_0 и $y_0 - x_0$. Действительно, для всех $g \in V$ и $m \in B(y_0 - x_0, \varepsilon/2)$ выполняется

$$||gm - g_0(y_0 - x_0)|| \le ||gm - g_0(y_0 - x_0)|| + ||g(y_0 - x_0) - g_0(y_0 - x_0)|| =$$

$$= ||g(m - g_0(y_0 - x_0))|| + ||gy_0 - g_0y_0|| = ||m - (y_0 - x_0))|| + \rho(gy_0, g_0y_0) < \varepsilon.$$

Лемма 3 полностью доказана.

Теорема 1. *Всякое метрическое G-пространство с инвариантной метрикой и неподвижной точкой эквивариантно, изометрично и замкнуто вкладывается в некоторое нормированное линейное G-пространство.*

Доказательство. Пусть X – метрическое пространство с инвариантной метрикой ρ и фиксированной точкой x_0. Согласно лемме 5, $M(X, x_0)$ является линейным G-пространством. Отображение $\varphi : X \longmapsto M(X, x_0)$, заданное формулой $\varphi(x) = x - x_0$, будет искомым вложением. Действительно, замкнутость и изометричность вложения φ доказаны Р. Аренсом и Р. Иллзом [1]. Эквивариантность отображения φ следует из соотношения

$$\varphi(gx) = gx - x_0 = g(x - x_0) = g\varphi(x).$$

Теорема 2. *Всякое метрическое G-пространство с инвариантной метрикой эквивариантно, замкнуто и изометрично вкладывается в некоторое нормированное линейное G-пространство.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) – метрическое G-пространство без неподвижных точек. Рассмотрим дискретное объединение $X' = X \cup \{w\}$ G-пространства X и одноточечного тривиального G-пространства $\{w\}$. В X' определим инвариантную метрику d формулами

$$\begin{cases} d(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2), & \text{если } x_1, x_2 \in X, \\ d(x, w) = \mathrm{dist}(x, [a]) + \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}\,[a], & x \in X, \end{cases}$$

где

$$\mathrm{diam}\,[a] = \sup_{g, g' \in G} \{\rho(ga, g'a)\}, \qquad \mathrm{dist}\,(x, [a]) = \inf_{g \in G} \{\rho(x, ga)\},$$

$[a]$ – орбита некоторой точки $a \in X$ с конечным $\mathrm{diam}\,[a]$. X является замкнутым, инвариантным подмножеством метрического G-пространства X' с инвариантной метрикой d и неподвижной точкой w. Остается применить теорему 1.

Теорема 3. *Пусть G – счетно–компактная группа. Тогда всякое метризуемое G-пространство эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторое нормируемое линейное G-пространство.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2 и следующей известной леммы [7], [8].

Лемма 6. *Пусть G – счетно–компактная группа. Тогда на всяком метризуемом G-пространстве существует инвариантная метрика.*

Определение 1. Пусть X – равномерное пространство с комплектом псевдометрик $P\{\rho_a, a \in A\}$, а $\pi : G \times X \longmapsto X$ – непрерывное действие произвольной группы G на X. Равномерность пространства X назовем *инвариантной*, если инвариантна каждая псевдометрика из P.

Определение 2. Тихоновское G-пространство X назовем *инвариантным*, если на X существует инвариантная равномерность, порождающая топологию пространства X.

Теорема 4. *Всякое инвариантное тихоновское G-пространство эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторое локально–выпуклое линейное G-пространство.*

Теорема 5. *Пусть G – счетно–компактная группа. Тогда всякое тихоновское G-пространство эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторое локально–выпуклое линейное G-пространство.*

Доказательства теорем 4 и 5 подобны доказательствам теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, R. Ellis, "On embedding uniform and topological spaces", Pac. J. Math., vol. 6, № 3, 1956.
2. G. D. Mostov, "Equivariant embedding in Euclidean space", Ann. of Math., vol. 65, 1957.
3. R. S. Palais, "The classification of G-spaces", Mem. AMS, vol. 36, 1960.
4. Ю. М. Смирнов, "Об эквивариантных вложениях G-пространств", УМН, т. 5(191), 1976.
5. J. De Vries, "Universal topological transformation groups", Gen. Top. and Its Appl., vol. 5, 1975.
6. П. С. Геворкян, "Линеаризация тихоновских G-пространств", Тезисы V Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям, 1985.
7. E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
8. G. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, NY, London, 1972.

18 января 1996

Карабахский государственный университет
Степанакерт, НКР
E-mail : pgev@nic.nc.am

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ $E_\rho(z,\mu)$

Э. А. Даниелян, З. С. Микаелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

1. Класс целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)},\quad 0<\rho<\infty,\quad -\infty<\mu<+\infty,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, лежит в основе теории гармонического анализа в комплексной области, построенной М. М. Джрбашяном [1], [2]. Множество интегральных представлений использовано при построении этой теории.

Для функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,1)$ общеизвестны связи с плотностями

$$g(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}\sin(\pi k\alpha)\,x^{-k\alpha-1},\quad 0<\alpha<1$$

правосторонних устойчивых законов, возникающих в качестве предельных распределений для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (см., например, [3], [4]). Как нетрудно заметить, в известной формуле понижения порядка [5] для функции типа Миттаг-Леффлера, в частном случае

$$\mu>1-\frac{\rho_1}{\rho_2},\quad 0<\rho_1<\rho_2<\infty \tag{1}$$

также появляются плотности $g(x,\alpha)$. Именно, в случае (1)

$$E_{\rho_2}(z,\mu)=\int_0^\infty E_{\rho_1}\left(zu^{-1/\rho_2},1-(1-\mu)\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)u^{1-\mu}g\left(u,\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\,du,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

Следует отметить, что частный случай формулы (2) при $\mu=1$ является предметом специального рассмотрения в монографии В. В. Золотарева [4].

Целью настоящей заметки является получение нового интегрального представления функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,\mu)$ посредством обобщенной гипергеометрической функции

$$K_c(a,b,z) = \frac{1}{\Gamma(b-a)}\int_0^\infty t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}e^{zt^c}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+nc)}{\Gamma(b+nc)}\,\frac{z^n}{n!},\quad b>a>0,\quad c>0$$

и плотностей $g(x,\alpha)$. Преимущество найденного здесь представления заключается в том, что оно приводит к более простому, чем в [1], [2] доказательству формул для моментов $E_\rho(z,\mu)$. Одновременно, найдено новое, простое доказательство формулы (2).

2. Теорема. *При $\mu > \rho^{-1}$ и $\rho > 1$ имеет место представление*

$$E_\rho(z,\mu) = \int_0^\infty K_{1/\rho}(\rho^{-1},\mu,zx)\,x^{-\rho}g(x^{-\rho},\rho^{-1})\,dx,\quad z\in\mathbf{C}. \tag{3}$$

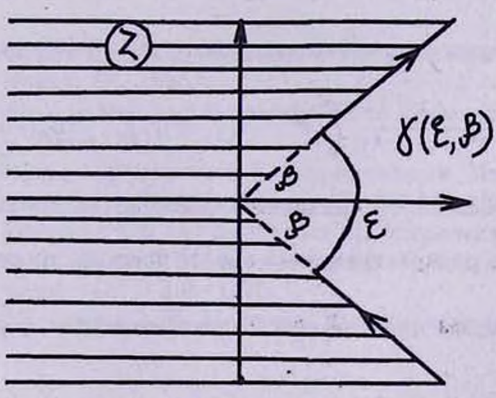


Рис. 1.

Доказательство. На рис. 1 для любых $\varepsilon>0$ и $\beta\in(0,\pi)$ изображен бесконечный контур $\gamma(\varepsilon,\beta)$ плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg\zeta$. Он состоит из лучей

$$\{\zeta:\ \arg\zeta = \pm\beta,\ \varepsilon\le|\zeta|<\infty\}$$

и дуги окружности, соединяющей концы $\varepsilon e^{\pm\beta}$ этих лучей. При $z\in G$, где G – заштрихованная область и $\beta\in\left(\frac{\pi}{2\rho},\frac{\pi}{\rho}\right)$, имеет место представление

$$E_\rho(z,\mu) = \frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\frac{e^{\zeta^\rho}\zeta^{\rho(1-\mu)}}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{4}$$

(см. [1], стр. 127). Подставляя в (4)

$$(\zeta+s)^{-1}=\int_0^\infty e^{-(\zeta+s)u}\,du, \qquad s>0,$$

и поменяв порядок интегрирования, получаем

$$E_\rho(-s,\mu)=\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du,$$

где

$$f(u)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)} z^{\rho(1-\mu)}\exp(z^\rho-zu)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}u^{-1-\rho(1-\mu)}\int_{\gamma^*(\varepsilon,\beta)}\zeta^{\rho^{-1}-\mu}\exp(-\zeta^{1/\rho}+\zeta u^{-\rho})\,d\zeta. \tag{5}$$

Здесь $\gamma^*(\varepsilon,\beta)$ – образ контура $\gamma(\varepsilon,\beta)$ при замене переменной $z=\zeta^{1/\rho}/u$. Согласно результатам [4] и формуле (5) при $\mu=1/\rho$ имеем $f(u)=u^{-\rho}g(u^{-\rho},\rho^{-1})$. Поэтому

$$E_\rho(-s,\rho^{-1})=\int_0^\infty e^{-sx}x^{-\rho}g(x^{-\rho},\rho^{-1})\,dx. \tag{6}$$

Отсюда и из другого легко доказываемого представления

$$E_\rho(-s,\mu)=\frac{1}{\Gamma(\mu-\rho^{-1})}\int_0^1 t^{\rho^{-1}-1}(1-t)^{\mu-\rho^{-1}-1}E_\rho(-st^{\rho^{-1}},\rho)\,dt, \quad \mu>\rho^{-1}$$

(см. М. М. Джрбашян [1]) приходим к формуле (3) при $z=-s<0$. На остальные $z\in\mathbf{C}$ равенство распространяется аналитическим продолжением.

3. Теперь приведем простой способ доказательства формул для моментов (см. [6])

$$\int_0^\infty x^{s-1}E_\rho(-x,\mu)\,dx=\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\mu-\frac{s}{\rho}\right)}, \quad \rho>\frac{1}{2}, \quad 0<s<1. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при $0<p<\min\left(1,\frac{a}{c}\right)$ имеем

$$\int_0^\infty x^{p-1}K_c(a,b,-x)\,dx=\frac{1}{\Gamma(b-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\,dt\int_0^\infty x^{p-1}e^{-xt^c}\,dx.$$

Так как

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-xt^c}\,dx=t^{-cp}\Gamma(p),$$

то

$$\int_0^\infty x^{p-1}K_c(a,b,-x)\,dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(a-cp)}{\Gamma(b-cp)}. \tag{8}$$

При $\rho > 1$ из известных равенств

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x,\alpha)\,dx = \frac{\Gamma\left(1-\frac{s-1}{\alpha}\right)}{\Gamma(2-s)}, \quad 0 < s < 1+\alpha, \tag{9}$$

легко доказываемых в теории устойчивых законов (см. [4]), а также формул (3) и (9) находим (7).

Докажем формулу (2). Она, как нетрудно заметить, является очевидным следствием моментного равенства

$$\int_0^\infty x^{s-1} E_{\rho_2}(-x,\mu)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty t^{-\frac{s}{\rho_2}+1-\mu} g\left(t, \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\,dt \int_0^\infty x^{s-1} E_{\rho_1}\left(-x, 1-(1-\mu)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\,dx.$$

Последнее равенство проверяется подстановкой моментов из (7) в (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966.
2. M. M. Djrbashian, Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain, Birkhäuser, Basel, 1993.
3. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Мир, М., 1967.
4. В. М. Золотарев, Одномерные устойчивые законы, Наука, М., 1983.
5. М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян, "Об интегральных представлениях в мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 10, № 6, стр. 483 – 508, 1975.
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды, Наука, М., 1986.

27 мая 1996

Ереванский государственный университет

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Статья А. Б. Нерсесяна и Н. В. Оганесян "Алгоритмы высокого порядка для интегральных уравнений с разностными ядром" (Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 6, стр. 67 – 79, 1994) содержит некоторые неточности и описки. Приведем их исправления.

Функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ и $g_3(x)$ должны считаться определенными по формулам (12) – (14) только на $[0,1]$, а на отрезок $x \in [-1,0]$ они должны быть продолжены нечетным образом.

Из заключительной оценки в доказательстве леммы 1 следует, что вывод леммы нужно сформулировать так : "Если $m \geq 4p_1p_2$, то функция $R(x) = r_1(r_2(x))$ удовлетворяет тем же условиям при $p = 2p_1p_2$".

Доказательство теоремы 1 следует изменить. Заметим, что функцию $h(x)$, определенную формулой (17), можно записать в виде

$$h(x) = \exp\left[2\left(1 + \frac{\theta - 1}{x - \theta}\right)\right],$$

откуда следует, что вместо (19) можно использовать более точные оценки

$$|h^{(k)}(x)| \leq \text{ Const } \frac{h(x)(1-\theta)^k}{(x-\theta)^{2k}}, \max_{\theta \leq x \leq 1}\left(\frac{h(x)}{(x-\theta)^{2k}}\right) \leq \frac{\text{Const}}{(1-\theta)^{2k}}, \; k = 1, ..., 2p+1.$$

Вместе с формулой (5) эти оценки доказывают теорему 1.

Лемма 2 справедлива лишь при $\theta_1 = \theta_2$. В левой части формулы (24') должно быть $I - T$, где I – единичная матрица.

В тестовой функции (26) второе слагаемое справа должно быть возведено в степень (-1). В таблицах 6 – 8 первый столбец должен быть обозначен 2^n.
В пояснении после формулы (28) вместо "(29)" должно быть "$\delta_n(i)$ и $d_n(i)$".

Авторы выражают благодарность профессору Г. Геворкяну за полезные замечания.

А. Б. Нерсесян, Н. В. Оганесян

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 31 НОМЕР 5 1996

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

CONTENTS

VOLUME 31 NUMBER 5 1996

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)