

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐՉՈՒՄՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԱՍՂՅԱՆ
Գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրութիւնը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտութիւնների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ Համառոտ Հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5-6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի Հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել Համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են Համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն այլքաձև գծով:

4. Գծազերծը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց Համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում:

5. Գրականութիւնը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի Համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչութիւնը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների Համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, Համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականութիւնը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի Համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրութիւնի ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխութիւնները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ Համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրութիւնը իրավունք է վերապահում չգրադիվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ Հասցեն, անունը և Հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրութիւնի Հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտութիւնների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
КОМБИНАТОРНОЙ
ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ, II**

сборник статей

под редакцией Р. В. Амбарцумяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В основе направления "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии" лежат имеющие геометрическую интерпретацию результаты по вопросам порождения мер в классических пространствах интегральной геометрии. Первый сборник статей под этим названием опубликован в 1994 году в № 4 настоящего журнала. Этим сборником было положено начало систематическому изучению задач порождения мер при помощи валюаций (конечно-аддитивных функционалов), определенных в классических пространствах. Настоящий сборник продолжает этот предмет.

Открывает сборник статья Р. В. Амбарцумяна, рассматривающая валюации и вопросы порождения мер в пространстве прегеодезических на 2-многообразиях, т.е. кривых, комбинаторное поведение которых повторяет хорошо известное локальное поведение геодезических кривых на поверхности. Пространства прегеодезических кривых представляют собой неклассические аналоги пространства прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Статья В. К. Оганяна и А. Н. Давтяна является продолжением работы Р. В. Амбарцумяна и В. К. Оганяна, опубликованной в предыдущем сборнике. В ней рассматриваются комбинаторные валюации в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Необходимые условия порождения меры, найденные в упомянутой работе, здесь дополнены до необходимых и достаточных.

Статья Г. С. Сукиасяна посвящена валюациям, определенным на выпуклых многогранниках в $\mathbb{R}^n$. Автор раскрывает связи между задачей порождения знакопеременной меры и классической формулой Остроградского.

Читатель сможет убедиться, что эта область обещает еще много новых интересных находок в будущем.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА 2-МНОГООБРАЗИЯХ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 31, №4, 1996

Семейство кривых Γ на двумерном многообразии называется семейством прегеодезических, если комбинаторное поведение этих кривых копирует хорошо известное поведение геодезических на поверхности. В статье определяется класс комбинаторных валюаций на Γ . Валюация зависит от функции $F(s)$, которая отображает прегеодезические отрезки в $(-\infty, \infty)$. Исследуется следующий вопрос : для каких функций $F(s)$ эти валюации можно продолжить до знакопеременных мер на Γ ? В случае, когда продолжение существует и является неотрицательной мерой, функция $F(s)$ оказывается метрикой, для которой Γ есть семейство геодезических. Это наблюдение связывает данную тематику с 4-ой проблемой Гильберта для семейства Γ . Неотрицательность продолжения (если последнее существует) гарантируется требованием, что индикатриса направлений $F(s)$ в каждой точке многообразия выпукла. В статье получено дифференциальное уравнение, которое является необходимым и достаточным условием порождения знакопеременной меры. Подробно изучается случай круговой индикатрисы направлений (точечная изотропность $F(s)$). Помимо результатов единственности, дано описание семейств прегеодезических в евклидовых плоских областях, которые допускают геодезическую интерпретацию относительно точно изотропной метрики.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — двумерное многообразие с границей ∂D , диффеоморфное замкнутому плоскому диску, и пусть Γ — семейство кривых на D , удовлетворяющих следующим аксиомам :

- 1) Каждая кривая $\gamma \in \Gamma$ диффеоморфна замкнутому прямолинейному отрезку. Внутренность γ принадлежит $\text{int} D$ и оба конца кривой γ лежат на границе ∂D .

2) Для любых двух различных точек в D существует *единственная* кривая $\gamma \in \Gamma$, содержащая эти две точки ; это свойство остается в силе, если одна или обе точки принадлежат границе ∂D .

3) В каждой точке $P \in D$ существует только одна кривая $\gamma \in \Gamma$, содержащая точку P и имеющая в точке P данное направление касательной.

Если условия 1), 2) и 3) выполнены, мы называем Γ семейством *прегеодезических* кривых или просто *прегеодезическими*. Вторая часть условия 2) постулирует существование *концевого отображения*, которое переводит каждую прегеодезическую γ в неупорядоченную пару ее концов.

Отображение, обратное к конечному, переводит каждую неупорядоченную пару различных точек на границе ∂D в соответствующую кривую γ . Это отображение определяет топологию на Γ , делая это пространство гомеоморфным обычному *открытому листу Мебиуса*. Последняя совпадает с топологией на Γ , индуцированной из пространства замкнутых множеств в D .

Эти аксиомы соответствуют хорошо известному локальному поведению геодезических кривых на римановых многообразиях. В этой статье рассматриваются следующие вопросы : следует ли из свойств 1), 2), 3) существование метрики, определенной в D , для которой прегеодезические суть геодезические ? Каким образом можно описать все метрики, для которых данные прегеодезические являются геодезическими ? Какими индикатрисами могут обладать такие метрики ? (Например, римановы метрики определяются условием, что в каждой точке D индикатриса есть эллипс.) Последние два вопроса поставлены в стиле классической *4-ой проблемы Гильберта* : описать метрики на евклидовой плоскости, для которых евклидовы прямые служат геодезическими.

Известные результаты по упомянутой классической проблеме можно резюмировать так :

Теорема ([1] — [3]). *Каждой непрерывной псевдометрике $F(P_1, P_2)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, для которой геодезические суть евклидовы прямые, соответствует единственная неотрицательная мера μ в пространстве прямых на $\mathbb{R}^2$ со свойствами*

$$\mu(\text{прямые, проходящие через точку } P) = 0, \quad P \in \mathbb{R}^2, \quad (0.1)$$

$$F(P_1, P_2) = \mu(\text{прямые, разделяющие } P_1 \text{ и } P_2), \quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2. \quad (0.2)$$

Обратное утверждение также верно : каждая мера в пространстве прямых, удовлетворяющая условию (0.1), формулой (0.2) определяет псевдометрику на $\mathbb{R}^2$, для которой евклидовы прямые суть геодезические.

Первый шаг, ведущий к распространению этого результата на пространства кривых, был сделан в [5]. В [5] было замечено, что комбинаторный подход допускает прямое обобщение вышеприведенной теоремы на геодезические на поверхности $D \subset \mathbb{R}^3$ и метрики, индуцированные из $\mathbb{R}^3$, если внутри D эти геодезические обладают свойствами 1), 2), 3).

Применяемый ниже метод *флаговых плотностей* был использован в ([4], [7], [8]) для обычных прямых на евклидовой плоскости. В частности, в [7] было получено дифференциальное уравнение, являющееся необходимым и достаточным условием существования знакопеременной меры μ , для которой (0.2) выполнено. При этом F должна принадлежать классу *линейно-аддитивных сегментных функций*. В [9] была сделана попытка решить возникающее дифференциальное уравнение. Настоящая статья использует ту же комбинаторную идею для прегеодезических кривых, вместе с методом продолжения знакопеременных мер, впервые использованном в [7].

Параграфы 1 — 3 посвящены предварительной комбинаторной работе с мерами на Γ , и мотивации построения в §4 основного объекта изучения : эйлеровой валюации на Γ . Эта валюация определяется на кольце U подмножеств

пространства Γ , которое мы называем *клеточным кольцом*. U есть аналог обычного выпуклого кольца в $\mathbb{R}^2$. (Прототипы кольца U ранее рассматривались в [5] и в главе 5 книги [8], а также в [7].) Эйлерова валюация зависит и полностью определяется сегментной функцией $F(s) = F(P_1, P_2)$. Здесь и ниже s обозначает отрезок кривой $\gamma \in \Gamma$, а P_1, P_2 суть концы отрезка s . Функция $F(s)$ предполагается *аддитивной вдоль кривых* из Γ . Среди первых результатов — аналог второго утверждения приведенной выше теоремы для пространства Γ . Будем называть знакопеременную меру m на Γ *беспучковой*, если $m([P]) = 0$ для каждой точки $P \in D$, где

$[P]$ = множество (пучок) кривых γ , проходящих через точку P .

Оказывается, что каждая беспучковая знакопеременная мера m на Γ , по формуле

$$F(P_1, P_2) = m(\text{кривые } \gamma, \text{ разделяющие } P_1 \text{ и } P_2) \quad (0.3)$$

определяет сегментную функцию $F(s)$, такую что соответствующая эйлерова валюация задает значения меры m на кольце U .

Метрику, определенную на D , для которой кривые $\gamma \in \Gamma$ суть геодезические, мы называем Γ -*метрикой*. Для того, чтобы получить Γ -метрику, достаточно в (0.3) выбрать m неотрицательной мерой на Γ . В §5 доказана теорема, утверждающая, что этим путем мы получаем все возможные Γ -метрики.

В §6 получено условие существования (единственного) продолжения заданной эйлеровой валюации, зависящей от гладкой, аддитивной сегментной функции $F(s)$ до знакопеременной меры на Γ . Это условие мы называем свойством *сильной аддитивности* функции $F(s)$.

Согласно §5, из всякого условия, гарантирующего неотрицательность знакопеременной меры следует, что строго аддитивная F есть Γ -псевдометрика. В статье предполагаем, что $F(s)$ есть интеграл от некоторой флаговой плотности с выпуклой индикатрисой направлений в каждой точке многообразия D (это

предполагает наличие т.н. стандартной длины на отрезках s).

В §7, в терминах т.н. *стандартной* Γ -метрики, получено условие, локально эквивалентное условию строгой аддитивности. Это условие имеет вид дифференциального тождества для флаговой плотности и применяется ниже для анализа 4-ой проблемы Гильберта.

В §8 рассматриваются три “классических” случая : диск в евклидовой плоскости и евклидовы прямые ; диск на полусфере и большие круги ; диск в гиперболической плоскости и гиперболические прямые. В каждом из случаев, используя стандартные Γ -метрики, получены версии тождества из §7. Для каждого из трех случаев, имеет место результат единственности : *для того, чтобы получить Γ -метрику, радиус круговой индикатрисы должен быть постоянным.*

В параграфах 9 — 11 получено (Теорема 7) полное внутреннее описание семейств Γ , являющихся геодезическими для некоторой точечно изотропной метрики. Одно из двух эквивалентных условий формулируется как условие независимости пути некоторых интегралов кривизны.

§1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НАПРАВЛЕННЫХ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Результат этого и следующего параграфов выводится методом, примененным в работе [5], стр. 21 — 25 для прямых на евклидовой плоскости. Доказательство разбивается на два этапа : интегрирование в пространстве *направленных* прегеодезических кривых (§1) и интегрирование полученного результата в пространстве Γ (§2). Целью является получение комбинаторного разложения, которое будет использовано для построения эйлеровых валуаций в параграфе 4.

Направленные версии кривых γ будем обозначать через ν , а через $\tilde{\Gamma}$ — пространство всех ν . Каждой $\gamma \in \Gamma$ соответствуют две кривые $\nu \in \tilde{\Gamma}$. Предположим, что на ∂D выбрано начало O и направление обхода. Координата x точки из ∂D измеряется длиной дуги от O в положительном направлении вдоль ∂D , $0 < x < H$.

Каждой $\nu \in \tilde{\Gamma}$ соответствует направленная пара (x_1, x_2) , где x_1 — *точка входа*, а x_2 — *точка выхода* направленной кривой ν . Таким способом определяется конечное отображение :

$$\nu \rightarrow (x_1, x_2).$$

Возьмем n различных точек $P_1, P_2, \dots, P_n \subset \text{int} D$ и рассмотрим кривые ν , которые не содержат точек из множества $\{P_i\}$. Разбиение, порожденное кривой $\nu \in \tilde{\Gamma}$ есть упорядоченная пара подмножеств $\{P_i\}$, принадлежащих различным компонентам D относительно ν . Две кривые ν_1 и ν_2 из $\tilde{\Gamma}$ эквивалентны, если они образуют одно и то же разбиение множества $\{P_i\}$. Класс эквивалентности называется атомом, если соответствующее разбиение не есть $\{P_i\}, \emptyset$.

Определение 1. Кольцом Сильвестра $\tilde{S}\{P_i\}$ называется конечное кольцо подмножеств из $\tilde{\Gamma}$, порожденное атомами. (Обозначение подчеркивает зависимость кольца Сильвестра от выбора точек $\{P_i\}$).

Заметим, что из $\nu \in A \in \tilde{S}\{P_i\}$ следует, что $\nu^* \in A$, где ν и ν^* соответствуют одной и той же γ , но имеют противоположные направления. Нам понадобятся следующие два подмножества из $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Gamma}_i^+ = \{\nu \in \tilde{\Gamma} : P_i \text{ лежит слева от } \nu\};$$

$$\tilde{\Gamma}_i^- = \{\nu \in \tilde{\Gamma} : P_i \text{ лежит справа от } \nu\};$$

Цель настоящего параграфа — вывод интегрального тождества для функций, определенных в пространстве $\tilde{\Gamma}$.

Пусть $q(x_1, x_2)$ — интегрируемая функция, определенная на $\partial D \times \partial D$. Обозначим через dx меру на ∂D , соответствующую угловой мере на окружности. С помощью конечного отображения ей соответствует знакопеременная мера $\tilde{m}$ на $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{m}(A) = \int_A q(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где A — борелевское множество в $\tilde{\Gamma}$.

Ниже в качестве A мы берем произвольный элемент кольца Сильвестра $\tilde{S}\{P_i\}$.

В оставшейся части параграфа будем предполагать, что

никакие три точки из множества $\{P_i\}$ не лежат на одной кривой γ .

Это предположение позволяет обойти некоторые технические трудности, в дальнейшем оно будет опущено. Зафиксируем конечное множество $\{P_i\} \subset \text{int } D$. Для любого $x \in \partial D$ определим последовательность точек $y_k(x) \in \partial D$, $k = 0, 1, \dots, n+1$ следующим образом :

$$\begin{cases} y_0(x) = ax, \\ y_k(x) \text{ точка выхода некоторой кривой } \nu(x, P_i), \quad k = 1, \dots, n, \\ y_{n+1}(x) = ax + H \equiv x, \end{cases}$$

где $\nu(x, P_i)$ — единственная ν -кривая с точкой входа x , проходящей через внутреннюю точку P_i . Предположим, что нумерация точек $y_i(x)$ выбрана так, что точка, движущаяся из x в положительном направлении вдоль ∂D , вначале встречает $y_1(x)$, затем $y_2(x)$ и т.д., по возрастанию индексов (см. Рис. 1). Отображение $i \rightarrow k$ определяется для почти всех $x \in \partial D$ и существенно зависит от x .

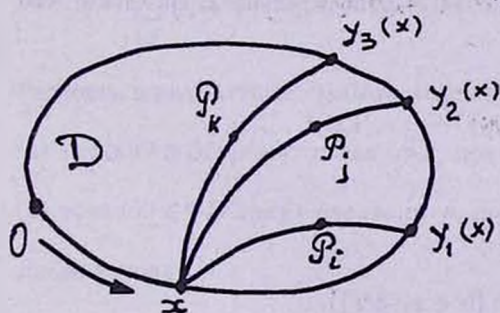


Рис. 1

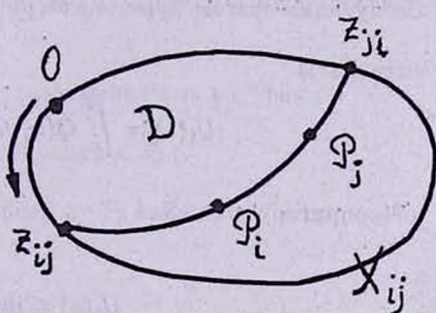


Рис. 2

Выберем множество $A \in \tilde{S}\{P_i\}$ и применим теорему Фубини :

$$\tilde{m}(A) = \int_A q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^H dx_1 \int_{x_1}^{x_1+H} I_A(x_1, x_2) q(x_1, x_2) dx_2, \quad (1.1)$$

где $I_A(x_1, x_2)$ — индикатор (или характеристическая функция) множества A на кривой (x_1, x_2) . Этот индикатор, припимающий значения 0 или 1, не меняется,

если x_1 фиксирована, а x_2 меняется внутри дуги $(y_i(x_1), y_{i+1}(x_1))$, $0 \leq i \leq n$.

Следовательно, используя первообразную

$$Q(x, y) = \int_x^y q(x, x_2) dx_2,$$

внутренний интеграл в (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_x^{x+H} I_A(x, x_2) q(x, x_2) dx_2 &= \sum_{i=0}^n [Q(x, y_{i+1}(x)) I_A(x, (i+1)^+) - \\ &- Q(x, y_i(x)) I_A(x, i^-)] = \sum_{i=1}^n Q(x, y_i(x)) [I_A(x, i^+) - I_A(x, i^-)]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $I_A(x, i^+)$ обозначает предельную величину индикатора $I_A(x, y)$, если $y \in \partial D$ аппроксимирует $y_i(x)$, так что P_i остается в левой половине D , ограниченной $\nu(x, y)$. Обозначение $I_A(x, i^-)$ определяется аналогично. Так как A принадлежит $\tilde{S}\{P_i\}$, величины $I_A(x, 0^-)$ и $I_A(x, (n+1)^+)$ равны нулю. Это доказывает последнее равенство. Предыдущее равенство является фундаментальной теоремой анализа.

Следующим шагом будет интегрирование (1.2) относительно x . Заметим, что интегралы

$$U_i(z) = \int_0^z Q(x, y_i(x)) dx, \quad i = 1, \dots, n$$

интерпретируются как

$$U_i(z) = \tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{0 < x_1 < z\}).$$

Индикаторы $I_A(x, i^+)$ и $I_A(x, i^-)$, представляющие функции от x , могут быть разрывными на тех значениях x , для которых точка P_j , $i \neq j$ лежит на прямой $\nu(x, y_i(x))$. Для каждой P_j существует в точности два таких значения x , которые мы обозначим через $z_{i,j}$ и $z_{j,i}$ (Рис. 2).

Будем считать, что z_{ji} — точка входа для ν , проходящей от P_i к P_j , в то время как z_{ji} — точка входа на кривой ν с обращенным направлением. По известной

теореме анализа

$$\int_0^H Q(x, y_i(x)) I_A(x, i^\pm) dx = \sum_j U_i(z_{i,j}) [I_A(i^\pm, j^+) - I_A(i^\pm, j^-)] + \sum_j U_i(z_{j,i}) [I_A(j^-, i^\pm) - I_A(j^+, i^\pm)]. \quad (1.3)$$

Символы $I_A(i^\pm, j^\pm)$ обозначают постоянные значения $I_A(\gamma)$ на четырех подмножествах малой окрестности ϵ кривой ν :

$$\epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^+ \cap \tilde{\Gamma}_j^+, \epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^- \cap \tilde{\Gamma}_j^-, \epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^+ \cap \tilde{\Gamma}_j^- \text{ и } \epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^- \cap \tilde{\Gamma}_j^+.$$

Рассмотрим целочисленные коэффициенты:

$$c_{ij}(A) = I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+) - I_A(i^+, j^+) - I_A(i^-, j^-). \quad (1.4)$$

Так как для любой $A \in \tilde{S}\{P_i\}$, инвариантной относительно перемены направлений кривых ν имеем $c_{ji}(A) = c_{ij}(A)$, результат подстановки (1.2) и (1.3) в (1.1) дает

$$\tilde{m}(A) = \sum_{i,j} [c_{ji}(A) U_i(z_{j,i}) - c_{ij}(A) U_i(z_{i,j})] = \sum_{i,j} c_{ij}(A) [U_i(z_{j,i}) - U_i(z_{i,j})]. \quad (1.5)$$

Разность в квадратных скобках имеет разные выражения для случаев:

- (а) точка $O \in \partial D$ лежит слева от ν , проходящей от P_i к P_j ;
- (б) точка $O \in \partial D$ лежит справа от ν , проходящей от P_i к P_j ;

Легко находим

$$U_i(z_{j,i}) - U_i(z_{i,j}) = \begin{cases} \tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{x_1 \in X_{ij}\}), & \text{в случае (а)} \\ -\tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{x_1 \in X_{ij}\}), & \text{в случае (б)} \end{cases} \quad (1.6)$$

где X_{ij} — часть ∂D между $z_{i,j}$ и $z_{j,i}$ не содержащая O . Результат (1.5) — (1.6) содержит определенную симметрию, которая проявляется при его интерпретации для пространства Γ .

§2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ Γ

Рассмотрим отображение $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, соответствующее стиранию направления на кривых ν . Образом $\tilde{S}\{P_i\}$ будет кольцо Сильвестра $S\{P_i\}$ подмножеств в пространстве Γ . Независимое определение $S\{P_i\}$ мы получим, определив эквивалентные разбиения конечного множества точек $\{P_i\}$ в D кривыми γ : для заданного множества $\{P_i\}$, две кривые γ_1 и γ_2 из Γ эквивалентны, если они порождают одно и то же разбиение множества $\{P_i\}$. Класс эквивалентности является атомом, если соответствующее разбиение не есть $\{P_i\}, \emptyset$.

Определение 2. Для данного $\{P_i\}$ кольцом Сильвестра $S\{P_i\}$ называется конечное кольцо подмножеств Γ , порожденное атомами.

Отметим, что имеется естественное соответствие между элементами из $S\{P_i\}$ и $\tilde{S}\{P_i\}$. Будем говорить, что атомы $A \in \tilde{S}\{P_i\}$ и $B \in S\{P_i\}$ соответствуют друг другу, если всякие $\nu \in A$ и $\gamma \in B$ порождают одинаковые разбиения множества $\{P_i\}$; два элемента $A \in \tilde{S}\{P_i\}$ и $B \in S\{P_i\}$ соответствуют друг другу, если они образованы соответствующими атомами. Образ $\tilde{m}$ при нашем отображении $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ мы будем обозначать через m :

$$m(B) = \tilde{m}(A), \quad (2.1)$$

где $B \subset \Gamma$ — борелевское множество и $A \subset \tilde{\Gamma}$ — полный прообраз B . Заметим, что (2.1) имеет место, если $A \in \tilde{S}\{P_i\}$ и $B \in S\{P_i\}$ суть соответствующие множества. Итак, можно говорить об уравнении, дуальном к (1.5), (1.6) в пространстве Γ . Из последнего следует разложение мер на кольце Сильвестра в терминах их значений на "бюфоновых множествах". Для простоты предположим, что функция $q(x_1, x_2)$ симметрична, т.е. $q(x_1, x_2) = q(x_2, x_1)$. Имеем

$$\tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{x_1 \in X_{ij}\}) = \frac{1}{2} \begin{cases} m([P_i, z_{ji}]) + m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) & \text{в случае (a)} \\ m([P_i, x_{ij}]) + m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) & \text{в случае (b).} \end{cases}$$

Обозначим через $[Q_1, Q_2]$ бюфоновое множество

$$[Q_1, Q_2] = \{\gamma \in \Gamma: \gamma \text{ разделяет точки } Q_1, Q_2 \in D\}.$$

Следовательно, из (1.5), (1.6) вытекает

$$\begin{aligned} m(B) &= \sum_{\text{case (a)}} c_{ij}(A) \left[\frac{1}{2} m([P_i, z_{ji}]) + \frac{1}{2} m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) \right] - \\ &- \sum_{\text{case (b)}} c_{ij}(A) \left[\frac{1}{2} m([P_i, z_{ij}]) + \frac{1}{2} m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{case (a)}} c_{ij}(A) [m([P_i, z_{ji}]) - m([P_j, z_{ji}])] = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) m([P_i, P_j]). \end{aligned}$$

Мы пришли (см. также [5], стр. 28) к следующему предварительному результату, полная версия которого есть Теорема 1 в §3.

Пусть m — беспучковая знакопеременная мера на Γ , обладающая суммируемой плотностью относительно квадрата стандартной меры на ∂D . Пусть $\{P_i\} \subset D$ — конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной кривой γ . Для любого $B \in S\{P_i\}$ имеет место разложение по бюффоновым множествам

$$m(B) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) m([P_i, P_j]). \quad (2.2)$$

Коэффициенты $c_{ij}(B)$ не зависят от плотности меры m и задаются алгоритмом (1.4).

Замечание 1. Алгоритм (1.4) использует направленные кривые. Однако по симметрии, результат не зависит от выбора направлений.

§3. ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ

Ввиду наличия концевое отображения, в качестве грубой модели пространства $\tilde{\Gamma}$ можно взять квадрат $(0, H) \times (0, H)$. Его треугольная часть, лежащая ниже диагонали $x_1 = x_2$, будет моделью семейства Γ . Для получения точной модели семейства Γ удалим из треугольника гипотенузу и три вершины. Оставшееся плоское множество обозначим через Δ : каждая кривая $\gamma \in \Gamma$ представляет собой точку в Δ и наоборот. Чтобы сделать Δ топологически эквивалентным Γ , отождествим точки катетов треугольника Δ по способу Мёбиуса: $(x, 0) \sim (H, x)$. Заметим, что удаление гипотенузы делает Δ некомпактным.

Настоящий параграф, помимо описания модели Δ , содержит вывод представления типа (2.2), свободного от требования об "общем положении" точек $\{P_i\}$ и существовании плотности.

Кривые α и β (пучки).

Каждый пучок кривых γ , содержащих данную точку $P \in \text{int} D$, представляет собой кривую в Δ (см. Рис. 3а)). Такие кривые обозначаем через β . Они образуют двухпараметрическое семейство кривых в Δ . Согласно аксиоме 2, любая пара кривых β_1, β_2 имеет ровно одну точку пересечения. Каждая β является замкнутой кривой, так как точки 1 и 1' идентичны. Катеты Δ склеены по Мёбиусу, поэтому кривые β не делят Δ на две компоненты.

Если $P \in \partial D$, то соответствующий пучок кривых γ представляет собой пару отрезков, один из которых параллелен оси x_1 , а второй – оси x_2 (см. Рис. 3а)). Отождествление точек 2 и 2' не даст замкнутую кривую, так как точка 3 не соответствует какой-либо кривой γ . Такие кривые обозначаем через α . Заметим, что каждый катет треугольника Δ соответствует пучку кривых γ , проходящих через $O \in \partial D$. Поэтому катеты можно рассматривать как α -кривые.

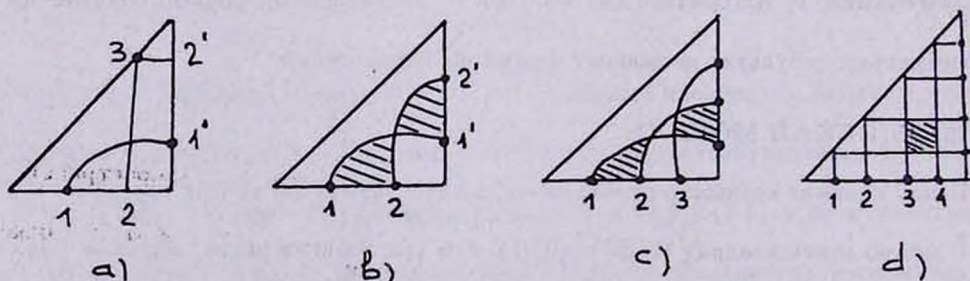


Рис. 3. Множества Бюффона b), Паша c) и Крофтона d) заштрихованы

Двуугольники и бюффоновы множества.

Двуугольником называется открытая область в Δ , ограниченная двумя кривыми β_1 и β_2 (см. Рис. 3b)). Двуугольник может быть относительно компактным или

нет. Пусть $P_1 \neq P_2 \in \text{int} D$. Проходящие через эти точки пучки делят Δ на два двуугольника, один из которых относительно компактен, а другой – нет.

Бюффоново множество

$$[P_1, P_2] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2\}$$

относительно компактно в Γ . Следовательно, в Δ это множество изображается относительно компактным двуугольником. И наоборот, всякому относительно компактному двуугольнику соответствует бюффоново множество. Мы используем букву W для обозначения двуугольников. Если W относительно компактен, то мы называем его бюффоновым.

Треугольники и множества Паша.

Пусть P_1, P_2, P_3 – три разные точки из $\text{int} D$. Соответствующие кривые $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ разбивают Δ на четыре треугольные компоненты, лишь одна из которых не является относительно компактной (на Рис. 3с) она примыкает к гипотенузе). Три другие компоненты суть множества Паша : по определению, *множество Паша* есть относительно компактная часть Δ , ограниченная дугами трех кривых типа α либо β . Множества Паша будем обозначать через τ . Заметим, что на диаграмме Δ треугольник может изображаться состоящим из двух кусков. Однако в этом случае каждый кусок обязательно примыкает к катету, и склеивание восстанавливает связность. Термин *множества Паша* оправдывается их интерпретацией в пространстве Γ . Заданному множеству Паша τ соответствуют $P_1, P_2, P_3 \in \text{int} D$, такие что

$$\tau = \{\gamma : \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \text{ и } P_3\}.$$

Прямоугольники и множества Крофтона.

Прямоугольником в Δ называем область, ограниченную четырьмя кривыми типа α . На диаграмме Δ прямоугольник может изображаться евклидовым прямоугольником, как на Рис. 3d), или в виде двух кусков. В последнем случае отожде-

ствление катетов их склеивает. Если прямоугольник относительно компактен, то мы называем его *множеством Крофтона* и обозначаем через κ . Каждому κ одно-однозначным образом соответствует пара дуг $a_1, a_2 \subset \partial D$ с разными замыканиями, так что

$$\kappa = [a_1, a_2] = \{\gamma : \gamma \text{ пересекает } a_1 \text{ и } a_2\}.$$

Каждому κ поставим в соответствие четыре γ -кривые d_1, d_2, s_1, s_2 как показано на Рис. 4.

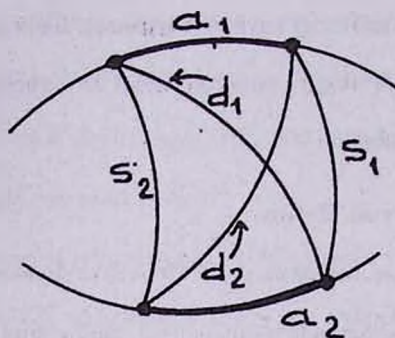


Рис. 4.

Замечание 2. Пучок $[P] \subset \Gamma$ кривых, проходящих через точку P пересечения кривых d_1 и d_2 , как показано на Рис. 3d), делит соответствующее κ на два множества Паша. Мы используем это при доказательстве Леммы 2 в §6.

Кольцо и ячейки Сильвестра.

Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\} \subset \text{int} D$. Рассмотрим соответствующие кривые β_i . Относительно компактные компоненты, на которые эти кривые делят Δ , соответствуют атомам, а объединения этих компонент – элементам кольца $S\{P_i\}$. Атомы β -выпуклы, т.е. пересечение внутренности атома с любой кривой β либо пусто, либо является топологическим интервалом. Следовательно, образ атома A есть *относительно компактный β -выпуклый многоугольник* в Δ . Такие множества назовем *ячейками* и обозначим через C .

Можно говорить о *сторонах* и *вершинах* ячейки C . Каждой вершине V соответствуют ровно два двуугольника, ограниченных β -кривыми, продолжающими

стороны C и пересекающимися в V . Двухугольник, для которого $\text{int}C \cap W = \emptyset$, называется *внешним*, а другой – *внутренним*. Один из двухугольников обязательно оказывается бюфоновым, а другой – нет. Условие, что никакие три точки из $\{P_i\}$ не лежат на одной кривой γ , в дуальных терминах означает, что никакие три кривые β_i не проходят через одну точку в Δ .

Представление ячеек бюфоновыми множествами.

Пусть задана ячейка $C \subset \Delta$. Результаты §2 могут быть применены к множеству $A \subset \Gamma$, которое определяется как образ C при обратном отображении $\Delta \rightarrow \Gamma$. Выберем точки $\{P_i\}$ так, чтобы они соответствовали продолжениям β_i сторон ячейки C . Тогда условие общего расположения удовлетворено, и A оказывается атомом кольца $S\{P_i\}$. Коэффициенты $c(A)$ в (1.4) имеют вид: $c_{ij}(A) = 1$ или -1 , если кривая γ , проходящая через P_i и P_j , соответствует вершине V_k ячейки C ; в противном случае $c_{ij}(A) = 0$. Если бюфонов двухугольник при V_k является внутренним для C , то $c_{ij}(A) = 1$, в противном случае $c_{ij}(A) = -1$.

Узлы, углы и струны.

Теперь существование представления $m(A)$ через меры бюфоновых множеств для любых $A \in S\{P_i\}$ следует простым суммированием. Однако это наблюдение не дает алгоритма вычисления коэффициентов разложения, сравнимого по ясности с (2.2) и годного для общих $\{P_i\}$. Получение отсутствующего алгоритма требует некоторых усилий.

Пусть $\beta_i \in \Delta$ – кривые, соответствующие точкам $P_i \in D$. Через N_s обозначим узлы, т.е. точки в Δ , где пересекаются две или более кривых β_i . Каждому узлу N_s соответствует множество углов $\{K_{sr}\}$: по определению, $\{K_{sr}\}$ суть компоненты, на которые разбивается достаточно малая окрестность узла N_s кривыми β_i , проходящими через N_s .

Пусть C_i – ячейки, на которые Δ разбивается кривыми β_i . Для любого C_i

запишем (2.2) в виде, удобном для суммирования :

$$m(C_i) = \sum_{K_{sr}} I_{C_i}(K_{sr}) [I_{Buf}(W_{sr}) m(W_{sr}) - I_{Buf}(W_{sr}^c) m(W_{sr}^c)]. \quad (3.1)$$

Здесь W_{sr} – двуугольник, содержащий K_{sr} и ограниченный двумя кривыми β_i , которые образуют угол K_{sr} , а W_{sr}^c – его дополнение. Отметим, что *всякому двуугольнику W_{sr} принадлежат ровно два угла из N_s* . Мы пользуемся индикаторными обозначениями :

$I_{Buf}(W_{sr}) = 1$, если W_{sr} бюфонов, и 0 – в противном случае,

$I_{C_i}(K_{sr}) = 1$, если $K_{sr} \subset C_i$, и 0 – в противном случае.

Доказательство нижеследующей Теоремы 1 основано на суммировании формулы (3.1). Нам потребуются следующие геометрические термины.

Подмножество σ точек из $\{P_i\} \subset D$ называется *струной* тогда и только тогда, когда

- 1) σ принадлежит одной кривой γ , называемой *носителем* струны ;
- 2) число точек в σ больше, чем одна ;
- 3) носитель не содержит других точек из $\{P_i\}$.

Для данной струны σ определим точки $1(\sigma), 2(\sigma) \in \sigma$ тем условием, что отрезок $1(\sigma), 2(\sigma)$ носителя содержит все остальные точки из σ . 2-подмножество $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}$ обозначаем через δ , если γ -отрезок P_i, P_j не содержит других точек из $\{P_i\}$. Точки, входящие в δ , обозначаем $1(\delta)$ и $2(\delta)$.

Ясно, что каждому узлу N_s отвечает струна и наоборот : при этом носителю соответствует сама N_s , а точки P_i струны соответствуют кривым β_i , пересекающимся в N_s . Бюфоновы двуугольники из $\{W_{sr}\}$ соответствуют 2-множествам δ . Для данного узла (струны) $N_s = \sigma$ среди двуугольников W_{sr} только один небюфонов. Он представляет собой разность {множество кривых γ , пересекающих носитель струны σ } $\setminus [1(\sigma), 2(\sigma)]$.

Теорема 1. Пусть $\{P_i\} \subset D$ – конечное множество точек и m – локально

конечная знакопеременная мера на Γ , для которой

$$m([P_i]) = 0 \quad \text{для любого } P_i \text{ из заданного множества.}$$

Для всякого $B \in S\{P_i\}$ имеет место разложение

$$2m(B) = \sum_{\delta} c(\delta; B) m([1(\delta), 2(\delta)]) - \sum_{\sigma} c(\sigma; B) m([1(\sigma), 2(\sigma)]), \quad (3.2)$$

где первое суммирование ведется по всем 2-подмножествам δ , а второе – по всем струнам σ из $\{P_i\}$. Коэффициенты $c(\delta; B)$ и $c(\sigma; B)$ не зависят от знакопеременной меры m и вычисляются по формуле

$$c(\delta; B) = I_B(1^+, 2^-) + I_B(1^-, 2^+), \quad (3.3)$$

$$c(\sigma; B) = I_B(1^+, 2^+) + I_B(1^-, 2^-), \quad (3.3')$$

где числа 1, 2 обозначают (срав. с (1.4)) соответственно точки $1(\delta), 2(\delta)$ в (3.3) или $1(\sigma), 2(\sigma)$ в (3.3').

Доказательство: Если знакопеременная мера m имеет плотность относительно меры $dx_1 dx_2$, т.е. принадлежит классу, для которого (3.1) уже доказана, то утверждение получается суммированием формул (3.1), записанных для атомов (ячеек) C_l , лежащих в B . Используя аддитивность индикаторов, получаем

$$m(B) = \sum_{K_{sr}} I_B(K_{sr}) [I_{Bu_f}(W_{sr}) m(W_{sr}) - I_{Bu_f}(W_{sr}^c) m(W_{sr}^c)]. \quad (3.4)$$

В (3.4) общий вклад углов K_{sr} , для которых W_{sr} бюфонов, равен первой сумме правой части (3.2). Аналогично, общий вклад углов K_{sr} , для которых W_{sr} небюфонов, равен второй сумме правой части (3.2). Остается доказать (3.2) для случаев, когда мера m не имеет плотности. Сначала покажем справедливость (3.2) для мер m вида $m(A) = I_A(\gamma)$, где $I_A(\gamma)$ – индикаторная функция борелевского $A \subset \Gamma$; кривую γ , играющую роль параметра, выбираем так, чтобы она не

проходила через точки P_i . Доказательство получается аппроксимацией индикаторной меры последовательностью мер m_n , имеющих плотности. Запишем (3.2) для мер m_n и заметим, что условие на выбор γ обеспечивает существование пределов $m_n([1(\delta), 2(\delta)])$ и $m_n([1(\sigma), 2(\sigma)])$. Следовательно, в (3.2) можно заменить $m(A)$ на $I_A(s)$. Получим тождество по γ , справедливое с точностью до пучков, проходящих через точки P_i . Для общей знакопеременной меры m , удовлетворяющей условиям Теоремы 1, утверждение теоремы получается интегрированием этого линейного тождества относительно m . Доказательство закончено.

Приведем три простейших случая формулы (3.2), используемых в дальнейшем.

1) $B = [P_1, P_2]$ (бюффоново множество). Правая часть (3.2) приводится к виду $2m([P_1, P_2])$.

2) $B = \tau$ (множество Паша), $\tau = \{\gamma : \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \text{ и } P_3\}$:

$$2m(\tau) = m([P_1, P_2]) + m([P_1, P_3]) - m([P_2, P_3]). \quad (3.5)$$

3) $B = \kappa$ (множество Крофтона). Получаем формулу Крофтона (см. Рис. 4) :

$$2m(\kappa) = m([d_1]) + m([d_2]) - m([s_1]) - m([s_2]). \quad (3.6)$$

§4. ВАЛЮАЦИЯ ЭЙЛЕРА

Два множества $B_1, B_2 \subset \Gamma$ назовем *эквивалентными*, если их симметричная разность $(B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)$ может быть покрыта конечным числом пучков β_i или α_i . В настоящем параграфе вместо конкретных множеств $B \subset \Gamma$ рассматриваются соответствующие классы эквивалентности B^* . Заметим, что обычные понятия объединения, пересечения, пустого множества распространяются и на рассматриваемые классы эквивалентности. Например, имеем

$$B_1^* \cup B_2^* = (B_1 \cup B_2)^*.$$

Однако ниже мы предпочитаем вместо B^* писать просто B . Это упрощает обозначения и не приводит к недоразумениям.

Определение 3. Кольцо подмножеств пространства Γ

$$U = \bigcup S\{P_i\},$$

где объединение берется по всем возможным конечным множествам $\{P_i\}$, называется *большим кольцом*.

Пусть S – пространство отрезков кривых γ и $s \in S$. Пусть $F(s) = F(P_1, P_2)$ – определенная на S функция отрезков, $F : S \rightarrow \mathbb{R}$. В формулах (3.2) и (3.3) формально заменим значения $m([1(\delta), 2(\delta)])$ и $m([1(\sigma), 2(\sigma)])$ на $F([1(\delta), 2(\delta)])$ и $F([1(\sigma), 2(\sigma)])$ соответственно. Так получаем функционалы, определенные на кольцах Сильвестра,

$$\varphi(B; \{P_i\}) : S\{P_i\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$2\varphi(B; \{P_i\}) = \sum_{\delta} c(\delta; B)F([1(\delta), 2(\delta)]) - \sum_{\sigma} c(\sigma; B)F([1(\sigma), 2(\sigma)]), \quad (4.1)$$

где коэффициенты $c(\delta; B)$ и $c(\sigma; B)$ определяются как в (3.3). Так как одно и то же B может принадлежать разным кольцам $S\{P_i\}$, то имеет смысл следующее определение.

Определение 4. Система функционалов (4.1), соответствующая некоторой функции $F(s)$, определенной на S , называется *состоятельной*, если из эквивалентности $B_1 \in S\{P_i\}$ и $B_2 \in S\{Q_i\}$ следует $\varphi(B_1; \{P_i\}) = \varphi(B_2; \{Q_i\})$.

Мы видели, что если функция $F(s)$ порождена некоторой беспучковой знакопеременной мерой m в пространстве Γ посредством (0.2), то функционалы $\varphi(B; \{P_i\})$ состоятельны в U . Дадим ответ на вопрос : для каких функций F функционал φ состоятелен ?

Определение 5. Функция $F(s)$, определенная на S , называется *аддитивной*, если для любых $s_1, s_2 \in S$, лежащих на одной γ , имеющих один общий конец и в остальном непересекающиеся, имеет место

$$F(s_1) + F(s_2) = F(s_1 \cup s_2).$$

Теорема 2. Пусть $F(s) = F(P_1, P_2)$ – аддитивная функция, определенная на S и непрерывная в топологии $D \times D$. Тогда система функционалов $\varphi(B; \{P_i\})$, соответствующих F , состоятельна на большом кольце U .

Доказательство : Используя аддитивность функции F , слегка преобразуем выражение (4.1). Для любой $\sigma \in \{P_i\}$ имеем

$$F(1(\sigma), 2(\sigma)) = \sum_{\delta \in \sigma} F(1(\delta), 2(\delta)).$$

Подставляя в (4.1), находим

$$2\varphi(B; \{P_i\}) = \sum_{\delta \in \{P_i\}} a(\delta; B; \{P_i\}) F(1(\delta), 2(\delta)), \quad (4.2)$$

где

$$a(\delta; B; \{P_i\}) = c(\delta; B; \{P_i\}) - c(\sigma(\delta); B; \{P_i\})$$

(обозначение подчеркивает зависимость коэффициентов от множества $\{P_i\}$). Для всякого $B \in U$ существует конечное множество $\{P_i\}$ в D такое, что $B \in S\{P_i\}$ и $B \in S\{Q_i\}$ влечет $\{P_i\} \subset \{Q_i\}$. Для построения такого "минимального" множества $\{P_i\}$ заметим, что границу ∂B образа B в Δ можно покрыть конечным числом кривых β_i , имеющих свойство

$$\beta_i \cap \partial B = \text{дуге с непустой относительной внутренностью.}$$

Множество $\{P_i\} \subset D$ составляют точки, соответствующие кривым $\beta_i \subset \Delta$. Предположим, что имеем множество $B \in U$ и два конечных множества $\{P_i\} \subset \{Q_i\}$, таких что $B \in S\{P_i\}$ и $B \in S\{Q_i\}$. Достаточно показать, что применение алгоритма (4.2) для вычисления $\varphi(B; \{P_i\})$ и $\varphi(B; \{Q_i\})$ приводит к одному и тому же результату. Рассмотрим значения $a(\delta; B; \{Q_i\})$ при различных $\delta \in \{Q_i\}$. Имеются две возможности :

а) $\delta \in \{Q_i\}$ содержится в замкнутом γ -отрезке, чьи концы являются концами для некоторого $\delta_1 \in \{P_i\}$ (пишем : $\delta \in \delta_1$);

b) дополнение к а).

Согласно определению $S\{P_i\}$, если $B \in S\{P_i\}$, то индикатор $I_B(\gamma)$ может испытывать разрыв только на кривых, проходящих через точки из $\{P_i\}$. Из этого следует, что в случае b) оба значения индикаторов в (3.3) для $c(\delta; B; \{Q_i\})$ повторяются в (3.3') для $c(\sigma(\delta); B; \{Q_i\})$. Поэтому

$$a(\delta; B; \{Q_i\}) = 0,$$

или другими словами

$$2\varphi(B; \{Q_i\}) = \sum_{\delta_1 \in \{P_i\}} \sum_{\delta \in \delta_1} a(\delta; B; \{Q_i\}) F([1(\delta), 2(\delta)]). \quad (4.3)$$

Используя тот же принцип, легко заключить, что в случае а)

$$a(\delta; B; \{Q_i\}) = a(\delta_1; B; \{P_i\}).$$

Вновь применяя аддитивность функции F , получаем

$$\sum_{\delta \in \delta_1} a(\delta; B; \{Q_i\}) F([e_1(\delta), e_2(\delta)]) = a(\delta_1; B; \{P_i\}) F([e_1(\delta_1), e_2(\delta_1)]).$$

Подставляя в (4.3), получаем (4.2). Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть $F(s)$ – аддитивная, непрерывная функция, определенная на S . По Теореме 2 значения $\varphi(B, \{P_i\})$ не зависят от выбора $\{P_i\} \subset D$ при $B \in S(\{P_i\})$. Определим отображение $E_F : U \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$E_F(B) = 2\varphi(B, \{P_i\}), \quad B \in U.$$

Отображение E_F аддитивно на U , т.е. если $B_1, B_2 \in U$ и $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то

$$E_F(B_1) + E_F(B_2) = E_F(B_1 \cup B_2).$$

Доказательство следует из аддитивности индикаторов в (4.1). Мы называем E_F *валуацией Эйлера*, отвечающей функции F .

Приведем значения валюации Эйлера для трех простейших множеств (см. конец §3).

1) $B = [P_1, P_2]$ (бюффоново множество) :

$$E_F(B) = 2 F(P_1, P_2). \quad (4.4)$$

2) $B = \tau$ (множество Паша), $\tau = \{\gamma: \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \text{ и } P_3\}$:

$$E_F(\tau) = F(P_1, P_2) + F(P_1, P_3) - F(P_2, P_3). \quad (4.5)$$

3) $B = \kappa$ (множество Крофтона) (см. Рис. 4) :

$$E_F(\kappa) = F([d_1]) + F([d_2]) - F([s_1]) - F([s_2]). \quad (4.6)$$

Замечание 3. Если дуги $a_1, a_2 \subset \partial D$ стягиваются к точкам x_1, x_2 соответственно, то для дважды дифференцируемых функций F равенство (4.6) влечет

$$\lim E_F(\kappa)(|a_1| |a_2|)^{-1} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где $\kappa = [a_1, a_2]$ — множество Крофтона, а $|a_i|$ — длина дуги a_i , соответствующая мере длины dx , определенной в §1.

§5. ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ СТАНОВЯТСЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ

В настоящем параграфе доказываются две теоремы относительно неотрицательных мер в пространстве Γ прегеодезических кривых на D .

Теорема 3. Пусть m — беспучковая неотрицательная мера, определенная на Γ . Функция

$$F(P_1, P_2) = m([P_1, P_2]) \quad (5.1)$$

есть псевдометрика на D , для которой кривые из Γ являются геодезическими.

Доказательство : вытекает из следующих наблюдений 1) — 3).

1) $F \geq 0$ (так как m предполагаем неотрицательной).

2) Для любого множества Паша τ имеет место $m(\tau) \geq 0$. В силу (4.5), это в точности есть неравенство треугольника.

3) Определенная на S функция

$$F(s) = F(P_1, P_2), \quad (5.2)$$

где P_1, P_2 – концы отрезка $s \in S$, аддитивна вдоль кривых из Γ . По аксиоме 2, в определении прегеодезических, две кривые из Γ могут иметь не более одной точки пересечения. Поскольку мера m беспучковая, множества $[s_1]$ и $[s_2]$ в определении линейной аддитивности по существу не пересекаются. Доказательство завершено.

Пусть $F(P_1, P_2)$ – непрерывная псевдометрика на D , для которой Γ является семейством геодезических. Так как функция $F(s)$, определенная на S по (5.2), аддитивна, то на большом кольце U определена соответствующая валюация Эйлера.

Теорема 4. Пусть $F(P_1, P_2)$ – непрерывная псевдометрика на D , для которой Γ является семейством геодезических. Тогда валюация Эйлера E_F продолжима до неотрицательной меры m на борелевских подмножествах Γ . Для этой меры справедливо (5.1).

Доказательство : вытекает из следующих наблюдений 1) – 6).

1) Так как F – псевдометрика, для множеств Паша τ , в силу (4.5), имеем $E_F(\tau) \geq 0$. Каждую ячейку в Δ можно представить в виде конечной суммы относительно компактных треугольников с непересекающимися внутренностями (триангуляция). Следовательно, каждое $B \in U$ можно представить в виде конечного объединения множеств Паша. Из этого следует, что *искомая валюация Эйлера E_F неотрицательна на U .*

2) Пусть a_n – последовательность отрезков на одной кривой γ , сходящаяся

при $n \rightarrow \infty$ к точке $P \in \gamma$. Для всякой последовательности отрезков s_n имеет место

$$E_F([a_n] \cap [s_n]) \leq E_F([a_n] \cap [s_n]) + E_F([a_n] \cap [s_n]^c) = E_F([a_n]) = F(a_n).$$

Из непрерывности F следует, что $\lim F(a_n) = 0$. Из этого заключаем, что всегда

$$\lim E_F([a_n] \cap [s_n]) = 0.$$

3) Зафиксируем пару кривых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и рассмотрим множества $[s_1] \cap [s_2]$, где $s_1 \in \gamma_1$ и $s_2 \in \gamma_2$. Этот класс множеств станет полукольцом, если мы предположим, что дуги s_i открытые, замкнутые или полуоткрытые (стандартная терминология теории мер). Это полукольцо содержит *компактный класс*, который получим, взяв обе дуги s_i компактными. В силу свойства 2), значение E_F на любом члене полукольца можно аппроксимировать значениями E_F на элементах нашего компактного класса. Стандартная теорема теории меры обеспечивает существование единственной меры на $\gamma_1 \times \gamma_2$ или, что эквивалентно, на множестве

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{\gamma : \gamma \text{ пересекает } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2\}.$$

Обозначаем эту меру через $m_{1,2}$.

4) Пусть A – множество из U . По Теореме 2

$$E_F([s_1] \cap [s_2] \cap A) = 0 \quad \text{при} \quad [s_1] \cap [s_2] \subset A^c,$$

$$E_F([s_1] \cap [s_2] \cap A) = E_F([s_1] \cap [s_2]) = m_{1,2}([s_1] \cap [s_2]) \quad \text{при} \quad [s_1] \cap [s_2] \subset A.$$

По стандартной теореме о продолжении меры получаем

$$E_F([\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap A) = m_{1,2}([\gamma_1, \gamma_2] \cap A) = m_{1,2}(A).$$

5) Впишем " γ -многоугольник" D_1 в D , располагая "вершины" на ∂D и связывая их последовательно кривыми $\gamma_i \in \Gamma$, которые станут "сторонами"

D_1 . Предположим, что D_1 является γ -выпуклым в том смысле, что внутренности множеств $[\gamma_i, \gamma_j]$ не пересекаются и множество $[D_1]$ тех γ -кривых, что пересекают D_1 , эквивалентно объединению множеств $[\gamma_i, \gamma_j]$. На каждом из этих множеств согласно 3) имеем меру $m_{i,j}$; вместе эти меры определяют меру m_1 на $[D_1]$. Вычислим значение $m_1(A)$, полагая, что $A \in U$ и $A \subset [D_1]$. Из замечания 4) и аддитивности E_F имеем

$$m_1(A) = \sum m_{i,j}(A) = \sum E_F([g_i] \cap [g_j] \cap A) = E_F(A).$$

Следовательно, на множествах $A \in U$, являющихся частями $[D_1]$, значения функционала E_F совпадают со значениями m_1 .

6) Добавлением новых вершин на ∂D построим последовательность γ -выпуклых многоугольников $D_2, D_3, \dots$ таких, что $[D_k]$ монотонно сходится к Γ . Повторяя построение 5) для каждого D_k , получим последовательность мер m_k . Меры m_k будут состоятельными в том смысле, что m_k есть сужение m_{k_1} на $[D_k]$ при $k < k_1$ (следует из 5)). Предельную меру для последовательности m_k обозначим через m ; последняя определена на Γ . Так как $A \in U$ всегда принадлежит некоторому $[D_k]$, то

$$m(A) = m_k(A) = E_F(A).$$

Последнее утверждение теоремы теперь следует из (4.4). Теорема 4 полностью доказана.

§6. СИЛЬНАЯ АДДИТИВНОСТЬ И ПОРОЖДЕНИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ МЕР

Доказательство Теоремы 4 в предыдущем параграфе опирается на неотрицательность валюации Эйлера E_F ; последнее свойство следовало из предположения, что F — псевдометрика. Теорема 3 утверждает, что если F не является псевдометрикой, то продолжить валюацию Эйлера E_F до неотрицательной меры на Γ невозможно. Однако остается возможность продолжить E_F до *знакопеременной меры*

на Γ . Для каких классов функций F реализуема эта последняя возможность? В настоящем параграфе мы дадим ответ на этот вопрос для знакопеременных мер на Γ , имеющих непрерывные плотности. Это вынужденное ограничение, так как для знакопеременных мер не существует теорем, аналогичных теоремам о продолжении общих неотрицательных мер.

Пусть имеем аддитивную функцию $F(s)$, определенную на S . Для произвольной тройки x_1, P, x_2 , у которой $x_1, x_2 \in \partial D$, $P \in \text{int } D$, рассмотрим значение E_F на треугольнике Паша τ , соответствующем отделению точки P от x_1, x_2 :

$$E_F(\tau) = F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2).$$

Одно из условий, используемых ниже, состоит в том, что эта сумма, как функция от $x_1 \in \partial D$, дважды непрерывно дифференцируема относительно меры dx на ∂D , см. §1. Также предполагаем, что функция $F(x_1, x_2)$ (т.е. сужение F на Γ -хорды диска D) трижды непрерывно дифференцируема относительно dx и обозначаем

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Если оба условия выполнены, то функцию $F(s)$ назовем *гладкой*. Через m_F обозначим знакопеременную меру на Γ , являющуюся образом меры $f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ в пространстве $\partial D \times \partial D$ при обратном концевом отображении. Путем, указанным в §1, можно в принципе вычислить значения $m_F(A)$ для всех $A \in U$. Обозначим

$$F^*(s) = m_F([s]) = \int_{[s]} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Лемма 1. Пусть F — гладкая аддитивная функция на S . Выполнение равенства

$$F^*(s) = F(s) \quad \text{для всех } s \in S \tag{6.1}$$

необходимо и достаточно для существования знакопеременной меры m на Γ , значения которой на множествах из U совпадают со значениями valuation E_F .

Доказательство : Сперва предположим существование знакопеременной меры m на Γ , значения которой на U совпадают с E_F . Тогда согласно (4.4) имеем

$$m([s]) = 2F(s) \quad \text{для всех } s \in S. \quad (6.2)$$

Плотность образа m при конечном отображении можно вычислить как предел $\lim m([a_1] \cap [a_2]) (|a_1| |a_2|)^{-1}$, где a_1 и a_2 — дуги на ∂D , стягивающиеся к x_i , $i = 1, 2$, а $|a_i|$ — длина дуги a_i . Из Замечания 3 в конце §4 следует, что этот предел равен плотности $f(x_1, x_2)$, определенной выше. Мы заключаем, что $m = m_F$ и (6.1) следует из (6.2). Для доказательства достаточности теперь предположим, что выполнено (6.1). Тогда из Теоремы 1 следует, что значения E_F и m_F на множествах из U совпадают. Лемма 1 полностью доказана.

Подготовимся к доказательству Леммы 2. Пусть $\kappa = [a_1, a_2]$ — множество Крофтона, отвечающее двум дугам $a_1, a_2 \subset \partial D$. Каждой $\gamma \in \kappa$ придадим направление, соответствующее движению от a_1 к a_2 . Для фиксированной точки $P \in D$ положим

$$A_r = \{P \text{ лежит правее } \gamma\} \cap [a_1, a_2],$$

$$A_l = \{P \text{ лежит левее } \gamma\} \cap [a_1, a_2].$$

Отметим, что оба множества лежат в U . Предположим, что положительное направление на ∂D выбрано так, что при движении вдоль ∂D в положительном направлении внутренность D остается слева. Обозначим

$$G(P, x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)],$$

где $x_2 \in \partial D$ — точка "выхода" кривой $\gamma \in \Gamma$, проходящей от $x_1 \in \partial D$ к $P \in \text{int } D$. Мы также пользуемся индикаторными функциями $I_{a_2}(x_1)$ и $I_{a_1}(x_2)$: $I_{a_2}(x_1) = 1$ если кривая γ , проходящая от x_1 к P , покидает D через a_2 , 0 — в противном случае. $I_{a_1}(x_2)$ определяется двойственным образом.

Лемма 2. Пусть $F(s)$ – аддитивная функция на S . Имеет место следующее представление :

$$E_F(A_r) = \int_{A_r} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{a_1} I_{a_2}(x_1) G(P, x_1) dx_1, \quad (6.3)$$

$$E_F(A_l) = \int_{A_l} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{a_2} I_{a_1}(x_2) G(P, x_2) dx_2. \quad (6.4)$$

Доказательство : Разобьем дугу a_1 на $n+1$ дужек $a_1(i)$ равной длины точками $x_1(1) < \dots < x_1(n)$. Концы дуги a_1 обозначаем $x_1(0) < x_1(n+1)$. Точку выхода γ -кривой, проходящей от $x_1(i)$ к P , обозначим через $x_2(i)$. Дужки $x_2(i), x_2(i+1)$, лежащие на a_2 , обозначаем через $a_2(i)$. Сперва предположим, что $a_2 = \bigcup_{i=1}^n a_2(i)$.

Тогда множество Крофтона $\kappa_{ij} = [a_1(i), a_2(j)]$

- 1) либо целиком лежит в A_l ,
- 2) либо целиком лежит вне A_l ,
- 3) либо имеет непустое пересечение с A_l .

В случае 3) из нашей конструкции следует (см. Замечание 2 в §3)

$$\{P \text{ лежит левее } \gamma\} \cap \kappa_{ij} = \tau_i,$$

где τ_i – множество Паша

$$\tau_i = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ отделяет } P \text{ от } x_1(i+1) \text{ и } x_2(i)\}.$$

Следовательно A_l эквивалентно объединению попарно непересекающихся множеств :

$$A_l = \bigcup_{i) \kappa_{ij} \bigcup_i \tau_i.$$

В силу конечной аддитивности E_F ,

$$E_F(A_l) = \sum_{i) E_F(\kappa_{ij}) + \sum_i E_F(\tau_i). \quad (6.5)$$

Учитывая (4.6) и (4.5), запишем асимптотические соотношения (при $n \rightarrow \infty$) :

$$E_F(\kappa_{ij}) \approx f(x_1(i), x_2(j)) |a_1(i)| |a_2(j)|,$$

$$E_F(\pi_i) \approx G(P, x_i)|a_i|.$$

Их подстановка в (6.5) преобразует первую сумму в риманову сумму для первого интеграла в (6.3), а вторую сумму – в риманову сумму для второго интеграла в (6.3), причем $I_{a_1}(x_2) \equiv 1$. Наше предположение о гладкости обеспечивает сходимость обеих римановых сумм (при $n \rightarrow \infty$) к соответствующим интегралам в (6.3). Однако левая часть (6.5) не зависит от n . Этим доказано (6.4). Если концы дуги a_2 отличны от $x_2(0)$, $x_2(n+1)$, то сужается область интегрирования во втором интеграле. Это делается введением индикаторной функции $I_{a_1}(x_2)$. Равенство (6.3) доказывается аналогично, переменной ролей a_1 и a_2 . Доказательство закончено.

Определение 6. Аддитивная на S функция $F(s)$ называется *сильно аддитивной*, если

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)] = 0$$

для троек x_1, P, x_2 , лежащих на одной кривой $\gamma \in \Gamma$, $x_1, x_2 \in \partial D$, $P \in \text{int } D$.

Замечание 4. Аддитивность $F(s)$ влечет $F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2) = 0$ при x_1, P, x_2 , лежащих на одной кривой γ . Вообще говоря, мы не можем дифференцировать последнее равенство, так как для x_1 , смещенных вне γ , оно уже не выполняется. Следовательно, сильная аддитивность не следует из аддитивности F .

Теорема 5. В классе гладких аддитивных функций F , определенных на S , следующие два утверждения эквивалентны :

- а) F сильно аддитивна,
- б) E_F продолжимо до знакопеременной меры на Γ .

Доказательство : Покажем, что для любых двух точек $P_1, P_2 \in D$ вычисление $E_F([P_1, P_2])$ можно свести к суммированию формул Леммы 2. Выберем сперва множество Крофтона $\kappa = [b_1, b_2]$, внутренность которого содержит γ -кривую,

проходящую через P_1, P_2 . Пусть a_1, a_2 — две дуги, дополняющие b_1, b_2 на ∂D . Концами произвольной кривой из $[P_1, P_2]$ разобьем a_1 и a_2 на меньшие дуги $a_1^{(i)} \subset a_1, i = 1, 2$ и $a_2^{(j)} \subset a_2, j = 1, 2$. К каждому из множеств $[P_1, P_2] \cap [a_1^{(i)}, a_2^{(j)}]$ применима Лемма 2. Из свойства а) вытекает, что в обеих формулах Леммы 2 останутся лишь двойные интегралы. Ввиду конечной аддитивности E_F

$$E_F([P_1, P_2]) = E_F(\kappa \cap [P_1, P_2]) + \int_{[P_1, P_2] \setminus \kappa} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Стягивая дуги b_1, b_2 к точкам и используя (4.4), получаем

$$F(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Отсюда и из Леммы 1 следует, что а) влечет б).

Пусть теперь выполнено б). В силу (4.4) и Замечания 3, вторая смешанная производная $f(x_1, x_2)$ функции $F(x_1, x_2)$ будет плотностью меры. Следовательно, в обеих формулах Леммы 2 одномерные интегралы равны нулю. Так как в этих интегралах дуги a_1, a_2 можно взять сколь угодно малыми, то $G(P, x) = 0$, что и есть а). Теорема 5 доказана.

§7. ЛОКАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ В ТЕРМИНАХ СТАНДАРТНОЙ Г-МЕТРИКИ

Согласно Теореме 3, на D можно построить Г-метрику с помощью меры $f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, определенной на $\partial D \times \partial D$. Мету в пространстве Г, соответствующую плотности $f = 1$, обозначим через $d\gamma$. Г-метрику на D , которая соответствует мере $d\gamma$, обозначим через F_0 и назовем *стандартной*. На каждой кривой $\gamma \in \Gamma$, метрика F_0 определяет меру длины. Эту меру обозначаем просто dx , чтобы подчеркнуть ее происхождение от меры, первоначально определенной на ∂D .

Единичную окружность, лежащую на касательной плоскости к D , с центром в $P \in D$ обозначим через $T(P)$. Направление ϕ в точке $P \in D$ есть точка

$\phi \in T(P)$. Наличие стандартной метрики даст нам право рассматривать для функций, определенных на D , производные первого порядка по направлениям. Пусть имеем функцию $G(P)$, $P \in D$, которая может зависеть также и от других переменных. Ее производную в P по направлению $\phi \in T(P)$ определяем как

$$\frac{\partial G}{\partial_\phi P} = \lim_{P^* \rightarrow P} [G(P^*) - G(P)] [F_0(P^*, P)]^{-1}, \quad (7.1)$$

где P^* приближается к P в заданном направлении $\phi \in T(P)$.

Нам потребуются следующие понятия. *Флагом* называется пара $q = (P, \phi)$, где P – точка в D , и $\phi \in T(P)$. Будем пользоваться также эквивалентной записью $q = (P, \gamma)$, где $\gamma \in [P]$ – кривая, имеющая в P направление ϕ , а также $q = (x, \gamma)$, где x – одномерная координата точки P на кривой γ . Функции, определенные в пространстве флагов, мы называем *флаговыми*. Флаговые функции естественно возникают как производные *аддитивных* функций $F(s) = F(P_1, P_2)$, определенных на S . Пусть $\frac{\partial}{\partial_\phi P}$ обозначает производную по P в направлении $\phi \in T(P)$. Тогда

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_\gamma P_2} = \rho(P_2, \gamma),$$

если ϕ совпадает с направлением в P_2 кривой, проходящей через P_1, P_2 (результат не зависит от положения P_1 на кривой). Функция отрезков $F(s)$ называется *порожденной флаговой плотностью* $\rho(q) = \rho(P, \gamma)$, если для любого $s \in S$ имеет место

$$F(s) = \int_s \rho(x, \gamma) dx,$$

где $\gamma \in \Gamma$ – кривая, содержащая s , а интегрирование ведется относительно стандартной меры dx на s . Пусть задана функция отрезков $F(s)$, порожденная флаговой плотностью $\rho(q)$. Наша цель – вычислить производную

$$\frac{\partial}{\partial_n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)]$$

для P_1, P, P_2 , лежащих на одной кривой $\gamma \in \Gamma$, причем P лежит между P_1 и P_2 .

Через $n \in T(P)$ обозначаем *нормальное* направление к γ в точке P . Подчеркнем,

что речь идет о нормальном направлении в геометрии на D , задаваемой стандартной Γ -метрикой F_0 . Направление n совпадает с направлением в точке P элементарной дуги окружности радиуса $r_1 = F_0(P_1, P)$ с центром в P_1 , или же элементарной дуги окружности радиуса $r_2 = F_0(P, P_2)$ с центром в P_2 .

Пусть α, r – геодезические полярные координаты на D , привязанные к полюсу $Q \in D$: $\alpha \in T(Q)$ – направление γ -радиуса, соединяющего Q с точкой $P \in D$, чьи полярные координаты мы хотим определить, и $r = F_0(Q, P)$. В этой системе координат определим отображение

$$q(\alpha, r) : (\alpha, r) \mapsto q = (P, \phi),$$

где $P = (\alpha, r)$, а $\phi \in T(P)$ соответствует направлению γ -радиуса Q, P . Для заданной флаговой функции $\rho(q)$ положим

$$\lambda(Q; r, \alpha) = \rho(q(\alpha, r)),$$

где Q указывает на полюс. Вернемся к тройке $P_1, P, P_2 \in \gamma$. Через P^* обозначим точку, получающуюся из P сдвигом в нормальном направлении n . В дальнейшем $y = F_0(P, P^*)$ будет стремиться к нулю. Пусть α_i, r_i и α_i^*, r_i^* – полярные координаты точек P и P^* , соответственно, относительно полюса P_i , $i = 1, 2$. Из построения P^* имеем $r_i - r_i^* = o(y)$, $i = 1, 2$. Это позволяет записать

$$\begin{aligned} & F(P_1, P^*) + F(P^*, P_2) - F(P_1, P_2) = \\ &= \int_0^{r_1} [\lambda(P_1; x, \alpha_1^*) - \lambda(P_1; x, \alpha_1)] dx + \int_0^{r_2} [\lambda(P_2; x, \alpha_2^*) - \lambda(P_2; x, \alpha_2)] dx + o(y), \end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial_n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = \\ &= [H(P_1, P)]^{-1} \int_0^{r_1} \frac{\partial \lambda(P_1; x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} dx - [H(P_2, P)]^{-1} \int_0^{r_2} \frac{\partial \lambda(P_2; x, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} dx. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь $H(P_1, P)$ и $H(P_2, P)$ – абсолютные значения производных $\frac{dy}{d\alpha_1}$ и $\frac{dy}{d\alpha_2}$ в точке $y = 0$; а $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ – оператор дифференцирования на $T(P_1)$ в первом и на

$T(P_2)$ во втором слагаемых. В каждом случае необходимо иметь *положительное направление вращения*. В (7.2) положительное направление вращения на $T(P_1)$ задает короткий путь от α_1 к α_1^* . Положительное направление на $T(P_2)$ выбрано по непрерывности, поэтому между интегралами стоит минус.

В нижеследующей теореме используются понятия гладкости и сильной аддитивности, введенные в предыдущем параграфе.

Теорема 6. *Гладкая аддитивная функция $F(s) = F(P_1, P_2)$, определенная на S , сильно аддитивна тогда и только тогда, когда для каждой тройки точек P_1, P, P_2 , лежащих на одной γ -кривой (причем $P \in \text{int } D$ находится между P_1 и P_2), для хотя бы одного направления $\phi \in T(P)$, отличного от направления кривой γ в точке P ,*

$$\frac{\partial}{\partial_\phi P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = 0.$$

В этом случае последнее равенство тождественно выполняется для всех $\phi \in T(P)$.

Доказательство : Необходимость. Пусть F сильно аддитивна, и пусть m — мера на Γ , соответствующая F согласно Теореме 5. Из гладкости F следует, что m имеет ограниченную плотность f относительно $d\gamma$. Для $G(P) = F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)$ рассмотрим предел (7.1), полагая, что P есть предельное положение точки P^* на γ -кривой, проходящей через P_1, P_2 , и P лежит между P_1 и P_2 . Отношение (7.1) можно записать в виде $m(\tau)[F_0(P^*, P)]^{-1}$, где τ — треугольник Паша, соответствующий отделению P^* от P_1, P_2 . Имеем интегральное представление

$$m(\tau) = \int_s dx \int_{[x] \cap \tau} f(\gamma) d_x \psi,$$

где $s = (P^*, P)$, $[x]$ — пучок γ -кривых, проходящих через $x \in s$, d_x — мера на s , индуцированная функцией F . Заметим, что кривая $\gamma \in [s]$ определяется

двумя одномерными "координатами" x и ψ : x есть точка пересечения γ с s , а ψ — угол между направлением γ в x и направлением отрезка s в x . Через $d_x\psi$ обозначена *условная* мера в пространстве направлений при заданном $x \in s$; эта условная мера определяется соотношением $d\gamma = dx d_x\psi$. В предыдущем равенстве внутренний интеграл стремится к нулю ввиду равномерной по x малости области интегрирования. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в $T(P)$ существует направление ϕ , для которого верно равенство теоремы. Другим направлением в $T(P)$, для которого это верно всегда является направление γ в P . Этого достаточно для вывода, что равенство верно для любого $\phi \in T(P)$, включая и нормальное к γ направление $n \in T(P)$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = 0.$$

Применяя вычисления наподобие тех, что привели к (7.2), можно легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)]$$

совпадает с правой частью (7.2), записанной для $P_1 = x_1, P_2 = x_2 \in \partial D$. Следовательно, последнее выражение обращается в ноль. Доказательство завершено.

Теорема 6 вместе с представлением (7.2) дает следующее *необходимое и достаточное локальное условие сильной аддитивности*. Приравняем (7.2) нулю.

Так как в (7.2) переменные P_1 и P_2 разделяются, то получаем, что

$$[H(P_1, P)]^{-1} \int_0^{r_1} \frac{\partial \lambda(P_1; x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} dx = \Lambda(P, \gamma) \quad (7.3)$$

не зависит от положения P_1 на γ . Для нахождения значения $\Lambda(P, \gamma)$, устремим в последнем равенстве r_1 к 0, зафиксировав P_1 и γ . Запишем разложение Тейлора

$$H(P_1, P) = H(P_1, \gamma, r_1) = C_1 r_1 + \frac{C_2}{2} r_1^2 + o(r_1^2), \quad (7.4)$$

где коэффициенты C_1, C_2 зависят только от кривой γ и $P_1 \in \gamma$. Так как $\lim_{r_1 \rightarrow 0} \Lambda(P, \gamma) = \Lambda(P_1, \alpha_1)$, то по теореме о среднем значении получаем

$$\Lambda(Q, \alpha) = (C_1)^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \lambda(Q; x, \alpha)}{\partial \alpha}. \quad (7.5)$$

Умножим теперь обе части (7.3) на $H(P_1, \gamma, r_1)$ и результат продифференцируем дважды по r_1 , фиксируя P_1 и γ . Переход к пределу при $r_1 \rightarrow 0$ после первого дифференцирования дает $0 = 0$. Такая же операция после второго дифференцирования дает искомое локальное условие :

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; 0, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = C_2 \Lambda(Q, \alpha) + 2C_1 \frac{\partial \Lambda(Q, \alpha)}{\partial_\alpha Q}, \quad (7.6)$$

где как обычно

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; 0, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha}.$$

§8. КЛАССИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ

Сначала проверим, что равенство (7.6) приводит к известному результату [7] в случае, когда D – диск на евклидовой плоскости, Γ – евклидовые прямые, стандартная метрика F_0 – евклидовое расстояние. В этом случае $H(P_1, P)$ равно евклидовому расстоянию между P_1 и P , следовательно в (7.4) $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Для всякого $P \in D$ направление $\alpha \in T(P)$ определяется углом с нулевым направлением. Задав флаговую плотность $\rho(P, \alpha)$, легко находим

$$\frac{\partial \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} r + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad (8.1)$$

где $\frac{\partial}{\partial_n P}$ означает дифференцирование по P в направлении, нормальном к направлению α . Это значит, что

$$\Lambda(Q, \alpha) = \frac{\partial \rho(Q, \alpha)}{\partial \alpha},$$

и следовательно, правая часть (7.6) равна $2 \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial_\alpha P \partial \alpha}$. Дифференцируя (8.1) по r , находим

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial_\alpha P \partial \alpha} + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} + r \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial r \partial_\alpha P},$$

и (7.6) приводится к известному уравнению [7] :

$$\frac{\partial \rho(Q, \alpha)}{\partial_n Q} = \frac{\partial^2 \rho(Q, \alpha)}{\partial_\alpha Q \partial \alpha}. \quad (8.2)$$

Рассмотрим (7.6) для другого "классического" случая: D – круговая область на единичной полусфере, Γ – большие полуокружности, стандартная метрика F_0 – обычное геодезическое расстояние на D . Заметим, что в (7.4) $H(P_1, P) = \sin r_1$, так что $C_1 \equiv 1$, $C_2 \equiv 0$. На D рассмотрим полярные координаты с полюсом в центре O круга D : R – геодезическое расстояние от P до O и β – угол поворота вокруг O . Угол $\phi \in T(P)$ измеряется от меридиана в P . Имеем

$$\lambda(Q; r, \alpha) = \rho(P, \phi) = \rho(R, \beta, \phi)$$

и стандартные соотношения сферической тригонометрии

$$\begin{aligned} \cos R &= \cos \alpha \sin r \sin R_1 + \cos r \cos R_1, \\ \cot \beta &= \frac{\sin R_1 \cot r - \cos R_1 \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \cot \phi = -\frac{\sin r \cot R_1 - \cos r \cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где R_1 и $\beta = 0$ – полярные координаты точки $Q \in D$. Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}. \quad (8.4)$$

Из (8.3) легко находим

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right|_{r=0} = 1, \quad (8.5)$$

откуда следует (см. (7.5))

$$\Lambda(Q, \alpha) = \frac{\partial \rho(Q, \alpha)}{\partial \alpha}. \quad (8.6)$$

В следующем равенстве члены, пропорциональные $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$, пишем как $o(1)$ и $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 1 + o(1)$ (см. (8.5), при r стремящемся к нулю). В результате дифференцирования (8.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} &= \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial r \partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \alpha} + \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial R \partial \phi} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta \partial \phi} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + o(1). \end{aligned}$$

Из (8.3) легко находим

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \alpha} \right|_{r=0} = \sin \alpha, \quad \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial r \partial \alpha} \right|_{r=0} = \frac{\cos \alpha}{\sin R_1}, \quad \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \alpha} \right|_{r=0} = -2 \cos \alpha \cot R_1,$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r=0} = -\cos \alpha, \quad \left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{\sin \alpha}{\sin R_1}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=0} = \sin \alpha \cot R_1.$$

Операторы

$$-\frac{\partial}{\partial R} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\sin \alpha}{\sin R_1} = \frac{\partial}{\partial_\alpha P}, \quad \frac{\partial}{\partial R} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\cos \alpha}{\sin R_1} = \frac{\partial}{\partial_n P}$$

можно интерпретировать, как производные по направлению α и по направлению, нормальному к α , соответственно. Отсюда для $\rho = \rho(Q, \alpha)$ заключаем, что

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; 0, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial_n Q} + \frac{\partial}{\partial_\alpha Q} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) - 2 \cos \alpha \cot R_1 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \sin \alpha \cot R_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2}.$$

Вместе с (8.6) это приводит к искомой "сферической" форме соотношения (7.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n Q} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\alpha Q \partial \alpha} + a, \quad (8.7)$$

где "поправочный член" (ср. (8.2)) имеет вид

$$a = 2 \cos \alpha \cot R_1 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \sin \alpha \cot R_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2}.$$

Третий классический случай: D – единичный диск на гиперболической плоскости, Γ – гиперболические линии, стандартная метрика – обычная метрика гиперболической плоскости. Вычисления проводятся как в предыдущем случае, но основываются на формулах гиперболической тригонометрии. В результате (7.6) получает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\alpha P \partial \alpha} + b, \quad (8.8)$$

причем операторы $\frac{\partial}{\partial_n P}$ и $\frac{\partial}{\partial_\alpha P}$ имеют тот же смысл, что и прежде. Поправочный член имеет вид

$$b = 2 \cos \alpha \coth R_1 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \sin \alpha \coth R_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2},$$

где $\coth$ – гиперболический котангенс.

Все три классических случая (8.2), (8.7) и (8.8) сильно упрощаются, если предположить, что флаговая плотность $\rho(P, \phi)$ не зависит от аргумента ϕ (случай круговой индикатрисы). Тогда в каждом из случаев

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = 0. \quad (8.9)$$

Так как $\mathbf{n}$ – нормальное направление к произвольному $\alpha \in T(P)$, мы заключаем, что необходимо $\rho = \text{const}$. Равенство (8.9) верно и для общих D , Γ и любой стандартной Γ -метрики F_0 , если только флаговая плотность ρ не зависит от ϕ (случай F_0 -круговой индикатрисы). Доказательство как в евклидовом случае с заменой g на функцию H , см. (7.4).

Итак, мы пришли к следующему выводу. Среди флаговых плотностей с F_0 -круговыми индикатрисами метриками соответствуют только константы. Более подробные сведения о равенстве (8.2) можно найти в [9].

§9. КРИВЫЕ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И КРУГОВЫЕ ИНДИКАТРИСЫ

В трех случаях предыдущего параграфа использовалась естественная "готовая" Γ -метрика. Если готовая Γ -метрика отсутствует, то в принципе можно воспользоваться равенствами §7, построив Γ -метрику на D по Теореме 3. Однако возникает вопрос : что можно получить, основываясь на метрике в D , для которой кривые γ не являлись бы геодезическими ? Настоящий параграф содержит попытку в данном направлении. Сделаем следующие упрощающие предположения : область D , где задано семейство Γ , принадлежит евклидовой плоскости, флаговая плотность $\rho = \rho(P)$ зависит лишь от точки $P \in D$ и не зависит от угловой переменной. Точки на γ -отрезке $s \in S$ обозначаем через t , через dt обозначаем евклидову длину вдоль s . На S рассмотрим аддитивную функцию

$$F(s) = \int_s \rho(t) dt. \quad (9.1)$$

Задача : когда $F(s)$ оказывается Γ -метрикой на $D \subset \mathbb{R}^2$?

Обозначим через $|Q_1, Q_2|$ евклидово расстояние между точками Q_1, Q_2 . На D рассмотрим "прегеодезические полярные координаты" относительно полюса P : для точки $Q \in D$ запись $Q = (\gamma, t)$ означает, что γ -отрезок $s = P, Q$ лежит на $\gamma \in [P]$, и евклидова длина γ -отрезка s равна t . При этом необходимо

рассматривать направленные кривые γ . Пусть P_1, P, P_2 – тройка точек на γ , P между P_1 и P_2 , и пусть γ_i, t_i – прегеодезические полярные координаты на D относительно полюса P_i , $i = 1, 2$. В системе с полюсом в P_i , $i = 1, 2$ пишем $P = (\gamma_i, r_i)$, $r_i > 0$. Очевидно, γ_1 и γ_2 – два противоположно направленных варианта кривой γ , содержащей P_1, P, P_2 .

Через P^* обозначим точку в D , получаемую из P сдвигом на $z = |P, P^*|$ в направлении от P к центру евклидова круга, соприкасающегося с γ в P . Это направление обозначим через $n = n(\gamma, P)$. В системе с полюсом в P_i , $i = 1, 2$ пишем $P^* = (\gamma_i^*, r_i^*)$. Существенная особенность состоит в том, что теперь

$$r_i - r_i^* = O(z), \quad z \rightarrow 0, \quad (9.2)$$

а не $o(z)$, как это было в §7. Следовательно

$$F(P_1, P^*) + F(P^*, P_2) - F(P_1, P_2) = \\ = \int_0^{r_1^*} [\rho(\gamma_1^*, t_1) - \rho(\gamma_1, t_1)] dt_1 + \int_0^{r_2^*} [\rho(\gamma_2^*, t_2) - \rho(\gamma_2, t_2)] dt_2 + O_1(z) + O_2(z), \quad (9.3)$$

где слагаемое $O_1(z)$ равно $\int_{r_1^*}^{r_1} \rho(\gamma_1^*, t) dt$, если $r_1^* > r_1$ и $-\int_{r_1}^{r_1^*} \rho(\gamma_1, t) dt$, если $r_1^* < r_1$. При $z \rightarrow 0$ имеем $O_1(z) = (r_1^* - r_1)\rho(P) + o(r_1^* - r_1)$. Слагаемое $O_2(z)$ имеет аналогичный смысл.

Пусть α_i – угол между направлениями γ_i и γ_i^* . Рассмотрим функции

$$H_1(r_i, t_i) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \alpha_i^{-1} |(\gamma_i, t_i), (\gamma_i^*, t_i)|,$$

$$H_2(r_i) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \alpha_i^{-1} (r_i^* - r_i), \quad H_3(r_i) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \alpha_i^{-1} z.$$

Эти обозначения состоятельны, так как ниже точка P и кривая $\gamma \in [P]$ остаются фиксированными, и переменные r_i адекватно заменяют P_i . Умножая обе стороны (9.3) на z^{-1} и вычисляя предел при $z \rightarrow 0$, запишем условие сильной аддитивности

$$\frac{\partial}{\partial_n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = [H_3(r_1)]^{-1} \int_0^{r_1} \frac{\partial \rho(\gamma_1, t_1)}{\partial u} H_1(r_1, t_1) dt_1 +$$

$$+ [H_3(r_2)]^{-1} \int_0^{r_2} \frac{\partial \rho(\gamma_2, t_2)}{\partial u} H_1(r_2, t_2) dt_2 + \rho(P) H_2(r_1) [H_3(r_1)]^{-1} + \\ + \rho(P) H_2(r_2) [H_3(r_2)]^{-1} = 0. \quad (9.4)$$

В верхнем равенстве $u = u(r_i, t_i)$ — предельное (при $z \rightarrow 0$) направление из точки (γ_i, t) к точке (γ_i^*, t) , а $\frac{\partial}{\partial u}$ — оператор дифференцирования в этом направлении (вообще говоря $n \neq u$). Так как переменные r_1 и r_2 в (9.4) разделяются, значение

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial \rho(\gamma_i, t_i)}{\partial u} H_1(r_i, t_i) [H_3(r_i)]^{-1} dt_i + \rho(P) H_2(r_i) [H_3(r_i)]^{-1} \quad (9.5)$$

не зависит от r_i . При стремлении r_i к 0, $i = 1, 2$ имеем $H_1(0, 0) = 0$ и $H_3(r_i) = O(r_i)$. Следовательно, значение (9.5) равно $\rho(P) C_i$, где

$$C_i = \lim_{r_i \rightarrow 0} H_2(r_i) [H_3(r_i)]^{-1}. \quad (9.6)$$

Из этого следует

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial \rho(\gamma_i, t_i)}{\partial u} H_1(r_i, t_i) dt_i + \rho(P) H_2(r_i) = \rho(P) C_i H_3(r_i). \quad (9.7)$$

В последнем интеграле произведем замену переменных, приняв $l_i = r_i - t_i$. Заметим, что l_i соответствует выбору точки P за начало координат на γ и положительного направления от P к P_i . Записав l_i для точки $(\gamma_i, t_i) \in \gamma$, получим

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial \rho(l_i)}{\partial u} H_1(r_i, r_i - l_i) dl_i + \rho(P) H_2(r_i) = \rho(P) C_i H_3(r_i).$$

Дифференцируем это равенство дважды по r_i . Так как $H_1(r_i, 0) \equiv 0$, первое дифференцирование дает

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} \left[\frac{\partial \rho(l_i)}{\partial u} H_1(r_i, r_i - l_i) \right] dl_i + \rho(P) \frac{d}{dr_i} H_2(r_i) = \rho(P) C_i \frac{d}{dr_i} H_3(r_i). \quad (9.8)$$

Подставляя $r_i = 0$, получаем

$$\frac{d}{dr_i} H_2(0) = C_i \frac{d}{dr_i} H_3(0), \quad (9.9)$$

т.е. не получаем условия на ρ (само равенство будет проверено в следующем параграфе). После второго дифференцирования, подставляя $r_i = 0$, получаем

$$\frac{\partial \rho(P)}{\partial u_0} \frac{d}{dr_i} H_1(0, 0) + \rho(P) \frac{d^2}{dr_i^2} H_2(0) = \rho(P) C_i \frac{d^2}{dr_i^2} H_3(0), \quad (9.10)$$

где u_0 — предел направлений $u = u(r_i, t_i)$ при $r_i \rightarrow 0$. Равенство (9.10) мы легко проинтегрируем и получим значение $\rho(P)$. Но сначала надо найти направление u_0 , а также коэффициенты $\frac{d}{dr_i} H_1(0, 0)$, $\frac{d^2}{dr_i^2} H_2(0)$, $C_i \frac{d^2}{dr_i^2} H_3(0)$ (они являются функциями от P и $\gamma \in [P]$). Все это сделано в следующем параграфе.

§10. ПРИБЛИЖЕНИЕ КРУГОВЫМИ ДУГАМИ

Этот параграф посвящен вычислению коэффициентов, а также направления u_0 в (9.10). Для этого мы используем локальное приближение кривых γ круговыми дугами. Если мы предположим, что кривые из Γ суть круговые дуги в области D евклидовой плоскости, то функции $H_1(r_i, t_i)$, $H_2(r_i)$, $H_3(r_i)$ допускают точное выражение через элементарные функции. Покажем это.

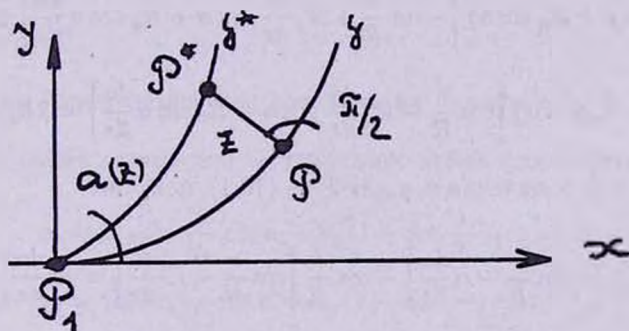


Рис. 5

Рассмотрим точки $P_1, P, P_2 \in \gamma$ и P^* , определенные в §9, полагая, что γ — дуга окружности. Выберем P_1 в качестве начала декартовой системы координат, а в качестве x -оси возьмем прямую, касающуюся γ в P_1 , причем положительное направление берем так, чтобы абсцисса точки P оказалась бы положительной. Берем y -ось направленной к центру дуги γ (см. Рис. 5). В этой системе координат

(x, y)

$$P = \left(R \sin \frac{r}{R}, R(1 - \cos \frac{r}{R}) \right),$$

$$P^* = \left((R - z) \sin \frac{r}{R}, R(1 - \cos \frac{r}{R}) + z \cos \frac{r}{R} \right), \quad (10.1)$$

где R — радиус дуги γ . Дуга γ при наших вычислениях остается фиксированной.

Для простоты мы пишем r вместо r_i . Через R_α обозначим радиус круговой дуги из $[P]$, чье направление в точке P составляет угол α с x -осью, так что $R = R_0$.

Пусть также $R'_\alpha = \frac{d}{d\alpha} R_\alpha$ и $R' = R'_0$.

Вычисление $H_3(r)$.

Для малых значений α уравнение окружности, проходящей через P_1, P^* , будет

$$(x + R_\alpha \sin \alpha)^2 + (y - R_\alpha \cos \alpha)^2 = R_\alpha^2.$$

После подстановки координат P^* из (10.1) это уравнение определяет $\alpha = \alpha(z)$

как функцию от z . Дифференцированием по z находим

$$2(x + R_\alpha \sin \alpha) \left[-\sin \frac{r}{R} + R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \sin \alpha + R_\alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dz} \right] +$$

$$+ 2(y - R_\alpha \cos \alpha) \left[\cos \frac{r}{R} - R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \cos \alpha + R_\alpha \sin \alpha \frac{d\alpha}{dz} \right] = 2R_\alpha R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz}.$$

Подставляя $\alpha = 0$ и значения x, y для P из (10.1), получим

$$\sin \frac{r}{R} \left[-\sin \frac{r}{R} + R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \right] - \cos \frac{r}{R} \left[\cos \frac{r}{R} - R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \right] = R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \Big|_{\alpha=0},$$

что эквивалентно

$$\left[R \sin \frac{r}{R} + R' \cos \frac{r}{R} - R' \right] \frac{d\alpha}{dz} \Big|_{\alpha=0} = 1.$$

Так как $H_3(r) = \frac{dz}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$, то

$$H_3(r) = R \sin \frac{r}{R} + R' (\cos \frac{r}{R} - 1). \quad (10.2)$$

Вычисление $H_2(r)$.

Пусть $\chi(z)$ – евклидово расстояние от P^* до начала координат. Ясно, что

$$r^* = 2R_\alpha \arcsin \frac{\chi(z)}{2R_\alpha}.$$

Следовательно

$$\frac{dr^*}{d\alpha} = R'_\alpha \frac{r^*}{R_\alpha} + \frac{2R_\alpha}{\sqrt{4R_\alpha^2 - \chi^2(z)}} \left[\chi'(z) \frac{dz}{d\alpha} - \frac{\chi(z) R'_\alpha}{R_\alpha} \right],$$

где $\chi'(z) = \frac{d}{dz} \chi(z)$. Из $H_2(r) = \frac{dr^*}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$, заключаем, что

$$H_2(r) = R' \frac{r}{R} + \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \chi^2(0)}} \left[\chi'(0) H_3(r) - \frac{\chi(0) R'}{R} \right] \quad (10.3)$$

(мы использовали соотношение $H_3(r) = \frac{dz}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$). Координаты точки P^* даны в (10.1). Легко находим

$$\chi(0) = R \sqrt{\sin^2 \frac{r}{R} + (1 - \cos \frac{r}{R})^2} = r + O(r^3),$$

$$\chi'(0) = \frac{R}{\chi(0)} (\cos \frac{r}{R} - 1) = -\frac{r}{2R} + O(r^3).$$

Вычисление $H_1(r, t)$.

Точка, имеющая в "прегеодезических координатах" с полюсом в P_1 координаты (γ^*, t) (см. §9), в нашей декартовой системе будет иметь координаты

$$\begin{aligned} x_\alpha &= R_\alpha \sin \frac{t}{R_\alpha} \cos \alpha - R_\alpha (1 - \cos \frac{t}{R_\alpha}) \sin \alpha, \\ y_\alpha &= R_\alpha \sin \frac{t}{R_\alpha} \sin \alpha + R_\alpha (1 - \cos \frac{t}{R_\alpha}) \cos \alpha \end{aligned}$$

(берем точку P , определенную в (10.1) с $R = R_\alpha$, и поворачиваем вокруг $O = P_1$ на угол α). Ясно, что

$$H_1(r, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \sqrt{(x_\alpha - x_0)^2 + (y_\alpha - y_0)^2} = \sqrt{(x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2} = \sqrt{(x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2},$$

где x'_α, y'_α – производные по α . Отсюда

$$H_1^2(r, t) = \left[R' \sin \frac{t}{R} - t R' R^{-1} \cos \frac{t}{R} - R (1 - \cos \frac{t}{R}) \right]^2 +$$

$$+ \left[R \sin \frac{t}{R} - t R' R^{-1} \sin \frac{t}{R} + R' (1 - \cos \frac{t}{R}) \right]^2. \quad (10.4)$$

Вычисление направления u .

Выражения в квадратных скобках в (10.4) представляют собой значения x'_α и y'_α для $t > 0$. Для соответствующего направления u имеем

$$\tan u = \frac{y'_0}{x'_0} = \frac{t + o(t)}{o(t)}. \quad (10.5)$$

Теперь снимем условие, что кривые γ — круговые дуги, и вернемся к общим γ . Можно ожидать, что при разумных предположениях о гладкости относительно семейства Γ , имеет место следующий *асимптотический аналог* при $r \rightarrow 0$ формул (10.2) — (10.5):

$$H_3(r) = r + O(r^2), \quad (10.2a)$$

$$H_2(r) = -R^{-1} \frac{r^2}{2} + O(r^3), \quad (10.3a)$$

$$H_1(r, r) = r + o(r), \quad (10.4a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tan u = \infty. \quad (10.5a)$$

Отложив изучение условий гладкости на Γ , из которых эти асимптотические соотношения могли бы следовать, дадим следующее определение. Для заданного семейства Γ прегеодезических внутри плоской области D рассмотрим *функцию кривизны* $k(P, \gamma) \geq 0$, определяемую как кривизну в точке P кривой $\gamma \in [P]$.

Определение 7. Семейство Γ назовем *регулярным*, если для любых P и $\gamma \in [P]$ имеют место асимптотические соотношения (10.2a) — (10.5a), при условии, что в (10.3a) $R^{-1} = k(P, \gamma)$.

Асимптотические соотношения (10.2a) — (10.5a) приводят к следующим значениям коэффициентов в равенстве (9.10):

$$\frac{d}{dr_i} H_1(0, 0) = 1, \quad \frac{d^2}{dr_i^2} H_2(0) = -k(P, \gamma), \quad C_i = 0.$$

Также заметим, что предел (при $r \rightarrow 0$) направления и есть направление $n = n(\gamma, P)$ от P к центру окружности, соприкасающейся с γ в P . Мы пришли к следующему утверждению.

Для регулярных семейств Γ прегеодезических кривых в области D , лежащей на евклидовой плоскости, равенство (9.10) имеет вид

$$\frac{\partial \rho(P)}{\partial n} = k(P, \gamma) \rho(P). \quad (10.6)$$

§11. УСЛОВИЕ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ ПУТИ

В этом параграфе рассмотрим следствия равенства (10.6) для регулярных семейств прегеодезических в области D на евклидовой плоскости. Через $K(P, \alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ обозначим *знакопеременную версию* функции кривизны $k(P, \gamma)$: полагаем $K(P, \alpha) = k(P, \gamma)$, если $\gamma \in [P]$ и $\alpha \in [P]$ взаимно перпендикулярны, причем α направлено от P к центру окружности, соприкасающейся с γ в P , и $K(P, \alpha) = -k(P, \gamma)$ в противном случае.

Выберем кусочно-дифференцируемый путь Θ , соединяющий две точки $Q_1, Q_2 \in D$. Направление вдоль Θ от Q_1 к Q_2 назовем *положительным*. Через l обозначим одномерную координату на Θ , а через dl — элемент длины на Θ . Дифференцирование в точке $l \in \Theta$ в положительном направлении обозначаем через $\frac{\partial}{\partial l}$. Пусть $K(l)$ — сужение $K(P, \alpha)$ на кривую Θ : l определяет положение точки $P \in \Theta$, а α — положительное направление кривой Θ в l . Запишем (10.6) для $l \in \Theta$ в виде

$$(\rho(l))^{-1} \frac{d\rho(l)}{dl} = K(l). \quad (11.1)$$

Интегрирование (11.1) от Q_1 до Q_2 дает

$$\rho(Q_2) = \rho(Q_1) \exp \left(\int_{\Theta} K(l) dl \right). \quad (11.2)$$

Будучи эквивалентным (9.10), этот результат влечет следующее *внутреннее описание* прегеодезических семейств, допускающих интерпретацию как геодезических для поточечно изотропных метрик.

Теорема 7. Для всякого регулярного семейства Γ прегеодезических кривых в области D на евклидовой плоскости, следующие три утверждения эквивалентны :

1) кривые из Γ являются геодезическими для некоторой метрики, обладающей круговой индикатрисой в каждой точке $P \in D$;

2) интеграл $\int_{\Theta} K(l)dl$ не зависит от выбора пути Θ , коль скоро концы Θ фиксированы, т.е. $\int_{\Theta} K(l)dl = 0$, если путь интегрирования Θ замкнут;

3) существуют две функции, определенные на D : функция амплитуды $A(P)$ со значениями в $(0, \infty)$ и функция фазы $\Phi(P)$ со значениями в $(0, 2\pi)$, через которые функция кривизны $K(P, \alpha)$ выражается в виде

$$K(P, \alpha) = A(P) \cos(\alpha - \Phi(P)). \quad (11.3)$$

Функции $A(P)$, $\Phi(P)$ удовлетворяют следующему уравнению с производными по направлениям :

$$\frac{\partial A(P)}{\partial_n P} + A(P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial_\Phi P} = 0, \quad (11.4)$$

где направление $n = n(P)$ — одно из двух направлений, нормальных к $\Phi(P)$.

Доказательство : Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует прямо из (11.2). Импликация же 2) $\Rightarrow$ 3) следует из результатов Г. С. Сукиасяна [10]. В [10] даны необходимые и достаточные условия продолжения конечно-аддитивных функционалов, определенных на выпуклых многоугольниках на плоскости, до знакопеременных мер. Достаточно применить этот результат к функционалу $\int_{\Theta} K(l)dl$ для выпуклых многоугольных путей Θ . Равенство (11.3) означает возможность продолжения до знакопеременной меры, тогда как (11.4) означает, что знакопеременная мера имеет плотность, тождественно равную нулю. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) следует в два шага. Если выполнено 3), то согласно [10], равенство (11.2) состоятельным образом задает $\rho(P)$. Поэтому $\rho(P)$ удовлетворит (10.6), а значит и (9.10). Отсюда следует 1). Доказательство завершено.

Равенства (11.3) и (11.4) можно легко проверить для двух классических примеров семейств Γ : полуокружности в модели Пуанкаре гиперболической плоскости и круговые дуги в модели Кейли-Клейна той же плоскости. В первом случае D – верхняя полуплоскость, во втором D – единичный диск. В обоих случаях известно, что гиперболическая метрика поточечно круговая.

Следствие. Для всякого регулярного семейства Γ прегеодезических кривых в области D , лежащей на евклидовой плоскости, функции кривизны которых $K(P, \alpha)$ удовлетворяют эквивалентным свойствам 2), 3), существует ровно одна (с точностью до постоянного множителя) гладкая Γ -метрика с круговой индикатрисой. Для последней $\rho(P)$ задается согласно (11.2), где $\rho(Q_1)$ играет роль постоянного множителя. Значение $\rho(Q_2)$, полученное таким способом, не зависит от выбора пути Θ , соединяющего Q_1 с Q_2 .

ABSTRACT. A family of curves Γ on a two-dimensional manifold is called pregeodesic if the combinatorial behavior of the curves copies the well-known local behavior of the geodesics on a surface. In the paper a class of combinatorial valuations on Γ is defined. A valuation depends on a function $F(s)$ that maps pregeodesic segments into $(-\infty, \infty)$. The main question is: for which functions $F(s)$ these valuations can be extended to signed measures on Γ ? In case the extension exists and is a nonnegative measure, the function $F(s)$ becomes a metric for which Γ is the family of geodesics. This observation connects the topic with Hilbert's fourth problem posed for the family Γ . Nonnegativity of the extension (if the latter exists) can be guaranteed by the requirement that the directional indicatrix of $F(s)$ is convex at each point of the manifold. In the paper a differential equation is derived yielding a necessary and sufficient condition for signed measure generation. The case of circular directional indicatrix (pointwise isotropic $F(s)$) is studied in some detail. Along with several uniqueness results, description of pregeodesic families in Euclidean planar domains which admit geodesic interpretation with respect to a pointwise isotropic metric is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов, Четвертая проблема Гильберта, Наука, М., 1974.
2. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
3. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
4. Р. В. Амбарцумян, "Заметки о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, Математика, том. 27, №5, стр. 1– 21, 1992.

5. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, J.Wiley & Sons, 1982.
6. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, 1990.
7. R. V. Ambartzumian, "Measure Generation by Euler functionals," Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
8. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Изв. АН Армении, Математика, том. 29, №4, стр. 3 — 51, 1994.
9. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", Israel Journal of Mathematics, vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
10. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", Изв. АН Армении, Математика, том. 29, №4, стр. 75 — 88, 1994.

7 июля 1996

Институт математики
НАН Армении
E-mail : rhambart@anra.am

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ, II

В. К. Оганян, А. Н. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 31, №4, 1996

Данная работа является продолжением исследования, начатого Р. В. Амбарцумяном и В. К. Оганяном в первой статье под тем же названием (настоящий журнал, том 29, №4, стр. 3 – 51, 1994). В статье I был определен класс конечно-аддитивных функционалов (валюаций) в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Задача состояла в нахождении локальных условий, при которых эти валюации определяют (порождают) знакопеременные меры в $\mathbb{E}$. Было замечено, что задача распадается на две части : анализ первого и второго порядков. Предыдущая статья содержит только анализ первого порядка : были найдены необходимые локальные условия в терминах “флаговых плотностей” от которых зависят валюации. Однако, полное решение требует также и анализа второго порядка. Настоящая статья заполняет этот пробел и дает необходимые и достаточные локальные условия порождения мер.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из находок комбинаторной интегральной геометрии [1], [2] есть класс конечно-аддитивных функционалов (валюаций), определенных на кольце U в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$ (кольцо U определяется ниже). На первом этапе использование этих валюаций было ограничено представлением мер на множествах из U : это часто приводило к существенному упрощению вычисления геометрических вероятностей. Как часть широкого исследования понять вопросы продолжения мер в контексте комбинаторной интегральной геометрии (см. [4] — [8] и две другие статьи этого тома), Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян начали в [3] изучение валюаций на U как инструмент порождения знакопеременных мер в пространстве $\mathbb{E}$. Так как рассматриваемые валюации зависели от флаговых

плотностей, то основным вопросом был : какие флаговые плотности порождают знакопеременные меры в пространстве $\mathbb{E}$? В [3] было отмечено, что задача распадается на две части : анализ первого и второго порядков. Выполненный в [3] анализ первого порядка привел к некоторым необходимым локальным условиям в терминах флаговых плотностей. Настоящая статья представляет анализ второго порядка, который отсутствовал в первой статье. Вместе с этим проблема получает полное решение, т.е. получены необходимые и достаточные локальные условия порождения меры.

Ниже в этом введении мы даем необходимые определения и кратко напоминаем основные результаты статьи [3].

Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, содержащее не менее двух точек. Каждая плоскость, не содержащая точек P_i , производит разбиение множества $\{P_i\}$ на два подмножества. Две плоскости, не содержащие точек из P_i , мы называем эквивалентными, если они индуцируют одно и то же разбиение множества $\{P_i\}$. Множество эквивалентных плоскостей мы называем атомом, если его замыкание компактно.

Определение 1. Для заданного множества $\{P_i\}$, обозначим через $r\{P_i\}$ минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{E}$ содержащее все атомы.

Два множества $A \in r\{P_i\}$ и $B \in r\{Q_i\}$ называются эквивалентными, если их симметрическая разность $A \Delta B$ принадлежит объединению конечного числа пучков. По определению, пучок есть множество $[P]$ плоскостей проходящих через $P \in \mathbb{R}^3$. Определим кольцо подмножеств пространства $\mathbb{E}$

$$U = \bigcup r\{P_i\},$$

где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$, содержащим более одной точки.

Флаг f в $\mathbb{R}^3$ есть тройка (P, γ, e) , состоящая из точки $P \in \mathbb{R}^3$, прямой γ , проходящей через точку P и определяемой своим пространственным направлением Ω и плоскости e (плоскость флага f) через γ , определяемой углом поворота ϕ вокруг оси γ . Мы пишем

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

где $\mathcal{E}_2$ — проективная (или эллиптическая) плоскость, $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$ — окружность длины π , представляющая пространство плоских направлений ортогональных к γ . Пространство флагов в $\mathbb{R}^3$ обозначим через $\mathcal{F}$. Интерпретация флага как тройки замкнутых множеств в $\mathbb{R}^3$ индуцирует топологию в $\mathcal{F}$. Последняя определяется как след топологии, индуцированной стандартной топологией в пространстве троек замкнутых множеств в $\mathbb{R}^3$.

Подчеркнем, что пространство $\mathcal{F}$ есть произведение $\mathbb{R}^3 \times \nabla$, где ∇ есть пространство свободных флагов. Мы представляем флаг f как пару $f = (P, \Lambda)$, где $P \in \mathbb{R}^3$, $\Lambda = (\Omega, \phi)$ есть свободный флаг для f . Мы будем использовать представление свободных флагов в виде $\Lambda = (\omega, \varphi)$ в терминах параметров дуальных к Ω, ϕ :

ω — направленная нормаль к плоскости флага f , $\omega \in \mathcal{E}_2$;

φ — плоское направление в плоскости флага f , соответствующее Ω , $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$.

Согласно этому флаг $f \in \mathcal{F}$ можно представить как $f = (P, \omega, \varphi) = (P, e, g)$, где e — плоскость, содержащая P , нормальное направление которой есть ω и g — прямая в e , содержащая P и с направлением φ .

Рассмотрим семейство флагов зависящих от прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f: P \in \gamma, \Omega \text{ совпадает с направлением прямой } \gamma, \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)\}. \quad (1.1)$$

Простейшие множества из $\mathcal{F}_\gamma$ имеют форму произведения

$$\omega = \nu \times \lambda, \quad (1.2)$$

где $\nu \subset \gamma$ есть замкнутый интервал и $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ — замкнутая дуга (длины, не превосходящей π).

Множества (1.2) называются клиньями. Пусть $e(\gamma, \phi)$ есть плоскость, проходящая через прямую $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и повернутая на угол $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$.

Для заданной прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ и замкнутой дуги $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ положим

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

Это дает следующее эквивалентное определение клина : Клин есть пара $w = (\nu, V)$, где $\nu \subset \gamma$ — игла, а V соответствует некоторому $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$. Эта интерпретация клина как пары замкнутых множеств в $\mathbb{R}^3$ позволяет определить топологию в пространстве клиньев. Последняя определяется как след топологии индуцированной стандартной топологией в пространстве пар замкнутых множеств в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим непрерывные функции $F(w)$ определенные в пространстве клиньев. Функция $F(w)$ аддитивна, если из $w = w_1 \cup w_2$, $\text{int} w_1 \cap \text{int} w_2 = \emptyset$ следует $F(w) = F(w_1) + F(w_2)$.

Приведем пример непрерывной и аддитивной функции клина.

Знакопеременная мера m в $\mathbb{IE}$ называется беспучковой, если значение меры m на любом пучке $[P]$ равно нулю, т.е.

$$m([P]) = 0 \quad \text{для любой точки} \quad P \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть m — знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{IE}$. Для клина $w = (\nu, V)$ обозначим через $|V \cap e|$ угол (радианную меру множества направлений в e) плоской области $V \cap e$. Интеграл

$$F(w) = \int_{[\nu]} |V \cap e| m(de) \quad (1.4)$$

по множеству $[\nu]$ плоскостей, пересекающих ν , есть непрерывная аддитивная функция клина.

Следующая теорема была сформулирована в [1], [2] для неотрицательных мер. Настоящее обобщение на знакопеременные меры есть непосредственное следствие (см. также [8], [3]). Для заданного конечного множества точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ определим множество $W\{P_i\}$ клиньев, ассоциированных с $\{P_i\}$:

клин $w = (v, V)$ принадлежит $W\{P_i\}$ тогда и только тогда, когда концы отрезка v принадлежат $\{P_i\}$, каждая из двух плоскостей, ограничивающих V , содержит точки из $\{P_i\}$ и внутренность V не содержит точек из $\{P_i\}$.

Теорема 1. (Р. В. Амбарцумян) Пусть m — беспучковая знакопеременная мера в пространстве $\mathbb{E}$, $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ — произвольное конечное множество точек. Для любого $A \in \tau\{P_i\}$ величина $m(A)$ может быть представлена в виде

$$m(A) = \sum c_s(A) F(w_s), \quad (1.5)$$

где сумма распространена на множество $W\{P_i\}$ клиньев, ассоциированных с $\{P_i\}$, F есть функция клина (1.4), коэффициенты $c_s(A)$ — целые числа не зависящие от выбора меры m .

Комбинаторный алгоритм для вычисления целочисленных коэффициентов $c_s(A)$ в (1.5) можно найти в [1] и [3].

Рассмотрим пример, который будет использован ниже.

Пример 1. Пусть τ — ограниченный выпуклый многоугольник на плоскости $e \subset \mathbb{R}^3$ с вершинами $v_1, \dots, v_n$. Пусть Q — точка вне плоскости e . Пару (Q, τ) мы называем пирамидой с вершиной Q и с основанием τ . Обозначим через K выпуклую оболочку τ и Q . Мы хотим записать (1.5) для пирамидального множества

$$A = Q|v_1, \dots, v_n = Q|\tau = \{e \in \mathbb{E}: e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\}.$$

Рассмотрим клинья w_s , ассоциированные с $\{P_i\} = \{Q, v_1, \dots, v_n\}$. Ребро пирамиды K назовем боковым, если оно имеет тип Qv_i , и базовым, если оно имеет

тип $v_i v_j$. Клинь $w_s = (\text{ребро}, V)$ называется опорным, если $V \cap \text{int } K = \emptyset$, и покрывающим, если $\text{int } K \subset V$. Будем писать $w_s \in \text{sl}$, если w_s является опорным клином на боковом ребре, и $w_s \in \text{cb}$, если w_s — покрывающий клин на базовом ребре.

Используя алгоритм получаем

$$m(Q|v_1, \dots, v_n) = \sum_{\text{sl}} F(w_s) - \sum_{\text{cb}} F(w_s). \quad (1.6)$$

Разность в правой части (1.6) будем называть *пирамидальным эксцессом*.

Пусть $F(w)$ — непрерывная функция, заданная в пространстве клиньев. Каждому множеству $\{P_i\}$ и каждому кольцу $A \in \tau\{P_i\}$ сопоставим

$$\Psi(A) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A) F(w_s), \quad (1.7)$$

где $c_s(A)$ вычислены согласно комбинаторному алгоритму из [1], [3].

Следующее предложение доказано в [3] (Леммы 6 и 7 из [3]):

Если функция клина $F(w)$ непрерывна и аддитивна, то $\Psi(A)$, заданная по (1.7), определяет валюацию на кольце U .

Любая непрерывная функция $\rho(f)$, заданная в пространстве $\mathcal{F}$ флагов, порождает функцию клина $F(w)$ по формуле

$$F(w) = \int_w \rho(f) df. \quad (1.8)$$

Выше df — единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\mathcal{F}_\gamma$, инвариантная относительно евклидовых сдвигов и вращений вокруг γ : $df = dl d\phi$, где dl — элемент длины на γ , а $d\phi$ — элемент равномерной угловой меры.

Функцию $\rho(f): \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть флаговой функцией или флаговой плотностью, если ею по формулам (1.7), (1.8) порождается валюация Ψ . Из результатов [3] следует, что существуют флаговые плотности даже из класса гладкости $C^{(\infty)}$, которые не порождают знакопеременную меру по формулам (1.7), (1.8).

Определение 2. Последовательность пирамид (Q_s, τ_s) называется асимптотически плоской, если

1) все пирамиды имеют общее основание τ , т.е. $\tau_n \equiv \tau$;

2) все вершины Q_n лежат на прямой, проходящей через некоторую точку $Q_0 \in \text{int} \tau$, в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью, содержащей τ ;

3) расстояние $h_n = |Q_n Q_0|$ монотонно стремится к нулю.

Для заданной последовательности асимптотически плоских пирамид, рассмотрим последовательность пирамидальных множеств $\{Q_s | \tau\}$.

Теорема 2 (Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян (см. [3])). Пусть Ψ — валюация на U , порожденная флаговой плотностью $\rho \in C^{(3)}$ по формулам (1.7), (1.8).

Если для каждой последовательности асимптотически плоских пирамид (Q_s, τ_s) пирамидальные эксцессы (см. (1.6)) удовлетворяют условиям

$$\lim h_s^{-2} \Psi(Q_s | \tau) = 0, \quad (1.9)$$

то существует единственная локально-конечная знакопеременная мера $\mathbf{t}$ в $\mathbb{E}$, сужение которой на U есть Ψ (кратко : Ψ есть локально-конечная знакопеременная мера в $\mathbb{E}$).

Уравнения (1.9) можно интерпретировать в терминах разложения Тейлора для $\Psi(Q_s | \tau)$. Ниже будем использовать обозначение

$$\Psi(Q_s | \tau) = \Psi_1(h_s).$$

Используя непрерывность $F(w)$ из (1.6) получаем

$$\Psi_1(0) = 0. \quad (1.10)$$

Следовательно, условие (1.9) эквивалентно следующим условиям :

$$\frac{d\Psi_1(0)}{dh} = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2 \Psi_1(0)}{dh^2} = 0. \quad (1.12)$$

Изучение аналитических следствий уравнения (1.11) (т.е. анализ первого порядка) привело (см. [3]) к результату, который мы воспроизводим в теореме 3.

В Теореме 3 и всюду ниже $\frac{\partial}{\partial_x P}$ будет обозначать дифференцирование по аргументу P в направлении оси x . (φ, x) есть угол между направлением $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ и осью x на плоскости e_f флага $f = (P, \omega, \varphi)$; Λ_x есть свободный флаг $(\omega, \text{ось } -x)$.

Теорема 3. Пусть на каждой плоскости $e \in \mathbb{E}$ выбраны декартовы координаты (x, y) . Функция флага $\rho \in C^{(3)}$ удовлетворяет условию первого порядка (1.11) тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in \mathbb{R}^3$ и $\omega \in \mathcal{E}_2$ функция ρ имеет тригонометрический вид

$$\rho(P, \omega, \varphi) = A(P, \Lambda_x) \sin 2(\varphi, x) + B(P, \Lambda_x) \cos 2(\varphi, x) + C(P, \omega) \quad (1.13)$$

и сужение функций A, B, C на любую плоскость e , ортогональную направлению ω , удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$2 \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} - \left(\frac{\partial^2 C}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 C}{(\partial_y P)^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 B}{(\partial_x P)^2} - \frac{\partial^2 B}{(\partial_y P)^2} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Левая часть (1.14) не зависит от выбора системы декартовых координат на плоскости e_f .

Однако по Теореме 2 полное решение задачи требует изучения условия (1.12) (анализ второго порядка). В нижеследующих параграфах мы будем изучать условие (1.12), при условии, что выполнено условие (1.11) или, эквивалентно, Теорема 3.

Список некоторых обозначений часто используемых при анализе второго порядка:

τ — многоугольное основание ассимптотически плоских пирамид;

ω — направление нормальное к плоскости τ , $\omega \in \mathcal{E}_2$;

Q_0 — точка в $\text{int } \tau$, предел последовательности вершин пирамид;

Q — переменная точка на перпендикуляре из точки Q_0 к плоскости τ ;

x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ с началом координат в $O = Q_0$, ось z ортогональна к τ ;

(v, Φ) — “двуугольник” в плоскости τ , т.е. множество на плоскости, представимое как объединение прямых, проходящих через точку v с направлениями заполняющими дугу Φ (см. Рис. 1 б));

$v_1, \dots, v_n$ — вершины многоугольника τ ;

$b_1, \dots, b_n$ — стороны многоугольника τ (основания пирамиды) или их длины;

β_i — плоские углы между τ и плоскостью, проходящей через b_i и Q ;

$L_1, \dots, L_n$ — боковые ребра пирамиды (Q, τ) (или их длины);

(r, φ) — полярные координаты точки v на плоскости τ с началом координат в $O = Q_0$, $\varphi = 0$ совпадает с направлением оси x ;

r_i — отрезок, соединяющий Q_0 с вершиной v_i (или его длина);

dl — мера длины на τ ;

S_2 — пространство ориентированных направлений (единичная сфера) в $\mathbb{R}^3$;

b — отрезок в плоскости τ , направление которого не содержит O ;

b^* — ориентированный вариант отрезка b : по определению, O лежит в левой полуплоскости относительно b^* ;

p — расстояние от O до прямой, содержащей отрезок b ;

Λ_x — свободный флаг $(\omega, \text{ось} - x)$;

(l, r, τ) — флаг $f = (P, \gamma, e)$ с P на τ , $\gamma = r$ и $e = \tau$;

$((x, y), \omega, \varphi)$ — флаг с $P = (x, y) \in \tau$, записанный в дуальных координатах;

$\frac{\partial}{\partial_\eta P}$ — дифференцирование по аргументу P в направлении оси η ;

$\frac{\partial}{\partial_\eta \Lambda}$ — дифференцирование по аргументу Λ соответствующее положитель-

ному вращению вокруг оси η .

Положительное направление вращения вокруг $\eta \in S_2$ определим согласно правилу правого буравчика. Направление оси z определяет таким путем ориентацию многоугольника τ , в частности, направления сторон $b_i^* \in S_2$ многоугольника τ .

$\rho'(f, g)$ — производная функции флага $\rho(f)$ относительно оси g . Эта производная определяется следующим образом: пусть r — положительное вращение пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг g на угол σ . Тогда

$$\rho'(f; g) = \left. \frac{d\rho(rf)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}. \quad (1.15)$$

§2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ $\frac{d^2\Psi_1(0)}{dh^2}$

В этом параграфе мы рассматриваем систему декартовых координат, связанную с τ и Q_0 . Начало координат O выбираем совпадающим с Q_0 , а плоскость $z = 0$ совпадает с плоскостью τ . Естественно, на плоскости, содержащей τ , мы имеем координаты x, y .

Рассмотрим (1.12), предполагая, что $\{Q_s\}$ принадлежат полупространству $z > 0$.

Очевидно $\frac{d^2\Psi_1(0)}{dh^2} = \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2} \Big|_{Q=Q_0}$ где $\frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2}$ есть вторая производная $\Psi(Q|\tau)$, взятая в направлении Ω прямой, содержащей вершины $\{Q_s\}$. Используя стандартные формулы дифференцирования, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2} &= \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_x Q)^2} \cos^2(\Omega, x) + 2 \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{\partial_x Q \partial_z Q} \cos(\Omega, x) \cos(\Omega, z) + \\ &+ \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_z Q)^2} \cos^2(\Omega, z), \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial_x Q}$ мы предполагаем для простоты, что проекция Ω на плоскость $z = 0$ совпадает с направлением оси x .

Так как $\Psi_1(0) = 0$ для всех точек $Q_0 \in \tau$, откуда следует, что $\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_x Q)^2} =$

0. Уравнение (1.11) означает, что

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial\Psi(Q|\tau)}{\partial_x Q} = 0 \quad \text{для любого } Q_0 \in \tau$$

и влечет

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2 \Psi(Q|\tau)}{\partial_x Q \partial_x Q} = 0.$$

Так как функция флага ρ удовлетворяет (1.12), следует, что

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2 \Psi(Q|\tau)}{(\partial_n Q)^2} = 0 \iff \lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2 \Psi(Q|\tau)}{(\partial_x Q)^2} = 0.$$

Следовательно, не умаляя общности мы можем предположить, что прямая, содержащая последовательность $\{Q_i\}$, перпендикулярна к τ в точке Q_0 .

Мы используем обозначения (часть из них суть версии обозначений предыдущего списка) :

Φ_i — внешний угол многоугольника τ при вершине v_i ;

ξ_i — направление в Φ_i ;

$d\xi$ — мера на Φ , инвариантная относительно вращений ;

(ξ_i, r_i) — угол между ξ_i и r_i , измеряемый из r_i против часовой стрелки ;

p_i — расстояние от Q_0 до прямой, содержащей b_i ;

Пусть w_i — sl клин (см. (1.6)) и пусть (l, ϕ) — координаты флага из w_i , использованные в (1.8). Сделаем замену переменной $\phi \rightarrow \xi_i$. Используя стандартную формулу из сферической тригонометрии, получаем, что соответствующий якобиан имеет следующий асимптотический ($h \rightarrow 0$) вид :

$$\left| \frac{d\phi}{d\xi_i} \right| = \frac{h}{r_i \sin^2(\xi_i, r_i)} + o(h^2). \quad (2.1)$$

Теперь уравнение (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(h) &= h \sum_i \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{r_i \sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{L_i} \rho \, dl - \sum_i \int_{b_i} dl \int_0^{\beta_i} \rho \, d\phi + o(h^2) = \\ &= E_1(h, \tau) - E_2(h, \tau) + o(h^2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$E_1(h, \tau) = h \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{L_i} \rho(l, L_i, \xi_i) \, dl \quad (2.3)$$

и

$$E_2(h, \tau) = \sum_{b_i} \int_{L_i} dl \int_0^{\beta_i} \rho(l, b_i, \phi) d\phi. \quad (2.4)$$

В (2.3) тройка l, L_i, ξ_i определяет флаг $f = (P, \Omega, \phi)$, где P — точка на L_i на расстоянии l от v_i , Ω — пространственное направление L_i и ϕ соответствует ξ_i ; В (2.4) тройка l, b_i, ϕ определяет флаг $f = (P, \Omega, \phi)$, где P — точка на b_i на расстоянии l от v_i , Ω — пространственное направление b_i ; В (2.4) $\tan \beta_i = h/p_i$ и границы $\phi = 0$ и $\phi = \beta_i$ соответствуют плоскости τ и плоскости, содержащей Q и b_i .

Нашей целью является получение точного выражения для слагаемых, пропорциональных h^2 в разложении Тейлора формулы (2.2). Мы начинаем с $E_1(h, \tau)$. Так как присутствует множитель h в (2.3), то достаточно рассмотреть первые два слагаемых в разложении Тейлора для $\rho(l, L_i, \xi_i)$. Для этой цели рассмотрим положительные вращения τ вокруг оси $g(\xi_i^*) : g(\xi_i^*)$ — опорная ось многоугольника τ через вершину v_i , направление которой $\xi_i^* \in S_2$. Действительно, ξ_i^* , направленная версия $\xi_i \in \Phi_i$, выбранная таким образом, чтобы τ оставалась бы в левой полуплоскости относительно $g(\xi_i^*)$.

Мы пишем (см. (1.15))

$$\rho'((l, r_i, \tau); \xi_i) = \rho'((l, r_i, \tau); g(\xi_i^*)). \quad (2.5)$$

Разложение Тейлора имеет вид

$$\rho(l, L_i, \xi_i) = \rho(l, r_i, \tau) + \rho'((l, r_i, \tau); \xi_i) \frac{h}{r_i \sin(\xi_i, r_i)} + O(h^2). \quad (2.6)$$

Заметим, что флаг (l, r_i, τ) , предельный (при $h \rightarrow 0$) для флагов (l, L_i, ξ_i) .

Имеем

$$\int_{L_i} \rho(l, r_i, \tau) dl = \int_{r_i} \rho(l, r_i, \tau) dl + O(h^2),$$

откуда следует

$$E_1(h, \tau) = h \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_0^{r_i} \rho(l, r_i, \tau) dl + h^2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl + o(h^2), \quad (2.7)$$

где

$$\Theta_i(l) = \int_{\neq i} \rho'((l, r_i, \tau); \xi_i) \frac{d\xi_i}{\sin^3(\xi_i, r_i)}. \quad (2.8)$$

Окончательно имеем

$$\left. \frac{\partial^2 E_1(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl. \quad (2.9)$$

Теперь найдем $\left. \frac{\partial^2 E_2(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0}$ (см. (2.4)). Имеем (см. (1.15))

$$\rho'((l, b_i, \tau)) = \rho'((l, b_i, \tau); b_i^*).$$

Вид первых двух слагаемых в разложении Тейлора имеют вид

$$\rho(l, b_i, \phi) = \rho(l, b_i, \tau) + \rho'((l, b_i, \tau)) \phi + O(\phi^2).$$

Отсюда следует

$$E_2(h, \tau) = \sum_{b_i} \beta_i \int_{b_i} \rho(l, b_i, \tau) dl + \sum_{b_i} \frac{\beta_i^2}{2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl + o(h^2).$$

Так как $\beta_i = h/p_i + o(h^2)$, мы находим

$$\left. \frac{\partial^2 E_2(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \sum_{b_i} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl. \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) и (2.2) получаем следующую переформулировку уравнения (1.12).

Предложение 1. Уравнение (1.12) эквивалентно условию

$$E(Q_0, \tau) = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl - \sum_{b_i} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl = 0, \quad (2.11)$$

которое должно выполняться для любого многоугольника τ и любой точки $Q_0 \in \tau$.

§3. ВАЛЮАЦИИ НА ПЛОСКОСТИ τ

Уравнение (2.11) предлагает конструкции двух валюаций, определенных на классе выпуклых многоугольников на плоскости τ . Их комбинаторная структура повторяет плоские валюации, рассмотренные в [3], §10. Целью является получение множества условий, эквивалентных условию (2.11).

Мы рассматриваем два выражения, которые имеются в правой части (2.11) :

$$E_1(Q_0, \tau) = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl$$

и

$$E_2(Q_0, \tau) = \sum_{b_i} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl.$$

В этом и следующем параграфе плоскость, содержащую τ мы будем обозначать $\mathbb{R}^2$. Из $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$ наследуется прямоугольная система координат x, y с центром в точке $O = Q_0$. Через τ_3 мы будем обозначать треугольники, а через τ_4 четырехугольники на плоскости $\mathbb{R}^2$.

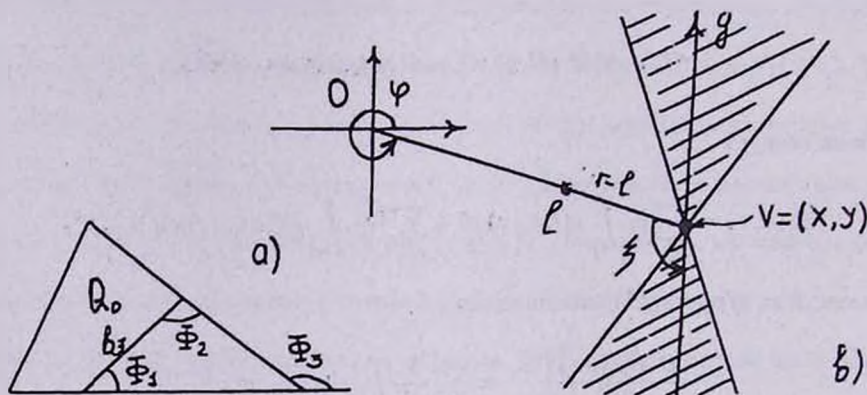


Рис. 1. Заштрихованная область в б) соответствует двугольнику с вершиной в точке v .

Пусть τ_3 — большой треугольник, показанный на Рис. 1, а). τ'_3 — треугольная часть τ_3 , не содержащая O , $\tau_4 = \tau_3 \setminus \tau'_3$. Ясно, что

$$E_1(\tau'_3) = E_1(Q_0, \tau_3) - E_1(Q_0, \tau_4) = 2 \frac{1}{r_3^2} \int_0^{r_3} \Theta_3(l) dl - \sum_{i=1,2} \frac{2}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl,$$

где $\Theta_i(l)$ определяется по (2.8), соответствующие углы Φ_i (от которых зависит $\Theta_i(l)$) показаны на Рис. 1, б).

Аналогично получаем

$$E_2(\tau'_3) = E_2(Q_0, \tau_3) - E_2(Q_0, \tau_4) = \sum_{\substack{b_i \\ i=1,2}} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl - \frac{1}{p_3^2} \int_{b_3} \rho'((l, b_3, \tau)) dl.$$

Этот принцип вычитания используется для получения валюаций определенных на классе C_2 выпуклых ограниченных многоугольников $\tau \subset \mathbb{R}^2$.

$C_2 = \{\tau: O \notin \text{int } \tau, \text{ продолжения сторон многоугольника } \tau \text{ не содержат } O\}$.

Они выражаются в терминах функций $G_1(v, \phi)$ и $G_2(b)$, заданных в пространстве двуугольников (см. Рис. 1, б)) и отрезков b в $\mathbb{R}^2$ соответственно. Рассмотрим функцию G_1 , определенную на двуугольниках

$$G_1(v, \phi) = \frac{2}{r^2} \int_r \Theta(l) dl, \quad (3.1)$$

где r — отрезок, соединяющий O и v , и для $l \in r$

$$\Theta(l) = \int_{\phi} \rho'((l, r, \tau); \xi) \frac{d\xi}{\sin^3(\xi, r)}, \quad (3.2)$$

где для краткости (сравните с (2.5)) $\rho'((l, r, \tau); \xi) = \rho'((l, r, \tau); g)$, g — ось в плоскости τ , содержащая v , направление оси совпадает с ξ и которая оставляет O в левой полуплоскости (см. Рис. 1 б)). Последний интеграл сходится, так как замыкание двуугольника (v, ϕ) не содержит O .

Мы также определяем функцию отрезка (ср. с (2.10))

$$G_2(b) = \frac{1}{p^2} \int_b \rho'((l, b, \tau)) dl, \quad (3.3)$$

где $\rho'((l, b, \tau)) = \rho'((l, b, \tau); b^*)$.

Определение 3. Для многоугольника $\tau \in C_2$

$$E_1(\tau) = \sum_1 G_1(v_i, \phi_i) - \sum_2 G_1(v_i, \phi_i^c), \quad (3.4)$$

$$E_2(\tau) = \sum_3 G_2(b_i) - \sum_4 G_2(b_i). \quad (3.5)$$

В (3.4) ϕ_i обозначают внешние углы многоугольника τ , ϕ_i^c — их дополнения (внутренние углы многоугольника τ), сумма $\sum_1$ распространяется на вершины

τ , для которых *внутренний двугольник* содержит O , $\sum_2$ взята по дополнительному множеству вершин. По определению, *внутренний двугольник* многоугольника τ соответствует вершине v_i и внутреннему углу τ в v_i . В (3.5) $\sum_3$ взята по сторонам b_i , чьи продолжения не разделяют O от внешности τ , а $\sum_4$ взята по дополнению этого множества.

Представляют интерес значения E_1 и E_2 на треугольниках и четырехугольниках из классов

$$\Delta =$$

$= \{ \text{прямоугольный треугольник из } C_2 \text{ с катетами параллельными } x \text{ и } y \text{ осям} \},$

$\Xi = \{ \text{прямоугольники из } C_2 \text{ со сторонами, параллельными } x \text{ и } y \text{ осям} \}.$

Эти выражения как и описание классов Δ и Ξ были впервые введены в [3].

Для треугольника $\tau_3 \in \Delta$ определим следующие параметры :

$P = (x, y)$ — вершина прямого угла ;

$\alpha \in (0, \pi)$ — направление гипотенузы ;

$\gamma \in (0, 2\pi)$ — направление перпендикуляра из P на гипотенузу ;

c — длина гипотенузы.

Мы всегда имеем

$$\gamma = \alpha + (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1$$

и вместо γ мы будем использовать параметр k , принимающий два значения.

Определим *положительные направления* на катетах треугольников $\tau_3 \in \Delta$ так, чтобы они совпадали, соответственно, с направлениями осей x и y . Через H и T будем обозначать соответственно *головной* и *хвостовой* концы данного катета. Верхние индексы 1, 2 к H или T будут относиться к катетам, параллельным, соответственно, осям x и y .

Для треугольника $\tau_3 \in \Delta$ уравнение (3.4) может быть записано в виде

$$E_1(\tau_3) = z_1 [G_1(H_1, Z_1) - G_1(T_1, Z_1)] + z_2 [G_1(H_2, Z_2) - G_1(T_2, Z_2)]. \quad (3.6)$$

Здесь каждое множество $Z_i \subset (0, \pi)$ является интервалом, либо же объединением двух интервалов.

В Таблице 1 указана зависимость $Z_1, Z_2; z_1$ и z_2 от параметров P, α и k треугольника $\tau_3 \in \Delta$. Таблица записана для малых s , а точнее, для значений s , при которых замыкание τ_3 не пересекается с координатными осями или прямой, проходящей через O по направлению α . Римские цифры первого столбца соответствуют двугольным областям на Рис. 2.

Таблица 1 ($k = 0$)

$P \in \text{int}$	$\alpha \in$	Z_1	Z_2	z_1	z_2
I	$(0, \frac{\pi}{2})$	(α, π)	$(\alpha, \frac{\pi}{2})$	-1	-1
II	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \alpha)$	$(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (0, \alpha)$	+1	+1
III	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \alpha)$	$(\alpha, \frac{\pi}{2})$	+1	-1
IV	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(0, \alpha)$	$(\frac{\pi}{2}, \alpha)$	-1	+1
V	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	(α, π)	$(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\alpha, \pi)$	+1	-1
VI	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	(α, π)	$(\frac{\pi}{2}, \alpha)$	+1	+1

Мы использовали значения Z_i, z_i при $k = 0$; при $k = 1$ множества Z_i остаются неизменными, а значения z_i меняют знаки.

Представление аналогичное (3.6) можно записать для $E_2(\tau_3)$, $\tau_3 \in \Delta$. Обозначим через b_1, b_2 катеты треугольника τ_3 , параллельные осям x или y соответственно, а через b_3 его гипотенузу. Имеем

$$E_2(\tau_3) = t_1 G_2(b_1) + t_2 G_2(b_2) + t_3 G_2(b_3), \quad (3.7)$$

где

$$t_1 = (-1)^k \text{sign}(-y \cos \alpha), \quad t_2 = (-1)^k \text{sign}(x), \quad t_3 = (-1)^k \text{sign}(y \cos \alpha - x \sin \alpha). \quad (3.8)$$

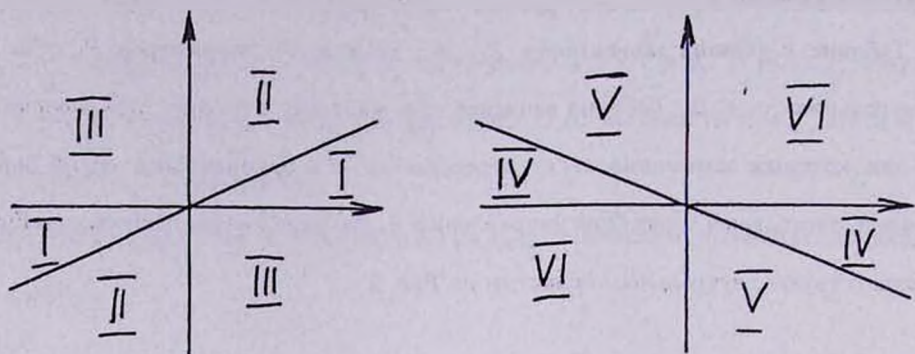


Рис. 2.

Прямоугольник $\tau_4 \in \Xi$ будем задавать параметрами :

(x, y) — центр прямоугольника τ_4 ;

$2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2$ — длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника τ_4 ;

Для прямоугольника $\tau_4 \in \Xi$ уравнение (3.4) принимает вид

$$E_1(\tau_4) = z [G_1(x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2, Z) + G_1(x - \varepsilon_1, y - \varepsilon_2, Z) - G_1(x + \varepsilon_1, y - \varepsilon_2, Z) - G_1(x - \varepsilon_1, y + \varepsilon_2, Z)] . \quad (3.9)$$

В случае, когда τ_4 не пересекается с координатными плоскостями, для z и Z имеем таблицу.

Таблица 2

$$z = -1, \quad Z = (0, \frac{\pi}{2}), \quad \text{если} \quad x \cdot y < 0$$

$$z = 1, \quad Z = (\frac{\pi}{2}, \pi), \quad \text{если} \quad x \cdot y > 0.$$

Если $\tau_4 \in \Xi$ не пересекается с координатными осями, то (3.5) принимает вид

$$E_2(\tau_4) = \text{sign}(y) [G_2(b_1) - G_2(b_2)] + \text{sign}(x) [G_2(b_3) - G_2(b_4)] , \quad (3.10)$$

где предполагаем, что b_1, b_2 параллельны оси x , проекции которых на ось y суть $y + \varepsilon_2$ и $y - \varepsilon_2$ соответственно. Аналогично, b_3, b_4 параллельны оси y и проекции b_3 и b_4 на ось x суть $x + \varepsilon_1$ и $x - \varepsilon_2$ соответственно.

Следующее предложение является следствием Предложения 1.

Предложение 2. Функционалы E_1 и E_2 суть валуации на классе C_2 . Если уравнение (2.11) удовлетворяется, то для каждого многоугольника $\tau \in C_2$

$$E_1(\tau) - E_2(\tau) \equiv 0. \quad (3.11)$$

Доказательство : следует из замечания, что каждый многоугольник $\tau \in C_2$ можно представить как конечную комбинацию выпуклых многоугольников, каждый из которых содержит O . Записывая (2.11) для всех многоугольников, мы получим (3.11) •

Предложение 3. Пусть валуации E_1, E_2 зависят от флаговой функции $\rho(f) \in C^{(3)}$. Пусть $\tau_3(c)$ — семейство треугольников, соответствующее некоторым фиксированным P, α и k . Пусть $\tau_4(q)$ — семейство прямоугольников, соответствующий некоторому фиксированному P , и q есть площадь прямоугольника $\tau_4(q)$. Если всегда

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{E_1(\tau_3(c)) - E_2(\tau_3(c))}{c} = 0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{E_1(\tau_4(q)) - E_2(\tau_4(q))}{q} = 0 \quad (3.13)$$

то $E_1(\tau) - E_2(\tau)$ тождественно равно нулю на C_2 .

Мы опускаем доказательство, которое повторяет со всеми деталями доказательство аналогичного утверждения параграфа 10 из [3].

Пусть $\tau_O^{(n)}$ — последовательность выпуклых многоугольников, содержащих O и стягивающихся к точке O .

Предложение 4. Соотношения (3.12), (3.13) вместе с

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tau_O^{(n)}) = 0 \quad (3.14)$$

эквивалентны условию (2.11).

§4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ОСЕЙ x И y

Во-первых мы докажем общую лемму, касающуюся дифференцируемых функций $\rho(\Lambda)$, определенных в пространстве ∇ свободных флагов.

Пусть r — положительное вращение S_2 вокруг оси $\eta \in S_2$ на угол r . Для заданного свободного флага Λ , мы лишем $r\Lambda$ для свободного флага, полученного из Λ вращением r и полагая

$$\frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial \eta} = \left. \frac{d\rho(r\Lambda)}{dr} \right|_{r=0}. \quad (4.1)$$

Через $S_1(\omega)$ обозначаем окружность направленных направлений в плоскости, ортогональной $\omega \in \mathcal{E}_2$.

Лемма 1. (сообщена Р. В. Амбарцумяном) Пусть Λ — свободный флаг с дуальным представлением $\Lambda = (\omega, \varphi)$. Предположим, что $X \in S_1(\omega)$ и $Y \in S_1(\omega)$ — два ортогональных направления. Для любого третьего направления $\eta \in S_1(\omega)$ имеет место следующее разложение :

$$\frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial X} \cos(\eta, X) + \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial Y} \cos(\eta, Y). \quad (4.2)$$

Доказательство : Используя уравнение

$$\rho_\eta(\omega, (\eta, \varphi)) = \rho(\omega, \varphi)$$

определим новую функцию $\rho_\eta(\omega, (\eta, \varphi))$, где второй аргумент (η, φ) есть угол между η и φ .

Выберем вращение r и рассмотрим повернутую ось $r\omega$. Пусть $\delta_1, \delta_2 \in S_2$ основания геодезических перпендикуляров из $r\omega$ на большие окружности, полюсы которых Y и X соответственно. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \rho(r\Lambda) - \rho(\Lambda) &= \rho(r\Lambda) - \rho_X(\omega, (X, \varphi)) = \\ &= \rho(r\Lambda) - \rho_X(\omega, (X, \varphi)) + \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) - \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)). \end{aligned}$$

Так как вторые аргументы совпадают при r (угол вращения r) стремящемся к нулю 0, мы имеем

$$\rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) - \rho_X(\omega, (X, \varphi)) = r \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial X} \cos(\eta, X) + o(r). \quad (4.3)$$

Пусть $\tilde{Y}$ есть полюс большой окружности, проходящей через $r\omega$ и δ_2 . Для некоторого направления $\varphi_1 \in S_2$ имеем

$$\rho(r\Lambda) - \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) = \rho_{\tilde{Y}}(r\omega, (\tilde{Y}, \varphi)) - \rho_{\tilde{Y}}(\delta_2, (\tilde{Y}, \varphi_1)). \quad (4.4)$$

Так как $r \rightarrow 0$, то φ_1 стремится к φ , оставаясь на окружности с центром в точке X . В точке φ эта окружность ортогональна большой окружности, содержащей X и Y . Так как предельное положение $\tilde{Y}$ есть Y , мы заключаем, что в "узком" сферическом треугольнике $\tilde{Y}$, φ , φ_1 оба угла сторон φ, φ_1 стремятся к $\pi/2$. Отсюда следует

$$(\tilde{Y}, \varphi) - (\tilde{Y}, \varphi_1) = o(r).$$

Это замечание позволяет преобразовать (4.4) тем же путем как и (4.3), т.е.

$$\rho(r\Lambda) - \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) = r \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial Y} \cos(\eta, Y) + o(r).$$

Это завершает доказательство •

Мы пишем $f = (P, \Lambda)$, где Λ — свободный флаг флага f и обозначаем через $\frac{\partial \rho(f)}{\partial_x P}$ частные производные функции ρ по аргументу P в направлении x . Мы будем использовать запись $\frac{\partial \rho(f)}{\partial_\eta \Lambda} = \frac{\partial \rho_P(\Lambda)}{\partial \eta}$ (см. (4.1)), где $\rho_P(\Lambda)$ есть сужение $\rho(f)$ на множество $\{f = (P, \Lambda): P \text{ фиксировано}\}$.

Следствие 1 касается функции двуугольника G_3 , определенной по формулам (3.1), (3.2). Для любого $\xi \in \Phi$ рассмотрим его направленную версию ξ^* . По определению, прямая содержащая v с направлением ξ^* , оставляет O в левой полуплоскости.

Следствие 1. Для любой дифференцируемой функции флага ρ имеет место следующее разложение (см. (3.2)) :

$$\rho'((l, r, \tau); \xi) = \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x P} (r-l) \sin(\xi, r) + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x \Lambda} \cos(\xi^*, x) + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_y \Lambda} \cos(\xi^*, y), \quad (4.5)$$

где точка $l \in \Gamma$ идентифицируется с ее расстоянием от начала координат O (см. Рис. 1 б)).

Доказательство : Наше предположение, что $\{Q_s\}$ принадлежит оси z важно для слагаемого $\frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x Q} (r-l) \sin \xi$. Вид двух оставшихся слагаемых в (4.5) следует из Лемм 1 и 2, если заметить, что

$$\rho'((l, r, \tau); \xi) = \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial g^*} = \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x Q} (r-l) \sin(\xi, r) + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_{\xi^*} \Lambda},$$

где g^* есть ось, проходящая через вершину v с направлением ξ^* . •

Следующее Следствие 2 касается разложений производных $\rho'(l, b, \tau)$, которые возникают в (3.3).

Следствие 2. Для флагов $f = (l, b, \tau)$ имеем

$$\rho'(f) = \frac{\partial \rho(f)}{\partial_x \Lambda} \cos(b^*, x) + \frac{\partial \rho(f)}{\partial_y \Lambda} \cos(b^*, y). \quad (4.6)$$

Доказательство : Так как l принадлежит оси вращения b

$$\rho'(f) = \frac{\partial \rho(f)}{\partial_{b^*} \Lambda}.$$

Теперь (4.6) следует из Леммы 1 •

Функция $\Theta(l)$ в (3.2) имеет следующее представление :

$$\begin{aligned} \Theta(l) = & \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x P} (r-l) \int_{\Phi} \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x \Lambda} \int_{\Phi} \frac{\cos(\xi^*, x) d\xi}{\sin^3(\xi, r)} + \\ & + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_y \Lambda} \int_{\Phi} \frac{\cos(\xi^*, y) d\xi}{\sin^3(\xi, r)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказательство следует из (2.8) и (4.5) •

§5. ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Мы намерены преобразовать условия (3.12) — (3.14). Начнем с уравнения (3.12).

Асимптотическая ($c \rightarrow 0$) версия формулы (3.6) для фиксированной величины α имеет вид

$$E_1(\tau_3) = z_1 \frac{\partial G_1(P, Z_1)}{\partial x} \varepsilon_1 + z_2 \frac{\partial G_1(P, Z_2)}{\partial y} \varepsilon_2 + O(c^2), \quad (5.1)$$

где $\varepsilon_1 = c |\cos \alpha|$ и $\varepsilon_2 = c |\sin \alpha|$ суть длины катетов $T_1 H_1$ и $T_2 H_2$ соответственно.

Имеется аналогичная асимптотическая версия формулы (3.7) :

$$\begin{aligned} E_2(\tau_3) = & -t_1 \frac{1}{y^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \cdot \text{sign}(y) \varepsilon_1 + t_2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \pi/2)}{\partial_y \Lambda} \cdot \text{sign}(x) \varepsilon_2 + \\ & + t_3 \frac{1}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \left[-\frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial_y \Lambda} \sin \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial_x \Lambda} \cos \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) \right] c + o(c^2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В (5.2) мы использовали следующие соотношения :

$$\rho'(l, \omega, 0) = -\frac{\partial \rho(l, \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \cdot \text{sign}(y), \quad \text{и} \quad \rho'(l, \omega, \pi/2) = \frac{\partial \rho(l, \omega, \pi/2)}{\partial_y \Lambda} \cdot \text{sign}(x),$$

т.е. $\cos(b^*, x) = -\text{sign}(y)$, $\cos(b^*, y) = 0$ для катета, параллельного оси x , и

$\cos(b^*, x) = 0$, $\cos(b^*, y) = \text{sign}(x)$ для катета, параллельного оси y .

Подставляя (5.1) и (5.2) в (3.12) получаем

$$\begin{aligned} & z_1 \frac{\partial G_1(P, Z_1)}{\partial x} |\cos \alpha| + z_2 \frac{\partial G_1(P, Z_2)}{\partial y} |\sin \alpha| + \\ & + t_1 \frac{1}{y^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \cdot \text{sign}(y) |\cos \alpha| - t_2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \pi/2)}{\partial_y \Lambda} \cdot \text{sign}(x) |\sin \alpha| + \\ & + t_3 \frac{1}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \left[\frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial_y \Lambda} \sin \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial_x \Lambda} \cos \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Функция G_1 определена в (3.1). Функция $\Theta(l)$, от которой зависит G_1 , имеет вид

(4.7) с $\Phi = Z_1$ или Z_2 . Соответствующие интегралы могут быть вычислены :

$$\int_{Z_1} \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} = (-1)^k z_1 \text{sign}(\cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)},$$

$$\begin{aligned}
\int_{z_2} \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} &= (-1)^k z_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi \sin(\varphi - \alpha)}, \\
\int_{z_1} \frac{\cos(\xi^*, x)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi &= \int_{z_1} \frac{\cos(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \\
&= (-1)^{k+1} z_1 \operatorname{sign}(\cos \alpha) \frac{\sin \alpha (\cos \alpha \sin \varphi + \sin(\varphi - \alpha))}{2 \sin^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)}, \\
\int_{z_2} \frac{\cos(\xi^*, x)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi &= \int_{z_2} \frac{\cos(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = (-1)^{k+1} z_2 \frac{\cos^2 \alpha}{2 \cos \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)}, \\
\int_{z_1} \frac{\cos(\xi^*, y)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi &= \int_{z_1} \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = (-1)^{k+1} z_1 \operatorname{sign}(\cos \alpha) \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)}, \\
\int_{z_2} \frac{\cos(\xi^*, y)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi &= \int_{z_2} \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = (-1)^k z_2 \frac{\cos \alpha (\sin(\varphi - \alpha) - \sin \alpha \cos \varphi)}{2 \cos^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти значения интегралов в (4.7), а также значения t_i (см. (3.8)) в (5.3) мы получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos \alpha}{r^2} \left[\int_r \left(\frac{2(r-l) \sin \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\sin \alpha (\cos \alpha \sin \varphi + \sin(\varphi - \alpha))}{\sin^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} \right) dl \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \alpha}{r^2} \left[\int_r \left(\frac{2(r-l) \cos \alpha}{\cos \varphi \sin(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} - \frac{\cos \alpha (\sin(\varphi - \alpha) - \sin \alpha \cos \varphi)}{\cos^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} \right) dl \right] - \frac{1}{y^2} \cos \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \\
&- \frac{1}{x^2} \sin \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \pi/2)}{\partial_y \Lambda} + \\
&+ \frac{1}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \left(\sin \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial_y \Lambda} + \cos \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial_x \Lambda} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Отметим, что $\int_r$ обозначает интегрирование по прямолинейному отрезку r , соединяющему O с v . Подынтегральная функция этих интегралов равна $\rho = \rho(l, r, \omega)$. В слагаемых, не содержащих интегралов, x и y суть декартовы координаты точки v , т.е. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Отметим исчезновение разрывных коэффициентов z_i и t_i . Уравнение (5.4) имеет место для обоих значений $k = 0, 1$.

Мы приходим к следующему результату :

условие (3.12) эквивалентно условию (5.4).

Изучим условие (3.13). Рассмотрим функцию G_1 , которая фигурирует в (3.9).

Предположим, что отношение $\nu^2 = \frac{\varepsilon_2}{4\varepsilon_1}$ остается фиксированным. Обозначая через $q = 4\varepsilon_2\varepsilon_1$ площадь прямоугольника τ_4 , мы получаем

$$G_1(x \pm \varepsilon_1, y \pm \varepsilon_2, Z) = G_1(x \pm (4\nu)^{-1}\sqrt{q}, y \pm \nu\sqrt{q}, Z).$$

Используя формулу Тейлора для каждого слагаемого мы приходим к асимптотической ($q \rightarrow 0$) форме для (3.9)

$$E_1(\tau_4) = z \frac{\partial^2 G_1(P, Z)}{\partial x \partial y} q + O(q^{3/2}). \quad (5.5)$$

Интегралы по $\Phi_1 = Z$ (см. Таблицу 2) легко вычисляются :

$$\begin{aligned} \int_Z \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} &= \frac{2z}{\sin 2\varphi}, \quad \int_Z \frac{\cos(\xi^*, x)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_Z \frac{\cos(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = -\frac{z}{2 \sin^2 \varphi \cos \varphi}, \\ \int_Z \frac{\cos(\xi^*, y)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi &= \int_Z \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \frac{z}{2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Получаем

$$G_1(x, y, Z) = \frac{z}{r^2} \int_r \left(\frac{4}{\sin 2\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} (r-l) + \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} - \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} \right) dl. \quad (5.6)$$

Используя разложение Тейлора для разностей в (3.10), получаем

$$\begin{aligned} G_2(b_1) - G_2(b_2) &= \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{|y|^2} \left(\frac{\partial \rho'((x, y), \omega, 0)}{\partial y} - \frac{2}{y} \rho'((x, y), \omega, 0) \right) + o(q), \\ G_2(b_3) - G_2(b_4) &= \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{|x|^2} \left(\frac{\partial \rho'((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial x} - \frac{2}{x} \rho'((x, y), \omega, \frac{\pi}{2}) \right) + o(q). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) в (5.5), и (5.7) в (3.10), мы получаем асимптотическое выражение для $E_1(\tau_4) - E_2(\tau_4)$.

Следовательно, из (3.13) мы получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1}{r^2} \int_r \left(\frac{4}{\sin 2\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} (r-l) + \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} - \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} \right) dl \right] + \\ &+ \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \frac{2}{y} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \right) - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \right. \\ &\left. - \frac{2}{x} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_y \Lambda} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Интегралы берутся по прямолинейным отрезкам τ , подынтегральная функция $\rho = \rho(l, r, \omega)$.

Мы приходим к следующему результату :

условие (3.13) эквивалентно (5.8).

Аналогично преобразуем условие (3.14), предполагая, что многоугольник τ стягивается к точке O , сохраняя прямоугольную форму многоугольника τ .

$$E_1(O, \tau) = \sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial x P} (r-l) dl + \\ + \sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, x)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial x \Lambda} dl + \sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, y)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial y \Lambda} dl,$$

$$E_2(O, \tau) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i^2} \int_{i=1}^4 \rho'(l, b_i, \tau) dl.$$

Суммы в $E_1(O, \tau)$ имеют следующий асимптотический вид :

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial x P} (r-l) dl = \\ = \frac{2}{\sin \varphi \cos \varphi} \left(\frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial x P} + \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial x P} \right) + o(r),$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, x)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial x \Lambda} dl = -\frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \left[\frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial x P \partial x \Lambda} \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial y P \partial x \Lambda} \sin \varphi - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial x P \partial x \Lambda} \cos \varphi + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial y P \partial x \Lambda} \sin \varphi \right] + o(r),$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, y)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial y \Lambda} dl = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial x P \partial y \Lambda} \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial y P \partial y \Lambda} \sin \varphi + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial x P \partial y \Lambda} \cos \varphi - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial y P \partial y \Lambda} \sin \varphi \right] + o(r).$$

Для $E_2(O, \tau)$ мы имеем асимптотическое разложение

$$E_2(O, \tau) = -4 \cot \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, 0)}{\partial y P \partial x \Lambda} + 4 \tan \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi/2)}{\partial x P \partial y \Lambda} + o(r).$$

Следовательно, подставляя последние два выражения в (2.11) и используя условие (3.14), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \left[\frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + 2 \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + 2 \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P} \right] + \\ & + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} \right] - \\ & - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \right] + \\ & + 4 \cot \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - 4 \tan \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi/2)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Мы доказали следующий результат :

условие (3.14) эквивалентно (5.9).

Условия (5.4), (5.8) и (5.9) мы называем полулокальными, потому что присутствует интеграл по отрезкам τ и $\sin$ или $\cos$ угла между τ и осью x . В следующем параграфе мы заменим их на условия, которые чисто локальны, т.е. имеют форму дифференциальных соотношений в точке.

§6. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ (5.8)

В этом параграфе мы опишем результат анализа поведения (5.8) для малых значений τ , предполагая, что отношение $k = y/x = \tan \varphi$ остается фиксированным. Затем докажем, что из полученных уравнений следует (5.8).

Рассмотрим функцию флага ρ , заданную по (1.13) на флагах (l, τ) . Так как все производные $\frac{\partial \sin 2(r_i, x)}{\partial_x \Lambda}$, $\frac{\partial \sin 2(r_i, x)}{\partial_y \Lambda}$, $\frac{\partial \cos 2(r_i, x)}{\partial_x \Lambda}$, $\frac{\partial \cos 2(r_i, x)}{\partial_y \Lambda}$ равны нулю, мы получаем

$$\frac{\partial \rho(l, \tau, \tau)}{\partial_x P} = \frac{\partial A(l, \Lambda_x)}{\partial_x P} \sin 2(r_i, x) + \frac{\partial B(l, \Lambda_x)}{\partial_x P} \cos 2(r_i, x) + \frac{\partial C(l, \omega)}{\partial_x P}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho(l, \tau, \tau)}{\partial_x \Lambda} = \frac{\partial A(l, \Lambda_x)}{\partial_x \Lambda} \sin 2(r_i, x) + \frac{\partial B(l, \Lambda_x)}{\partial_x \Lambda} \cos 2(r_i, x) + \frac{\partial C(l, \omega)}{\partial_x \Lambda}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \rho(l, r, r)}{\partial y \Lambda} = \frac{\partial A(l, \Lambda_x)}{\partial y \Lambda} \sin 2(r_i, x) + \frac{\partial B(l, \Lambda_x)}{\partial y \Lambda} \cos 2(r_i, x) + \frac{\partial C(l, \omega)}{\partial y \Lambda}. \quad (6.3)$$

Следовательно, из (5.8) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{4}{x^2 + y^2} \int_0^r \frac{\partial A}{\partial_x P} (r-l) dl + \frac{2(x^2 - y^2)}{xy(x^2 + y^2)} \int_0^r \frac{\partial B}{\partial_x P} (r-l) dl + \right. \\ & + \frac{2}{xy} \int_0^r \frac{\partial C}{\partial_x P} (r-l) dl + \frac{2}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} dl + \\ & + \frac{x^2 - y^2}{x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} dl + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 y} \int_0^r \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} dl - \frac{2}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} dl - \\ & - \left. \frac{x^2 - y^2}{y^2 x \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} dl - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y^2 x} \int_0^r \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} dl \right] + \frac{1}{y^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) - \right. \\ & - \left. \frac{2}{y} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) \right] - \frac{1}{x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) - \frac{2}{x} \left(-\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ясно, что выражение (6.4) имеет асимптотическое ($r \rightarrow 0$) разложение

$$\frac{a_2}{r^2} + \frac{a_1}{r} + a_0 + o(1).$$

Выражения для a_2 , a_1 и a_0 могут быть найдены, используя стандартные разложения Тейлора (см. [3], где аналогичная задача рассмотрена детально). Ясно, что из (6.4) следует $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ и $a_0 = 0$.

Условие $a_2 = 0$ эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & -\cos 2\varphi \frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{\partial C}{\partial_x P} - \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) - \frac{\cos 2\varphi}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Последнее условие выполняется для любого φ . Представляя его как линейную комбинацию независимых функций $\cos 2\varphi$ и 1 с коэффициентами, которые не зависят от φ , мы заключаем, что коэффициенты равны нулю, т.е.

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (6.5)$$

где

$$F_1 = \frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right), \quad (6.6)$$

$$F_2 = \frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right). \quad (6.7)$$

Условие $a_1 = 0$ эквивалентно

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \frac{x}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial B}{\partial_x P} + \frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) \right] + \frac{2}{3} \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) \right] = \\ & = -\frac{2}{3} \frac{x}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} [F_1 + F_2] + \frac{2}{3} \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial y} [F_2 - F_1] = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Используя (6.5), получаем, что (6.8) есть тождество. Следовательно, из (6.5) следует $a_1 = 0$.

Условие $a_0 = 0$ эквивалентно

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 (F_2 - F_1)}{(\partial_x P)^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 (F_1 + F_2)}{(\partial_y P)^2} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 (F_1 + F_2)}{(\partial_x P)^2} + \frac{1}{4} \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 (F_2 - F_1)}{(\partial_y P)^2} + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial_x P} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 C}{(\partial_y P)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{(\partial_x P)^2} - \frac{\partial^2 B}{(\partial_y P)^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Используя (6.5), получаем производную формулы (1.14) :

$$\frac{\partial}{\partial_x P} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 C}{(\partial_y P)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{(\partial_x P)^2} - \frac{\partial^2 B}{(\partial_y P)^2} \right) \right] = 0. \quad (6.10)$$

Резюмируем сказанное :

из условия (5.8) следуют (6.5) и (6.10).

Теперь докажем, что из условий (6.5) и (6.10) следует (5.8).

Ниже будем использовать следующие формулы :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f(x, y)g(x, y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot g + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_r F(u, v) dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l dl + \frac{x}{r^2} \int_r F dl, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int_r F(u, v) dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l dl + \frac{y}{r^2} \int_r F dl, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\int_r F(u, v) dl \right] = \frac{1}{r^2} \int_r \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} l^2 dl + \frac{y}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l dl + \frac{x}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l dl - \frac{xy}{r^4} \int_r F dl, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_r F(u, v) l dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^2 dl + \frac{2x}{r^2} \int_r F l dl, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int_r F(u, v) l dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^2 dl + \frac{2y}{r^2} \int_r F l dl, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\int_r F(u, v) l dl \right] = \frac{1}{r^2} \int_r \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} l^3 dl + \frac{2y}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^2 dl + \frac{2x}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^2 dl, \quad (6.17)$$

$$\int_r F(u, v) dl = F(x, y) |r| - \cos \varphi \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l dl - \sin \varphi \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l dl, \quad (6.18)$$

$$\int_r F(u, v) l dl = F(x, y) \frac{|r|^2}{2} - \frac{\cos \varphi}{2} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^2 dl - \frac{\sin \varphi}{2} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^2 dl, \quad (6.19)$$

$$\int_r F(u, v) l^2 dl = F(x, y) \frac{|r|^3}{3} - \frac{\cos \varphi}{3} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^3 dl - \frac{\sin \varphi}{3} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^3 dl. \quad (6.20)$$

Рассмотрим слагаемые в левой части уравнения (5.8). Используя (6.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{4}{r^2} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right] &= 4 \left[\frac{8xy}{r^6} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl - \frac{2x}{r^4} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2y}{r^4} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right) \right]. \end{aligned}$$

Из (6.15) — (6.17) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{4}{r^2} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right] = \frac{4}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^3 dl$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{4}{r} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} dl \right] = \frac{4}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^2 dl.$$

Следовательно, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{4}{r^2} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} (r-l) dl \right] = \frac{4}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^2 dl - \frac{4}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^3 dl. \quad (6.21)$$

Действуя аналогично мы можем преобразовать оставшиеся слагаемые в (5.8). В

частности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2(x^2 - y^2)}{xyr^2} \int_r \frac{\partial B}{\partial z P} (r-l) dl \right] &= \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} \frac{\partial B}{\partial z P} + \frac{x^2 - 3y^2}{r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2 B}{\partial u \partial z P} l^2 dl + \\ &+ \frac{3x^2 - y^2}{r^3 y x^2} \int_r \frac{\partial^2 B}{\partial v \partial z P} l^2 dl + \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial u^2 \partial z P} l^2 dl - \\ &- \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial v^2 \partial z P} l^2 dl - \frac{2}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial u^2 \partial z P} l^3 dl + \frac{2}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial v^2 \partial z P} l^3 dl, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2}{xy} \int_r \frac{\partial C}{\partial_x P} (r-l) dl \right] &= -\frac{x^2+y^2}{x^2 y^2} \frac{\partial C}{\partial_x P} + \frac{3y^2+x^2}{r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial_x P} l^2 dl + \\
 &+ \frac{3x^2+y^2}{r^3 y x^2} \int_r \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial_x P} l^2 dl - \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial u^2 \partial_x P} l^2 dl - \\
 &- \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial v^2 \partial_x P} l^2 dl + \frac{2}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial u^2 \partial_x P} l^3 dl + \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial v^2 \partial_x P} l^3 dl,
 \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2}{xr} \int_r \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{x^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \frac{2}{x r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl = \\
 &= -\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{3}{x r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{y}{x^2 r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{x^2-y^2}{x^2 y r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} dl \right] &= \frac{2}{x^3 r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} dl - \frac{1}{y^2 x^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \\
 &+ \frac{2y}{x^3 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \frac{x^2-y^2}{x^2 y r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl = \frac{2}{x^3} \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} - \\
 &- \frac{x^2+3y^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial_y \Lambda} + \frac{y^2+3x^2}{2r^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl + \\
 &+ \frac{3y^2+x^2}{2r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{r}{x^2 y} \int_r \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{x^3 r} \int_r \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} dl + \frac{y^2-x^2}{y^2 x^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l dl - \frac{2y}{x^3 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \\
 &+ \frac{1}{x^2 y r} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl = -\frac{2}{x^3} \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} + \frac{3y^2-x^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \\
 &+ \frac{3x^2-y^2}{2r^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{x^2-3y^2}{2r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2}{y r} \int_r \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{y^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l dl + \frac{2}{y r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl = \\
 &= -\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial_x \Lambda} + \frac{3}{y r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{x}{y^2 r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{x^2-y^2}{y^2 x r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{y^3 r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} dl - \frac{2x}{y^3 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l dl + \frac{1}{y^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l dl + \\
 &+ \frac{x^2-y^2}{x y^2 r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl = -\frac{2}{y^3} \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} + \frac{y^2+3x^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \\
 &- \frac{x^2+3y^2}{2|r|^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl - \frac{3x^2+y^2}{2|r|^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{|r|}{y^2 x} \int_r \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} dl \right] &= -\frac{2}{|r| y^3} \int_r \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} dl - \frac{2x}{y^3 |r|^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl + \\
&+ \frac{x^2 - y^2}{y^2 x^2 |r|^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{1}{xy^2 |r|} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl = \\
&= -\frac{2}{y^3} \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} + \frac{3x^2 - y^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \frac{3y^2 - x^2}{2|r|^3 xy^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl + \\
&+ \frac{y^2 - 3x^2}{2|r|^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Последние два слагаемых в левой части (5.8) преобразуем, подставляя (1.13).

Получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \frac{2}{y} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \right) - \\
&- \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{2}{x} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_y \Lambda} \right) = \\
&= \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \frac{2}{y^3} \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} - \frac{2}{y^3} \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} + \\
&+ \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{2}{x^3} \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} + \frac{2}{x^3} \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Из результатов (6.21) — (6.30) следует, что

левая часть (5.8) тождественно равна

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2} (F_2 - F_1) - \frac{1}{y^2} (F_2 + F_1) - \frac{3}{|r|^3 x} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial u} l^2 dl + \frac{3}{|r|^3 y} \int_r \frac{\partial (F_2 + F_1)}{\partial v} l^2 dl - \\
&- \frac{y}{|r|^3 x^2} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial v} l^2 dl + \frac{x}{|r|^3 y^2} \int_r \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial u} l^2 dl + \\
&+ \frac{4}{|r|^4} \int_r \frac{\partial}{\partial_x P} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) \right] l^2 (r - l) dl,
\end{aligned}$$

где F_1 и F_2 определены по (6.6) и (6.7).

Прямое исследование формул показывает, что если условия (6.5) и (6.10) удовлетворены, то верхнее выражение равно нулю. Другими словами, из (6.5) и (6.10) следует (5.8).

§7. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ (5.9)

В этом параграфе мы покажем, что условия (6.5) и (6.10) достаточны для (5.9).

Подставляя $\rho = A \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi + C$ в (5.9), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \left[2 \frac{\partial^2 B}{\partial_x \partial_y \Lambda} \cos 2\varphi + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - 2 \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \cos 2\varphi - 2 \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \right. \\ & + 4 \frac{\partial B}{\partial_x P} \cos 2\varphi + 4 \frac{\partial C}{\partial_x P} \left. \right] + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[2 \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} \sin 2\varphi \right] - \\ & - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[2 \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \sin 2\varphi \right] + 4 \cot \varphi \left[\frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right] - 4 \tan \varphi \left[-\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} \right] = 4(\cot \varphi - \tan \varphi) \frac{\partial B}{\partial_x P} + 4(\cot \varphi + \tan \varphi) \frac{\partial C}{\partial_x P} + 4 \tan \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \\ & - 4 \cot \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2(\cot \varphi + \tan \varphi) \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + 2(\cot \varphi + \tan \varphi) \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \\ & + 2(\cot \varphi - \tan \varphi) \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - 2(\tan \varphi - \cot \varphi) \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} = \\ & = 4 \cot \varphi (F_1 + F_2) - 4 \tan \varphi (F_2 - F_1) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

§8. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ (5.4)

Мы можем исследовать (5.4) также как и уравнение (5.8) в §6, т.е. выделим слагаемых, имеющих порядок r^{-1} в разложении Тейлора для сумм. Мы получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)} \left[\frac{x}{y} (F_1 + F_2) - \frac{y}{x} (F_2 - F_1) + \frac{\partial^2 (B + C)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 (B - C)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2 \frac{\partial A}{\partial_x P} \right] = 0 \end{aligned}$$

Используя уравнения (6.5), мы приходим к следующему результату:

Из условий (6.5) и (5.4) следует

$$F_3 = \frac{\partial^2 (B + C)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 (B - C)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2 \frac{\partial A}{\partial_x P} = 0. \quad (8.1)$$

Используя (6.12) – (6.20) получаем, что левая часть (5.4) тождественно равна

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)} \left[\frac{x}{y} (F_1 + F_2) - \frac{y}{x} (F_2 - F_1) - \frac{x^2}{y|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial u} l^2 dl + \right. \\ & + \frac{y}{|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial u} l^2 dl - \frac{x}{|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial v} l^2 dl + \\ & + \left. \frac{y^2}{x|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial u} l^2 dl + F_3 - \frac{x}{|r|^3} \int_r \frac{\partial F_3}{\partial u} l^2 dl - \frac{y}{|r|^3} \int_r \frac{\partial F_3}{\partial v} l^2 dl \right]. \end{aligned}$$

С одной стороны, это тождество можно использовать для проверки (8.1), а с другой стороны, для доказательства того, что из уравнений (6.5), (8.1) следует (5.4).

§9. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Мы резюмируем полученные результаты :

Флаговая функция $\rho \in C^{(3)}$ имеющая вид (1.13) удовлетворяет условию второго порядка тогда и только тогда, если коэффициенты A , B и C удовлетворяют уравнениям (6.5), (6.10) и (8.1).

Согласно Теореме 3 эти уравнения дают необходимые и достаточные условия того, что валюация Ψ , соответствующая флаговой функции $\rho \in C^{(3)}$, порождает, с помощью (1.7) и (1.8), локально-конечную знакопеременную меру в $\mathbb{E}$.

Заметим, что дифференцируя (1.14) по $\partial_x P$, мы получим (6.10). Приведем полное множество уравнений :

$$\rho(P, \omega, \varphi) = A(P, \Lambda_x) \sin 2(\varphi, x) + B(P, \Lambda_x) \cos 2(\varphi, x) + C(P, \omega), \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 (B+C)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 (B-C)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \right) + \frac{\partial A}{\partial_x P} = 0, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B-C)}{(\partial_x P)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B+C)}{(\partial_y P)^2} = 0. \quad (9.5)$$

Результаты работы [3] и настоящей статьи приводят к следующей теореме :

Пусть Ψ_F — валюация на $U_{\mathbb{E}}$, порожденная флаговой функцией $\rho \in C^{(3)}$ с помощью (1.7) и (1.8). Валюация Ψ_F порождает локально-конечную знакопеременную меру в $\mathbb{E}$ тогда и только тогда, если ρ имеет вид (9.1) и функции A , B и C удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9.2) — (9.5).

Сделаем замечания, касающиеся этих уравнений.

Условия (9.2) — (9.4) вместе эквивалентны уравнению

$$2 \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_{\varphi+\pi/2} \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_{\varphi+\pi/2} P \partial_\varphi \Lambda} - \frac{\partial^3 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_\varphi \Lambda \partial_\varphi} = 0. \quad (9.5)$$

Для доказательства, продифференцируем (9.1), получаем (сравните с (6.2), (6.3))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P} &= \frac{\partial A(P, \Lambda_x)}{\partial_x P} \sin 2\varphi + \frac{\partial B(P, \Lambda_x)}{\partial_x P} \cos 2\varphi + \frac{\partial C(P, \omega)}{\partial_x P}, \\ \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi} &= 2 A(P, \Lambda_x) \cos 2\varphi - 2 B(P, \Lambda_x) \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_{\varphi+\pi/2} \Lambda} &= -\sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \\ &+ \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda}, \\ \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_{\varphi+\pi/2} P \partial_\varphi \Lambda} &= -\sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \\ &- \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda}, \\ \frac{\partial^3 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_\varphi \Lambda \partial_\varphi} &= 2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2 \cos 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \\ &+ 2 \cos 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + 2 \cos 2\varphi \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \\ &- 2 \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - 2 \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \\ &- 2 \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - 2 \sin 2\varphi \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_y \Lambda}. \end{aligned}$$

Напомним, что F_1 , F_2 и $\frac{1}{2}F_3$ суть левые части формул (9.2) — (9.4) соответственно.

Мы получаем

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} F_3 \sin 2\varphi &= \\ &= \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_{\varphi+\pi/2} \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_{\varphi+\pi/2} P \partial_\varphi \Lambda} - \frac{\partial^3 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_\varphi \Lambda \partial_\varphi} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, из $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ вытекает дифференциальное уравнение (9.8).

Обратно, из (9.6) следует, что

$$F_1 + F_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} F_3 \sin 2\varphi = 0. \quad (9.7)$$

Так как (9.7) есть линейная комбинация независимых функций $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ и 1, мы получаем (9.2) — (9.4).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть Ψ_F — валюация на U_E , порожденная флаговой функцией $\rho \in C^{(3)}$ с помощью (1.7) и (1.8). Валюация Ψ_F порождает локально-конечную знакоперсменную меру в E тогда и только тогда, когда ρ удовлетворяет условиям Теоремы 3, а также следующему дифференциальному уравнению :

$$2 \frac{\partial \rho(P, \omega, \Omega)}{\partial_{\omega} P} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \Omega)}{\partial_{\Omega} P \partial_{\mathcal{N}} \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \Omega)}{\partial_{\mathcal{N}} P \partial_{\Omega} \Lambda} - \frac{\partial^2}{\partial_{\Omega} P \partial_{\Omega} \Lambda} \left(\frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

где $\mathcal{N}$ — направление перпендикулярное как Ω , так и ω , $\frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial \varphi}$ обозначает производную в $\mathcal{E}_1(\omega)$, $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ соответствует Ω .

Авторы благодарят профессора Р. В. Амбарцумяна за полезные дискуссии и замечания.

ABSTRACT. Guided by a decomposition in Combinatorial Integral Geometry, we define a class of finitely additive functionals on the sets from the so-called Buffon ring in the space of planes in $\mathbb{R}^3$. Under certain smoothness assumptions, we find necessary and sufficient conditions when these functionals define a signed measure in that space. They are formulated in terms of the rate of decrease of the so-called pyramidal excess. Some necessary conditions are found in terms of certain "flag densities" on which the functionals depend.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Москва, Наука, 1989.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", Известия НАН Армении, серия Математика, том 29, №4, стр. 7 – 63, 1994.
4. R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
5. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ ", Известия НАН Армении, серия Математика, том 27, №5, стр. 1 – 21, 1992.
6. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками", Известия НАН Армении, серия Математика, том 27, №5, стр. 69 – 80, 1992.

7. Г. С. Сукиасян, "О порождении мер пространственными флаговыми функциями", Известия НАН Армении, серия Математика, том 28, №2, стр. 61 – 70, 1993.
8. Р. В. Амбарцумян, "Об одном конечно-аддитивном функционале в $\mathbb{R}^3$ ", Известия НАН Армении, серия Математика, том 28, №2, стр. 51 – 60, 1993.

16 июля 1996

Ереванский государственный университет,
Институт математики,
Национальной Академии Наук Армении
E-mail : rhambart@aua.am

О МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТЫХ ФРЕЙМОВЫХ ВАЛЮАЦИЯХ

Г. С. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 4, 1996

В работе исследуются валюации (конечно-аддитивные функционалы), определенные на множестве выпуклых многогранников в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Эти валюации зависят от примарных функций, заданных в пространстве "фреймов". Показано, что все простые валюации могут быть представлены в виде фреймовых валюаций. На основе классической теоремы Гаусса-Остроградского получены необходимые и достаточные условия порождения фреймовыми валюациями локально-конечных знакопеременных мер в $\mathbb{R}^n$.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье исследуются валюации (конечно-аддитивные функционалы), определенные на множестве выпуклых компактных многогранников в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Главным вопросом является следующий: *при каких условиях эти валюации порождают локально-конечную знакопеременную меру в $\mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывную относительно n -мерной меры Лебега?* Другими словами, когда существует локально-конечная знакопеременная мера в $\mathbb{R}^n$, значения которой на выпуклых многогранниках совпадают со значениями валюации?

Исзучаемые валюации зависят от функций, которые мы называем *примарными*. Примарные функции определены в пространстве "фреймов" (см. определение в §1) и поэтому мы называем наши валюации "фреймовыми". Фреймовые валюации на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ были исследованы в [6], и настоящую работу можно считать обобщением результатов из [6]. Однако заметим, что в [6] вместо

термина "фрейм" использован термин "флаг". Нам кажется, что термин "флаг" более подходит для валюаций в интегрально-геометрических пространствах (см. [1] – [4]). Во многих отношениях изучение флаговых и фреймовых валюаций взаимосвязано.

Валюация называется *простой*, если она равна нулю на многогранниках, не имеющих внутренних точек. Ниже мы рассматриваем только простые валюации. В §1 дано определение фреймовой валюации и доказано, что все простые валюации могут быть представлены в виде фреймовых валюаций с "центрированной" примарной функцией. В §2 рассмотрен важный частный случай, т.н. валюация Остроградского, для которой условия порождения меры вытекают из классической теоремы Гаусса–Остроградского. В §3 получено достаточное условие порождения меры для общих фреймовых валюаций. В §4 показано, что для валюаций в $\mathbb{R}^3$, зависящих от "центрированных" примарных функций, последнее условие является также и необходимым.

§1. ФРЕЙМОВЫЕ ВАЛЮАЦИИ

Обозначим через $\mathcal{H}$ класс всех выпуклых компактных многогранников в $\mathbb{R}^n$. Ниже мы рассматриваем многогранники только из $\mathcal{H}$. Через L_n обозначим n -мерную меру Лебега. Многогранник $H \in \mathcal{H}$ называем *гиперплоским*, если $L_n(H) = 0$, но $L_{n-1}(\partial H) \neq 0$, где ∂H – граница (гиперповерхность) многогранника H . Условимся считать, что гиперплоские многогранники имеют две $(n-1)$ -мерные конгруэнтные грани, внешние нормали которых противоположно направлены. Многогранник H называем *вырожденным*, если $L_{n-1}(\partial H) = 0$.

Отображение $\mu : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, \infty)$ называется *валюацией*, если оно аддитивно в следующем смысле : для любых $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ таких, что $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, имеет место

$$\mu(H_1 \cup H_2) + \mu(H_1 \cap H_2) = \mu(H_1) + \mu(H_2).$$

Ясно, что если валюация равна нулю на гиперплоских многогранниках, то она равна нулю и на вырожденных многогранниках, т.е. она простая.

Флагом называется упорядоченная n -ка $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$, где f_k — это k -мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, причем $f_0 \subset f_1 \subset \dots \subset f_{n-1}$. Иногда пишем $f_0 = P \in \mathbb{R}^n$, термин "плоскость" мы используем вместо ныне популярного термина "аффинная плоскость", т.е. мы не предполагаем, что наши плоскости обязательно содержат начало координат O . Пусть дан флаг $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$, ортогональную проекцию начала O на гиперплоскость f_{n-1} обозначим через O_{n-1} . Далее, ортогональную проекцию точки O_{n-1} на f_{n-2} обозначим через O_{n-2} и т.д. Выпуклая оболочка точек $O_0, O_1, \dots, O_n$ ($O_0 = f_0, O_n = O$) называется *симплексом Шлефли* флага f [5] и обозначается через $S(f)$. Очевидно, $S(f)$ зависит от выбора точки O и может быть гиперплоским или даже вырожденным.

Рассмотрим ортогональный *фрейм* (репер)

$$\bar{f} = (P, \omega_1, \dots, \omega_n), \quad P \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_i \in \Omega_{n-1}, \quad \cos(\widehat{\omega_i \omega_j}) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где Ω_{n-1} обозначает $(n-1)$ -мерную сферу направлений с центром в начале координат O . Мы называем P *вершиной*, а $\omega_i, i = 1, \dots, n$ *направлениями* фрейма $\bar{f}$. Каждому фрейму $\bar{f}$ соответствует флаг $f = (P, f_1, \dots, f_{n-1})$, где f_k — k -мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящая через вершину P перпендикулярно направлениям $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$. Отметим, что каждому флагу соответствуют 2^n фреймов. Фрейм $\bar{f}$ полностью определяется парой (f, d) , где $d = (d_1, \dots, d_n)$ есть n -ка чисел, принимающих значения -1 или $+1$, причем $d_k = +1$, если k -тая координата точки O относительно репера $\bar{f}$ положительна. Симплекс Шлефли $S(\bar{f})$ фрейма называем симплекс Шлефли соответствующего флага.

Говорим, что *флаг* $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ *произведен многогранником* H , если каждая k -мерная плоскость $f_k, k = 0, 1, \dots, n-1$ содержит k -мерную грань D_k

многогранника H . Через $\mathcal{F}(H)$ обозначим множество флагов, произведенных многогранником H . Заметим, что из $f \in \mathcal{F}(H)$ следует, что f_0 есть вершина многогранника H . Через $\overline{\mathcal{F}}(H)$ обозначим (конечное) множество *внешних фреймов*. По определению, $\overline{f} = (f, d) = (P, \omega_1, \dots, \omega_n) \in \overline{\mathcal{F}}(H)$ тогда и только тогда, когда $f = (P, f_1, \dots, f_{n-1}) \in \mathcal{F}(H)$ и $\omega_k, k = 1, \dots, n$ совпадают с направлением *относительной внешней нормали*.

Объясним последний термин. Сперва определим ω_n , как направление обычной внешней нормали к гипергранни $D_{n-1} \subset f_{n-1}$. Затем рассмотрим (единственную) $(n-2)$ -мерную грань D_{n-2} многогранника H , лежащую в f_{n-2} . В качестве ω_{n-1} возьмем направление той внешней нормали к D_{n-2} , которая лежит в f_{n-1} . Используя индукцию по размерности, определим остальные направления $\omega_k, k = n-2, \dots, 1$. Например, для n -мерного прямоугольного параллелепипеда H_0 , содержащего начало координат O , множество $\overline{\mathcal{F}}(H_0)$ состоит из тех фреймов $\overline{f} = (f, d)$, что $f \in \mathcal{F}(H_0)$ и $d_k = -1$ для всех $k = 1, \dots, n$. Если многогранник H вырожденный, то полагаем $\overline{\mathcal{F}}(H) = \emptyset$.

Пусть $F(\overline{f})$ – функция в пространстве фреймов со значениями из $(-\infty, \infty)$. Рассмотрим в $\mathcal{H}$ следующий функционал :

$$\Psi_F(H) = \sum_{\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}(H)} F(\overline{f}), \quad H \in \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

Легко проверить, что Ψ_F является валюацией, которую мы называем *фреймовой валюацией с примарной функцией F* .

Пусть $\overline{f} = (f, d)$ и $\overline{f}' = (f, d')$ суть два фрейма с одинаковым флагом f и такими направлениями, что у n -ок d и d' совпадают все компоненты, кроме одной. Если для всех таких пар имеет место $F(\overline{f}) = -F(\overline{f}')$, то функцию F называем *антисимметричной*.

Лемма 1.1. *Если примарная функция $F(\overline{f})$ антисимметрична, то фреймовая валюация (1.1) является простой.*

Доказательство следует из нашей договоренности относительно гиперплоских многогранников.

Функцию от фреймов $F(\bar{f})$ называем *центрированной* (относительно точки O), если F равна нулю на всех фреймах, у которых объем симплекса Шлефли равен нулю.

Теорема 1.1. *Всякая простая валюация $\mu(H)$ представима в виде фреймовой валюации с некоторой антисимметричной центрированной примарной функцией $F(\bar{f})$:*

$$\mu(H) = \Psi_F(H) = \sum_{\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}(H)} F(\bar{f}). \quad (1.2.)$$

Доказательство: Пусть $I_H(P)$ – индикаторная функция многогранника H :

$$I_H(P) = \begin{cases} 1 & \text{при } P \in H, \\ 0 & \text{при } P \notin H, \end{cases} \quad P \in \mathbb{R}^n.$$

Г. Хадвигер [5] показал, что индикаторная функция любого многогранника представима (почти всюду) в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций симплексов Шлефли. Покажем, что одним из таких представлений является

$$I_H(P) = \sum_{\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}(H)} (-1)^{N(d)} I_{S(\bar{f})}(P), \quad (1.3)$$

где $N(d)$ – число положительных элементов в $d = (d_1, \dots, d_n)$. Докажем (1.3) по индукции относительно размерности пространства $\mathbb{R}^n$. На прямой ($n = 1$) произвольный многогранник $H \in \mathcal{H}$ есть отрезок $[a, b]$, $a < b$; множество $\bar{\mathcal{F}}(H)$ состоит из двух фреймов $(a, \text{sign}(a))$ и $(b, -\text{sign}(b))$, где

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} -1 & \text{при } a < 0, \\ +1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для первого фрейма имеем $S(a) = [0, a]$ и $(-1)^{N(\text{sign}(a))} = -\text{sign}(a)$, для второго же $S(b) = [0, b]$ и $(-1)^{N(d)} = \text{sign}(b)$. Представление (1.3) следует из легко проверяемого тождества

$$I_{[a,b]}(P) = \text{sign}(b) I_{[0,b]} - \text{sign}(a) I_{[0,a]}.$$

Предположим теперь, что (1.3) справедливо для пространств $\mathbb{R}^k$, $k < n$. На гиперплоскости $e \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим выпуклый $(n-1)$ -мерный многогранник D . Через $T(D)$ обозначим n -мерную пирамиду с вершиной O и основанием D . Для почти всех точек $P \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$I_H(P) = \sum_{D_i \in \mathcal{D}(H)} c_i I_{T(D_i)}(P), \quad (1.4)$$

где $\mathcal{D}(H)$ – множество гиперграней D_i многогранника H . Коэффициент $c_i = -1$, если гиперплоскость e_i , содержащая D_i , отделяет точку O от внутренности многогранника H , и $c_i = 1$ в противном случае. Для применения индукционного предположения представим грань D_i как многогранник в $(n-1)$ -мерном пространстве e_i , причем роль начала координат играет ортогональная проекция O_{n-1} точки O на e_i . Для почти всех точек $P \in e_i$ имеем по индукционному предположению

$$I_{D_i}(P) = \sum_{\vec{f}^{(n-1)} \in \vec{\mathcal{F}}(D_i)} (-1)^{N(d^{(n-1)})} I_{S(\vec{f}^{(n-1)})}(P). \quad (1.5)$$

В (1.5) флаг $\vec{f}^{(n-1)}$, соответствующий фрейму $\vec{f}^{(n-1)}$, имеет $n-1$ компонент, которые лежат в e_i . Легко проверить (см. [5]), что для любой конечной совокупности чисел b_k и любых многогранников D_k , лежащих в гиперплоскости e , из равенства

$$\sum_k b_k I_{D_k}(P) = 0, \quad P \in e$$

вытекает

$$\sum_k b_k I_{T(D_k)}(P) = 0, \quad P \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, из (1.5) получаем

$$I_{T(D_i)}(P) = \sum_{\vec{f}^{(n-1)} \in \vec{\mathcal{F}}(D_i)} (-1)^{N(d^{(n-1)})} I_{T(S(\vec{f}^{(n-1)}))}(P) \quad (1.6)$$

почти для всех $P \in \mathbb{R}^n$. Если $\vec{f}^{(n-1)} = (f_0, f_1, \dots, f_{n-2}) \in \mathcal{F}(D_i)$, то

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-2}, e_i) \in \mathcal{F}(H), \quad D_i \subset e_i, \quad D_i \in \mathcal{D}(H). \quad (1.7)$$

По определению симплекса Шлефли имеем $T(S(f^{(n-1)})) = S(f)$. Из (1.4) – (1.7) получим

$$I_H(P) = \sum_{\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}(H)} (-1)^{N(d^{(n-1)})} c(\bar{f}) I_{S(f)}(P), \quad (1.8)$$

где $c(\bar{f}) = -1$, если у флага (1.7) гиперплоскость e_i разделяет начало O и внутренность многогранника H , и $c(\bar{f}) = +1$ в противном случае. Следовательно, $c(\bar{f}) = -d_n$. Из определения числа $N(d)$ следует, что

$$(-1)^{N(d^{(n-1)})} c(\bar{f}) = (-1)^{N(d^{(n)})}.$$

Формула (1.3) доказана. Индикаторные функции в тождестве (1.3) можно заменить значениями произвольной простой валюации μ . Следовательно,

$$\mu(H) = \sum_{\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}(H)} (-1)^{N(d)} \mu(S(f)).$$

Таким образом, мы получили $\mu(H) = \Psi_f(H)$ с примарной функцией

$$F(f, d) = (-1)^{N(d)} \mu(S(f)). \quad (1.9)$$

Так как валюация μ простая, из $L_n(S(f)) = 0$ вытекает $\mu(S(f)) = 0$. Следовательно, фреймовая функция (1.9) центрированная. Теорема 1.1 доказана.

Замечание 1. Если в (1.9) в качестве μ взять плоскую меру Лебега L_2 , то получим, что площадь многоугольника есть фреймовая валюация с центрированной примарной функцией

$$F(P, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} r^2 \sin(\omega_1 - \varphi) \sin(\omega_2 - \varphi), \quad (1.10)$$

где (r, φ) – полярные координаты точки $P = f_0$ (см. [6]). Несмотря на то, что примарная функция (1.10) может изменять свой знак, она порождает посредством (1.1) неотрицательную меру L_2 . Заметим также, что примарная функция (1.9) зависит от выбора начала координат, следовательно представление (1.2) не единственно.

§2. ВАЛЮАЦИЯ ОСТРОГРАДСКОГО

Пусть $\iint_H$ обозначает n -мерный интеграл по многограннику $H \in \mathcal{H}$, а $\int_{\partial H}$ означает $(n-1)$ -мерный поверхностный интеграл по гиперповерхности ∂H . Рассмотрим функцию $\rho(X, \omega)$ определенную на $\mathbb{R}^n \times \Omega_{n-1}$. Предполагаем, что $\rho(X, \omega)$ непрерывна по $X \in \mathbb{R}^n$ при всех $\omega \in \Omega_{n-1}$. Отметим, что $\rho(X, \omega)$ можно рассматривать как функцию на фреймах, не зависящую от некоторых аргументов. Рассмотрим функционал

$$\Phi_\rho(H) = \int_{\partial H} \rho(X, \omega) L_{n-1}(dX), \quad H \in \mathcal{H}, \quad (2.1)$$

где ω — направление внешней нормали к гиперповерхности ∂H в точке $X \in \partial H$. Для вырожденных многогранников D положим $\Phi_\rho(D) = 0$. Из аддитивных свойств интеграла заключаем, что функционал Φ_ρ является валюацией. Мы называем (2.1) *валюацией Остроградского с плотностью ρ* .

Лемма 2.1. *Валюация Остроградского с плотностью ρ является простой тогда и только тогда, когда ρ антисимметрична: для всех $X \in \mathbb{R}^n$ и $\omega \in \Omega_{n-1}$ имеет место*

$$\rho(X, \omega) = -\rho(X, -\omega), \quad (2.2)$$

где $-\omega$ — направление, диаметрально противоположное ω .

Доказательство следует из нашей договоренности относительно гиперплоских многогранников.

Лемма 2.2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ зафиксирована декартова система координат, и пусть $F_i(X) = F_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ — некоторые функции в $\mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по всем аргументам. Для всякой валюации Остроградского Φ_ρ и любом выборе функций F_i имеет место равенство*

$$\Phi_\rho(H) = \iint_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(X) L_n(dX) +$$

$$+ \int_{\partial H} \left[\rho(Y, \omega) - \sum_{i=1}^n F_i(Y) \cos(\widehat{\omega \omega_i}) \right] L_{n-1}(dY), \quad H \in \mathcal{H}, \quad (2.3)$$

где ω_i — направления координатных осей Ox_i , $i = 1, \dots, n$; ω — направление внешней нормали к гиперповерхности ∂H в точке $Y \in \partial H$; $\widehat{\omega \omega_i}$ — угол между ω и ω_i .

Доказательство : Классическая формула Гаусса–Остроградского в n -мерном пространстве имеет вид

$$\iint_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(X) L_n(dX) = \int_{\partial H} \sum_{i=1}^n F_i(Y) \cos(\widehat{\omega \omega_i}) L_{n-1}(dY), \quad (2.4)$$

где $F_i(X)$ — произвольные функции в $\mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по всем аргументам. Равенство (2.3) непосредственно следует из (2.1) и (2.4).

Через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс локально конечных знакопеременных мер на $\mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега. Пусть $F_i(X)$, $i = 1, \dots, n$ — некоторые функции в $\mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по всем аргументам. Рассмотрим valuation Остроградского Φ_ρ с плотностью

$$\rho(X, \omega) = \sum_{i=1}^n F_i(X) \cos(\widehat{\omega \omega_i}). \quad (2.5)$$

Для плотности (2.5) выполнено условие (2.2), следовательно valuation Φ_ρ является простой. После подстановки выражения (2.5) в (2.3) поверхностный интеграл в (2.3) обратится в ноль. В силу Леммы 2.2 заключаем, что Φ_ρ порождает меру из $\mathcal{M}_n$, плотность $a(X)$ которой (относительно меры Лебега L_n) равна

$$a(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(X, \omega_i). \quad (2.6)$$

Следовательно, представление (2.5) есть достаточное условие продолжимости valuation Остроградского до знакопеременной меры из $\mathcal{M}_n$. Ниже мы покажем, что это условие является также и необходимым. Будем писать $\rho(X, \omega) \in \mathbb{C}^{(1)}$, если для всякого направления ω функция $\rho(X, \omega)$ имеет непрерывные производные по x_i , $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2.1. *Валюция Остроградского Φ_ρ с плотностью $\rho \in \mathbb{C}^{(1)}$ порождает знакопеременную меру $m \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда существуют функции $F_i(X)$ такие, что ρ имеет вид (2.5). Если (2.5) имеет место, то выражение (2.6) не зависит от выбора декартовой системы координат и представляет собой плотность меры m относительно меры Лебега L_n .*

Доказательство : Пусть существует такая мера $m \in \mathcal{M}_n$, что $\Phi_\rho(H) = m(H)$ для всех $H \in \mathcal{H}$. Для доказательства того, что ρ имеет вид (2.5), аппроксимируем многогранник H конечными суммами $D_k = \cup K_j^{(k)}$ непересекающихся n -мерных параллелепипедов $K_j^{(k)}$, гиперграни которых ортогональны какой-либо координатной оси (и параллельны остальным осям). Так как выражение

$$J(X, \omega) = \rho(X, \omega) - \sum_{i=1}^n \rho(X, \omega_i) \cos(\widehat{\omega \omega_i})$$

равно нулю на гиперплоскостях, ортогональных какой-либо координатной оси, имеем

$$\int_{\partial K_j^{(k)}} \left[\rho(Y, \omega) - \sum_{i=1}^n \rho(Y, \omega_i) \cos(\widehat{\omega \omega_i}) \right] L_{n-1}(dY) = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.3) и (2.7) получаем

$$m(D_k) = \iint_{D_k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(X, \omega_i) L_n(dX).$$

Имеем $m(H) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(D_k)$, следовательно

$$m(H) = \Phi_\rho(H) = \iint_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(X, \omega_i) L_n(dX).$$

С помощью Леммы 2.2 получаем, что равенство (2.7) справедливо для всех многогранников $H \in \mathcal{H}$.

Теперь предположим противное : пусть для некоторой пары (X_0, ω_0) равенство (2.5) не справедливо. Для определенности пусть $J(X_0, \omega_0) > 0$. Так как $\rho \in \mathbb{C}^{(1)}$, то существует такая окрестность U точки $X_0 \in \mathbb{R}^n$, что $J(X, \omega_0) > 0$

при всех $X \in U$. Рассмотрим n -мерный симплекс S_0 , у которого все вершины лежат в U , n гиперграней ортогональны какой-либо координатной оси, а $(n+1)$ -ая гипергрань D расположена так, что ее внешняя нормаль имеет направление ω_0 . Согласно (2.7) имеет место $\int_{\partial S_0} J dL_{n-1} = 0$. Учитывая, что $J(X, \omega) = 0$ в точках $X \in \partial S_0 \setminus D$, получим

$$\int_D J(X, \omega_0) dL_{n-1} = 0.$$

Но с другой стороны, при $X \in D$ имеем $J(X, \omega_0) > 0$ и $L_{n-1}(D) > 0$. Полученное противоречие доказывает Теорему 2.1.

В следующем параграфе мы получим некоторые условия, при выполнении которых простая валюация представима в виде (2.1).

§3. ПРИВЕДЕНИЕ К СЛУЧАЮ ВАЛЮАЦИИ ОСТРОГРАДСКОГО

Назовем k -усеченным флагом последовательность $f^{(k)} = (f_k, \dots, f_{n-1})$, где f_j — j -мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, причем $f_k \subset f_{k+1} \subset \dots \subset f_{n-1}$, $k < n$. Пусть включение $f^{(k)} \subset f$ означает, что $f^{(k)} = (f_k, \dots, f_{n-1})$ есть подпоследовательность флага $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$. Рассмотрим также k -усеченные фреймы:

$$\bar{f}^{(k)} = (P, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n), \quad P \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_i \in \Omega_{n-1}, \quad \cos(\widehat{\omega_i \omega_j}) = 0, \quad i \neq j.$$

Каждому усеченному фрейму $\bar{f}^{(k)} = (P, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$ соответствует усеченный флаг $f^{(k)} = (f_k, \dots, f_{n-1})$, где f_j — j -мерные плоскости, проходящие через P перпендикулярно направлениям $\omega_{j+1}, \dots, \omega_n$, $j = k, \dots, n-1$. Заметим, что усеченные фреймы с разными вершинами могут отображаться в один и тот же усеченный флаг.

Зафиксируем многогранник $H \in \mathcal{H}$. Говорим, что усеченный флаг $f^{(k)}$ произведен многогранником H , если существует произведенный многогранником H флаг $f \in \mathcal{F}(H)$, для которого $f^{(k)} \subset f$. Говорим, что усеченный фрейм $\bar{f}^{(k)}$ произведен многогранником H , если соответствующий ему усеченный флаг $f^{(k)}$ произведен многогранником H .

Обозначим через $\mathcal{F}_k(H)$, $k = 1, \dots, n-1$ конечное множество последовательностей $\tau = (\omega_{k+1}, \dots, \omega_n) \in \Omega_{n-1}^{n-k}$ длины $n-k$, таких что существует усеченный фрейм $\bar{f}^{(k)} = (P, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$, произведенный многогранником H . Заметим, что для каждого $\tau = (\omega_{k+1}, \dots, \omega_n) \in \mathcal{F}_k(H)$ существует несколько произведенных многогранником H усеченных фреймов $\bar{f}^{(k)} = (P_i, \tau)$ с разными вершинами P_i . Однако из условия $\tau \in \mathcal{F}_k(H)$ следует, что все эти вершины P_i лежат в одной k -мерной плоскости $f_k(\tau)$, которая ортогональна направлениям $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$. Через $D_k(\tau)$ обозначим (единственную) k -мерную грань многогранника H , лежащую в $f_k(\tau)$. Например, если $\tau = (\omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathcal{F}_1(H)$, то в $\bar{\mathcal{F}}(H)$ существует ровно два произведенных многогранником H фрейма вида $\bar{f} = (P, \omega, \tau)$, а именно $\bar{f} = (P, \omega_1, \tau)$ и $\bar{f}' = (P', \omega'_1, \tau)$. При этом обязательно $\omega'_1 = -\omega_1$, а точки P, P' являются концами (одномерного) ребра $D_1(\tau)$.

Пусть $F(\bar{f}) = F(P, \omega_1, \dots, \omega_n)$ — антисимметричная функция в пространстве фреймов. Фреймовую валюацию с примарной функцией F можно представить в виде

$$\Psi_F(H) = \sum_{(\omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathcal{F}_1(H)} [F(P_1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) + F(P_2, -\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)], \quad H \in \mathcal{H}, \quad (3.1)$$

где P_1, P_2 — концы ребра $D_1(\omega_2, \dots, \omega_n)$. Предположим, что существует производная по направлению ω_1 :

$$F_1(P, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{\partial}{\partial_{\omega_1} P} F(P, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{\partial}{\partial_{-\omega_1} P} F(P, -\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad (3.2)$$

Ввиду антисимметричности фреймовой функции F , значения производной F_1 не зависят от ω_1 при фиксированных $\omega_2, \dots, \omega_n$. По формуле Ньютона–Лейбница из (3.1) получаем

$$\Psi_F(H) = \sum_{\tau = (\omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathcal{F}_1(H)} \int_{D_1(\tau)} F_1(P, \omega_2, \dots, \omega_n) L_1(dP). \quad (3.3)$$

По определению валюации Остроградского имеем

$$\Psi_F(H) = \sum_{\tau' \in \mathcal{F}_2(H)} \Phi_{F_1}(D_2(\tau')), \quad (3.4)$$

где Φ_{F_1} — двумерная валюация Остроградского с примарной функцией (3.2), определенная на 2-плоскости e , содержащей 2-грань $D_2(\tau')$:

$$\Phi_{F_1}(D_2) = \int_{\partial D_2} F_1(P, \omega_2(P), \omega_3, \dots, \omega_n) L_1(dP). \quad (3.5)$$

Здесь ω_2 — направление относительной внешней нормали к границе плоского многоугольника $\partial D_2(\tau')$ в точке $P \in \partial D_2$, а $\tau' = (\omega_3, \dots, \omega_n)$.

Теперь предположим, что двумерная валюация Остроградского (3.5) порождает меру $m \in \mathcal{M}_2$ на каждой 2-плоскости e . Из Теоремы 2.1 следует, что для любого $\tau = (\omega_3, \dots, \omega_n)$ плотность $F_1(P, \omega_2, \tau) = F_1(P, \omega_2, \dots, \omega_n)$, как функция двух переменных $P \in e$ и $\omega_2 \in \Omega_1$, удовлетворяет условию (2.5), а именно

$$F_1(P, \omega_2, \tau) = F_1(P, \xi, \tau) \cos \varphi + F_1(P, \eta, \tau) \sin \varphi, \quad (3.6)$$

где (ξ, η) — некоторая система декартовых координат на плоскости e , φ — угол между ω_2 и ξ -осью. Отметим, что (см. [6]) представление (3.6) не зависит от выбора системы координат (ξ, η) .

В нижеприведенной Теореме 3.1 мы используем термин "Тест k ". Дадим необходимые разъяснения.

Тест 1: Пусть задана антисимметричная фреймовая функция F , построим функцию F_1 согласно (3.2). Если на каждой 2-плоскости F_1 удовлетворяет условию (3.6), то скажем, что *Тест 1 имеет положительный исход*.

Предположим, что уже построена функция $F_{k-1}(P, \omega_k, \dots, \omega_n)$, определенная на $(k-1)$ -усеченных фреймах. Построим функцию $F_k(P, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$, определенную на k -усеченных фреймах, согласно следующему алгоритму. Через $e(P, \tau_k)$,

$\tau_k = (\omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$ обозначим k -мерную плоскость, проходящую через P ортогонально направлениям $\omega_{k+1}, \dots, \omega_n$. Пусть $\{\xi_i\}_1^k$ — направления осей некоторой декартовой системы координат на k -плоскости e . Положим

$$F_k(P, \tau_k) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial \xi_i} F_{k-1}(P, \xi_i, \tau_k). \quad (3.7)$$

Если для всех $\tau_k = (\omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$ справедливо представление

$$F_{k-1}(P, \omega, \tau_k) = \sum_{i=1}^k F_{k-1}(P, \xi_i, \tau_k) \cos(\widehat{\omega \xi_i}), \quad (3.8)$$

то выражение (3.7) не зависит от выбора системы координат на k -плоскости $e(P, \tau_k)$. В свою очередь, и F_k может удовлетворять условию (3.8), т.е.

$$F_k(P, \omega, \tau_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} F_k(P, \xi_i, \tau_{k+1}) \cos(\widehat{\omega \xi_i}), \quad \tau_{k+1} = (\omega_{k+2}, \dots, \omega_n). \quad (3.8')$$

Тест k : Пусть задана фреймовая функция F_{k-1} , построим функцию F_k согласно (3.7). Если на каждой $(k+1)$ -плоскости F_k удовлетворяет условию (3.8'), то скажем, что *Тест k имеет положительный исход*.

Отметим, что классическая теорема Гаусса–Остроградского и ее следствия (в частности (3.8)) требуют наложения условий *гладкости*. В нашем случае достаточно предположить, что примарная функция $F(P, \omega_1, \dots, \omega_n)$ при всех $\omega_1, \dots, \omega_n$ имеет непрерывные производные по P порядка $n-1$. Применяя $n-1$ раз Теорему 2.1, получим основной результат статьи.

Теорема 3.1. Пусть Ψ_F — простая валюация в $\mathbb{R}^n$ с примарной функцией $F \in C^{(n-1)}$. Если все Тесты $1, \dots, n-1$ последовательно имеют положительные исходы, то Ψ_F можно продолжить до знакопеременной меры $m \in \mathcal{M}_n$.

Замечание 2. Теорема 3.1 дает достаточное условие для порождения меры, тогда как Теорема 2.1 — необходимое и достаточное. Необходимость условия (3.8) доказана ниже для случая простых фреймовых валюаций в $\mathbb{R}^3$ с центрированными примарными функциями.

§4. ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ФРЕЙМОВЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 4.1. *Простая фреймовая валюация в $\mathbb{R}^3$ с гладкой центрированной примарной функцией F может быть продолжена до меры $m \in \mathcal{M}_3$ тогда и только тогда, когда функция F_1 , определенная по (3.2), имеет вид (3.6), а функция F_2 , определенная посредством (3.7) с $k = 2$, имеет вид (3.8'), т.е. оба Теста 1 и 2 имеют положительные исходы.*

Доказательство : Достаточность следует из Теоремы 3.1, докажем необходимость. Из Теоремы 2.1 видно, что достаточно доказать необходимость условия (3.6). Пусть Ψ_F – простая фреймовая валюация с гладкой центрированной примарной функцией F , и пусть существует такая мера $m \in \mathcal{M}_3$, что $\Psi_F(H) = m(H)$ для всех $H \in \mathcal{H}$. Рассмотрим двумерную валюацию Остроградского Φ_{F_1} (см. (3.5)) на произвольной плоскости e , пусть $p(e)$ – расстояние от начала координат O до плоскости e . Каждому многоугольнику $D \subset e$ поставим в соответствие пирамиду $T(D)$ с вершиной O и основанием D . Отметим, что $L_3(T(D)) = 1/3 p(e) L_2(D)$. Из центрированности примарной функции F следует, что $m(T(D)) = \Psi_F(T(D)) = \Phi_{F_1}(D)$. Будем уменьшать многоугольник D , стягивая его к точке. Так как $m \in \mathcal{M}_3$, то имеет место

$$m(T(D)) = c L_3(T(D)) + o(L_3(T(D))) = \frac{1}{3} c p(e) L_2(D) + o(L_2(D)).$$

Следовательно, $\Phi_{F_1}(D) = c' L_2(D) + o(L_2(D))$, где c, c' – некоторые постоянные.

Таким образом, двумерная валюация Остроградского Φ_{F_1} порождает в e знакопеременную меру из $\mathcal{M}_2$. В силу Теоремы 2.1, получим, что F_1 имеет вид (2.5), а следовательно и (3.6). Теорема 4.1 доказана.

ABSTRACT. The paper considers valuations defined on convex polyhedrons in Euclidian spaces $\mathbb{R}^n$. The valuations depend on primary functions defined in the space of "frames". All so-called simple valuations can be represented as frame valuations. Using classical Gauss–Ostrogradski theorem, necessary and sufficient conditions are found, when a simple frame valuation actually generates a locally finite signed measure in $\mathbb{R}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "О конечно-аддитивных функционалах в $\mathbb{R}^3$ ", Изв. НАН Армении, Математика, том. 28, № 2, стр. 51 – 59, 1993.
2. R. V. Ambartzumian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 – 626, 1995.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 1 – 57, 1994.
4. Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 58 – 74, 1994.
5. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., Наука, 1967.
6. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том. 29, № 4, стр. 75 – 89, 1994.

2 декабря 1995

Институт математики
НАН Армении
E-mail: rhambart@aua.am

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 31

НОМЕР 4

1996

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Сборник статей

Страницы

Предисловие редактора.....	4
Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях Р. В. Амбарцумян	5
Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II В. К. Оганян, А. Н. Давтян	53
О многомерных простых фреймовых валюациях Г. С. Сукиасян	90

CONTENTS

VOLUME 31

NUMBER 4

1996

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

ANALYTICAL IMPLICATIONS OF COMBINATORIAL INTEGRAL GEOMETRY, II

Collection of Papers

	PAGES
Editor's Preface	1
Integral geometry of pregeodesics on 2-manifolds R. V. Ambartzumian	2
Finitely additive functionals in the space of planes, II V. K. Oganian, A. N. Davtian	44
On simple frame valuations in many dimensions H. S. Sukiasian	75 - 87