ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ГЛАДКОСТИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996

В статье мы доказываем интерполяционную теорему для H– и B-пространств типа Соболева–Лиувилля и Никольского–Бесова с разными анизотропиями, предполагая, что одно из интерполяционных пространств вложено в другое. С помощью классических анизотропных пространств на плоскости мы доказываем формулу представления для пространства обобщенной гладкости, порожденного вполне правильным многогранником.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] Х. Трибель назвал "нерешенной проблемой" задачу описания интерполяционных пространств между двумя анизотропными пространствами разной анизотропии (см. стр. 377). В работе [2] мы доказали интерполяционные теоремы в более общей ситуации, рассматривая пространства $H^s_p(\mu;\mathbb{R}^n)$ и $B^s_{p,q}(\mu;\mathbb{R}^n)$, которые при конкретизации функции $\mu(\xi)$ совпадают с анизотропными классами. Оказалось, что интерполяция между классическими анизотропными пространствами разной анизотропии приводит нас к пространствам, порожденным некоторым вполне правильным многогранником (см. [3]). Такого рода H-пространства были рассмотрены в [4], а B-пространства (они возникают при "вещественной" интерполяции) были рассмотрены в [5], [6].

В настоящей работе мы обобщаем результаты работы [2] и доказываем интерполяционные формулы при ослабленных предположениях. Поскольку интерполируя между анизотропными классами мы приходим к пространствам. порожденным вполне правильным многогранником, естественно поставить обратный вопрос : можно ли каждое из пространств типа H (Соболева–Лиувилля) и B (Никольского–Бесова), порожденных вполне правильным многогранником, представить в виде интерполяционного пространства между анизотропными классами ? На этот вопрос мы даем положительный ответ при $n = 2$ (теорема 2).

Поставленный вопрос, кроме приведенной мотивации интересен и сам по себе, учитывая, что с помощью возможных представлений можно распространить множество результатов для классических анизотропных классов и на случай пространств, порожденных вполне правильным многогранником.

§2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство,

$\mathbb{Z}_n^+$ – множество мультииндексов, т.е. векторов с целыми неотрицательными компонентами,

S – класс Шварца,

M_p – пространство мультипликаторов Фурье типа (p,p),

F – оператор преобразования Фурье.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_n^+$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$.

Определение 1. Непустой многогранник $\mathcal{N}$ с вершинами из $\mathbb{Z}_n^+$ назовем *полным*, если начало координат является вершиной $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}$ имеет вершины на каждой оси координат $\mathbb{Z}_n^+$. Полный многогранник $\mathcal{N}$ назовем *вполне правильным*, если внешние нормали $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathcal{N}$ имеют только положительные координаты.

Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник с вершинами $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_N$, при этом вершина α_j находится на j-той оси $(j = 1, ..., n)$ и $\alpha_0 = (0, ..., 0)$. Сопоставим многограннику $\mathcal{N}$ функцию

$$\mu(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} \xi^{2\beta_i} \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$. Через $\Phi(\mu; \mathbb{R}^n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$, обладающих следующими свойствами :

а) $\quad \varphi_k \in S(\mathbb{R}^n), \quad (F\varphi_k)(\xi) \geq 0, \quad k = 0, 1, ...$

б) $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \le \mu(\xi) \le 2^{k+1}\}$, $\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \mu(\xi) \le 2\}$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$,

г) $\|F\varphi_k\|_{M_p} \le C, \quad k = 1, 2, \ldots$

Пример системы из $\Phi(\mu; \mathbb{R}^n)$ приведен в [5].

Определение 3. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mu; \mathbb{R}^n)$, и пусть S' – класс, сопряженный классу Шварца S. Положим

$$H_p^s(\mu; \mathbb{R}^n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \ \|f\|_H = \left\| F^{-1}\{(1+\mu^2)^{s/2} Ff\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \ \|f\|_B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f * \varphi_k\|_{L_p}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Если вершины многогранника $\mathcal{N}$ не являются мультииндексами, то H и B–пространства определяются как пополнение класса Шварца S.

В работе [2] были доказаны интерполяционные формулы для H и B–пространств с разными анизотропиями (разными порождающими многогранниками или разными порождающими функциями $\mu(\xi)$).

§3. ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВ С РАЗНЫМИ АНИЗОТРОПИЯМИ

Пусть $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_1$ – порождающие многогранники интерполяционных пространств. В [2] мы предположили, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ и что некоординатные грани этих многогранников не имеют общих точек (см. [2], теорему 7 и замечание 3). Следующая теорема обобщает теорему 7 работы [2], освобождая ее от второй части условия.

Теорема 1. *Пусть*

$$0 < \theta < 1, \quad 1 < p_0, p_1, p, q_0, q_1, r < \infty, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

и пусть функции μ_i порождены полными многогранниками $\mathcal{N}_i$ $(i = 0, 1)$. Пусть далее $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$. Тогда

$$a) \qquad \left(B_{p,q_0}^1(\mu_0), B_{p,q_1}^1(\mu_1) \right)_{\theta,r} = B_{p,r}^1(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^\theta),$$

$$б) \quad \left(B^1_{p_0,p_1}(\mu_0), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,p^*} = B^1_{p^*,q^*}(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta}),$$

$$в) \quad \left[B^1_{p_0,q_0}(\mu_0), B^1_{p_1,q_1}(\mu_1)\right]_{\theta} = B^1_{p^*,q^*}(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta}),$$

$$г) \quad \left(H^1_p(\mu_0), H^1_p(\mu_1)\right)_{\theta,r} = B^1_{p,r}(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta}).$$

Доказательство. Докажем формулу а); формулы б) – г) доказываются аналогично. Согласно вышеизложенному результату [2] достаточно предполагать, что некоординатные грани многоугольников $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_1$ имеют, по крайней мере, одну общую точку. Воспользуемся теоремой вложения разных метрик для B-пространств (см. [2], теорему 7). Имеем

$$B^{1+\varepsilon}_{p,q_0}(\mu_0) \subset B^1_{p,q_0}(\mu_0), \quad B^1_{p,q_1}(\mu_1) \subset B^{1-\varepsilon}_{p,q_1}(\mu_1), \quad \varepsilon > 0,$$

причем константы, фигурирующие в этих вложениях, не зависят от ε. Тогда

$$\left(B^{1+\varepsilon}_{p,q_0}(\mu_0), B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r} \subset \left(B^1_{p,q_0}(\mu_0), B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r} \subset \left(B^1_{p,q_0}(\mu_0), B^{1-\varepsilon}_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r}. \tag{2}$$

Первые и последние интерполяционные пространства в (2) определяются с помощью теоремы 7 из [2], т.к. некоординатные грани соответствующих многогранников уже не имеют общих точек. Тогда (2) принимает вид

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3, \tag{3}$$

где

$$A_1 = B^1_{p,r}(\mu_0^{(1+\varepsilon)(1-\theta)}\mu_1^{\theta}), \quad A_2 = \left(B^1_{p,q_0}(\mu_0), B^1_{p,q_1}(\mu_1)\right)_{\theta,r},$$

$$A_3 = B^1_{p,r}(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{(1-\varepsilon)\theta}).$$

Каждое из B-пространств в (3) порождено некоторой системой $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Чтобы различить эти системы друг от друга вместо φ_k напишем $\varphi_k(\mu)$, где μ – соответствующая порождающая функция типа (1). В частности

$$\left\{\varphi_k(\mu_i)\right\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mu_i; \mathbb{R}^n), \quad i = 0, 1.$$

По соображениям плотности можно огрничиться функциями из S. Используя теоремы 4 – 6 из [2] и правое вложение из (3), для $f \in S$ получаем

$$\|f\|^r_{A_3} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr} \|f * \varphi_k(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{(1-\varepsilon)\theta})\|^r_{L_p} \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{\infty} \left\| F^{-1}[(1+\mu_0^2)^{(1-\theta)/2}(1+\mu_1^2)^{(1-\varepsilon)\theta/2} F\varphi_k F f] \right\|_{L_p}^r \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon\theta r} \left\| If * \varphi_k(\mu_1) \right\|_{L_p}^r \le c' \|f\|_{A_2}^r, \tag{4}$$

где $c' > 0$ не зависит от ε, знак $\sim$ означает двустороннюю оценку и

$$If = F^{-1}[(1+\mu_0^2)^{(1-\theta)/2}(1+\mu_1^2)^{\theta/2} F f].$$

Аналогично, из левого вложения в (3) имеем

$$\|f\|_{A_2}^r \le c'' \|f\|_{A_1}^r = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr} \|f * \varphi_k(\mu_0^{(1-\theta)(1+\varepsilon)} \mu_1^{\theta})\|_{L_p}^r \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\varepsilon(1-\theta)r} \left\| If * \varphi_k(\mu_0) \right\|_{L_p}^r. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$c_1 \|If\|_{B_1} \le \|f\|_{A_2} \le c_0 \|If\|_{B_2}, \quad B_1 = B_{p,r}^{-\varepsilon\theta}(\mu_1), \quad B_2 = B_{p,r}^{\varepsilon(1-\theta)}(\mu_0), \tag{6}$$

где c_0 и c_1 не зависят от ε. Поскольку $f \in S$, то ряды, определяющие нормы слева и справа в (6), сходятся равномерно по ε на $[0,1]$. В качестве мажорантного ряда можно взять ряд, определяющий норму $\|If\|_{B^1_{p,r}(\mu_0)}$. Тогда можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Учитывая теоремы 4 и 6 из [2], получим

$$\|f\|_{A_2} \sim \|If\|_{B^0_{p,r}} \sim \|f\|_{B^1_{p,r}(\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta})}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. В утверждениях а) – г) теоремы 1 верхний индекс слева и справа можно заменить на (−1). Доказательство аналогично доказательству утверждений а) – г).

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫМИ КЛАССАМИ

Рассмотрим специальный случай (проблема Трибеля), когда H и B в левой части утверждений теоремы 1 суть классические анизотропные пространства Соболева–Лиувилля и Никольского–Бесова с разными анизотропиями, т.е. соответствующие многогранники суть пирамиды. Многогранники анизотропных пространств не имеют вершин вне координатных осей. Нетрудно убедиться, что многогранники пространств справа в утверждениях теоремы 1 имеют вершины и вне координатных осей, т.е. эти пространства не являются классическими анизотропными пространствами. Таким образом, интерполируя между анизотропными пространствами разной анизотропии, мы получаем пространства, порожденные вполне правильным многогранником, который имеет вершины и вне координатных осей.

Представляет интерес и обратная задача. По всей вероятности задача представления пространств, порожденных вполне правильным многогранником, в виде интерполяционных пространств между анизотропными пространствами, в общем случае имеет отрицательный ответ.

Нам удается доказать формулы представления для $n = 2$. Оказывается, что в этом случае всякое H и B–пространство, порожденное вполне правильным многогранником, получается многократной интерполяцией между соответствующими анизотропными пространствами. Причем количество интерполяций равно числу вершин вне координатных осей порождающего многогранника.

Каждому утверждению теоремы 1 соответствует теорема представления. Поскольку, в первую очередь, нас интересует появление вершин вне координатных осей, воспользуемся только случаем в) при $p_0 = p_1 = p$ и $q_0 = q_1 = q$. Пусть задан вполне правильный многоугольник $\mathcal{N}$ в первом координатном углу координатной плоскости с вершинами $(0, s)$, $(m, 0)$, $r_1, ..., r_N$. Вершины $r_1, ..., r_N$ находятся вне координатных осей. Проведем из точки $(0, s)$ прямые, параллельные отрезкам $[(0, s); r_1]$, $[r_1; r_2]$, ... ,$[r_{N-1}; r_N]$, $[r_N; (m, 0)]$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ через $[\alpha, \beta]$ мы обозначили отрезок, соединяющий точки α и β. Обозначим точки пересечения этих прямых с осью абсцисс через $m_0 > m_1 > \cdots > m_N$. Тогда появляются $N+1$ треугольников, для которых одна вешина $(0, s)$, а вторая $(m_i, 0)$, $i = 0, 1, ..., N$. Обозначим эти треугольники через $\mathcal{N}_i$.

Будем рассматривать B–пространства с верхним индексом 1 и нижними индексами p и q. Обозначим через $B^N(\mathcal{N})$ начальное B–пространство, порожденное многоугольником $\mathcal{N}$. Через $B^0_{m_i}$ – классические анизотропные пространства, порожденные треугольниками $\mathcal{N}_i$, $i = 0, 1, ..., N$. Верхний индекс показывает отсутствие вершин вне координатных осей.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $n = 2$. *Справедлива следующая формула* *представления :*

$$B^{1}_{p,q} \equiv B^{N}(\mathcal{N}) = \left[B^{0}_{m_0}, \left[B^{0}_{m_1}, \cdots [B^{0}_{m_{N-1}}, B^{0}_{m_N},]_{\theta_N} \cdots\right]_{\theta_2}\right]_{\theta_1}, \tag{7}$$

где

$$r_i = (r^i_1, r^i_2), \quad i = 1, ..., N, \quad \theta_i = \frac{r^i_2}{r^{i-1}_2}, \quad i = 2, ..., N,$$

$$\theta_1 = \frac{r^1_2}{s}, \quad r^1_2 > r^2_2 > \cdots > r^N_2.$$

Доказательство. Многоугольники всех используемых пространств вложены один в другой, поэтому, интерполируя можно применять теорему 1. Доказательство проведем индукцией по N. При $N = 1$ (7) имеет вид

$$B^{1}(\mathcal{N}) = \left[B^{0}_{m_0}, B^{0}_{m_1},\right]_{r_2/s}, \quad r = (r_1, r_2). \tag{8}$$

Пространства $B^0_{m_i}$ $(i = 0, 1)$ – анизотропные пространства, порожденные функциями (см. определения 2, 3) $\mu_i(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^{2m_i} + \xi_2^{2s})^{1/2}$. Используя теорему 2 из [7], теорему П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [8]) и теорему 1, с помощью несложных вычислений получим (8). Заметим, что функция $\mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta}$ из теоремы 1 порождает две вершины вне осей координат, одна из которых не существенна (см. [8]). Пусть формула (7) верна для любого вполне правильного многоугольника с R вершинами вне осей координат. Пусть, далее, многоугольник $\mathcal{N}$ имеет $R+1$ вершин $r^1, ..., r^{R+1}$ вне координатных осей и две вершины $(0, s)$, $(m, 0)$ на осях. Докажем сначала, что

$$B^{R+1}(\mathcal{N}) = \left[B^{R}_{x'}, B^{R}_{x''},\right]_{\theta_{R+1}}, \quad \theta_{R+1} = \frac{r_2^{R+1}}{r_2^{R}}, \tag{9}$$

где $[r^R, (x'', 0)] \parallel [r^{R+1}, (m, 0)]$ и $[r^R, (x', 0)] \parallel [r^R, r^{R+1}]$. В формуле (9) пространства справа имеют многоугольники $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$ с вершинами $(0, s)$, $r^1, ..., r^R$, $(x', 0)$ и $(x'', 0)$, сооветственно, а слева – исходное пространство с многоугольником $\mathcal{N}$. Обозначим

$$\lambda(\xi) = \left(\xi_2^{2s} + \sum_{j=1}^{R} \xi^{2r^j}\right)^{1/2}.$$

По теореме 1 функция, порождающая пространство $[B^R_{x'}, B^R_{x''},]_{\theta_{R+1}}$, имеет вид

$$(\lambda^2(\xi) + \xi_1^{2x'})^{\frac{1-\theta_{R+1}}{2}} (\lambda^2(\xi) + \xi_1^{2x''})^{\frac{\theta_{R+1}}{2}}. \tag{10}$$

После некоторых вычислений, отбрасывая несущественные вершины (см. [8] и теорему 2 из [7]) приходим к формуле (9). Применяя (7) к пространствам $B^R_{x'}$ и $B^R_{x''}$ в (9), отсюда для $\theta_1 = \frac{r_2^1}{s}$ получим

$$B^{R+1}(\mathcal{N}) =$$

$$= \left[\left[B^0_{m_0}, \cdots, [B^0_{m_{R-1}}, B^0_{m_R},] \cdots\right]_{\theta_1}, \left[B^0_{m_0}, \cdots, [B^0_{m_{R-1}}, B^0_{m_{R+1}},] \cdots\right]_{\theta_1}\right]_{\theta_{R+1}}. \tag{11}$$

С помощью теоремы 1 нетрудно проверить, что

$$\left[[A, B]_{\eta_0}, [A, C]_{\eta_0}\right]_{\eta_1} = \left[A, [B, C]_{\eta_1}\right]_{\eta_0}, \tag{12}$$

где A, B, C – анизотропные пространства $B^0_{m_i}$ $(i = 0, 1, ..., R+1)$, $0 < \eta_0, \eta_1 < 1$. Применяя (12) к (11), придем к требуемой формуле представления для $R + 1$ вершин вне координатных осей. Теорема 2 доказана.

Аналогично, применяя другие утверждения теоремы 1, можно доказать и другие формулы представлений анизотропными классами.

Как уже отмечалось, формула (7) дает возможность характеризовать поведение любого линейного непрерывного оператора в пространствах, порожденных вполне правильным многоугольником. Точнее, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть в предположениях и обозначениях теоремы 2 линейный непрерывный оператор T таков, что $T : B^0_{m_i} \longmapsto B^0_{m_i}$ с нормой M_i $(i = 0, 1, ..., N)$. Тогда $T : B^N(\mathcal{N}) \longmapsto B^N(\mathcal{N})$ с нормой M, удовлетворяющей неравенству*

$$M \leq M_N^{r_2^N/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{N-1} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s}. \tag{13}$$

Доказательство. Докажем индукцией по N. При $N = 1$ неравенство (13) непосредственно следует из (8) и теоремы 4.1.2 из [9]. Пусть (13) выполняется для многоугольника с $N = R$ вершинами вне координатных осей. Согласно теореме 4.1.2 из [9] и предположению индукции из (11) имеем

$$M \leq \left(M_p^{r_2^R/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{R-1} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s} \right)^{1 - \frac{r_2^{R+1}}{r_2^R}} \times$$

$$\times \left(M_{R+1}^{r_2^R/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{R-1} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s} \right)^{\frac{r_2^{R+1}}{r_2^R}} =$$

$$= M_{R+1}^{r_2^{R+1}/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{R} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s}.$$

Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. In the paper we prove an interpolation theorem for the H– and B-spaces of type Sobolev–Liouville and Nikolski–Besov with differing anisotropies provided that one of the interpolation spaces imbedded into another. By means of classical anisotropic spaces on the plane we prove a representation formula for a space of generalized smoothness generated by completely regular polyhedron.

ЛИТЕРАТУРА

1. X. Трибель, Теория Функциональных Пространств, М., Мир, 1986.
2. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция некоторых функциональных пространств разной анизотропии", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 4, стр. 49 – 58, 1992.
3. В. П. Михайлов, "Поведение на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 – 81, 1967.
4. Л. В. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, т. 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
5. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Изв. АН АрмССР. Математика, т. 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
6. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", ДАН АрмССР. Математика, т. 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
7. А. Г. Багдасарян, "Теоремы вложения для некоторых обобщенных функциональных пространств", Изв. НАН Армении. Математика, т. 29, № 3, стр. 1 – 10, 1994.
8. П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, т. 152, № 4, стр. 808 – 811, 1963.
9. Й. Берг, Й. Лефстрем, Интерполяционные Пространства. Введение, М., Мир, 1980.
10. С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин, Теоремы Вложения и Приложения к Дифференциальным Уравнениям, Новосибирск, Наука, Сиб. отд., 1984.

1 сентября 1995

Ереванский государственный университет

ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОШИБОК АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Р. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996

В статье устанавливаются асимптотические представления для решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с параметром. Предполагается, что коэффициенты уравнений неограничены вблизи особой точки $t = 0$. Эти представления могут быть использованы к изучению некоторых уравнений математической физики таких, как уравнение Шрендингера и уравнение Чаплыгина. Некоторые теоремы, доказанные в данной работе, оценивают разность между точными и асимптотическими решениями, другие же описывают построение асимптотических решений. Результаты применяются к изучению корректности весовых начальных задач вблизи особой точки.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям, которые не могут решаться точно, однако допускают асимптотические решения. Например, для уравнения

$$u''(t) + q(t)\,u(t) = 0, \qquad t \in [0, T] \tag{0.1}$$

с общим $q(t)$ кроме тривиального других решений не найдено. Несмотря на это, нетрудно получить асимптотические решения. Действительно, полагая $q = 0$ в (0.1), получаем вспомогательное уравнение $u''(t) = 0$, общим решением которого является

$$u = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2,$$

где

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = t \tag{0.2}$$

Исследование, проведенное в данной работе, частично осуществилось благодаря Joint–Stock Company "Prometheus".

– фундаментальные решения. Хорошо известно, что если

$$q \in L_1([0,T]), \tag{0.3}$$

то общее решение уравнения (0.1) может быть представлено в виде

$$u(t) = (C_1 + \varepsilon_1(t))\,\varphi_1(t) + (C_2 + \varepsilon_2(t))\,\varphi_2(t), \qquad \lim_{t\to 0} \varepsilon_j(t) = 0, \quad j = 1,2. \tag{0.4}$$

Другими словами, функции (0.2) являются асимптотическими решениями (0.1). Функции ε_j называются функциями ошибок.

Если функция $q(t)$ имеет особенность в точке $t = 0$, то для уравнения (0.1) данные Коши $u(0)$, $u'(0)$ не имеют смысла. Например, если $q(t) = -2t^{-2}$, то $u = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$ с фудаментальными решениями $\psi_1 = t^{-1}$, $\psi_2 = t^2$. В более ранней работе [5] в таких случаях мы пользовались весовыми начальными данными в форме вронскианов. Проиллюстрируем это на примере (0.1).

Возьмем общее решение уравнения (0.1), написанное в терминах фундаментальных решений ψ_1, ψ_2 и произвольных констант C_1, C_2 :

$$u = C_2\psi_1 - C_1\psi_2, \qquad u' = C_2\psi_1' - C_1\psi_2'.$$

Решая эту систему, получаем

$$C_j = W(u,\psi_j)/W(\psi_1,\psi_2), \qquad j = 1,2. \tag{0.5}$$

Здесь $W(\psi_1,\psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1'$ – вронскиан. Если $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – асимптотические решения (0.1) такие, что

$$\partial_t^{k-1}\psi_j(t) = [1 + \varepsilon_j(t)]\,\partial_t^{k-1}\varphi_j(t), \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon_j(t) = 0, \quad k,j = 1,2, \tag{0.6}$$

то с необходимостью

$$\frac{W(u,\psi_j)}{W(\psi_1,\psi_2)} = \lim_{t\to 0}\frac{W(u,\varphi_j)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}, \quad j = 1,2,$$

и из (0.5) получаем

$$\lim_{t\to 0}\frac{W(u,\varphi_j)}{W(\varphi_1,\varphi_2)} = C_j, \quad j = 1,2. \tag{0.7}$$

Эти соотношения могут заменить начальные данные. Отношения в (0.7) назовем *вронскианными данными*. Так как всегда можно выбрать φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 так, чтобы $W(\psi_1, \psi_2) = W(\varphi_1, \varphi_2) = 1$, то из (0.7) получим

$$\lim_{t\to 0} W(u, \varphi_j) = C_j, \quad j = 1, 2.$$

Если условие (0.3) выполнено, то вронскианные данные для уравнения (0.1) превращаются в данные Коши. Таким образом, при отсутствии особенностей вронскианные данные обобщают обычные данные Коши.

Построение асимптотических решений обычно состоит из следующих шагов :

1) выбор подходящих пробных функций,

2) доказательство того, что разность точного решения и пробной функции мала в некоторой норме,

3) доказательство дифференцируемости асимптотического представления (ср. с (0.6)).

В настоящей работе мы применяем этот анализ к уравнению

$$Lu(t,\xi) = \sum_{k=0}^{m} q_{m-k}(t,\xi)\, \partial_t^k\, u(t,\xi) = 0, \quad q_0 = 1, \quad t \in]0, T[. \tag{0.8}$$

Основным методом является обобщение асимптотической теоремы Левинсона (теорема 2), которая оценивает функции ошибок для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с параметром. Мы применяем теорему 2 к сингулярным начальным задачам с вронскианными данными.

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы формулируем шесть теорем. Теорема 1 является теоремой единственности для (0.8) с вронскианными данными. Теорема 2 дает достаточный критерий для асимптотических решений. Теорема 3 является вариантом теоремы 2 для систем первого порядка. Теорема 4 является частным случаем теоремы 2 для дифференциальных уравнений второго порядка. Теорема 5 (Петровский) – хорошо известный необходимый и достаточный критерий корректности задачи Коши. Теорема 6 – асимптотический вариант теоремы 5.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lu(t,\xi) = 0, \qquad t \in]0, T[, \tag{1.1}$$

где L как в (0.8) ; относительно коэффициентов мы предполагаем, что

$$q_{m-k}(.,\xi) \in C(]0,T]), \qquad k = 0,\dots,m. \tag{1.2}$$

Для любого вещественного s обозначим через $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ обычное пространство Соболева с нормой

$$||v||_s = \{(2\pi)^{-n} \int (1+|\xi|^2)^s \, |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi\}^{1/2} = ||\widehat{v(\xi)}||_s, \tag{1.3}$$

где $\widehat{v}$ – x-преобразование Фурье функции $v(x)$:

$$\widehat{v}(\xi) = \int v(x^1,\dots,x^n) \exp(-ix\,\xi)\, dx^1 \dots dx^n, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Обозначим через $C^k(]0,T], H^p)$ пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений из $]0,T]$ в H^p, $H^\infty = \cap H^s$.

При заданных функциях

$$\varphi_j(.,\xi) \in C^m(]0,T]), \qquad j = 1,\dots m, \tag{1.5}$$

рассмотрим $m \times m$ матрицу

$$\Phi = (\partial_t^{k-1}\varphi_j)_{k,j=1}^m \tag{1.6}$$

и вронскиан

$$W(\varphi_1,\dots,\varphi_m) = W(\varphi) = \det \Phi. \tag{1.7}$$

Через Φ^{mj} обозначим миноры, полученные вычеркиванием из Φ m-ной строки j-го столбца.

Предположим, что функции φ_j выбраны таким образом, что

$$\int_0^T |W^{-1}(\varphi)\,\Phi^{mj}\, L\varphi_k|\, dt \le c_1 + c_2 \ln <\xi>, \qquad k,j = 1,\dots,m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

где c_i (j=1, 2) являются некоторыми неотрицательными постоянными, а $<\xi> = (9+|\xi|^2)^{1/2}$, $\qquad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$. Мы выбрали $<\xi>$ так, чтобы $\ln <\xi> \ge 1$. Рассмотрим начальную задачу (1.1) с вронскианными данными

$$\lim_{t\to 0} W(\varphi_1,\dots,\varphi_{j-1},u,\varphi_{j+1},\dots,\varphi_m)/W(\varphi) = g_j(\xi), \quad j = 1,\dots,m. \tag{1.9}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если условия (1.5), (1.8) выполнены, то в $C^m(]0,T])$ задача (1.1), (1.9) с $g_j \equiv 0$, $j = 1, ..., m$ имеет только тривиальное решение.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1.2), (1.5), (1.8). Тогда для любых $g_j \in L_2(\mathbb{R}^n)$ существует решение $u(t,\xi)$ уравнения (1.1), представимое в виде*

$$\partial_t^{k-1} u(t,\xi) = \sum_{j=1}^{m} g_j(\xi)\,[1 + \varepsilon_j(t,\xi)]\,\partial_t^{k-1}\varphi_j(t,\xi), \qquad k = 1,\dots,m, \tag{1.10}$$

$$\lim_{t\to 0} \|\varepsilon_j(t,.)\|_p = 0, \qquad j = 1,\dots,m, \quad \text{при некотором} \quad p \in \mathbb{R}, \tag{1.10'}$$

с оценками

$$|\varepsilon_j(t,\xi)| \le \sum_{p=1}^{m} |g_p(\xi)| \{-1 + \exp \int_0^t \sum_{k,j=1}^{m} |W^{-1}(\varphi)\Phi^{m_s} L\varphi_k|\, dt\}, \qquad j = 1,\dots,m \tag{1.11}$$

или в ослабленном виде

$$\|\varepsilon_j(t,\xi)\|_p \le c \sum_{j=1}^{m} \|g_j(\xi)\|_{p+c_2 m^2}, \qquad j = 1,\dots,m, \quad \text{при некотором} \quad p \in \mathbb{R}. \tag{1.11'}$$

Замечание 1. Если в (1.8) $c_2 = 0$, то соотношения (1.10) выполняются, но вместо (1.10′) имеем

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon_j(t,\xi) = 0, \qquad k,j = 1,\dots,m, \tag{1.10''}$$

равномерно по $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2 остается верной при замене полуинтервала $]0,T]$ в (1.1), (1.2), (1.5), (1.8) и (1.11) на $[T,\infty[$ и при замене $t \to 0$ в (1.10′), (1.10″) на $t \to \infty$.

Для $m \times m$ системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром ξ

$$v_t = A(t,\xi)\, v(t,\xi), \quad t \in]0,T[\tag{1.12}$$

имеется следующий вариант теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2 и матричная функция $\Psi(.,\xi) \in C^1(]0,T])$ такие, что*

$$(c_1 + c_2 \ln <\xi>)^{-1}\, \|\Psi^{-1}(A\Psi - \Psi_t)\|_M \in L_1([0,T]), \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

где $||.||_M$ *– норма матрицы. Если*

$$A(.,\xi) \in C(]0,T]), \tag{1.14}$$

то для любого $C(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *существует решение* $v(.,\xi)$ *системы (1.12), имеющее вид*

$$v(t) = \Psi(t,\xi)(C(\xi) + \varepsilon(t,\xi)), \tag{1.15}$$

где $C(\xi)$ *и* ε *–* m*-векторы, и для некоторого* p

$$\lim_{t\to 0} ||\varepsilon(t,\xi)||_p = 0. \tag{1.16}$$

Замечание 2. Если Ψ – матрица Коши системы $w_t = Bw$, где B не зависит от ξ, т. е. Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_t = B\Psi,$$

то условие (1.13) переходит в

$$||\Psi^{-1}(A - B)\,\Psi||_M \in L_1([0,T]). \tag{1.17}$$

Замечание 3. Если в качестве B выбрана диагональная часть A, т. е.

$$B = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}), \qquad A = ||a_{ij}||, \tag{1.18}$$

то из теоремы 3 (с $c_2 = 0$ в (1.13)) следует классическая теорема Н. Левинсона (см. теорему 3.1 в §3 или [2],[4]).

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$L_2u = [\partial_t^2 + q_1(t,\xi)\,\partial_t + q_2(t,\xi)]\,u(t,\xi) = 0, \quad t \in]0,T[, \quad q_i(\cdot,\xi) \in C^2(]0,T]), \tag{1.19}$$

получаем такое следствие теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть существуют неотрицательные постоянные* c_1, c_2 *и функции*

$$\varphi_1(.,\xi),\ \varphi_2(.,\xi) \in C^2(]0,T]) \tag{1.20}$$

такие, что для $k, j = 1, 2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\int_0^T ||W^{-1}(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_{3-j}\,L_2\varphi_k||\,dt =$$

$$= \int_0^T |\varphi_j^{-1}(\varphi_{1t}\varphi_1^{-1} - \varphi_{2t}\varphi_2^{-1})^{-1} L_2\varphi_k| dt \le c_1 + c_2 \ln < \xi > . \quad (1.21)$$

Тогда для любых $g_j(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$, существует решение $u(t,\xi)$ уравнения (1.19), имеющее вид (1.10), (1.10'), с $m = 2$.

Замечание 4. Если положить

$$\varphi_j(t,\xi) = \exp \int_T^t \sigma_j(t,\xi)\, dt, \quad j = 1, 2, \quad (1.22)$$

то условие (1.21) перейдет в

$$\int_0^T |\varphi_j^{-1}(\sigma_1 - \sigma_2)^{-1}\varphi_k(\sigma_{jt} + \sigma_j^2 + q_1\sigma_j + q_2)|\, dt \le c_1 + c_2 \ln < \xi > \quad (1.23)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k, j = 1, 2$.

Если вместо (1.22) взять

$$\varphi_1 = \exp \int_T^t \sigma(t,\xi) dt, \quad \varphi_2 = \varphi_1(t,\xi) \int_T^t \varphi_{2,1}(t,\xi) dt, \quad (1.24)$$

где $\varphi_{2,1}$ – решение начальной задачи

$$(\partial_t + 2\varphi_{1t}\varphi_1^{-1} + q_1)\varphi_{2,1}(t,.) = 0, \quad t \in]0,T[, \quad \varphi_{2,1}\,|_{t=T} = 1, \quad (1.25)$$

то

$$\varphi_1^{-1} L\varphi_1 = \varphi_2^{-1} L\varphi_2, \quad W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1^2\varphi_{21}. \quad (1.25')$$

Замечание 5. Пусть существует функция

$$\sigma(.,\xi) \in C^1(]0,T[) \quad (1.26)$$

такая, что для некоторых неотрицательных констант c_1, c_2

$$\int_0^T |\varphi_1^2(t)(\int_T^t (\varphi_{21}(\tau) d\tau)^s (\sigma_t + \sigma^2 + q_1\sigma + q_2)| dt \le c_1 + c_2 \ln < \xi >, \quad (1.27)$$

$s = 0, 1, 2$, $x \in R^n$. По теореме 4 существует решение $u(t,\xi)$ уравнения (1.19), имеющее вид (1.10), (1.10') с $m = 2$, где функции φ_1, φ_2 определены в (1.24).

Замечание 6. Если в уравнении (1.19) $q_1 = 0$, $q_2 = q > 0$ и в формуле (1.22) $\sigma_1 = iq^{1/2} - q_t/(4q)$, $\sigma_2 = -iq^{1/2} - q_t/(4q)$, то с помощью замечания 5 получаем хорошо известные (см. [4]) ВКБ–оценки (1.10),(1.10″) с $m = 2$. Действительно, для уравнения

$$u_{tt} + q(t,\xi)u(t,\xi) = 0, \tag{1.28}$$

где функции φ_1, φ_2 определены как

$$\varphi_1 = q^{-1/4}\exp\left\{i\int_T^t q^{1/2}\,dt\right\},\quad \varphi_2 = q^{-1/4}\exp\left\{-i\int_T^t q^{1/2}\,dt\right\}, \tag{1.29}$$

условия (1.21) (с $c_2 = 0$) принимают форму

$$q^{-1/4}(q^{-1/4})_{tt} \in L_1([0,T]). \tag{1.30}$$

Замечание 7. Если в (1.24)

$$\sigma = i(q - q_t^2q^{-2}/16)^{1/2}q_tq^{-1}/4,\quad S(t) = (-q^{-1/2}/2)_t = q_t/(4q^{3/2}), \tag{1.31}$$

то согласно замечанию 5 представления (1.10), (1.10″) имеют место, причем условия (1.27) принимают вид

$$\int_0^T |\,\varphi_1^2(t)\left(\int_T^t(\varphi_1^{-2}(y)\,dy\right)^k((S^2-1)^{1/2} - S)_t\,|\,dt \le c_1 + c_2\ln <\xi>,\quad k = 0,1,2. \tag{1.32}$$

Это следует из $\sigma_t + \sigma^2 + q(t) = q^{1/2}((S^2-1)^{1/2} - S)_t$.

Замечание 8. Если определить φ_1, φ_2 по (1.24), (1.31), то для уравнения (1.28) условия (1.27) принимают вид

$$\int_0^T |\varphi_j\varphi_k(\sigma_t + \sigma^2 + q|\,dt \le c_1 + c_2\ln <\xi>,\quad j,k = 1,2. \tag{1.33}$$

Если в (1.24)

$$\sigma(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \ldots + \alpha_n(t), \tag{1.34}$$

где α_j – решения уравнений первого порядка

$$\alpha_t(t)+q(t) = 0,\quad \alpha_j'(t)+\alpha_{j-1}^2(t)+2\alpha_j(t)\,[\alpha_1+\ldots+\alpha_{j-1}] = 0,\quad j = 2,\ldots,n, \tag{1.35}$$

то получаем

$$\sigma_t + \sigma^2 + q(t) = \alpha_n^2. \tag{1.36}$$

Замечание 9. Пусть для некоторого $n \geq 1$

$$\varphi_j \varphi_k \alpha_n^2 \in L_1([0,T]), \quad k, j = 1, \ldots, m, \tag{1.37}$$

где функции φ_j определены в (1.24), (1.34), (1.35). Тогда существует решение $u(.,\xi) \in C^2(]0,T])$ уравнения (1.28), которое может быть представлено в виде (1.10), (1.10″) с $m = 2$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных порядка m $(m \geq 2)$:

$$Lu = \partial_t^m u + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k\alpha}(t) \partial_t^k \partial_x^\alpha u(t,x) = 0, \quad t \in]0,T[, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.38}$$

где α – мультииндекс и

$$\partial_t = \partial/\partial_t, \quad \partial_x = (\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n). \tag{1.39}$$

Используя x-преобразование Фурье (1.4), из (1.38) получим обыкновенное дифференциальное уравнение (1.1) с

$$q_0 = 1, \quad q_{m-k}(t,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k\alpha}(t) i^{|\alpha|} \xi^\alpha. \tag{1.40}$$

Задача Коши

$$\partial_t^k u(0,x) = g_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \ldots, m-1 \tag{1.41}$$

для уравнения (1.38) называется хорошо поставленной или корректной, если для любого $g_k(x) \in H^\infty$ существует единственное решение $u \in C^m([0,T]), H^\infty)$ задачи (1.38), (1.41) и для любых $l, \varepsilon \geq 0$ существуют $p, \delta \geq 0$ такие, что из

$$\sum_{k=0}^{m-1} ||g_k(x)||_p \leq \delta \quad \text{следует} \quad \sum_{j=0}^{m-1} \max_{[0,T]} ||\partial_t^j u(t,x)||_l \leq \varepsilon.$$

Пусть $\{\psi_j(t,\xi)\}_{j=1}^m$ – фундаментальная система решений (1.1), (1.40).

Хорошо известна следующая теорема Петровского.

Теорема 5. *Задача Коши (1.38), (1.41) хорошо поставлена в том и только в том случае, когда существуют $c > 0$, $p \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$|\psi_j(t,\xi)| \leq c(1 + |\xi|^p), \quad j = 1, \ldots m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]. \tag{1.42}$$

Из теорем 2 и 5 следует

Теорема 6. *Пусть существуют функции $\{\varphi_j(t,\xi)\}_{j=1}^m$, удовлетворяющие условиям (1.2), (1.5) и (1.8). Условия*

$$|\varphi_j(t,\xi)| \le c(1+|\xi|^p), \quad j=1,\dots m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T] \tag{1.43}$$

являются необходимыми и достаточными для корректности задачи Коши (1.38), (1.41).

§2. НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЭНЕРГИИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\{\psi_j(t,\xi)\}_{j=1}^m$ – фундаментальная система решений уравнения (1.1). Тогда общее решение (1.1) имеет вид

$$u(t,\xi) = C_1(\xi)\psi_1(t,\xi) + \ldots + C_m(\xi)\psi_m(t,\xi), \tag{2.1}$$

где $C_j(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ – произвольные функции.

Дифференцируя (2.1) k раз по t ($k = 0,1,\dots,m-1$) и решая относительно $C_j(\xi)$, получим

$$C_j(\xi) = (1/W(\psi))\, W(\psi_1,\dots,\psi_{j-1},u,\psi_{j+1},\dots,\psi_m). \tag{2.2}$$

Неотрицательное выражение

$$\tilde{E}(t,\xi) = \sum_{j=1}^m |C_j(\xi)|^2 \tag{2.3}$$

назовем плотностью энергии.

Закон сохранения энергии $\partial_t \tilde{E} = 0$ следует из независимости $C_j(\xi)$ от времени.

Для произвольных $\varphi_j(.,\xi) \in C^m([0,T])$, $j = 1,\dots,m$, с $W(\varphi) \ne 0$ определим вспомогательные функции $u^j(t,\xi)$, $j=1,\dots,m$, положив

$$\partial_t^k u = u^j(t,\xi)\,\partial_t^k \varphi_j(t,\xi), \quad k=0,\dots,m-1, \tag{2.4}$$

где суммирование по $j=1,\dots,m$ выполнено. Ниже для φ_j мы выберем приближенные решения уравнения (1.1).

Из (2.4), используя (1.9), получим

$$u^j(t,\xi) = W(\varphi_1,\dots,\varphi_{j-1},u,\varphi_{j+1},\dots,\varphi_m)/W(\varphi)\},$$

$$u^j(t,\xi) = g_j(\xi) + o(1), \quad t \to 0, \quad j = 1,\dots,m. \tag{2.5}$$

Далее из (2.4) и (1.1) имеем

$$u_t^j(t,\xi)\partial_t^k\varphi_j(t,\xi) = 0, \quad k = 0,1,\dots,m-2,$$

$$u_t^j(t,\xi)\,\partial_t^{m-1}\varphi_j(t,\xi) = -u^j(t,\xi)L\varphi_j(t,\xi), \quad j = 1,\dots,m \tag{2.6}$$

и

$$\partial_t u^j(t,\xi) = -u^k(t,\xi)\,\phi^{mj}L\varphi_k/W(\varphi), \quad j = 1,\dots,m, \tag{2.7}$$

где Φ^{mj} – миноры матрицы Φ.

Умножая (2.7) на $\bar{u^j}$ и прибавляя комплексно сопряженное выражение, получим

$$\partial_t E(t,\xi) \leq cK(t,\xi)E(t,\xi), \tag{2.8}$$

где

$$K(t,\xi) = \sum_{k,j=1}^{m} |W^{-1}(\varphi)\Phi^{mj}L\varphi_k|, \quad E(t,\xi) = \sum_{j=1}^{m}|u^j(t,\xi)|^2. \tag{2.9}$$

Здесь E – плотность приближенной энергии, рассмотренная в работе [6]. Используя неравенство Гронуолла, из (2.8) получим основную энергетическую оценку

$$E(t,\xi) \leq E(0,\xi)\exp\{c\int_0^t K(\tau,\xi)\,d\tau\}. \tag{2.10}$$

С учетом (1.8), (2.5) и $E(0,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{m}|g_j|^2$ отсюда следует теорема 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2 И 3

Напомним асимптотическую теорему Левинсона. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(t) = [R(t) + B(t)]y(t), \quad t \in]0,T[, \tag{3.1}$$

где $R(t) = \mathrm{diag}\{r_1(t),\dots,r_m(t)\}$ – диагональная матрица. Пусть $R(t)$ и $B(t)$ – $m \times m$ матрицы и

$$R(t), \quad B(t) \in C(]0,T]). \tag{3.2}$$

Если $B(t) = 0$, то (3.1) имеет систему решений

$$y_j(t) = \exp\int_T^t r_j(s)\,ds, \quad j = 1,\dots,m. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1 (Левинсон). *Пусть выполнены следующие условия :*

1) $\int_0^T |||B(s)||\, ds < \infty$,

2) *для любых фиксированных* j *и* $k = 1, \dots, m$, $Re\{r_j(s) - r_k(s)\}$ *не меняют знака при* $s \in]0, T]$. *Тогда система (3.1) имеет решения* $y_j(t)$, $\quad j = 1, \dots, m$ *такие, что*

$$y_{jk}(t) = (\delta_{jk}(t) + \epsilon_{jk}(t)) \exp \int_T^t r_j(s)\, ds, \tag{3.4}$$

$$\lim_{t \to 0} \epsilon_{kj}(t) = 0, \quad k, j = 1, \dots, m. \tag{3.4'}$$

Доказательство теоремы 2. Преобразуем (1.1) к виду

$$v_t + Av = 0, \quad t \in]0, T[, \tag{3.5}$$

где

$$v = \mathrm{colon}(u, u_t, \dots, \partial_t^{m-1} u), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_m & \dots & q_2 & \dots & q_1 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$v = \Phi w, \tag{3.6}$$

из (3.5) получим систему

$$w_t + Gw = 0, \quad t \in]0, T[, \tag{3.7}$$

где $G = \Phi^{-1}(A\Phi + \Phi_t)$. Прямыми вычислениями получим

$$G_{kj} = \Phi^{mj} L\varphi_k / (W(\varphi), \quad k, j = 1, \dots, m. \tag{3.8}$$

Применяя к системе (3.7) теорему 3.1 с $R = 0$, $B = -G$, с учетом (1.8) ($c_2 = 0$) получим

$$w_{kj} = \delta_{kj} + \epsilon_{kj}(t, \xi), \quad k, j = 1, \dots, m, \tag{3.9}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, а

$$\epsilon_{kj} \to 0, \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{3.10}$$

Возвращаясь к предыдущим переменным (3.6), получаем (1.10), (1.10″).

Докажем оценки (1.11). Интегрируя (2.7) по $[0,t]$, получим

$$u^j(t,\xi) = g_j(\xi) - \int_0^t W^{-1}(\varphi)u^k(\tau,\xi)\phi^{mj}L\varphi_k(\tau,\xi)\,d\tau, \quad j=1,\ldots,m \tag{3.11}$$

или

$$|u^j(t,\xi)| \le |g_j(\xi)| + \int_0^t |W^{-1}(\varphi)u^k(\tau,\xi)\,\phi^{mj}\,L\varphi_k(\tau,\xi)|\,d\tau, \quad j=1,\ldots,m.$$

Суммируя эти оценки, получим

$$U(t,\xi) \le G(\xi) + \int_0^t K(\tau,\xi)\,U(\tau,\xi)\,d\tau, \tag{3.12}$$

где

$$U(t,\xi) = \sum_{j=1}^m |u^j(t,\xi)|, \quad G(\xi) = \sum_{j=1}^m |g_j(\xi)|,$$

$$K(\tau,\xi) = \sum_{k,j=1}^m |W^{-1}(\varphi)\phi^{mj}\,L\varphi_k(\tau,\xi)|.$$

Согласно лемме Гронуолла, из (3.12) имеем

$$U(t,\xi) \le G(\xi)\exp\int_0^t K(\tau,\xi)\,d\tau. \tag{3.13}$$

Для $\varepsilon_j(t,\xi) = u^j(t,\xi) - g_j(\xi), \quad j=1,\ldots,m$, с учетом (3.11), (3.13), получим

$$|\varepsilon_j(t,\xi)| \le \int_0^t |W^{-1}(\varphi)\,u^k(\tau,\xi)\Phi^{mj}\,L\varphi_k(\tau,\xi)\,|\,d\tau \le \int_0^t K(\tau,\xi))U(\tau,\xi)\,d\tau \le$$

$$\le G(\xi)\int_0^t K(\tau,\xi)\left\{\exp\int_0^\tau K(y,\xi)\,dy\right\}d\tau \le G(\xi)\left[-1+\exp\int_0^t K(\tau,\xi)\,d\tau\right].$$

Оценки (1.11) доказаны. Выражения (1.10), (1.10′) можно получить аналогичным образом, после того, как мы заметим, что используя теорему Лебега из (1.8) $c_2 = 0$, (1.11) можно получить (1.10′).

Из (1.8) получаем $\exp\int_0^t K(\tau,\xi)\,d\tau \le c < \xi >^{m^2 c_2}$, а из (1.11) следуют оценки (1.11′).

Доказательство теоремы 3. Положив

$$v = \Psi w, \tag{3.14}$$

из (1.12) получаем систему уравнений

$$w_t = \Psi^{-1}(A\Psi - \Psi_t)w. \tag{3.15}$$

Применяя теорему 3.1 к (3.15), получаем теорему 3.

§4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка m :

$$\partial_t^m y(t) + \sum_{j=1}^{m} q_j(t)\, \partial_t^{m-j}\, y(t) = 0. \tag{4.1}$$

Пусть p_j $(j = 1, \ldots, m)$ – корни характеристического уравнения

$$l(t,p) = p^m + \sum_{j=1}^{m} q_j(t) p^j = 0. \tag{4.2}$$

Определим функции φ_j следующим образом (см. [4]) :

$$\varphi_j = \exp \int_T^t \sigma_j(s)\, ds, \quad \sigma_j(s) = p_j(s) - \sum_{j=1}^{m} \frac{p'(s)}{p_j(s) - p_k(s)}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.3}$$

В предположениях (1.8) теоремы 2 существуют решения уравнения (4.1), имеющие вид (1.10), (1.10″).

Пример 2. Пусть в уравнении (1.28)

$$q(t,\xi) = \beta t^{\varepsilon-2}. \tag{4.4}$$

Случай 1 : $\varepsilon < 0$, $\beta > 0$. В этом случае условие (1.30) выполнено и можно получить асимптотические решения с помощью ВКБ-оценок (см. замечание 6).

Случай 2 : $\varepsilon = 0$. (уравнение Эйлера). В этом случае точные решения имеют вид t^{λ}.

Случай 3 : $\varepsilon > 0$. Если в (1.24), (1.34) выбрать

$$\alpha_1(t) = \beta(1-\varepsilon)^{-1}\, t^{\varepsilon-1}, \quad \varepsilon \neq 1,$$

$$\alpha_1(t) = -\beta \ln t, \quad \varepsilon = 1, \tag{4.5}$$

то из (1.35) получим выражения

$$\alpha_{k+1}(t) \sim t^{2^k\varepsilon-1}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.6}$$

Если $\varepsilon \geq 2^{-n}$, то условия (1.37) выполнены и можно применить замечание 9.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (1.19) с $q = |\xi|^2 + \alpha(t)$, т.е.

$$[\partial_t^2 + |\xi|^2 + \alpha(t)]\widehat{u}(t,\xi) = 0, \quad t \in]0,T[. \tag{4.7}$$

Полагая

$$\sigma_{1,2} = \pm i \mid \xi \mid + \beta(t), \tag{4.8}$$

из условия (1.23) ($c_2 = 0$) получим

$$\varphi_j^{-1}\varphi_k \left\{\beta + \frac{1}{2i|\xi|}(\beta_t + \alpha + \beta^2)\right\} \in L_1([0,T]), \quad k,j = 1,2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.9}$$

или

$$\beta, \quad \beta_t + \beta^2 + \alpha \in L_1([0,T]). \tag{4.10}$$

Пусть

$$\beta(t) = \alpha_1(t) + \ldots + \alpha_n(t), \tag{4.11}$$

где α_n определены в (1.35).

В случае

$$\alpha = t^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2, \tag{4.12}$$

из (1.35) получим

$$\alpha_1 = (\gamma - 1)^{-1} t^{1-\gamma}, \quad \alpha_r \sim t\alpha_{r-1}^2 \sim t^w, \quad w = 2^r - 1 - 2^{r-1}\gamma. \tag{4.13}$$

Из (4.13) следуют условия (1.37) замечания 9 :

$$\alpha_n^2 \in L_1([0,T]), \quad \text{при} \quad 0 < \gamma < 2. \tag{4.14}$$

Из замечания 9 следует

Утверждение 1. *Пусть выполнено условие (4.14). Тогда для решений и уравнения (4.7) справедливы представления (1.10), (1.10″) (с $m = 2$), где функции φ_j определены в (1.22), (4.8), (4.11), (1.35).*

Пример 4. Рассмотрим радиальное уравнение Шредингера

$$L\psi = [\partial_r^2 + k^2 - V(r)]\psi = 0 \tag{4.15}$$

с обобщенным колумбовым потенциалом

$$V = \rho_0 r^{-2} + \rho_1 r^{-5/3} + \rho_2 r^{-4/3} + \rho_3 r^{-1} + \rho_4 r^{-2/3} + \rho_5 r^{-1/3},$$

$$\rho_0 = l(l+1), \quad l \geq 0.$$

Случай 1 : $r \to 0$. Будем искать приближенные решения уравнения (4.15) в виде

$$\varphi_1 = r^{\alpha_1}\mu_1(r)\exp(ikr), \quad \varphi_2 = r^{\alpha_2}\mu_2(r)\exp(-ikr), \tag{4.16}$$

$$\mu_1 = 1 + \beta_1 r^{1/3} + \beta_2 r^{2/3} + \beta_3 r + \ldots + \beta_s r^{s/3},$$

$$\mu_2 = 1 + \gamma_1 r^{1/3} + \gamma_2 r^{2/3} + \gamma_3 r + \gamma_4 r^{4/3} + \ldots + \gamma_s r^{s/3}.$$

Коэффициенты σ_j и m_j определим из выражений

$$\mu_1^{-1}\mu_1' = \sigma_0 r^{-2/3} + \sigma_1 r^{-1/3} + \sigma_2 + \sigma 3 r^{1/3} + \ldots, \quad \sigma_0 = \beta_1/3,$$

$$\mu_1^{-1}\mu_1'' = m_0 r^{-5/3} + m_1 r^{-4/3} + m_2 r^{-1} + \ldots, \quad m_0 = -2\beta_1/9. \tag{4.17}$$

Прямыми вычислениями получим

$$\varphi_1^{-1} L\varphi_1 = (\alpha^2 - \alpha - \rho_0)r^{-2} + (2\alpha\sigma_0 + m_0 - \rho_1)r^{-5/3} +$$

$$+ (2\alpha\sigma_1 + m_1 - \rho_2)r^{-4/3} + \ldots + br^{(s-6)/3} + 0(r^{(s-5)/3}). \tag{4.18}$$

Выберем α, β_j, $j = 1, \ldots, s$ так, чтобы коэффициенты степеней r уравнялись нулю. Тогда получим

$$\alpha_1 = l+1, \quad \alpha_2 = -l, \quad \beta_1 = \frac{9\rho_1}{2(3\alpha - 1)}. \tag{4.19}$$

Имеем также

$$W(\varphi_2, \varphi_1) = \varphi_1\varphi_2[(\alpha_1 - \alpha_2)/r + 2ik + (\ln(\mu_1/\mu_2))'] = 1 + 0(r^{1/3}), \quad r \to 0,$$

$$W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_k L\varphi_j \leq cr^{-2l+(s-5)/3} \in L_1([0,1]), \quad k, j = 1, 2, \tag{4.20}$$

если $s > 6l + 2$.

Случай 2 : $k > 0$, $r \to \infty$. Приближенные решения уравнения (4.15) выберем в виде

$$\varphi_{1,2} = \exp\left\{\pm i \int \{k^2 - V_1\}^{1/2}\, dr\right\}, \quad V_1(r) = \rho_3/r + \rho_4/r^{2/3} + \rho_5/r^{1/3}. \tag{4.21}$$

Из условия $k > 0$ следует существование R такого, что $k^2 - V_1 > 0$ при $r > R$.

Имеем

$$W(\varphi_2, \varphi_1) = 2i\{k^2 - V_1\}^{1/2} = 0(1); \quad \varphi_1, \varphi_2 = O(1), \quad r \to \infty,$$

$$W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_k L\varphi_j = O(r^{-4/3}) \in L_1[1, \infty), \quad k, j = 1, 2.$$

Случай 3 : $k = 0$, $\rho_5 < 0$, $r \to \infty$. Приближенные решения уравнения (4.15) выберем в виде

$$\varphi_{1,2} = V_2^{-1/4} \exp \pm i \left\{ \int V_2^{1/2}(r)\, dr \right\}, \quad V_2 = -\rho_3/r - \rho_4/r^{2/3} - \rho_5/r^{1/3}, \quad (4.22)$$

$$W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_k L\varphi_j = O(r^{-7/6}) \in L_1[1, \infty), \quad k, j = 1, 2.$$

Для общего решения ψ уравнения (4.15) будем иметь

$$\partial_t^k \psi = [C_1 + o(1)]\partial_r^k \varphi_1 + [C_2 + o(1)]\partial_r^k \varphi_2, \quad r \to 0 \quad \text{или} \quad r \to \infty, \quad k = 0, 1, \quad (4.23)$$

где φ_1, φ_2 определены в (4.16), (4.21), (4.22).

Отметим, что в случае $k = 0$, $\rho_5 > 0$, $r \to \infty$ условия теоремы 2 выполнены и представления (4.23) с асимптотическими решениями (4.22) могут быть доказаны только для $k = 0$ ([3]).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Чаплыгина ([1])

$$F_{\theta\theta} - \frac{1 - ev^2c^{-2}}{c^{-2} - v^{-2}} F_{vv} + vF_v = 0, \quad e = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (4.24)$$

или

$$F_{vv} - \lambda^2 F_{\theta\theta} - v\lambda^2 F_v = 0,$$

где

$$\lambda = \sigma(v - c)^{1/2}c^{-3/2}, \quad \sigma = v^{-1}c^{3/2}(c + v)^{1/2}(c^2 - ev^2)^{-1/2}.$$

Мы хотим найти асимптотические решения уравнения (4.24) вблизи сингулярной гиперплоскости $v = c$. Подставляя

$$F = a(v)u(v, \theta), \quad (4.25)$$

получим уравнение

$$u_{vv} - \lambda^2 u_{\theta\theta} + \left(\frac{2a_v}{a} - v\lambda^2\right) u_v + \left(\frac{a_{vv}}{a} - v\lambda^2 \frac{a_v}{a}\right) u = 0.$$

Выбирая

$$a = \exp\left[\frac{1}{2}\int_c^v v\lambda^2(v)\,dv\right] \tag{4.26}$$

и применяя преобразование Фурье

$$\hat{u}(v,\xi) = \int \exp(-i\theta\xi)u(v,\theta)d\theta,$$

получим уравнение

$$\hat{u}_{vv} + (\xi^2\lambda^2 + 2^{-1}(v\lambda^2)_v - 2^{-2}v^2\lambda^4)\hat{u} = 0. \tag{4.27}$$

Преобразование

$$\hat{u} = z(\tau)\{|\xi|\lambda(v)\}^{1/2}, \quad \tau = |\xi|\int_c^v \lambda(v)dv \tag{4.28}$$

дает

$$P_1 z = z_{\tau\tau} + (1 + \beta\tau^{-2})z(\tau) = 0, \tag{4.29}$$

где

$$\beta = [1/2 + v\lambda_v/\lambda - v^2\lambda^2/4 + 4^{-1}\lambda^{-4}(3\lambda_v^2 - 2\lambda\lambda_{vv})]\left[\int_c^v \lambda(v)\,dv\right]^2. \tag{4.30}$$

Будем искать асимптотические решения уравнения (4.29) вблизи особых точек $\tau = 0$, $\tau = \infty$. Обозначая $x = \dfrac{v}{c} - 1$, получаем

$$\lambda = x^{1/2}\sigma c^{-1}, \quad \sigma = (x+1)^{-1}(x+2)^{1/2}[1 - e(x+1)^2]^{-1/2}.$$

Вблизи $x = 0$ имеем

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \sigma_3 x^3 + \ldots,$$

где

$$\sigma_0 = 2^{1/2}(1-e)^{-1/2} = (\gamma+1)^{1/2}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{e}{1-e} - \frac{3}{4} = \frac{\gamma - 1}{2} - \frac{3}{4},$$

и т.д. Определим $\rho_0, \rho_1, \ldots$ из соотношений

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{1}{2x} + \frac{\sigma_x}{\sigma} = \frac{1}{2x} + \rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + O(x^3),$$

где

$$\rho_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma} = (\gamma-1)/2 - 3/4, \quad \rho_1 = \frac{2\sigma_2}{\sigma_0} - (\sigma_1/\sigma_0)^2 = \frac{5}{4}(\gamma-1)^2 + \frac{\gamma-1}{4} + \frac{37}{16}$$

и т.д. Из (4.28) получим

$$\tau = 2x^{3/2}|\xi|\{\sigma_0/3 + x\sigma_1/5 + \ldots\} = 2|\xi|\left(\frac{v}{c} - 1\right)^{3/2}[(\gamma+1)/3]^{1/2}$$

и

$$x = \frac{v}{c} - 1 = [3\tau|\xi|^{-1}(\gamma+1)^{-1/2}]^{2/3}2^{-2/3}.$$

Определим $k_0, k_1, \ldots$ из соотношений

$$\left[\int_c^v \lambda(v)\,dv\right]^2 \lambda^{-2} = 4c^2x^2(k_0 + k_1x + O(x^2)).$$

Отсюда имеем

$$k_0 = 1/9, \quad k_1 = \frac{1}{15} - \frac{\sigma_2}{9\sigma_0} = -\frac{(\gamma-1)^3}{12} + \frac{11}{72}(\gamma-1)^2 - \frac{97}{720}(\gamma-1) + \frac{67}{480},$$

$$\frac{3\lambda_v^2}{4\lambda^2} - \frac{\lambda_{vv}}{2\lambda}\left(\int_c^v \lambda(s)ds\right)^2\lambda^{-2} =$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{48}\left[\frac{7}{8} - \frac{13}{12}(\gamma-1) + \frac{11}{6}(\gamma-1)^2 - (\gamma-1)^3\right]x + O(x^2).$$

Представляя (4.30) в виде

$$\beta = \beta_0 + \beta_1\tau^{1/3} + \beta_2\tau^{2/3} + +O(\tau),$$

находим

$$\beta_0 = 5/36, \quad \beta_1 = 0,$$

$$\beta_2 = \frac{5}{48}\left[\frac{7}{8} - \frac{13}{12}(\gamma-1) + \frac{11}{6}(\gamma-1)^2 - (\gamma-1)^3\right]\left[3|\xi|^{-1}(\gamma+1)^{-1/2}2^{-1}\right]^{2/3}.$$

Решение z уравнения (4.29) будем искать в виде

$$z_1 = \tau^{\gamma_1} + m_1\tau^{\alpha_1} + m_2\tau^{\alpha_2} + 0(\tau^{\alpha_3}), \quad z_2 = \tau^{\gamma_2}. \tag{4.31}$$

Для малых τ подстановка (4.31) в (4.29) и выбор

$$\gamma(\gamma-1) + \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = \gamma_1 + 1/3, \quad \alpha_2 = \gamma_1 + 2/3, \quad m_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j(1-\alpha_j)}, \quad j = 1, 2$$

или

$$\gamma_1 = 1/6, \quad \gamma_2 = 5/6, \quad \alpha_1 = 1/2, \quad \alpha_2 = 5/6,$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2(1-\alpha_2)} = \frac{36}{5}\beta_2$$

дает

$$P_1 z_1 = [\gamma_1(\gamma_1 - 1 + \beta_0)\tau^{\gamma_1 - 2} + \tau^{\alpha_1 - 2}[m_1\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \beta_1] +$$

$$+\tau^{\alpha_2 - 2}[m_2\alpha_2(\alpha_2 - 1) + \beta_2] + \beta_3\tau^{\gamma_1 - 1} + \ldots = O(\tau^{\gamma_1 - 1})$$

или

$$z_1 P_1 z_1 = O(\tau^{2\gamma_1 - 1}), \quad z_2 P_1 z_2 = O(\tau^{2\gamma_2 - 1}).$$

С учетом того, что $\gamma_1 > 0$, $2\gamma_2 > 1$, получаем оценки для функций ошибок :

$$\int_0^1 |z_j P_1 z_k|\, d\tau < \infty, \quad k, j = 1, 2.$$

Применяя теорему 2, получаем

$$z = \begin{cases} [C_1 \exp(i\tau) + C_2 \exp(-i\tau)](1 + o(1)), & \tau \to \infty, \quad \tau \ \text{– вещественно}, \\ [C_3(\tau^{1/6} + m_2\tau^{\alpha_2}) + C_4\tau^{5/6}](1 + o(1)), & \tau \to 0, \quad \tau \ \text{– вещественно}, \\ C_5(1 + o(1)) \exp(-i\tau), & |\tau| \to \infty, \quad Re(i\tau) > 0 \end{cases}$$

или в предыдущих переменных

$$\hat{u} = \begin{cases} (C_1\psi_1 + C_2\psi_2)(1 + o(1)), & \tau \geq N \to \infty, \quad v > c, \\ (C_3\psi_3 + C_4\psi_4)(1 + o(1)), & \tau \leq N \to 0, \quad v > c, \\ C_5(1 + o(1))\psi_5, & \tau \geq N \to \infty, \quad c > v, \end{cases}$$

где

$$\psi_{1,2} = \{|\xi|\lambda(v)\}^{-1/2} \exp\left\{\pm i|\xi| \int_c^v \lambda(s)\, ds\right\}, \quad \psi_4 = |\xi|^{1/3}\lambda^{-1/2}\left(\int_c^v \lambda(s)\, ds\right)^{5/6},$$

$$\psi_3 = \{|\xi|\lambda(v)\}^{-1/2}\left(|\xi| \int_c^v \lambda(s)\, ds\right)^{1/6}\left[1 + \nu\left(\int_c^v \lambda(s)\, ds\right)^{2/3}\right],$$

$$\nu = (\gamma + 1)^{-1/3} 3^{5/3} 2^{-8/3}\left[\frac{7}{8} - \frac{13}{12}(\gamma - 1) + \frac{11}{6}(\gamma - 1)^2 - (\gamma - 1)^3\right].$$

Если $\gamma = 1$, то $\nu = 3^{5/3}2^{-6}7$ и

$$\psi_5 = (|\xi|\mu)^{-1/2} \exp\left\{-|\xi| \int_v^c \mu(s) ds\right\}, \quad \mu = \frac{1}{v}(c^2 - v^2)^{1/2}(c^2 - ev^2)^{-1/2}.$$

Отметим, что если $\mathrm{Re}\mu > 0$, то $\mu = i\lambda$.

Используя асимптотическое поведение λ, имеем

$$\lambda = (\gamma + 1)^{1/2} c^{-3/2}(v - c)^{1/2}, \quad \int_c^v \lambda(s)\, ds = 2 3^{-1}(\gamma + 1)^{1/2} c^{-3/2}(v - c)^{3/2},$$

и получаем асимптотическое представление для решений уравнения Чаплыгина :

$$\hat{u} = \begin{cases} [1+o(1)]|\xi|^{-1/2}(v-c)^{-1/4}\{C_1 \exp[\frac{2i|\xi|}{3}(\gamma+1)^{1/2}(v-c)^{3/2}c^{-3/2}\} + C_2 \times \\ \times \exp[\frac{-2i|\xi|}{3}(\gamma+1)^{1/2}(v-c)^{3/2}c^{-3/2}\}, \quad \text{если} \quad v > c, \quad |\xi|(v-c)^{3/2} \to \infty, \\ (1+o(1))\{C_3|\xi|^{-1/3}[1+\nu_1(v-c)^{3/2}] + C_4(v-c)|\xi|^{1/3}\}, \\ \text{если} \quad v > c, \quad |\xi|(v-c)^{3/2} \to 0, \\ (1+o(1))C_5|\xi|^{-1/2}(c-v)^{-1/4}\exp[\frac{-2i|\xi|}{3}(\gamma+1)^{1/2}(c-v)^{3/2}c^{-3/2}\}, \\ \text{если} \quad c > v \quad |\xi|(c-v)^{3/2} \to \infty \end{cases}$$

$$\nu_1 = (\gamma+1)^{1/6}3^{2/3}2^{-5/3}c^{-3/2}\left[\frac{7}{8} - \frac{13}{2}(\gamma-1) + \frac{11}{6}(\gamma-1)^2 - (\gamma-1)^3\right].$$

ABSTRACT. The paper establishes asymptotic representations for solutions of ordinary linear differential equations depending on a parameter. It is assumed that the coefficients of the equations are unbounded near a singular point $t = 0$. The representations can be used in the study of some equations of mathematical physics, like Schrödinger equation and Chaplygin equation. Some of the theorems proved in this paper estimate the difference between exact and asymptotic solutions while others describe the construction of asymptotic solutions. Applications to the study of correctness of weighted initial value problems near a singular point are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, В. М. Лифшиц, Гидродинамика, М., Наука, 1988.
2. N. Levinson, "The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations," Duke Math. J., vol. 15, pp. 111 — 126, 1948.
3. Ph. Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley, New-York, 1964.
4. М. В. Федорюк, Асимптотические Методы для Линейных Дифференциальных Уравнений, М., Наука, 1983.
5. Г. Р. Оганесян, "ВКБ–оценки дифференциальных уравнений в частных производных и задача Коши для гиперболических уравнений второго порядка", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 25, № 2, стр. 123 — 134, 1990.
6. Г. Р. Оганесян, "Единственность решения весовой задачи Коши и новая формула для энергии", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 26, № 5, стр. 376 – 386, 1991.
7. И. Г. Петровский, Избранные Статьи. Системы Дифференциальных Уравнений в Частных Производных. Алгебраическая Геометрия, М., Наука, 1986.

20 октября 1995

Институт математики
НАН Армении

О КОММУТАТИВНОСТИ ОБРАЗА A–ЗНАЧНОЙ АНАЛИТИЧСКОЙ ФУНКЦИИ

М. И. Караханян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996

Пусть $BL(H)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H. Н. Глобевник и И. Видов показали, что если множество значений операторнозначной аналитической функции f, определенной в области $D \subset \mathbf{C}$ со значением в алгебре $BL(H)$ состоит из нормальных операторов, то его образ $f(D)$ есть коммутативное подмножество в алгебре $BL(H)$. В настоящей работе существенно усилен этот результат.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $BL(H)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H. Н. Глобевник и И. Видов показали, что если множество значений операторнозначной аналитической функции f, определенной в области $D \subset \mathbf{C}$ со значением в алгебре $BL(H)$ состоит из нормальных операторов, то его образ $f(D)$ есть коммутативное подмножество в алгебре $BL(H)$. В дальнейшем Флеминг и Джемисон в [2] обобщили этот реизультат на случай банаховых алгебр. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей $\mathbf{1}$. Напомним, что элемент $h \in A$ называется эрмитовым, если $\|\exp(ith)\| = 1$ для всех вещественных чисел $t \in \mathbb{R}^1$. Это условие равносильно тому, что числовой образ

$$V(h) = \{\varphi(h): \quad \varphi \in A^*, \|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1\} \subset \mathbb{R}^1.$$

Множество всех эрмитовых элементов алгебры A обозначим через $H(A)$. Отметим, что элемент $a \in A$ называется эрмитов разложимым, если $a = h + ik$, где $h, k \in H(A)$. Если коммутатор $[h,k] = hk - kh = 0$, то элемент a называется нормальным. Легко видеть, что для каждого элемента $a \in A$ имеем $\mathrm{Sp}(a) \subset V(a)$ и, в частности, если элемент $a \in A$ нормален, то $\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(a)) = V(a)$, где $\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(a))$ – выпуклая оболочка спектра $\mathrm{Sp}(a)$ элемента a (более подробно см. [3]).

Напомним, что (см. [4], [5]) элемент $h \in A$ называется квазиэрмитовым, если $\|\exp(ith)\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^1$. Это условие обеспечиввае, чтобы спектр лежал на числовой оси $\mathbb{R}^1$, однако числовой образ $V(h)$ не обязан лежать на числовой оси. Если $a = h + ik$, где $[h, k] = 0$, и элементы h, k – квазиэрмитовы в A, то a называется квазинормальным. Вышеуказанное свойство между спектром элемента $a \in A$ и его числовым образом было бы интересно проследить и для квазинормальных элементов.

В настоящей работе, исходя из позиций работ [4 — 6], будут существенно усилены результаты работ [1], [2].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе будут получены некоторые результаты, которые имеют самостоятельный интерес и будут использованы в следующем параграфе. Целая функция $\omega(z)$, $z \in \mathbf{C}$ конечной степени принадлежит классу Полиа $\mathcal{P}$, если $\omega(z)$ не имеет нулей в открытой полуплоскости $\Im(z) < 0$ и при $\Im(z) < 0$ имеет место неравенство $|\omega(z)| > |\omega(\bar{z})|$. Функция $\omega(z) \in \mathcal{P}$ называется $\mathcal{P}$–майорантой для целой функции конечной степени $f(z)$, если степень $\omega(z)$ не меньше, чем степень $f(z)$ и $|f(x)| \le |\omega(x)|$ при $-\infty < x \le \infty$, где $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Для дальнейшего нам понадобится следующая важная теорема, являющаяся обобщением теорем Бернштейна (см. [7], [8]) :

Если степень $\omega(z) \in \mathcal{P}$ не меньше степени $f(z)$, $|f(x)| \le |\omega(x)|$, где $x \in \mathbb{R}^1$, то $|f^{(p)}(x)| \le |\omega^{(p)}(x)|$; если функция $\omega(x)$ не есть многочлен и для какой–нибудь точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ выполняется неравенство $|f^{(p)}(x_0)| \le |\omega^{(p)}(x_0)|$, то $f(x) = c_1\omega(x) + c_2\overline{\omega}(x)$, где $|c_1| + |c_2| = 1$.

Пусть $\hat{a} = (a_n)_1^\infty$ есть такая последовательность элементов банаховой алгебры A, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \rho_a < \infty. \tag{1}$$

Тогда функция $\mathcal{A}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n z^n}{n!}$ является A–значной целой функцией экспоненциального типа $\rho_{\hat{a}}$. Число $\rho_{\hat{a}}$ определяет конечность радиуса наименьшего круга $|r| < R$, вне которого сходится A–значный степенной ряд $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^{n+1}}$. Отметим, что $\mathcal{A}(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|t|=\rho_{\hat{a}}+\varepsilon} a(t)e^{zt}\,dt$. Хорошо известно, что преобразование Бореля B: $a(z) \to \mathcal{A}(z)$ устанавливает линейный изоморфизм между всеми A–значными функциями $a(z)$, аналитическими в окрестности ∞, и множеством всех A–значных целых функций экспоненциального типа [9]. В случае, когда $a_n = a^n$, $a \in A$, функция $a(z) = (z\mathbf{1} - a)^{-1}$ есть резольвента элемента a, а $\mathcal{A}(z) = e^{za}$.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty}$ элементов алгебры A удовлетворяет условию (1).

Будем говорить, что последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, если функция $\mathcal{A}_{\varphi}(z) = \varphi[\mathcal{A}(iz)]$ имеет $\mathcal{P}$–майоранту для всех φ из единичной сферы $S(A^*)$ в сопряженном пространстве A^*. Будем говорить, что элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, если последовательность $\hat{a} = (a^n)_1^{\infty}$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$.

Предложение 1. *Пусть последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$. Тогда $\|a_n\| \leq \inf\{|\omega_{\hat{a}}^{(n)}(0)|: \quad \omega_{\hat{a}} \in \mathcal{P}\}$, где $\omega_{\hat{a}}(z)$ – $\mathcal{P}$–майоранты $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$. $\mathcal{A}_{\varphi}^{(p)}(z) = \sum\limits_{n=p}^{\infty} \dfrac{(iz)^{n-p}\varphi(a_n)}{(n-p)!}$, поэтому $\mathcal{A}_{\varphi}^{(p)}(0) = \varphi(a_p)$. Функция $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$ – целая, экспоненциального типа и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_{\hat{a}}(z)$. Согласно обобщенной теореме Бернштейна имеем $|\mathcal{A}_{\varphi}^{(p)}(x)| \leq |\omega_{\hat{a}}^{(p)}(x)|$ так, что $|\varphi(a_p)| \leq |\omega_{\hat{a}}^{(p)}(0)|$.

Предложение 2. *Пусть последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_{\hat{a}}(z)$ типа $\sigma_{\omega_{\hat{a}}} \leq \rho_{\hat{a}}$. Тогда*

$$\|a_1\| \leq |\omega_{\hat{a}}'(0)| + \sigma_{\omega_{\hat{a}}} + \rho_{\hat{a}}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим целую функцию $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$. Так как $\sigma_{\mathcal{A}_{\varphi}} = \rho_{\hat{a}} \geq \sigma_{\omega_{\hat{a}}}$, то имеем

$$|\mathcal{A}_{\varphi}'(x)| \leq \left|\{\omega_{\hat{a}}(x)\exp\left(-i(\rho_{\hat{a}} - \sigma_{\omega_{\hat{a}}})x\right)\}'\right|.$$

Следовательно

$$||a_1|| \leq |\omega'_{\hat{a}}(0)| + (\rho_{\hat{a}} - \sigma_{\omega_{\hat{a}}})\,|\omega_{\hat{a}}(0)| \leq |\omega'_{\hat{a}}(0)| + (\rho_{\hat{a}} + \sigma_{\omega_{\hat{a}}})\,|\omega_{\hat{a}}(0)|$$

из условия $\omega_{\hat{a}}(0) = 1$ следует (2).

Предложение 3. *Пусть последовательность* $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ *принадлежит классу* $\mathcal{P}(A)$ *и имеет* $\mathcal{P}$*–майоранту* $\omega_{\hat{a}}(z)$ *нулевого рода. Тогда для любого натурального* p

$$||a_p|| \leq \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} |\omega_{\hat{a}}^{(p-j)}(0)|\; \rho_{\hat{a}}^{j}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $\omega_{\hat{a}}(z)$ имеет нулевой род, то из предложения 2 следует, что для любого натурального p

$$\left|A_{\varphi}^{(p)}(x)\right| \leq \left|\{\omega_{\hat{a}}(x)\exp\left(-i\rho_{\hat{a}} x\right)\}^{(p)}\right|, \quad \text{где} \quad -\infty < x < \varphi.$$

Отсюда получаем (3), завершив доказательство.

В частности, если $\omega_{\hat{a}}(0) = 1$, то имеем (2). Как следствия из предложений 1 — 3 имеем :

Следствие 1. Если элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, то $||a^p|| \leq$ $\leq \inf |\omega_a^{(p)}(0)|$, где инфимум взят по всем $\mathcal{P}$–майорантам элемента a.

Следствие 2. Пусть элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_a(z)$ типа $\sigma_{\omega_a} \leq \rho(a)$, где $\rho(a)$ – спектральный радиус элемента a. Тогда

$$||a|| \leq |\omega'_a(0)| + \rho(a) + \sigma_{\omega_a}.$$

Следствие 3. Пусть элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_a(z)$ нулевого рода. Тогда для любого натурального p

$$||a^p|| \leq \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} |\omega_a^{(p-j)}(0)|\; \rho(a)^j.$$

В частности, если $\omega_a(0) = 1$, то $||a|| \leq |\omega'_a(0)| + \rho(a)$.

Для $\sigma > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$ обозначим через $B_\sigma(\alpha)$ банахово пространство всех целых функций f экспоненциального типа не больших чем σ, для которых

$$||f||_{\sigma,\alpha} := \sup \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{\alpha}} < \infty.$$

При $\alpha = 0$ мы получаем классическое пространство Бернштейна $B_\sigma(0) = B_\sigma$. При $\alpha \le \beta$ имеем $B_\sigma(\alpha) \subseteq B_\sigma(\beta)$. Из теоремы Фрагмена–Линделефа вытекает, что для всех $f \in B_\sigma(\alpha)$

$$|f(z)| \le C_f(1+|z|)^\alpha e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \qquad z = x+iy \in \mathbf{C}.$$

Из теоремы Коши и вышеуказанного неравенства следует, что оператор дифференцирования $\delta = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dz}$ непрерывно действует в пространстве $B_\sigma(\alpha)$ и, кроме того, в пространстве $B_\sigma(\alpha)$ существует функция $\omega(z)$, для которой на вещественной оси выполняется следующее неравенство :

$$M_1(1+|x|)^\alpha \le |\omega(x)| \le M_2(1+|x|)^\alpha, \quad \text{где} \quad M_1, M_2 > 0 \quad \text{– константы.}$$

Отсюда заключаем, что в пространстве $B_\sigma(\alpha)$ имеет место следующая асимптотика :

$$\|\exp(ix\delta)\| \sim (1+|x|)^\alpha, \quad \text{где} \quad x \to \pm\infty.$$

Более подробно об этом можно найти в [10].

Следствие 4. Пусть $h \in A$ – элемент из класса $\mathcal{P}(A)$, который имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_h(z) \in B_{\rho(h)}(\alpha)$, где $\alpha \ge 0$. Тогда

$$\|h\| \le M(\rho(h)+\alpha), \qquad \text{где} \quad M \quad \text{– константа.}$$

Доказательство. Рассмотрим целую функцию $\omega_h(z) = E_1(i\rho(h)z; 1+\alpha)$, где $E_1(z;\alpha)$ – функция Миттаг–Лефлера (см. [11]). Тогда при $x \to \pm\infty$

$$|\omega_h(x)| \le M_1(1+\rho(h)|x|)^\alpha + \frac{M_2}{1+\rho(h)|x|}$$

и значит при подходящей константе, в силу следствия 3, для любого натурального p

$$\|h^p\| \le M\left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\alpha^{p-j}\rho(h)^j\right] = M(\alpha+\rho(h))^p.$$

В частности, для $p=1$ имеем $\|h\| \le M(\alpha+\rho(h))$.

Замечание 1. Если для $h \in A$ имеем $\|\exp(ith)\| = O(|t|^\alpha)$, при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha \ge 0$, то $\|h\| \le M(\alpha+\rho(h))$.

Замечание 2. Если $\alpha = 0$, то из замечания 1 следует теорема Кацнельсона (см. [12]).

Замечание 3. Пусть $a = h + ik$ – квазинормальный элемент алгебры A. Тогда $\|h\| \leq M(1/2 + \rho(h))$, $\|k\| \leq M(1/2 + \rho(k))$ и значит

$$\|a^+\| = \|h - ik\| \leq \|h\| + \|k\| \leq M(1 + \rho(h) + \rho(k)) \leq M(1 + 2\|a\|).$$

Отметим, что для нормального элемента $a \in A$ имеем $\|a^+\| \leq 2\|a\|$, и эта оценка точная. Было бы интересно уточнить значение константы M в вышеуказанном неравенстве.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе докажем основной результат статьи и некоторые следствия из него. Для этого напомним известные определения, а также докажем вспомогательные утверждения.

Пусть семейство $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}^1} \subset A$ есть равномерно непрерывная однопараметрическая гуппа в A, т.е. $u(t+s) = u(t)u(s)$, $u(0) = \mathbf{1}$, и пусть $u(t)$ – равномерно непрерывна в точке O, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(t) - \mathbf{1}\| = 0$. Это условие эквивалентно следующим двум условиям :

i) $u(t)$ равномерно дифференцируема при $t = 0$, т.е. существует элемент $a \in A$ такой, что $\lim\limits_{t\to 0} \left\| \dfrac{u(t) - \mathbf{1}}{t} - a \right\| = 0$;

ii) существует элемент $a \in A$ такой, что $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n a^n}{n!} = \exp(ta)$ и $\|u(t)\| \leq \exp(|t| \cdot \|a\|)$.

Для достаточно малых значений t имеем $\left\| 1/t \int_0^t u(s)\, ds - \mathbf{1} \right\| < 1$ и значит $\mu(t) = 1/t \int_0^t u(s)\, ds \in A^{-1}$. Так как

$$\frac{u(\varepsilon) - \mathbf{1}}{\varepsilon}\, \mu(t) = \frac{1}{t\varepsilon} \int_0^t ds [u(s+\varepsilon) - u(\varepsilon)] =$$

$$= \frac{1}{t\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} u(s)\, ds - \frac{1}{t\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} u(s)\, ds = \frac{u(t) - \mathbf{1}}{t}\, \mu(\varepsilon),$$

то правая часть этого соотношения при $\varepsilon \to 0$ стремится к $\dfrac{u(t) - \mathbf{1}}{t}$. Следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| \frac{u(\varepsilon) - \mathbf{1}}{\varepsilon} - \frac{u(t) - \mathbf{1}}{t}\, \mu(t)^{-1} \right\| = 0.$$

Таким образом, $u(t)$ равномерно дифференцируема и ее генератор a в точке O задается выражением $a = \dfrac{u(t)-1}{t}\,\mu(t)^{-1}$. Из этого равенства получаем интегральное уравнение $u(t) - 1 = a\int_0^t u(s)\,ds$, которое методом последовательных приближений приводит к равенству $u(t) = \exp(ta)$. Из сказанного следует, что сумма генераторов и равномерные пределы генераторов снова будут генераторами. Легко видеть, что если $u(t)$ и $v(t)$ – равномерно непрерывные группы с генераторами a и b, соответственно, то $u(t) - v(t) = t\int_0^1 u(st)(a-b)\,v((1-s)t)\,ds$ и значит

$$\|u(t) - v(t)\| \le t\exp\left(|t|\,(\|a\| + \|b\|)\right)\cdot\|a-b\|.$$

Предложение 4. *Пусть $\{h_n\} \subset A$ – последовательность квазиэрмитовых элементов и $h_n \to h$ при $n \to \infty$. Тогда $h \in A$ – квазиэрмитов элемент.*

Доказательство. Так как $h_n \to h$, то

$$\|\exp(ith_n) - \exp(ith_m)\| \le |t|\; o(|t|)\cdot\|h_n - h_m\|.$$

Таким образом, последовательность $\{\exp(ith_n)\}_{n=1}^{\infty}$ есть фундаментальная последовательность относительно равномерной по t сходимости по норме A на каждом компакте в $\mathbb{R}^1$. Следовательно, существует $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp(ith_n) \in A$ в том же смысле. Нетрудно видеть, что $u(t+s) = u(t)u(s)$, $u(0) = 1$ и $\lim\limits_{t\to 0}\|u(t) - 1\| = 0$, а значит $u(t) = \exp(ith)$. Тогда $\|\exp(ith)\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|\exp(ith_n)\|$ в смысле равномерной сходимости по t на любом компакте в $\mathbb{R}^1$. Так как $\|\exp(ith_n)\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, то $\|\exp(ith)\| = o(|t|^{1/2})$. Мы доказали предложение 4, а также нашли, что предел последовательности квазинормальных элементов есть квазинормальный элемент.

Теорема 1. *Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей 1, $\Delta = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ и $f\colon \Delta \to A$ есть такая A–значная аналитическая функция, что при каждом $z \in \Delta$ $f(z)$ есть кжазинормальный элемент алгебры A. Тогда образ $f(\Delta)$ – коммутативное подмножество в A.*

Доказательство. Так как

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j, \qquad \text{при} \quad z \in \Delta,$$

то $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|a_j\| r^j < \infty$ при $0 \le r < 1$. Для каждого $z \in \Delta$

$$[f(z), f^+(z)] = f(z)f^+(z) - f^+(z)f(z) = 0.$$

Производя почленное умножение, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{j} [a_m, a_{j-m}^+] \right) z^m \bar{z}^{j-m} = 0. \tag{4}$$

Поскольку $a_j = \dfrac{f^{(j)}(0)}{j!}$, то a_j являются квазинормальными элементами и значит $\|a_j^+\| \le M[1 + 2\|a_j\|]$, откуда имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j^+\| r^j \le M \left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| r^j \right) < \infty \quad \text{при} \quad 0 \le r \le 1.$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|a_j\| r^j$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|a_j^+\| r^j$ следует, что при $0 \le r < 1$ сходится и ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{j} [a_m, a_{j-m}^+] \right) r^j. \tag{5}$$

Таким образом, ряд в (4) равномерно сходится в каждом замкнутом диске внутри Δ. Пусть $p \in \mathbf{N}$. Умножая (4) на z^{p-1} и почленно интегрируя по границе диска $\Delta_r = \{|z| \le r\}$, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} [a_j, a_{j+p}^+] \, r^{2(j+p)}, \quad \text{при} \quad 0 \le r \le 1.$$

Сходимость ряда (5) показывает, что ряд

$$h_p(z) = \sum_{j=0}^{\infty} [a_j, a_{j+p}^+] \, z^{2(j+p)}$$

абсолютно сходится в Δ и значит A–значные функции $h_p(z)$ являются аналитическими функциями в круге Δ. Из условия $h_p(r) = 0$ имеем

$$[a_j, a_{j+p}^+] = 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbf{N}.$$

Ввиду произвольности натурального p имеем, что $[a_j, a_l^+] = 0$, где $j, l \in \mathbf{N}$. Так как элементы a_j квазинормальны, то используя теорему Фугледе (см. [4] — [6]), получаем $[a_j, a_l] = 0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Вместо единичного диска Δ можно взять произвольную область D.

Замечание 5. Ввиду того, что существует (см. [10]) банахова алгебра A_0 с таким элементом $a_0 = h_0 + ik_0 \in A$, что $[h_0, k_0] = 0$, $\|\exp(ith_0)\| = O(|t|^{1/2})$, $\|\exp(itk_0)\| = O(|t|^{1/2})$, при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^1$, где $a_0 \in Z(A_0)$ (центр алгебры), однако $a_0^+ = h_0 - ik_0 \notin Z(A_0)$, то получаем, что теорема 1 является точной.

Следуя Г. Вайсу [13], будем говорить, что двусторонний идеал I удовлетворяет обобщенному свойству Фугледе (GFP), если для каждого квазинормального элемента $a \in A$ и элемента $b \in A$ из условия $[a, b] \in I$ следует, что $[a^+, b] \in I$.

Теорема 2. *Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей* $\mathbf{1}$. *Тогда каждый замкнутый двусторонний идеал $I \subset A$ удовлетворяет условию (GFP).*

Доказательство. Пусть $a \in A$ – квазинормальный элемент и $b \in A$ – такой элемент, что $[a, b] \in I$. Пусть $\pi_I \colon A \to A/I$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом I и $a_I = \pi_I(a)$. Так как $[a, b] \in I$, то $[a_I, b_I] = 0$ и $[a^p, b] \in I$ для $p \geq 2$. Следовательно, $\left[\exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I\right), b\right] \in I$ и $\left[\exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I\right), b_I\right] = 0$. Мы получили, что

$$b_I = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda a_I\right) \cdot b_I \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I\right).$$

Пусть $\varphi \in (A/I)^*$, $\|\varphi\| = 1$ и

$$f_\varphi(\lambda) = \varphi\left[\exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I^+\right) \cdot b_I \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda a_I^+\right)\right] = \varphi[u_I(\lambda) \cdot b_I \cdot \overline{u}_I(\lambda)],$$

где $u_I(\lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda a_I^+ - \lambda a_I)\right]$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Так как $\|u_I(\lambda)\| = o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda| \to \infty$, то $|f|_\varphi(\lambda)| = o(|\lambda|)$. В силу теоремы Лиувилля $f_\varphi(\lambda) \equiv f_\varphi(0)$ и значит $[a^+, b] \in I$. Доказательство завершено.

Напомним, что банахова алгебра A называется простой, если она содержит ровно один нетривиальный замкнутый двусторонний идеал I. В связи с этим, банахово пространство X называется простым, если операторная алгебра $BL(X)$ – простая алгебра.

Операторные алгебры $BL(l_p)$, $BL(C_0)$, при $1 \leq p < \infty$ являются простыми. Однако $BL(L_p[0,1]))$ $(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$ и $BL(C([0,1]))$ не являются простыми алгебрами (см. [14]).

Пусть I – замкнутый двусторонний идеал в A. Скажем, что элемент $a \in A$ квазинормален по модулю идеала I, если существует такой квазинормальный элемент $b \in A$, что $a - b \in I$.

Множество $E \subset A$ назовем коммутативным по модулю идеала I, если для любых элементов $a, b \in E$ имеем, что $[a, b] \in I$. В случае $I = \{0\}$ получаем обычное коммутативное множество. Если, в частности, $I = \mathrm{Rad}(A)$, то имеем коммутативное множество по модулю радикала алгебры A. В случае $A = BL(H)$ в качестве I можно взять идеал $\mathcal{K}(H)$ компактных операторов, который является единственным замкнутым двусторонним идеалом в этой алгебре. В случае $A = BL(X)$, где X – банахово пространство, таких идеалов бесконечно много. Следующая теорема является следствием теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей, I – замкнутый двусторонний идеал в A. Пусть $f(z)$ – A–значная аналитическая функция такая, что для каждого $z \in \Delta$, $f(z)$ – квазинормальный элемент по модулю I. Тогда $f(\Delta)$ есть коммутативное по модулю идеала I подмножество в алгебре A.*

Доказательство. Пусть $\pi_I : A \to A/I$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом I. Рассмотрим функцию $f_I(z) = \pi_I(f(z)) : \Delta \to A/I$. Тогда при каждом $z \in \Delta$, $f_I(z)$ – квазинормальный элемент в фактор–алгебре A/I. В силу теоремы 1 множество $f_I(\Delta)$ есть коммутативное подмножество в A/I, т.е. для любых $z, z' \in \Delta$ имеем $[f_I(z), f_I(z')] = 0$, откуда следует, что $[f(z), f(z')] \in I$, что и требовалось доказать.

ABSTRACT. Let $BL(H)$ be Banach algebra of all bounded linear operators defined on a complex Hilbert space. H. Globevnik and I. Vidav have demonstrated that if the values of operator–valued analytic function f defined in the connected open set $D \subset \mathbb{C}$ with value in the algebra $BL(H)$ are normal operators, then the range of $f(D)$ is a commutative subset in the algebra $BL(H)$. In the present paper this result is essentially strengthened.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Globevnik, I. Vidav, "A note on normal– operator–valued analytic functions", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 37, no. 2, pp. 619 — 621, 1973.
2. R. J. Fleming, J. E. Jamison, "Commutative ranges of analytic functions in Banach algebras", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 93, no. 1, pp. 48 — 50, 1985.

3. F. Bonsall, T. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, 1973.
4. Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе–Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, т. 22, № 2, стр. 179 – 188, 1977.
5. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 19, № 5 – 6, стр. 405 — 421, 1978.
6. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 43– 49, 1994.
7. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, М., Наука, 1965.
8. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1966.
9. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
10. Е. А. Горин, "Обобщение Одной Теоремы Фугледе, Алгебра и Анализ, № 5, 1993.
11. М. М. Джрбашян, "Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области", М., Наука, 1966.
12. В. Е. Кацнельсон, "У консервативного оператора норма совпадает с спекральным радиусом", Мат. Исслед., т. 5, № 3, стр. 186 — 189, 1970.
13. G. Weiss, "The Fuglede commutativity theorem module operator ideals", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 83, № 1, pp. 113 — 118, 1981.
14. А. Пич, Операторные Идеалы, М., Мир, 1978.

8 декабря 1995 Ереванский государственный университет

ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

А. И. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996

В статье получена формула типа Коши–Грина для класса функций $f(z)$, определенных в единичном полидиске D^n. Эта формула выделяет из функции f ее "аналитическую часть", которая получает операторную интерпретацию. Аналогичные результаты получены для функций, определенных в пространстве $\mathbb{C}^n$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости, $f(z)$ – комплексозначная функция, непрерывная на $\overline{D}$ вместе со своей производной $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Известная формула Коши–Грина

$$f(z) = P(f)(z) + T(\bar{\partial} f)(z), \tag{1}$$

где

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

$$T(\bar{\partial} f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

является эффективным техническим средством теории функций одного комплексного переменного. Ее удачное применение привело ко многим глубоким результатам, среди которых отметим, к примеру, решение проблемы "короны" для круга в работе Л. Карлесона [1] и решение проблемы равномерной аппроксимации на компактных подмножествах плоскости в работе А. Витушкина [2]. Еще одно применение формулы (1), связанное с $\bar{\partial}$-уравнением, основано на том, что эта формула выделяет "аналитическую часть" функции f. Это позволяет выписать в явном виде решение неоднородного уравнения Коши–Римана $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$, где

g – функция, непрерывная на $\overline{D}$. А именно, одним из решений этого уравнения является функция $T(g\, d\bar{z})$.

Интегральные представления для функций многих комплексных переменных, которые являются аналогами (1), были получены сравнительно недавно. За историей этого вопроса мы отсылаем к обзорной статье Хенкина [3], где можно найти также много примеров использования метода интегральных представлений в многомерном комплексном анализе.

Выбирая соответствующим образом весовые сомножители к функции f из (1), можно получить различные весовые формулы. Например, применяя (1) к функции

$$f_z(\zeta) = \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\bar{\zeta}}\right)^{\alpha+1} f(\zeta), \quad \alpha > -1, \quad z \in D$$

и учитывая, что $f_z(z) = f(z)$ и $f_z(\zeta) = 0$, при $|\zeta| = 1$, получим

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{2\pi i}\int_D f(\zeta)\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\bar{\zeta})^{\alpha+2}}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\bar{\zeta}}\right)^{\alpha+1}\frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2)$$

Одно из преимуществ весовых формул типа (2) по сравнению с (1) заключается в том, что они позволяют выписывать формулы решения $\bar{\partial}$-уравнения и в том случае, когда правая часть неограничена у границы области. Формула (2) обладает еще одним замечательным свойством : выделяемая ею "аналитическая часть" является проекцией в соответсвующем весовом L^2-пространстве на подпространство голоморфных функций, поэтому выписываемые с ее помощью формулы решения $\bar{\partial}$-уравнения имеют минимальную норму в этом пространстве.

Если функция f голоморфна, т.е. $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, то второе слагаемое в (2) исчезает. Для этого случая формула впервые получена (другим способом) в [4]. В дальнейшем, в работе М. Джрбашяна [5] были введены ядра более общего типа и получены соответствующие интегральные представления (см. ниже теорему A). В той же работе [5] дано интегральное представление гладких функций, заданных на всей плоскости (Теорема B).

В настоящей работе получены многомерные интегральные представления функций, заданных в полидиске (§1) и в пространстве $\mathbf{C}^n$ (§2).

§1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПОЛИДИСКЕ

1.1. Предполагая, что $\rho > 0$, $\alpha > -1$, $\gamma > -2$ и $\mu = \dfrac{2+\gamma}{\rho}$, рассмотрим функцию типа Миттаг–Лефлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)},$$

а также функции

$$\Phi(z,\zeta) \equiv \Phi(z,\zeta;\rho,\alpha,\gamma) = \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} z\bar{\zeta};\mu)\, dt, \qquad (3)$$

$$\Psi(z,\zeta) \equiv \Psi(z,\zeta;\rho,\alpha,\gamma) =$$

$$= 1 - \frac{\rho(\zeta - z)}{\Gamma(1+\alpha)\zeta} \int_0^{|\zeta|} (1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/\zeta;\mu)\, dt\, dr. \qquad (4)$$

Теорема А. *(см. [5]) Пусть f является гладкой функцией на $\overline{D}$. Тогда для любого $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_D (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma f(\zeta)\Phi(z,\zeta)\, dV_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \Psi(z,\zeta) \frac{dV_2(\zeta)}{\zeta - z}. \qquad (5)$$

Отметим, что формула (2) является частным случаем (5), когда $\rho = 2$, $\gamma = 0$. Соответственно

$$\Phi(z,\zeta;2,\alpha,0) = \frac{\alpha+1}{(1-z\bar{\zeta})^{\alpha+2}}, \quad \Psi(z,\zeta;2,\alpha,0) = \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\bar{\zeta}}\right)^{\alpha+1}.$$

Перечислим те свойства ядер Φ и Ψ, на которых основывается доказательство теоремы А :

а1). При фиксированном $z \in D$ функция $\Psi(z,\zeta)$ является гладкой на $\overline{D} \setminus \{0\}$ и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \Psi(z,\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = (z-\zeta)(1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi(z,\zeta).$$

б1). При $\zeta \to 0$

$$\Psi(z,\zeta) = \begin{cases} 1 + O(|\zeta|^{\gamma+1}), & \text{при } z \neq 0, \\ 1 + O(|\zeta|^{\gamma+2}), & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

в1). $\Psi(z,\zeta) = 0$, при $|\zeta| = 1$.

г1). $\Psi(z,z) = 1$, при $z \neq 0$ и $\lim\limits_{\zeta\to 0} \Psi(0,\zeta) = 1$.

1.2. Приведем необходимые нам обозначения :

$D^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1,\ k = 1, ..., n\}$ – единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$

$$\overline{D}_k f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^{n} \overline{D}_k f \, d\bar{z}_k,$$

$$d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n,$$

$$d\bar{z} \wedge dz = d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

Пространство $\mathbb{C}^n$ предполагается ориентированным так, что $d\bar{z} \wedge dz = (2i)^n dV_{2n}$, где dV_{2n} означает $2n$-мерную меру Лебега в $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$. Обозначим через $(j_1, ..., j_{n-k})$ мультииндекс, дополнительный к $(i_1, ..., i_k)$. Для заданных чисел $\rho_k > 0$, $\alpha_k > -1$, $\gamma_k > -2$ $(k = 1, ..., n)$ пусть $\mu_k = \dfrac{2+\gamma_k}{\rho_k}$ и $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$. Пространство функций f, имеющих норму

$$\left[\int_{D^n} |f(\zeta)|^p \prod_{k=1}^{n} (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} \, dV_{2n}\right]^{1/p} < \infty,$$

обозначим через $L^p_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Теорема 1. *Пусть f – гладкая в D^n функция такая, что $f, \overline{D}_k f \in L^p_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, $k = 1, ..., n$. Тогда имеет место интегральное представление*

$$f(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial} f)(z), \tag{6}$$

где

$$P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) = \frac{1}{\pi^n} \int_{D^n} f(\zeta) \prod_{m=1}^{n} (1 - |\zeta_m|^{\rho_m})^{\alpha_m} |\zeta_m|^{\gamma_m} \Phi(z_m, \zeta_m) \, dV_{2n}(\zeta), \tag{7}$$

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial} f)(z) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}) D_{j_m} f\right] \Psi(z_{j_1}, \zeta_{j_1}) \times \cdots$$

$$\cdots \times \Psi(z_{j_{n-k}}, \zeta_{j_{n-k}}) \prod_{m=1}^{k} (1 - |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}})^{\alpha_{i_m}} |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} \Phi(z_{i_m}, \zeta_{i_m}) \frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2k}}. \tag{8}$$

Заметим, что условия на функцию f по сравнению с теоремой А ослаблены : вместо гладкости на $\overline{D}$ требуется гладкость в D и условие $\overline{D}_k f \in L^1_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Предварительно докажем лемму, имеющую сугубо технический характер, введя для краткости записи следующие обозначения :

$$\Psi_m = \Psi(z_m, \zeta_m; \rho_m, \alpha_m, \gamma_m), \quad \Phi_m = \Phi(z_m, \zeta_m; \rho_m, \alpha_m, \gamma_m),$$

$$\widetilde{\Phi}_m = (1 - |\zeta_m|^{\rho_m})^{\alpha_m} |\zeta_m|^{\gamma_m} \Phi_m,$$

$$A_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \frac{|\zeta_{i_1} - z_{i_1}|^2 + \dots + |\zeta_{i_k} - z_{i_k}|^2}{|\zeta - z|^{2n-2k+2}} \, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta,$$

$1 \le k \le n$,

$$B_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\overline{z}_{j_m} - \overline{\zeta}_{j_m}) \overline{D}_{j_m} f \right] \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n-2k}},$$

$0 \le k \le n-1$.

Лемма. *Пусть* $f \in C^1(D^n)$. *Тогда* $A_k = \dfrac{1}{n-k}(B_k + A_{k+1})$, $1 \le k \le n-1$.

Доказательство. Используя тождество

$$\frac{|\zeta_{i_1} - z_{i_1}|^2 + \dots + |\zeta_{i_k} - z_{i_k}|^2}{|\zeta - z|^{2n-2k+2}} = \frac{1}{n-k} \sum_{m=1}^{n-k} \overline{D}_{j_m} \frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}},$$

справедливость которого проверяется непосредственным вычислением, будем иметь

$$A_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \overline{D}_{j_m} \frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{j_m - 1} \times$$

$$\times \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \, d_{\zeta} \left[\frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \, d\overline{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta \right]. \tag{9}$$

Рассмотрим следующие формы бистепени $(n, n-1)$ при фиксированной точке $z \in D^n$:

$$\lambda = \lambda_{i_1, \dots, i_k, j_m} = \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \, d\overline{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta,$$

которые имеют особенности в точке $\zeta = z$ и на координатных плоскостях $\{\zeta_p = 0\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Применяя формулу Стокса в области $D^n \setminus (B_\varepsilon \cup V_\varepsilon)$, где

$$B_\varepsilon = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}, \quad V_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{n} \{\zeta : |\zeta_k| < \varepsilon\},$$

получим

$$\int\limits_{\partial D^n}\lambda-\int\limits_{\partial B_\varepsilon}\lambda-\int\limits_{\partial V_\varepsilon}\lambda=\int\limits_{D^n\setminus(B_\varepsilon\cup V_\varepsilon)}d\lambda. \tag{10}$$

Интеграл по ∂V_ε стремится к нулю вместе с ε в силу свойства б1). Оценим интеграл по сфере ∂B_ε :

$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon}\lambda\right|\le C\int\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{|d\bar\zeta[j_m]\wedge d\zeta|}{|\zeta-z|^{2n-2k-1}}\le C\frac{1}{\varepsilon^{2n-2k-1}}\int\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}dS_{2n-1}\le C\varepsilon^{2k},$$

где C – константа. Перейдя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая, что $\lambda=0$ на ∂D^n, из (10) получим $\int\limits_{D^n}d\lambda=0$, или

$$\int\limits_{D^n}d_\zeta\left[f\Psi_{j_1}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde\Phi_{i_1}\cdots\widetilde\Phi_{i_k}\right]\frac{\bar\zeta_{j_m}-\bar z_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\bar\zeta[j_m]\wedge d\zeta+$$

$$+\int\limits_{D^n}f\Psi_{j_1}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde\Phi_{i_1}\cdots\widetilde\Phi_{i_k}\,d_\zeta\left[\frac{\bar\zeta_{j_m}-\bar z_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\bar\zeta[j_m]\wedge d\zeta\right]=0.$$

Отсюда и из (9), с учетом свойства а1)

$$A_k=$$

$$=\frac{1}{n-k}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\int\limits_{D^n}\left[\sum_{m=1}^{n-k}(\bar z_{j_m}-\bar\zeta_{j_m})\overline{D}_{j_m}f\right]\Psi_{j_1}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde\Phi_{i_1}\cdots\widetilde\Phi_{i_k}\frac{d\bar\zeta\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n-2k}}+$$

$$+\frac{1}{n-k}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{m=1}^{n-k}\int\limits_{D^n}f\Psi_{j_1}\cdots\overline{D}_{j_m}\Psi_{j_m}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde\Phi_{i_1}\cdots\widetilde\Phi_{i_k}\frac{\bar\zeta_{j_m}-\bar z_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\bar\zeta\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{1}{n-k}B_k+\frac{1}{n-k}\times$$

$$\times\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{m=1}^{n-k}\int\limits_{D^n}f\Psi_{j_1}\cdots\widetilde\Phi_{j_m}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde\Phi_{i_1}\cdots\widetilde\Phi_{i_k}\frac{|\bar\zeta_{j_m}-\bar z_{j_m}|^2}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\bar\zeta\wedge d\zeta.$$

Объединяя слагаемые, имеющие одинаковый набор индексов, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Напомним формулу Мартинелли–Бохнера для гладких функций (см., например, [6]) :

$$u(z)=\int\limits_{\partial G}u(\zeta)\omega'(\zeta,z)-\int_G\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega'(\zeta,z), \tag{11}$$

где $u(z)$ – функция, гладкая на замыкании ограниченной области G с кусочно-гладкой границей, $\omega'(\zeta, z)$ – форма бистепени $(n, n-1)$, имеющая вид

$$\omega'(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n |\zeta - z|^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)\, d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Рассмотрим сперва случай, когда f – гладкая на $\overline{D}^n$ функция. Применяя (11) в области $G = D^n \setminus V_\varepsilon$, где V_ε определяется как в лемме, к функции

$$u_z(\zeta) = f(\zeta)\Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n),$$

и учитывая свойство г1), будем иметь

$$f(z) = \int_{\partial D_n} f(\zeta)\Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)\omega'(\zeta, z) - \int_{\partial V_\varepsilon} f(\zeta)\Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)\omega'(\zeta, z) -$$

$$- \int_{D_n} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)\omega'(\zeta, z) - \int_{D_n} f(\zeta)\overline{\partial}\left[\Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)\right] \wedge \omega'(\zeta, z). \tag{12}$$

Как и в лемме получим, что интеграл по ∂V_ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а интеграл по ∂D^n равн нулю. Итак

$$f(z) = -\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{D^n} \left[\sum_{k=1}^{n} (\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)\overline{D}_k f\right] \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} -$$

$$- \int_{D^n} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \overline{D}_i \Psi(z_i, \zeta_i) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)\, d\overline{\zeta}_i\right] \wedge \omega'(\zeta, z) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{D^n} \left[\sum_{k=1}^{n} (\overline{z}_k - \overline{\zeta}_k)\overline{D}_k f\right] \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \int_{D^n} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \widetilde{\Phi}(z_i, \zeta_i) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)|\zeta_i - z_i|^2\right] \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} \right\}.$$

В обозначениях леммы это равенство выглядит следующим образом :

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}(B_0 + A_1). \tag{13}$$

Из леммы последовательно получаем

$$A_1 = \frac{1}{n-1}B_1 + \frac{1}{n-1}A_2 = \frac{1}{n-1}B_1 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-2}B_2 + \frac{1}{n-2}A_3\right) = \cdots$$

$$= \frac{1}{n-1}B_1 + \frac{1}{(n-1)(n-2)}B_2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}B_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}A_n. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left[B_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-1)\cdots(n-k)}B_k + \frac{1}{(n-1)!}A_n\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}A_n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n}B_k. \qquad (15)$$

Заметим, что согласно определению A_k, B_k и $\tilde{\tilde{\Phi}}_k$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}A_n = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{D^n} f(\zeta)\tilde{\tilde{\Phi}}_1\cdots\tilde{\tilde{\Phi}}_n\frac{|\zeta_1-z_1|^2+\dots+|\zeta_n-z_n|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar{\zeta}\wedge d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{D^n} f(\zeta)\tilde{\tilde{\Phi}}_1\cdots\tilde{\tilde{\Phi}}_n\,dV_{2n}(\zeta) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z);$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n}B_k = T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial}f)(z),$$

и утверждение теоремы 1 для функций, гладких на $\overline{D}^n$, следует из (15).

Рассмотрим, наконец, случай произвольной функции, которая удовлетворяет условию теоремы 1. Пусть $g_p(t)$ – последовательность функций, гладких на $[0,\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$g_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le t \le 1-\frac{3}{p}, \\ 0 & \text{при } t \ge 1-\frac{1}{p}, \end{cases} \qquad |g_p'(t)| \le p. \qquad (16)$$

Существование $g_p(t)$ очевидно. Пусть $h_p(z) = g_p(|z_1|)\cdots g_p(|z_n|)$ для $z \in \mathbb{C}^n$. Так как функции fh_p гладкие на $\overline{D}^n$, то, по доказанному

$$f(z)h_p(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(fh_p)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial}(fh_p))(z) =$$

$$= P_{\rho,\alpha,\gamma}(fh_p)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(h_p\bar{\partial}f)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\bar{\partial}h_p)(z). \qquad (17)$$

Последовательность h_p ограничена и стремится к 1 во всех точках $z \in D^n$. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} f(z)h_p(z) = f(z), \qquad (18)$$

$$\lim_{p\to\infty} P_{\rho,\alpha,\gamma}(fh_p)(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z), \qquad (19)$$

$$\lim_{p\to\infty} T_{\rho,\alpha,\gamma}(h_p\overline{\partial} f)(z) = T_{\rho,\alpha,\gamma}(\overline{\partial} f)(z). \tag{20}$$

Для оценки $T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial} h_p)$ заметим, что по построению $\overline{\partial} h_p$ отлично от нуля лишь на множестве

$$S_p = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ z \in \mathbf{C}^n : 1 - \frac{3}{p} \le |z_k| \le 1 - \frac{1}{p} \right\} \bigcap D^n,$$

причем, как это следует из (16), на S_p имеет место неравенство

$$(1 - |\zeta_k|^{\rho_k})|\overline{D}_k h_p(\zeta)| \le \text{ Const }.$$

В работе [5] получена асимптотика ядер Ψ_k : $\Psi_k = O\big((1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k+1}\big)$ при $|\zeta_k| \to 1$, $z_k \in D$ фиксировано. Учитывая все это, имеем

$$|T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial} h_p)(z)| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} (n-k-1)! \text{ Const} \int_{S_p} |f(\zeta)| \sum_{m=1}^{n-k} |\overline{D}_{j_m} h_p(\zeta)| \cdot |\Psi_{j_1}| \cdots$$

$$\cdots \Psi_{j_{n-k}} \prod_{m=1}^{k} (1 - |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}})^{\alpha_{i_m}} |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} |\Phi_{i_m}| \, dV_{2n}(\zeta) \le$$

$$\le \text{ Const} \int_{S_p} |f(\zeta)| \prod_{k=1}^{n} (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} \, dV_{2n}(\zeta).$$

Последний интеграл стремится к нулю при $p \to \infty$, т.к. $f \in L^1_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Итак

$$\lim_{p\to\infty} T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial} h_p)(z) = 0. \tag{21}$$

Утверждение теоремы следует из (17) – (21).

Интегральное прдставление (6) – (8) является многомерным аналогом (5) и (2). В работе П. Шарпантье [7] установлен многомерный вариант формулы (2).

1.3. Пространство $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ является гильбертовым, если скалярное произведение в нем определить следующим образом :

$$\langle f, g\rangle_{\rho,\alpha,\gamma} = \int_{D^n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} \prod_{k=1}^{n} (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} \, dV_{2n}(\zeta). \tag{22}$$

Множество функций из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, голоморфных в D^n, составляет замкнутое подпространство, которое обозначим через $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Теорема 2. *Оператор $P_{\rho,\alpha,\gamma}$ является ортогональным проектором из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.*

Доказательство. Прежде всего, если $f \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, то $\overline{\partial} f = 0$, и, как следует из (6), $f(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z)$. Пусть, далее, $V(z)$ принадлежит ортогональному дополнению $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Имеем

$$P_{\rho,\alpha,\gamma}(V)(z) = \frac{1}{\pi^n} \left\langle V(\zeta), \prod_{m=1}^{n} \overline{\Phi(z_m, \zeta_m)} \right\rangle_{\rho,\alpha,\gamma}. \tag{23}$$

Функция $\overline{\Phi(z,\zeta)}$ при фиксированном $z \in D$ голоморфна относительно ζ в D и непрерывна в $\overline{D}$ (см. [5]). Поэтому $\prod\limits_{m=1}^{n} \overline{\Phi(z_m, \zeta_m)}$ принадлежит $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ и, как следует из (22) и (23), $P_{\rho,\alpha,\gamma}(V) \equiv 0$. Это и доказывает теорему.

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

2.1. В работе [5] построены ядра Φ^∞ и Ψ^∞ :

$$\Phi^\infty(z,\zeta) \equiv \Phi^\infty(z,\zeta;\rho,\sigma,\gamma) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\bar{\zeta};\mu),$$

$$\Psi^\infty(z,\zeta) \equiv \Psi^\infty(z,\zeta;\rho,\sigma,\gamma) = 1 - \sigma^\mu \frac{\rho(\zeta - z)}{\zeta} \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma r^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/\zeta;\mu)\, dr,$$

где

$$\rho > 0, \quad \sigma > 0, \quad \gamma > -2, \quad \mu = \frac{2+\gamma}{\rho}. \tag{24}$$

Теорема B. *(см. [5]). Пусть для гладкой на комплексной плоскости функции f при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия :*

$$f(z) = O\big(e^{(1-\varepsilon)\sigma|z|^\rho}\big) \quad \text{и} \quad \overline{D} f(z) = O\big(e^{(1-\varepsilon)\sigma|z|^\rho}\big), \quad z \to \infty.$$

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\zeta|^\gamma e^{-\sigma|\zeta|^\rho} f(\zeta) \Phi^\infty(z,\zeta)\, dV_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{D} f(\zeta) \Psi^\infty(z,\zeta) \frac{dV_2(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Доказательство этой теоремы основано на перечисляемых ниже свойствах а2) – г2) ядер Φ^∞ и Ψ^∞, которые вполне аналогичны свойствам а1) – г1), соответствующим случаю круга в §1).

а2).При фиксированном $z \in D$ функция $\Psi^{\infty}(z,\zeta)$ является гладкой на $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ и удовлетворяет равенству

$$\overline{D}_{\zeta}\Psi^{\infty}(z,\zeta) = (z-\zeta)|\zeta|^{\gamma}e^{-\sigma|\zeta|^{\rho}}\Phi^{\infty}(z,\zeta).$$

б2). При $\zeta \to 0$ имеем

$$\Psi^{\infty}(z,\zeta) = \begin{cases} 1+O(|\zeta|^{\gamma+1}) & \text{при } z \neq 0, \\ 1+O(|\zeta|^{\gamma+2}) & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

в2). Для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\Psi^{\infty}(z,\zeta) = O\big(e^{-(1-\varepsilon)\sigma|\zeta|^{\rho}}\big)$, при $\zeta \to \infty$.

г2). $\Psi^{\infty}(z,z) = 1$, при $z \neq 0$ и $\lim\limits_{\zeta\to 0}\Psi^{\infty}(0,\zeta) = 1$.

2.2. Для заданных наборов чисел $\rho = (\rho_1,...,\rho_n)$, $\mu = (\mu_1,...,\mu_n)$, $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$, $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_n)$, удовлетворяющих (24), обозначим через $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ пространство измеримых в $\mathbf{C}^n$ функций с конечной нормой

$$\left[\int\limits_{\mathbf{C}^n} |f(\zeta)|^p \prod_{m=1}^{n} |\zeta_m|^{\gamma_m} e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}\, dV_{2n}\right]^{1/p},$$

а через $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ – его замкнутое подпространство, состоящее из целых функций.

Теорема 3. *Пусть f – гладкая в $\mathbf{C}^n$ функция такая, что $f, \overline{D}_k f \in L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ $(k = 1,...,n,\ p > 1)$. Тогда имеет место интегральное представление*

$$f(z) = P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z) + T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}f)(z), \tag{25}$$

где

$$P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z) = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbf{C}^n} f(\zeta)\prod_{m=1}^{n}|\zeta_m|^{\gamma_m}e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}\Phi^{\infty}_m(z_m,\zeta_m)\,dV_{2n}(\zeta), \tag{26}$$

$$T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}f)(z) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\sum_{i_1<\cdots<i_k}\int\limits_{\mathbf{C}^n}\left[\sum_{m=1}^{n-k}(\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m})\overline{D}_{j_m}f\right]\Psi^{\infty}(z_{j_1},\zeta_{j_1})\times\cdots$$

$$\cdots\times\Psi^{\infty}(z_{j_{n-k}},\zeta_{j_{n-k}})\prod_{m=1}^{k}|\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}}e^{-\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}}\Phi^{\infty}(z_{i_m},\zeta_{i_m})\frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-2k}}. \tag{27}$$

Доказательство. Возьмем гладкую на $[0,\infty)$ функцию $v(t)$, удовлетворяющую условию

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{при } 2 \le t < \infty, \end{cases}$$

и построим последовательность функций

$$v_N(z) = v\left(\frac{|z_1|}{N}\right) \cdots v\left(\frac{|z_n|}{N}\right), \quad z \in \mathbf{C}^n, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, $v_N(z) \equiv 1$ в полидиске $D_N^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_k| < N, \; k = 1, \ldots, n\}$, и $v_N(z) \equiv 0$ вне полидиска D_{2N}^n. Далее, производные от $v_N(z)$ отличны от нуля лишь в "кольце" $D_{2N}^n \setminus D_N^n$ и, кроме того

$$|\operatorname{grad} v_N(z)| \le \frac{1}{N} \operatorname{Const}.$$

Рассмотрим последовательность fv_N. Поскольку эти функции финитны, то формулы (25) – (27) для них доказываются с использованием свойств а2) – г2) так же, как теорема 1 доказывалась для гладкой в $\overline{D}^n$ функции; только вместо единичногио полидиска D^n нужно взять D_N^n, при этом ввиду финитности интегралы по границе D_N^n исчезают. Итак

$$f(z)v_N(z) = P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z) + T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}(fv_N))(z) =$$

$$= P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z) + T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(v_N\overline{\partial}f)(z) + T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f\overline{\partial}v_N)(z). \tag{28}$$

Введем для краткости обозначение

$$d\mu(\zeta) = \prod_{m=1}^{n} |\zeta_m|^{\gamma_m} e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}} dV_{2n}(\zeta).$$

Имеем

$$|P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z) - P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z)| \le \int_{\mathbf{C}^n} |f(\zeta)| \cdot |v_N(\zeta) - 1| \prod_{m=1}^{n} |\Phi^{\infty}(z_m, \zeta_m)| \, d\mu(\zeta) \le$$

$$\le \int_{\mathbf{C}^n \setminus D_N^n} |f(\zeta)| \prod_{m=1}^{n} |\Phi^{\infty}(z_m, \zeta_m)| \, d\mu(\zeta).$$

Из свойств функции типа Миттаг–Лефлера следует, что функция $\prod_{m=1}^{n} \Phi^{\infty}(z_m, \zeta_m)$ имеет по каждой переменной ζ_m порядок $\frac{1}{2}\rho_m$, поэтому она имеет конечную

$L^q(d\mu)$-норму. По неравенству Гельдера правая часть последнего неравенства не превосходит следующей величины :

$$\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D_N^n} |f(\zeta)|^p\, d\mu\right]^{1/p} \left[\int\limits_{\mathbb{C}^n} \prod_{m=1}^{n} |\Phi^{\infty}(z_m,\zeta_m)|^q\, d\mu(\zeta)\right]^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Так как $f\in L^p(d\mu)$, то при $N\to\infty$

$$|P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z) - P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z)| \le \text{Const}\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D_N^n} |f(\zeta)|^p\, d\mu\right]^{1/p} \to 0. \tag{29}$$

Далее имеем

$$|T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(v_N\overline{\partial}f)(z) - T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}f)(z)| \le$$
$$\le \frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\sum_{i_1<\cdots<i_k}\int\limits_{\mathbb{C}^n}\sum_{m=1}^{n-k}|\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m}|\cdot|v_N(\zeta)-1|\times$$
$$\times|\overline{D}_{j_m}f|\cdot|\Psi^{\infty}_{j_1}|\cdots|\Psi^{\infty}_{j_{n-k}}|\prod_{m=1}^{k}|\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}}e^{-\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}}\frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-2k}}. \tag{30}$$

Оценим каждое слагаемое $J^N_{i_1,\dots,i_k,j_m}$ в (30), считая точку z фиксированной и N настолько большим, что $z\in D^n_N$. Очевидно

$$\frac{|\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m}|}{|\zeta-z|^{2n-2k}} \le \text{Const}, \quad \text{при } \zeta\in\mathbb{C}^n\setminus D^n_N.$$

Далее

$$|\Phi^{\infty}_{i_m}| \le \text{Const}\exp[(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}}], \quad \text{при любом } \delta>0,$$

$$|\Psi^{\infty}_{j_m}| \le \text{Const}\exp[-(1-\varepsilon)\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}].$$

Последнее неравенство следует из в2). Имеем

$$J^N_{i_1,\dots,i_k,j_m} \le \text{Const}\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D_N^n}|\overline{\partial}f|\left\{\prod_{m=1}^{n-k}|\zeta_{j_m}|^{-\gamma_{j_m}}\exp[\varepsilon\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}]\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{m=1}^{k}\exp\left[(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}}\right]\right\}d\mu(\zeta)\le$$
$$\le \text{Const}\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n}|\overline{\partial}f|^p\,d\mu\right]^{1/p}\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D^n}|Q|^q\,d\mu\right]^{1/q}, \tag{31}$$

где через Q обозначено выражение в фигурных скобках. Далее

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D^n} |Q|^q\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D^n_N} \prod_{m=1}^{n-k} |\zeta_{j_m}|^{-2\gamma_{j_m}} \exp[(q\varepsilon-1)\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}]\times$$

$$\times \prod_{m=1}^{k} \exp\left[q(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}} - \sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}\right] dV_{2n} < \text{Const}\,. \tag{32}$$

Последнее неравенство следует из того, что ε можно взять столь малым, чтобы удовлетворялось неравенство $q\varepsilon - 1 < 0$. Из (30) – (32), с учетом того, что $\overline{\partial} f \in L^p(d\mu)$, следует

$$\lim_{N\to\infty} T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(v_N\overline{\partial} f)(z) = T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial} f)(z). \tag{33}$$

Аналогичными рассуждениями получаем

$$\lim_{N\to\infty} T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f\overline{\partial} v_N)(z) = 0. \tag{34}$$

Кроме того, очевидно

$$\lim_{N\to\infty} f(z)v_N(z) = f(z). \tag{35}$$

Утверждение теоремы 3 следует из (29), (33) – (35).

Формулы (25) – (27) приобретают особенно простой вид при выборе параметров $\rho_k = 2$, $\sigma_k = 1$, $\gamma_k = 0$ $(k = 1, ..., n)$. В этом случае

$$\Phi^{\infty}(z,\zeta,2,1,0) = \exp(z\overline{\zeta}), \quad \Psi^{\infty}(z,\zeta,2,1,0) = \exp[(z-\zeta)\overline{\zeta}],$$

$$P^{\infty}_{2,1,0}(f)(z) = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{C}^n} f(\zeta)\exp(\langle z-\zeta,\zeta\rangle)\,dV_{2n}(\zeta),$$

$$T^{\infty}_{2,1,0}(\overline{\partial} f)(z) = \frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{C}^n} \langle \overline{\partial} f, z-\zeta\rangle \exp(\langle z-\zeta,\zeta\rangle)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!\,|z-\zeta|^{2n-2k}}\right] dV_{2n}(\zeta),$$

где $\langle a,b\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k$.

Оператор $T^{\infty}_{2,1,0}$ встречается в работе [8] в связи с решением $\overline{\partial}$-уравнения.

2.3. Пространство $L^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbb{C}^n)$ со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{\rho,\sigma,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\prod_{m=1}^{n}|\zeta_m|^{\gamma_m}e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}\,dV_{2n}$$

является гильбертовым. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Оператор $P_{\rho,\sigma,\gamma}$ являтся ортогональным проектором из $L^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ на $H^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$.*

Замечание. От гладкости f можно отказаться, в этом случае производные $\overline{D}_k f$ в формулах (6) и (25) нужно понимать в смысле обобщенных функций.

ABSTRACT. In the paper a Cauchy–Green's type formula is obtained for a class of functions $f(z)$ defined in the unit polydisc D^n. This formula separates from f its "analytical part", which receives an operator interpretation. Similar results are obtained for functions defined in the space $\mathbf{C}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Carleson, "The corona problem", Lect. Notes Math., vol. 118, pp. 121 – 132, 1970.
2. А. Г. Витушкин, "Аналитическя емкость в задачах теории приближений", Успехи Мат. Наук, т. 22, № 6, стр. 141 – 199, 1967.
3. Г. М. Хенкин, "Метод интегральных представлений в комплексном анализе", Итоги Науки : Совр. Проб. Мат., ВИНИТИ, т. 7, стр. 23 – 124, 1985.
4. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Мат. и Мех. АН АрмССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
5. М. М. Джрбашян, "Весовые интегральные представления гладких или голоморфных функций в единичном круге и в комплексной плоскости", Изв. НАН Армении. Математика, т. 28, № 4, стр. 1 – 28, 1993.
6. Б. В. Шабат, Введение в Комплексный Анализ, т. 2, М., Наука, 1985.
7. Ph. Charpentier, "Formules explicities pour les solutions minimales de l'equation $\bar{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$", Ann. Inst. Fourier, vol. 30, № 4, pp. 121 – 154, 1980.
8. B. Bendtsson, M. Andersson, "Henkin-Ramirez formulas with weight factors", Ann. Inst. Fourier, vol. 32, № 3, pp. 91 – 110, 1982.

12 декабря 1995

Ереванский государственный университет

О СХОДИМОСТИ И ЯВЛЕНИИ ГИББСА РЯДОВ ФРАНКЛИНА

О. Г. Саргсян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996

В статье содержатся теоремы о сходимости и равномерной сходимости в точке для простого ряда Франклина, а также о λ-сходимости и равномерной λ-сходимости в точке для двойных рядов Франклина. Результаты применяются для изучения явления Гиббса системы Франклина.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – система Франклина (см. [1]) и

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(f) f_n(t) \tag{1}$$

– ряд Фурье–Франклина интегрируемой на $[0,1]$ функции $f(t)$.

В работе [2] Чисельским была доказана следующая теоерма.

Теорема А. *Пусть $f(t) \in L_1([0,1])$ и точка $t_0 \in [0,1]$ такая, что*

$$f(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t)\, dt.$$

Тогда ряд (1) сходится к $f(t_0)$.

В настоящей работе обобщается теорема А на однократные и двойные ряды Франклина.

§2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $g(t)$ и $g(t,s)$ – функции, интегрируемые по Риману, соответственно, на отрезке $[0,1]$ и на квадрате $[0,1]^2$. Положим

$$\overline{D}g(t_0) = \overline{\lim_{t\to t_0}} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}, \quad \underline{D}g(t_0) = \underline{\lim_{t\to t_0}} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0},$$

$$\Delta_{h_1,h_2}g(t,s) = g(t+h_1, s+h_2) - g(t+h_1, s) - g(t, s+h_2) + g(t,s),$$

$$\overline{D}g(t,s) = \varlimsup_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\Delta_{h_1,h_2}g(t,s)}{h_1h_2}, \quad \underline{D}g(t,s) = \varliminf_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\Delta_{h_1,h_2}g(t,s)}{h_1h_2},$$

$$\delta g(t_0) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t_0) - \underline{D}g(t_0)\right], \quad Dg(t_0) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t_0) + \underline{D}g(t_0)\right],$$

$$\delta g(t,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t,s) - \underline{D}g(t,s)\right], \quad Dg(t,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t,s) + \underline{D}g(t,s)\right],$$

$$S_n(t) = \int_0^1 K_n(t,s)\, dg(s), \quad S_{n,m}(x,y) = \int_0^1\int_0^1 K_n(t,x)K_m(s,y)\, dg(t,s),$$

где $K_n(t,s)$ – ядра Дирихле для системы Франклина.

Определение 1. (см. [3], т. 1, стр. 100). Если существует предел

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to t_0}} S_n(t),$$

то скажем, что последовательность $S_n(t)$ *равномерно сходится* в точке t_0 к пределу S.

Определение 2. (см. [3], т. 2, стр. 465). Если для любого $\lambda \geq 1$ существует предел

$$S = \lim_{(n,m)\to\infty} S_{n,m}, \quad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{n}{m} \leq \lambda,$$

то скажем, что последовательность $S_{n,m}$ *λ-сходится (или ограниченно сходится)* к S.

Определение 3. Если для любого $\lambda \geq 1$ существует предел

$$S = \lim_{\substack{(n,m)\to\infty\\ (x,y)\to(x_0,y_0)}} S_{n,m}(x,y), \quad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{n}{m} \leq \lambda,$$

то скажем, что последовательность $S_{n,m}$ *λ-сходится* к S в точке (x_0, y_0).

Определение 4. (см. [4]). Пусть t_0 – точка разрыва первого рода функции $q(t) \in L(0,1)$, причем $|q(t_0+0) - q(t_0-0)| = 2d$, и пусть последовательность функций $\{q_n(t)\}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окрестности точки t_0. Функцию

$$G(t_0, q, \{q_n\}) = G(t_0) = \varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} \frac{1}{d}\left|q_n(t) - \frac{q(t_0+0)+q(t_0-0)}{2}\right|$$

назовем *функцией Гиббса* для последовательности $\{q_n\}$. Если $G(t_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{q_n\}$ в точке t_0 имеет место *явление Гиббса*.

Хорошо известно (см. [5], стр. 123 – 126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса : функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна *постоянной Гиббса*

$$G(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.7.$$

Для частичных сумм ряда Фурье–Уолша наличие явления Гиббса установлено в работе [6]. Для частичных сумм ряда Фурье–Уолша функция $G(x_0)$ не является постоянной. В работе [4] найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции.

В этой работе исследуется явление Гиббса для рядов Фурье –Франклина.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть функция $g(t)$ интегрируема по Риману на отрезке* $[0,1]$.

1) Если имеют место неравенства $-\infty < \underline{D}g(t_0) \le \overline{D}g(t_0) < \infty$ в точке $t_0 \in [0,1]$, то

$$-M\delta g(t_0) + Dg(t_0) \le \varliminf_{n\to\infty} S_n(t_0) \le \varlimsup_{n\to\infty} S_n(t_0) \le M\delta g(t_0) + Dg(t_0),$$

где M – абсолютная постоянная.

2) Если в некоторой окрестности точки t_0 функция g представляется в виде

$$g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t}\chi(\tau)\,d\tau,$$

где $\chi(\tau)$ непрерывна в точке t_0, то последовательность $S_n(t)$ равномерно сходится к $g'(t_0)$ в точке t_0.

Замечание 1. Из одной теоремы, независимо доказанной Ф. Г. Арутюняном [7] и Н. Б. Погосяном [8], следует, что для любой измеримой и конечной п.в. на $[0,1]$ функции $g(t)$ существует ряд Франклина $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$, сходящийся к $g(t)$ п.в. на $(0,1)$.

Тот же результат следует из пункта 1) теоремы 1. Действительно, из теоремы Лузина [9] следует, что что для любой измеримой и конечной п.в. на $[0,1]$ функции $g(t)$ существует непрерывная функция $F(t)$ такая, что $F'(t) = g(t)$ для почти всех $t \in (0,1)$. Следовательно, из теоремы 1 вытекает, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t), \quad \text{где} \quad a_n = \int_0^1 f_n(t)\,dF(t),$$

сходится к $g(t)$ п.в. на $(0,1)$. Отметим, что Г. Г. Геворкян [10] доказал возможность представления п.в. конечных измеримых функций абсолютно сходящимися рядами Франклина.

Теорема 2. *Пусть* $g(x,y)$, $g(x_0,y), g(x,y_0), g(0,y), g(1,y), g(x,1), g(x,0)$ *– интегрируемые функции по Риману, соответственно, на отрезке* $[0,1]^2$ *и на отрезке* $[0,1]$.

1) Если имеют место неравенства $-\infty < \underline{D}g(x_0,y_0) \le \overline{D}g(x_0,y_0) < \infty$ *в точке* (x_0,y_0), *то для любого* $\lambda \ge 1$ *имеем*

$$-M^2\delta g(x_0,y_0) + Dg(x_0,y_0) \le \underline{\lim}_{(n,m)\to\infty} S_{n,m}(x_0,y_0) \le \overline{\lim}_{(n,m)\to\infty} S_{n,m}(x_0,y_0) \le$$

$$\le M^2\delta g(x_0,y_0) + Dg(x_0,y_0), \quad \frac{1}{\lambda} \le \frac{n}{m} \le \lambda.$$

2) Если существует предел

$$Dg(x_0,y_0) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x_1,y_1)\to(x_0,y_0)}} \frac{g(x,y)-g(x_1,y)-g(x,y_1)+g(x_1,y_1)}{(x-x_1)(y-y_1)},$$

то последовательность $S_{n,m}(x,y)$ *равномерно* λ*-сходится к* $Dg(x_0,y_0)$ *в точке* (x_0,y_0).

Теорема 3. *Пусть* t_0 *является точкой разрыва первого рода функции* $f(t)$ *и* $q_n(t) = S_n(f,t)$ *(см. определение 4), где* $S_n(f,t)$ *– частичная сумма ряда Фурье–Франклина функции* $f(t)$, *и* $G(t_0) = G(t_0, f, \{S_n(f)\})$ *– функция Гиббса. Тогда в каждой точке* $t_0 \in (0,1)$

$$1 + \frac{\sqrt{3}-1}{3} \le G(t_0) \le 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})},$$

причем почти всюду

$$G(t_0) = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})}.$$

§4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu \ge 0$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, и пусть π_n – разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков точками

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}} & \text{для } 0 \le i \le 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu} & \text{для } 2\nu < i \le n. \end{cases}$$

Положим $\Delta_i^{(n)} = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 2. Если функция $g(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$, то для любой функции $f_n(t)$ системы Франклина интеграл Стилтьеса $\int_0^1 f_n(t)\,dg(t)$ существует.

Доказательство. Функция $f_n(t)$ линейна на отрезках $\Delta_j^{(n)}$, $j=1,...,n$, следовательно, на каждом отрезке $\Delta_j^{(n)}$ существует интеграл Стилтьеса функции $g(t)$ по функции $f_n(t)$. Из непрерывности функции $f_n(t)$ следует, что существует интеграл Стилтьеса функции $g(t)$ по функции $f_n(t)$ на отрезке $[0,1]$. Но, как известно, из существования интеграла $\int_0^1 g(t)\,df_n(t)$ следует существование интеграла $\int_0^1 f_n(t)\,dg(t)$.

Пусть $g(x,y)$ и $f(x,y)$ – две ограниченные функции на квадрате $[0,1]^2$, и пусть (T_1,T_2) – разбиение квадрата $[0,1]^2$ точками $0=x_0<x_1<\cdots<x_m=1$, $0=y_0<y_1<\cdots<y_n=1$. Величину

$$\sigma=\sigma(f,g)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_i,y_j)\Delta_{h_1^i,h_2^j}g(x_{i-1},y_{i-1}), \tag{2}$$

где $h_1^i = x_i - x_{i-1}$, $h_2^j = y_j - y_{j-1}$, назовем *интегральной суммой*. Пусть $\lambda(T_k)=\max\limits_i h_k^i$, $k=1,2$.

Определение 5. Если существует предел

$$\lim_{\lambda(T_1)\to 0,\ \lambda(T_2)\to 0}\sigma=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dg(x,y)$$

интегральных сумм (2), то его назовем *интегралом функции f по функции g*. Несмотря на то, что мы используем стандартное интегрирование Стилтьеса, наше определение интеграла носит более общий характер, чем классическое определение инеграла Стилтьеса.

Замечание 3. Если функции $g(x,y), g(0,y), g(1,y), g(x,1), g(x,0)$ интегрируемы по Риману, соответственно, на квадрате $[0,1]^2$ и на отрезке $[0,1]$, то интеграл

$$\int_0^1\int_0^1 f_p(t)f_q(s)\,dg(t,s) \tag{3}$$

существует.

Доказательство. Для любых последовательностей $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$, $\{c_j\}$ имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_jb_i(a_{ij}+a_{i-1,j-1}-a_{i,j-1}-a_{i-1,j})=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}(b_{i+1}-b_i)(c_{j+1}-c_j)+$$

$$+c_0\sum_{i=0}^{m-1}a_{i0}(b_{i+1}-b_i)+b_0\sum_{j=0}^{n-1}a_{0j}(c_{j+1}-c_j)-b_m\sum_{j=0}^{n-1}a_{mj}(c_{j+1}-c_j)-$$

$$-c_n\sum_{i=0}^{m-1}a_{in}(b_{i+1}-b_i)+c_0b_0a_{00}+c_nb_ma_{mn}-c_nb_0a_{0n}-c_0b_ma_{m0}. \qquad (4)$$

Так как функции системы Франклина непрерывны и имеют ограниченную вариацию, то без ограничения общности можем предполагать, что точки разбиений π_p и π_q, соответственно, являются точками разбиений T_1 и T_2. Применив преобразование (4) к интегральной сумме (2) с $a_{ij}=g(x_i,y_j)$, $b_i=f_p(x_i)$, $c_j=f_q(y_j)$, получим интегральные суммы интегралов

$$\int_{\Delta_{i_1}^{(p)}}\int_{\Delta_{i_2}^{(q)}}g(t,s)\,d(f_pf_q)(t,s),\quad \int_0^1 g(t,z)f_q(z)\,df_p(t),\quad \int_0^1 g(z,s)f_p(z)\,df_q(s),\ (5)$$

$z=0,1$, и сумму

$$-f_p(0)f_q(1)g(0,1)+f_p(0)f_q(0)g(0,0)-f_p(1)f_q(0)g(1,0)+f_p(1)f_q(1)g(1,1).$$

Из интегрируемости функции $g(t,s)$ по Риману и линейности функций $f_p(t)$ и $f_q(s)$ на отрезках $\Delta_{i_1}^{(p)}$ и $\Delta_{i_2}^{(q)}$, соответственно, а также из замечания 2 следует, что эти интегральные суммы имеют пределы при $\lambda(T_1),\lambda(T_2)\to 0$. Из существования интегралов (5) следует существование интеграла (3).

Следующие утверждения доказаны в работе [2].

Лемма 1. *([2], стр. 296) Пусть n и i такие, что $n=2^m+k$, $1\le k\le 2^m$, $0\le i\le n$. Тогда*

$$\begin{cases} 2a_{0i}+a_{1i}=\frac{6}{\delta}\delta_{0i},\\ a_{j-1,i}+4a_{ji}+a_{j+1,i}=\frac{6}{\delta}\delta_{ji}, \quad j=1,\dots,2k-1,\\ \frac{1}{2}a_{2k-1,i}+3a_{2k,i}+a_{2k+1,i}=\frac{3}{\delta}\delta_{2k,i},\\ a_{j-1,i}+4a_{ji}+a_{j+1,i}=\frac{3}{\delta}\delta_{ji}, \quad j=2k+1,\dots,n-1,\\ a_{n-1,i}+2a_{ni}=\frac{3}{\delta}\delta_{ni}, \end{cases}$$

где

$$a_{ij}=K_n(t_i,t_j),\quad \delta=2^{-m-1},\quad \delta_{ji}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Положим $\alpha=\log(2+\sqrt{3})$.

Теорема B. *([2], стр. 298) Если $n=2^m+k$, $1\le k\le 2^m$, $m\ge 0$, то*

$$a_{ij}=\sqrt{3}\,2^{m+1}\gamma_n(-1)^{i+j}\varepsilon_{ij},$$

где

$$\gamma_n^{-1} = \sinh \alpha n + \sinh \alpha(n-2k) \cosh \alpha 2k,$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 2\cosh \alpha \min(i,j)[\cosh \alpha \min(n-i, n-j) + \\ + \sinh \alpha(n-2k) \sinh \alpha \min(2k-i, 2k-j)] & \text{для } i,j \le 2k-1, \\ \cosh \alpha \min(n-i, n-j)[\cosh \alpha \min(i,j) + \\ + \cosh \alpha 2k \cosh \alpha \min(i-2k, j-2k)] & \text{для } \quad i,j \ge 2k, \\ 2\cosh \alpha \min(i,j) \cosh \alpha \min(n-i, n-j) \\ \text{для } i,j \text{ таких, что } \quad \min(i,j) \le 2k-1 < & \max(i,j). \end{cases}$$

Лемма 2. *([2], стр. 301) Пусть $n \ge 2$, $n = 2^m + k$, $1 \le k \le 2^m$. Тогда*

$$|K_n(t,s)| \le Cne^{-\alpha n|t-s|/2} \tag{6}$$

для любых $t, s \in [0,1]$.

Здесь и в дальнейшем через C мы обозначаем абсолютные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях).

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Из замечания 2 следует, что интеграл

$$I = \int_0^1 K_n(t, t_0)\, d\psi_{t_0}(t) \tag{7}$$

существует, где $\psi_{t_0}(t) = g(t) - g(t_0) - Dg(t_0)(t - t_0)$. Поэтому $I = S_n(t_0) - Dg(t_0)$. Оценим интеграл (7). Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\underline{D}g(t_0) - \varepsilon \le \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \le \overline{D}g(t_0) + \varepsilon \tag{8}$$

при $|t - t_0| < \delta$. Поскольку функции системы Франклина непрерывны, то интеграл (7) можно представить в виде

$$I = I_1(t_0) + I_2(t_0) + I_3(t_0) + I_4(t_0), \tag{9}$$

$$I_1(t) = \int_{t_0+\delta}^1 K_n(\tau, t)\, d\psi_{t_0}(\tau), \quad I_2(t) = \int_0^{t_0-\delta} K_n(\tau, t)\, d\psi_{t_0}(\tau),$$

$$I_3(t) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} K_n(\tau, t)\, d\psi_{t_0}(\tau), \quad I_4(t) = \int_{t_0-\delta}^{t_0} K_n(\tau, t)\, d\psi_{t_0}(\tau).$$

Имеем

$$I_1(t_0) = \psi_{t_0}(1) K_n(1, t_0) - \psi_{t_0}(t_0 + \delta) K_n(t_0 + \delta, t_0) - \int_{t_0+\delta}^1 \psi_{t_0}(t)\, dK_n(t, t_0). \tag{10}$$

Так как для функции ψ_{t_0} имеем, что $\psi_{t_0}(t_0) = 0$ и $|\psi_{t_0}(t)| \le B(t_0, g)$ для $t \in [0,1]$, где $B(t_0, g)$ – постоянная, зависящая только от t_0 и g, то

$$\left|\int_{t_0+\delta}^{1} \psi_{t_0}(t)\, dK_n(t,t_0)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} K_n'(t,t_0)\Big|_{t=(t_i+t_{i-1})/2} \int_{[t_0+\delta,1]\cap\Delta_i^{(n)}} \psi_{t_0}(t)\, dt\right| \le$$

$$\le 2B(t_0,g)\left(\sum_{i:[t_0+\delta,1]\cap\Delta_i^{(n)}\ne\emptyset} |K_n(t_i,t_0)| + |K_n(t_0+\delta,t_0)|\right). \qquad (11)$$

Используя (6), из (10) и (11) получим

$$|I_1(t_0)| \le C\, B(t_0,g) n^2 e^{-\alpha n\delta/2}. \qquad (12)$$

Аналогично

$$|I_2(t_0)| \le C\, B(t_0,g) n^2 e^{-\alpha n\delta/2}. \qquad (13)$$

Для I_3 имеем

$$I_3(t_0) = \psi_{t_0}(t_0+\delta) K_n(t_0+\delta,t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\delta} \psi_{t_0}(t)\, dK_n(t,t_0) =$$

$$= \psi_{t_0}(t_0+\delta) K_n(t_0+\delta,t_0) - \lim_{\max\limits_i(\tau_i-\tau_{i-1})\to 0} \sum_{i=0}^{m-1} \psi_{t_0}(\tau_i)[K_n(\tau_{i+1},t_0) - K_n(\tau_i,t_0)]. \qquad (14)$$

Из (8) имеем

$$|\psi_{t_0}(\tau_i)| \le (\delta g(t_0) + \varepsilon)(\tau_i - t_0), \quad i = 0,1,\dots,m.$$

Следовательно

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1} \psi_{t_0}(\tau_i)[K_n(\tau_{i+1},t_0) - K_n(\tau_i,t_0)]\right| \le (\delta g(t_0)+\varepsilon) \sum_{i=0}^{m-1} (\tau_i - t_0)(S_i - S_{i+1}) =$$

$$= (\delta g(t_0)+\varepsilon)\left(\sum_{i=0}^{m-2} (\tau_{i+1}-\tau_i) S_{i+1}\right), \qquad (15)$$

где

$$S_i = \sum_{k=i}^{m-1} |K_n(\tau_{k+1},t_0) - K_n(\tau_k,t_0)|, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \quad S_m = 0.$$

Используя оценки (см. [2], стр. 301)

$$\int_t^1 \underset{s\le u\le 1}{\mathrm{var}} K_n(t,u)\, ds \le M, \quad \int_0^t \underset{0\le u\le s}{\mathrm{var}} K_n(t,u)\, ds \le M,$$

для любого $n \geq 0$ и $t \in [0,1]$ получим

$$\left|\sum_{i=0}^{m-2}(\tau_{i+1}-\tau_i)S_{i+1}\right| \leq \int_{t_0}^{1} \underset{s \leq u \leq 1}{\mathrm{var}} K_n(u,t_0)\, ds \leq M. \tag{16}$$

Из (6) и (14) – (16) следует, что

$$|I_3(t_0)| \leq M(\delta g(t_0)+\varepsilon) + C\, B(t_0,g)n^2 e^{-\alpha n\delta/2}. \tag{17}$$

Аналогично для I_4 получим оценку (17). Согласно (9), (12), (13)

$$|S_n(t_0) - Dg(t_0)| \leq M(\delta g(t_0)+\varepsilon) + o(1),$$

а так как ε – произвольное положительное число, то пункт 1) теоремы 1 доказан.

Перейдем к доказательству пункта 2). Так как функция $\chi(t)$ непрерывна в точке t_0, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\chi(t) - \chi(t_0)| < \varepsilon, \quad \text{при } |t-t_0| < \delta. \tag{18}$$

Аналогично при $|t - t_0| < \delta/2$ получим оценки

$$|I_1(t)| \leq C\, B(t_0,g)n^2 e^{-\alpha n\delta/4}, \quad |I_2(t)| \leq C\, B(t_0,g)n^2 e^{-\alpha n\delta/4}. \tag{19}$$

Оценим интеграл I_3. Из замечания 2 имеем

$$I_3(t) = \lim_{\max_i(\tau_i - \tau_{i-1}) \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} K_n(\tau_i,t)[\psi_{t_0}(\tau_{i+1}) - \psi_{t_0}(\tau_i)], \tag{20}$$

а из (18) следует, что

$$|\psi_{t_0}(\tau_{i+1}) - \psi_{t_0}(\tau_i)| \leq \varepsilon(\tau_{i+1}-\tau_i).$$

Но ак как функции Лебега для системы Франклина равномерно ограничены (см. [1], стр. 229), т.е.

$$\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K_n(t,s)|\, ds \leq C, \quad n = 1,2,..., \tag{21}$$

то из (20) следует, что

$$|I_3(t)| \leq \varepsilon \lim_{\max_i(\tau_i-\tau_{i-1}) \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} |K_n(\tau_i,t)|(\tau_{i+1}-\tau_i) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ n \in N}} \int_0^1 |K_n(\tau, x)|\, d\tau \leq \varepsilon C. \tag{22}$$

Аналогично получим $|I_4(t)| \leq \varepsilon C$, при $|t - t_0| < \delta/2$. Таким образом, из оценок (19) и (22) получим

$$|S_n(t) - \chi(t_0)| \leq \varepsilon C + o(1) \quad \text{при } |t - t_0| < \delta/2,$$

где $o(1)$ сходится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $t \in (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2)$. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\psi_{x_0 y_0}(t, s) = g(t, s) - g(x_0, y_0) - Dg(x_0, y_0)(t - x_0)(s - y_0).$$

Поскольку функции системы Франклина непрерывны и имеют ограниченные вариации, то из замечний 2 и 3 следует

$$S_{n,m}(x_0, y_0) - Dg(x_0, y_0) = \int_0^1 \int_0^1 K_{n,m}(x_0, y_0, t, s)\, d\psi_{x_0 y_0}(t, s) =$$

$$= J_1(x_0, y_0) + J_2(x_0, y_0) + J_3(x_0, y_0) + J_4(x_0, y_0), \tag{23}$$

где

$$K_{n,m}(x, y, t, s) = K_n(t, x) K_m(s, y),$$

$$J_1(x, y) = \int_{x_0}^1 \int_{y_0}^1 K_{n,m}(x, y, t, s)\, d\psi_{x_0 y_0}(t, s),$$

$$J_2(x, y) = \int_0^{x_0} \int_{y_0}^1 K_{n,m}(x, y, t, s)\, d\psi_{x_0 y_0}(t, s),$$

$$J_3(x, y) = \int_{x_0}^1 \int_0^{y_0} K_{n,m}(x, y, t, s)\, d\psi_{x_0 y_0}(t, s),$$

$$J_4(x, y) = \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} K_{n,m}(x, y, t, s)\, d\psi_{x_0 y_0}(t, s).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\max(|h_1|, |h_2|) < \delta$

$$\underline{D}g(x_0, y_0) - \varepsilon \leq \frac{\Delta_{h_1, h_2} g(x_0, y_0)}{h_1 h_2} \leq \overline{D}g(x_0, y_0) + \varepsilon. \tag{24}$$

Из замечания 3 имеем

$$J_1(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\lambda(T_1) \to 0 \\ \lambda(T_2) \to 0}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} K_{n,m}(x_0, y_0, \tau_i, s_j) \times$$

$$\times\left[\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j)+\psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_{j-1})-\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_{j-1})-\psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_j)\right], \qquad (25)$$

где (T_1,T_2) – разбиение квадрата $[0,1]^2$ точками $x_0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_k=1$, $y_0=s_0<s_1<\dots<s_k=1$. Без ограничения общности можем предполагать, что $(x_0+\delta,y_0+\delta)$ – также точка разбиения, т.е. существуют i_0 и j_0 такие, что $x_0+\delta=\tau_{i_0}$, $y_0+\delta=s_{j_0}$. Интегральную сумму в (25) разобьем на интегральные суммы по прямоугольникам $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0+\delta,1]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0,y_0+\delta]$, $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0,y_0+\delta]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0+\delta,1]$. Положим $a_{ij}=\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j)$, $c_i=K_n(\tau_i,x_0)$, $b_j=K_m(s_j,y_0)$ и применим преобразование (4) к интегральной сумме по праямоугольнику $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0+\delta,1]$. Получим

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{k}C_{ij}=\sum_{i=0}^{i_0-1}\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{ij}(b_{j+1}-b_j)(c_{i+1}-c_i)+c_0\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{0j}(b_{j+1}-b_j)+$$

$$+b_{j_0}\sum_{i=0}^{i_0-1}a_{ij_0}(c_{i+1}-c_i)-b_k\sum_{i=0}^{i_0-1}a_{ik}(c_{i+1}-c_i)-c_{i_0}\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{i_0j}(b_{j+1}-b_j)+$$

$$+c_0b_{j_0}a_{0j_0}+c_{i_0}b_ka_{i_0k}-c_{i_0}b_{j_0}a_{i_0j_0}-c_0b_ka_{0k}, \qquad (26)$$

$$C_{ij}=c_ib_j(a_{ij}+a_{i-1,j-1}-a_{i,j-1}-a_{i-1,j}).$$

Для $(t,s)\in[0,1]^2$ имеем $|\psi_{x_0y_0}(t,s)|\le B(g,x_0,y_0)$. Следовательно

$$A\equiv\left|\sum_{i=0}^{i_0-1}\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{ij}(b_{j+1}-b_j)(c_{i+1}-c_i)\right|\le$$

$$\le C\,B(g,x_0,y_0)\operatorname*{var}_{t\in[x_0,x_0+\delta]}K_n(t,x_0)\operatorname*{var}_{s\in[y_0+\delta,1]}K_m(s,y_0).$$

Используя оценку (6) и линейность $K_n(t,x_0)$ и $K_m(s,y_0)$ на $\Delta_i^{(n)}$ и $\Delta_j^{(m)}$, получим

$$A\le C\,B(g,x_0,y_0)m^2ne^{-\alpha m\delta/2}.$$

Оценивая аналогично остальные суммы правой части равенства (26), получим

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{k}C_{ij}\right|\le C\,B(g,x_0,y_0)[m^2ne^{-\alpha m\delta/2}+n^2me^{-\alpha n\delta/2}]. \qquad (27)$$

Аналогично получим оценку (27) для интегральных сумм по прямоугольникам $[x_0+\delta,1]\times[y_0,y_0+\delta]$ и $[x_0+\delta,1]\times[y_0+\delta,1]$. Теперь докажем оценку для интегральных сумм по прямоугольнику $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0,y_0+\delta]$. Положим

$$A_{ij}=\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j)+\psi_{x_0y_0}(\tau_0,s_0)-\psi_{x_0y_0}(\tau_0,s_j)-\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_0),$$

$i=0,1,\dots,i_0+1, \quad j=0,1,\dots,j_0+1$. Так как

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0}C_{ij}=\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0}c_ib_j(A_{ij}+A_{i-1,j-1}-A_{i,j-1}-A_{i-1,j}),$$

то применяя преобразование (4), полуим

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0}C_{ij}=\sum_{i=0}^{i_0-1}\sum_{j=0}^{j_0-1}A_{ij}(b_{j+1}-b_j)(c_{i+1}-c_i)-c_{i_0}\sum_{j=0}^{j_0-1}A_{i_0j}(b_{j+1}-b_j)-$$

$$-b_{j_0}\sum_{i=0}^{i_0-1}A_{ij_0}(c_{i+1}-c_i)-A_{i_0j_0}b_{j_0}c_{i_0}. \tag{28}$$

Из (24) следует, что

$$|A_{ij}|\le(\delta g(x_0,y_0)+\varepsilon)(\tau_i-x_0)(s_j-y_0).$$

Используя оценку (6) и аналогично (15) и (16) оценивая правую часть равенства (28), получим

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0}C_{ij}\right|\le M^2(\delta g(x_0,y_0)+\varepsilon)+C\,B(g,x_0,y_0)[m^2ne^{-\alpha m\delta/2}+n^2me^{-\alpha n\delta/2}].$$

Следовательно (см. (25) и (27))

$$|J_1(x_0,y_0)|\le M^2(\delta g(x_0,y_0)+\varepsilon)+C\,B(g,x_0,y_0)[m^2ne^{-\alpha m\delta/2}+n^2me^{-\alpha n\delta/2}]. \tag{29}$$

Для J_i, $i=2,3,4$, можем получить ту же оценку (29). Из (23) и (29) следует, что

$$|S_{n,m}(x_0,y_0)-Dg(x_0,y_0)|\le M^2(\delta g(x_0,y_0)+\varepsilon)+o(1),$$

где $o(1)$ сходится к нулю для каждого $\mu\ge1$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$ и $1/\mu\le n/m\le\mu$. Таким образом, пункт 1) теоремы 2 доказан.

Что касается пункта 2), то заметим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$\left|\frac{g(x,y)-g(x_1,y)-g(x,y_1)+g(x_1,y_1)}{(x-x_1)(y-y_1)}-Dg(x_0,y_0)\right|<\varepsilon, \tag{30}$$

при $|x-x_0|<\delta$, $|x_1-x_0|<\delta$, $|y_1-y_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$. Принимая во внимание непрерывность и ограниченность вариаций функций ситемы Франклина, а также замечания 2 и 3, имеем

$$S_{n,m}(x,y)-Dg(x_0,y_0)=\int_0^1\int_0^1K_{n,m}(x,y,t,s)\,d\psi_{x_0y_0}(t,s)=$$

$$= J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y) + J_4(x,y). \tag{31}$$

Оценим интеграл J_1 при $|x - x_0| < \delta/2$ и $|y - y_0| < \delta/2$. Из замечния 3 имеем

$$J_1(x,y) = \lim_{\substack{\lambda(T_1)\to 0\\ \lambda(T_2)\to 0}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} K_{n,m}(x,y,\tau_i,s_j)\times$$

$$\times\left[\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j) + \psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_{j-1}) - \psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_{j-1}) - \psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_j)\right], \tag{32}$$

где (T_1,T_2) – разбиение квадрата $[0,1]^2$ точками $x_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = 1$, $y_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$. Без ограничения общности можем предполагать, что $(x_0+\delta, y_0+\delta)$ тоже является точкой разбиения, т.е сдуществуют i_0 и j_0 такие, что $x_0 + \delta = \tau_{i_0}$, $y_0 + \delta = s_{j_0}$. Интегральную сумму в (32) разобьем на интегральные суммы по прчямоугольникам $[x_0, x_0+\delta]\times[y_0+\delta,1]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0,y_0+\delta]$, $7[x_0,x_0+\delta]\times[y_0,y_0+\delta]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0+\delta,1]$. Полжим $c_i = K_n(\tau_i,x)$, $b_j = K_m(s_j,y)$ и оценим интегральную сумму по квадрату $Q = [x_0,x_0+\delta]\times[y_0,y_0+\delta]$. Из (30)

$$|a_{ij} + a_{i-1,j-1} - a_{i,j-1} - a_{i-1,j}| \le \varepsilon(\tau_i - \tau_{i-1})(s_j - s_{j-1}),$$

$i = 1,\dots,i_0+1, \quad j = 1,\dots,j_0+1$. Поэтому, для интегральной суммы по Q получим

$$K \equiv \overline{\lim_{\substack{\lambda(T_1)\to 0\\ \lambda(T_2)\to 0}}}\left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} C_{ij}\right| \le \varepsilon C\int_0^1 |K_n(t,x)|\,dt\int_0^1 |K_m(t,y)|\,dt.$$

Используя (21), можем написать

$$K \le \varepsilon C. \tag{33}$$

Применяя доказательство пункта 1) для модулей интегральных сумм по квадратам $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0+\delta,1]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0,y_0+\delta]$ и $[x_0+\delta,1]\times[y_0+\delta,1]$, получим верхнюю оценку (27). Но из этих оценок и (32), (33) следует, что

$$|J_1(x,y)| \le \varepsilon C + C\,B(g,x_0,y_0)[m^2ne^{-\alpha m\delta/4} + n^2me^{-\alpha n\delta/4}]. \tag{34}$$

Аналогично можно получить оценку (34) для $J_i(x,y)$, $i = 2,3,4$, $|x - x_0| < \delta/2$, $|y - y_0| < \delta/2$. Из (31) и (34) следует, что

$$|S_{n,m}(x,y) - Dg(x_0,y_0)| \le \varepsilon C + o(1),$$

где $o(1)$ равномерно по $(x,y) \in (x_0-\delta/2, x_0+\delta/2) \times (y_0-\delta/2, y_0+\delta/2)$ сходится к нулю для любого $\mu \geq 1$, при $n \to \infty$, $m \to \infty$ и $1/\mu \leq n/m \leq \mu$. Теорема 2 доказана.

Для двоично-иррациональных точек $x_0 \in [0,1]$ обозначим через E_{x_0} предельные точки последовательности $S_n = \langle 2^n x_0 \rangle$, где $\langle t \rangle$ – дробная часть числа t, а для двоично-рациональных точек $x_0 \in [0,1]$ Положим $E_{x_0} = \{0,1\}$. Обозначим

$$a_{ij} = K_n(t_i,t_j), \quad R_n(t) = \int_0^{x_0} K_n(t,s)\,ds,$$

$$\overline{a}(x_0) = \varlimsup_{\substack{n\to\infty \\ t\to x_0}} R_n(t), \quad \underline{a}(x_0) = \varliminf_{\substack{n\to\infty \\ t\to x_0}} R_n(t).$$

Полуинтервалы $I_m^{(k)} \equiv \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right)$ будем называть *двоичными интервалами ранга* $k \geq 0$. При этом $I_0^{(0)} = [0,1]$.

Лемма 3. *Для любого $y_0 \in [0,1]$ множество $E = \{x \in [0,1] : y_0 \in E_x\}$ измеримо и mes $E = 1$.*

Доказательство. Для фиксированного y_0 обозначим через $I^{(k)}(y_0)$ объединение тех двоичных интервалов ранга k, замыканию которых принадлежит y_0 (при фиксированном k таких интервалов не более чем два). Легко видеть, что

$$[0,1] \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} B_k^n, \quad B_k^n = \{x \in [0,1] : \langle 2^l x \rangle \notin I^{(k)}(y_0) \text{ для } l \geq n\}.$$

Но так как $B_k^n = \bigcup_{i=0}^{2^n} (B_k^0 \oplus b_i)$, где b_i – двоично-рациональные числа вида $i/2^n$, $0 \leq i \leq 2^n$ (об определении $\oplus$ см. [1], стр. 158), то для доказательства леммы достаточно показать, что множество B_k^0 измеримо и mes $B_k^0 = 0$.

Пусть $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ – двоичное разложение числа $x \in [0,1]$, причем для двоично-рациональных чисел будем рассматривать только те разложения,для которых начиная с некоторого номера n_0 все x_n равны нулю. Исключением будет число 1. Скажем, что двоичный вектор $P^m x = (x_0, ..., x_{m-1})$ содержит двоичный вектор $P^i y = (y_0, ..., y_{i-1})$, где $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$, если существует n_0 такое, что $n_0 + i \leq m$, $x_{n_0+j} = y_j$, $j = 0, 1, ..., i-1$. Пусть $A_{m,k}^1$ – множество тех точек $x \in [0,1]$, для которых вектор $P^m x$ не содержит вектор $P^k y_0$. Если y_0 – двоично-рациональное число, то $A_{m,k}^2$ – множество тех точек $x \in [0,1]$, для которых вектор

$P^m x$ не содержит вектор $P_1^k y_0 = (y_0^1, ..., y_{k-1}^1)$, где $y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n^1}{2^{n+1}}$ и все y_n^1 равны 1, начиная с некоторого номера. Множества $A^i_{m,k}$, $i = 1, 2$ являются объединениями двоичных интервалов ранга m. Так как

$$R_m^k = \{x \in [0,1] : \ (2^l x) \notin I^{(k)}(y_0) \text{ при } 0 \leq l \leq m\} =$$

$$= \begin{cases} A^1_{m+k-1,k} \text{ при двоично-иррациональных } y_0, \\ A^1_{m+k-1,k} \cap A^2_{m+k-1,k} \text{ при двоично-рациональных } y_0, \end{cases}$$

и $B_k^0 = \bigcap_{m=3k}^{\infty} R_m^k$, то R_m^k и B_k^0 измеримы.

Обозначим через $\widetilde{A}^1_{m,k}$ множество тех векторов $P^m x$, которые не содержат вектор $P^k y_0$, а через $|A|$ – мощность множества A. Нетрудно убедиться в справедливости следующих рекуррентных соотношений :

$$\left|\widetilde{A}^1_{m+1,k}\right| = 2\left|\widetilde{A}^1_{m,k}\right| - \left|\left(\widetilde{A}^1_{m-k+1,k} \times \{P^{k-1}y_0\}\right) \cap \widetilde{A}^1_{m,k}\right|,$$

$$\left|\left(\widetilde{A}^1_{m-k+1,k} \times \{P^{k-1}y_0\}\right) \cap \widetilde{A}^1_{m,k}\right| = \left|\widetilde{A}^1_{m-k+1,k}\right| -$$

$$-\sum_{i\in I}\left|\left(\widetilde{A}^1_{m-k-k_i+1,k} \times \{y^i\}\right) \cap \widetilde{A}^1_{m-k+1,k}\right|,$$

где y^j – вектор размерности k_j, $k_j < k$ такой, что вектор $(y^j, P^{k-1}y_0)$ содержит вектор $P^k y_0$, I – множество тех индексов i, для которых вектор y^i не может быть представлен как (z, y^j), где z – вектор. Так как из определения y^i, $i \in I$ следует, что $k_i \neq k_j$, $i \neq j$, $i, j \in I$, то из рекуррентных соотношений и из mes $A^1_{m,k} = \left|\widetilde{A}^1_{m,k}\right| 2^{-m}$, $A^1_{m+1,k} \subset A^1_{m,k}$ следует, что

$$\lim_{m\to\infty} 2^{-k} \operatorname{mes} A^1_{m-k+1,k} \leq \sum_{i\in I} 2^{-k_i-k} \lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} A^1_{m-k-k_i+1,k}.$$

Следовательно $\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} A^1_{m,k} = 0$. А из

$$B_k^0 = \bigcap_{m=3k}^{\infty} R_m^k, \quad R_{m+1}^k \subset R_m^k \subset A^1_{m+k-1,k}$$

следует, что mes $B_k^0 = \lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} R_m^k = 0$.

Лемма 4. *В каждой точке $x_0 \in (0,1)$ имеют место оценки*

$$-\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})} \leq \underline{a}(x_0) \leq \frac{-3\sqrt{3}+4}{12}, \quad 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{6} \leq \overline{a}(x_0) \leq 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})},$$

причем почти всюду

$$\underline{a}(x_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}, \quad \overline{a}(x_0) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})}.$$

Замечание 4. Из леммы 4 следует, что для почти всех x_0 верхние и нижние пределы $\overline{a}(x_0)$ и $\underline{a}(x_0)$ частичных сумм ряда Фурье–Франклина характеристической функции $\varphi(x)$ отрезка $[0, x_0]$ расположены ассиметрично относительно прямой $y = 1/2$. Для рядов Фурье и Фурье–Уолша функции $\varphi(x)$ имеет место симметрия (см. [5], стр. 123 и [4], [11]).

Доказательство леммы 4. Пусть точка x_0 фиксирована, тогда для любого n существуют $i_0 = i_0(n)$ и $\beta_n \in [0,1]$ такие, что $x_0 \in \Delta_{i_0}^{(n)} = [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ и $x_0 = \beta_n t_{i_0-1} + (1-\beta_n)t_{i_0}$. Из линейности $K_n(t_j, s)$ на отрезках $\Delta_i^{(n)}$ при фиксированном j имеем

$$R_n(t_j) = \sum_{i=1}^{i_0-1} \int_{\Delta_i^{(n)}} K_n(t_j, t)\, dt + \int_{t_{i_0-1}}^{x_0} K_n(t_j, t)\, dt =$$

$$= (x_0 - t_{i_0-1}) \frac{K_n(t_j, t_{i_0-1}) + K_n(t_j, x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{i_0-1} \Delta_i^{(n)} \frac{K_n(t_j, t_{i-1}) + K_n(t_j, t_i)}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\Delta_i^{(n)}}{2}(a_{j,i-1} + a_{ji}) + (1-\beta_n)\frac{\Delta_{i_0}^{(n)}}{2}[(1+\beta_n)a_{j,i_0-1} + (1-\beta_n)a_{j,i_0}].$$

а) Если $i_0 \le 2k$, то из леммы 1 имеем

$$R_n(t_j) = \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{1}{2^{m+2}}(a_{j,i-1} + a_{ji}) + \frac{(1-\beta_n)}{2^{m+2}}[(a_{j,i_0-1} + a_{j,i_0}) + \beta_n(a_{j,i_0-1} - a_{j,i_0})] =$$

$$= \frac{1}{2^{m+2}}(a_{j0} + 2a_{j1} + \cdots + 2a_{j,i_0-2} + a_{j,i_0-1}) + \frac{(1-\beta_n)}{2^{m+2}} \times$$

$$\times [(a_{j,i_0-1} + a_{j,i_0}) + \beta_n(a_{j,i_0-1} - a_{j,i_0})] = \sum_{i=0}^{i_0-1} \delta_{ij} + \frac{1}{2^{m+2}}[r_1(\beta_n)a_{j,i_0-1} + r_2(\beta_n)a_{j,i_0}], \tag{35}$$

где

$$r_1(\beta) = -\frac{2}{3} + (1-\beta^2), \quad r_2(\beta) = -\frac{1}{3} + (1-\beta)^2.$$

б) Если $i_0 \ge 2k+1$, то из леммы 1 имеем

$$R_n(t_j) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{2^{m+2}}(a_{j,i-1} + a_{ji}) + \frac{(1-\beta_n)}{2^{m+1}}[(a_{j,i_0-1} + a_{j,i_0}) + \beta_n(a_{j,i_0-1} - a_{j,i_0})] +$$

$$+\sum_{i=2k+1}^{i_0-1}\frac{1}{2^{m+1}}(a_{j,i-1}+a_{j,i})=\sum_{i=0}^{i_0-1}\delta_{ij}+\frac{1}{2^{m+1}}\left[r_1(\beta_n)a_{j,i_0-1}+r_2(\beta_n)a_{j,i_0}\right]. \quad (36)$$

Из $\int\limits_0^1 K_n(t,s)\,ds=1$ и оценки (6) следует, что $R_n(t)$ равномерно сходится вне любой окрестности точки x_0. Следовательно

$$\overline{a}(x_0)=\varlimsup_{n\to\infty}\max_{t\in[0,1]}R_n(t),\quad \underline{a}(x_0)=\varliminf_{n\to\infty}\min_{t\in[0,1]}R_n(t).$$

Из теоремы В следует, что при $j\le i_0$, $|a_{i_0,j}|$ возрастает, когда j возрастает; при $j\ge i_0$, $|a_{i_0,j}|$ убывает, когда j возрастает; $a_{i_0-1,j}$ и $a_{i_0,j}$ имеют противоположные знаки; выражение $\frac{a_{j,i_0-1}}{a_{j,i_0}}$ зависит от i_0 и не зависит от j при $j\ge i_0$ и при $j\le i_0-1$. Так как $R_n(t)$ является ломаной из n звеньев и узлов в точках t_i, то из вышеизложенного и из (35), (36) следует, что для $R_n(t)$ точки максимума и минимума находятся в множестве $\{t_{i_0-2},t_{i_0-1},t_{i_0},t_{i_0+1}\}$.

Положим

$$P_1(\beta)=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-2\alpha}[r_2(\beta)-e^{\alpha}r_1(\beta)],$$

$$P_2(\beta,b)=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-2\alpha}[r_2(\beta)(3-e^{-2\alpha b})-e^{\alpha}r_1(\beta)(3-e^{-2\alpha b-2\alpha})],$$

$$Q_1(\beta,d)=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-2\alpha}[r_1(\beta)(3+e^{-2\alpha d+2\alpha})-e^{\alpha}r_2(\beta)(3+e^{-2\alpha d})],$$

$$\overline{P}(\beta)=\max_{0\le b\le\infty}(P_1(\beta),P_2(\beta,b),-e^{\alpha}P_1(\beta),-e^{\alpha}P_2(\beta,b)),$$

$$\underline{P}(\beta)=\min_{0\le b\le\infty}(P_1(\beta),P_2(\beta,b),-e^{\alpha}P_1(\beta),-e^{\alpha}P_2(\beta,b)),$$

$$\overline{Q}(\beta)=\max_{1\le d\le\infty}(Q_1(\beta,d),-e^{\alpha}Q_1(\beta,d)),\quad \underline{Q}(\beta)=\min_{1\le d\le\infty}(Q_1(\beta,d),-e^{\alpha}Q_1(\beta,d)).$$

Найдем предельные точки последовательностей $\{R_n(t_j)\}$, $j=i_0-2,i_0-1,i_0,i_0+1$. Если послеовательность $R_{n_\nu}(t_j)$ сходится, то без ограничения общности можем предполагать, что последовательность β_{n_ν} тоже сходится.

а) Если $i_0\le 2k_p-1$ и $\beta_{n_\nu}\to\beta$, $\beta\in E_{x_0}$, то из теоремы В и (35) имеем

а1)

$$a_{i_0,i_0-2}=\sqrt{3}\gamma_n 2^{m+2}\cosh\alpha(i_0-2)[\cosh\alpha(n-i_0)+\sinh\alpha(n-2k)\sinh\alpha(2k-i_0)],$$

$$a_{i_0-1,i_0-2}=-\sqrt{3}\gamma_n 2^{m+2}\cosh\alpha(i_0-2)\times$$

$$\times[\cosh\alpha(n-i_0+1)+\sinh\alpha(n-2k)\sinh\alpha(2k-i_0+1)],$$

$$R_{n_p}(t_{i_0-2}) = 1+\sqrt{3}\gamma_{n_p}\cosh\alpha(i_0-2)\times$$

$$\times\left\{r_2(\beta_{n_p})[\cosh\alpha(n_p-i_0)+\sinh\alpha(n_p-2k_p)\sinh\alpha(2k_p-i_0)]-\right.$$

$$\left.-r_1(\beta_{n_p})[\cosh\alpha(n_p-i_0+1)+\sinh\alpha(n_p-2k_p)\sinh\alpha(2k_p-i_0+1)]\right\} = 1+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{\alpha(i_0-2)}e^{\alpha(n_p-i_0)}\left\{r_2(\beta_{n_p})[3-e^{\alpha(2i_0-4k_p)}-e^{\alpha(4k_p-2n_p)}]-\right.$$

$$\left.-r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha}[3-e^{\alpha(2i_0-4k_p-2)}-e^{\alpha(4k_p-2n_p)}]\right\} = 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_p}\times$$

$$\times\left\{r_2(\beta_{n_p})[3-e^{-2\alpha b_p}-e^{-2\alpha c_p}]-r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha}[3-e^{-2\alpha c_p}-e^{-2\alpha b_p-2\alpha}]\right\}+o(1),$$

где

$$b_p = 2k_p - i_0, \quad c_p = n_p - 2k_p, \quad n_p = 2^{m_p} + k_p, \quad 1 \le k_p \le 2^{m_p}.$$

Так как $b_p + c_p = n_p - i_0 \to \infty$, при $n_p \to \infty$, то без ограничения общности можем предполагать, что $b_p \to \infty$ или $c_p \to \infty$, а b_p остается постоянной. Предельные точки последовательности $R_{n_p}(t_{i_0-2})$ имеют следующий вид :

$$\begin{cases} 1+\frac{3}{4}P_1(\beta), & \text{если } b_p \to \infty, \\ 1+P_2(\beta,b), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b = 1,2,\dots \end{cases}$$

В остальных случаях получим

а2) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0-1}) = 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-\alpha}e^{\alpha n_p}\times$$

$$\times\left[-r_2(\beta_{n_p})(3-e^{-2\alpha b_p}-e^{-2\alpha c_p})+r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha}(3-e^{-2\alpha c_p}-e^{-2\alpha b_p-2\alpha})\right]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} 1-\frac{3}{4}e^{\alpha}P_1(\beta), & \text{если } b_p \to \infty, \\ 1-e^{\alpha}P_2(\beta,b), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b. \end{cases}$$

а3) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-\alpha}e^{\alpha n_p}(3-e^{-2\alpha b_p}-e^{-2\alpha c_p})[r_2(\beta_{n_p})e^{\alpha}-r_1(\beta_{n_p})]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} -e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{если } b_p \to \infty, \\ -\frac{1}{3}(3-e^{-2\alpha b})e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b. \end{cases}$$

а4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}(3 - e^{-2\alpha b_\nu+2\alpha} - e^{-2\alpha c_\nu})[r_1(\beta_{n_\nu}) - e^{\alpha}r_2(\beta_{n_\nu})] + o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} Q_1(\beta,\infty), & \text{если } b_p \to \infty, \\ \frac{1}{3}(3 - e^{-2\alpha b+2\alpha})Q_1(\beta,\infty), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b. \end{cases}$$

б) Если $i_0 \geq 2k_p + 2$ и $\beta_{n_\nu} \to \beta$, $\beta \in E_{x_0}$, то из теоремы В и (36) имеем

б1)

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-2}) = 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}(3+e^{-2\alpha d_\nu+4\alpha}+e^{-2\alpha q_\nu})[r_2(\beta_{n_\nu})-e^{\alpha}r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1),$$

где

$$q_p = 2k_p,\quad d_p = i_0 - 2k_p,\quad n_p = 2^{m_\nu} + k_p,\quad 1 \leq k_p \leq 2^{m_\nu}.$$

Так как $d_p + q_p = i_0 \to \infty$, при $n_p \to \infty$, то без ограничения общности можем предполагать, что $d_p \to \infty$ или $q_p \to \infty$, а d_p остается постоянной. Предельные точки последовательности $R_{n_\nu}(t_{i_0-2})$ имеют вид

$$\begin{cases} 1 + \frac{3}{4}P_1(\beta), & \text{если } d_p \to \infty, \\ 1 + \frac{1}{4}(3 + e^{-2\alpha d+4\alpha})P_1(\beta), & \text{если } q_p \to \infty,\ d_p = d = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

б2) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-1}) = 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-\alpha}e^{\alpha n_\nu}(3+e^{-2\alpha d_\nu+2\alpha}+e^{-2\alpha q_\nu})[r_1(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}-r_2(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{4}P_1(\beta), & \text{если } d_p \to \infty, \\ 1 - \frac{1}{4}(3 + e^{-2\alpha d+2\alpha})P_1(\beta), & \text{если } q_p \to \infty,\ d_p = d. \end{cases}$$

б3) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-\alpha}e^{\alpha n_\nu}\times$$

$$\times[-(3 + e^{-2\alpha d_\nu+2\alpha} + e^{-2\alpha q_\nu})r_1(\beta_{n_\nu}) + (3 + e^{-2\alpha d_\nu} + e^{-2\alpha q_\nu})e^{\alpha}r_2(\beta_{n_\nu})] + o(1)$$

предельными точками являются t

$$\begin{cases} -e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{если } d_p \to \infty, \\ -e^{\alpha}Q_1(\beta,d), & \text{если } q_p \to \infty,\ d_p = d. \end{cases}$$

б4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1})=\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}\times$$

$$\times[(3+e^{-2\alpha d_\nu+2\alpha}+e^{-2\alpha q_\nu})r_1(\beta_{n_\nu})-(3+e^{-2\alpha d_\nu}+e^{-2\alpha q_\nu})e^{\alpha}r_2(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} Q_1(\beta,\infty), & \text{если } d_p\to\infty,\\ Q_1(\beta,d), & \text{если } q_p\to\infty,\ d_p=d.\end{cases}$$

в) Если $i_0=2k_p+1$, то из теоремы В и (36) следует, что

в1) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-2})=1+\frac{2\sqrt{3}}{4}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}[r_2(\beta_{n_\nu})-e^{\alpha}r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $1+P_1(\beta)$.

в2) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-1})=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\alpha}[r_1(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}-r_2(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $1-e^{\alpha}P_1(\beta)$.

в3) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0})=\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-\alpha}[(3+e^{-2\alpha})r_2(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}-4r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $-e^{\alpha}Q_1(\beta,1)$.

в4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1})=\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}[-(3+e^{-2\alpha})r_2(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}+4r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $Q_1(\beta,1)$.

г) Если $i_0=2k_p$, то из теоремы В и (35) следует, что

г1) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-2})=1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}[2r_2(\beta_{n_\nu})-e^{\alpha}r_1(\beta_{n_\nu})(3-e^{-2\alpha})]+o(1)$$

предельными точками являются $1+P_2(\beta,0)$.

г2) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-1}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu} e^{-\alpha} e^{\alpha n_\nu}[-2r_2(\beta_{n_\nu}) + e^\alpha r_1(\beta_{n_\nu})(3 - e^{-2\alpha})] + o(1)$$

предельными точками являются $1 - e^\alpha P_2(\beta, 0)$.

г3) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{n_\nu} e^{-\alpha} e^{\alpha n_\nu}[r_2(\beta_{n_\nu})e^\alpha - r_1(\beta_{n_\nu})] + o(1)$$

предельными точками являются $-\frac{2}{3}e^\alpha Q_1(\beta, \infty)$.

г4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{n_\nu} e^{-2\alpha} e^{\alpha n_\nu}[-r_2(\beta_{n_\nu})e^\alpha + r_1(\beta_{n_\nu})] + o(1)$$

предельными точками являются $\frac{2}{3}Q_1(\beta, \infty)$.

Уравнения

$$P_1(\beta) - P_2(\beta, 0) = 0, \quad P_1(\beta) = 0, \quad e^\alpha P_1(\beta) + P_2(\beta, 0) = 0,$$

$$P_2(\beta, 0) = 0, \quad P_1(\beta) + e^\alpha P_2(\beta, 0) = 0,$$

$$Q_1(\beta, 1) = 0, \quad Q_1(\beta, 1) + e^\alpha Q_1(\beta, \infty) = 0, \quad Q_1(\beta, \infty) = 0,$$

$$Q_1(\beta, 1) - Q_1(\beta, \infty) = 0, e^\alpha Q_1(\beta, 1) + Q_1(\beta, \infty) = 0$$

имеют единственные решения в интервале $(0, 1)$, которые мы обозначим через $A_1, ..., A_5$, $B_1, ..., B_5$ соответственно. Обозначим через A_6, A_7, B_6, B_7 точки максимумов $-e^\alpha P_1(\beta)$, $-e^\alpha P_2(\beta, 0)$, $Q_1(\beta, 1)$, $Q_1(\beta, \infty)$. Ясно, что

$$A_7 < A_6 < \frac{1}{2} < A_4 < A_5 < A_2 < A_1, \quad A_4 < A_3 < A_2,$$

$$B_1 < B_2 < B_3 < \frac{1}{2} < B_4 < B_6 < B_7, \quad B_1 < B_5 < B_3.$$

Убедимся, что

$$\overline{P}(\beta) = \begin{cases} -e^\alpha P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [0, A_3], \\ P_2(\beta, 0), & \text{когда } \beta \in [A_3, A_1], \\ P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [A_1, 1], \end{cases}$$

$$\underline{P}(\beta) = \begin{cases} P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [0, A_5], \\ -e^\alpha P_2(\beta, 0), & \text{когда } \beta \in [A_5, A_1], \\ -e^\alpha P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [A_1, 1], \end{cases} \tag{37}$$

$$\overline{Q}(\beta) = \begin{cases} -e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [0, B_2], \\ Q_1(\beta, 1), & \text{когда } \beta \in [B_2, B_4], \\ Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [B_4, 1], \end{cases}$$

$$\underline{Q}(\beta) = \begin{cases} Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [0, B_5], \\ -e^{\alpha}Q_1(\beta, 1), & \text{когда } \beta \in [B_5, B_4], \\ -e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [B_4, 1]. \end{cases} \tag{38}$$

Для этого покажем, что имеют место неравенства

$$P_2(\beta, b) \le P_2(\beta, 0), \quad \beta \in [A_4, 1], \quad b = 0, 1, ..., \tag{39}$$

$$P_2(\beta, 0) \le P_1(\beta), \quad \beta \in [A_1, 1], \tag{40}$$

$$P_1(\beta) \le P_2(\beta, 0), \quad \beta \in [0, A_1], \tag{41}$$

$$P_1(\beta) \le P_2(\beta, b), \quad \beta \in [0, A_2], \quad b = 0, 1, ..., \tag{42}$$

$$Q_1(\beta, 1) \le Q_1(\beta, d) \le Q_1(\beta,\infty), \quad \beta \in [B_4, 1], \quad d = 1, 2, ..., \tag{43}$$

$$Q_1(\beta,\infty) \le Q_1(\beta, d) \le Q_1(\beta, 1), \quad \beta \in [0, B_4], \quad d = 1, 2, ... \tag{44}$$

Так как $P_2(A_4, 0) \ge P_2(A_4, b)$, $P_2(1, 0) \ge P_2(1, b)$ и коэффициент главного члена трехчлена $P_2(\beta, 0) - P_2(\beta, b)$ отрицателен, то выполняется (39). Уравнение $P_2(\beta, 0) - P_1(\beta) = 0$ имеет единственное решение в интервале $(0, 1)$. Поэтому, из $P_2(1, 0) < P_1(1)$ следуют неравенства (40) и (41). Неравенство (42) следует из неравенства $P_1(0) \le P_2(0, b)$, $P_1(A_2) \le P_2(A_2, b)$ и из неотрицательности коэффициента главного члена трехчлена $P_2(\beta, b) - P_1(\beta)$. Неравенства (43) и (44) следуют из

$$Q_1(1, 1) \le Q_1(1, d) \le Q_1(1,\infty), \quad Q_1(0,\infty) \le Q_1(0, d) \le Q_1(0, 1)$$

и из того, что уравнение $Q_1(\beta, d_1) - Q_1(\beta, d_2) = 0$, $d_1 \ne d_2$ имеет единственное решение B_4 в интервале $(0, 1)$.

Из (35), (36) и а1) – г4) следует, что

$$\overline{a}(x_0) = \max_{\beta \in B_{x_0}} \max[1 + \overline{P}(\beta), \overline{Q}(\beta)], \quad \underline{a}(x_0) = \min_{\beta \in B_{x_0}} \min[1 + \underline{P}(\beta), \underline{Q}(\beta)].$$

Так как

$$\max_{\beta \in [0,1]} \overline{Q}(\beta) = \overline{Q}(0) < 1, \quad \min_{\beta \in B_{x_0}} \underline{P}(\beta) = \underline{P}(1) \ge -1,$$

то имеем

$$\overline{a}(x_0) = 1 + \max_{\beta \in E_{x_0}} \overline{P}(\beta), \quad \underline{a}(x_0) = \min_{\beta \in E_{x_0}} \underline{Q}(\beta). \tag{45}$$

Из определения следует, что E_{x_0} содержит левые и правые точки от $1/2$. С учетом того, что $\overline{P}(1/2) \le \overline{P}(\beta)$, при $\beta \in [0,1/2]$, $\underline{Q}(1/2) \ge \underline{Q}(\beta)$, при $\beta \in [1/2,1]$, и из (37), (38), (45) следует, что

$$1 + \overline{P}(1/2) \le \overline{a}(x_0) \le 1 + \overline{P}(A_6), \quad \underline{Q}(B_7) \le \underline{a}(x_0) \le \underline{Q}(1/2),$$

$$A_6 = \frac{1}{e^\alpha + 1}, \quad B_7 = \frac{e^\alpha}{1 + e^\alpha}, \tag{46}$$

причем

$$\overline{P}(1/2) = \frac{\sqrt{3} - 1}{6}, \quad \overline{P}(A_6) = \frac{2\sqrt{3}}{3(3 + \sqrt{3})},$$

$$\underline{Q}(1/2) = \frac{-3\sqrt{3} + 4}{12}, \quad \underline{Q}(B_7) = -\frac{\sqrt{3}}{2(3 + \sqrt{3})}.$$

Согласно лемме 3

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,1] :\ B_7 \in E_t\} = 1, \qquad \operatorname{mes}\{t \in [0,1] :\ A_6 \in E_t\} = 1.$$

Следовательно, из (45) и (46), для почти всех x_0 имеем $\overline{a}(x_0) = 1 + \overline{P}(A_6)$ и $\underline{a}(x_0) = \underline{Q}(B_7)$.

Доказательство теоремы 4. Пусть функция $f(x)$ имеет неустранимый разрыв первого рода в точке x_0 и $f(x_0 + 0) = d_1$, $f(x_0 - 0) = d_2$, а $\varphi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0, x_0]$. Тогда функция $\widetilde{f}(x) = f(x) - \varphi(x)(d_2 - d_1)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0, и согласно пункту 2) теоремы 1 ряд Фурье–Франклина функции $\widetilde{f}(x)$ равномерно сходится к нулю в точке x_0. Следовательно

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ n \to \infty}} S_n(f,x) = \begin{cases} (d_2 - d_1)\overline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 > d_1, \\ (d_2 - d_1)\underline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 < d_1, \end{cases} \tag{47}$$

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ n \to \infty}} S_n(f,x) = \begin{cases} (d_2 - d_1)\overline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 < d_1, \\ (d_2 - d_1)\underline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 > d_1, \end{cases} \tag{48}$$

где $S_n(f,x)$ – n–ая частичная сумма ряда Фурье–Франклина функции $f(x)$. Из определения функции Гиббса (см. определение 4) и из (47), (48) следует, что

$$G(x_0) = \max\left(2\overline{a}(x_0) - 1, -2\underline{a}(x_0) + 1\right). \tag{49}$$

Из (49) и леммы 4 следует утверждение теоремы 3.

Автор выражает благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постоянное внимание к работе.

ABSTRACT. The paper contains theorems on convergence and uniform convergence at a point for simple Franklin series, as well as λ-convergence and uniform λ-convergence at a point for double Franklin series. The results are applied to the study of Gibbs phenomenon for Franklin system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва 1984.
2. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.
3. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, Москва 1965.
4. Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Явление Гиббса для системы Уолша", Докл. АН СССР, т. 268, № 5, стр. 1033 – 1034, 1983.
5. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
6. А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виленкина–Джафарли", Сиб. мат. журн., т. 12, № 1, стр. 147 – 157, 1971.
7. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН АрмССР, т. 64, № 2, стр. 72 – 76, 1977.
8. Н. Б. Погосян, "Представление измеримых функций ортогональными рядами", Мат. сборник, т. 98, стр. 102 – 112, 1975.
9. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Сочинения, т. 1, стр. 5 – 24.
10. Г. Г. Геворкян, "О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина", ДАН АрмССР, т. 83, № 1, стр. 15 – 18, 1986.
11. О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса двойных рядов Фурье–Уолша функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 5, стр. 30 – 46, 1995.

8 января 1996 Институт математики НАН Армении

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СЕГЁ

А. А. Вагаршакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 1, 1996

В статье представлено новое обобщение теоремы Г.Сегё о полноте системы $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$ в весовом пространстве, обобщающем хорошо известное пространство Жеврея.

В статье обобщается теорема Г.Сегё о полноте системы $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$ в весовом пространстве $L_2(d\mu)$. Подобное обобщение теоремы Сегё ранее было предложено Н. Г. Макаровым [1] и автором [2].

Пусть $\mathcal{J}_\alpha(d\mu)$ – пространство бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$||f||_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f^{(n)}(x)}{(n!)^\alpha}\right|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} < \infty,$$

где $\alpha > 0$. В случае, когда $d\mu$ –мера Лебега, пространство $\mathcal{J}_\alpha(dx)$ фактически совпадает с хорошо известным пространством Жеврея. Найдены условия на $d\mu$, при которых система $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{J}_\alpha(d\mu)$.

В данной статье мы исследуем также задачу полноты системы $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\geq 0}$ в пространстве $\mathcal{J}_\alpha(d\mu, \mathbb{R}_1)$. Класс $\mathcal{J}_\alpha(d\mu, \mathbb{R}_1)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ таких, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f^{(n)}(x)}{(n!)^\alpha}\right|^2 d\mu(x) < \infty. \qquad (1)$$

Оказывается, что для полноты системы $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\geq 0}$ в пространстве $\mathcal{J}_\alpha(d\mu, \mathbb{R}_1)$ на меру $d\mu$ следует наложить существенно разные условия в окрестности конечной и бесконечно удаленной точки.

1. В дальнейшем мы воспользуемся следующим обобщением неравенства Гарнака.

Лемма 1. *Пусть $u(z)$ –неотрицательная гармоническая функция, определенная в единичном круге. Тогда для любых точек z_0, z_1, $|z_j| < 1$, $j = 0, 1$, удовлетворяющих условию*

$$|z_1 - z_0| \leq \frac{1 - |z_0|}{2},$$

имеет место неравенство

$$u(z_1) \leq 12\, u(z_0).$$

Лемма 2. *Пусть $E \subseteq \partial\mathcal{D}$ – некоторое множество, хаусдорфовы меры M_σ которой положительны (см. [3]) : $\mathcal{M}_\sigma(E) > 0$, $\quad 0 < \sigma \leq 1$, и пусть*

$$\Omega_A = \left\{ z: \ 0 < 1 - |z| < A\, d^{2-\sigma}\left(\frac{z}{|z|}, E\right) \right\},$$

где $d(w, E) = \inf_{z \in E} |z - w|$, а A – постоянная. Тогда существует аналитическая в единичном круге функция $F(z)$, обладающая следующими свойствами :

1. $F(0) = e$,

2. $1 \leq |F(z)| \leq \exp\left\{\frac{b}{(1-|z|)^{1-\sigma}}\right\}$, $\quad |z| < 1, \quad b$ – постоянная,

3. для любого $\varepsilon > 0$ число $A > 0$ можно подобрать настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$|F(z)| \leq e^{\varepsilon}, \quad z \in \Omega_A.$$

Доказательство. По теореме О. Фростмана существует вероятностная мера $d\lambda$, сосредоточенная в E (т. е. $\mathrm{supp}\lambda \subseteq E$) такая, что для любой дуги $\Delta \subseteq \partial\mathcal{D}$ имеет место неравенство

$$\lambda(\Delta) \leq C|\Delta|^{\sigma}, \tag{2}$$

где $C > 0$ –постоянная, не зависящая от длины $|\Delta|$ дуги Δ. Обозначим

$$F(z) = \exp\left\{ \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\lambda(\zeta) \right\}, \quad |z| < 1.$$

В силу неравенства (2), всюду в единичном круге имеет место оценка

$$1 \leq |F(z)| \leq \exp\left\{ b \cdot (1 - |z|)^{\sigma - 1} \right\}.$$

Для $z \in \partial\mathcal{D}$ обозначим

$$C_t(z) = \{ w: \ |w - z| \leq t,\ w \in \partial\mathcal{D} \}.$$

Тогда для любой точки $z \in \mathcal{D} \cup \Omega_A$ имеем

$$\int_E \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} d\lambda(\zeta) \le 2Ad^{2-\sigma}\left(\frac{z}{|z|}, E\right) \int_E \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - z|^2} \le$$

$$\le 2Ad^{2-\sigma}\left(\frac{z}{|z|}, E\right) \int_0^2 \frac{d\lambda\left(C_t\left(\frac{z}{|z|}\right)\right)}{t^2} \le$$

$$\le 2Ad^{2-\sigma}\left(\frac{z}{|z|}, E\right)\left(\frac{\lambda(\partial\mathcal{D})}{4} + 2\int_{d\left(\frac{z}{|z|}, E\right)}^2 \frac{\lambda\left(C_t\left(\frac{z}{|z|}\right)\right)}{t^3} dt\right) \le$$

$$\le 2Ad^{2-\sigma}\left(\frac{z}{|z|}; E\right)\left(\frac{\lambda(\partial\mathcal{D})}{4} + 2C\int_{d\left(\frac{z}{|z|}, E\right)}^2 \frac{dt}{t^{3-\sigma}}\right).$$

Из этой оценки следует третье утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $f(z)$ – аналитическая в единичном круге функция, удовлетворяющая неравенству $|f(z)| \ge 1$. Тогда для любых $0 < \rho < 1$ и натурального n имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\partial^n f(\rho e^{ix})}{\partial x^n}\right| \le \left(\frac{4\rho}{1-\rho}\right)^n n!\, |f^{12}(\rho e^{ix})|.$$

Доказательство. По теореме Коши

$$|f^{(n)}(z)| \le \left(\frac{2}{1-\rho}\right)^n n! \max_{|z-w| \le \frac{1-\rho}{2}} |f(w)|$$

при $|z| = \rho < 1$

В силу леммы 1 имеем

$$|f^{(n)}(z)| \le \left(\frac{2}{1-\rho}\right)^n n!\, |f^{12}(z)|.$$

Очевидно

$$\frac{\partial f(\rho e^{ix})}{\partial x} = i\rho e^{ix} f^{(1)}(\rho e^{ix}).$$

Следовательно, лемма верна при $n = 1$. Предположим, что она верна для всех натуральных чисел до n и докажем ее для $n+1$. Имеем

$$\frac{\partial^{n+1} f(\rho e^{ix})}{\partial x^{n+1}} = (i)^{n+1}\left[A_1^{(n)} \rho e^{ix} f^{(1)}(\rho e^{ix}) + \right.$$

$$\left. + (A_1^{(n)} + 2A_2^{(n)})(\rho e^{ix})^2 f^{(2)}(\rho e^{ix}) + \ldots + A_n^{(n)} (\rho e^{ix})^{n+1} f^{(n+1)}(\rho e^{ix})\right],$$

где

$$\frac{\partial^n f(\rho e^{ix})}{\partial x^n} =$$

$$= (i)^n \left[A_1^{(n)} \rho e^{ix} f^{(1)}(\rho e^{ix}) + A_2^{(n)} (\rho e^{ix})^2 f^{(2)}(\rho e^{ix}) + \ldots + A_n^{(n)} (\rho e^{ix})^n f^{(n)}(\rho e^{ix})\right].$$

Следовательно

$$A_k^{(n+1)} = A_{k-1}^{(n)} + kA_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{3}$$

где $A_{-1}^{(n)} = 0$, $A_{n+1}^{(n)} = 0$. Очевидно

$$\left|\frac{\partial^n f(\rho e^{ix})}{\partial x^n}\right| \leq \left(\frac{2\rho}{1-\rho}\right)^n \left(\sum_{n=1}^{n} A_k^{(n)} k!\right) |f^{12}(\rho e^{ix})|.$$

Обозначая

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} k!$$

и учитывая (3), можем написать

$$C_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} A_k^{(n+1)} k! = \sum_{k=1}^{n+1} (A_{k-1}^{(n)} + kA_k^{(n)}) k! \leq 2(n+1) C_n,$$

откуда следует, что $C_n \leq 2^n n!$.

Теорема 1. *Система функций* e^{inx}, $n = 0, 1, \ldots$ *полна в пространстве* $\mathcal{J}_\alpha(d\mu)$, *где* $\alpha > 1$, *если существует множество* $E \subseteq \partial\mathcal{D}$ *такое, что* $\mathcal{M}_\sigma(E) > 0$, *где* $0 \leq \sigma \leq 1$ *и*

$$\liminf_{\delta \to 0} \delta^{(\alpha - \alpha\sigma + \sigma)\frac{2-\sigma}{\sigma-1}} \log \mu(E_\delta) < 0,$$

где $E_\delta = \cup_{z \in E} \{w : \ w \in \partial\mathcal{D}, \ |z - w| < \delta\}$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathcal{J}_\alpha^*(d\mu)$ и

$$l(e^{inx}) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Заметим, что функция

$$\Phi(z) = l\left(\frac{1}{e^{ix} - z}\right), \quad |z| \neq 1$$

аналитична вне единичной окружности. При $|z| > 1$ имеем :

$$\Phi(z) = l\left(\frac{1}{e^{ix} - z}\right) = -\frac{1}{z} l\left(\frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{z}}\right) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} l(e^{inx}) = 0.$$

Мы хотим доказать, что функция $\Phi(z)$ обращается в нуль также при $|z| < 1$. Отсюда будет следовать, что (4) имеет место не только для неотрицательных но и для всех целых n. Предположим обратное. Не теряя общности можно считать, что $\Phi(0) = l(e^{ix}) \neq 0$. Заметим, что для любых $0 < \rho < 1$ и натурального n имеет место неравенство

$$\Phi(z)F^n(\rho z) = l\left(\frac{F^n(\rho e^{ix})}{e^{ix} - z}\right), \quad |z| < 1,$$

где $F(z)$ – функция, построенная в лемме 2. Действительно, если обобщенная функция l порождается обычной функцией, т. е.

$$l(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix})g(e^{ix})dx, \quad f \in \mathcal{J}_\alpha(d\mu),$$

где $g(e^{ix}) \in L_1(-\pi, \pi)$, то условие (4) означает

$$l(e^{inx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{ix})e^{inx}\,dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Следовательно, функция $g(e^{ix})e^{-ix}$ допускает аналитическое продолжение $G(z)$ внутрь единичного круга. Заметим, что $G(z) \in H_1$. Тем самым, при $|z| < 1$ имеем

$$\Phi(z) = l\left(\frac{1}{e^{ix} - z}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{ix})}{e^{ix} - z}dx = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = G(z).$$

Так как $F^n(\rho z)$ – аналитическая функция в круге $\{z : |z| < 1/\rho\}$, то

$$\Phi(z)F^n(\rho z) = G(z)F^n(\rho z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{G(\zeta)F^n(\rho\zeta)}{\zeta - z}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{ix})F^n(\rho e^{ix})}{e^{ix} - z}dx = l\left(\frac{F^n(\rho e^{ix})}{e^{ix} - z}\right).$$

В общем случае мы аппроксимируем функционал в слабой топологии пространства $\mathcal{J}_\alpha^*(d\mu)$ функционалами, порождающимися обычными функциями и удовлетворяющими условиям (4). Рассмотрим последовательность функций

$$e^{-ix}f_{n,\rho}(e^{ix}) = e^{-n-ix}F^n(\rho e^{ix}). \tag{5}$$

Докажем, что выбирая $\rho = \rho_n = 1 - n^{1-\alpha}$, $n = 1, 2, \dots$, получим последовательность функций, стремящихся к нулю по норме пространства $\mathcal{J}_\alpha^*(d\mu)$. Следовательно, $\Phi(0) = 0$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{(m!)^\alpha}\frac{\partial^m f_{n,\rho}(e^{ix})}{\partial x^m}\right|^2 \mu(dx) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{(m!)^{\alpha}} \frac{\partial^m F^n(\rho e^{ix})}{\partial x^m} \right|^2 \mu(dx) \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\frac{4\rho}{1-\rho} \right)^m \frac{F^{12n}(\rho e^{ix})}{(m!)^{\alpha-1}} \right|^2 \mu(dx).$$

Полагая $1-\rho = A\,\delta^{2-\sigma}$, будем иметь

$$\|f_{n,\rho}\|^2_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{2\pi} \left(\frac{4\rho}{1-\rho} \right)^{2m} \frac{e^{24\varepsilon n}}{(m!)^{2(\alpha-1)}} \mu(\partial\mathcal{D} \setminus E_\delta) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{2\pi} \left(\frac{4\rho}{1-\rho} \right)^{2m} \frac{e^{\frac{b\cdot n}{(1-\rho)^{1-\sigma}}}}{(m!)^{2(\alpha-1)}} \mu(E_\delta),$$

где $E_\delta = \bigcap_{z\in E} \{w :\ |w-z| < \delta,\ w \in \partial\mathcal{D}\}$. Заметим, что при $1-\rho = A\,\delta^{2-\sigma}$ имеем $\rho\zeta \in \Omega_A$ для $\zeta \notin E_\delta$. Далее, можем написать

$$\|f_{n,\rho}\|^2_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} \leq \frac{1}{2\pi} e^{-2n+24\varepsilon n} \mu(\partial\mathcal{D}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^{2(\alpha-1)}} \left(\frac{4\rho}{1-\rho} \right)^{2m} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \exp\left(-2n + \frac{b\cdot n}{(1-\rho)^{1-\sigma}} \right) \mu(E_\delta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^{2(\alpha-1)}} \left(\frac{4\rho}{1-\rho} \right)^{2m} \leq$$

$$\leq \exp\left\{ -n(2-24\varepsilon) + \frac{\mathcal{M}}{(1-\rho)^{1/(\alpha-1)}} \right\} \left(A + B e^{\frac{b\cdot n}{(1-\rho)^{1-\sigma}}} \mu(E_\delta) \right).$$

Выбирая $(1-\rho_n)^{\frac{1}{1-\sigma}} = o(n)$, получим

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left\{ -n(2-24\varepsilon) + \frac{\mathcal{M}}{(1-\rho)^{1/(\alpha-1)}} \right\} = 0,$$

где $0 < \varepsilon < 1/12$. Из условия теоремы следует, что

$$\mu(E_\delta) \leq \exp\left\{ -\frac{c}{\delta^{(2-\sigma)(1-\sigma+\frac{1}{\alpha-1})}} \right\} \leq \exp\left\{ -\frac{b\cdot n}{(1-\rho_n)^{1-\sigma}} \right\}.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n,\rho}\|^2_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} = 0.$$

2. Доказанная в предыдущем пункте теорема имеет континуальный аналог. В данном параграфе мы приводим этот аналог. Будем говорить, что бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$ принадлежит классу $\mathcal{J}_\alpha(d\mu)$, если она удовлетворяет условию (1).

Теорема 2. *Система функций* $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\geq 0}$ *полна в пространстве* $\mathcal{J}_\alpha(d\mu)$, $\alpha > 1$, *если существует компактное множество* $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ *такое, что* $\mathcal{M}_\sigma(E) > 0$, *где* $0 \leq \sigma \leq 1$ *и*

$$\limsup_{\delta\to 0} \delta^{\left(1-\sigma+\frac{1}{\alpha-1}\right)(2-\sigma)} \log \mu(E_\delta) < 0,$$

где $E_\delta = \cap_{x\in E}\{y: \ |x-y| < \delta, \ y \in (-\infty, +\infty)\}$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1. Поэтому мы его не будем приводить.

Теорема 3. *Если*

$$\limsup_{A\to\infty} \frac{\log \mu\left((-\infty, -A] \cup [A, +\infty)\right)}{A} < \infty,$$

то система функций $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\geq 0}$ *полна в пространстве* $\mathcal{J}_\alpha(d\mu)$, $\alpha > 1$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathcal{J}_\alpha^*(d\mu)$ и $l(e^{i\lambda x}) = 0, \quad \lambda \geq 0$. Обозначим

$$F(\lambda) = l(e^{i\lambda x}), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Имеем

$$F^{(n)}(\lambda) = l\left((ix)^n e^{i\lambda x}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно

$$|F^{(n)}(\lambda)| \leq \|l\|_{\mathcal{J}_\alpha^*(d\mu)} \|x^n e^{i\lambda x}\|_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} \leq \|l\|_{\mathcal{J}_\alpha^*(d\mu)} \|x^n\|_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} \|x^n e^{i\lambda x}\|_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)}.$$

Далее, имеем

$$\|x^n\|_{\mathcal{J}_\alpha(d\mu)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^{2\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d^m(x^n)}{dx^m}\right|^2 d\mu(x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{n!}{(m!)^\alpha (n-m)!}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2(n-m)} d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2n} d\mu(x) \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{n!}{m!(n-m)!}\right)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} d\mu(x).$$

Отсюда следует, что в окрестности любого конечного интервала функция $F(\lambda)$ является аналитической. Так как $F(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq 0$, то она тождественно обращается в нуль.

ABSTRACT. The paper presents a new generalization of Szegö's theorem on completeness of the family $\{e^{inx}\}_{n=0}^{\infty}$ in the weighted space generalizing the well–known Jewrey space.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Макаров, "Инвариантные подпространства пространства C^{∞}", Матем. Сб., т. 119(161), № 1(9), стр. 3 – 31, 1982.
2. А. А. Вагаршакян, "О дискретных однородных уравнениях Винера–Хопфа с вырождающимися символами", Изв. АН АрмССР, т. 21, № . 1, стр. 18 – 32, 1986.
3. L. Carleson, Selected Problems on Exceptional Sets, Toronto–London–Melburn, 1967.

18 декабря 1995

Институт математики
НАН Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 31 НОМЕР 1 1996

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

00

CONTENTS

VOLUME 31 NUMBER 1 1996

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)