ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5–6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում:

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ В ТУННЕЛЕСТРОЕНИИ

Р. В. Амбарцумян, А. Дер Кюрегян, В. К. Оганян, Г. С. Сукиасян, Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

В статье рассматривается пуассоновская модель для случайных наборов трещин в толще скалы. Основным параметром изучения является линейная интенсивность λ_K опасных блоков, образующихся в результате экскавации туннеля сквозь скалу. В случае трехнаправленной модели задача полностью решается с помощью представления λ_K через элементарные функции. Полиномиальная зависимость λ_K от неизвестных вероятностных параметров обсуждается для более общей модели. Обсуждается возможность безопасной экскавации (т. е. ситуация с $\lambda_K = 0$).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Прокладывается туннель сквозь толщу скалы, содержащей случайные трещины, которые разбивают скалу на компоненты, называемые блоками. Некоторые блоки, выходящие на поверхность туннеля, оказываются нестабильными. Такие блоки называются *опасными*. Падение опасного блока может привести к падению других блоков. Должным образом фиксируя опасные блоки, этого можно избежать. Для оценки стоимости крепёжных работ необходимо иметь математическое ожидание числа опасных блоков.

В рамках трансляционно–инвариантных моделей задача сводится к вычислению интенсивностей λ_K процесса опасных блоков. Настоящая работа дает полное решение этой задачи в случае *трехнаправленной* модели Пуассона, рассмотренной другими авторами (см. [2] и ссылки в ней). Кроме того, для обобщения этой модели, рассматривающей определенные случайные плоские углы, приводится многочленное выражение для λ_K, удобное для приближенных вычислений. Обсуждается существование безопасных туннельных экскаваций, т.е. ситуаций, где

Данное исследование стало возможным благодаря финансовой поддержке Университета Калифорнии в Беркли и Инженерного Исследовательского Центра Американского Университета Армении.

$\lambda_K = 0$, и зависимость λ_K от наклона крыши туннеля.

§2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Трансляционно–инвариантный пуассоновский процесс плоскостей, управляемый общими мерами в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей доставляют естественный класс моделей, описывающих трещины. Пуассоновский процесс, управляемый мерой m в $\mathbb{E}$ определяется следующим образом (см. [1]). Рассмотрим s непересекающихся областей $D_1, ..., D_s$ в пространстве $\mathbb{E}$ и неотрицательные целые числа $k_1, ..., k_s$. Пусть A – множество реализаций (событий), для которых ровно k_i точек (плоскостей) лежат в D_i, $i = 1, ..., s$. Согласно определению пуассоновского процесса $\mathbb{P}$ в $\mathbb{E}$, управляемого мерой m, имеем

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{s} \frac{(m(D_i))^{k_i}}{k_i!} \, e^{-m(D_i)}.$$

Эта формула дает полное описание пуассоновских процессов плоскостей. Пуассоновский процесс $\mathbb{P}$ будет трансляционно–инвариантным, если управляющая мера m – трансляционно–инвариантна (см. [1]).

Согласно теореме интегральной геометрии [1] такая мера необходимо имеет факторизованный вид

$$m(de) = dp \; \mu(d\omega),$$

где dp – одномерная мера лебега на $(-\infty, \infty)$, а μ – мера на единичной полусфере, т.е. на пространстве пространственных направлений. Параметры p, ω – обычные координаты плоскости $e : p$ – расстояние e от начала O, ω – нормальное пространственное направление к e. Мера m полностью определяется по "розе направлений" μ. Следовательно, любой трансляционно–инвариантный пуассоновский процесс в $\mathbb{E}$ *полностью определяется выбором меры* μ.

Рассмотрим туннель T. Предположим, что T имеет бесконечную длину, горизонтальную крышу, ограниченную двумя параллельными прямыми и прямоугольным поперечным сечением. Плоскости пуассоновского процесса делят дополнение T в $\mathbb{R}^3$ на многогранники $\{B_i\}$. Многогранники B_i мы назовем *блоками*, если они соприкасаются с поверхностью T (т.е. если $B_i \cap \partial T \neq \emptyset$). Блоки могут быть нестабильными.

Определение 1. Рассмотрим блок B_i. Предположим, что все остальные блоки B_j, $j \neq i$ фиксированы в своих положениях (например, представим, что все трещины заполнены цементом, *кроме границы* B_i). Блок B_i называется *опасным блоком*, если он падает вниз (т.е. с нулевой горизонтальной компонентой движения) после такой фиксации остальных блоков. Стены туннеля предполагаются стабильными так, что падения могут произойти только с крыши.

Следующее замечание мотивирует наше применение этого частного определения опасных блоков :

Если поверхность каждого опасного блока цементирована в вышеуказанном смысле, то крыша как целое становится стабильной.

В настоящей работе мы рассматриваем *трехнаправленный случай*

$$\mu = \mu_0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \delta_{\omega_i}. \tag{1}$$

Здесь ω_i – три пространственных направления (т.е. *точки* на единичной полусфере), λ_i – три положительных числа, δ_ω – мера Дирака, сконцентрированная в ω, т.е. для любого подмножества A из полусферы имеем

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega \in A \\ 0, & \text{если} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

Пусть F – крыша туннеля. Через e_F обозначим плоскость, содержащую F. На e_F выберем декартову координатную систему, в которой уравнения ограничивающих крышу туннеля прямых имеют вид $x = 0$ и $x = W$, где W – ширина туннеля так, что

$$F = \{(x, y) : 0 < x < W\}.$$

Мы предпочитаем описывать пространственное направление ω следующим образом : Выбираем плоскость e с нормальным направлением ω, и *прямую* $e \cap e_F$ *будем рассматривать как направленную с направлением в полуплоскость* $y > 0$ (см. Рис. 1). Теперь каждая прямая $e \cap e_F$ разделяет e_F на *правую* и *левую* полуплоскости. Положим $\omega = (\phi, \nu)$, где $\phi \in (0, \pi)$ – направление прямой $e \cap e_F$ в плоскости e_F, $\nu \in (0, \pi)$ – плоский угол между *правой* полуплоскостью e_F и той частью e, которая лежит *над* e_F.

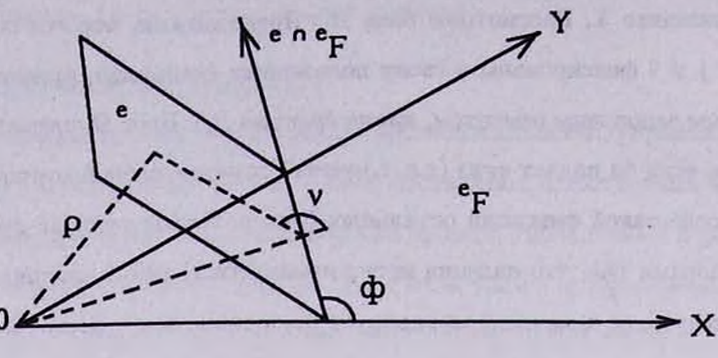

Рис. 1.

Запишем ω_i, от которой зависит мера μ в (1), в виде $\omega_i = (\phi_i, \nu_i)$. Мы предполагаем, что

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \pi.$$

Предложение 1. *Пуассоновский процесс случайных плоскостей, управляемый мерой $m_0 = dp\,\mu_0(d\omega)$, где μ_0 – роза направлений вида (1), может быть получен с помощью следующей стохастической конструкции :*

1) Пусть L_i – прямая в плоскости e_F, ортогональная ϕ_i и проходящая через O. На каждой L_i построим пуассоновский точечный процесс $\{p_m^{(i)}\}$ постоянной интенсивности

$$\sigma_i = \lambda_i \sin \nu_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

2) Через каждую точку $p_m^{(i)}$ проведем прямую $g_m^{(i)} \subset e_F$, перпендикулярную прямой L_i, в результате чего получим три случайных семейства параллельных прямых $\{g_m^{(i)}\} \subset e_F$, $i = 1, 2, 3$.

3) Через каждую прямую $g_m^{(i)}$ проведем плоскость $e_m^{(i)}$, образующую плоский угол ν_i с e_F.

§3. ТИПЫ МНОГОУГОЛЬНЫХ СЛЕДОВ

Три семейства случайных прямых $\{g_m^{(i)}\}$ порождают случайное разбиение e_F на ограниченные выпуклые многоугольники, которые мы называем *многоугольными следами* и обозначаем через P_i. Случайный набор многоугольных следов мы обозначаем через $\{P_i\}$.

Пусть P – многоугольный след. Пусть $s_1, ..., s_n$ – стороны P, отсчитываемые по направлению часовой стрелки, начиная от вершины V многоугольного следа P, имеющей наименьшее значение y-координаты. Эта вершина будет *единственной*, если мы предположим, что *каждая* ϕ_i *принадлежит внутренности* $(0, \pi)$. Через v обозначим (единственную) вершину P, имеющую наибольшее значение y-координаты. Мы также определяем

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{если многоугольник } P \text{ лежит в правой} \\ & \text{полуплоскости и ограничен продолжением } s_j \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

j_i – индекс семейства прямых, которому принадлежит сторона s_i.

Предложение 2. *Максимальное число сторон многоугольного следа* P_i *– шесть. Поэтому число возможных последовательностей* $((j_1, b_1), ..., (j_n, b_n))$ *конечно.*

Это утверждение следует из замечания, что каждый многоугольник P_i есть пересечение (общая часть) не более чем трех полос (мы имеем ввиду полосы между последовательными параллелями в семействе). •

Вершины V и v разделяют периметр P на две ломанные, состоящие из сторон $s_1, ..., s_k$ и $s_{k+1}, ..., s_n$. Другими словами, v – общая вершина для сторон s_k и s_{k+1}. Область изменения k от 1 до 4.

Лемма 1. *Для любого многоугольного следа значения бинарных параметров* $b_1, ..., b_k$ *всегда равны* 1, *а значения* $b_{k+1}, ..., b_n$ *равны* 0.

Определение 2. Последовательность

$$t = (j_1, ..., j_n) \tag{3}$$

называется *типом* многоугольного следа P.

Лемма 2. *Целые числа* j_i *всегда удовлетворяют неравенствам :*

1) $j_1 > ... > j_k$ *для* $k \neq 1$ *;*

2) $j_{k+1} > ... > j_n$ *для* $k \neq n - 1$ *;*

3) $j_k < j_{k+1}$ *;*

4) $j_1 > j_n$.

Условия 1) — 4) достаточны : для любых трех фиксированных направлений $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$, $\phi_i \in (0, \pi)$ *и последовательности* $(j_1, ..., j_n)$*, удовлетворяющей условиям 1) — 4), существует многоугольник соответствующего типа.*

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из выпуклости многоугольного следа.

Достаточность. Всевозможные последовательности, удовлетворяющие условиям 1) – 4), описаны в Таблице 1. Каждая последовательность, найденная в Таблице 1, допускает реализацию выпуклого многоугольника соответствующего типа. Рисунок 2 представляет многоугольные реализации всех типов, отмеченных в Таблице 1 : два треугольных типа, три ромбоидальных, шесть трапецоидальных, шесть пятиугольных и один шестиугольный тип. •

§4. ОТ МНОГОУГОЛЬНИКОВ К БЛОКАМ

Пусть $P \subset e_F$ – многоугольный след. Будем говорить, что блок B *соответствует* P, если P – грань B. Через $I_K(P)$ мы обозначим индикатор

$$I_K(P) = \begin{cases} 1, & \text{если блок } B, \text{ соответствующий } P \text{ есть опасный блок,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а также положим $I_F(P) = 1$, если $P \subset F$ и 0 – в противном случае.

Для типа t определим следующую индикаторную функцию :

$$\mathbf{I}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(I_1(b_i) \cdot I_{(\nu_{j_i} < \pi/2)} + I_0(b_i) I_{(\nu_{j_i} > \pi/2)} \right). \tag{4}$$

Предложение 3. *Для многоугольного следа P типа t*

$$I_K(P) = \mathbf{I}(t) I_F(P). \tag{5}$$

Доказательство. Если $P \subset F$, то $I_K(P) = 1$ тогда и только тогда, когда все плоские углы $\psi_1, ..., \psi_n$ между соответствующими гранями B и внутренностью P меньше $\pi/2$. Если последовательность $t = ((j_1, b_1), ..., (j_n, b_n))$ соответствует многоугольному следу P, то имеем

$$I_{(\psi_j < \frac{\pi}{2})} = I_1(b_i) \cdot I_{(\nu_{j_i} < \pi/2)} + I_0(b_i) I_{(\nu_{j_i} > \pi/2)}, \tag{6}$$

где

$$I_s(b) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s = b \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad s = 0, 1.$$

Уравнение (6) следует из определения углов ψ и ν: ψ_j определяются относительно *внутренности* многоугольника P, а ν_j – в *абсолютном* смысле. •

Таблица 1

n, k	1)	2)	3)	4)	Дополн. условия	Решения ($t =$)
3, 1	—	$j_2 > j_3$	$j_1 < j_2$	$j_1 > j_3$	$j_1 = 1$ или 3	$\emptyset$
					$j_1 = 2$	$(2, 3, 1)$
3, 2	$j_1 > j_2$	—	$j_2 < j_3$	$j_1 > j_3$	$j_3 = 1$ или 3	$\emptyset$
					$j_3 = 2$	$(3, 1, 2)$
4, 1	—	$j_2 > j_3 > j_4$	$j_1 < j_2$	$j_1 > j_4$	—	$(2, 3, 2, 1)$
4, 2	$j_1 > j_2$	$j_3 > j_4$	$j_2 < j_3$	$j_1 > j_4$	$j_1 = 1$	$\emptyset$
					$j_1 = 2$	$(2, 1, 2, 1)$ $(2, 1, 3, 1)$
					$j_1 = 3$, $j_4 = 2$	$(3, 2, 3, 2)$ $(3, 1, 3, 2)$
					$j_1 = 3$, $j_4 = 1$	$(3, 2, 3, 1)$ $(3, 1, 2, 1)$ $(3, 1, 3, 1)$
4, 3	$j_1 > j_2 > j_3$	—	$j_3 < j_4$	$j_1 > j_4$	—	$(3, 2, 1, 2)$
5, 1	—	$j_2 > j_3 >$ $> j_4 > j_5$				$\emptyset$
5, 2	$j_1 > j_2$	$j_3 > j_4 > j_5$	$j_2 < j_3$	$j_1 > j_5$		$(3, 1, 3, 2, 1)$ $(3, 2, 3, 2, 1)$ $(2, 1, 3, 2, 1)$
5, 3	$j_1 > j_2 > j_3$	$j_4 > j_5$	$j_3 < j_4$	$j_1 > j_5$		$(3, 2, 1, 3, 1)$ $(3, 2, 1, 3, 2)$ $(3, 2, 1, 2, 1)$
5, 4	$j_1 > j_2 >$ $> j_3 > j_4$					$\emptyset$
$6, \neq 3$						$\emptyset$
6, 3	$j_1 > j_2 > j_3$	$j_4 > j_5 > j_6$	$j_3 < j_4$	$j_1 > j_6$	—	$(3, 2, 1, 3, 2, 1)$

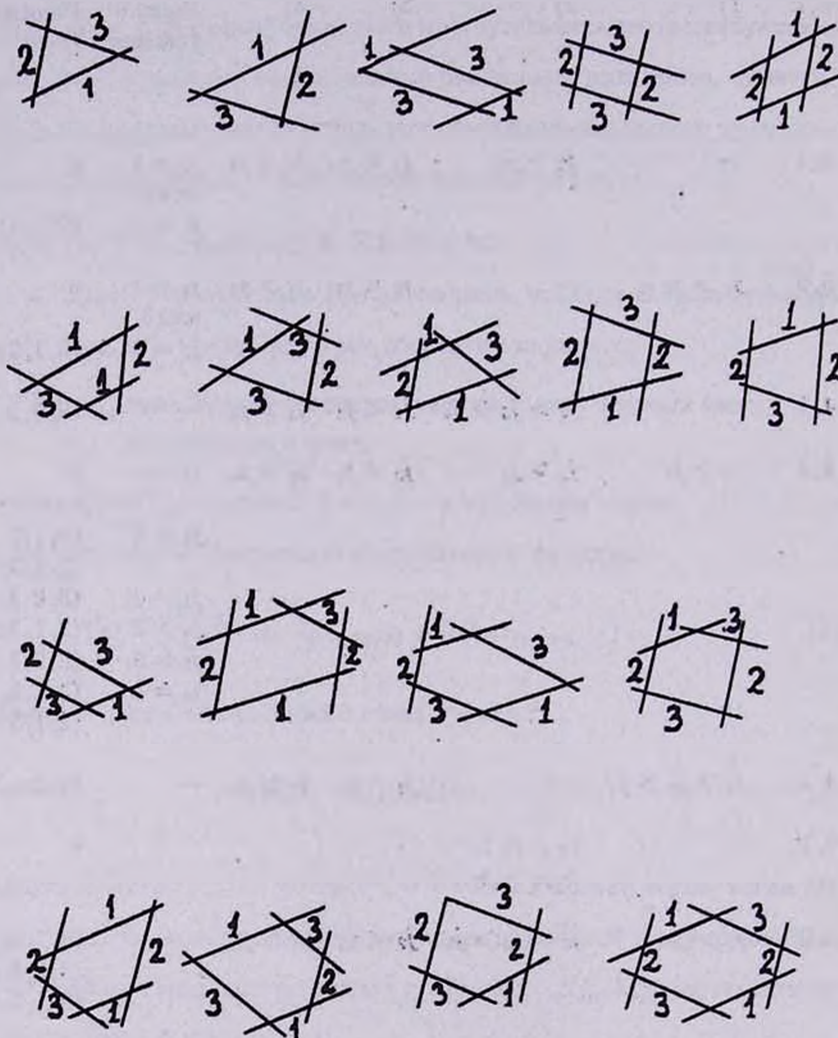

Рис. 2. Многоугольные реализации решений Таблицы 1

§5. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Напомним определение плоских и линейных интенсивностей случайных наборов многоугольников. Мы основываемся на известном определении интенсивности стационарных точечных процессов в $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$ (см. [1]).

Пусть $\{\pi_i\}$ – многоугольный процесс в плоскости $\mathbb{R}^2$. Каждому многоугольнику π_i из процесса мы приписываем точечную марку V_i: $P_i \longmapsto V_i$. По определению, V_i – вершина P_i, имеющая наименьшее значение y-координаты; V_i однозначно определена, если предположить, что с вероятностью 1 π_i не обладают сторонами, параллельными x–оси.

Определение 3. Предположим, что $\{\pi_i\}$ инвариантно относительно трансляций $\mathbb{R}^2$. Тогда *плоская интенсивность процессов многоугольников* $\{\pi_i\}$ является интенсивностью точечного процесса $\{V_i\}$.

Предположим, $\{\pi_i\}$ инвариантно относительно сдвигов плоскости, параллельных y-оси, и что проекция множества $\{V_i\}$ на y-ось – стационарный одномерный точечный процесс $\{V_i^*\}$.

Определение 4. *Линейная интенсивность* процесса многоугольников $\{\pi_i\}$ является интенсивностью одномерного точечного процесса $\{V_i^*\}$.

Хорошо известно [1], что эти интенсивности не зависят от алгоритма построения марок V_i. Приведем список далее рассматриваемых случайных наборов многоугольников и их интенсивностей :

$\{P_i\}$ — многоугольные следы в e_F, плоская интенсивность λ^* ;

$\{P_i\}_K = \{P_i: \quad I_K(P_i) = 1\}$, линейная интенсивность λ_K ;

$\{P_i\}_{t,F} = \{P_i: \quad P_i$ – типа t и $P_i \subset F\}$, линейная интенсивность λ_{tF} ;

$\{P_i: \quad V_i$ – точка пересечения прямых из m-го n-го семейств $\}$, плоская интенсивность λ^*_{mn}.

Все многоугольные наборы в вышеприведенном списке содержатся в $\{P_i\}$. Точнее $\sum \lambda^*_{mn} = \lambda^*$ и $\lambda_K = \sum_t \lambda_{tF} I(t)$.

§6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

Предложение 4. *Плоская интенсивность* λ^*_{mn} *равна*

$$\lambda^*_{mn} = \sigma_m \sigma_n |\sin(\phi_m - \phi_n)|. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм, сторонами которого являются прямые m-го и n-го семейств.

Любые две прямые из m-го и n-го семейств, которые пересекают параллелограмм, пересекаются в его внутренности. Следовательно

$$\lambda^*_{mn} = \sigma_m \sigma_n \frac{h_m h_n}{A},$$

где h_m, h_n – высоты параллелограмма, A – его площадь. Путем элементарных вычислений получим

$$\frac{h_m h_n}{A} = |\sin(\phi_m - \phi_n)|. \qquad \bullet$$

Следствие.

$$\lambda^* = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} \sigma_i \sigma_j |\sin(\phi_i - \phi_j)|.$$

Обозначим через $\sigma_i(j)$ интенсивность точек пересечений прямых из семейства i с прямой семейства j. В качестве версии Предложения 4 имеем

$$\sigma_i(j) = \sigma_i |\sin(\phi_i - \phi_j)|. \tag{8}$$

Определение 5. Через $\mathbf{P}_{(x,y)}$ обозначим вероятностное распределение *типичного* (см. [1]) многоугольного следа, марка V которого совпадает с точкой (x,y), $(x,y) \in e_F$.

Заметим, что $\mathbf{P}_{(x,y)}$ является "сдвинутой версией" $\mathbf{P}_{(0,0)}$. Это означает следующее : предположим, что случайный многоугольник π имеет распределение $\mathbf{P}_{(0,0)}$. Тогда $\overline{O(x,y)}\pi$ будет иметь распределение $\mathbf{P}_{(x,y)}$, где $\overline{O(x,y)}\pi$ есть π, сдвинутый вектором $\overline{O(x,y)}$. Для события K имеем $\mathbf{P}_{(x,y)}(K) = 0$, если $(x,y) \notin F$. Для $(x,y) \in F$ имеем $\mathbf{P}_{(x,y)}(K) \equiv \mathbf{P}_{(x,0)}(K)$. Если для события A имеет место $\mathbf{P}_{(x,y)}(A) \equiv \mathbf{P}_{(x,0)}(A)$, то мы будем использовать обозначение $\mathbf{P}_{(x,y)}(A) = \mathbf{P}_x(A)$.

Применяя стандартные рассуждения [1], мы можем доказать, что

$$\lambda_K = \lambda^* \int_0^W \mathbf{P}_x(K)\,dx. \tag{9}$$

Используя предложение 3 и формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}_x(K) = \sum_t \mathbf{P}_x(\{t\} \cap \{F\})\,\mathbf{I}(t), \tag{10}$$

где событие $\{t\}$ означает, что случайный многоугольник типа t, а событие $\{F\}$ означает, что этот многоугольник лежит внутри F, $\mathbf{I}(t)$ определено в (4), суммирование проводится по всем типам многоугольных следов.

Подставляя (10) в (9), получим

$$\lambda_K = \sum_t \mathbf{I}(t)\lambda_{tF}, \quad \lambda_{tF} = \lambda^* \int_0^W \mathbf{P}_x(\{t\} \cap \{F\})\,dx. \tag{11}$$

Ниже мы опустим фигурные скобки в обозначениях $\{t\}$ и $\{F\}$.

Ясно, что для каждого типа t, где имеются повторяющиеся компоненты (параллельные стороны в соответствующем многоугольнике), получим

$$\mathbf{I}(t) \equiv 0.$$

Следовательно, (11) приводится к следущему :

$$\lambda_K = \mathbf{I}((2,3,1))\,\lambda_{(2,3,1)\cap F} + \mathbf{I}((3,1,2))\,\lambda_{(3,1,2)\cap F}. \tag{12}$$

§7. СТОХАСТИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ ДЛЯ $\mathbf{P}_{(x,y)}$

В этом параграфе мы даем стохастическую конструкцию случайного многоугольника с вероятностным распределением $\mathbf{P}_x$. Обозначим через $\mathbf{P}_{(x,y)}(\,\cdot\,|j_1, j_n)$ условное распределение, полученное из $\mathbf{P}_{(x,y)}$ при условии, что имеет место событие $\{j_1, j_n\} = \{$ две стороны, встречающиеся в (x,y), имеют направления ϕ_{j_1} и $\phi_{j_n}\}$, $j_1, j_n \in \{1,2,3\}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ угловую область в полуплоскости $y > 0$, ограниченную двумя лучами, с вершиной в точке (x,y) и направлениями ϕ_{j_1} и ϕ_{j_n}. Возьмем три независимых пуассоновских процесса прямых, описанных в пункте 2) Предложения 1. Пусть D_1 – минимальная решетка, ограниченная прямыми из этих процессов, содержащая точку (x,y).

Теорема 1. *Распределение случайного многоугольника* $A \cap D_1$ *совпадает с распределением* $\mathbf{P}_{(x,y)}(\cdot|j_1, j_n)$.

Доказательство повторяет доказательство для аналогичных стохастических конструкций в [1], глава 9 и основано на пуассоновской природе случайного набора трещин.

Следствие.

$$\mathbf{P}_{(x,y)}(\cdot) = \sum_{j_1, j_n} \frac{\lambda^*_{j_1 j_n}}{\lambda^*} \mathbf{P}_{(x,y)}(\cdot|j_1, j_n).$$

§8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ $\mathbf{P}_x(t \cap F|j_1, j_n)$

Определим *периметр Минковского* $M(D)$ выпуклого многоугольника D по формуле

$$M(D) = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \, pr_i(D) = \frac{1}{2} \sum a_i \sum_{j=1,2,3} |\cos(a_i, L_j)| \, \sigma_j,$$

где $pr_i(D)$ – длина проекции D в направлении, перпендикулярном к ϕ_i, в последнем выражении первая сумма распространяется по всем сторонам a_i многоугольника D, (a_i, L_j) – угол между a_i и прямой L_j (см. Предложение 1).

Теперь мы опишем алгоритм вычисления $\mathbf{P}_x(t \cap F|j_1, j_n)$ для данного n–гонального типа $t = (j_1, ..., j_n)$ (Заметим, что если первый и последний элементы типа t отличаются от j_1 и j_n, то соответствующее условное распределение равно нулю).

Пусть p_i – одномерная координата на прямой L_i. Прямая, проходящая через точку p_i, ортогональная к L_i, имеет уравнение

$$x \sin \phi_i - y \cos \phi_i = p_i. \tag{13}$$

Шаг 1. Мы решаем относительно x, y систему из двух уравнений вида (13), записанную

для $i = j_1$ и $i = j_2$. Решение обозначим через x_1, y_1;

затем для $i = j_2$ и $i = j_3$. Решение обозначим через x_2, y_2;

....

наконец для $i = j_{n-1}$ и $i = j_n$. Решение обозначим через x_{n-1}, y_{n-1}.

Точки $Q_1 = (x_1, y_1), Q_2 = (x_2, y_2), ..., Q_{n-1} = x_{n-1}, y_{n-1}$ зависят от n параметров $p_{j_1}, p_{j_2}, ..., p_{j_n}$.

Значения p_{j_1} и p_{j_n} мы берем как расстояния от начала координат O прямых, проходящих через $V = (x, 0)$ с направлениями j_1 и j_n, соответственно. Это оставляет $n-2$ параметра $p_{j_2}, ..., p_{j_{n-1}}$ свободными.

Шаг 2. Пусть x_i, y_i – координаты Q_i, определенные на первом шагу. Определим индикаторную функцию

$$I_1(Q_1, ..., Q_{n-1}) = \prod I_F(Q_i),$$

где $I_F(Q) = 1$, если $Q \in F$ и 0 – в противном случае.

$$I_2(Q_1, ..., Q_{n-1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } V, Q_1, ..., Q_{n-1} \text{ – вершины выпуклого многоугольника пронумерованные по часовой стрелке} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

В случае $I_2 = 1$ величина M определена для многоугольника $D = V, Q_1, ..., Q_{n-1}$. Остается вычислить интеграл

$$\mathbf{P}_x(t \cap F | j_1, j_n) = \sigma_{j_2} ... \sigma_{j_{n-1}} \int e^{-M} I_1 I_2 \, dp_{j_2} ... dp_{j_{n-1}}. \tag{14}$$

§9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТИПОВ

Из (11) и (12) следует, что достаточно вычислить

$$\mathbf{P}_x((2,3,1) \cap F) = \frac{\lambda_{12}^*}{\lambda^*} \mathbf{P}_x((2,3,1) \cap F | 1, 2).$$

Мы используем обозначения Рис. 3.

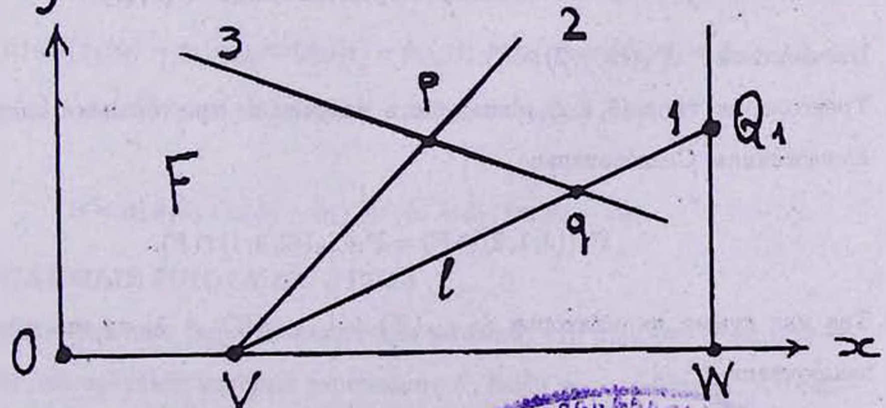

Рис. 3.

Событие, что марка V – точка пересечения прямых из 1-го и 2-го семейств имеет вероятность $\frac{\lambda_{12}^*}{\lambda^*}$. Пусть q – точка пересечения прямой $V\,Q_1$ с прямой из семейства 3, которая является ближайшей к V. Для любого $l > 0$ вероятность события $l \leq q \leq l + dl$ равна $\sigma_3(1)\exp(-\sigma_3(1)l)dl$ (напомним, что $\sigma_3(1)$ – интенсивность пуассоновского процесса пересечений прямых из семейства 3 на $V\,Q_1$, см. (8)).

Вероятность $\mathbf{P}_x((2,3,1)\cap F)$ может быть получена как интеграл от произведения $\mathbf{P}(A(x,l))\cdot\mathbf{P}(B(x,l))$ с вышеприведенной плотностью, где $A(x,l)$ – событие, что ни одна прямая из семейства 2 не пересекает сегмент V,q;

$B(x,l)$ – событие, что ни одна прямая из семейства 1 не пересекает сегмент V,p (см. Рис. 3).

Имеем $\mathbf{P}(A) = \exp(-\sigma_2(1)l)$ и $\mathbf{P}(B) = \exp(-\sigma_1(2)p)$, где

$$p = p(l) = \frac{l\sin(\phi_3 - \phi_1)}{\sin(\phi_3 - \phi_2)}.$$

Следовательно

$$\mathbf{P}_x((2,3,1)\cap F) = \frac{\lambda_{12}^*}{\lambda^*}\int_0^{|V\,Q_1|} \sigma_3(1)\exp(-M(P))I(l)dl, \tag{15}$$

где λ_{12}^* и $\sigma_i(j)$ определены в (7), (8), $I(l)$ – индикаторная функция множества $p \in F$:

$$I(l) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad -x < p(l)\cos\phi_2 < W - x \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выражение

$$M(P) = \sigma_3(1)l + \sigma_2(1)l + \sigma_1(2)p$$

совпадает с периметром Минковского треугольника $P = (V,q,p)$.

Вычисление $\mathbf{P}_x((3,1,2)\cap F)$.

Треугольник типа $(3,1,2)$ может быть получен из треугольника типа $(2,3,1)$ *отражением*. Следовательно

$$\mathbf{P}_x((3,1,2)\cap F) = \mathbf{P}_{W-x}((2,3,1)\cap F).$$

Так как сумма индикаторов $I_{(2,3,1)}(K) + I_{(3,1,2)}(K) = 1$, то мы приходим к заключению :

$$\lambda_K = \lambda_{(3,1,2)\cap F} = \lambda_{(2,3,1)\cap F}. \tag{16}$$

Отметим, что двукратное интегрирование (11), (15) можно провести и записать результат в терминах элементарных функций. Аналитические выражения, которые мы получаем, различны для следующих четырех областей угловых параметров ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 :

1) $0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \frac{\pi}{2}$;
2) $0 < \phi_1 < \phi_2 < \frac{\pi}{2} < \phi_3 < \pi$;
3) $0 < \phi_1 < \frac{\pi}{2} < \phi_2 < \phi_3 < \pi$;
4) $\frac{\pi}{2} < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \pi$.

Мы получаем следующий результат :

для случая 1)

$$\lambda_K = \frac{B}{A}\left[W + \frac{\cos\phi_2\,\sin(\phi_3-\phi_1)}{A}\left(\exp\left(-\frac{AW}{\cos\phi_2\,\sin(\phi_3-\phi_1)}\right)-1\right)\right],$$

для случая 2)

$$\lambda_K = \frac{B}{A}\left[W + \frac{\cos\phi_1\,\sin(\phi_3-\phi_2)}{A}\left(\exp\left(-\frac{AW}{\cos\phi_1\,\sin(\phi_3-\phi_2)}\right)-1\right)\right],$$

для случая 3)

$$\lambda_K = \frac{B}{A}\left[W - \frac{\cos\phi_3\,\sin(\phi_2-\phi_1)}{A}\left(\exp\left(\frac{AW}{\cos\phi_3\,\sin(\phi_2-\phi_1)}\right)-1\right)\right],$$

для случая 4)

$$\lambda_K = \frac{B}{A}\left[W - \frac{\cos\phi_2\,\sin(\phi_3-\phi_1)}{A}\left(\exp\left(\frac{AW}{\cos\phi_2\,\sin(\phi_3-\phi_1)}\right)-1\right)\right],$$

где

$$A = \sigma_3(\alpha)\sin(\phi_3(\alpha)-\phi_1(\alpha))\,\sin(\phi_3(\alpha)-\phi_2(\alpha)) + \sigma_2(\alpha)\sin(\phi_2(\alpha)-\phi_1(\alpha))\times$$
$$\times\sin(\phi_3(\alpha)-\phi_2(\alpha)) + \sigma_1(\alpha)\sin(\phi_2(\alpha)-\phi_1(\alpha))\sin(\phi_3(\alpha)-\phi_1(\alpha)),$$

и

$$B = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sin(\phi_2-\phi_1)\,\sin(\phi_3-\phi_1)\sin(\phi_3-\phi_2).$$

§10. СЛУЧАЙНЫЕ ПЛОСКИЕ УГЛЫ

Вышеуказанное решение было получено при условии, что плоские углы между крышей F и плоскостями, которые пересекают F, были неслучайными. Альтернативная модель, в которой указанные плоские углы становятся случайными, может быть предпочтительней, тогда как неслучайный статус трех направлений ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, а также пуассоновский случайный характер прямых $\{g_m^{(i)}\}, i = 1,2,3$ сохраняется. Этого мы достигаем приписыванием *случайного плоского угла* $\psi_m^{(i)}$ каждой $g_m^{(i)}$. Мы предположим, что эти плоские углы независимы и для каждого i имеют одно и то же вероятностное распределение Ψ_i.

Пусть $e_m^{(i)}$ – плоскость, соответствующая паре $g_m^{(i)}, \psi_m^{(i)}$.

Эта модель имеет то важное аналитическое преимущество, что и принцип разложения по многоугольным типам и стохастическая конструкция, использованная в §8, остаются в силе. Отметим, что при вышеуказанных условиях относительно $\{g_m^{(i)}\}$ и $\{\psi_m^{(i)}\}$ пуассоновское случайное множество плоскостей $e_m^{(i)}$ управляема мерой, сконцентрированной на трех кривых полусферы направлений.

Тем не менее, основные формулы не будут содержать индикаторные коэффициенты. Они будут заменены определенными вероятностями. Значения p_i этих вероятностей останутся свободными параметрами модели. Мы рассмотрим дуги (см. §2 об определении угла ν)

$$a_i = \{\omega = (\phi_i, \nu) : \nu \in (0, \pi/2]\} \quad \text{и} \quad o_i = \{\omega = (\phi_i, \nu) : \nu \in (\pi/2, \pi)\},$$

которые соответствуют *острому* и *тупому* значениям ν при фиксированном ϕ_i, $i = 1,2,3$.

Вывод интенсивности λ_K опасных блоков в этой более общей модели в общих чертах напоминает вывод формулы (11). Поэтому мы просто записываем результат :

$$\lambda_K = \sum_t \mathbf{P}_t(K)\lambda_{tF}, \quad \lambda_{tF} = \lambda^* \int_0^W \mathbf{P}_x(t \cap F)dx, \tag{17}$$

где

$$\mathbf{P}_t(K) = \prod_{i=1}^{n} \left(I_1(b_i) \cdot p_{j_i} + I_0(b_i) \cdot (1 - p_{j_i})\right)$$

и

$$p_i = \Psi_i(a_i), \quad i = 1,2,3.$$

Как и ожидалось, мелкие детали структуры Ψ_i неважны; решение зависит только от значений p_i. Интенсивности λ_t в разложении (17) определяются так же как в (11) и их значения для треугольных типов приведены в §9. Так как теперь значения $P_t(K)$ для нетреугольных форм необязательно равны нулю, то перед нами встает задача вычисления значений λ_t для полного списка типов. Это будет предметом нашего рассмотрения в следующем параграфе.

§11. ЧАСТИЧНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ДЛЯ НЕТРЕУГОЛЬНЫХ ТИПОВ

В формуле (14) переменная интегрирования интерпретировалась как длина стороны треугольника. Аналогичный выбор переменной интегрирования может быть применен также к другим многоугольным типам.

Вычислим $\mathbf{P}_x((3,1,2,1)\cap F)$, см. Рис. 4.

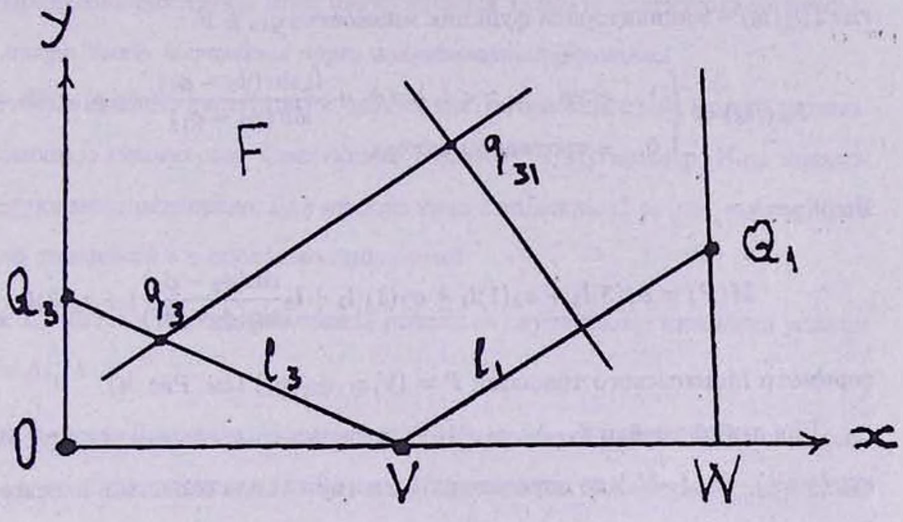

Рис. 4.

Событие, что V – точка пересечения прямых из 1-го и 3-го семейств, имеет вероятность $\frac{\lambda^*_{13}}{\lambda^*}$.

Пусть q_1 – точка пересечения прямой VQ_1 с прямой из семейства 2, ближайшей к V, и пусть q_3 – точка пересечения прямой VQ_3 с прямой из семейства 1, которая является ближайшей к V. Вероятности событий $l_1 \le q_1 \le l_1 + dl_1$ и $l_3 \le q_3 \le l_3 + dl_3$ равны $\sigma_2(1)\exp(-\sigma_2(1)l_1)dl_1$ и $\sigma_1(3)\exp(-\sigma_1(3)l_3)dl_3$, соответственно, см. (8). Вероятность $\mathbf{P}_x((3,1,2,1)\cap F)$ может быть получена как интеграл с вышеуказанной плотностью произведения $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$, где

A – событие, что ни одна прямая из семейства 3 не пересекает отрезок q_3, q_{31}

(см. Рис 4.) ;

B – событие, что ни одна прямая из семейства 2 не пересекает отрезок V, q_3 (см. Рис. 4).

Имеем

$$\mathbf{P}(A) = \exp\left[-\sigma_3(1)\left(l_1 + l_3\frac{\sin(\phi_3-\phi_2)}{\sin(\phi_2-\phi_1)}\right)\right], \qquad \mathbf{P}(B) = \exp(-\sigma_2(3)l_3).$$

Следовательно

$$\mathbf{P}_x((3,1,2,1)\cap F) = \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda^*}\int_0^{|VQ_1|}\int_0^{|VQ_3|}\sigma_1(3)\sigma_2(1)\exp(-M(P))I(l_1,l_3)dl_1dl_3, \tag{18}$$

где $I(l_1, l_3)$ – индикаторная функция множества $q_{13} \in F$:

$$I(l_1,l_3) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad -x < l_1\cos\phi_1 + \dfrac{l_3\sin(\phi_3-\phi_1)}{\sin(\phi_2-\phi_1)}\cos\phi_2 < W - x \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выражение

$$M(P) = \sigma_1(3)l_3 + \sigma_2(1)l_1 + \sigma_3(1)(l_1 + l_3\frac{\sin(\phi_3-\phi_2)}{\sin(\phi_2-\phi_1)}) + \sigma_2(3)l_3$$

периметр Минковского трапеции $P = (V, q_1, q_{31}, q_3)$ (см. Рис. 4).

Для любой тройки ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, (16) – интеграл от произведения двух экспонент $\exp(-al_1)\cdot\exp(-bl_3)$ по определенной многоугольной области в плоскости l_1, l_3. Это означает, что *(18) можно выразить через элементарные функции.* Опять $\mathbf{P}_x((3,1,2,1)\cap F)$ будет иметь различные аналитические выражения в различных случаях. Приведем некоторые подробности вычисления.

Для вычисления кратного интеграла в правой части (17) сделаем замену переменных $(l_1, l_3) \to (r, \varphi)$, где (r, φ) – полярная координата противоположной к V вершины. Легко проверить, что якобиан равен

$$\frac{r}{\sin(\phi_3-\phi_1)}.$$

Заметим, что в случае $\phi_3 < \pi/2$ имеем

$$I(l_1,l_3) = I(r,\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \phi_1 < \varphi < \phi_2 \quad \text{и} \quad 0 < r < (W-x)/\cos\varphi \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Интегрирование по переменной x к затруднениям не приводит. Конечный результат имеет вид

$$\Lambda_{(3,1,2,1)} = \sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 \sin(\phi_2-\phi_1)\sin^2(\phi_3-\phi_1)\left[+\frac{W\sin(\phi_2-\phi_1)}{AA_1}+\right.$$
$$+\frac{\cos^2\phi_2\sin^2(\phi_3-\phi_1)}{A^2(A_1\cos\phi_3-\sigma_1\sin(\phi_3-\phi_1)\cos\phi_1)}\left(\exp\left(-\frac{WA}{\cos\phi_2\sin(\phi_3-\phi_1)}\right)-1\right)-$$
$$\left.-\frac{\cos^2\phi_1}{A_1^2(A_1\cos\phi_3-\sigma_1\sin(\phi_3-\phi_1)\cos\phi_1)}\left(\exp\left(-\frac{WA_1}{\cos\phi_1}\right)-1\right)\right],$$

где $A_1=\sigma_2\sin(\phi_2-\phi_1)-\sigma_3\sin(\phi_3-\phi_1)$. Здесь и далее мы используем упрощенное обозначение $\Lambda_t=\lambda_{t\cap F}$.

Аналогично можно вычислить частичные интенсивности для последних пяти четырехугольных типов, трех пятиугольных типов и шестиугольного типа. *Все они могут быть выражены через элементарные функции.*

Некоторые факты, касающиеся частичных интенсивностей, можно установить с помощью симметрии. Следующая теорема – тому пример. Нам понадобится следующее определение. Для любого типа t положим $t^*=(m_1,m_2,m_3)$, где m_i – число появлений i в последовательности t.

Теорема 2.. *Если в трехнаправленной модели со случайными плоскими углами* $t_1^*=t_2^*$, то $\Lambda_{t_1}=\Lambda_{t_2}$.

Доказательство. Для нашей модели в (17) присутствует полиномиальная зависимость λ_K от параметров p_i. Используя (16), выразим последнюю следующим образом :

$$\begin{aligned}\lambda_K =&\Lambda_{(2,3,1)}[(1-p_1)p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3]+\Lambda_{(2,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)+\\
&+\Lambda_{(3,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)+\Lambda_{(3,2,3,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3)+\\
&+\Lambda_{(2,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_3)+\Lambda_{(3,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_2)+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_1)+\Lambda_{(2,3,2,1)}p_2(1-p_2)p_1(1-p_3)+\\
&+\Lambda_{(3,1,3,2)}p_3(1-p_3)p_1(1-p_2)+\Lambda_{(3,2,3,1)}p_3(1-p_3)p_2(1-p_1)+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)p_3+\Lambda_{(2,1,3,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)(1-p_3)+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)p_2+\Lambda_{(3,1,3,2,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)(1-p_2)+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,3,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3)p_1+\Lambda_{(3,2,3,2,1)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3)(1-p_1)+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,3,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)p_3(1-p_3).\end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что значение λ_K можно вычислить двумя различными способами, соответствующими подстановки $p_i \to 1 - p_i$, $i = 1,2,3$ в (19). Таким образом, разность между двумя выражениями λ_K равна нулю, т.е.

$$\begin{aligned}
&(\Lambda_{(2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,2,1)})p_1(1-p_1)(p_2-p_3)+\\
&+(\Lambda_{(3,2,1,2)} - \Lambda_{(2,3,2,1)})p_2(1-p_2)(p_1+p_3-1)+\\
&+(\Lambda_{(3,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,1)})p_3(1-p_3)(p_1-p_2)+\\
&+(\Lambda_{(3,2,1,2,1)} - \Lambda_{(2,1,3,2,1)})p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)(2p_3-1)+\\
&+(\Lambda_{(3,2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,3,2,1)})p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)(2p_2-1)+\\
&+(\Lambda_{(3,2,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,2,1)})p_2(1-p_2)p_3(1-p_3)(2p_1-1)=0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку интенсивности Λ_t не зависят от p_i и (20) выполняется для всех значений p_i, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{(2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,2,1)} = \Lambda_{(3,2,1,2)} - \Lambda_{(2,3,2,1)} =\\
&= \Lambda_{(3,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,1)} = \Lambda_{(3,2,1,2,1)} - \Lambda_{(2,1,3,2,1)} =\\
&= \Lambda_{(3,2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,3,2,1)} = \Lambda_{(3,2,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,2,1)} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, получаем $\Lambda_t = \Lambda_{t^*}$. •

§12. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ λ_K ОТ СВОБОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Согласно (19) и (21) для модели со случайными плоскими углами и тремя плоскостными направлениями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, которые можно обнаружить на крыше туннеля, мы имеем следующее полиномиальное выражение :

$$\begin{aligned}
\lambda_K = {}&\Lambda_{(2,3,1)}[(1-p_1)p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3]+\\
&+\Lambda_{(2,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2) + \Lambda_{(3,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)+\\
&+\Lambda_{(3,2,3,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3) + \Lambda_{(2,1,3,1)}p_1(1-p_1)[p_2(1-p_3)+p_3(1-p_2)]+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,2)}p_2(1-p_2)[p_1(1-p_3)+p_3(1-p_1)]+\\
&+\Lambda_{(3,1,3,2)}p_3(1-p_3)[p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)]+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2) + \Lambda_{(3,2,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)+\\
&+\Lambda_{(3,2,1,3,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3) + \Lambda_{(3,2,1,3,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)p_3(1-p_3).
\end{aligned} \tag{22}$$

Этот многочлен инвариантен относительно подстановок $p_i \longmapsto 1 - p_i$.

Многочлен (22) может быть эффективно использован для проведения оценок на ЭВМ. Кроме того, его можно использовать для получения результатов. Например, отметим неравенство

$$\begin{aligned}\lambda_K < \ & \Lambda_{(2,3,1)}[(1-p_1)p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3]+\\ & +\Lambda_{(2,1,3,1)}p_1(1-p_1)[p_2(1-p_3)+p_3(1-p_2)]+\\ & +\Lambda_{(3,2,1,2)}p_2(1-p_2)[p_1(1-p_3)+p_3(1-p_1)]+\\ & +\Lambda_{(3,1,3,2)}p_3(1-p_3)[p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)]+\\ & +\frac{1}{16}[\Lambda-2\Lambda_{(2,3,1)}-\Lambda_{(2,1,3,1)}-\Lambda_{(3,2,1,2)}-\Lambda_{(3,1,3,2)}].\end{aligned}$$

которое получается из $p(1-p)\le 1/4$. В пятой строке формулы $\Lambda=\sum_t \Lambda_t$.

§13. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕЗОПАСНЫХ ЭКСКАВАЦИЙ

Вернемся к простой трехнаправленной модели и приведем некоторые замечания.

Подробное изучение обнаруживает *существование безопасных туннельных экскаваций*, т. е. ситуации, когда $\lambda_K=0$.

Критерий. Проектируем точки ω_1, ω_2, ω_3 на экватор (лежащий в горизонтальной плоскости) большими окружностями через полюс, используя *короткие пути* к экватору. Получаем три точки α_1, α_2, α_3 на окружности $[0,2\pi]$. Условие, что $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ может быть покрыто дугой длины меньше π, необходимо и достаточно для того, чтобы $\lambda_K=0$ (безопасная экскавация).

В практическом туннелестроении мы не можем выбирать пространственные направления ω_1, ω_2, ω_3. Однако, некоторые параметры направлений все еще могут зависеть (в некоторых пределах) от выбора строителя. Это могут быть

1) направление туннеля в горизонтальной плоскости,

2) наклон α крыши туннеля : (α определяет вращение крыши туннеля вокруг y–оси туннеля).

Возникает естественный вопрос : можно ли достичь безопасной экскавации удобным выбором параметров 1), 2). Относительно 1) : значение λ_K не зависит от выбора направления туннеля в горизонтальной плоскости.

Относительно 2) : для любых ω_1, ω_2, ω_3 существует критическое значение α_0 такое, что для наклонов $\alpha>\alpha_0$ получаем безопасную экскавацию. Для вычисления значения α_0 можно использовать полиномиальное представление

(22), остающееся справедливым для всех $\lambda_K(\alpha)$. Функциональный вид частичных интенсивностей остается таким же как в (13). В эти формулы мы должны подставить некоторые новые значения $\phi_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$.

ABSTRACT. The paper considers Poisson models for random collections of cracks in the body of a rock. The main parameter of interest is the linear intensity λ_K of key blocks forming as a result of excavating a tunnel through the rock. In the case of tridirectional model the problem is completely solved by an expression giving λ_K in terms of elementary functions. Polynomial dependence of λ_K on the unknown probabilistic parameters is discussed for a more general model. Possibility of safe excavation (i. e. situations with $\lambda_K = 0$) is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Наука, М., 1989.
2. McCullagh and Lang, "Stochastic models for rock instability in tunnels," J. R. Statist. Soc., B. 46 : 2, pp. 344 – 352, 1984.

9 февраля 1996 Американский университет Армении

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА–ХОПФА

Г. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

В статье исследуется интегральное уравнение Винера–Хопфа с неотрицательным ядром $K \in L^1(\mathbb{R})$. На основе связи между моментами первого и второго порядка ядра K и свойствами символа уравнения получены некоторые результаты, относящиеся к указанному уравнению. В конце статьи выводится формула общего решения уравнения восстановления.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Винера–Хопфа

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad t > 0 \tag{1}$$

с ядром $K(t)$, удовлетворяющим условиям

(а) $0 \leq K(t) \in L^1(-\infty, \infty)$;

(б) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt \leq 1$,

находят важные применения в различных областях естествознания, математики : в теории вероятностей [4], астрофизике, в теории переноса излучения (проблема Милна и др.). В работах [1], [2] особое место было уделено так называемому консервативному случаю (КС), в котором $\mu = 1$. Подход, развитый в указанных работах, основан на идее вольтерровской факторизации интегрального оператора Винера–Хопфа и применении нелинейных функциональных уравнений факторизации (уравнения Н. Б. Енгибаряна). Работы [1] и [2] содержат новые результаты по разрешимости однородных и неоднородных консервативных уравнений Винера–Хопфа. Условия разрешимости уравнения (1), (а) — (б) сформулированы в [1], [2] и в ряде других работ (см. [5], [6]) в терминах моментов ядра $K(t)$:

$$\nu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n K(t)\, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

С другой стороны, во многих работах уравнения (1) были изучены с точки зрения их символов. Несомненно, нахождение значения ν_n в ряде случаев гораздо проще, чем выявление свойств упомянутого символа (вычисление индекса символа и т.д.). Для изучения особых классов уравнений Винера–Хопфа применяется метод специальной факторизации (см. [3]), который по существу опирается на изучение символа уравнения. Ниже мы докажем некоторые факты, устанавливающие связь между значениями моментов ν_1 и ν_2 и свойствами символа уравнения (1), (а) — (б). Это позволит на основании результатов работы [3] (гл. 5) усилить некоторые известные результаты.

В связи с этим, вкратце изложим содержание метода специальной факторизации в той степени общности, в которой он будет нами использован. Рассмотим следующие банаховы пространства функций на вещественной оси :

$$\mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty), \quad \mathbf{C}^0 \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{M},$$

где $\mathbf{M}$ – пространство измеримых, почти всюду ограниченных функций. $\mathbf{C}$ – пространство непрерывных ограниченных, а $\mathbf{C}^0$ – пространство непрерывных исчезающих на $\pm\infty$ функций. Пусть $\mathbb{E}$ – одно из таких пространств.
Через $\mathbb{E}^+$ обозначим подпространство $\mathbb{E}$, элементы которого обращаются в нуль на отрицательной полуоси.
Пусть $\mathbf{F}$ – оператор Винера–Хопфа в $\mathbb{E}^+$:

$$(\mathbf{F}\varphi)\,(t) \equiv c\varphi(t) + \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\, d\tau, \qquad t > 0,$$

где c – некоторая постоянная и $K \in \mathbf{L}^1$. Пусть

$$\mathcal{A}(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, T(t)\, dt, \quad -\infty \le \lambda \le +\infty \tag{2}$$

– символ оператора $\mathbf{F}$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ алгебру функций вида (2), а через $\mathcal{F}_\pm$ – его подалгебры, для которых $T(\pm t) \in L_+^1$, соответственно. Предположим, что $\mathcal{A}(\lambda)$ обращается в нуль только в точке $\lambda = 0$, причем

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^j \cdot B(\lambda), \tag{3}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$, $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$, а j – некоторое натуральное число. Введем функции $\rho_\pm(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\lambda \pm i}$. Очевидно, что $\rho_\pm^m(\lambda) \in \mathcal{F}_\pm$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть l и r – целые неотрицательные числа такие, что $l + r = j$. Тогда с учетом (3) для функции $\mathcal{A}(\lambda)$ можем записать следующее представление :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \rho_-^l(\lambda) C(\lambda) \rho_+^r(\lambda), \tag{4}$$

где $C(\lambda) = \left(\dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^l B(\lambda) \in \mathcal{F}$. Разложение (4) порождает разложение оператора $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = R_-^l C R_+^r, \tag{5}$$

где $R_\pm$ – операторы, соответствующие $\rho_\pm(\lambda)$. Они определяются так :

$$(R_+\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - e^{-t} \int_0^t e^s \varphi(s)\, ds, \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$(R_-\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - e^t \int_t^{+\infty} e^{-s} \varphi(s)\, ds, \qquad t > 0. \tag{7}$$

Пусть

$$(G\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad t > 0. \tag{8}$$

Отметим, что в формулах (6) и (7) $\varphi \in \mathbb{E}^+$, а в (8) $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}$ (т.е. φ локально интегрируема).

Обозначим через $\widetilde{E}^r = \widetilde{E}(\rho_+^r(\lambda))$ множество функций вида $(G^r\varphi)(t)$, $\varphi \in \mathbb{E}^+$. В [3] было показано, что если ввести норму в $\widetilde{E}^r$, полагая $\|G^r\varphi\|_{\widetilde{E}^r} = \|\varphi\|_{\mathbb{E}^+}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_+}$ – норма в $\mathbb{E}^+$, то оператор R_+^r непрерывно продолжается на $\widetilde{E}^r$, превращаясь в изометрический изоморфизм из $\widetilde{E}^r$ в $\mathbb{E}^+$, причем $(R_+^r)^{-1} = G^r$.

Пусть $\overrightarrow{E}^l = E(\rho_-^l(\lambda)) = \operatorname{Im} R_-^l$. В работе [3] показано также, что $\dim\ker R_-^l < +\infty$. Введя факторпространство $\mathbb{E}^+/\ker R_-^l$, там показывается, что оператор $R_-^l \cdot C \colon \mathbb{E}^+ \to \overrightarrow{E}^l$ можно представить в виде $\overline{R}_-^l \cdot \overline{C}$, где $\overline{R}_-^l : \mathbb{E}^+/\ker R_-^l \to \overrightarrow{E}^l$

– изометрический изоморфизм, а $\overline{C}$: $\mathbb{E}^+/\ker R^l_-$ – Ф–оператор. Тогда оператор $\widetilde{\mathbf{F}} = \overline{R}^l_- \overline{C} R^r_+ : \widetilde{E}^r_+ \to \overline{\mathbb{E}}^l_+$ также будет Ф–оператором.

$\widetilde{\mathbf{F}}$ будем называть непрерывным продолжением оператора $\mathbf{F}$. Таким образом, для исследования разрешимости уравнения $\mathbf{F}\varphi = f$, где $\mathbf{F}$ допускает продолжение вида $\widetilde{\mathbf{F}}$: $\widetilde{E}^r \to \overline{E}^l$, остается вычислить $\operatorname{Ind}\widetilde{\mathbf{F}} \equiv \dim\ker\widetilde{\mathbf{F}} - \dim\operatorname{coKer}\widetilde{\mathbf{F}}$. Из теоремы 2.6, гл. 5, [3] следует, что

$$\operatorname{ind}\widetilde{\mathbf{F}} = \max\{\delta - \kappa, 0\} + \max\{\kappa - \delta, 0\}, \tag{9}$$

где

$$\kappa = \operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} C(\lambda) = \operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda) + l,$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если либо} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}^p_+ (1 \le p < +\infty), \quad \text{либо} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}^0_+ \\ 1, & \text{если либо} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+, \quad \text{либо} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+. \end{cases}$$

§1. СИМВОЛ КОНСЕРВАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\mathcal{A}(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} K(t)\,dt$ – символ уравнения (1). Очевидно, $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{F}$. В дальнейшем будем рассматривать только случай $\mu = 1$. Тогда $\mathcal{A}(0) = 0$, и поскольку $\operatorname{Re}\mathcal{A}(\lambda) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\sin^2(\lambda t/2)\,dt$, то $\mathcal{A}(\lambda) \ne 0$, $\lambda \ne 0$. Таким образом, $\mathcal{A}(\lambda)$ имеет единственный нуль в точке $\lambda = 0$. Отсюда и из теоремы 2.9 [3], ввиду условия (a), непосредственно получим следующий результат.

Теорема 1. A°. *Существование конечного момента ν_1 необходимо и достаточно для представления*

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + i} B(\lambda), \tag{10}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$ и $B(\lambda) \ne 0$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$.

B°. *Условие $\nu_2 < +\infty$, $\nu_1 = 0$ необходимо и достаточно для представления*

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^2 B(\lambda), \tag{11}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$ и $B(\lambda) \ne 0$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$.

Замечание. Из теоремы 1 B° и условия $B(0) = -1/2$, $\nu_2 > 0$ следует, что функция $\mathcal{A}(\lambda)$ не может иметь нуль выше второго порядка.

Пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, K(t)\, dt < +\infty$ и $\nu_1 \neq 0$. По теореме $1A°$ справедливо представление (10). Пусть $\nu_1 > 0$. Покажем, что

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty} B(\lambda) = 0. \tag{12}$$

Из неравенства $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, K(t)\, dt\right| \leq 1$ следует, что $-\pi/2 < \arg A(\lambda) < \pi/2$, $\lambda \neq 0$. Это неравенство выполняется также для функции $\arg\left(\dfrac{\lambda+i}{\lambda}\right)$, $\lambda \neq 0$. Из (10) имеем $-\pi < \arg B(\lambda) < \pi$, $\lambda \neq 0$. Последняя оценка верна и при $\lambda = 0$. Действительно, поскольку

$$B(0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda+i}{\lambda} A(\lambda) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\lambda\to 0} \left(\frac{1-e^{i\lambda t}}{\lambda}\right) K(t)\, dt = \nu_1\ (> 0),$$

то $\arg B(0) = 0 \in (-\pi, \pi)$. Таким образом, приращение $\arg B(\lambda)$ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ строго меньше чем 2π, что влечет за собой равенство (12).

Изучим теперь случай, когда $\nu_1 < 0$. Покажем, что в этом случае

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty} B(\lambda) = -1. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{A}(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, \widetilde{K}(t)\, dt,$$

где $\widetilde{K}(t) = K(-t)$.

Пусть $\widetilde{\nu}_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t\, \widetilde{K}(t)\, dt$. Очевидно, $\widetilde{\nu}_1 = -\nu_1 > 0$. Тогда по доказанному выше

$$\widetilde{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+i} \widetilde{B}(\lambda), \tag{14}$$

$\widetilde{B}(\lambda) \in \mathcal{F}$, $\widetilde{B}(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ и

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\leq\lambda\leq+\infty} \widetilde{B}(\lambda) = 0. \tag{15}$$

Из очевидного равенства $\widetilde{A}(\lambda) = A(-\lambda)$, и из (10) получим

$$\widetilde{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+i} B(-\lambda). \tag{16}$$

Сравнивая равенства (14) и (16), получаем $B(\lambda) = \dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}\widetilde{B}(-\lambda)$. Отсюда ввиду (15) получаем (13).

Пусть $\nu_2 < +\infty$, $\nu_1 = 0$. Тогда по теореме 1 B° имеем (11). Докажем (13). Из равенства $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2 = \left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^2 \dfrac{\lambda-i}{\lambda+i}$ следует, что $\arg\left(\dfrac{\lambda-i}{\lambda+i}B(\lambda)\right) = \arg\mathcal{A}(\lambda)$. Следовательно, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg\left(\dfrac{\lambda-i}{\lambda+i}B(\lambda)\right) \le \dfrac{\pi}{2}$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$. Тогда получим $\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty}\left(\dfrac{\lambda-i}{\lambda+i}B(\lambda)\right) = 0$, из которого следует (13). Резюмируем полученные выше факты в следующей теореме.

Теорема 2. A°. *В условиях теоремы 1 A° имеем представление (10) и*

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu_1 > 0, \\ -1, & \text{если } \nu_1 < 0. \end{cases} \tag{17}$$

B°. *В условиях теоремы 1 B° имеем (11) и (13).*

§2. КОНСЕРВАТИВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА–ХОПФА

Пусть $(\mathcal{K}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ – оператор Винера–Хопфа действующий в $\mathbb{E}^+$. Из теоремы 2 следует, что $\mathcal{K}$ допускает непрерывные продолжения вида

$$\widetilde{\mathcal{K}}: \quad \widetilde{E}^r \to \overline{E}^l,$$

где r и l – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию : $r + l = j$, j – порядок нуля символа $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$.

Пусть существует ν_1 и $\nu_1 \ne 0$. Из теоремы 1 A° следует, что $r + l = 1$. Возможны следующие случаи :

$$1^\circ.\ r = 1, l = 0; \quad \text{и} \quad 2^\circ.\ r = 0, l = 1.$$

Исследуем уравнение (1) для каждого из этих случаев в отдельности.

В случае 1° имеем $\widetilde{E}^r = \widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$, $\overline{E}^l = \mathbb{E}^+$. Из теоремы 2 A°, теоремы 2.6 гл. 5 [3] и (9) получим, что $\widetilde{K}$ является Ф–оператором из $\widetilde{E}^1$ в $\mathbb{E}^+$, при этом

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu_1 < 0 \\ 0, & \text{если } \nu_1 > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Отсюда следует, что уравнение (1) для каждого $f \in \mathbb{E}^+$ имеет решение в $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$. Соответствующее однородное уравнение имеет с точностью до постоянного множителя одно решение при $\nu_1 < 0$ и только тривиальное решение при $\nu_1 > 0$.

В случае 2° имеем $\widetilde{E}^r = \mathbb{E}^+$ и $\overline{\widetilde{E}}^l = \overline{E}(\rho_-(\lambda))$. С помощью формулы (9) нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \nu_1 < 0, \ \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}^+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+ \\ 0, & \text{если} \quad \nu_1 > 0, \ \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}^+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+ \\ 0, & \text{если} \quad \nu_1 < 0, \ \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_p^+(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0 \\ -1, & \text{если} \quad \nu_1 > 0, \ \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_p^+(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\nu_1 < 0$, то при $f \in \overline{E}^+\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - i}\right)$ существует решение уравнения (1) в $\mathbb{E}^+$, а линейно независимое решение $\varphi^*(t)$ соответствующего однородного уравнения удовлетворяет условию $\varphi^* \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathbf{C}_+^0$. Из (20) также следует, что если $f \in \overline{\mathbf{M}}_+(\rho_-(\lambda))$ $(f \in \overline{\mathbf{C}}_+(\rho_-(\lambda))$, то любое решение уравнения (1) принадлежит $\mathbf{M}_+(\mathbf{C}_+)$, а если $f \in \overline{\mathbb{E}}_+(\rho_-(\lambda))$, где $\mathbb{E}^+ = L_+^p(1 \le p < +\infty)$ и $\nu_1 < 0$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно решение, принадлежащее $\mathbb{E}^+$. Последнее также будет иметь место, если вместо $\nu_1 < 0$ потребовать, чтобы $\nu_1 > 0$ и $g(f) = 0$ для всех $g \in \operatorname{Ker}\mathcal{K}^*$, где $*$ – знак сопряжения.

Пусть $\nu_2 < +\infty$ и $\nu_1 = 0$. Тогда из теоремы 1 $B°$ следует, что $r + l = 2$. Возможны следующие случаи :

$$1^{\circ\circ}.\ r = 2, l = 0; \quad 2^{\circ\circ}.\ r = 1, l = 1; \quad 3^{\circ\circ}.\ r = 0, l = 2.$$

Для каждого из этих случаев рассуждениями, аналогичными 1° и 2°, нетрудно установить, что :

в случае 1°°

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = 1, \tag{21}$$

в случае 2°°

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+; \\ 0, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0, \end{cases} \tag{22}$$

в случае 3°°

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+; \\ -1, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0. \end{cases} \tag{23}$$

Из формул (21) и (22) вытекает, что однородное уравнение $\mathcal{K}\varphi = 0$ имеет в $\widetilde{E}(\rho_+^2(\lambda))$ ровно одно линейно независимое решение $\varphi^* \in \widetilde{C}_+(\rho_+(\lambda)) \setminus \widetilde{C}_+^0(\rho_+(\lambda))$.

Из (21) также следует, что уравнение (1) имеет решение, принадлежащее $\widetilde{E}(\rho_+^2(\lambda))$. Если же $f \in \overline{E}\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)$, где $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty)$, или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0$, то из (22) вытекает, что любое решение уравнения (1) принадлежит $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$.

Если $f \in \overline{E}\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)$, где $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty)$, или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно, принадлежащее $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$.

Наконец, для $f \in \overline{E}(\rho_-^2(\lambda))$ имеет место следующее утверждение :

a°. Если $\mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+$ или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно из $\mathbb{E}^+$;

b°. Если $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty)$ или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0$, то для того, чтобы уравнение (1) имело решение $\varphi_0 \in \mathbb{E}^+$ необходимо и достаточно, чтобы $g(f) = 0$, где g – единственное, с точностью до постоянного множителя, решение уравнения $\mathcal{K}^*\Psi = 0$. Если это условие выполняется, то φ_0 единственное. С учетом аналитического описания пространств $\widetilde{E}^r$ и $\overrightarrow{E}^l$ (см. [3], стр. 202 – 208), полученные результаты подытожим в следующей теореме.

Теорема 3. *A°. Если первый момент $\nu_1 \ne 0$ конечен, то для любого $f \in \mathbb{E}^+$ уравнение (1) имеет решение $\varphi(t)$ такое, что $\varphi(t) = \Psi(t) + \int_0^t \Psi(s)\,ds$, где $\Psi \in \mathbb{E}^+$. Соответствующее однородное уравнение имеет в $\widetilde{E}^1$ только одно тривиальное решение, если $\nu_1 > 0$, а в случае $\nu_1 < 0$ – единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение.*

Кроме того

A°.1) Если $\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$, где либо $\mathbb{E} = \mathbf{L}^p(1 \le p \le +\infty)$ либо $\mathbb{E} = \mathbf{C}^0$ и $\nu_1 < 0$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно из $\mathbb{E}^+$;

A°.2) Утверждение A°.1) остается в силе, если условие $\nu_1 < 0$ заменить условием $\nu_1 > 0$ и дополнительно потребовать, чтобы $g(f) = 0$ для всех $g \in \operatorname{Ker}\widetilde{\mathcal{K}}^*$;

A°.3) Если $\int_0^t f(s)\,ds \in \mathbf{M}_+$, то все решения уравнения (1) принадлежат $\mathbf{M}_+$;

A°.4) В случае $f(t) = \Psi(t) - e^t \int_t^{+\infty} e^{-s}\Psi(s)\,ds < +\infty$ и $\nu_1 = 0$ решения уравнения (1) принадлежат $\mathbf{C}_+$.

B°. Пусть $\nu_2 < +\infty$ и $\nu_1 = 0$. Тогда уравнение (1) при любом $f \in \mathbb{E}^+$

имеет решение в $\widetilde{E}^2$. *Соответствующее однородное уравнение имеет в* $\widetilde{E}^2$ *одно, с точностью до постоянного множителя решение* $\varphi^*(t) = t + o(t)$.

Кроме того

$B^\circ.1)$ *Если выполнено условие* $\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$, *где* $\mathbb{E} = \mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty)$ *или* $\mathbb{E} = \mathbf{C}^0$, *то среди решений уравнения (1) имеется только одно* $\varphi(t)$ *такое, что* $\varphi(t) - e^{-t}\int_0^t e^s\varphi(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$;

$B^\circ.2)$ *Если* $f \in \mathbf{M}_+$ *и* $\int_0^t f(s)\,ds \in \mathbf{M}_+$, *то любое решение уравнения (1) удовлетворяет условию*

$$\varphi(t) - e^{-t}\int_0^t e^s\varphi(s)\,ds \in \mathbf{M}_+;$$

$B^\circ.3)$ *Если* $\nu_1 < 0$ *и*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau \overset{def}{=\!=} (C_1)\int_0^{+\infty} f(s)\,ds, \quad f \in \mathbf{M}_+,$$

$$(C_1)\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbf{M}_+, \quad \int_0^t ds (C_1)\int_s^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \in \mathbf{M}_+,$$

то только одно из всех решений (1) принадлежит $\mathbf{M}_+$;

$B^\circ.4)$ *Утверждение* $B^\circ.3)$ *остается в силе и в случае, когда* $\nu_1 > 0$, $g(f) = 0$, $g \in \operatorname{Ker}\widetilde{\mathcal{K}}^*$, $\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$, $\int_t^{+\infty} ds \int_s^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \in \mathbb{E}^+$ *при* $\mathbb{E} = \mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty)$ *или* $\mathbb{E} = \mathbf{C}^0$.

Поскольку имеют место следующие непрерывные вложения (см. [3], стр. 208) :

$$\widetilde{L}^p_+(\rho^m_+(\lambda)) \subset \mathbf{L}^{p,-m}_+, \quad 1 < p \le +\infty; \quad \widetilde{L}^1_+(\rho^m_+(\lambda)) \subset \mathbf{L}^{1,-(m+\varepsilon)}_+ \quad (\varepsilon > 0),$$

где $\mathbf{L}^{p,-m}_+ = \{f : \quad f(t)/(1+t)^m \in L^p_+\}$, $\quad 1 \le p \le +\infty$, то из теоремы 3 получаем

Следствие A°. Пусть выполняются условия теоремы 3 A°. Тогда любое решение $\varphi(t)$ уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\varphi(t)/(1+t)^{1+\varepsilon} \in \mathbb{E}^+, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{L}^p(1 < p \le +\infty) \text{ и } \varepsilon > 0 \quad \text{для } \mathbb{E} = \mathbf{L}^1.$$

При этом $A^\circ.1)$ Если $tf(t) \in \mathbb{E}^+$, где $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty)$ и $\nu_1 < 0$, то среди решений (1) имеется только одно из $\mathbb{E}^+$;

$A^\circ.2)$ Если $f \in \bigcap_{1\le p\le+\infty} \mathbf{L}^p_+ \bigcap \mathbf{C}^0_+$, то для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (1) $\varphi(t) = O(1)$ при $t \to +\infty$.

B°. Пусть выполняются условия теоремы 3 B°. Тогда любое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\varphi(t)/(1+t)^{2+\varepsilon} \in \mathbb{E}^+, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{L}^p(1 < p \le +\infty) \text{ и } \varepsilon > 0 \quad \text{для } \mathbb{E} = \mathbf{L}^1.$$

При этом

$B^\circ.1)$ Если $tf(t) \in \mathbf{L}^p_+(1 \le p < +\infty)$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно со свойством $\varphi(t)/(1+t)^{1+\varepsilon} \in \mathbb{E}^+$;

$B^\circ.2)$ Если $f \in \bigcap_{1\le p\le+\infty} L^p_+ \bigcap \mathbf{C}^0_+$, то для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (1) $\varphi(t) = O(t)$ при $t \to +\infty$.

§3. ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Применим полученный результат для вывода формулы вычисления общего решения уравнения

$$\varphi(t) = f(t) + \int_t^{+\infty} v(\tau - t)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad t > 0, \tag{24}$$

где $v(t) \ge 0$, если $t \ge 0$ и $v(t) = 0$, если $t < 0$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(\tau)\,d\tau = 1.$

Это уравнение применяется в теории вероятностей и носит название уравнения восстановления. В [1] уравнение (24) используется для нахождения решений уравнения (1) посредством факторизации интегрального оператора Винера-Хопфа. Там была получена формула для вычисления решения (24) при условии $f \in \mathbf{L}^1_+$. Однако, если $\mathbb{E}^+ \ne \mathbf{L}^1_+$, то указанная формула теряет силу. Выводимая нами формула пригодна при $f \in \mathbb{E}^+$ для всех $\mathbb{E}^+$.

Пусть $\alpha_1(v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,v(t)\,dt < +\infty$, и пусть $\mathcal{A}(\lambda) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t} v(-t)\,dt$ – символ уравнения (24). Тогда поскольку $\nu_1 = -\alpha_1(v) < 0$, то из (10) имеем

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - i} B_-(\lambda), \quad \text{где} \quad B_-(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} B(\lambda).$$

Из (12) следует, что

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B_-(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad B_-^{\pm 1} \in \mathcal{F}_-.$$

Таким образом, оператор $\overline{B}$, соответствующий символу $B_-(\lambda)$, обратим в $\mathbb{E}^+$. Применяя к обеим частям равенства $B_-(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda}\mathcal{A}(\lambda)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} $B_-(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda}\mathcal{A}(\lambda)$, получим

$$b(t) = \delta(t) - v_1(-t), \qquad b(t) = (F^{-1}(B_-))(t),$$

где $\delta(t)$ – дельта–функция Дирака

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) - \int_t^{+\infty} v(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\overline{B}$ – оператор свертки с $b(t)$, то

$$\left(\overline{B}\varphi\right)(t) \equiv \varphi(t) - \int_t^{+\infty} v_1(\tau - t)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{25}$$

Будем искать $\overline{B}^{-1}$ в виде

$$\left(\overline{B}^{-1}\Psi\right)(t) \equiv \Psi(t) - \int_t^{+\infty} R(\tau - t)\,\Psi(\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Из (25) и (26) имеем

$$\left(\overline{B}\left(\overline{B}^{-1}\Psi\right)\right)(t) \equiv \Psi(t) +$$

$$+ \int_t^{+\infty} \left\{ R(\tau - t) - v_1(\tau - t) - \int_t^{\tau} v_1(s - t)\,R(\tau - s)\,ds \right\} \Psi(\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

С другой стороны, $\left(\overline{B}\left(\overline{B}^{-1}\Psi\right)\right)(t) \equiv \Psi(t)$. Отсюда и из (27) для любого $\Psi \in \mathbb{E}^+$ получаем

$$\int_t^{+\infty} \left\{ R(\tau - t) - v_1(\tau - t) - \int_t^{\tau} v_1(s - t)\,R(\tau - s)\,ds \right\} \Psi(\tau)\,d\tau = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $\Psi \in \mathbb{E}^+$, следует

$$R(t) = v_1(t) + \int_0^t v_1(t - \tau)\,R(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

Таким образом, оператор $\overline{B}^{-1}$ определяется по формуле (26) и (28). Заметим, что $R(t) \in \mathrm{L}_+^1$, так как $B_-(\lambda)^{-1} \in \mathcal{F}_-$.

Пусть $(\overline{v}\varphi)(t) \equiv \int_t^{+\infty} v(\tau - t)\,\varphi(\tau)\,d\tau$, $\varphi \in \mathbb{E}^+$, а $\mathbf{I}$ – единичный оператор. Уравнение (24) в операторной форме запишется так :

$$(\mathbf{I} - \overline{v})\,\varphi = f. \tag{29}$$

Представим

$$\mathrm{I} - \overline{v} = H\,\overline{B}\,D, \tag{30}$$

где H и D – операторы Винера–Хопфа с символами $\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}$ и $\dfrac{\lambda}{\lambda+i}$, соответственно. С учетом (30) заменим (29) равносильной ему системой

$$\begin{cases} H\overline{B}\chi = f \\ D\varphi = \chi. \end{cases} \tag{31}$$

Первое из этих уравнений, как нетрудно видеть, нормального типа, то есть $H\overline{B}$ – Φ–оператор, причем $\mathrm{Ind}(H\overline{B}) = 1$. Следовательно, для любого $f \in \mathbb{E}^+$ это уравнение имеет решение в $\mathbb{E}^+$, а соответствующее однородное уравнение иметт ровно одно с точностью до постоянного множителя решение. Его общее решение имеет вид

$$\chi = \overline{B}^{-1} H^{-1} f + B^{-1}\eta, \tag{32}$$

где H^{-1} – правый обратный к H, а $\eta \in \mathrm{Ker}H$.

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \chi(t) = f(t) - 2e^{-t}\int_0^t e^{\tau} f(\tau)\,d\tau + \int_0^{+\infty} R(\tau)\,f(t+\tau)\,d\tau - \\ - 2e^{-t}\int_0^{+\infty} R(t)\,d\tau \int_0^{t+\tau} e^{s-\tau} f(s)\,ds + c\overline{B}^{-1}\left(e^{-t}\right), \end{aligned} \tag{33}$$

где ce^{-t} – общее решение уравнения $H\varphi = 0$, c – произвольная постоянная. Для решения второго из уравнений (31) продолжим D на $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda)) = \widetilde{E}^1$. Тогда в силу определения $\widetilde{E}^1$, оператор $\widetilde{D}\colon \widetilde{E}^1 \to \mathbb{E}^+$ будет изометрическим изоморфизмом, причем

$$\left(D^{-1}\Psi\right)(t) \equiv \Psi(t) + \int_0^t \Psi(\tau)\,d\tau, \qquad \Psi \in \mathbb{E}^+.$$

Следовательно

$$\varphi(t) = \left(D^{-1}\chi\right)(t) = \chi(t) = \int_0^t \chi(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда и из (33), после некоторых элементарных преобразований, получим окончательно формулу для вычисления общего решения уравнения (24) :

$$\varphi(t) = \alpha + g(t) + \int_0^t g(\tau)\,d\tau + \int_0^{+\infty} R(\tau)\,g(t+\tau)\,d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} R(s)\,g(\tau+s)\,ds,$$

где α – произвольная постоянная, а

$$g(t) = f(t) - 2e^{-t} \int_0^t e^{\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Автор выражает свою благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за постановку задач, а также Л. Г. Арабаджяну за сделанные им полезные замечания.

ABSTRACT. The paper studies Wiener—Hopf integral equation with nonnegative kernel $K \in L^1(\mathbb{R})$. On the basis of the connection between the first and second order moments of the kernel K and properties of the equation symbol some results concerning the equation are obtained. At the end of the paper a formula for general solution of the renewal equation is derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения" Мат. анализ, Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР, стр. 175 — 244, М., 1984.
2. Л. Г. Арабаджян "О факторизации консервативных интегральных операторов Винера–Хопфа", Мат. заметки, т. 46, стр. 3 — 10, М. 1989.
3. З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, Мир, М., 1979.
4. F. Spizer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density," Parts I and II, Duke Math. J., vol. 24, pp. 327 — 343, 1957 ; vol. 27, pp. 363 — 372, 1960.
5. М. И. Хайкин, "Об одном уравнении Винера–Хопфа с положительным ядром", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 17, № 1, стр. 56 — 63, 1982.
6. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 4, стр. 307 — 327 и т. 17, № 5, стр. 335 — 375, 1982.

7 декабря 1995

Бюраканская астрофизическая обсерватория,
НАН Армении

О РЕШЕНИЯХ ТИПА ЖЕВРЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. О. Акопян, В. Н. Маркарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

Для n-мерного многогранника $\mathcal{N}$ мы определяем мультианизотропное пространство Жевре $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$ и доказываем, что решения гипоэллиптических уравнений с переменными коэффициентами из определенного класса принадлежат $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению поведения решений гипоэллиптических уравнений посвящены работы многих математиков. В работе [1] Л. Хермандером введено понятие гипоэллиптичности и доказано, что решения гипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$ с постоянными коэффициентами принадлежат определенному классу Жевре Γ^l, характеризуемым показателем l гипоэллиптичности оператора P. Л. Катабригой в работе [2] изучен вопрос об изоморфизме отображения $P(D) : \Gamma^l \longmapsto \Gamma^l$. В работах [3] и [4] установлено, что решения регулярных уравнений $P(x, D)u = f$ с достаточно гладкими коэффициентами принадлежат определенному классу Γ^l, если $f \in \Gamma^l$. В. И. Буренковым и К. Р. Маминым в работе [5] изучено поведение решения уравнения $P(D)u = f$, когда известо поведение f. Однако, в этих работах были рассмотрены лишь классы Жевре типа Γ^l.

В работе [6] Г. Г. Казарян ввел понятие веса гипоэллиптичности и получил лучшие оценки для производных решений уравнения $P(D)u = 0$. В [7] получены строгие оценки для роста производных решений класса гипоэллиптических уравнений.

В настоящей статье для данного n-мерного многогранника $\mathcal{N}$ вводится понятие мультианизотропного класса Жевре $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$ и устанавливаются условия, при которых решения гипоэллиптических уравнений $P(x,D)u=0$ принадлежат классу $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$. При этом многогранник $\mathcal{N}$ порождается оператором $P(x,D)$.

В §1 изучаются введенные мультианизотропные пространства $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$. В §2 рассматривается пересечение мультианизотропных пространств, порожденных разными вполне правильными многогранниками и дается геометрическая характеристика многогранников Ньютона определенного класса гипоэллиптических уравнений. В §3 установлено, что все слабые решения равномерно регулярного уравнения $P(x,D)u=0$ принадлежат мультианизотропному классу Жевре $\tilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}$, где $\mathcal{M}$ – характеристический многогранник точного веса гипоэллиптичности оператора $P(x,D)$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное вещественное эвклидово пространство

$$\mathbb{R}^n_0=\left\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ \prod_{k=1}^n x_k\neq 0\right\},$$

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_j\geq 0,\ j=1,...,n\},$$

N^n_+ – n-мерное пространство мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in N^n_+$, $\nu\in\mathbb{R}^n_+$ обозначим

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad |x|^\nu=|x_1|^{\nu_1}\cdots|x_n|^{\nu_n},$$

$$||x||=\left|\sum_{j=1}^n x_j^2\right|^{1/2},\quad |\nu|=\sum_{j=1}^n\nu_j,\quad (x,\xi)=\sum_{j=1}^n x_j\xi_j,$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j},\quad i^2=-1,\quad j=1,...,n.$$

Предположим, что имеем последовательности

$$\nu^1,...,\nu^k\in\mathbb{R}^n_+,\quad \lambda^1,...,\lambda^r\in\mathbb{R}^n_+\cap\mathbb{R}^n_0,\quad \min_{1\leq l\leq n}\lambda^j_l=1,\quad d_j>0,\quad j=1,...,r.$$

Положим

$$\mathcal{A}_1(k)=\{\nu^1,...,\nu^k\}\cup\{0\},\qquad (0.1)$$

$$\mathcal{A}_2(r)=\{\lambda^1,d_1,...,\lambda^r,d_r\}.\qquad (0.2)$$

Определение 1. *Характеристическим многогранником* (х.м.) набора $\mathcal{A}_1(k)$ назовем минимальный, выпуклый многогранник $\mathcal{N}(\mathcal{A}_1) \subset \mathbb{R}^n_+$, содержащий множество $\mathcal{A}_1(k)$, а характеристическим многогранником набора $\mathcal{A}_2(r)$ – множество

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}_2) = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \ (\nu, \lambda^j) \leq d_j, \ j = 1, ..., r\}.$$

Определение 2. Многогранник $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ называется *вполне правильным* (в.п.), если $\mathcal{N}$ имеет вершины на всех осях координат и все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных координатных граней $\mathcal{N}$ положительны.

Определение 3. Набор $\mathcal{A}_2(r)$ назовем *минимальным* для в.п. многогранника $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n_+$, если $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{A}_2)$ и для любого $j \in \overline{1,r}$ существует $\nu^j \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathcal{N}$ такой, что $(\nu^j, \lambda^i) \leq d_i$, $i \neq j$, $i = 1, ..., r$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, (P) – конечный набор мультииндексов, $a_\alpha(x)$, $\alpha \in (P)$ – бесконечно дифференцируемые в Ω функции. Обозначим

$$P(x, D) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Определение 4. Оператор $P(x, D)$ назовем *гипоэллиптическим* в Ω, если все решения $u \in D'(\Omega)$ уравнения $P(x, D)u = f$ принадлежат $C^\infty(\Omega)$ при любом $f \in C^\infty(\Omega)$.

Определение 5. Оператор $P(x, D)$ назовем *равномерно регулярным* в Ω, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$1 + |P(x,\xi)| \geq C \sum_{\alpha \in (P)} |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega. \tag{0.3}$$

Пусть $\mathcal{A}_1(k)$ – набор вида (0.1) с х.м. $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{A}_1)$. Обозначим

$$A_p(x,\xi) = \sum_{\alpha \neq 0} \left(\frac{|P^{(\alpha)}(x,\xi)|}{1 + |P(x,\xi)|} \right)^{1/|\alpha|},$$

где $P^{(\alpha)}(x,\xi) = D^\alpha_\xi P(x,\xi)$,

Определение 6. Функцию $h(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^{k} |\xi|^{\nu^j}$ назовем *весом гипоэллиптичности* многочлена $P(x,\xi)$, если произведение $h(\xi) A_p(x,\xi)$ ограничено на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, и для любого $\mu \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathcal{N}(\mathcal{A}_1)$ произведение $|\xi|^\mu A_p(x,\xi)$ не ограничено на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Многогранник $\mathcal{N}(\mathcal{A}_1)$ назовем *х.м. веса гипоэллиптичности многочлена* $P(x,\xi)$.

Аналогично лемме 3.5 из [6] можно установить следующее :

Лемма 0.1. *Пусть $\mathcal{A}_2(r)$ – набор вида (0.2). Если многогранник $\mathcal{N}(\mathcal{A}_2)$ является х.м. равномерно регулярного в Ω многочлена $P(x,\xi)$, то многогранник*

$$\mathcal{M} = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \ (\nu, \lambda^j) \le 1, \ j = 1, ..., r\}$$

является х.м. веса гипоэллиптичности многочлена $P(x,\xi)$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{R}^n_0$, и пусть $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^n_+$ – вполне правильный многогранник. Обозначим через $\Gamma^l(\Omega)$ множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $c = c(K)$, для которой

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \le c^{|\alpha|+1} \alpha^{l\alpha}, \quad \alpha \in N^n_+.$$

Через $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega)$ обозначим множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $c = c(K)$, для которой

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \le c^{j+1} j^j, \quad \alpha \in N^j, \quad j = 1, 2, ...$$

§1. МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫЕ КЛАССЫ ЖЕВРЕ

Следующее предложение является непосредственным следствием определения соответствующих классов.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ – два вполне правильных многогранника. Если $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, то $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}} \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$.*

Лемма 1.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне правильный многогранник. Если $\mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \ (\nu, \lambda) \le 1\}$ для вектора $\lambda \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{R}^n_0$, то $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega) = \Gamma^\lambda(\Omega)$.*

Доказательство. Так как при $\lambda_0 = \min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i > 0$ и $\alpha \in N^n_+$ имеем

$$\alpha^{\lambda\alpha} = \alpha_1^{\lambda_1\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n\alpha_n} \le \left(\frac{(\alpha,\lambda)}{\lambda_0}\right)^{\lambda_1\alpha_1} \cdots \left(\frac{(\alpha,\lambda)}{\lambda_0}\right)^{\lambda_n\alpha_n} = (1/\lambda_0)^{(\alpha,\lambda)} (\alpha,\lambda)^{(\alpha,\lambda)},$$

то $\Gamma^\lambda(\Omega) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega)$. Для доказательства обратного вложения достаточно показать существование $c > 0$ такой, что

$$(\alpha,\lambda)^{(\alpha,\lambda)} \le c^{(\alpha,\lambda)} \alpha^{\lambda\alpha}, \quad \alpha \in N^n_+ \cap \mathbb{R}^n_0. \tag{1.1}$$

Поскольку $t^{1/t} < e$ на $[\lambda_0, \infty)$, то

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln \left[\frac{(\alpha,\lambda)}{\alpha_j}\right]^{\alpha_j/(\alpha,\lambda)} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = |\lambda|, \quad \alpha \in N_+^n \cap \mathbb{R}_0^n \tag{1.2}$$

или, что то же самое

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j [\ln(\alpha,\lambda) - \ln \alpha_j] \leq (\alpha,\lambda)|\lambda|, \quad \alpha \in N_+^n \cap \mathbb{R}_0^n.$$

Следовательно

$$(\alpha,\lambda)\ln(\alpha,\lambda) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j \ln \alpha_j + (\alpha,\lambda)|\lambda|, \quad \alpha \in N_+^n \cap \mathbb{R}_0^n,$$

и мы получаем (1.1) с $c = e^{|\lambda|}$. Этим завершается доказательство леммы 1.1.

Обозначим через M множество тех n-мерных точек $\mu \in \mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{R}_0^n$, для которых $\min\limits_{1\leq i\leq n} \mu_i = 1$.

Лемма 1.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\mathcal{N}$ – х.м. набора $A_2(r)$, l – натуральное число, $\mu^j \in M$, $j = 1,...,l$ и $\mathcal{M} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu,\mu^j) \leq 1, j = 1,...,l\}$. Для того, чтобы $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega) \times \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega) = \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathcal{N}^0 = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu,\lambda^0) \leq 1\} \subset \mathcal{N},$$

где

$$\lambda^0 = \left(\min_{1\leq j\leq l} \mu_1^j, ..., \min_{1\leq j\leq l} \mu_n^j\right).$$

Доказательство. Достаточность. Поскольку $1 \in \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega)$ для любого в. п. многогранника $\mathcal{N}$, то $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega) \times \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega)$. Поэтому, достаточно показать, что

$$\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}^0}(\Omega) \times \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega).$$

Пусть $K \subset \Omega$ – компакт, $f_1 \in \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}^0}(\Omega)$, $f_2 \in \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega)$ и s, i – натуральные числа. Так как, очевидно, для любых мультииндексов α, β, $\alpha \in \mathcal{M}^s$, $i \leq (\beta,\lambda^0) < i+1$, $\alpha - \beta \in \mathcal{M}^{s-i}$, то

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha(f_1 f_2)(x)| \leq \sup_{x\in K} \left| \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta f_1(x) D^{\alpha-\beta} f_2(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{s} \sum_{i\leq(\beta,\lambda^0)<i+1} C_\alpha^\beta \chi_1^{i+2}(i+1)^{i+1}\chi_2^{s-i+1}(s-i)^{s-i}, \tag{1.3}$$

где $\chi_1(K,f_1) > 0$, $\chi_2(K,f_2) > 0$ – некоторые постоянные, $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots C_{\alpha_n}^{\beta_n}$ – биномальные коэффициенты. Поскольку

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{i\leq(\beta,\lambda^0)<i+1} C_\alpha^\beta = 2^{|\alpha|} \leq 2^s,$$

то из (1.3) с некоторой постоянной $\rho_1 > 0$ имеем

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha(f_1 f_2)(x)| \leq \rho_1^{s+1} \sum_{i=0}^{s} i^i (s-i)^{s-i}, \quad \alpha \in \mathcal{M}^s. \tag{1.4}$$

Так как $i^i(s-i)^{s-i} \leq s^s$, $i = 0, 1, ..., s$, то из (1.4) с некоторой постоянной $\rho_2 > 0$ имеем

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha(f_1 f_2)(x)| \leq \rho_2^{s+1} s^s, \quad \alpha \in \mathcal{M}^s, \quad s = 1, 2, ...$$

Этим достаточность леммы 1.2 доказана.

Необходимость. Пусть $\mathcal{N}^0 \not\subset \mathcal{N}$. Обозначим через $\Sigma(\mathcal{N})$ множество вершин многогранника $\mathcal{N}$. Существует индекс i (ради определенности пусть $i = 1$) и число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\left(\frac{1}{\lambda_1^0+\varepsilon_0}, 0, ..., 0\right) \in \Sigma(\mathcal{N})$. В силу определения вектора λ^0 существует индекс j_0, $1 \leq j_0 \leq l$, для которого $\lambda_1^0 = \mu_1^{j_0}$. Пусть функции

$$a(x_1) \in \Gamma^{\lambda_1^0+\varepsilon_0}(\mathbb{R}^1) \equiv \Gamma^{\mu_1^{j_0}+\varepsilon_0}(\mathbb{R}^1), \quad b_i(x_i) \in \Gamma^{\mu_i^{j_0}}(\mathbb{R}^1), \quad i = 2, ..., n$$

и число $\chi_1 > 0$ удовлетворяют соотношениям

$$|D_1^s a_1(x_1^0)| = \chi_1^{s+1} s^{s(\mu_1^{j_0}+\varepsilon)}, \quad s = 1, 2, ...,$$

$$|D_1^s b_i(x_i^0)| = \chi_1^{s+1} s^{s\mu_i^{j_0}}, \quad s = 1, 2, ..., \quad i = 2, ..., n$$

в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \Omega$. Тогда для всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$|D_1^s \cdots D_n^s(a_1(x_1^0) b_2(x_2^0) \cdots b_n(x_n^0))| = \chi_1^{n(s+1)} s^{s(|\mu_1^{j_0}|+\varepsilon)}. \tag{1.5}$$

Пусть $d > 0$ такое число, что

$$\mathcal{N} \subset \left\{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \ \nu_1(\lambda_1^0 + \varepsilon) + d\sum_{i=2}^{n} \nu_i \leq 1\right\}$$

(существование такого числа немедленно следует из вполне правильности многогранника $\mathcal{N}$ и из того, что $\left(\frac{1}{\lambda_1^0+\varepsilon_0}, 0, \ldots, 0\right) \in \Sigma(\mathcal{N})$). Поскольку $\Gamma^{\lambda^j/d_j} \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\Omega)$, то будем иметь

$$a(x_1, \ldots, x_n) \equiv a(x_1) \in \Gamma^{(\lambda_1^0+\varepsilon_0, d, \ldots, d)}(\mathbb{R}^n) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}(\mathbb{R}^n),$$

$$b(x_2, \ldots, x_n) = b_2(x_2) \cdots b_n(x_n) \in \Gamma^{\mu^{j_0}}(\mathbb{R}^n) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому, в силу (1.5) получим $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}} \times \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}} \not\subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}$. Полученное противоречие показывает справедливость утверждения леммы, относящейся к необходимости.

§2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВПОЛНЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Ниже, в предложениях 2.1 – 2.8, под $\mathcal{N}$ будем подразумевать х.м. произвольного набора $\mathcal{A}_2(r)$ вида (0.2). Для х.м. $\mathcal{N}$ положим

$$\partial\mathcal{N} = \{\nu \in \mathcal{N} : \ (\nu, \lambda^j) = d_j \text{ для некоторого } j \in \overline{1, r}\}.$$

Предложение 2.1. *Для любых $\nu \in \partial\mathcal{N}$ и $\nu' \in G(\nu)$ существует индекс j $(1 \le j \le r)$ такой, что*

$$\frac{t(\nu')}{t(\nu') - 1}(\nu - \nu', \lambda^j) \ge d_j,$$

где

$$G(\nu) = \{\mu \in \mathbb{R}^n_+ : \ \mu \ne 0, \textit{ для каждого } j \ (1 \le j \le r) \textit{ или } \mu_j = \nu_j \textit{ либо } \mu_j = 0\},$$

$$t(\nu') = \min_{1 \le i \le r} \frac{d_i}{(\nu', \lambda^i)}.$$

Доказательство. Из определения множества $\partial\mathcal{N}$, для некоторого индекса j $(1 \le j \le r)$ имеем $(\nu, \lambda^j) = d_j$. Так как

$$\frac{t(\nu')}{t(\nu') - 1} = \max_{1 \le i \le r} \frac{d_i}{d_i - (\nu', \lambda^i)},$$

то для этого индекса j имеем

$$\frac{t(\nu')}{t(\nu') - 1}(\nu - \nu', \lambda^j) \ge \frac{d_j}{d_j - (\nu', \lambda^j)}(\nu - \nu', \lambda^j) = d_j.$$

Предложение 2.2. *Для любых $\nu \in \partial\mathcal{N}$ и $\nu' \in G(\nu)$ существует индекс j $(1 \le j \le r)$ такой, что*

$$\frac{t(\nu')}{t(\nu')-1}(\nu-\nu',\lambda^j) \le d_j,$$

где $G(\nu)$ и $t(\nu')$ те же, что в предложении 2.1.

Доказательство. Взяв в качестве индекса j один из тех индексов s $(1 \le s \le r)$, для которых

$$\frac{t(\nu')}{t(\nu')-1} = \frac{d_s}{d_s-(\nu',\lambda^s)},$$

получим, что

$$\frac{t(\nu')}{t(\nu')-1}(\nu-\nu',\lambda^j) = \frac{d_j}{d_j-(\nu',\lambda^j)}(\nu-\nu',\lambda^j) \le d_j.$$

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ – вполне правильный многогранник, и пусть $\Sigma(\mathcal{N})$ – множество его вершин. Обозначим через $\Sigma_i(\mathcal{N})$ множество вершин $\nu \in \Sigma(\mathcal{N})$, для которых $\nu_j \ne 0$, а через μ^j – вершину многогранника $\mathcal{N}$, лежащую на оси ξ_j, $j=1,...,n$.

Предложение 2.3. *Если для всех j $(1 \le j \le r)$, $(\mu^1,\lambda^j)=d_j$, то $\Sigma_1(\mathcal{N})\setminus\{\mu^1\} = = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, существует точка $\nu \in \Sigma_1(\mathcal{N}) \setminus \{\mu^1\}$. Для определенности пусть $\nu = (\nu_1,...,\nu_k,0,...,0)$, где $\nu_j \ne 0$, $j=1,...,k$; $1<k\le n$. Обозначим через $\mathcal{M}$ k-мерный подмногогранник многогранника $\mathcal{N}$ с вершинами $\beta \in \Sigma(\mathcal{N})$, $\beta_{k+1} = \cdots = \beta_n = 0$. Тогда, очевидно

$$\mathcal{M} = \{\gamma \in \mathbb{R}^k_+ : \ (\gamma,\overline{\lambda}^j) \le d_j, \ j=\overline{1,r}\}, \quad \overline{\lambda}^j = (\lambda^j_1,...,\lambda^j_k).$$

Поскольку $\overline{\nu} = (\nu_1,...,\nu_k) \in \Sigma(\mathcal{M}) \cap \mathbb{R}^k_0$, то существует k линейно независимых векторов $\overline{\lambda}^j$ таких, что $(\overline{\lambda}^j,\overline{\nu}) = d_j$, $j=1,...,k$. С другой стороны, согласно нашим условиям $d_j = (\lambda^j,\mu^1) = (\overline{\lambda}^j,\overline{\mu}^1)$. Поэтому $(\overline{\lambda}^j,\overline{\mu}^1) = (\overline{\lambda}^j,\overline{\nu})$, $j=1,...,k$. Так как векторы $\overline{\lambda}^j$, $j=1,...,k$ линейно независимы, то отсюда имеем, что $\overline{\mu}^1 = \overline{\nu}$ и, следовательно, $\mu^1 = \nu$. Полученное противоречие доказывает предложение 2.3.

Предложение 2.4. *Если $\Sigma_j(\mathcal{N}) \setminus \{\mu^j\} \ne \emptyset$, то*

$$\max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\lambda^l_j} > \mu^j_j, \quad 1 \le j \le n.$$

Доказательство. Пусть, наоборот, при выполнении условий предложения существует индекс s, $1 \le s \le n$, для которого $\max\limits_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\lambda^l_s} \le \mu^s_s$. Тогда для любого l, $1 \le l \le r$ имеем $d_l \le (\mu^s, \lambda^l)$. С другой стороны, т.к. по определению х.м. $d_l \ge (\mu^s, \lambda^l)$, то $d_l = (\mu^s, \lambda^l)$, $l = 1, ..., r$. Используя это в силу предложения 2.3 получим $\Sigma_s(\mathcal{M}) \setminus \{\mu^s\} = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает предложение 2.4.

Предложение 2.5. *Если* $\Sigma_j(\mathcal{N}) \setminus \{\mu^j\} \ne \emptyset$, $1 \le j \le n$, *то существует точка* $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n) \in \Sigma_j(\mathcal{N}) \setminus \{\mu^j\}$ *такая, что*

$$\nu_j \frac{t_j}{t_j - 1} = \max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\lambda^l_j},$$

где

$$t_j = \min_{1\le l\le n} \frac{d_l}{(\nu, \lambda^l) - \nu_j \lambda^l_j}, \quad 1 \le j \le n.$$

Доказательство. Легко заметить, что для некоторого индекса k (для определенности пусть $k = 1$)

$$\frac{d_k}{\lambda^k_j} = \max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\lambda^l_j}, \qquad 1 \le j \le n. \tag{2.1}$$

Поскольку λ^1 – нормаль к некоторой $(n-1)$-мерной некоординатной грани (набор $\mathcal{A}_2(r)$ минимальный), то существует точка $\nu \in \Sigma_j(\mathcal{N})$ такая, что $(\lambda^1, \nu) = d_1$. Так как в силу предложения 2.4 $d_1/\lambda^1_j > \mu^j_j$, то это означает, что $\nu \in \Sigma_j(\mathcal{N}) \setminus \{\mu^j\}$ и, следовательно, $|\nu| - \nu_j \ne 0$. Имеем

$$\frac{d_1}{\lambda^1_j \nu_j} \le \max_{1\le l\le k} \frac{d_l}{d_l - (\nu, \lambda^l) + \nu_j \lambda^l_j} \le \max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\nu_j \lambda^l_j} = \frac{d_1}{\nu_j \lambda^1_j}.$$

$$\lambda^1_j \nu_j \frac{t_j}{t_j - 1} = \lambda^1_j \nu_j \max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{d_l - (\nu, \lambda^l) + \nu_j \lambda^l_j} = \lambda^1_j \nu_j \frac{d_1}{\nu_j \lambda^1_j} = d_1,$$

что и требовалось доказать.

Предложение 2.6. *Пусть* $\{\nu^j\}_1^k$ *– множество вершин многогранника* $\mathcal{N}$

$$h(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^{k} |\xi|^{\nu^j}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует постоянная $c > 0$ *такая, что*

$$h(\xi - \eta) \le c(h(\xi) + g(\eta)), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$g(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{s_j}, \quad s_j = \max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\lambda_j^l}, \quad j = 1, ..., n.$$

Эта оценка точная в следующем смысле. Пусть $\mathcal{A}_2'$ – набор вида (0.2) и $\mathcal{N}'$ – его х.м. Если $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}' \neq \emptyset$, где $\mathcal{M}$ – х.м. набора $\{s^j\}_1^n$ вида (0.1), то существуют подпоследовательности $\{\xi^s\}_1^\infty$ и $\{\eta^s\}_1^\infty$ такие, что при $s \to \infty$

$$\frac{h(\xi^s - \eta^s)}{h(\xi^s) + g'(\eta^s)} \to \infty,$$

где

$$g'(\xi) = 1 + \sum_{\beta\in\Sigma(\mathcal{N}')} |\xi|^\beta.$$

Доказательство немедленно следует из предложений 2.2 и 2.5, если заметить, что для произвольных $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{R}_+^n$

$$|\xi - \eta|^\nu \le c \prod_{j=1}^{n} \left(|\xi_j|^{\nu_j} + |\eta_j|^{\nu_j}\right) \le c \left(|\xi|^\nu + |\eta|^\nu + \sum_{\nu'\in G(\nu)} |\xi|^{\nu'} |\eta|^{\nu-\nu'}\right) \le$$

$$\le c \left\{ |\xi|^\nu + |\eta|^\nu + \sum_{\nu'\in G(\nu)} \left[\frac{(|\xi|^{\nu'})^{t(\nu')}}{t(\nu')} + \frac{t(\nu')-1}{t(\nu')} \left(|\eta|^{\nu-\nu'}\right)^{\frac{t(\nu')}{t(\nu')-1}} \right] \right\},$$

где $c > 0$ – постоянная, $t(\nu') > 1$, а $\nu' \in G(\nu)$ – число из предложения 2.1.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – х.м. набора $A_2(r)$ вида (0.2) и $\lambda \in \mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{R}_0^n$. Для того, чтобы $\Gamma^\lambda \times \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}} = \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lambda \le \lambda_0 \equiv \left(\frac{1}{s_1}, ..., \frac{1}{s_n}\right), \quad s_j = \max_{1\le l\le r} \frac{d_l}{\lambda_j^l}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.2 с использованием предложений 2.2 и 2.5.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{N}$ – х.м. набора $A_2(r)$ вида (0.2), и пусть $\mathcal{M}$ – вполне правильный многогранник. Для того, чтобы $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}} \times \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}} = \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathcal{M}^0 \equiv \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^0) \le 1\},$$

где λ_0 – вектор из леммы 2.1.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.2 с использованием леммы 2.1.

Ниже мы выделим один важный подкласс вполне правильных многогранников. Через B обозначим множество многогранников $\mathcal{N}$, являющихся х.м. набора $\mathcal{A}_2(r)$ вида (0.2) и удовлетворяющих условиям :

I) $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_+^n$,

II) $d_i = \mathrm{const} = d$, $i = 1, ..., r$,

III) для достаточно больших натуральных j и $\alpha \in \mathcal{N}^{(d+j)/d} \setminus \mathcal{N}^{(d+j-1)/d}$ существует мультииндекс $\beta = \beta(\alpha) \in \mathcal{N}$ такой, что $\alpha - \beta + \gamma \in \mathcal{N}^{(d+j)/d}$ для любого $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$.

Введем обозначение

$$\mathcal{N}^t = \begin{cases} \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \ \nu/t \in \mathcal{N}\}, & t > 0, \\ \{0\}, & t = 0, \\ \emptyset, & t < 0, \end{cases} .$$

Очевидно следующее

Предложение 2.7. *Если $\mathcal{N} \in B$, то для любых j, α, β, удовлетворяющих условию III), $\alpha - \beta \in \mathcal{N}^{j/d}$.*

Предложение 2.8. *Если $\mathcal{N} \in B$, то*

$$H \equiv \{\alpha \in N_+^n : \ \exists \beta \in \mathcal{N} \cap N_+^n, \ \alpha \le \beta, \ |\alpha| \le |\beta| - 1\} \subset \mathcal{N}^{(d-1)/d}.$$

Доказательство. Пусть, наоборот, существует мультииндекс $\alpha \in H \setminus \mathcal{N}^{(d-1)/d}$. Из определения множества $\mathcal{N}^{(d-1)/d}$, для некоторого индекса s, $1 \le s \le r$ имеем $(\alpha, \lambda^s) > d - 1$. Поскольку $\alpha \in H$, то существует мультииндекс $\beta \in \mathcal{N}$, $\beta \ge \alpha$ такой, что $|\alpha| \le |\beta| - 1$. Учитывая, что $\min\limits_{1 \le j \le n} \lambda_j^s = 1$, получаем

$$(\beta, \lambda^s) = (\alpha, \lambda^s) + (\beta - \alpha, \lambda^s) > d - 1 + |\beta - \alpha| \min_{1 \le j \le n} \lambda_j^s \ge d,$$

что противоречит определению H. Полученное противоречие доказывает наше предложение.

Предложение 2.9. *Пусть*

$$n = 2, \quad 1 \le r \in N_+^1, \quad \lambda^j \in \mathbb{R}_+^2, \quad \min_{l=1,2} \lambda_l^j = 1, \ j = 1, ..., r \quad \lambda^i \ne \lambda^j \text{ при } i \ne j,$$

$$\mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^2 : \ (\nu, \lambda^j) \le 1, \ j = 1, ..., r\}.$$

Тогда или

а) существует вектор $\lambda \in \mathbb{R}^2_+$, $\min_{l=1,2} \lambda_l = 1$ *такой, что*

$$\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}} \equiv \{\nu \in \mathbb{R}^2_+ : \ (\nu, \lambda) \leq 1\},$$

или

б) существуют два вектора $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2_+$, $\mu_2 = \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 > 1$, $\mu_1 > 1$ *таких, что*

$$\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}} \equiv \{\nu \in \mathbb{R}^2_+ : \ (\nu, \lambda) \leq 1, \ (\nu, \mu) \leq 1\}.$$

Доказательство. Для $r = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что $r > 1$. Разделим множество $\Lambda = \{\lambda^j\}_1^r$ на два подмножества :

$$\Lambda_1 = \{\lambda^j \in \Lambda : \ \lambda_1^j = 1, \ 1 \leq j \leq r\}, \quad \Lambda_2 = \Lambda \setminus \Lambda_1$$

и рассмотрим случаи :

$$1) \quad \Lambda_1 = \emptyset, \qquad 2) \quad \Lambda_2 = \emptyset, \qquad 3) \quad \Lambda_1 \neq \emptyset, \quad \Lambda_2 \neq \emptyset.$$

В случае 1) обозначим через λ_l вектор λ^j, $1 \leq j \leq r$, для которого $\lambda_1^j = \max\limits_{1 \leq l \leq r} \lambda_1^l$. Для всех $\nu \in \widetilde{\mathcal{N}}$ и l, $1 \leq l \leq r$ имеем $(\nu, \lambda^l) \leq (\nu, \lambda) \leq 1$. Включением $\mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{N}}$ завершается доказательство для первого случая. Доказательство в случае 2) аналогично. В случае 3) возможны следующие два подслучая :

$$3.1) \quad \max_{\lambda^j \in \Lambda_1} \lambda_2^j = 1, \qquad 3.2) \quad \max_{\lambda^j \in \Lambda_1} \lambda_2^j > 1.$$

В случае 3.1) доказательство аналогично доказательству в случае 1), поскольку $\lambda \leq \mu$ для любых $\lambda \in \Lambda_1$ и $\mu \in \Lambda_2$. Рассмотрим случай 3.2). Обозначим через λ вектор $\lambda^j \in \Lambda_1$, для которого $\lambda_2^j = \max\limits_{\lambda^l \in \Lambda_1} \lambda_2^l > 1$, а через μ – вектор $\lambda^j \in \Lambda_2$, для которого $\lambda_1^j = \max\limits_{\lambda^l \in \Lambda_2} \lambda_1^l > 1$. Имеем $\lambda \geq \lambda^l$ для любого $\lambda^l \in \Lambda_1$ и $\mu \geq \lambda^l$ для любого $\lambda^l \in \Lambda_2$. Следовательно, для любой точки $\nu \in \overline{\mathcal{N}}$ и любого вектора $\lambda^l \in \Lambda$ имеем $(\nu, \lambda^l) \leq \max\{(\nu, \lambda), (\nu, \mu)\} \leq 1$. Включение $\mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{N}}$ завершает доказательство.

Предложение 2.10. *Пусть*

$$n = 2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2_+ \cap \mathbb{R}^2_0, \quad \min_{l=1,2} \lambda_l = \min_{l=1,2} \mu_l = 1, \quad d > 0,$$

$$\mathcal{N} = \left\{\nu \in \mathbb{R}^2_+ : \ (\nu,\lambda) \le d, \ (\nu,\mu) \le d\right\}.$$

Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N^2_+$, *то* $\mathcal{N} \in B$.

Доказательство. Нам необходимо только проверить выполнение условия III) определения B. Возможны следующие случаи : 1) $\mu \ge \lambda$, 2) $\mu \le \lambda$, 3) $\mu \not\ge \lambda$, $\mu \not\le \lambda$. В случае 1) мы имеем $\mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}^2_+ : (\nu,\mu) \le d\}$. Пусть $l^1 = (l_1, 0)$ и $l^2 = (0, l_2)$ – вершины многогранника $\mathcal{N}$, и пусть $\alpha \in N^2_+$, $|\alpha| \ge l_1 + l_2$. Мы имеем или $\alpha \ge l^1$ или $\alpha \ge l^2$. Для первого случая в качестве мультииндекса взяв $\beta(\alpha) = l^1$, а для второго $\beta(\alpha) = l^2$ и учитывая, что

$$\Sigma(\mathcal{N}) \setminus \{l^1, l^2\} = \emptyset, \qquad (l^1,\mu) = (l^2,\mu) = d,$$

получим

$$(\alpha - \beta + \gamma, \mu) = (\alpha,\mu) - (\beta,\mu) + (\gamma,\mu) = (\alpha,\mu) - d + d = (\alpha,\mu),$$

откуда следует III). В случае 2) доказательство проводится аналогоичным образом.

В сучае 3) без ограничения общности можем предположить, что $\mu_1 = \lambda_2 = 1$, $\mu_2 > 1$, $\lambda_1 > 1$. Пусть $l^1 = (l_1, 0)$, $l^2 = (0, l_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2_0$ – вершины многогранника $\mathcal{N}$, и пусть j_0 – наименьшее натуральное число такое, что $\alpha \in \mathcal{N}^{(d+j_0-1)/d}$, $\alpha \in N^2_+$ и

$$|\alpha| \le 2l_1\frac{\lambda_1}{\mu_2} + l_1 + 2l_2\frac{\mu_2}{\lambda_1} + l_2.$$

Пусть $j \ge j_0$ – натуральное число, и пусть $\alpha \in \mathcal{N}^{(d+j)/d} \setminus \mathcal{N}^{(d+j_0-1)/d}$ – мультииндекс. Покажем III). Рассмотрим случаи : 3.1) $\alpha_1 < \delta_1$, 3.2) $\alpha_2 < \delta_2$, 3.3) $\alpha_1 \ge \delta_1$, $\alpha_2 \ge \delta_2$. В случае 3.1) взяв l^2 в качестве мультииндекса $\beta(\alpha)$, для всех $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$ получим

$$(\alpha - \beta + \gamma, \mu) = (\alpha,\mu) - (l^2,\mu) + (\gamma,\mu) \le (\alpha,\mu) - d + d \le d + j.$$

С другой стороны, так как $\alpha_1 < \delta_1$, $\alpha_2\mu_2 \ge 2l_1\lambda_1$, $\alpha_2 \ge l_2$, то для любого мультииндекса $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$ имеем

$$(\alpha-\beta+\gamma,\lambda) \le (\alpha-l^2,\lambda)+d = (\alpha-l^2,\lambda)+(l^1,\lambda) = d+\gamma-[d+j-(\alpha-l^2+l^1,\lambda)] =$$

$$= d+j-(d+j-\alpha_1\lambda_1-\alpha_2+l^2-l^1\lambda_1) \le d+j-(d+j-2l^1\lambda_1) \le d+j-[(\alpha,\mu)-2l^1\lambda_1] =$$

$$= d+j-(\alpha_1+\alpha_2\mu_2-2l^1\lambda_1) \le d+j-(\alpha_2\mu_2-2l^1\lambda_1) \le d+j.$$

Это доказывает наше утверждение в случае 3.1). Случай 3.2) аналогичен. В случае 3.3), взяв $\delta \in \Sigma(\mathcal{N})$ в качестве мультииндекса $\beta(\alpha)$, для всех $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$ будм иметь

$$(\alpha-\beta+\gamma,\mu) = (\alpha,\mu) - d + (\gamma,\mu) \le (\alpha,\mu) \le d+j,$$

$$(\alpha-\beta+\gamma,\lambda) = (\alpha,\lambda) - d + (\gamma,\lambda) \le (\alpha,\lambda) \le d+j,$$

т.е. $\alpha-\beta+\gamma \in \mathcal{N}^{(d+j)/d}$ для всех $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$. Предложение 2.10 доказано.

§3. ПОВЕДЕНИЕ РАВНОМЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для заданной области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ и числа $\varepsilon > 0$ обозначим $\omega_\varepsilon = \{t \in \omega : \operatorname{dist}(t, \partial\omega) > \varepsilon\}$. Предполагая, что $V = L_2^{loc}(\omega)$, положим

$$K_\varepsilon(V) = \left(\int_{\omega_\varepsilon} |V|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Лемма 3.1. *Пусть*

$$P(x,D) = \sum_{\alpha\in(P)} a_\alpha(x) D^\alpha$$

– равномерно регулярный оператор в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с х.м. $\mathcal{N}(P)$, и пусть $\mathcal{M}$ – х.м. веса гипоэллиптичности P. Если $\mathcal{N} \in B$, то для любого $x^0 \in \Omega$ существуют окрестность $\omega \in \Omega$ и постоянная χ такие, что для любых $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$, $\alpha \in \mathcal{N} \cap N_+^n$

$$\varepsilon^{d-j} K_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha V) \le \chi \left[\varepsilon^d K_{\varepsilon_1}(P(x,D)V) + \sum_{i=1}^{[d]} \sum_{\beta\in\mathcal{M}_i} \varepsilon^{d-i} K_{\varepsilon_1}(D^\beta V)\right], V \in C^\infty(\omega), \tag{3.1}$$

где $[d]$ – целая часть d и $\mathcal{M}_i = (\mathcal{M}^{d-i} \setminus \mathcal{M}^{d-i-1}) \cap N_+^n$, $0 \le i \le [d]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.5.1 из [1] и основано на лемме 0.1, предложении 2.8 и на том, что для любых двух мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ ($\alpha \ge \beta$, $\beta \in \mathcal{M}_r$, $0 \le r \le [d]$) мы имеем $d - |\alpha-\beta| \ge d - r$.

Следующее утверждение вытекает из определения класса Жевре Γ^l.

Предложение 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с диаметром меньшим или равным 2, $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{R}^n_0$, $f(x) \in \Gamma^l(\Omega)$. Тогда существует постоянная $c(\varepsilon_0, f) > 0$ такая, что для любых $\varepsilon > 0$ и натуральных j, для которых $\Omega_{\varepsilon j+\varepsilon_0} \neq \emptyset$*

$$\varepsilon^{(\lambda,\alpha)} \sup_{\Omega_{\varepsilon j+\varepsilon_0}} |D^\alpha f| \leq c^{|\alpha|+1} \alpha^{l\alpha} j^{-(\alpha,l)}, \quad \alpha \in N^n_+. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть*

$$P(x,D) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha(x) D^\alpha$$

– равномерно регулярный оператор в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с аналитическими коэффициентами и х.м. $\mathcal{N}(P)$, и пусть $\mathcal{M}$ – х.м. веса хипоэллиптичности P. Если $\mathcal{N} \in B$, то

$$N(P) = \{U \in D^1(\Omega) : \ P(x,D)U = 0\} \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega).$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $x^0 \in \Omega$ существует окрестность $\omega(x^0) \subset \Omega$ такая, что $N(P) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega)$. В качестве такой окрестности можно взять любую область с диаметром меньшим 2, удовлетворяющую формуле (3.1). Из аналитичности коэффициентов P следует, что с некоторой константой $G > 0$

$$\sup_\omega |D^\alpha a_\beta(x)| \leq G^{|\alpha|+1} |\alpha|!, \quad \alpha \in N^n_+, \quad \beta \in (P). \tag{3.3}$$

Пусть j_0 – наименьшее натуральное число такое, что условие III) в определении множества B выполняется для всех $j \geq j_0$. Пусть $U \in N(P)$, и пусть k – число точек множества (P). Покажем, что существует такая постоянная $c(U) \geq k(\chi+ +1)(1 + 2G^2) + 1$, где χ как в (3.1), что для любых $\varepsilon > 0$, натурального j и $\alpha \in (\mathcal{M}^{d+j_0-1+j} \setminus \mathcal{M}^{d+j_0-1}) \cap N^n_+$ выполняется неравенство

$$\varepsilon^{d+j_0-1+j} K_{j\varepsilon}(D^\alpha U) \leq c^{d+j_0+j}. \tag{3.4}$$

По теореме 7.4.1 из [1] имеем $N(P) \subset C^\infty(\Omega)$. Так что неравенство (3.4) для $j = 1$ очевидно.

Предположим, что неравенство (3.4) выполняется для $j \leq l$ и докажем, что оно остается в силе для $j = l + 1$. Пусть $\alpha \in (\mathcal{M}^{d+j_0+l} \setminus \mathcal{M}^{d+j_0-1+l}) \cap N^n_+$.

Поскольку $\mathcal{N} \in B$, то существует мультииндекс $\alpha' \leq \alpha$ такой, что $\alpha - \alpha' \in \Sigma(\mathcal{N})$ и $\alpha' + \gamma \in \mathcal{M}^{d+j_0+l}$ для любой $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$. Из (3.1) при $\varepsilon_1 = \varepsilon l$ имеем

$$\varepsilon^{d+j_0+l} K_{(l+1)\varepsilon}(D^\alpha U) = \varepsilon^{d+j_0+l} K_{(l+1)\varepsilon}(D^{\alpha'} D^{\alpha-\alpha'} U) \leq$$

$$\leq \chi \varepsilon^{j_0+l} \left[\varepsilon^d K_{l\varepsilon}(P(x,D)(D^{\alpha'}U)) + \sum_{i=1}^{[d]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_i} \varepsilon^{d-i} K_{l\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'}U) \right]. \qquad (3.5)$$

Согласно предложению 2.7 $\alpha' \in \mathcal{M}^l$ так, что для любого мультииндекса $\beta \in \mathcal{M}_i$, $1 \leq i \leq [d]$ имеем $\beta + \alpha' \in \mathcal{M}^{d+l-i}$. По предположению индукции

$$\chi \varepsilon^{j_0+l} \sum_{i=1}^{[d]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_i} \varepsilon^{d-i} K_{l\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'}U) \leq \chi k c^{d+j_0+l}. \qquad (3.6)$$

Теперь оценим $A = \varepsilon^{d+j_0+l} K_{l\varepsilon}(P(x,D)(D^{\alpha'}U))$. Поскольку $U \in N(P)$, то

$$A = \varepsilon^{d+j_0+l} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in (P)} a_\beta(x) D^{\beta+\alpha'} U - \sum_{\beta \in (P)} D^{\alpha'}(a_\beta(x) D^\beta U) \right) =$$

$$= \varepsilon^{d+j_0+l} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in (P)} \sum_{0 \neq \nu \leq \beta} C_\beta^\nu D^\nu a_\beta(x) D^{\beta+\alpha'-\nu} U \right).$$

Для любых мультииндексов β, ν ($\beta \in \mathcal{N}, 0 \neq \nu \leq \beta$) имеем $\alpha' + \beta - \nu \in \mathcal{M}^{d+j_0+l-1}$. Согласно предложению 3.1

$$\varepsilon^{d+j_0+l} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in (P)} \sum_{i=1}^{l} \sum_{\substack{|\nu|=i \\ \nu \leq \beta}} C_\beta^\nu D^\nu a_\beta(x) D^{\beta+\alpha'-\nu} U \right) \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \in (P)} \sum_{i=1}^{l} C_\beta^i G^{i+1} i! l^{-i} c^{d+j_0+l-i+1} \leq \sum_{i=1}^{l} k C_l^i G^{i+1} i! l^{-i} c^{d+j_0+l-i+1} \leq$$

$$\leq kG^2 \sum_{i=1}^{l} G^{i-1} c^{d+j_0+l-i+1} \leq kG^2 \sum_{i=1}^{l} \frac{c^{i-1}}{2^{i-1}} c^{d+j_0+l-i+1} \leq 2kG^2 c^{d+j_0+l}. \qquad (3.7)$$

Неравенство (3.4) для $j = l+1$ следует из (3.5) – (3.7).

Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon = \delta/j$. С учетом (3.4), для любого $\alpha \in \mathcal{M}^{d+j_0-1+j}$

$$\left(\int_{\omega_\delta} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq c^{d+j+j_0} \frac{j^{d+j_0+j-1}}{\delta^{d+j_0+j-1}}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

откуда следует утверждение теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть оператор P определен как в теореме 3.1. Если $f \in \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega)$, где $\mathcal{M}$ – х.м. веса гипоэллиптичности P, то*

$$\{U \in D'(\Omega):\ P(x,D)U = f\} \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{M}}(\Omega).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 с некоторыми изменениями.

ABSTRACT. For n-dimensional polyhedron $\mathcal{N}$ we define multi-anisotropic Gevrey functional space $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$ and prove that the solutions of hypoelliptic equations with variable coefficients from certain classes belong to $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{N}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators with Partial Derivatives, Springer Verlag, Berlin, 1963.
2. L. Cattabriga, "Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients", Asterisque, vol. 89 – 90, pp. 129 – 151, 1981.
3. T. Kotake, M. S. Narasimhan, "Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator", Bull. Soc. Math. France, vol. 90, pp. 449 – 471, 1962.
4. L. Zanghirati, "Iterati di una classe de operatori ipoellitici e classi generalizate de Gevrey", BUMI, vol. 1, pp. 177 – 195, 1980.
5. В. И. Буренков, К. Р. Маман, "Локальные оценки для производных решений неоднородных гипоэллиптических уравнений", Дифф. Ур. и Функц. Анализ, стр. 15 – 29, 1986.
6. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Мат. Сбор., т. 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
7. Г. О. Акопян, "Об оценках для производных решений определенного класса гипоэллиптических уравнений", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 4, стр. 358 – 374, 1986.

7 июля 1995

Ереванский государственный университет

О ЗАМЫКАНИИ СИСТЕМЫ МНОГОЧЛЕНОВ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

| И. О. Хачатрян |

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

Пусть $w(t) \geq 1$ – действительная измеримая функция, определенная на объединении E линий $\mathrm{Im} z = \pi/2$ и $\mathrm{Im} z = -\pi/2$ таких, что $t^n w^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in E, n = 0, 1, \ldots$. Пусть $\mathbf{C}_w(E)$ – пространство непрерывных функций $f(t)$, определенных на E, удовлетворяющих условию $f(t)\, w^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in E$, и пусть $P_w(E)$ означает замыкание системы многочленов в метрике пространства $\mathbf{C}_w(E)$. В статье приводится критерий для замыкаемости многочленов в $\mathbf{C}_w(E)$ и описывается пространство $P_w(E)$ при условии, что $P_w(E) \neq \mathbf{C}_w(E)$.

1⁰. Пусть $w(t) \geq 1$ – действительная измеримая функция, определенная на объединении E двух линий $\mathrm{Im}\, z = \pi/2$ и $\mathrm{Im}\, z = -\pi/2$ таких, что

$$t^n\, w^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty, \quad t \in E, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Через $\mathbf{C}_w(E)$ обозначим пространство непрерывных функций, определенных на E, удоветворяющих условию

$$f(t)\, w^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty, \quad t \in E.$$

Норму функции $f \in \mathbf{C}_w(E)$ определим как

$$\|f\| = \sup_{t \in E} |f(t)|\, w^{-1}(t). \tag{2}$$

Через $P_w(E)$ обозначим замыкание системы многочленов в метрике пространства $\mathbf{C}_w(E)$ так, что

$$P_w(E) \subset \mathbf{C}_w(E).$$

Вопрос, являющийся продолжением классической задачи С. Н. Бернштейна для вещественной оси (см. [1]) был поставлен в ряде статей : вывести необходимые и достаточные условия в терминах весовой функции $w(t)$, при которых замыкание системы многочленов совпадает с пространством $\mathbf{C}_w(E)$, т.е.

$$P_w(E) = \mathbf{C}_w(E). \tag{3}$$

В работах М. М. Джрбашяна [2] и С. Н. Мергеляна [3] задача замыкаемости многочленов была рассмотрена на произвольных кривых. Мы выводим некоторые следствия из результатов этих работ для нашего случая.

Теорема (М. М. Джрбашян, [2]). *Пусть функция $w(t)$ нормально возрастающая, т.е. допускает представление*

$$w(t) = w(|t|) = w(1) \exp\left\{ \int_1^{|t|} \frac{\omega(u)}{u}\, du \right\},$$

где $\omega(u) \uparrow +\infty$ при $u \uparrow +\infty$. Тогда (3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int^{+\infty} e^{-|t|} \ln w(t)\, dt = \infty.$$

В статье [3] содержится необходимое и достаточное условие для (3) без каких–либо ограничений на вес $w(t)$. Для формулировки этого результата обозначим через $\mathcal{M}_w$ множество многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условиям $\|t^{-1}p(t)\| \le 1$ и положим $\tilde{w}(z) = \sup\limits_{p \in \mathcal{M}} |p(z)|$.

Теорема (С. Н. Мергелян, [3]). *Условие*

$$\tilde{w}(z) = +\infty, \quad z \notin E$$

необходимо и достаточно для выполнения (3).

2^0. Ниже мы даем *интегральный* критерий замыкаемости многочленов в $\mathbf{C}_w(E)$ для произвольной весовой функции $w(t)$. Результат аналогичен теореме С. Н. Мергеляна для оси. Мы также описываем пространство P_w в случае, когда $P_w \ne \mathbf{C}_w$.

Теорема 1. *Нижеследующие условия (4), (5) необходимы и достаточны для (3) :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \tilde{w}\,(\xi \pm i\pi/2)\, \frac{d\xi}{\xi^2+1} = +\infty, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\frac{\pi}{2}) \frac{d\xi}{\cosh \xi} + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\frac{\pi}{2}) \frac{d\xi}{\cosh \xi} = +\infty. \tag{5}$$

Доказательство *Необходимость* : Пусть $P_w = \mathbf{C}_w$. Имеем $\widetilde{w}(z) = +\infty$, $z \notin E$. Для произвольного многочлена $p(z)$

$$\ln|p(z)| \leq -\frac{1}{\pi}(y + \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y + \frac{\pi}{2})^2}, \quad \mathrm{Im}\, z < -\frac{\pi}{2},$$

$$\ln|p(z)| \leq \frac{1}{\pi}(y - \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y - \frac{\pi}{2})^2}, \quad \mathrm{Im}\, z > \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \ln|p(z)| \leq \frac{1}{\pi} e^x \cos y \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi\, d\xi}{(e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi\, d\xi}{(-e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} \Bigg], \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, z < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Теперь пусть $p \in \mathcal{M}_w$. Тогда $|p(t)| \leq \widetilde{w}(t)$, $t \in E$ и с помощью неравенств (6) получим

$$\ln|p(z)| \leq -\frac{1}{\pi}(y + \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y + \frac{\pi}{2})^2}, \quad y < -\frac{\pi}{2},$$

$$\ln|p(z)| \leq \frac{1}{\pi}(y - \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y - \frac{\pi}{2})^2}, \quad y > \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \ln|p(z)| \leq \frac{1}{\pi} e^x \cos y \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi\, d\xi}{(e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi\, d\xi}{(-e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} \Bigg], \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Взяв в этих неравенствах супремум по $\mathcal{M}_w$ в точках $z = -i(1+\pi/2)$, $z = i(1+\pi/2)$ и $z = 0$, соответственно, получим (4) и (5).

Достаточность : Докажем, что если $P_w \neq \mathbf{C}_w$, то по крайней мере одно из условий (4) и (5) не выполняется. Согласно теореме Хана–Банаха существует нетривиальный функционал, равный нулю на многочленах. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный функционал такой, что

$$\mathcal{F}[t^n] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого многочлена $p(t)$ имеем

$$\mathcal{F}\left[\frac{p(t) - p(z)}{t - z}\right] = 0. \tag{7}$$

Обозначая $F(z) = \mathcal{F}[(t-z)^{-1}]$, из (7) получим

$$p(z)F(z) = \mathcal{F}\left[(t-z)^{-1}p(t)\right]. \qquad (7')$$

Пусть теперь $p \in \mathcal{M}_w$. Мы имеем

$$\left|\mathcal{F}\left[\frac{p(t)}{t-z}\right]\right| \le \|\mathcal{F}\| \cdot \|\frac{p(t)}{t-z}\| = \|\mathcal{F}\| \cdot \|\frac{p(t)}{t}\frac{t}{t-z}\| =$$

$$= \|\mathcal{F}\| \cdot \|\frac{p(t)}{t}\| \cdot \max_{t\in E}\left|\frac{t}{t-z}\right| \le C\left(1+\frac{|z|}{\delta(z)}\right),$$

где C – постоянная, не зависящая от многочлена $p \in \mathcal{M}_w$, а $\delta(z) = \delta(z, E)$ – расстояние z от множества E. Следовательно, для каждого многочлена $p \in \mathcal{M}_w$

$$|p(z)|\,|F(z)| \le C\left(1+\frac{|z|}{\delta(z)}\right).$$

Поэтому

$$\widetilde{w}(z)|F(z)| \le C\left(1+\frac{|z|}{\delta(z)}\right) \qquad (8)$$

или, эквивалентно

$$|F(z)| \le C\frac{\delta(z)+|z|}{\delta(z)\,\widetilde{w}(z)}. \qquad (8')$$

По условию $P_w \neq \mathbf{C}_w$. Следовательно, $\widetilde{w}(z) \not\equiv +\infty$ по крайней мере для одной из областей Δ_-, Δ или Δ_+, где

$$\Delta_- = \{z: \quad \operatorname{Im} z < -\pi/2\}, \quad \Delta = \{z: \quad \operatorname{Im} z < \pi/2\}, \quad \Delta_+ = \{z: \quad \operatorname{Im} z > \pi/2\}.$$

Если $\widetilde{w}(z_0) < +\infty$, $z_0 \in \Delta_-$ ($z_0 \in \Delta$, $z_0 \in \Delta_+$), то $\widetilde{w}(z) < +\infty$ для всех $z \in \Delta_-$ (соответственно для $z_0 \in \Delta$, $z_0 \in \Delta_+$). Возможны следующие случаи :

а) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta_-$. Тогда среди функционалов $\mathcal{F}$, равных нулю на многочленах, существует функционал, для которого соответствующая функция $F(z)$ в Δ_- не равна нулю тождественно. Из 8 $'$) следует, что $F(z)$ ограничена в области $\operatorname{Im} z \le -\pi$. Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|F(\xi - i\pi)|}{1+\xi^2}\,d\xi > -\infty. \qquad (9)$$

С учетом (8) и (9), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\widetilde{w}(\xi - i\pi)}{1+\xi^2}\,d\xi < +\infty. \qquad (10)$$

Для всякого многочлена $p \in \mathcal{M}_w$ можем написать

$$\ln|p(z)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p(\xi - i\pi)| \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} ds \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} ds, \quad (11)$$

где $\dfrac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} ds = \dfrac{y+\pi}{\pi} \dfrac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y+\pi)^2}$ – нормальная производная функции Грина для задачи Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\pi$, $z = x + iy$. Сходимость последнего интеграла следует из (10). С помощью (11) получим

$$\ln \widetilde{w}(z) \le \frac{y+\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y+\pi)^2}, \quad \operatorname{Im} z > -\pi. \quad (12)$$

Из (12) следует, что $\widetilde{w}(z)$ ограничена для всех z в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\pi$. Следовательно, в этом случае

$$\widetilde{w}(z) < +\infty, \quad z \in \mathbf{C}. \quad (13)$$

Фиксируя $y_0 > -\pi$, запишем (12) следующим образом :

$$\ln \widetilde{w}(x + iy_0) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} d\xi. \quad (12')$$

Умножая обе части формулы (12) на $\dfrac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n}$ и интегрируя по $(-\infty, +\infty)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(x + iy_0) \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n} dx \le$$
$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n} d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n} \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n} dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n} ds < +\infty.$$

Здесь мы использовали тот факт, что функция $\dfrac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n}$ $(y_0 > -\pi)$ сужение гармонической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\pi$ функции $\dfrac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n}$ на линию $\operatorname{Im} z = y_0$, а $\dfrac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n}$ – нормальная производная функции Грина для задачи Дирихле в $\operatorname{Im} z > y_0$ в точке $(x_0, 1 + y_0)$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n} \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n} dx = \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n}.$$

Следовательно, интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(x+iy_0)\,\frac{\partial G_{y_0}(x+iy_0;x_0+i(1+y_0))}{\partial n}\,dx < +\infty \tag{14}$$

сходятся для любого $y_0 > -\pi$.

Взяв в (14) $y_0 = -\pi/2$ и $y_0 = \pi/2$, легко проверить, что условия (4) и (5) не выполняются. Аналогичное заключение справедливо в случае б) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta_+$. Таким образом, для этих двух случаев имеем $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \mathbf{C}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi+i\eta)\,\frac{d\xi}{1+\xi^2} < +\infty$$

для любого $\eta \in \mathbb{R}$. Из последних неравенств следует, что случай $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta_-(z \in \Delta_+)$; $w(z) = +\infty$, $z \in \dot{\Delta}$ невозможен. Остается рассмотреть случай

$$\text{c)}\quad \widetilde{w}(z) = +\infty, \quad z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+, \tag{15}$$

$$\widetilde{w}(z) < +\infty, \quad z \in \Delta.$$

Имеем

$$F(z) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right] \equiv 0, \qquad z \in \Delta_+ \bigcup \Delta_-. \tag{16}$$

Используя общий вид линейного функционала в пространстве $\mathbf{C}_{\widetilde{w}}(E)$, получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{d\sigma(t)}{(t-z)\,\widetilde{w}(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{d\sigma_1(t)}{(t-z)}.$$

Следовательно, функция $F(z)$ ограниченного типа в полосе Δ, имеет граничные значения $F(t)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|F(\xi - i\pi/2)|\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} > -\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|F(\xi + i\pi/2)|\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} > -\infty. \tag{17}$$

Условие (16) эквивалентно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{d\sigma_1(t)}{t-z} \equiv 0, \quad z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+. \tag{18}$$

Из (18) следует, что функция $\sigma_1(t)$ абсолютно непрерывна, а граничные значения $F(t)$ совпадают с $\sigma_1'(t)$ почти всюду в E. Поэтому

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{\sigma_1'(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{F(t)\,dt}{t-z}. \tag{19}$$

Из равенства $d\sigma(t) = \widetilde{w}(t)\,d\sigma_1(t) = \widetilde{w}(t)\,\sigma_1'(t)\,dt$ мы заключаем, что мера σ абсолютно непрерывна и $d\sigma(t) = \sigma'(t)\,dt$, следовательно

$$F(t) = \frac{\sigma'(t)}{\widetilde{w}(t)}. \tag{20}$$

Таким образом, условие (17) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\ln|\sigma'(\xi \pm i\pi/2)| - \ln|\widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)|]\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} > -\infty.$$

Пользуясь хорошо известным неравенством $\exp\int f\,d\mu \le \int \exp f\,d\mu$, $\int d\mu = 1$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\sigma'(\xi \pm i\pi/2)|\,\frac{d\xi}{k\cosh\xi} \le \ln\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma'(\xi \pm i\pi/2)|\,\frac{d\xi}{k\cosh\xi}\right] =$$

$$= \ln\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\sigma(\xi \pm i\pi/2)|}{k\cosh\xi}\right] < +\infty,$$

где $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\cosh\xi}$. Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} < +\infty.$$

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 легко вывести следующий критерий полноты типа Полларда.

Теорема 2. *Пусть весовая функция $w(t)$ непрерывна на E. Нижеследующие условия I, II необходимы и достаточны для того, чтобы множество многочленов было всюду плотно в $\mathbf{C}_w(E)$:*

I. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln w(\xi \pm i\pi/2)\frac{d\xi}{\xi^2+1} = +\infty$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln[w(\xi + i\pi/2)\,w(\xi - i\pi/2)]\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} = +\infty$;

II. существует последовтаельность многочленов $P_n(t)$ с ограниченными нормами, поточечно сходящаяся к $w(t)$ на E, т.е.

$$\|P_n(t)\| \le M, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad \lim P_n(t) = w(t), \quad t \in E.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $P_w = \mathbf{C}_w$. Условия (4) и (5) выполняются по теореме 1. Для доказательства условия II мы выбираем непрерывную функцию $f_n(t)$ такую, что $f_n(t) = 1, t \in E, |\mathrm{Re}\, t| < n$; $|f_n(t)| \leq 1, t \in E$; $f_n(t) = 0$, $|\mathrm{Re}\, t| > n+1$. Для функции $f_n(t)\, w(t) \in \mathbf{C}_w(E)$ существует многочлен $P_n(t)$ такой, что $\|f_n(t)w(t) - P_n(t)\| < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Имеем $\|P_n(t)\| \leq \|f_n(t)w(t)\| + 1/n \leq 2$ и $|w(t) - P_n(t)| < 1/n$, $|\mathrm{Re}\, t| < n$ или $\lim P_n(t) = w(t)$.

Достаточность. Предположим, что оба условия I и II выполнены. Пусть $\{P_n(t)\}$ – последовательность многочленов, удовлетворяющая условию II. Имеем $P_n(t)/M \in \mathcal{M}_w$ и, следовательно

$$\widetilde{w}(t) = \sup_{P \in \mathcal{M}_w} |P(t)| \geq \sup_{n \in \mathcal{N}} \left| \frac{1}{M} P_n(t) \right| = \frac{1}{M} w(t).$$

Так как $w(t)$ удовлетворяет условию I, то для $\widetilde{w}(t)$ выполняются (4) и (5). Поэтому $P_w = \mathbf{C}_w$. Теорема 2 доказана.

3^0. Теперь мы обратимся к описанию замыкания $P_w(E)$ системы многочленов, предполагая, что $P_w \neq \mathbf{C}_w$. Согласно теореме Мергеляна по крайней мере в одной из областей Δ_-, Δ_+ и Δ имеем $\widetilde{w}(z) \not\equiv \infty$. С учетом рассуждений, используемых при доказательстве теоремы 1, возможны следующие случаи : а) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \mathbf{C}$; б) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta$; $\widetilde{w}(z) = +\infty$, $z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \mathbf{C}$, и пусть $f_0(t) \in P_N$ (без потери общности можно предположить, что $\|f_0(t)\| \leq 1$). Существует многочлен $Q_n(t)$ такой, что $\|Q_n(t) - f_0(t)\| < 1/n$ и $\|Q_n(t)\| \leq 1$. Имеем $\sup_{n \in \mathcal{N}} |Q_n(z)| \leq$ $\leq \sup_{P \in \mathcal{M}_w} |P(z)| = \widetilde{w}(z)$. Таким образом, $\{Q_n\}$ – компактное семейство в любой части плоскости. Следовательно, из $\{Q_n\}$ мы можем выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любом круге $|z| \leq R$. Предельную функцию обозначим через $\widetilde{f}_0(z)$. Заметим, что $\widetilde{f}_0(z)$ – целая функция и $|\widetilde{f}_0(z)| \leq \widetilde{w}(z)$. С другой стороны, из $\|f_0(t) - Q_n(t)\| < 1/n$ следует, что $\lim Q_n(t) = f_0(t)$, $t \in E$, где сходимость равномерна на любом компакте из E. Это означает, что $f_0(t) = \widetilde{f}_0(t)$, $t \in E_0$ где $E_0 = \{t \in E \colon w(t) \not\equiv \infty\}$. Далее, из сходимости интеграла (4) следует сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\alpha)\, \frac{d\xi}{\xi^2 + 1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\widetilde{f}_0(\xi + i\alpha)|\, \frac{d\xi}{\xi^2 + 1},$$

для любой $\alpha \in \mathbb{R}$ и неравенства

$$\ln \widetilde{w}(z) \leq \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi)\, \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2},$$

$$\ln|\widetilde{f}_0(z)| \le \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\widetilde{f}_0(\xi)| \frac{d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}.$$

Отсюда заключаем, что $\widetilde{f}_0(z)$ – целая функция порядка 0, а функция $\widetilde{w}(z)$ допускает оценку $\ln\widetilde{w}(iy) = o(|y|)$ при $|y| \to +\infty$. Таким образом, для случая а) каждая функция $f(t) \in \mathbf{C}_w(E)$, допускающая приближение многочленами на E есть сужение на E некоторой целой функции $f(z)$ порядка 0, удовлетворяющей условию $|f(z)| \le C_f\widetilde{w}(z)$.

Докажем обратное : если $f(z)$ – целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию

$$|f(z)| \le C_f\widetilde{w}(z), \quad f \in \mathbf{C}_w(E), \tag{21}$$

то $f \in P_w$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный линейный функционал такой, что $\mathcal{F}(t^n) = 0$ и $f(t)$ – произвольная целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию (21). Покажем, что $\mathcal{F}[f] = 0$. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию

$$\|t^{-1}\varphi(t)\| \le 1, \qquad \lim\left[\varphi(t)t^{-1}w^{-1}(t)\right] = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}\right] - \varphi(z)\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right].$$

Очевидно, $g(z)$ – целая функция. Покажем, что она порядка 0. Имеем

$$\begin{aligned}|g(z)| &\le \|\mathcal{F}\| \left\|\frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{t}{t-z}\right\| + |\varphi(z)|\|\mathcal{F}\| \left\|\frac{1}{t-z}\right\| \le \\ &\le \|\mathcal{F}\| \left\|\frac{\varphi(t)}{t}\right\| \max_{t\in E}\left|\frac{t}{t-z}\right| + |\varphi(z)|\|\mathcal{F}\| \max_{t\in E}\left|\frac{1}{(t-z)\,w(t)}\right| \le \\ &\le \|\mathcal{F}\|\left(1+\frac{|z|}{\delta(z)}\right) + \|\mathcal{F}\|\,|\varphi(z)|\,\frac{1}{\delta(z)} = \frac{\|\mathcal{F}\|}{\delta(z)}\left(\delta(z)+|z|+|\varphi(z)|\right),\end{aligned}$$

где $\delta(z)$ – расстояние z от множества E, т.е. $\delta(z) = \min\left(|y-\pi/2|, |y+\pi/2|\right)$. Предполагая, что $|z| \ge \pi$, мы можем написать $\delta(z) \le 3|z|$, $\delta^{-1}(z) \le |y-\pi/2|^{-1}+$ $+|y+\pi/2|^{-1} \le 3|z||y^2-\pi^2/4|^{-1}$. Поскольку $y^2-\pi^2/4 = -\dfrac{1}{4z^2}\left(z^2-|z|^2+i\pi z\right) \times$ $\times\left(z^2-|z|^2-i\pi z\right)$ для $|z| \ge \pi$, то можно получить следующую оценку для $g(z)$:

$$|g(z)\,\left(z^2-|z|^2+i\pi z\right)\,\left(z^2-|z|^2-i\pi z\right)| \le 4|z|^2\|\mathcal{F}\|(4|z|+|\varphi(z)|). \tag{22'}$$

Пусть $|\zeta| < r/2$, $r = |z|$ и $|z| \geq \pi$. Имеем

$$|\zeta^2 - r^2 \pm i\pi\zeta| \geq r^2 - |\zeta|^2 - \pi|\zeta| \geq \frac{r}{4}(3r - 2\pi) \geq \frac{r^2}{4}.$$

По формуле Коши

$$g(\zeta)\ (\zeta^2 - r^2 + i\pi\zeta)\ (\zeta^2 - r^2 - i\pi\zeta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{g(z)\ (z^2 - r^2 + i\pi z)\ (z^2 - r^2 - i\pi z)}{z - \zeta}\, dz,$$

тогда как из (22′) для $|\zeta| < r/2$ имеем

$$|g(\zeta)\ (\zeta^2 - r^2 + i\pi\zeta)\ (\zeta^2 - r^2 - i\pi\zeta)\,| \leq$$
$$\leq 2 \max_{|z|=r} |g(z)\ (z^2 - r^2 + i\pi z)\ (z^2 - r^2 - i\pi z)\,| \leq$$
$$\leq 8r^2 \|\mathcal{F}\| (4r + \max_{|z|=r} |\varphi(z)|) = 8r^2 \|\mathcal{F}\| (4r + \mathcal{M}_\varphi(r)),$$

откуда следует, что $|g(\zeta)| \leq 16r^{-2}(4r + \mathcal{M}_\varphi(r)) \leq \mathrm{const}\, \mathcal{M}_\varphi(r)$. Следовательно, $\mathcal{M}_g(r) \leq \mathrm{const}\, \mathcal{M}_\varphi(2r)$. Это означает, что $g(z)$ – также целая функция порядка 0. Легко проверить, что $g(z)$ стремится к нулю вдоль мнимой оси. Поэтому $g(z) \equiv 0$. Итак, для любой функции $\varphi(z)$ порядка 0, удовлетворяющей условию (22) при любом $z \in \mathbf{C}$, имеем

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t - z}\right] = 0.$$

Пусть z_0 – корень $\varphi(z)$. Имеем

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)}{t - z_0}\right] = 0. \tag{23}$$

Пусть f – произвольная целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию (21). Функция $\varphi(t) = (t - i)\, f(t)$ удовлетворяет условию (22) и $\varphi(i) = 0$ и, следовательно, согласно (23) $\mathcal{F}[f] = 0$. Мы доказали следующее :

Теорема 3. *Пусть $P_w(E) \neq \mathbf{C}_w(E)$, и пусть сходятся интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)\, \frac{d\xi}{1 + \xi^2}.$$

Тогда $P_w(E)$ совпадает с множеством целых функций $f \in \mathbf{C}_w(E)$ порядка 0, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq C_f \widetilde{w}(z), \quad z \in \mathbf{C}.$$

Теперь рассмотрим второй случай : $\widetilde{w}(z) = \infty$, $z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+$; $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta$. Этот случай также характеризуется условиями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)\, \frac{d\xi}{1+\xi^2} = +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\widetilde{w}(\xi - i\pi/2)\, \widetilde{w}(\xi + i\pi/2)\right] \frac{d\xi}{\cosh \xi} < +\infty. \tag{24}$$

Рассуждение, использованное в предыдущем случае, приводит к заключению, что если функция $f(t)$ допускает приближение многочленами, то она совпадает со значениями аналитической в Δ и непрерывной в $\overline{\Delta}$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию

$$|f(z)| \le C_f \widetilde{w}(z), \quad z \in \Delta. \tag{25}$$

Докажем противное : если $f \in \mathbf{C}_w(E)$ – произвольная функция, аналитическая в Δ, непрерывная в $\overline{\Delta}$ и удовлетворяющая условию (25), то $f \in P_w$. Достаточно доказать, что любой линейный функционал $\mathcal{F}$, равный нулю на многочленах, равен нулю на f.

Пусть $\varphi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в Δ, непрерывная в $\overline{\Delta}$ и удовлетворяющая условию

$$t^{-1}\varphi(t) \in \mathbf{C}_w(E), \quad |\varphi(z)| \le C\,(1+|z|)\, \widetilde{w}(z), \quad z \in \Delta. \tag{25'}$$

Для функции

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right] = F(z) = \int_E \frac{d\sigma(t)}{(t-z)\, \widetilde{w}(t)}$$

имеем $F(z) \equiv 0$, $z \notin \overline{\Delta}$, $F(t) = \dfrac{\sigma'(t)}{\widetilde{w}(t)}$ и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{F(t)\, dt}{t-z},$$

т.е. функцию F можно представить ее интегралом Коши в обеих областях Δ и Δ_R: $-R < x < R$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Функцию $F(z)\,\varphi(z)$ также можно представить ее интегралом Коши в области Δ_R :

$$F(z)\,\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_R} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{F(\xi - i\pi/2)\,\varphi(\xi - i\pi/2)}{\xi - z - i\pi/2}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{F(R+i\eta)\,\varphi(R+i\eta)}{R - z + i\eta}\, d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{R}^{-R} \frac{F(\xi + i\pi/2)\,\varphi(\xi + i\pi/2)}{\xi - z + i\pi/2}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{F(-R+i\eta)\,\varphi(-R+i\eta)}{-R - z + i\eta}\, d\eta. \tag{26}$$

Интеграл $\int_{\partial\Delta} \dfrac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt$ сходится абсолютно для любого $z \notin \partial\Delta$, так как

$$|F(t)\,\varphi(t)| \le \frac{|\sigma'(t)|}{\tilde{w}(t)}(1+|t|)\,\tilde{w}(t) = (1+|t|)\,|\sigma'(t)|. \tag{26 $'$}$$

Следовательно, предел

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-R}^{R} \frac{F(\xi - i\pi/2)\,\varphi(\xi - i\pi/2)}{\xi - z - i\pi/2}\,d\xi + \int_{R}^{-R} \frac{F(\xi + i\pi/2)\,\varphi(\xi + i\pi/2)}{\xi - z + i\pi/2}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt \tag{27}$$

существует для любого $z \notin \partial\Delta$. Устремив R к бесконечности, из (26) получим

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{F(R+i\eta)\,\varphi(R+i\eta)}{R-z+i\eta}\,d\eta + \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{F(-R+i\eta)\,\varphi(-R+i\eta)}{-R-z+i\eta}\,d\eta\right] =$$

$$= g(z), \quad z \in \Delta.$$

Ясно, что этот предел существует для любого $z \in \mathbf{C}$ и равномерно в любом конечном круге, откуда следует, что $g(z)$ – целая функция. Из (26) и (27) следует, что

$$F(z)\,\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt + g(z), \quad z \in \Delta$$

или, эквивалентно

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\right] = g(z), \quad z \in \Delta. \tag{28}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt = 0, \qquad z \notin \overline{\Delta}$$

или, эквивалентно

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-R}^{R} \frac{F(\xi - i\pi/2)\,\varphi(\xi - i\pi/2)}{\xi - z - i\pi/2}\,d\xi + \int_{R}^{-R} \frac{F(\xi + i\pi/2)\,\varphi(\xi + i\pi/2)}{\xi - z + i\pi/2}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{F(R+i\eta)\,\varphi(R+i\eta)}{R-z+i\eta}\,d\eta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{F(-R+i\eta)\,\varphi(-R+i\eta)}{-R-z+i\eta}\,d\eta\right].$$

Устремив R к бесконечности, получим

$$-g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt, z \notin \overline{\Delta}. \tag{29}$$

Оценим целую функцию $g(z)$. Из (28) для $z \in \Delta$ имеем

$$|g(z)| \le \left|\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}\right]\right| + |\varphi(z)|\,|F(z)| \le \|\mathcal{F}\|\,\|t^{-1}\varphi(t)\| \max_{t\in E}\left|\frac{t}{t-z}\right| + |F(z)||\varphi(z)| \le$$
$$\le \|\mathcal{F}\|\cdot C_1\,(|z|+\delta(z))\,\delta^{-1}(z) + |F(z)|\,|\varphi(z)|. \tag{30}$$

Из (8), (25′) и (30)

$$|g(z)| \le \mathrm{const}(|z|+\delta(z))\,\delta^{-1}(z), \qquad z\in\Delta. \tag{31}$$

Из (29) и (26′), для $z \notin \overline{\Delta}$

$$|g(z)| \le \mathrm{const}\cdot\delta^{-1}(z), \quad z\notin\overline{\Delta}, \quad \text{и} \quad g(iy)\to 0, \quad |y|\to+\infty. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует, что $g(z)\equiv 0$. Следовательно, для любой голоморфной в Δ и непрерывной в $\overline{\Delta}$ функции, удовлетворяющей условию (25′)

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\right] = 0, \qquad z\in\Delta. \tag{33}$$

Пусть теперь $f(z) \in \mathbf{C}_w(E)$ – произвольная голоморфная в Δ и непрерывная в $\overline{\Delta}$ функция, удовлетворяющая условию (25). Функция $\varphi(z) = (z-i)f(z)$ удовлетворяет условию (25′), следовательно, она удовлетворяет условию (33). Полагая $z=i$ в (33), получаем $\mathcal{F}[f(t)]=0$, т.е. $f\in P_w$. Мы доказали следующую теорему :

Теорема 4. *Пусть $P_w(E) \ne \mathbf{C}_w(E)$, и пусть условия (24) удовлетворяются. Тогда $P_w(E)$ совпадает с множеством голоморфных в Δ и непрерывных в $\overline{\Delta}$ функций $f \in \mathbf{C}_w(E)$, удовлетворяющих условию (25).*

Автор благодарен профессору Б. Я. Левину за полезные обсуждения и советы.

ABSTRACT. Let $w(t) \ge 1$ be a real measurable function defined on the union E of lines $\mathrm{Im}z=\pi/2$ and $\mathrm{Im}z=-\pi/2$ such that $t^n w^{-1}(t)\to 0$ for $|t|\to+\infty$, $t\in E$, $n=0,1,\ldots$. Let $\mathbf{C}_w(E)$ be the space of continuous functions $f(t)$ defined on E, satisfying the condition $f(t)\,w^{-1}(t)\to 0$ as $|t|\to+\infty$, $t\in E$, and let $P_w(E)$ denote the closure of a system of polynomials in metric of $\mathbf{C}_w(E)$. The paper gives an integral criterion for the completeness of polynomials in $\mathbf{C}_w(E)$ and describes the space $P_w(E)$, provided $P_w(E)\ne\mathbf{C}_w(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein, "Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe rèel et' l'une de ses applications", Bull. Soc. Math. de France, vol. 52, pp. 399 — 410, 1924.
2. М. М. Джрбашян, "Некоторые вопросы теории весовых многочленных приближений в комплексной плоскости", Мат. Сб., т. 36, № 3, стр. 353 — 440, 1955.
3. С. Н. Мергелян, "Весовое приближение многочленами", Успехи Мат. Наук, т. 11, № 5 (71), стр. 107 —152, 1956.

3 мая 1994 Ереванский государственный университет

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДИССИПАТИВНОГО КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

П. Э. Мелик–Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

Для канонического оператора $\mathcal{C}_{00}$ на полуоси в статье рассматриваются S–матрицы, соответствующие самосопряженным расширениям оператора $\mathcal{C}_{00}$ с выходом на всю ось. Эти S–матрицы описываются сжимающими операторными функциями класса $W^+([\aleph])$. Мы доказываем, что они являются характеристическими функциями "жесткого" диссипативного расширения $\mathcal{C}_{01}$ канонического оператора $\mathcal{C}_{00}$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $[\mathcal{H}]$ является кольцом линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{J}$ – оператор со свойствами $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -I$, $\dim \mathcal{H}^+ = \dim \mathcal{H}^-$. Здесь $\mathcal{H}^\pm = P^\pm \mathcal{H}$, $P^\pm = \dfrac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J})$ так, что $I = P^+ + P^-$ $(\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-)$ и $\mathcal{J} = iP^+ - iP^-$. Обозначим через R, R_+ и R_- всю числовую ось, неотрицательную, неположительную оси, соответственно, а через Λ_+ и Λ_- – верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости Λ.

Пусть функции $V(r) \in L_1(R, [\mathcal{H}])$, $V_+(r) \in L_1(R_+, [\mathcal{H}])$ принимают самосопряженные и $\mathcal{J}$–самосопряженные значения. Операторы, задаваемые дифференциальными выражениями

$$d[f] = \mathcal{J}f'(r) - V(r)\,f(r), \quad r \in R; \qquad d_+[f] = \mathcal{J}f'(r) - V_+(r)\,f(r), \quad r \in R_+$$

называются каноническими. Обозначим через D область определения канонического оператора.

Пусть $\mathcal{C}_{00}$ – действующий в гильбертовом пространстве $L_2(R_+, \mathcal{H})$ минимальный симметрический оператор :

$$\mathcal{C}_{00}f = d_+[f], \qquad D(\mathcal{C}_{00}) = \{f \in L_2(R_+, \mathcal{H}) | \quad d_+[f] \in L_2(R_+, \mathcal{H}),\ f(0) = 0\}.$$

Для самосопряженных расширений оператора $\mathcal{C}_{00}$ без выхода из $L_2(R_+, \mathcal{H})$ с помощью волновых операторов, по схеме Лакса–Филипса, анализом решений соответствующих уравнений, в [1] — [3] определяются одни и те же функции на R, называемые S–матрицей, которые параметризуются множеством частично изометрических операторов, определяющих такие расширения. Свойства S–матриц исследованы достаточно полно, вплоть до решения в [2] обратной задачи теории рассеяния для некоторого класса канонических уравнений в случае $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$.

Если $V_+(r) = V(r)|R_+$, то операторы

$$\mathcal{C}f = d[f], \quad D(\mathcal{C}) = \{f \in L_2(R, \mathcal{H}) |\, d[f] \in L_2(R, \mathcal{H})\}$$

являются самосопряженными расширениями оператора $\mathcal{C}_{00}$ с выходом.

По теории унитарных сцеплений Адамяна–Арова, обобщающей теорию рассеяния Лакса–Филлипса, таким расширениям отвечают сжимающие на R S–матрицы, которые параметризуются множеством сжимающих же операторных функций $\Theta(\mu)$, представимых в виде

$$\Theta(\mu) = \int_0^{\infty} e^{i\mu t}\, \Gamma(t)\, dt, \quad \Gamma(t) \in L_1(R, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+]), \quad \mu \in R. \tag{0.1}$$

Функция $\Theta(\mu)$ определяется только частью $V_-(r) = V(r)|R_-$ потенциала $V(r)$.

Настоящая работа посвящена исследованию функции $\Theta(\mu)$.

В §1 строится функциональная модель (ф. м.) полугруппы сжатий, образованной с помощью группы унитарных операторов $U(t) = \exp(i\mathcal{C}t)$, $t \in R$, где $\mathcal{C}$ – оператор с потенциалом $V(r)|R_- = 0$ (см. [4]). Полученная ф. м. идентична ф. м. Надя–Фояша общей полугруппы сжатий (см. [5]), а функция $\Theta(\mu)$ выступает в роли характеристической функции (х. ф.) диссипативного генератора группы.

В §2 рассматривается "жесткое" диссипативное расширение $\mathcal{C}_{01}$ оператора $\mathcal{C}_{00}$. Точечный спектр этого оператора совпадает со следующим множеством : $\{\lambda \in \Lambda_+ |\, \dim \mathrm{Ker}\Theta(\lambda) > 0\}$. Часть ядра резольвенты сопряженного оператора $\mathcal{C}_{01}^* = \mathcal{C}_{10}$, названная в [6] х. ф., определяется функцией $\Theta(\lambda)$ и только ею. Здесь функция $\Theta(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_+$ приобретает смысл углового оператора равномерно отрицательного подпространства (см. [7]). Оказывается, что в случае $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$ оператор $\mathcal{C}_{01}$ с потенциалом $V_+(r) \in L_1(R_+, [\mathcal{H}]) \bigcap L_2(R_+, [\mathcal{H}])$ может служить в качестве модели для диссипативных операторов, х. ф. которых являются сжимающими в Λ_+ матрицами-функциями, представимыми формулой (0.1) с $\Gamma(t) \in L_1(R, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+]) \bigcap L_2(R, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+])$.

Приведем некоторые необходимые определения и предложения, имеющиеся в работах [1] — [3].

Пусть $\mathcal{E}(r, \lambda)$ – оператор Коши канонического уравнения на R_+, т.е операторное решение задачи

$$\mathcal{J}\mathcal{E}'(r,\lambda) - V_+(r)\mathcal{E}(r,\lambda) = \lambda\mathcal{E}(r,\lambda), \qquad \mathcal{E}(0,\lambda) = I, \quad \lambda = \mu + i\nu \in \Lambda. \tag{0.2}$$

$\mathcal{E}(r, \lambda)$ является целой операторной функцией, удовлетворяющей соотношению

$$\mathcal{E}^*(r,\overline{\lambda})\,\mathcal{J}\mathcal{E}(r,\lambda) = \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\mathcal{E}^*(r,\overline{\lambda}) = \mathcal{J}.$$

Функция $e^{-\mathcal{J}\lambda r} = e^{-i\lambda r}P^+ + e^{i\lambda r}P^-$ является оператором Коши невозмущенного ($V_+(r) \equiv 0$) уравнения (0.2). Каноническое уравнение имеет также решение $\mathcal{E}_\infty(r, \mu)$ (через μ в дальнейшем обозначается вещественный спектральный параметр), удовлетворяющее условию $\mathcal{E}_\infty(r, \mu) \sim e^{-\mathcal{J}\mu r}$, $r \to \infty$ и представимое в виде

$$\mathcal{E}_\infty(r,\mu) = e^{-\mathcal{J}\mu r} + \int_r^\infty K(r,t)\,e^{-\mathcal{J}\mu t}\,dt. \tag{0.3}$$

Функция $\mathcal{E}_\infty(r, \mu)$ $\mathcal{J}$–унитарна, $\mathcal{E}_\infty^*(r,\mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty(r,\mu) = \mathcal{E}_\infty(r,\mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty^*(r,\mu) = \mathcal{J}$, следовательно, для функции $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{E}_\infty^{-1}(0,\mu) = -\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty^*(0,\mu)\mathcal{J}$ из формулы (0.3) имеем

$$\mathcal{A}(\mu) = I + \int_0^\infty e^{\mathcal{J}\mu t}\,K(t)\,dt, \qquad K(t) = -\mathcal{J}K^*(0,t)\,\mathcal{J} \in L_1(R_+, [\mathcal{H}]). \tag{0.4}$$

Функция $\mathcal{A}(\mu)$ называется A–оператором. Из (0.3) и (0.4) следует, что функции $\mathcal{E}_\infty(r,\mu)\,P^\mp$ и $P^\pm\mathcal{A}(\mu)$ аналитически продолжаются в $\Lambda_\pm$ формулами

$$\mathcal{E}_\infty(r,\lambda)\,P^\mp = e^{\pm i\lambda r}P^\mp + \int_r^\infty e^{\pm i\lambda t}\,K_\mp(r,t)\,dt, \quad K_\mp(r,t) = K(r,t)P^\mp, \quad \lambda \in \Lambda_\pm, \tag{0.5}$$

$$\begin{cases} P^\pm\mathcal{A}(\lambda) = P^\pm + \displaystyle\int_0^\infty e^{\pm i\lambda t}\,K_\pm(t)\,dt, \qquad K_\pm(t) = P^\pm\,K(t), \qquad \lambda \in \Lambda_\pm, \\ \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^\mp = P^\mp + \displaystyle\int_0^\infty e^{\pm i\lambda t}\,K_\mp^*(t)\,dt, \qquad \lambda \in \Lambda_\pm. \end{cases} \tag{0.6}$$

С другой стороны, если $\mathcal{A}(r,\lambda) = e^{\mathcal{J}\lambda r}\mathcal{E}(r,\lambda)$, то функции $P^{\pm}\mathcal{A}(r,\lambda)$ аналитичны в $\Lambda_{\pm}$ и $\lim_{r\to\infty} P^{\pm}\mathcal{A}(r,\lambda) = P^{\pm}\mathcal{A}(\lambda)$ по операторорной норме равномерно по $\lambda \in \Lambda_{\pm}$, в частности, равномерно по $\mu \in R$ имеем $\lim_{r\to\infty} \mathcal{A}(r,\mu) = \mathcal{A}(\mu)$. Поскольку на вещественной оси $\mathcal{E}_{\infty}(r,\mu) = \mathcal{E}(r,\mu)\,\mathcal{A}(\mu)$, то по теореме единственности аналитических функций имеем

$$\mathcal{E}_{\infty}(r,\lambda)\,P^{\mp} = \mathcal{E}(r,\lambda)\,(\pm i\mathcal{J})\mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{\mp}, \qquad \lambda \in \Lambda_{\pm}. \tag{0.7}$$

Отсюда следует, что при $\lambda \in \Lambda_{\pm}$ функции $\mathcal{E}_{\infty}(r,\lambda)\,P^{\mp}$ являются решениями канонического уравнения, принадлежащими $L_2(R_+,\mathcal{H})$.

Обозначим

$$W_0^{\pm}([\aleph]) = \{F^{\pm}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t}\,F(t)\,dt, \qquad F(t) \in L_1(R_+,[\aleph]), \quad \lambda \in \Lambda_{\pm}\}$$

$$W^{\pm}([\aleph]) = F + W_0^{\pm}([\aleph]), \qquad F \in [\aleph].$$

Операторные функции $\mathcal{A}_{kk}(r,\lambda) = P^{\pm}\mathcal{A}(r,\lambda)\,P^{\pm}$ ($\lambda \in \Lambda_{\pm}$, $k = 1, 2$) ограниченно обратимы для каждого $\lambda \in \Lambda_{\pm}$, причем $\lim_{r\to\infty} \mathcal{A}_{kk}^{-1}(r,\lambda) = \mathcal{A}_{kk}^{-1}(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in \Lambda_{\pm}$ так, что имеем $\mathcal{A}_{kk}^{\pm 1}(\lambda) \in W^{\pm}([\mathcal{H}^{\pm}])$.

Разложению $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{+} \oplus \mathcal{H}^{-}$ отвечает представление действующих в $\mathcal{H}$ операторов матрицами с операторными элементами :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} iI_+ & 0 \\ 0 & -iI_- \end{bmatrix}, \quad e^{\mathcal{J}\lambda r} = \begin{bmatrix} e^{i\lambda r}I_+ & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda r}I_- \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Из $\mathcal{J}$–унитарности $\mathcal{A}(\mu)$ следует, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{11}(\mu)\mathcal{A}_{11}^{*}(\mu) - \mathcal{A}_{12}(\mu)\mathcal{A}_{12}^{*}(\mu) = I_+, \quad \mathcal{A}_{11}(\mu)\mathcal{A}_{21}^{*}(\mu) = \mathcal{A}_{12}(\mu)\mathcal{A}_{22}^{*}(\mu), \\ &\mathcal{A}_{22}(\mu)\mathcal{A}_{22}^{*}(\mu) - \mathcal{A}_{21}(\mu)\mathcal{A}_{21}^{*}(\mu) = I_-. \end{aligned} \tag{0.8}$$

Обозначая $\Theta(\mu) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\mathcal{A}_{12}(\mu)$, получаем

$$\Theta(\mu)\Theta^{*}(\mu) = I_+ - \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\mathcal{A}_{11}^{-1*}(\mu) < I_+, \qquad \|\Theta(\mu)\| < 1. \tag{0.9}$$

Из формул (0.8) имеем $\Theta(\mu) = \mathcal{A}_{21}^{*}(\mu)\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)$. Поскольку $\mathcal{A}_{kk}(\mu) \in W^{\pm}([\mathcal{H}^{\pm}])$, то из формул (0.6) следует, что функции $\mathcal{A}_{11}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{12}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}^{*}(\overline{\lambda})\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\overline{\lambda})$ аналитичны в Λ_+, следовательно, они совпадают и из принципа максимума модуля для $\Theta(\lambda) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{12}(\lambda)$ имеем $\|\Theta(\lambda)\| < 1$, $\lambda \in \Lambda_+$.

§1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОЛУГРУППЫ $Z(t)$

В $L_2(R,\mathcal{H})$ рассмотрим оператор $\mathcal{C}$ с потенциалом $V(r)|R_- = 0$. Образуем гильбертово пространство $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)}$ – ортогональную сумму двух экземпляров пространства $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}_{(-)} = \mathcal{H}_{(+)} = \mathcal{H}$). Отождествим пространства $L_2(R,\mathcal{H})$ и $L_2(R_+,\mathbf{H})$ формулой

$$L_2(R,\mathcal{H}) \ni f \longleftrightarrow \mathbf{f} = f_{(-)} + f_{(+)} \in L_2(R_+,\mathbf{H}), \quad f(\mp r) = f_{(\mp)}(r), \quad r \in R_+.$$

Тогда оператор $\mathcal{C}$ отождествится с оператором $\mathbf{C}$ в $L_2(R_+,\mathbf{H})$ таким, что

$$\mathbf{C}\mathbf{f} = \mathbf{d}_+[\mathbf{f}], \quad D(\mathbf{C}) = \{\mathbf{f} \in L_2(R_+,\mathbf{H}) \,|\, \mathbf{d}_+[\mathbf{f}] \in L_2(R_+,\mathbf{H}), f_{(-)}(0) = f_{(+)}(0)\},$$

где дифференциальное выражение $\mathbf{d}_+[\mathbf{f}]$ в разложении $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)}$ имеет вид

$$\mathbf{d}_+[\mathbf{f}] = \mathbf{J}\mathbf{f}'(r) - \mathbf{V}_+(r)\mathbf{f} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{J} & 0 \\ 0 & \mathcal{J} \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} f_{(-)}(r) \\ f_{(+)}(r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_+(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{(-)}(r) \\ f_{(+)}(r) \end{bmatrix}, \qquad r \in R_+.$$

Граничное условие $f_{(-)}(0) = f_{(+)}(0)$ принимает вид

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{P}\mathbf{f}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{(-)}(0) \\ f_{(+)}(0) \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{C}$ самосопряжен, поэтому таков же и оператор $\mathcal{C}$ и, следовательно $\mathcal{C}$ является самосопряженным расширением оператора $\mathcal{C}_{00}$ с выходом в пространство $L_2(R,\mathcal{H})$. Для оператора Коши и A–оператора имеем

$$\mathbf{E}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} e^{\mathcal{J}\lambda r} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}(r,\lambda) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{A}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Если $\mathbf{J} = i\mathbf{P}^+ - i\mathbf{P}^-$, то переход от разложения $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)}$ к разложению $\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ \oplus \mathbf{H}^-$ осуществляется унитарным оператором

$$U = U^* = \begin{bmatrix} P^- & P^+ \\ P^+ & P^- \end{bmatrix}$$

и в новом представлении имеем

$$\mathbf{E}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{11}(r,\lambda) & 0 & 0 & \mathcal{E}_{12}(r,\lambda) \\ 0 & e^{-i\lambda r} I_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda r} I_+ & 0 \\ \mathcal{E}_{21}(r,\lambda) & 0 & 0 & \mathcal{E}_{22}(r,\lambda) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & 0 & 0 & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ 0 & I_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_+ & 0 \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & 0 & 0 & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

В первом разложении имеем $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)} = \left(\mathcal{H}^+_{(-)} \oplus \mathcal{H}^-_{(-)}\right) \oplus \left(\mathcal{H}^+_{(+)} \oplus \mathcal{H}^-_{(+)}\right)$. Поскольку $\mathcal{H}_{(-)} = \mathcal{H}_{(+)} = \mathcal{H}$, то $\mathcal{H}^+_{(-)} = \mathcal{H}^+_{(+)} = \mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-_{(-)} = \mathcal{H}^-_{(+)} = \mathcal{H}^-$. В другом разложении $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^+ \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}^- = \left(\mathcal{H}^+_{(+)} \oplus \mathcal{H}^-_{(-)}\right) \oplus \left(\mathcal{H}^+_{(-)} \oplus \mathcal{H}^-_{(+)}\right)$ так, что учитывая предыдущие отождествления, можно считать $\boldsymbol{\mathcal{H}}^+ = \boldsymbol{\mathcal{H}}^- = \mathcal{H}$, и для проекторов в этих пространствах использовались принятые обозначения $P^{\pm}$.

В работе [3] показано, что если

$$\Phi(r,\mu) = \sqrt{2}\,\dot{\mathbf{E}}(r,\mu)\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^+\,S^{-1}_{\pm}(\mu), \qquad S_{\pm}(\mu) = 2\mathbf{P}^{\pm}\mathbf{A}(\mu)\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^+, \tag{1.2}$$

то отображения $\mathcal{F}_{\pm}\colon L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm}) \to L_2(R_+,\boldsymbol{\mathcal{H}})$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(r) &= \mathcal{F}_{\pm}\mathbf{f}^{\pm}(\mu) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \Phi_{\pm}(r,\mu)\,\mathbf{f}^{\pm}(\mu)\,d\mu, \qquad \mathbf{f}^{\pm}(\mu) \in L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm}),\\ \mathbf{f}^{\pm}(\mu) &= \mathcal{F}^*_{\pm}\mathbf{f}(r) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \Phi^*_{\pm}(r,\mu)\,\mathbf{f}(r)\,dr, \qquad \mathbf{f}(r) \in L_2(R_+,\boldsymbol{\mathcal{H}}) \end{aligned} \tag{1.3$_\pm$}$$

задают спектральные представления (называемые $(\pm)$–спектральные представления) оператора $\mathbf{C}$, т.е. $\mathcal{F}^{-1}_{\pm} = \mathcal{F}^*_{\pm}$ и операторы $\mathcal{F}^*_{\pm}\mathbf{C}\mathcal{F}_{\pm}$ являются операторами умножения на μ в $L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$.

Образами группы унитарных операторов $U(t) = \exp(i\mathbf{C}t)$, $t \in R$ являются группы операторов умножения на $e^{i\mu t}$ в $L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$. Если

$$H^{\pm}_2(\aleph) = \left\{ F^{\pm}(\mu) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_0^N e^{\pm i\mu t}\,F(t)\,dt \;\middle|\; F(t) \in L_2(R_+,\aleph), \quad \mu \in R \right\},$$

то подпространства $\mathcal{D}^{\pm} = \mathcal{F}_{\pm}H^{\pm}_2(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$ являются, соответственно, уходящим и приходящим подпространствами для группы $U(t)$, а $(\pm)$–спектральные представления – ее уходящим и приходящим представлениями, соответственно (см. [4]).

Рассмотрим подпространства $\mathcal{D}^{\pm}_{(-)} = \mathcal{F}^{\pm}(P^{\mp}H^{\pm}_2(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$. Такой выбор обусловлен последующим "стиранием" подпространств в $L_2(R,\mathcal{H})$. Пусть $\mathcal{K} = L_2(R_+,\boldsymbol{\mathcal{H}}) \ominus (\mathcal{D}^+_{(-)} \oplus \mathcal{D}^-_{(-)})$, $P_{\mathcal{K}}$ – ортогональный проектор на $\mathcal{K}$ и согласно [4] $Z(t) = P_{\mathcal{K}}U(t)|\mathcal{K}$, $t \geq 0$ – полугруппа сжимающих операторов.

Теорема 1.1. *Образом подпространства $\mathcal{K}$ в $(-)$–спектральном представлении является пространство*

$$\mathcal{K}_{(-)} = H^-_2(\mathcal{H}^-) \oplus \left(H^+_2(\mathcal{H}^+) \ominus \Theta(\mu)H^+_2(\mathcal{H}^-)\right), \tag{1.4}$$

где $\Theta(\mu) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}_{12}(\mu)$, а образом полугруппы $Z(t)$ – полугруппа

$$Z_-(t)(h_-\oplus h_+) = P_{\mathcal{K}_{(-)}}\left[e^{i\mu t}h_-(\mu)\oplus e^{i\mu t}h_+(\mu)\right], \qquad h_-\oplus h_+\in\mathcal{K}_{(-)}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{D}^-_{(-)} = \mathcal{F}_-(P^+H_2^-(\mathcal{H}^-)) = \mathcal{F}_-\left\{\begin{bmatrix} f^-(\mu)\\ 0\end{bmatrix}\right\}, \qquad f^-(\mu)\in H_2^-(\mathcal{H}^+),$$

$$\mathcal{D}^+_{(-)} = \mathcal{F}_+(P^-H_2^+(\mathcal{H}^+)) = \mathcal{F}_+\left\{\begin{bmatrix} f^+(\mu)\\ 0\end{bmatrix}\right\}, \qquad f^+(\mu)\in H_2^+(\mathcal{H}^-)$$

и доказательство формулы (1.4) сводится к нахождению $(-)$–образа подпространства $\mathcal{D}^+_{(-)}$, т. е. к вычислению $\mathcal{F}_-^*\mathcal{F}_+(P_-F^+(\mu))$, $F^+(\mu)\in H_2^+(\mathbf{H}^-)$.

Оператор $\mathcal{F}_-^*\,\mathcal{F}_+$ переводит $(+)$–образ $\mathbf{f}^+(\mu)$ функции из $L_2(R_+,\mathbf{H})$ в его $(-)$–образ $\mathbf{f}^-(\mu)$ (в теории Лакса–Филлипса такой оператор называется S–матрицей). Из формул (1.3) имеем

$$\mathbf{f}^\pm(\mu) = S_\pm^{-1*}(\mu)\,\mathbf{f}_0(\mu), \quad \mathbf{f}_0(\mu) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^N \mathbf{P}^+\,\mathbf{P}\,\mathbf{E}^*(r,\mu)\,\mathbf{f}(r)\,dr.$$

Следовательно, $\mathbf{f}^-(\mu) = S_-^{-1*}(\mu)\,S_+^*(\mu)\,\mathbf{f}^+(\mu)$. Из формул (1.2) и $\mathcal{J}$–унитарности $\mathbf{A}(\mu)$ следует унитарность функции $S(\mu) = S_-(\mu)\,S_+^{-1}(\mu)$ так, что имеем $\mathcal{F}_-^*\,\mathcal{F}_+(P^-F^+(\mu)) = S(\mu)\,P^-\,F^+(\mu)$. Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$S_-(\mu) = \begin{bmatrix} I & 0\\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu)\end{bmatrix}, \qquad S_+(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & \mathcal{A}_{12}(\mu)\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$S(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu) & -\mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}_{12}(\mu)\\ \mathcal{A}_{21}(\mu)\,\mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) - \mathcal{A}_{21}(\mu)\,\mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}_{12}(\mu)\end{bmatrix}$$

и, учитывая соотношения (0.8), получим

$$S(\mu)P^-F^+(\mu) = S(\mu)\begin{bmatrix} 0\\ f^+(\mu)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Theta(\mu)\,f^+(\mu)\\ \mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\,f^+(\mu)\end{bmatrix}, \qquad f^+(\mu)\in H_2^+(\mathcal{H}^-).$$

В $(-)$–спектральном представлении имеем $\mathcal{F}_-^*L_2(R_+,\mathbf{H}) = H_2^-(\mathcal{H}^-)\oplus H_2^-(\mathcal{H}^+)\oplus$ $\oplus H_2^+(\mathcal{H}^-)\oplus H_2^+(\mathcal{H}^+)$, $\mathcal{F}_-^*\mathcal{D}^-_{(-)} = H_2^-(\mathcal{H}^+)$, а из последнего соотношения следует, что $\mathcal{F}_-^*\mathcal{D}^+_{(-)} = \mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\,H_2^+(\mathcal{H}^-)\oplus\Theta(\mu)\,H_2^+(\mathcal{H}^-)$. Поскольку $\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\in W^+([\mathcal{H}^-])$, то имеем $\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\,H_2^+(\mathcal{H}^-) = H_2^+(\mathcal{H}^-)$, $\Theta(\mu)H_2^+(\mathcal{H}^-)\subset H_2^+(\mathcal{H}^+)$, следовательно, $\mathcal{F}_-^*\mathcal{K} = H_2^-(\mathcal{H}^-)\oplus\left(H_2^+(\mathcal{H}^+)\ominus\Theta(\mu)\ \ H_2^+(\mathcal{H}^-)\right)$.

Замечание. Из соотношений (0.8) следует, что функция $I_- - \Theta^*(\mu)\,\Theta(\mu)$ ограниченно обратима, поэтому формулы (1.4), (1.5) идентичны формулам, которыми в [5] определяется ф. м. полугруппы сжатий с помощью $\Theta(\mu)$.

§2. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР, РЕЗОЛЬВЕНТА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

В работе [8] дано описание множества всех максимальных диссипативных (симметрических) расширений оператора типа $\mathcal{C}_{00}$ в терминах максимальных $(-i\mathcal{J})$-неположительных ($(-i\mathcal{J})$-нейтральных) подпространств и их угловых операторов. Расширения подобного рода задаются граничными условиями вида $f(0) \in \mathcal{L}_K = \{K^*h_- + h_- \mid h_- \in \mathcal{H}^-, \|K\| \le 1\}$, где $K: \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^-$, $K^*: \mathcal{H}^- \to \mathcal{H}^+$. Если $\dim \mathcal{H}^+ = \dim \mathcal{H}^-$, то во множестве операторов K максимальными элементами являются частично изометрические операторы ($K^*K = P^+$, $KK^* = P^-$), которыми определяются все самосопряженные расширения оператора $\mathcal{C}_{00}$, а минимальным элементом является оператор $K = 0$, задающий "жесткое" (по аналогии с расширениями полуограниченных симметрических операторов) диссипативное расширение оператора $\mathcal{C}_{00}$. Такое расширение $\mathcal{C}_{01}$ определится граничным условием $f(0) = P^- f(0)$. Очевидно, оператор $\mathcal{C}_{01}^* = \mathcal{C}_{10}$ является максимальным аккумулятивным, определяемым граничным условием $f(0) = P^+ f(0)$.

Теорема 2.1. *Точечный спектр σ_p оператора $\mathcal{C}_{01}$ совпадает с множеством* $\{\lambda \in \Lambda_+ \mid Ker\,\Theta(\lambda) > 0\}$.

Доказательство. Очевидно, что $\sigma_p \subset \Lambda_+$, причем оператор $\mathcal{C}_{01}$ не имеет вещественных собственных значений, так как если $\mu_0 \in \sigma_p$, то найдется самосопряженное расширение оператора $\mathcal{C}_{00}$, для которого число μ_0 является собственным значением, что противоречит абсолютной непрерывности спектра любого такого расширения оператора $\mathcal{C}_{00}$ (см. [1]).

Общий вид векторных решений $f(r,\lambda) \in L_2(R_+, \mathcal{H})$ уравнения (0.2) задается формулой

$$f(r,\lambda) = \mathcal{E}_\infty(r,\lambda)P^-h = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_\infty^{12}(r,\lambda)h_- \\ \mathcal{E}_\infty^{22}(r,\lambda)h_- \end{bmatrix}, \qquad h_- \in \mathcal{H}^-, \quad \mathrm{Im}\lambda > 0.$$

Выбор вектора $h_- \neq 0$ такого, что $f(0,\lambda) = P^- f(0,\lambda)$, приводит к условию $\mathcal{E}_\infty^{12}(0,\lambda)h_- = 0$. Из формулы (0.7) имеем $\mathcal{E}_\infty^{12}(0,\lambda) = -\mathcal{A}_{21}^*(\overline{\lambda})$, а из (0.8) получим $\mathcal{A}_{21}^*(\overline{\lambda}) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{A}_{12}(\lambda)\,\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \Lambda_+$. Поскольку операторные функции $\mathcal{A}_{11}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{22}^*(\overline{\lambda})$ ограниченно обратимы в Λ_+, то отсюда следует, что уравнение $\mathcal{E}_\infty^{12}(0,\lambda)h_- = 0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{12}(\lambda) \neq \{0\}$, последнее условие равносильно условию $\dim\operatorname{Ker}\Theta(\lambda) > 0$. Теорема 2.1 доказана.

Для того, чтобы вычислить резольвенту оператора $\mathcal{C}_{10} = \mathcal{C}_{01}^*$ положим $V_+^N(r) = V_+(r)|[0,N]$ и в пространстве $L_2(0,N;\mathcal{H})$ рассмотрим канонический оператор $\mathcal{C}_+^N$ с потенциалом $V_+^N(r)$, который определяется граничными условиями $f(0) = P^+x$, $f(N) = P_-x$, $x \in \mathcal{H}$. Если $g(r) \in L_2(0,N;\mathcal{H})$, то решение уравнения $(\mathcal{C}_+^N - \lambda I)\,f = g$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ будем искать методом вариации постоянных в виде $f(r,\lambda) = \mathcal{E}(r,\lambda)\,x(r,\lambda)$.

Следуя работе [6], получим

$$x(r,\lambda) = P^+x - \mathcal{J}\int_0^r \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds,$$

где

$$x = i\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds.$$

Следовательно

$$f(r,\lambda) = \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}P^+\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\times$$
$$\times\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds - \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}\int_0^r \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds.$$

Таким образом, для ядра $K^N(r,s,\lambda)$ резольвенты оператора $\mathcal{C}_+^N$ имеем

$$K^N(r,s,\lambda) = \begin{cases} K_-^N(r,s,\lambda) \\ K_+^N(r,s,\lambda) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\left\{P^+\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} - I\right\}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s < r \\ \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}P^+\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s > r, \end{cases} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Поскольку функция $K^N(r,s,\lambda)$ на прямой $s = r$ имеет скачок, то положив $K^N(r,r,\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(K_-^N(r,r,\lambda) + K_+^N(r,r,\lambda)\right)$, имеем

$$K^N(r,r,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\left[P^+ - \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}).$$

В работе [6] характеристической функцией оператора $\mathcal{C}_+^N$ называется операторная функция

$$\chi_N(\lambda) = K^N(0,0,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{J}\left[P^+ - \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}.$$

Докажем существование $\chi(\lambda) = \lim\limits_{N\to\infty}\chi_N(\lambda)$. Из $\mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^- = e^{-i\lambda N}\mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-$. Имеем

$$\begin{gathered}\left[P^+ - \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \epsilon^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} = \\ = \left[e^{-i\lambda N}P^+ - \mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[e^{i\lambda N}P^+ + \mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Поскольку

$$\left[e^{i\lambda N}P^+ + \mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda N}I_+ & -e^{-i\lambda N}\mathcal{A}_{21}^*(N,\overline{\lambda})\mathcal{A}_{22}^{-1*}(N,\overline{\lambda}) \\ 0 & \mathcal{A}_{22}^{-1*}(N,\overline{\lambda}) \end{bmatrix},$$

то правую часть (2.1) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} I_+ & -2\mathcal{A}_{21}^*(N,\overline{\lambda})\mathcal{A}_{22}^{-1*}(N,\overline{\lambda}) \\ 0 & -I_- \end{bmatrix}.$$

При $N\to\infty$ имеем $\mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^- \to \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-$, $\lambda\in\Lambda_+$ равномерно по операторной норме, следовательно

$$-2\mathcal{J}\,\chi(\lambda) = \begin{bmatrix} I_+ & -2\Theta(\lambda) \\ 0 & -I_- \end{bmatrix}, \qquad \chi(\lambda) = i\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & -I_- \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 0 & \Theta(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. *Ядром резольвенты оператора $\mathcal{C}_{10}$ является функция*

$$K(r,s,\lambda) = \begin{cases} K_-(r,s,\lambda) \\ K_+(r,s,\lambda) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\left\{P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} - I\right\}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s<r \\ \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s>r, \end{cases} \quad Im\lambda > 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть плотный в $L_2(R_+,\mathcal{H})$ линеал функций, финитных на бесконечности. Пусть $g(r)$ финитна и

$$f(r) = \int_0^\infty K(r,s,\lambda)\,g(s)\,ds = \int_0^r K_-(r,s,\lambda)\,g(s)\,ds + \int_r^\infty K_+(r,s,\lambda)\,g(s)\,ds. \tag{2.4}$$

Тогда

$$f(0) = P^+\mathcal{J}\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\int_0^\infty \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds$$

так, что выполняется граничное условие $f(0) = P^* f(0)$. Поскольку

$$K_-(r,r,\lambda) - K_+(r,r,\lambda) = -\mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}\,\mathcal{E}^*(r,\overline{\lambda}) = -\mathcal{J},$$

то дифференцируя функцию (2.4), получим $\mathcal{C}_{10}f - \lambda f = g$. Учитывая финитность функции $g(r)$, из (2.4) для достаточно больших r имеем

$$f(r) = \int_0^N K_-(r,s,\lambda)\, g(s)\, ds =$$

$$= \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}\,\left\{P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} - I\right\}\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\, g(s)\, ds.$$

Но

$$P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} - I = -\mathcal{A}^*(\overline{\lambda})P^-\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}, \qquad (2.5)$$

следовательно, с учетом формулы (0.7), получим

$$f(r) = -\mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\,\mathcal{A}^*(\overline{\lambda})P^-\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\, g(s)\, ds =$$

$$= i\mathcal{E}_\infty(r,\lambda)\,P^-[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})P^-]^{-1}\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\, g(s)\, ds,$$

откуда и следует, что $f(r) \in L_2(R_+, \mathcal{H})$. Теорема 2.2 доказана.

Из формул (2.3) и (2.5) имеем

$$K(r,r,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\,\left[P^+ - \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(r,\overline{\lambda}),$$

и для характеристической функции оператора $\mathcal{C}_{10}$ получим

$$K(0,0,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\left[P^+ - \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} = \chi(\lambda),$$

где $\chi(\lambda)$ – функция, фигурирующая в (2.2). Очевидно, $\Theta(\lambda) = i\,P^+\chi(\lambda)\,P_-$.

Операторные функции $\chi_\pm(\lambda) = K_\pm(0,0,\lambda)$ имеют наглядный геометрический смысл. Действительно, обозначая $P^\pm(\lambda) = \mp\mathcal{J}\,\chi_\pm(\lambda)$, имеем

$$P^+(\lambda) = P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}, \qquad P_-(\lambda) = I - P^+(\lambda)$$

и, так как

$$\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}P^+ = \begin{bmatrix} I_+ & -\Theta(\lambda) \\ 0 & \mathcal{A}_{22}^{-1*}(\overline{\lambda}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P^+, \qquad (2.6)$$

то $[P^{\pm}(\lambda)]^2 = P^{\pm}(\lambda)$ и, следовательно, операторы $P^{\pm}(\lambda)$ являются взаимно дополнительными проекторами в $\mathcal{H}$. Пользуясь формулой (2.6), получим

$$P^{+}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_{+} & -\Theta(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \Theta(\lambda) \\ 0 & I_{-} \end{bmatrix}.$$

Так как $\|\Theta(\lambda)\| < 1$, то для любого $\lambda \in \Lambda_{+}$ оператор $P^{-}(\lambda)$ – проектор на равномерно отрицательное подпространство $\mathcal{L}_{\Theta(\lambda)} = \{\Theta(\lambda)h_{-} + h_{-} \mid \ h_{-} \in \mathcal{H}^{-}\}$, а оператор $\Theta(\lambda) = P^{+}P^{-}(\lambda)P^{-}$ является его угловым оператором.

Рассматривая операторные функции $P^{\pm}(\mu)$ на вещественной оси, во-первых замечаем, что $P^{+}(\mu) = P^{+}S_{-}^{-1*}(\mu)$, где $S_{-}(\mu)$ – факторизующий множитель S–матрицы оператора $\mathcal{C}$, рассмотренной в первом параграфе.

Для каждого $\mu \in R$ операторные функции $\widetilde{P}^{\pm}(\mu) = \mathcal{A}^{*}(\mu)\,P^{\pm}\mathcal{A}^{-1*}(\mu)$ являются проекторами на равномерно дефинитные подпространства $\mathcal{H}^{\pm}(\mu)$, которыми определяется каноническое разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{+}(\mu)[\dot{+}]\,\mathcal{H}^{-}(\mu)$ пространства $\mathcal{H}$, где $[\dot{+}]$ означает $(-i\mathcal{J})$–ортогональную прямую сумму (см. [7]).

Используя $\mathcal{J}$–унитарность функции $\mathcal{A}(\mu)$, непосредственно проверяется, что $\mathcal{H}^{-}(\mu) = \mathcal{L}_{\Theta(\mu)}$ $(\widetilde{P}^{-}(\mu)\mathcal{H} = P^{-}(\mu)\mathcal{H})$. Связь между проекторами $P^{\pm}(\mu)$ и каноническими проекторами $\widetilde{P}^{\pm}(\mu)$ устанавливается формулой

$$P^{\pm}(\mu) = \widetilde{P}^{\pm}(\mu) \mp Q(\mu), \tag{2.7}$$

где $Q(\mu) = \mathcal{A}^{*}(\mu)P^{-}\left[\mathcal{A}(\mu)P^{+} - P_{-}\right]^{-1}P^{+}\mathcal{A}^{-1*}(\mu)$ такова, что $Q^2(\mu) = 0$. Действительно, из $\mathcal{J}$–унитарности функции $\mathcal{A}(\mu)$ имеем

$$P^{-}(\mu) = \mathcal{A}^{*}(\mu)\,P^{-}\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\mu)\,P^{-}\right]^{-1} = \mathcal{A}^{*}(\mu)\,P^{-}\left[(-\mathcal{J}\,\mathcal{A}(\mu)\,\mathcal{J})P^{+} + P^{-}\right]^{-1} \times$$
$$\times\,\mathcal{A}^{-1*}(\mu) = \mathcal{A}^{*}(\mu)P^{-}\left[\mathcal{A}(\mu)\,P^{+} - P^{-}\right]^{-1}(P^{+} - P^{-})\,\mathcal{A}^{-1*}(\mu).$$

Аналогично формуле (2.6) получим $\left[\mathcal{A}(\mu)P^{+} - P^{-}\right]^{-1}P^{-} = -P^{-}$, откуда и следует (2.7).

В заключение затметим, что если $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$ и матрица–функция $V_{+}(r) \in L_{1,2}(R_{+}, [\mathcal{H}]) = L_1((R_{+}, [\mathcal{H}]) \cap L_2(R_{+}, [\mathcal{H}])$, то в представлениях (0.4) и (0.1) имеем $K(t) \in L_{1,2}(R_{+}, [\mathcal{H}])$, $\Gamma(t) \in L_{1,2}(R_{+}, [\mathcal{H}^{-} : \mathcal{H}^{+}])$, соответственно. Обратно, сжимающую на вещественной оси матрицу–функцию $\Theta(\mu)$ $(\|\Theta(\mu)\| < 1)$, представимую формулой (0.1) с $\Gamma(t) \in L_{1,2}(R_{+}, [\mathcal{H}^{-} : \mathcal{H}^{+}])$, с помощью единственных решений $G_{\pm}(\mu)$ факторизационных задач (см. [9])

$$\begin{cases} [I_{+} - \Theta(\mu)\Theta^{*}(\mu)]^{-1} = G_{+}^{*}(\mu)\,G_{+}(\mu), & G_{+}^{\pm 1}(\mu) \in W^{+}([\mathcal{H}^{+}]) \\ [I_{-} - \Theta^{*}(\mu)\,\Theta(\mu)]^{-1} = G_{-}^{*}(\mu)\,G_{-}(\mu), & G_{-}^{\pm 1}(\mu) \in W^{-}([\mathcal{H}^{-}]) \end{cases} \tag{2.8}$$

можно образовать матрицу–функцию

$$\mathcal{A}(\mu) = \begin{bmatrix} G_+(\mu) & G_+(\mu)\,\Theta(\mu) \\ G_-(\mu)\,\Theta^*(\mu) & G_-(\mu) \end{bmatrix},$$

которая, в силу соотношений (2.8), $\mathcal{J}$–унитарна и представима формулой (0.4) с $K(t) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}])$. Решая обратную задачу восстановления потенциала канонического оператора с помощью функции $K(t)$, получим $V_+(r) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}])$ (ср. с [2]) так, что верна

Теорема 2.3. *Если* $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$, *то диссипативный оператор* $\mathcal{C}_{01}$ *с потенциалом* $V_+(r) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}])$ *является модельным для диссипативных операторов, характеристические функции которых являются сжимающими в* Λ_+ *матрицами функциями* $\Theta(\lambda)$, *представимыми формулой*

$$\Theta(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda t}\Gamma(t)\,dt, \qquad \Gamma(t) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+]), \quad \lambda \in \Lambda_+.$$

ABSTRACT. For a canonical operator $\mathcal{C}_{00}$ on semiaxis the paper considers S–matrices which correspond to the selfadjoint extensions of $\mathcal{C}_{00}$ with exit on the whole axis. These S–matrices are described by contractive operator functions of the class $W^+([\aleph])$. We prove that they are characteristic functions of "rigid" dissipative extension $\mathcal{C}_{01}$ of canonical operator $\mathcal{C}_{00}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Адамян, "К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве", ДАН СССР, т. 178, № 1, стр. 9 — 12, 1968.
2. Ф. Э. Мелик–Адамян, "Об одном классе канонических дифференциальных операторов", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 24, № 6, стр. 570 – 592, 1989.
3. П. Э. Мелик–Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм ССР, Математика , т. 11, № 4, стр. 291 — 313, 1976.
4. П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния, Мир, М., 1970.
5. Б. Секефальви–Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1970.
6. Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1968.
7. Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, Наука, М., 1986.
8. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, "О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами и разложения по собственным функциям этого уравнения, ДАН СССР, т. 208, № 6, стр. 1268 — 1271, 1973.
9. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов" Успехи Мат. Наук, т. 13, № 2, стр. 3 — 72, 1958.

13 июня 1995

Ереванский государственный университет

ОБОБЩЕННЫЕ В-СПЛАЙНЫ

Г. Р. Чугурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 2, 1996

Статья посвящена исследованию нового вида сплайн-функций. Введены параметрические или обобщенные В-сплайны и изучены их основные свойства. Найдена связь обобщенных В-сплайнов с В-сплайнами. Рассмотрен также случай равноудаленных узлов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\tau = \{\tau_i\}$ – последовательность узлов, $\Delta : a = \tau_0 < \ldots < \tau_N = b$.

Определение 1.1. *Обобщенный* $B(p_1, \ldots, p_k)$*-сплайн степени* k (эквивалентно, порядка $k+1$, $k \geq 0$) для последовательности узлов τ и параметров $p_1, \ldots, p_k$ ($p_k \in N$) обозначается $G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau}$ задается следующим образом :

$$G_{i,1,\tau}(x) = B_{i,1,\tau}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ 0, & x \notin [\tau_i, \tau_{i+1}) \end{cases} \tag{1.1}$$

и

$$G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = A_{i,k+1,\tau}(x) - A_{i+p_k,k+1,\tau}(x) \tag{1.2}$$

для $k \geq 1$ и $p_k \geq 1$, где

$$A_{i,k+1,\tau}(x) = \begin{cases} \int_{\tau_i}^{x} G^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{i,k,\tau}(s)\, ds / \delta^{(q_{k-1})}_{i,k,\tau}, & \text{если } \delta^{(q_{k-1})}_{i,k,\tau} \neq 0, \\ \pi_{i,\tau}(x), & \text{если } \delta^{(q_{k-1})}_{i,k,\tau} = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\delta^{(q_{k-1})}_{i,k,\tau} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+q_{k-1}}} G^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{i,k,\tau}(s)\, ds, \tag{1.4}$$

$$q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-i} p_i + 1, \qquad \pi_{i,\tau}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \tau_i, \\ 0, & x < \tau_i. \end{cases} \tag{1.5}$$

Утверждение 1.1. *При $p_1 = \dots = p_k = 2$ обобщенный $B(p_1, \dots, p_k)$-сплайн является альтернативным сплайном [3].*

Доказательство вытекает из определения 1.1 и определения альтернативного сплайна.

Рассмотрим пример обобщенного $B(p_1, \dots, p_k)$-сплайна для равноудаленных узлов. Через $\Delta\tau$ обозначим расстояние между двумя последовательными узлами. Для случая равноудаленных узлов $G_{i,k+1,\tau}^{(p_1,\dots,p_k)}$ будем обозначать как $G_{i,k+1}^{(p_1,\dots,p_k)}$.

Пример 1.1.

$$G_{i,2}^{3}(x) = \begin{cases} (x-\tau_i)/\Delta\tau, & x \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ 1, & x \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}) \\ 1, & x \in [\tau_{i+2}, \tau_{i+3}) \\ (\tau_{i+4} - x)/\Delta\tau, & x \in [\tau_{i+3}, \tau_{i+4}) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 1.2.

$$G_{i,3}^{(3,4)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-\tau_i)^2}{6\Delta\tau^2}, & x \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \\ \frac{1}{6} + \frac{x-\tau_{i+1}}{3\Delta\tau}, & x \in [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}) \\ \frac{1}{2} + \frac{x-\tau_{i+2}}{3\Delta\tau}, & x \in [\tau_{i+2}, \tau_{i+3}) \\ 1 - \frac{(\tau_{i+4}-x)^2}{6\Delta\tau^2}, & x \in [\tau_{i+3}, \tau_{i+4}) \\ 1 - \frac{(x-\tau_{i+4})^2}{6\Delta\tau^2}, & x \in [\tau_{i+4}, \tau_{i+5}) \\ \frac{1}{2} + \frac{\tau_{i+6}-x}{3\Delta\tau}, & x \in [\tau_{i+5}, \tau_{i+6}) \\ \frac{1}{6} + \frac{\tau_{i+7}-x}{3\Delta\tau}, & x \in [\tau_{i+6}, \tau_{i+7}) \\ \frac{(\tau_{i+8}-x)^2}{6\Delta\tau^2}, & x \in [\tau_{i+7}, \tau_{i+8}) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ B-СПЛАЙНОВ

Докажем одно из основных свойств обобщенных $B(p_1, \dots, p_k)$-сплайнов.

Утверждение 2.1. *При $p_1 = \dots = p_k = 1$ обобщенный $B(p_1, \dots, p_k)$-сплайн является B-сплайном.*

Доказательство проведем методом индукции по k. При $k = 0$ имеем $G_{i,1,\tau}(x) = B_{i,1,\tau}(x)$ (по определению). Обозначим

$$G_{i,k,\tau}^{\overbrace{(1,\dots,1)}^{k-1}}(x) = G_{i,k,\tau}^{(1)^{k-1}}(x).$$

Пусть $G^{(1)_{k-1}}_{i,k,\tau}(x) = B_{i,k,\tau}(x)$. Докажем тогда, что

$$G^{(1)_k}_{i,k+1,\tau}(x) = B_{i,k+1,\tau}(x).$$

По определению 1.1 имеем

$$G^{(1)_k}_{i,k+1,\tau}(x) = \frac{\int_{\tau_i}^{x} G^{(1)_{k-1}}_{i,k,\tau}(s)\,ds}{\int_{\tau_i}^{\tau_{i+k-1}} G^{(1)_{k-1}}_{i,k,\tau}(s)\,ds} - \frac{\int_{\tau_{i+1}}^{x} G^{(1)_{k-1}}_{i+1,k,\tau}(s)\,ds}{\int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+k}} G^{(1)_{k-1}}_{i+1,k,\tau}(s)\,ds}.$$

Так как $G^{(1)_{k-1}}_{i,k,\tau}(x) \neq 0$ при $x \in [\tau_i, \tau_{i+k})$, и согласно нашему предположению $G^{(1)_{k-1}}_{i,k,\tau}(x) = B_{i,k,\tau}(x)$, имеем

$$G^{(1)_k}_{i,k+1,\tau}(x) = \frac{\int_{\tau_i}^{x} B_{i,k,\tau}(s)\,ds}{\int_{\tau_i}^{\tau_{i+k-1}} B_{i,k,\tau}(s)\,ds} - \frac{\int_{\tau_{i+1}}^{x} B_{i+1,k,\tau}(s)\,ds}{\int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+k}} B_{i+1,k,\tau}(s)\,ds}.$$

Из [4] получаем следующую формулу интегрирования B-сплайнов :

$$\int_{\tau_i}^{x} B_{i,k,\tau}(s)\,ds = \frac{(\tau_{i+k} - \tau_i)}{k} \left(\sum_{l=i}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x) \right),$$

где m достаточно большое так, что $x \le \tau_{m+1}$. Аналогично

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+k}} B_{i,k,\tau}(x)\,dx = \frac{(\tau_{i+k} - \tau_i)}{k},$$

что следует из свойств B-сплайна [1,2]. Поэтому

$$G^{(1)_k}_{i,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=i}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x) - \sum_{l=i+1}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x) = B_{i,k+1,\tau}(x).$$

Утверждение доказано.

Исследуем некоторые свойства обобщенных $B(p_1, \ldots, p_k)$-сплайнов. Пусть $\tau = \{\tau_i\}$ – последовательность узлов и $\tau + x_0 = \{\tau_i + x_0 | \tau_i \in \tau\}$, $k \ge 0$. Следующие свойства 2.1 и 2.2 непосредственно вытекают из определения 1.1.

Свойство 2.1.

$$G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau+x_0}(x + x_0) = G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x). \tag{2.1}$$

Свойство 2.2. $G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau}$ зависит только от узлов $\tau_i, \tau_{i+1} \ldots, \tau_{i+q_k}$.

Свойство 2.3. Носитель $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}$ для всех значений i и k конечен.

$$G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau} = 0, \qquad x \notin [\tau_i, \tau_{i+q_k}). \tag{2.2}$$

Доказательство проведем методом индукции по k. При $k = 0$ $G_{i,1,\tau}(x) = 0$, если $x \notin [\tau_i, \tau_{i+1})$ (по определению). Пусть $G^{(p_1,\dots,p_{k-1})}_{i,k,\tau}(x) = 0$ при $x \notin [\tau_i, \tau_{i+q_{k-1}})$. Докажем, что $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = 0$, когда $x \notin [\tau_i, \tau_{i+q_k})$. Для $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x)$ имеем

$$G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = \frac{\displaystyle\int_{\tau_i}^{x} G^{(p_1,\dots,p_{k-1})}_{i,k,\tau}(s)\,ds}{\displaystyle\int_{\tau_i}^{\tau_{i+q_{k-1}}} G^{(p_1,\dots,p_{k-1})}_{i,k,\tau}(s)\,ds} - \frac{\displaystyle\int_{\tau_{i+p_k}}^{x} G^{(p_1,\dots,p_{k-1})}_{i+p_k,k,\tau}(s)\,ds}{\displaystyle\int_{\tau_{i+p_k}}^{\tau_{i+q_{k-1}+p_k}} G^{(p_1,\dots,p_{k-1})}_{i+p_k,k,\tau}(s)\,ds}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) видно, что $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = 0$, когда $x < \tau_i$ и $x \geq \tau_{i+q_k}$, т.е. $x \notin [\tau_i, \tau_{i+q_k})$, так как при $x < \tau_i$, $G^{(p_1,\dots,p_{k-1})}_{i,k,\tau}(x) = 0$ (по предположению), следовательно $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = 0$, а при $x \geq \tau_{i+q_k}$ $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = 1 - 1 = 0$.

Свойство 2.4. (положительность обобщенного $B(p_1,\dots,p_k)$-сплайна)

$$G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) > 0 \qquad \text{при} \quad x \in (\tau_i, \tau_{i+q_k}).$$

Свойство доказывается методом индукции по k.

Для $t = 0,\dots,q_{k-1}$ положим $\mu_t = [\tau_{i+t}, \tau_{i+t+1})$. Среди интервалов μ_t будем различать λ-интервалы и $\overline{\lambda}$-интервалы. Пусть $\lambda = \{\lambda_i = n_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}\,;\, \alpha_i \in \{0,1\}\}$, где

$$n_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} = n_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i$$

есть последовательность, элементами которой являются всевозможные частичные суммы $p_1,\dots,p_k$, а $\widetilde{\lambda} = \{\widetilde{\lambda}_i\}$ – последовательность, элементами которой являются $\widetilde{\lambda}_i = \{j,\, j = \overline{0,q_k}\} \setminus \lambda$.

Определение 2.1 Интервалы $I = [\tau_{i+t}, \tau_{i+t+1})$ для последовательности узлов $\tau = \{\tau_i\}$ назовем λ-*интервалами*, если $t \in \{\lambda_i\}$. Интервалы же $\bar{I} \subset [\tau_i, \tau_{i+q_k})$, не являющиеся λ-интервалами, назовем $\overline{\lambda}$-интервалами, $\widetilde{I} = [\tau_{i+\widetilde{t}}, \tau_{i+\widetilde{t}+1})$, $\widetilde{t} \in \{\widetilde{\lambda}_j\}$.

Установим одно из принципиальных свойств обобщенного $B(p_1,\dots,p_k)$-сплайна.

Свойство 2.5. $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x)$ является многочленом степени $\le k$ на λ-интервалах и многочленом степени $\le k-1$ на $\overline{\lambda}$-интервалах.

Доказательство сразу вытекает из определения обобщенного $B(p_1,\dots,p_k)$-сплайна.

Следствие 2.1. Обобщенный $B(p_1,\dots,p_k)$-сплайн имеет $k-1$–ую непрерывную производную на λ–интервалах и $k-2$–ую непрерывную производную на $\overline{\lambda}$-интервалах.

§3. РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО B-СПЛАЙНА ПО B-СПЛАЙНАМ

В этом параграфе установим связь между обобщенными $B(p_1,\dots,p_k)$-сплайнами и B-сплайнами.

Теорема 3.1. *Пусть* $G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}$ – *обобщенный* $B(p_1,\dots,p_k)$-*сплайн степени* k $(k\ge 0)$ *для последовательности узлов* $\tau=\{\tau_l\}$. *Тогда существуют действительные числа* $\alpha^{(k+1)}_{l,i}$, $l=0,\dots,q_k-k-1$ *такие, что*

$$G^{(p_1,\dots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x)=\sum_{l=0}^{q_k-k-1}\alpha^{(k+1)}_{l,i}B_{i+l,k+1,\tau}(x) \tag{3.1}$$

для всех x, *где* $\alpha^{(k+1)}_{l,i}$ $(l=\overline{0,q_k-k-1})$ *могут быть реккурентно определены по* k *следующим образом* : $\alpha^{(1)}_{0,i}=1$ *и*

$$\alpha^{(k+1)}_{l,i}=a^{(k+1)}_{l,i}-a^{(k+1)}_{l-p_k,i+p_k},\quad l=\overline{0,q_k-k-1},$$

$$a^{(k+1)}_{l,i}=\begin{cases}\sum\limits_{j=i}^{i+l}\alpha^{(k)}_{j-i,i}(\tau_{j+k}-\tau_j)/\Delta^{(k)}_i, & \Delta^{(k)}_i\ne 0,\\ 1, & \Delta^{(k)}_i=0,\end{cases}\qquad k>0,$$

$$\Delta^{(k)}_i=\sum_{j=i}^{i+q_{k-1}-k}\alpha^{(k)}_{j-i,i}(\tau_{j+k}-\tau_j) \tag{3.2}$$

и

$$a^{(k+1)}_{-1,i+p_k}=\dots=a^{(k+1)}_{-p_k,i+p_k}=\alpha^{(k)}_{q_{k-1}-k+1,i}=\dots=\alpha^{(k)}_{q_k-k-1,i}=0.$$

Доказательство проведем методом индукции по k. При k=0 теорема 3.1 верна (по определению $G_{i,1,\tau}$ и $B_{i,1,\tau}$). Предположим, что теорема верна для $m=k$.

Тогда по индукционной гипотезе имеем

$$G_{i,k,\tau}^{(p_1,\dots,p_{k-1})}(x) = \sum_{l=0}^{q_{k-1}-k} \alpha_{l,i}^{(k)} B_{i+l,k,\tau}(x). \tag{3.3}$$

Выбирая m достаточно большим, так что $x \le \tau_{m+1}$, будем иметь

$$\int_{\tau_i}^{x} G_{i,k,\tau}^{(p_1,\dots,p_{k-1})}(s)\,ds = \sum_{l=i}^{m} \left(\sum_{j=i}^{l} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/k \right) B_{l,k+1,\tau}(x). \tag{3.4}$$

Так как $B_{i,k+1,\tau}(t) = 0$, если $t \notin (\tau_i, \tau_{i+k+1})$, то

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+q_{k-1}}} G_{i,k,\tau}^{(p_1,\dots,p_{k-1})}(s)\,ds =$$

$$= \sum_{l=i+q_{k-1}-k}^{m} \left(\sum_{j=i}^{m} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/k \right) B_{l,k+1,\tau}(\tau_{i+q_{k-1}}). \tag{3.5}$$

Более того, так как $\alpha_{l,i}^{(k)} = 0$, если $l > q_{k-1} - k$, то имеем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+q_{k-1}}} G_{i,k,\tau}^{(p_1,\dots,p_{k-1})}(s)\,ds = \sum_{l=i+q_{k-1}-k}^{m} \left(\sum_{j=i}^{i+q_{k-1}-k} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/k \right) \times$$

$$\times B_{l,k+1,\tau}(\tau_{i+q_{k-1}}) = \sum_{l=i+q_{k-1}-k}^{m} \frac{\Delta_i^{(k)} B_{l,k+1,\tau}(\tau_{i+q_{k-1}})}{k}.$$

Тогда

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+q_{k-1}}} G_{i,k,\tau}^{(p_1,\dots,p_{k-1})}(s)\,ds = \frac{\Delta_i^{(k)}}{k} \tag{3.6}$$

или $\delta_{i,k,\tau}^{(q_{k-1})} = \Delta_i^{(k)}/k$. Снова, так как $\alpha_{l,i}^{(k)} = 0$, если $l > q_{k-1} - k$, то имеем

$$\int_{\tau_i}^{x} G_{i,k,\tau}^{(p_1,\dots,p_{k-1})}(s)\,ds = \sum_{l=i}^{i+q_{k-1}-k-1} \left(\sum_{j=i}^{l} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/k \right) B_{l,k+1,\tau}(x) +$$

$$+ \sum_{l=i+q_{k-1}-k}^{m} (\Delta_i^{(k)}/k) B_{l,k+1,\tau}(x).$$

Поэтому, если $\delta_{i,k,\tau}^{(q_{k-1})} \neq 0$, то

$$A_{i,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=i}^{i+q_{k-1}-k-1} \left(\sum_{j=i}^{l} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/\Delta_i^{(k)} \right) B_{l,k+1,\tau}(x) +$$

$$+ \sum_{l=i+q_{k-1}-k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x), \tag{3.7}$$

или

$$A_{i,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=0}^{q_{k-1}+p_k-k-1} \left(\sum_{j=i}^{i+l} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/\Delta_i^{(k)} \right) B_{i+l,k+1,\tau}(x) +$$

$$+ \sum_{l=i+q_{k-1}-k+p_k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x).$$

Из определения $\Delta_i^{(k)}$ и индукционной гипотезы следует, что

$$\sum_{j=i}^{i+l} \alpha_{j-i,i}^{(k)} (\tau_{j+k} - \tau_j)/\Delta_i^{(k)} = 1, \quad l = q_{k-1} - k, \ldots, q_{k-1} - k + p_k - 1.$$

С другой стороны, из $\delta_{i,k,\tau}^{(q_{k-1})} = 0$ и $G_{i,k,\tau}^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}(x) > 0$ при $x \in (\tau_i, \tau_{i+q_{k-1}})$ следует, что $\tau_i = \tau_{i+q_{k-1}}$. Следовательно

$$A_{i,k+1,\tau}(x) = \pi_{i,\tau}(x) = \sum_{l=i}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x)$$

для достаточно больших m, или

$$A_{i,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=i}^{i+q_k-k-1} B_{l,k+1,\tau}(x) + \sum_{l=i+q_k-k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{q_k-k-1} B_{i+l,k+1,\tau}(x) + \sum_{l=i+q_k-k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x). \tag{3.8}$$

Окончательно, получим

$$A_{i,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=0}^{q_k-k-1} a_{l,i}^{(k+1)} B_{i+l,k+1,\tau}(x) + \sum_{l=i+q_k-k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x), \tag{3.9}$$

где $a_{l,i}^{(k+1)}$ определены в теореме. Аналогично можно доказать, что для тех же значений m

$$A_{i+p_k,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=0}^{q_k-k-1} a_{l,i+p_k}^{(k+1)} B_{i+p_k+l,k+1,\tau}(x) + \sum_{l=i+q_k-k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x). \tag{3.10}$$

Поскольку $a_{q_{k-1}-k,i+p_k}^{(k+1)} = \cdots = a_{q_k-k-1,i+p_k}^{(k+1)} = 1$, то

$$A_{i+p_k,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=0}^{q_{k-1}-k-1} a_{l,i+p_k}^{(k+1)} B_{i+p_k+l,k+1,\tau}(x) + \sum_{l=i+q_{k-1}-k+p_k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{q_k-k-1} a^{(k+1)}_{l-p_k,i+p_k} B_{i+l,k+1,\tau}(x) + \sum_{l=i+q_k-k}^{m} B_{l,k+1,\tau}(x). \qquad (3.11)$$

Полагая

$$a^{(k+1)}_{-1,i+p_k} = \cdots = a^{(k+1)}_{-p_k,i+p_k} = 0,$$

получим

$$G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = A_{i,k+1,\tau}(x) - A_{i+p_k,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=0}^{q_k-k-1} (a^{(k+1)}_{l,i} - a^{(k+1)}_{l-p_k,i}) B_{i+l,k+1,\tau}(x).$$

Теорема 3.1 доказана.

Прежде чем перейти к обсуждению следствия, дадим определение *дискретной свертки* :

$$(c*d)_i = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{i-l}. \qquad (3.12)$$

Следствие 3.1. Если последовательность узлов $\tau = \{\tau_l\}$ является равноудаленной, то для целых i и $k > 0$

$$G^{(p_1,\ldots,p_k)}_{i,k+1,\tau}(x) = \sum_{l=0}^{q_k-k-1} \alpha^{(p_1,\ldots,p_k)}_{l,k+1} B_{i+l,k+1,\tau}(x), \qquad (3.13)$$

где

$$\alpha^{(p_1,\ldots,p_k)}_{l,k+1} = \frac{e_{p_1} * \cdots * e_{p_k}}{\prod_{j=1}^{k-1} p_j}, \quad e_{p_j} = (1,\ldots,1) \quad (p_j \text{ единиц}), \qquad (3.14)$$

$*$ означает операцию дискретной свертки.

Доказательство. Для равноудаленных узлов $\alpha^{(k+1)}_{l,s} = \alpha^{(k+1)}_{l,t}$, $s,t \in N$. Обозначим $\alpha^{(k+1)}_{l,s} = \alpha^{(p_1,\ldots,p_k)}_{l,k+1}$ и упростим реккурентное соотношение для $\alpha^{(k+1)}_{l,i}$ из теоремы 3.1 :

$$\alpha^{(p_1)}_{0,2} = \cdots = \alpha^{(p_1)}_{p_1-1,2} = 1,$$

$$\alpha^{(p_1,\ldots,p_k)}_{l,k+1} = \frac{\alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{l-p_k+1,k} + \cdots + \alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{l,k}}{\sum_{j=i}^{i+q_{k-1}-k} \alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{j-i,k}}, \quad l = 0,\ldots,q_k-k-1, \qquad (3.15)$$

где

$$\alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{-p_k+1,k} = \cdots = \alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{-1,k} = \alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{q_{k-1}-k+1,k} = \alpha^{(p_1,\ldots,p_{k-1})}_{q_k-k-1,k} = 0.$$

Пользуясь методом индукции и сотношением (3.12) легко усмотреть, что для $k \geq 2$

$$\sum_{j=i}^{i+q_{k-1}-k} \alpha^{(p_1,\ldots,p_k)}_{j-k,k} = \prod_{j=1}^{k-1} p_j$$

и (3.14) выполняется. Следствие доказано.

Замечание 3.1. При $p_1 = \cdots = p_k = 2$ (случай альтернативного сплайна) [3], $\alpha_{l,k+1}^{(2)_k}$ выражается следующим образом :

$$\alpha_{l,k+1}^{(2)_k} = \frac{C_k^l}{2^{k-1}}, \qquad l = \overline{0,k},$$

где C_k^l – коэффициенты биномального разложения.

ABSTRACT. The paper studies a new type of spline-functions, the so called parametric or generalized B-splines and describes their principal properties. Interconnections between generalized B-splines and B-splines are established. Special attention is paid to the case of the uniformly spaced knots.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, Методы сплайн–функций, Наука, М., 1980.
2. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, Сплайны в вычислительной математике, Наука, М., 1976.
3. A. Bien, F. Cheng, "Alternate spline : a generalized B-spline", Journal of Approx. Theory, vol. 51, pp. 138 – 159, 1987.
4. C. Boor, A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1978.

10 января 1996

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 31 НОМЕР 2 1996

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

CONTENTS

VOLUME 31 NUMBER 2 1996

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)