ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հովհաննիսյան

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ: МАРТИНГАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И УБЫВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

сборник статей

под редакцией Б. С. Нахапетяна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Фундаментальное понятие гиббсовского представления случайных полей широко используется в теории фазовых переходов, в предельных теоремах для слабо зависимых случайных полей, в асимптотических продолжениях для термодинамических функций и в различных приложениях квантовой теории поля. Последние продвижения в этих направлениях основаны на применении методов из различных областей математики. Однако мощный и широко используемый в теории вероятностей метод мартингалов остается практически незамеченным. Причина этого вероятно заключалась в том, что обычное понятие мартингала существенно основано на свойстве полной упорядоченности на вещественной оси, тогда как с физической точки зрения многомерные задачи представляют принципиальный интерес.

Работы, представленные в этом номере, изучают случайные поля на ν-мерной целой решетке, $\nu \geq 1$. Первые три статьи этого номера представляют применения метода мартингалов в теории гиббсовских случайных полей. Широко используется понятие мартингал–разностного случайного поля. Доказаны различные предельные теоремы, в частности, центральные предельные теоремы и законы больших чисел, включающие многомерный аналог хорошо известной теоремы Биллингсли–Ибрагимова для мартингал–разностей. Одним из заключений является то, что для некоторых моделей классической статистической механики может выполняться центральная предельная теорема для суммарного спина в критической точке. Среди задач, рассматриваемых в остальных статьях, отметим задачу о единственности гиббсовских случайных полей и связанную с ней задачу об убывании корреляций. Найдены новый обший критерий единственности и оценка для коэффициента перемешивания гиббсовских случайных полей с вакуумом. Отметим также так называемое описание случайных полей методом включения–исключения, приводящее ко многим негиббсовским случайным полям и одну модель взаимодействия точечных процессов, которая приводит к асимптотическому анализу.

Ереван, октябрь 1995

Борис Нахапетян

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В статье исследованы случайные поля на решетке Z^ν, $\nu > 1$, имеющие мартингал–разностное свойство и доказаны предельные теоремы. Результаты могут применяться в теории гиббсовских случайных полей.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Суммы компонент мартингал–разностных случайных полей (с.п.) на решетке образуют мартингал по любой последовательности конечных возрастающих подмножеств решетки Z^ν. Мартингалы относительно возрастающих множеств представляют собой естественное обобщение обычных мартингалов к многомерному параметровому случаю и были интенсивно изучены в работах [7], [8], [18]. В этих работах внимание главным образом уделялось теоремам сходимости и построению стохастического интеграла по таким мартингалам. Представляют интерес также предельные теоремы и, в частности, центральная предельная теорема (ЦПТ). Сначала Биллингсли [3] и Ибрагимов [15] получили условия, при которых ЦПТ справедлива для одномерных ($\nu = 1$) мартингалов. Они показали, что нормированные суммы компонент стационарных эргодических мартингал–разностей удовлетворяют ЦПТ. Их результаты были обобщены на нестационарный случай Брауном [5] и Дворецким [13]. Теория предельных теорем длямартингалов представлена в работах [17], [20].

Наша цель – многомерный аналог теоремы Биллингсли–Ибрагимова (см. также [27]) для однородных с.п. Мы показываем, что для любого однородного эргодического мартингал–разностного с.п. второго порядка справедлива ЦПТ.

Вообще справедливость ЦПТ для мартингал–разностного с.п. зависит от корреляционных свойств. В однородном случае необходимое убывание корреляций следует из условия эргодичности. Для неоднородных с.п. условие эргодичности мы заменяем определенными условиями перемешивания. Для перемешивающихся с.п. известны различные условия, при наличии которых имеет место ЦПТ. Одним из требований является достаточно быстрое убывание коэффициента перемешивания. Обычно требуется степенное убывание (см, например, [4], [6], [23] – [25], [34]). Мы показываем, что если перемешивающееся с.п. обладает мартингал–разностным свойством, то для справедливости ЦПТ условий на скорость стремления к нулю коэффициента перемешивания накладывать не надо. Далее полученные результаты мы применяем к гиббсовским случайным полям.

Гиббсовские с.п. являются одним из основных объектов изучения в математической статистической физике. Они задаются весьма общим и удобным способом (см, например, [9], [10], [14], [22], [31]), позволяющим трактовать их как некоторую специальную (гиббсовскую) форму описания с.п. вообще. Дело в том, что стандартные ограничения, накладываемые на задающие эти поля потенциалы, носят столь общий характер, что в звисимости от дополнительных условий на потенциал, можно говорить о гиббсовском описании однородных ([9], [10]), марковских ([1], [28], [29], [32], [33]), гауссовских ([12]) и т.д. полей. Одна из задач, рассмотренных в настоящей работе, относится к указанному кругу вопросов, а именно, к вопросу о гиббсовском представлении мартингал–разностных с.п. Вообще эта задача тесно связана с задачей о существовании с.п. с заданными одноточечными условными распределениями. Эта интересная задача остается нерешенной. Некоторые рассуждения можно найти в ([11]). Здесь мы описываем построение одноточечных распределений (см. Конструкцию Б), для которых соответствующее с.п. – мартингал–разность. Мы также определяем довольно широкий класс потенциалов (четные потенциалы), для которых соответствующее гиббсовское с.п. – мартингал–разность. Потенциалы многих известных моделей в статистической физике становятся четными после некоторой симметризации (модель Поттса, модель ротаторов Шлосмана, модель Блюма–Кейтеля и т.д.). В моделях с четными потенциалами возможны фазовые переходы [21], [27]. Суммарный спин в критической точке в некоторых из этих моделей может иметь неожиданное поведение (справедливость центральной предельной теоремы, см. [27]).

§2. МАРТИНГАЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗРАСТАЮЩИХ ПОДМНОЖЕСТВ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, и пусть $\mathcal{W}$ есть множество всех конечных подмножеств решетки Z^ν, $\nu \geq 1$. Рассмотрим набор случайных величин (с.в.) $S_V, V \in \mathcal{W}$ и частично упорядоченную совокупность σ–алебр $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathcal{W}$, т.е.

$$\mathcal{F}_V \subset \mathcal{F},\ \overline{V} \subset V \Rightarrow \mathcal{F}_V \subset \mathcal{F}_{\overline{V}}, \quad \mathcal{F}_\emptyset = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Если для каждого $V \in \mathcal{W}$ велчины S_V являются $\mathcal{F}_V$–измеримыми, то набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ назовем *стохастическим набором.*

Определение 1. Стохастический набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ назовем *мартингалом*, если для любых $\bar{V}, V \in \mathcal{W}$, $\bar{V} \subset V$ имеем

$$E|S_V| < \infty \quad \text{и} \quad E(S_V|\mathcal{F}_{\bar{V}}) = S_{\bar{V}} \quad \text{п.н.}$$

Определение 2. Стохастический набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ назовем *мартингалом относительно некоторой последовательности конечных возрастающих подмножеств (п.к.в.п) V_n, $n = 1, 2, ...$, если для всех $n = 2, 3, ...$ имеем*

$$E|S_{V_n}| < \infty \quad \text{и} \quad E(S_{V_n}|\mathcal{F}_{V_{n-1}}) = S_{V_{n-1}} \quad \text{п.н.}$$

Утверждение 1. *Каждый мартингал $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$ есть мартингал относительно любой п.к.в.п. и наоборот, стохастический набор $S = (S_V, \mathcal{F}_V)$, являющийся мартингалом относительно любой п.к.в.п., есть мартингал.*

Доказательство тривиально.

Пример 1. Пусть Y такая с.в., что $E|Y| < \infty$ и $\mathcal{F}_V, V \in \mathcal{W}$ – частично упорядоченная совокупность σ–алгебр. Положив $S_V = E(Y|\mathcal{F}_V)$, $V \in \mathcal{W}$, получим стохастический набор $(S_V, \mathcal{F}_V)$, являющийся мартингалом.

Пример 2. Пусть X – стандартное пространство с конечной мерой μ на σ–алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств X. Обозначим через p_V, $V \in \mathcal{W}$ плотность вероятностей, определенную на пространстве произведений $(X^V, \mathcal{B}^V, \mu^V)$. Пусть $\{p_V,\ V \in \mathcal{W}\}$ – согласованное в смысле Колмогорова семейство строго положительных плотностей. Пусть $\{q_V,\ V \in \mathcal{W}\}$ – другое семейство плотностей, также согласованное в смысле Колмогорова. Положим $S_V = q_V p_V^{-1}$, $V \in \mathcal{W}$. Тогда стохастический набор $(S_V, \mathcal{B}^V)$ – мартингал.

Другие примеры многомерных мартингалов можно строить на основе нижеприводимого понятия мартингал–разностного с.п. (см. Конструкции А, Б, В).

Определение 3. С.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ назовем *мартингал–разностным с.п.*, если для каждого $t \in Z^\nu$

$$E|\xi_t| < \infty \quad \text{и} \quad E(\xi_t \,|\, \xi_s,\ s \in Z^\nu \setminus \{t\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Определение 4. С.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ назовем *мартингал–разностным с.п. относительно некоторой частично упорядоченной совокупности σ–алгебр $\mathcal{F}_V$, $V \in U$, $U \subset \mathcal{W}$*, если

$$E|\xi_t| < \infty, \quad t \in Z^\nu \quad \text{и при всех } V \in U,\ t \notin V \quad E(\xi_t|\mathcal{F}_V) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Определение 5. С.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ назовем *мартингал–разностным относительно некоторой п.к.в.п.* V_n, $n = 1, 2, ...$, если ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностью относительно совокупности σ–алгебр

$$\mathcal{F}_{V_n} = \sigma(\xi_t,\ t \in V_n), \quad n = 1, 2, ...$$

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 2. *Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$ такое с.п., что $E|\xi_t| < \infty$, $t \in Z^\nu$, и пусть $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in \mathcal{W}$. Если стохастический набор $(S_V, \sigma(\xi_t,\ t \in V))$, $V \in \mathcal{W}$ образует мартингал, то с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностным. Если с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностным, то стохастический набор $(S_V, \sigma(\xi_t, t \in V))$, $V \in \mathcal{W}$ образует мартингал.*

Ясно, что центрированное с.п. с независимыми компонентами является мартингал–разностным с.п. Для построения более интересных примеров необходимо рассматривать зависимые с.п. с компонентами, принимающими более двух различных значений. Дело в том, что мартингал–разностное с.п. с двумя значениями необходимо является полем с независимыми компонентами. Ниже мы приведем некоторые конструкции мартингал–разностных с.п., не имеющих аналогов в одномерном случае и которые могут быть приложимы в теории гиббсовских с.п.

Конструкция А. Предположим, что множество $X \subset R^1$ симметрично относительно нуля (т.е. если $x \in X$, то $-x \in X$), и пусть $\mathcal{B}(X)$ есть σ–алгебра его борелевских подмножеств. Рассмотрим на $\mathcal{B}(X)$ симметричную меру μ (т.е $\mu(A) = \mu(-A)$, $A \in \mathcal{B}(X)$). Пусть теперь ξ_t, $t \in Z^\nu$, $\xi_t \in X$ – с.п. такое, что его конечномерные распределения абсолютно непрерывны относительно продакт–мер μ^V, $V \in \mathcal{W}$ с плотностями $p_V(x_t, t \in V)$, $V \in \mathcal{W}$ такими, что

$$p_V(\theta_t x_t,\ t \in V) = p_V(x_t,\ t \in V)$$

для всех $\theta_t \in \{1, -1\}$. Тогда с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ будет мартингал–разностным. Достаточно удостовериться, что для любых $V \in \mathcal{W}$ и $t \in Z^\nu$

$$E(\xi_t | \xi_s,\ s \in V \setminus \{t\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

или

$$\int_A \xi_t \, P(d\omega) = 0 \quad \text{для любого} \quad A \in \sigma(\xi_s,\ s \in V \setminus \{t\}).$$

Последнее соотношение может быть переписано следующим образом :

$$\int_B \left(\int_X x p_V(y, x) \, \mu(dx) \right) \mu^{V \setminus \{t\}}(dy) = 0 \quad \text{для любого} \quad B \in \mathcal{B}(X^{V \setminus \{t\}}),$$

где

$$X^{V \setminus \{t\}} = \{(x_s,\ s \in V \setminus \{t\})\}, \quad x_s \in X, \quad s \in V \setminus \{t\}.$$

Принимая во внимание четность конечномерных плотностей и симметричность пространства X, получаем

$$\int_X x p_V(y, x) \, \mu(dx) = 0.$$

Конструкция Б. Рассмотрим конечное подмножество $X \subset R^1$ такое, что $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $\sum_{x \in X_i} x = 0$, $i = 1, \dots, N$. Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$, $\xi_t \in X$, $t \in Z^\nu$ – с.п. такое, что его условные вероятности

$$q_t^{\bar{x}}(x) = P(\xi_t = x \mid \xi_s = \bar{x}_s,\ s \in Z^\nu \setminus \{t\}), \quad t \in Z^\nu, \quad x \in X, \quad \bar{x} = (\bar{x}_s,\ s \in Z^\nu \setminus \{t\})$$

имеют постоянное значение $q_{t,i}^{\bar{x}}$ при $x \in X_i$, $i = 1, \dots N$, т.е.

$$q_t^{\bar{x}}(x) = q_{t,i}^{\bar{x}}, \quad x \in X_i, \quad i = 1, \dots N. \tag{1}$$

Это с.п. будет мартингал–разностным при

$$E(\xi_t | \xi_s, s \in Z^\nu \setminus \{t\}) = \sum_{x \in X} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{x \in X_i} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{i=1}^{N} q_{t,i}^{\bar{x}} \sum_{x \in X_i} x = 0.$$

Есть вопрос, касающийся существования с.п. с заданными одноточечными условными вероятностями. В следующем параграфе мы рассматриваем такой потенциал, что соответствующие гиббсовские одноточечные условные вероятности обладают свойством (1). В таком случае соответствующее гиббсовское с.п. будет мартингал–разностным.

Конструкция В. Пусть $T = \{T_j\}$ – разбиение решетки Z^ν ($Z^\nu = \cup_j T_j$, $T_j \cap T_k = \emptyset$, $j \neq k$), и пусть с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ обладает следующим свойством : для всех j с.п. ξ_t, $t \in T_j$ является мартингал–разностным (т.е. для всех $t \in T_j$, $E(\xi_t | \xi_s, s \in T_j \setminus \{t\}) = 0$, п.н.). Если случайные величины ξ_t и ξ_u независимы при всех $t \in T_j$, $u \in T_k$, $j \neq k$, то ξ_t, $t \in Z^\nu$ является мартингал–разностным с.п.

Для доказательства этого воспользуемся следующим простым утверждением. Пусть σ–алгебры $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ независимы и с.в. ξ не зависит от σ–алгебры $\mathcal{F}_1$. Тогда $E(\xi | \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = E(\xi | \mathcal{F}_2)$ п.н. Проверим, что для любых $V \in \mathcal{W}$ и $t \in Z^\nu$

$$E(\xi_t | \xi_s,\ s \in V \setminus \{t\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Предположим, что $t \in T_{j_0}$. Тогда можем написать

$$V \setminus \{t\} = (V \setminus \{t\}) \cap \bigcup_j T_j = [(V \setminus \{t\}) \cap T_{j_0}] \bigcup_{j \neq j_0} \{V \cap T_j\}.$$

Таким образом, имеем

$$E(\xi_t|\xi_s, s \in V \setminus \{t\}) = E(\xi_t|\xi_s, s \in (V \setminus \{t\}) \cap T_{j_0}, \xi_s, s \in \cup_{j \neq j_0}(V \cap T_j)) =$$

$$= E(\xi_t|\xi_s, s \in (V \setminus \{t\}) \cap T_{j_0}) = 0 \text{ п.н.}$$

§3. ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Пусть X –стандартное пространство с конечной мерой μ, $\mu(X) > 0$ на σ–алгебре B его борелевских подмножеств. Совокупность измеримых функций $\Phi = \{\Phi_V,\ V \in \mathcal{W}\}$, где каждая Φ_V определена на соответствующем измеримом пространстве (X^V, B^V, μ^V), $V \in \mathcal{W}$ называется *потенциалом*. Для каждого $V \in \mathcal{W}$ и $\bar{x} \in X^{Z^\nu \setminus V}$ определим *потенциальную энергию*

$$U_V^{\bar{x}}(x) = \sum_{\emptyset \neq J \subset V} \sum_{\bar{J} \in \mathcal{W}(Z^\nu \setminus V)} \Phi_{J \cup \bar{J}}(x_J \vee \bar{x}_{\bar{J}}), \quad x \in X^V, \quad \bar{x} \in X^{Z^\nu \setminus V},$$

$$x_J = (x_t, t \in J), \quad \bar{x}_{\bar{J}} = (\bar{x}_t, t \in \bar{J}), \quad x_J \vee \bar{x}_{\bar{J}} = ((x_t, t \in J), (\bar{x}_t, t \in \bar{J})).$$

Потенциальная энергия конечна, например, при стандартном условии

$$||\Phi|| = \sup_{a \in Z^\nu} \sum_{J : a \in J \in \mathcal{W}} \sup_{x \in X^J} |\Phi_J(x)| < \infty. \tag{2}$$

Для любых $I, V \in \mathcal{W}$, $I \subset V$ определим гиббсовские плотности

$$(q_V^{\bar{x}})_I(x) = \Xi_V^{-1}(\bar{x}) \int_{X_{V \setminus I}} \exp\{-U_V^{\bar{x}}(x \vee z)\}\, \mu_{V \setminus I}(dz), \quad x \in X^I,\ \bar{x} \in X^{Z^\nu \setminus V},$$

где

$$\Xi_V(\bar{x}) = \int_{X_V} \exp\{-U_V^{\bar{x}}(z)\}\, \mu_V(dz).$$

Предположим теперь, что существует последовательность возрастающих подмножеств V_k, $k = 1, 2 ...$, $\bigcup\limits_k V_k = Z^\nu$ и граничные условия $\bar{x}_k \in X^{Z^\nu \setminus V_k}$ такие, что для любых фиксированных $I \in \mathcal{W}$ и $x \in X^I$ существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \left(q_{V_k}^{\bar{x}_k}\right)_I(x) = p_I(x).$$

Тогда совокупность конечномерных плотностей $\{p_I,\ I \in \mathcal{W}\}$ оказывается согласованной в смысле Колмогорова и, тем самым, определяется некоторое с.п., называемое *гиббсовским с.п.*, отвечающим потенциалу Φ.

Определение 6. Пусть потенциал Φ определен на $\bigcup\limits_{J\in W} X^J$, где $X \subset R^1$ симметрично относительно нуля. Назовем Φ *четным*, если для любых $V \in W$, $x \in X_V$

$$\Phi_V(x_t, t \in V) = \Phi_V(\theta_t x_t, t \in V), \quad \theta_t \in \{-1, 1\}.$$

Утверждение 3. *Пусть Φ – четный потенциал, удовлетворяющий условию (2). Тогда совокупность гиббсовских с.п., соответсвующих этому потенциалу, не пуста; любое гиббсовское с.п. этой совокупности является мартингал–разностным.*

Доказательство. Существование гиббсовского с.п. при условии (2) хорошо известно (см, например, [9], [14]). Свойство же мартингал–разности следует из определения гиббсовского с.п. и конструкции А, поскольку в рассматриваемом случае плотности гиббсовских с.п. будут четными.

Приведем примеры четных потенциалов, удовлетворяющих условию (2).

$$a) \quad \Phi_V(x_t, t \in V) = \begin{cases} \sup_{t\in V} \phi(x_t)(Diam\ V)^{-\gamma}, & |V| > 1, x_t \in X, t \in V, \gamma > \nu, \\ \phi(x_t), & |V| = 1, \quad t \in Z^\nu, \end{cases}$$

где $\phi(x)$, $x \in X$ есть некоторая четная функция такая, что $\sup_{x\in X} |\phi(x)| < \infty$.

$$б) \qquad \Phi_V(x_t, t \in V) = \begin{cases} \mu|x_t|, & |V| = 1,\ \mu > 0, \\ |x_t| \cdot |x_s| \cdot |t - s|^{-\gamma}, & |V| = 2,\ \gamma > \nu,\ x_t, x_s \in X. \\ 0, & |V| > 2. \end{cases}$$

в) Симметризованная модель Поттса. Пусть $X = \{-N, ..., -1, 0, 1, ..., N\}$

$$\delta_{t,s}(x_t, x_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_t = x_s \text{ и } d(t, s) = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $x_t, x_s \in X$ и $d(t, s) = \max\limits_{1\le i\le \nu} |t^{(i)} - s^{(i)}|$. Положив

$$\Phi_{\{t,s\}} = \delta_{\{t,s\}}(x_t, x_s) + \delta_{\{t,s\}}(-x_t, x_s),$$

получаем четный потенциал.

г) Симметризованная модель ротаторов Шлосмана. Пусть $X = [-\pi, \pi]$ и λ – мера Лебега. Пусть

$$\phi_{t,s} = -\beta|t - s|^{-\gamma} \cos(y - x), \quad \gamma > \nu, \quad 0 < \beta < \infty.$$

Положив

$$\Phi_{\{t,s\}}(x, y) = \phi_{t,s}(x, y) + \phi_{t,s}(-x, y),$$

получаем четный потенциал.

В конце статьи мы рассматриваем модель с четным потенциалом

$$\Phi(x_t, x_s) = \begin{cases} |x_t| \cdot |x_s|, & d(t,s) = 1,\ x_t, x_s \in X = \{-1, 0, 1\},\ t, s \in Z^\nu \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и даем ее фазовую диаграмму.

Ниже мы описываем потенциалы гиббсовских с.п., основанные на идее конструкции Б. Пусть X – множество, описанное в конструкции Б, и пусть $f(x)$, $x \in X$ – некоторая функция такая, что $f(x) = a_j$, $x \in X_j$, $j = 1, ..., N$. Рассмотрим потенциал вида $\Phi_{\{t,s\}}(x, y) = f(x)f(y)$. Покажем, что гиббсовское с.п. с этим потенциалом – мартингал–разностное. Имеем

$$\sum_{x \in X} x q_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{x \in X} x \exp\left[-f(x) \sum_{|\bar{x}-x|=1} f(\bar{x})\right] Z_t^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \exp\left[-a_j \sum_{|\bar{x}-x|=1} f(\bar{x})\right] Z_t^{-1} \sum_{x \in X_j} x = 0,$$

$$Z_t = \sum_{x \in X} \exp\left[-f(x) \sum_{|\bar{x}-x|=1} f(\bar{x})\right].$$

§4. УСЛОВИЯ УБЫВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В этом параграфе мы формулируем некоторые важные определения и одну теорему Дворецкого [13] (см. также [30]), которые используются в дальнейшем. Пусть $\Omega = \{(x_t,\ t \in Z^\nu)\}$ – совокупность функций (реализаций), определенных на Z^ν, и $x_t \in X$, $X \subseteq R^1$. Пусть B – σ–алгебра, порожденная цилиндрическими множествами из Ω. Для любого $V \in \mathcal{W}$ через B^V обозначим σ–алгебру цилиндрических множеств с основанием в X^V. Существует группа сдвигов τ_a, $a \in Z^\nu$:

$$(\tau_a x)_t = x_{t+a}, \quad a \in Z^\nu, \quad x \in \Omega.$$

Обозначим через L σ–алгебру инвариантных подмножеств B : $L = \{A \in B : \tau_a A = A\}$.

Определение 7. Случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ с распределением P назовем *однородным (трансляционно–инвариантным)*, если для любых $A \in B$ и $a \in Z^\nu$ $P(\tau_a A) = P(A)$.

Определение 8. Случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ называется *эргодическим*, если его распределение P является тривиальным на L, т.е. при $A \in L$ вероятность $P(A)$ равна либо 0 либо 1.

В теории предельных теорем для с.п. используются различные критерии убывания корреляций. Мы будем использовать следующие.

Определение 9. Говорят, что с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с распределением P удовлетворяет *условию сильного перемешивания*, если

$$\sup\left\{|P(AB) - P(A)P(B)|, \quad A \in B^I,\ B \in B^V,\ |I| \le n,\ |V| \le m\right\} \le \alpha_{m,n}(d(I,V)),$$

$$I, V \in \mathcal{W}, \quad m, n \in N,$$

где $\alpha_{m,n}(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и фиксированных m, n

$$d(I,V) = \inf_{t \in I, s \in V}\{|t - s|\}, \quad |t| = \max_{1 \le i \le \nu}\{|t^{(i)}|\}.$$

Определение 10. Говорят, что с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с распределением P удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания*, если

$$sup\left\{|P(A|B) - P(A)|, \quad A \in B^I,\ B \in B^V,\ P(B) > 0\right\} \le \phi_I(d(I,V)),$$

где $\phi_I(d) \to \infty$ при $d \to \infty$ и фиксированном $I \in \mathcal{W}$.

Следующая лемма будет полезна нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть случайные величины X, Y измеримы относительно σ–алгебр B_I, B_V соответственно, $I, V \in \mathcal{W}$, и пусть*

$$E|X|^p < \infty, \quad |Y| < C \quad \text{п.н.}, \quad 0 < C < \infty.$$

Тогда существуют некоторые положительные константы $0 < A, B < \infty$ такие, что

$$|Cov(X,Y)| \le AE^{1/p}|X|^p \alpha_{m,n}^{1-1/p}(d(I,V)),$$

$$|Cov(X,Y)| \le BE^{1/p}|X|^p \phi_I(d(I,V)).$$

Доказательство этой леммы практически не отличается от доказательства аналогичной леммы в одномерном случае (см., например, [16], [25]).

Рассмотрим теперь двойную серию с.в.

$$X_{n,1}, X_{n,2}, ..., X_{n,k_n}, \quad k_n \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Введем следующее обозначение

$$F_{n,k} = \sigma(X_{n,j}, j = 1, ..., k), \quad \mu_{n,k} = E(X_{n,k}|F_{n,k-1}),$$

$$\sigma^2_{n,k} = E(X^2_{n,k}|F_{n,k-1}) - \mu^2_{n,k}, \quad S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} X_{n,j}, \quad k = 2, ..., k_n.$$

Будем говорить, что для серии (3) справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_{n,k_n} - \sum_{k=1}^{k_n} \mu_{n,k} < z\right) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, d(u), \quad z \in R^1.$$

Если для серии (3) выполняется равенство $\mu_{n,k} = 0$, $k = 2, ..., k_n$, $n = 1, 2, ...$ (п.н.), то будем говорить, что (3) – мартингал–разностная двойная серия.

Ниже $I(A)$ означает обычный индикатор множества A.

Теорема 1. *[Дворецкий]. Пусть $X_{n,1}, .., X_{n,k_n}$, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ есть мартингал–разностная двойная серия. Если выполнены условия*

1) $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{n,j} \to 1$ *по вероятности при* $n \to 0$;

2) $\sum_{j=1}^{k_n} E(X^2_{n,j} I(|X| > \varepsilon)|F_{n,k_n-1}) \to 0$ *по вероятности при* $n \to 0$, $\varepsilon > 0$,

то для этой двойной серии справедлива ЦПТ.

§5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы доказываем ЦПТ для мартингал–разностных с.п. и применяем ее к гиббсовскому с.п. Будем говорить, что для с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$, $E|\xi_t|^2 < \infty$ справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n\to\infty} P\big((S_{V_n} - E\, S_{V_n})(Var\, S_{V_n})^{-1/2} < z\big) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, d(u),$$

$$S_{V_n} = \sum_{t\in V_n} \xi_t, \quad V_n = \{t \in Z^\nu : |t| \le n\}, \quad n = 1, 2...$$

Теорема 2. *Для любого однородного эргодического мартингал–разностного с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с $0 < \sigma^2 = E\xi_0^2 < \infty$ справедлива ЦПТ.*

Доказательство. Пусть $p = p(n)$, $n \in N$ – некоторая функция, принимающая натуральные значения и такая, что $p(n) \to \infty$, $p(n) = o(n)$ при $n \to \infty$, и пусть $I_n(i) = [(i-1)p, ip]$ – некоторый интервал в Z^ν, $i = 1, ..., \hat{k} = [\frac{n}{p}]$. $[\cdot]$ – целая часть числа. Обозначим $I_n = \bigcup_{i=1}^{\hat{k}} I_n(i)$, и пусть I_n^ν – декартово произведение ν копий множества I_n. Понятно, что I_n есть объединение $k = \hat{k}^\nu$–мерных кубов $\Delta_{n,j}$, $j = 1, ..., k$ со стороной длины $p = p(n)$, т.е $I_n = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_{n,j}$. Последовательность с.в. $(\sigma n^{\nu/2})^{-1} S_{V_n \setminus I_n^\nu}$, $n = 1, 2, ...$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому достаточно показать асимптотическую нормальность последовательности $(\sigma n^{\nu/2})^{-1} S_{I_n^\nu}$. Рассмотрим мартингал–разностную двойную серию

$$X_{n,j} = (\sigma n^{\nu/2})^{-1} S_{\Delta_{n,j}}, \quad j = 1, ..., k. \tag{4}$$

Наша цель – проверить справедливость условий теоремы 1 для (4). Имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \sigma_{n,j}^2 - 1\right| = \left|(\sigma^2 n^\nu)^{-1} \sum_{j=1}^{k} E(S_{\Delta_{n,j}}^2 | F_{n,j}) - 1\right| =$$

$$= \sigma^{-2} \left| n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k} E\left(\sum_{t \in \Delta_{n,j}} \xi_t^2 | F_{n,j}\right) - \sigma^2 \right| \le$$

$$\le C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k} |\Delta_{n,j}| E\left(\left| |\Delta_{n,j}|^{-1} \sum_{t \in \Delta_{n,j}} \xi_t^2 - \sigma^2 \right| |F_{n,j}\right).$$

Согласно многомерной эргодической теореме

$$E\left|\sum_{j=1}^{k} \sigma_{n,j}^2 - 1\right| \le C_2 E\left(\left| |\Delta_{n,j}|^{-1} \sum_{t \in \Delta_{n,j}} \xi_t^2 - \sigma^2 \right|\right) \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Для проверки справедливости второго условия нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть $X_1, ..., X_n$ – последовательность с.в и $f(x)$, $x \in R^1$, – некоторая функция, для которой $|f(X_j)| < C$, $j = 1, ..., n$. Тогда*

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} (f(X_j) - E(f(X_j)|X_{j-1}, ..., X_1))\right)^4 \le 96 C^4 n^2.$$

Доказательство стандартно (см., например, [2], [30]).

Лемма 3. *Пусть* ξ_t, $t \in Z^\nu$ *– однородное мартингал–разностное с.п. и* $E\xi_t^2 < \infty$. *Тогда для любого множества* $V \in \mathcal{W}$ *и любых констант* $A, N > 0$

$$ES_V^2 I(|S_V| > A) \le 384N^4A^{-2}|V|^2 + |V|E\xi_0^2 I(|\xi_0| > N).$$

Доказательство. Представим с.в. ξ_t, $t \in V$ как $\xi_1, ..., \xi_{|V|}$. Поскольку ξ_t, $t \in Z^\nu$ – мартингал–разностное с.п., то для любого $i \in \{2, ..., |V|\}$ имеем

$$E(\xi_i|\xi_{i-1}, ..., \xi_1) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Рассмотрим следующие с.в. :

$$\alpha_i^{(N)} = \xi_i^{(N)} - E(\xi_i^{(N)}|\xi_{i-1}, ..., \xi_1),$$

$$\beta_i^{(N)} = \bar{\xi}_i^{(N)} - E(\bar{\xi}_i^{(N)}|\xi_{i-1}, ..., \xi_1), \quad i = 1, ..., |V|,$$

где

$$\xi_i^{(N)} = f_N(\xi_i), \quad \bar{\xi}_i^{(N)} = \xi_i - \xi_i^N, \quad f_N(x) = \begin{cases} x, & |x| \le N, \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

Можем написать

$$\alpha_i^{(N)} + \beta_i^{(N)} = \xi_i^{(N)} + \bar{\xi}_i^{(N)} - E(\xi_i^{(N)} + \bar{\xi}_i^{(N)}|\xi_{i-1}, ..., \xi_1) =$$

$$= \xi_i - E(\xi_i|\xi_{i-1}, ..., \xi_1) = \xi_i, \quad i = 1, ..., |V|.$$

Следовательно

$$S_V = \sum_{t \in V} \xi_t = \sum_{i=1}^{|V|} \xi_i = \sum_{i=1}^{|V|} \alpha_i^{(N)} + \sum_{i=1}^{|V|} \beta_i^{(N)}.$$

Применяя неравенство

$$E(u+v)^2 I(|u+v| > A) \le 4\left[Eu^2 I\left(|u| > \frac{A}{2}\right) + Ev^2 I\left(|v| > \frac{A}{2}\right)\right],$$

получим

$$ES_V^2 I(|S_V| > A) \le 4E\left(\sum_{i=1}^{|V|} \alpha_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|} \alpha_i^{(N)}\right| > \frac{A}{2}\right) +$$

$$+4E\left(\sum_{i=1}^{|V|} \beta_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|} \beta_i^{(N)}\right| > \frac{A}{2}\right).$$

Далее

$$E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right|>\frac{A}{2}\right)\leq 4A^{-2}E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right)^4.$$

Поскольку $|\xi_i^{(N)}|\leq N$, то согласно лемме 2

$$E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|}\alpha_i^{(N)}\right|>\frac{A}{2}\right)\leq 384A^{-2}N^4|V|^2.$$

Для второго слагаемого имеем

$$E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\beta_i^{(N)}\right)^2 I\left(\left|\sum_{i=1}^{|V|}\beta_i^{(N)}\right|>\frac{A}{2}\right)\leq E\left(\sum_{i=1}^{|V|}\beta_i^{(N)}\right)^2=\sum_{i=1}^{|V|}E(\beta_i^{(N)})^2\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{|V|}E(\bar{\xi}_i^{(N)})^2=|V|E\xi_0^2I(|\xi_o|>N).$$

Лемма доказана.

Проверим теперь условие 2) теоремы 1. Имеем

$$\sum_{j=1}^{k}EX_{n,j}^2I(|X_{n,j}|>\varepsilon)\leq 384\sigma^{-2}n^{-\nu}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{k}[N^4\varepsilon^{-2}n^{-\nu}|\Delta_{n,j}|^2+|\Delta_{n,j}|E\xi_0^2I(|\xi_0^2|>N)]\leq$$

$$\leq C_2[p^\nu n^{-\nu}N^4+E\xi_0^2I(|\xi_0|>N)].$$

Получаем 2), так как $p=o(n)$ при $n\to\infty$. Теорема 2 доказана.

Далее рассмотрим неоднородные с.п.

Теорема 3. *Пусть мартингал–разностное с.п.* ξ_t, $t\in Z^\nu$ *таково, что* $E|\xi_t|^\gamma<$ $<C<\infty$, $\gamma>2$ *и* $\inf_t$ $Var\ \xi_t=\sigma^2>0$. *Если, кроме того,* ξ_t, $t\in Z^\nu$ *удовлетворяет условию сильного перемешивания и* $\alpha_{m,n}(r)<f(m)\alpha(r)$, *где* $\alpha(r)\to 0$ *при* $r\to\infty$ *и* $f(m)$, $m\in N$, *– произвольная функция, то для* ξ_t *справедлива ЦПТ.*

Прежде всего докажем следующую лемму, пользуясь обозначением

$$I_{n,j}=E(S_{\Delta_{n,j}}^2|S_{\Delta_{n,k}},\ k=1,...,j-1)-ES_{\Delta_{n,j}}^2,\quad j=1,...k_n.$$

Лемма 4. *Пусть V_n, $n = 1, 2, ...$ – последовательность ν–мерных кубов. Пусть для каждого n $V_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} \Delta_{n,j}$, $\Delta_{n,j} \cap \Delta_{n,k} = \emptyset$, $k \neq j$ и $n^{-\nu} \max_{1 \leq j \leq k_n} |\Delta_{n,j}| \to 0$ при $n \to \infty$. В условиях теоремы 3 и дополнительных условиях*

$$1) \qquad E|S_{\Delta_{n,j}}|^{\gamma} \leq C|\Delta_{n,j}|^{\gamma/2}, \quad 0 < C < \infty,$$

$$2) \qquad \lim_{n\to\infty} n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} Cov\,(S^2_{\Delta_{n,j}},\ sgn\ I_{n,j}) = 0$$

для любого $u \in R^1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P((Var\ S_{V_n})^{-1/2} S_{V_n} < u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{u} e^{-u^2/2}\,du.$$

Доказательство. Для двойной серии с.в.

$$X_{n,k} = (Var\ S_{V_n})^{-1/2} S_{\Delta_{n,k}}, \quad k = 1, ..., k_n$$

проверим выполнение условий теоремы 1. Имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{n,j} - 1\right| \leq C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} \left| E(S^2_{\Delta_{n,j}} | S_{\Delta_{n,k}},\ k = 1, ..., j-1) - ES^2_{\Delta_{n,j}} \right|.$$

Далее

$$E\left|\sum_{j=1}^{k_n} \sigma^2_{n,j} - 1\right| \leq C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} E\left| E(S^2_{\Delta_{n,j}} | S_{\Delta_{n,k}},\ k = 1, ..., j-1) - ES^2_{\Delta_{n,k}} \right| =$$

$$= C_1 n^{-\nu} \sum_{j=1}^{k_n} Cov(S^2_{\Delta_{n,j}},\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}) = 0.$$

Для проверки второго условия применим условие 1) леммы. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{k_n} EX^2_{n,j} I(|X_{n,j}| > \varepsilon) = (Var\ S_{V_n})^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} ES^2_{\Delta_{n,j}} I(|S_{\Delta_{n,j}}| > \varepsilon (Var\ S_{V_n})^{1/2}) \leq$$

$$\leq C_2 (Var\ S_{V_n})^{-1} (Var S_{V_n})^{(2-\gamma)/2} \sum_{j=1}^{k_n} E|S_{\Delta_{n,j}}|^{\gamma} \leq C_3 n^{-\nu\gamma/2} \sum_{j=1}^{k_n} |\Delta_{n,j}|^{\gamma/2} \leq$$

$$\leq C_3 n^{-\nu\gamma/2} \left(\max_{1 \leq j \leq k_n} |\Delta_{n,j}|^{\gamma/2 - 1} \right) \sum_{j=1}^{k_n} |\Delta_{n,j}| \leq C_3 n^{-\nu(\gamma/2 - 1)} \times$$

$$\times\left(\max_{1\le j\le k_n}|\Delta_{n,j}|\right)^{\gamma/2-1}\le C_3\left(n^{-\nu}\max_{1\le j\le k_n}|\Delta_{n,j}|\right)^{\gamma/2-1}\to 0\quad \text{при } n\to\infty.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функции $p=p(n)$ и $q=q(n)$, $n\in N$, принимающие натуральные значения, причем $p(n)=o(n)$, $q(n)=o(p)$ при $n\to\infty$. Обозначим $k_n=\left[\dfrac{n}{p+q}\right]$, $n=1,2,\ldots$ и

$$U_{n,j}=\{t\in V_n: pj+qj<t^{(1)}\le p(j+1)+qj\};$$

$$Q_{n,j}=\{t\in V_n: p(j+1)+qj<t^{(1)}\le p(j+1)+q(j+1)\},$$

$$j=-(k-1),\ldots,-1,0,1,\ldots,k-1;$$

$$Q_{n,k}=\{t\in V_n: pk+qk<t^{(1)}\le n\};$$

$$Q_{n,-k}=\{t\in V_n: -n<t^{(1)}\le -pk-qk\}.$$

Таким образом

$$V_n=\bigcup_{j=-(k-1)}^{k-1}U_{n,j}+\bigcup_{j=-(k-1)}^{k-1}Q_{n,j}+Q_{n,k}+Q_{n,-k}.$$

Введем обозначения

$$Y_{n,j}=\sum_{t\in U_{n,j}}\xi_t,\quad Z_{n,j}=\sum_{t\in Q_{n,j}}\xi_t,\quad j=-(k-1),\ldots,0,\ldots,k-1;$$

$$S_n^U=\sum_{j=-(k-1)}^{k-1}Y_{n,j},\quad S_n^Q=\sum_{j=-(k-1)}^{k-1}Z_{n,j}.$$

Отсюда имеем $S_{V_n}=S_n^U+S_n^Q$. Поскольку последовательность $(Var\,S_{V_n})^{-1/2}S_n^Q$, $n=1,2,\ldots$ по вероятности стремится к нулю, то остается доказать асимптотическую нормальность последовательности $(VarS_{V_n})^{-1/2}S_n^U$, $n=1,2,\ldots$. Для мартингал–разностной двойной серии

$$X_{n,j}=(Var\,S_{V_n})^{-1/2}Y_{n,j},\quad j=1,\ldots,k_n$$

проверим выполнение условий леммы 4. Согласно лемме

$$E|Y_{n,j}|^\gamma\le C|U_{n,j}|^{\gamma/2},\quad j=1,\ldots,k_n,\quad \gamma>2.$$

Далее, пользуясь леммой 1, имеем

$$n^{-\nu}\sum_{j=-(k-1)}^{k-1} Cov(Y_{n,j}^2,\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}) \le n^{-\nu}\sum_{j=-k-1}^{k-1} |EY_{n,j}^2\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j} - EY_{n,j}^2 E\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}| \le$$

$$\le n^{-\nu}\sum_{j=-(k-1)}^{k-1}\sum_{t\in U_{n,j}} |E\xi_t^2\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j} - E\xi_t^2 E\ \mathrm{sgn}\ I_{n,j}| \le$$

$$\le n^{-\nu} C_1 f(1)\alpha^{1-\gamma/2}(q(n))\sum_{-(k-1)}^{k-1} |U_{n,j}| E^{2/\gamma}|\xi_t|^\gamma \le C_2\alpha^{1-2/\gamma}(q) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Для с.п., удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, требования на моменты можно ослабить.

Теорема 4. *Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$ – мартингал-разностное с.п. такое, что семейство с.в. ξ_t^2, $t \in Z^\nu$ равномерно интегрируемо и $\inf_{t\in Z^\nu} E\xi_t^2 = \sigma^2 > 0$. Если ξ_t, $t \in Z^\nu$ обладает свойством равномерно сильного перемешивания и $\phi_V(d) \le f(|V|)\phi(d)$, где $\phi(d) \to 0$ при $d \to \infty$, а $f(x)$, $x \in R_+^1$ – произвольная функция, то для ξ_t, $t \in Z^\nu$ справедлива ЦПТ.*

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, оно вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Применим теперь полученные результаты к гиббсовским с.п.

Теорема 5. *Для любого трансляционно-инвариантного эргодического гиббсовского с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ с четным потенциалом и $0 < E\xi_0^2 < C < \infty$ справедлива ЦПТ.*

Теорема 6. *Пусть гиббсовское с.п. ξ_t, $t \in Z^\nu$ соответствует четному потенциалу с достаточно малой нормой (2) и $0 < \sigma < E\xi_t^2 < \infty$. Тогда для ξ_t, $t \in Z^\nu$ справедлива ЦПТ.*

ABSTRACT. **The paper studies random fields on the lattice Z^ν, $\nu > 1$ that have martingale-difference property and proves several limit theorems. The results may have useful applications in the theory of Gibbs random fields.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Аверинцев, "Описание марковских случайных полей с помощью гиббсовских условных вероятностей", Теор. вер. и ее прим., т. 17, стр. 20 – 33, 1972.
2. P. Billigsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, NY, 1968.
3. P. Billingsley, "The Lindeberg-Levy theorem for martingales", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 12, pp. 788 – 792, 1961.
4. E. Bolthausen, "On the central limit theorem for stationary mixing random fields", Ann. Prob., vol. 10, pp. 1047 – 1050, 1982.
5. B. Brown, "Martingale central limit theorem", Ann. Math. Statist., vol. 42, pp. 59 – 66, 1971.
6. А. В. Булинский, И. Г. Журбенко, "Центральная предельная теорема для аддитивных случайных функций", Теор. вер. и ее прим., т. 20, стр. 707 – 717, 1986.
7. R. Cairoly, J. Walsh, "Stochastic integrals in the plane", Acta Math., vol. 134, pp. 111 – 183, 1975.
8. Y. S. Chow, "Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, pp. 254 – 286, 1960.
9. Р. Л. Добрушин, "Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием", Функц. анализ и его прилож., т. 2, вып. 4, стр. 31 – 43, 1968.
10. Р. Л. Добрушин, "Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов", Функц. анализ и его прилож., т. 2, вып. 4, стр. 44 – 57, 1968.
11. R. L. Dobrushin, "The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity", Th. Prob. Appl., vol. 13, pp. 197 – 224, 1968.
12. R. L. Dobrushin, "Gaussian random fields-Gibbsian point of view", In : R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai (eds.) : Multicomponent Random Systems (Adv. in Prob. and Related Topics, vol. 6), Dekker, NY, 1980.
13. A. Dvoretsky, "Asymptotic normality for sums of dependent random variables", In : Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probab., vol. 2, pp. 513 – 535, Univ. California Press, 1972.
14. H.–O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, de Gruyter, Berlin, New York, 1988.
15. I. A. Ibragimov, "Central limit theorem for a class of dependent random variables", Th. Prob. Appl., vol. 8, pp. 83 – 89, 1963.
16. I. A. Ibragimov, Yu. A. Linnik, Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Walters–Noordoff, Groningen, 1977.
17. J. Jacod, A. N. Shiryaev, Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
18. K. Krikeberg, "Convergence of martingales with directed index set", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 83, pp. 313 – 337, 1956.
19. H. Künsch, "Gaussian Markov random fields", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A Math., vol. 26, pp. 53 – 73, 1979.
20. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория Мартингалов, Москва, Наука, 1986.
21. Д. Г. Мартиросян, "Фазовые переходы для мартингал–разностных гиббсовских решетчатых моделей", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 3, стр. 76 – 80, 1994.
22. R. A. Minlos, "Limiting Gibbs distribution", Funct. Anal. Appl., vol. 1, pp. 140 – 150 & 206 – 217, 1967.

23. B. S. Nahapetian, "The central limit theorem for random fields with mixing property", In : R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai (eds.) : Multicomponent Random Systems (Adv. in Prob. and Related Topics, vol. 6), Dekker, NY, 1980.
24. Б. С. Нахапетян, "Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин", Теор. вер. и ее примен., т. 32, стр. 535 – 539, 1987.
25. B. S. Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics, Teubner-Texte zur Math., vol. 123, Stuttgart–Leipzig, 1991.
26. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser.A.I. Math., vol. 17, pp. 105 – 110, 1992.
27. B. S. Nahapetian, "Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, ser.I, pp. 1539 – 1544, 1995.
28. C. J. Preston, "Generalized Gibbs states and Markov random fields", Adv. Appl. Prob., vol. 5, pp. 242 – 261, 1973.
29. S. Sherman, "Markov random fields and Gibbs random fields", Israel J. Math., vol. 14, pp. 92 – 103, 1973.
30. A. N. Shiryaev, Probability. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
31. Ya. G. Sinai, Theory of Phase Transitions : Rigorous Results. Pergamon Press, Oxford ; Akademiai Kiado, Budapest, 1982.
32. F. Spitzer, "Markov random fields and Gibbs ensembles", Am. Math. Monthly, vol. 78, pp. 142 – 154, 1971.
33. W. G. Sullivan, "Potentials for almost Markovian random fields", CMP, vol. 33, pp. 61 – 74, 1973.
34. H. Takahata, "On the central limit theorem for weakly dependent random fields", Yokohama Math. J., vol. 31, pp. 67 – 77, 1983.

19 сентября 1995

Институт математики
НАН Армении

О ЗАКОНАХ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОБРАТНЫХ МАРТИНГАЛОВ, ИНДЕКСИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАМИ

А. Н. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В статье мы описываем класс случайных полей, для которых нормированные суммы компонент образуют обратные мартингалы, ассоциированные с последовательностями возрастающих конечных множеств. При дополнительных ограничениях мы устанавливаем предельное поведение этих нормированных сумм, Результаты применяются к гиббсовским случайным полям.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Й. С. Чоу установил усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для одномерных мартингал–разностей с конечным моментом порядка $2r$ ($r \geq 1$). Этот результат явился обобщением УЗБЧ, который получили К. Л. Чанг и Ю. В. Прохоров (см. [3] и [11]) для последовательностей независимых случайных величин. Настоящая работа описывает класс случайных полей, для которых нормированные суммы компонент образуют обратные мартингалы, ассоциированные с последовательностями конечных множеств. Изучается предельное поведение этих нормированных сумм, в частности, мы доказываем УЗБЧ. Результаты применяются к гиббсовским случайным полям.

§1. УСЛОВНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Пусть $\mathbb{Z}^d$ – d-мерная ($d \geq 1$) целочисленная решетка и $\mathbf{W}$ – семейство всех ее конечных подмножеств :

$$\mathbf{W} = \{V: \ V \subset \mathbb{Z}^d, \ |V| < \infty\}$$

(здесь и далее $|\cdot|$ означает число точек множества). Пусть $\{V_n\}_{n \geq 0}$ – последовательность возрастающих конечных подмножеств (п.в.к.п.) $\mathbb{Z}^d$: $V_n \in \mathbf{W}$, $V_n \subset V_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Определение 1. Случайный процесс Y_V, $V \in \mathbf{W}$ назовем ***обратным мартингалом***, ассоциированным с п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$\mathbf{E}(Y_{V_n} \,/\, Y_{V_{n+1}}, Y_{V_{n+2}}, \ldots) = Y_{V_{n+1}}, \quad \text{п.н.} \tag{1.1}$$

Приведем примеры обратных мартингалов.

Пример 1. Пусть η – случайная величина с $\mathbf{E}\,|\eta| < \infty$ и пусть $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathbf{W}$ – семейство σ-алгебр такое, что $\mathcal{F}_V \supset \mathcal{F}_{\widetilde{V}}$ при $V \subset \widetilde{V}$, $V, \widetilde{V} \in \mathbf{W}$. Случайный процесс $Y_V = \mathbf{E}(\eta \,/\, \mathcal{F}_V)$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$. В частности, можно взять $\mathcal{F}_V = \sigma(\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^d \setminus V)$, $V \in \mathbf{W}$, где ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$, – некоторое случайное поле.

Пример 2. Пусть $\{V_n\}_{n\geq 0}$ – п.в.к.п. и $\Delta_j = V_j \setminus V_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$. Предположим, что в случайном поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}\xi_t = 0$, $t \in \mathbb{Z}^d$ случайные величины ξ_t, ξ_s независимы при $t \in \Delta_j$, $s \in \Delta_k$, $j \neq k$. Тогда случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$.

Пример 3. Пусть случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}\,|\xi_t| < \infty$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}(\xi_s \,/\, \xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^d \setminus \{s\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Тогда случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п.

Пример 4. Пусть $\mathbb{Z}^d = \cup_j T_j$, $T_j \cap T_k = \emptyset$, $j \neq k$, и пусть $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d$ – случайное поле, для которого $Y_V = \sum\limits_{t \in T_j \setminus V} \xi_t$, $V \subset T_j$ – обратный мартингал относительно любой п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, $V_n \subset T_j$, $n = 1, 2, \ldots$ для любого фиксированного $j = 1, 2, \ldots$. Если Y_V и $Y_{\widetilde{V}}$ независимы при $V \subset T_j$ и $\widetilde{V} \subset T_k$, $j \neq k$, то случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п.

Пример 5. Пусть случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^2$ с $\mathbf{E}\,|\xi_t| < \infty$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}(\xi_{(k,l)} \,/\, \ldots\xi_{(k-1,l)}, \xi_{(k+1,l)}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

при любых $k, l \in \mathbb{Z}^1$ и $\xi_{(k,l)}$, $\xi_{(i,j)}$ независимы при $l \neq j$. Тогда случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^2 \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п.

Определение 2. Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}|\xi_t| < \infty$ назовем *условно перестановочным* (по отношению к суммированию) относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любых $n = 0, 1, \dots$ и $s, t \in V_n$

$$\mathbf{E}\left(\xi_s \,/\, \sum_{u\in V_n} \xi_u, \sum_{u\in V_{n+1}} \xi_u, \dots\right) = \mathbf{E}\left(\xi_t \,/\, \sum_{u\in V_n} \xi_u, \sum_{u\in V_{n+1}} \xi_u, \dots\right) \quad \text{п.н.} \qquad (1.2)$$

Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ назовем *условно перестановочным*, если оно условно перестановочно относительно любой п.в.к.п.

Предложение 1. *Предположим, что случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ условно перестановочно относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$. Тогда случайный процесс $Y_V = \frac{1}{|V|}\sum_{t\in V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ образует обратный мартингал, ассоциированный с п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_{V_n}, Y_{V_{n+1}}, \dots)$. Из условной перестановочности для любых $n = 1, 2, \dots$ и $s, t \in V_n$

$$\mathbf{E}(\xi_s/\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\xi_t/\mathcal{F}_n) \quad \text{п.н.} \qquad (1.3)$$

Поскольку $V_n \subset V_{n+1}$, то из (2.1)

$$\mathbf{E}(Y_{V_n}/\mathcal{F}_{n+1}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in V_n} \xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}\right) = \frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in V_n} \mathbf{E}(\xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{|V_{n+1}|}\sum_{u\in V_{n+1}} \mathbf{E}(\xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{|V_{n+1}|}\sum_{u\in V_{n+1}} \xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}\right) = Y_{n+1},$$

и поэтому имеем (1.2). Предложение 1 доказано.

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^1$ – измеримое множество с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ борелевских подмножеств и конечной мерой $\mu(X) > 0$. Предположим, что для любого $t \in \mathbb{Z}^d$ измеримое пространство $(X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t)$ является копией пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и для любого $V \in \mathbf{W}$

$$X_V = \otimes_{t\in V} X_t, \quad \mathcal{A}_V = \otimes_{t\in V} \mathcal{A}_t, \quad \mu_V = \otimes_{t\in V} \mu_t,$$

где $\otimes$ – символ картезианского произведения и $X_\emptyset = \emptyset$, $\mathcal{A}_\emptyset = \emptyset$. Предположим, что p_V, $V \in \mathbf{W}$ – последовательная система конечномерных плотностей относительно μ_V, $V \in \mathbf{W}$, т.е. для любого $V \in \mathbf{W}$ $\int_X p_V(x)\, d\mu(x) = 1$ и если $V \subset \widetilde{V}$, то

$$\int_{X_{\widetilde{V}\setminus V}} p_{\widetilde{V}}(z, x)\, d\mu_{\widetilde{V}\setminus V}(x) = p_V(z), \quad z \in X_V.$$

Пусть для любого $t \in \mathbb{Z}^d$

$$\int_X |x| p_t(x)\, d\mu(x) < \infty. \tag{1.4}$$

Определение 3. Будем говорить, что последовательная система конечномерных плотностей p_V, $V \in \mathbf{W}$, обладающая свойством (1.4), является *инвариантной относительно спиновых инверсий*, если для любых $s, t \in V$ и $x \in X_V$

$$p_V(x) = p_V(\widetilde{x}), \tag{1.5}$$

где $\widetilde{x} \in X_V$, $\widetilde{x}_u = x_u$ при $u \in V \setminus \{s,t\}$ и $\widetilde{x}_s = x_t$, $\widetilde{x}_t = x_s$.

Теорема 1. *Если случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантными относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями p_V, $V \in \mathbf{W}$, то оно условно перестановочно.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любых $V \in \mathbf{W}$ и $s, t \in V$

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_V) = \mathbf{E}(\xi_t/S_V) \quad \text{п.н.}, \tag{1.6}$$

где $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$. Условные математические ожидания в (1.6) существуют, поскольку согласно (1.4) $\mathbf{E}|\xi_t| < \infty$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Перепишем (1.6) в эквивалентной форме :

$$\int_\Omega \xi_s I_A \, d\mathbf{Pr} = \int_\Omega \xi_t I_A \, d\mathbf{Pr} \tag{1.7}$$

для любого $A \in \sigma(S_V) \subseteq \mathcal{F}$. Здесь I_A – индикатор множества A. Для проверки (1.7) достаточно показать, что

$$\int_\Omega \xi_s I_{S_V^{-1}(B)} \, d\mathbf{Pr} = \int_\Omega \xi_t I_{S_V^{-1}(B)} \, d\mathbf{Pr}$$

и поэтому

$$\int_{X_V} x_s I_B \left(\sum_{u \in V} x_u \right) p_V(x)\, d\mu_V(x) = \int_{X_V} x_t I_B \left(\sum_{u \in V} x_u \right) p_V(x)\, d\mu_V(x) \tag{1.8}$$

для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Заменяя x_s на x_t и x_t на x_s в правой части (1.8) и используя симметрию $\sum x_u$ и $\mu_V(x) = \prod_{u \in V} \mu(x_u)$ относительно x_u, $u \in V$, можем переписать (1.8) в виде

$$\int_{X_V} x_s I_B \left(\sum_{u \in V} x_u \right) [p_V(x) - p_V(\widetilde{x})]\, d\mu_V(x) = 0,$$

где $\tilde{x} \in X_V$; $\tilde{x}_u = x_u$ при $u \in V \setminus \{s,t\}$ и $\tilde{x}_s = x_t, \tilde{x}_t = x_s$. Согласно (1.5) последнее равенство выполняется для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Следовательно, для соответствующего случайного поля имеет место (1.6).

Пусть теперь $\{V_n\}_{n\geq 1}$ – произвольная п.в.к.п. Из (1.6) получим

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_{V_n}) = \mathbf{E}(\xi_t/S_{V_n}) \quad \text{п.н.} \quad s,t \in V_n,\ n = 1,2,...$$

Аналогично можно показать, что для любых $s,t \in V_n$ и $l, n = 1,2,...$

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ..., S_{V_{n+l}}) = \mathbf{E}(\xi_t/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ..., S_{V_{n+l}}) \quad \text{п.н.} \tag{1.9}$$

Переходя к пределу под символом условного математического ожидания (см. [6]), получим

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ...) = \mathbf{E}(\xi_t/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ...) \quad \text{п.н.}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантными относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями p_V, $V \in \mathbf{W}$, то случайное поле $\phi(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}^d$ условно перестановочно для любой интегрируемой на X функции ϕ.*

Замечание 1. Случайное поле $\phi(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}^d$ в теореме 2 условно перестановочно относительно обоих суммирований $\sum \phi(\xi_t)$ и $\sum \xi_t$. Это означает, что случайный процесс $Y_V = \dfrac{1}{|V|}\sum\limits_{t \in V} \phi(\xi_t)$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом в смысле определения 2 и в классическом смысле (относительно σ-полей $\mathcal{F}_n = \sigma(\sum_{u \in V_n} \xi_u, \sum_{u \in V_{n+1}} \xi_u, ...))$.

§2. АСИМПТОТИЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Ниже мы будем исследовать асимптотическое поведение нормированных сумм компонент случайного поля, образующего обратный мартингал. В частности, мы получаем достаточные условия для конечномерных плотностей, при которых выполняется УЗБЧ.

Будем говорить, что для случайного поля ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{E}\xi_t = 0$ имеет место УЗБЧ относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если п.н.

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t \in V_n} \xi_t \ \rightarrow\ 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Будем говорить, что для случайного поля ξ_t, $\mathbf{E}\xi_t = 0$, $t \in \mathbb{Z}^d$ имеет место УЗБЧ, если для ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ УЗБЧ имеет место относительно любой п.в.к.п.

Следующая теорема следует из предложения 1, теоремы 1 и из хорошо известной теоремы о сходимости обратных мартингалов (см. [6], [7]). Обозначим

$$\sigma_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\sum_{u\in V_n} \xi_u,\ \sum_{u\in V_{n+1}} \xi_u, \ldots\right).$$

Теорема 3. *Предположим, что случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантыми относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями. Тогда для любойо п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$ имеет место сходимость*

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \xi_t \to \mathbf{E}(\xi_0/\sigma_\infty), \qquad \text{при } n \to \infty$$

п.н. и в $\mathbf{L}^1$.

Теорема 4. *Пусть случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантыми относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями. Тогда для любой п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$ и любой интегрируемой функции ϕ имеет место сходимость*

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \phi(\xi_t) \to \mathbf{E}(\phi(\xi_0)/\sigma_\infty), \qquad \text{при } n \to \infty$$

п.н. и в смысле $\mathbf{L}^1$.

Доказательство. Сходимость нормированных сумм $(|V_n|)^{-1}\sum_{t\in V_n}\phi(\xi_t)$ следует из предложения 1, теоремы 2 и из теоремы о сходимости обратных мартинглаов. Согласно замечанию 1, значение предела равно $\mathbf{E}(\phi(\xi_0)/\sigma_\infty)$.

Далее нам понадобятся следующие определения, введенные в [8], [9].

Будем говорить, что случайный процесс S_V, $V \in \mathbf{W}$ образует мартингал, ассоциированный с п.в..п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{E}(S_{V_n}/S_{V_0}, S_{V_1}, \ldots, S_{V_{n-1}}) = S_{V_{n-1}} \quad \text{п.н.} \tag{2.1}$$

Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}|\xi_t| < \infty$ называется ***мартингал-разностным случайным полем относительно п.в.к.п.*** $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любых $s \in V_n \setminus V_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{E}(\xi_s/\xi_u,\ u \in V_{n-1}) = \mathbf{E}\xi_s \quad \text{п.н.} \tag{2.2}$$

Если случайное поле мартингал-разностно относительно любой п.в.к.п., то оно называется *мартингал-разностным* случайным полем. Нетрудно видеть ([9], [10]), что если ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ – мартингал-разностное случайное поле относительно некоторой п.в.к.п., то случайный процесс $S_V = \sum_{t\in V}\xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ образует мартингал, ассоциированный с той же п.в.к.п.

Пусть теперь $X \subseteq \mathbb{R}^1$ – множество, симметричное относительно нуля (т.е. если $x \in X$, то $-x \in X$) и μ – симметричная относительно нуля мера (это означает, что $\mu(Y) = \mu(-Y)$, где $-Y = \{-x : x \in Y\}$, $Y \in \mathcal{A}$). Рассмотрим систему согласованных конечномерных плотностей p_V, $V \in \mathbf{W}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}^d}\int_X x^\gamma p_t(x)\,d\mu < \infty, \quad \gamma \geq 2. \tag{2.3}$$

Предположим, что p_V, $V \in \mathbf{W}$ четные. Это означает, что для любых $V \in \mathbf{W}$, $x \in X_V$ и $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_{|V|})$ таких, что $\theta_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, ..., |V|$

$$p_V(x_{\overline{\theta}}) = p_V(x), \quad x_{\overline{\theta}} = (\theta_1 x_{t_1}, ..., \theta_{|V|} x_{t_{|V|}}) \in X_V. \tag{2.4}$$

Теорема 5. *Если случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ имеет четные конечномерные плотности p_V, $V \in \mathbf{W}$, удовлетворяющие (2.3), то ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ подчиняется УЗБЧ относительно любых п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$ таких, что $|\Delta_n| \leq An^\delta$; $A > 0$, $0 \leq \delta < 1$; $\Delta_n = V_n \setminus V_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$.*

Доказательство. При доказательстве существенно используется представление мартингал-разностного случайного поля четными плотностями ([9], [10]) и вышеотмеченная теорема Чоу ([1]). Из условия (2.4) следует мартигал–разностное свойство для случайного поля, соответствующего системе конечномерных плотностей p_V, $V \in \mathbf{W}$. Следовательно, $S_V = \sum_{t\in V}\xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ образует мартингал, ассоциированный с произвольной п.в.к.п. Согласно теореме Чоу, для одномерного мартингала $S = \{S_n\}$ имеет место УЗБЧ, если

$$\mathbf{E}|S_n|^{2r} < \infty \tag{2.5}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}|S_n - S_{n-1}|^{2r}}{n^{1+r}} < \infty, \quad r \geq 1. \tag{2.6}$$

Проверим условия (2.5) и (2.6) для мартингала $S_{V_n} = \sum_{t\in V_n} \xi_t$ с $r = \gamma/2$. Из условия (2.3) следует существование $\mathbf{E}|S_{V_n}|^\gamma$. Из неравенств Буркхолдера (см. [2]) и Минковского имеем

$$(\mathbf{E}|S_{V_n}|^\gamma)^{1/\gamma} \le A_\gamma \left(\mathbf{E}\left(\sum_{t\in V_n} \mathbf{E}\xi_t^2\right)^{\gamma/2}\right)^{1/\gamma} \le A_\gamma \left(\sum_{t\in V_n} (\mathbf{E}\xi_t^\gamma)^{2/\gamma}\right)^{1/2} \le$$

$$\le A_\gamma |V_n|^{1/2} \left(\sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \left(\int_X x^\gamma p_t(x)\, d\mu_t(x)\right)^{2/\gamma}\right)^{1/2} < \infty,$$

где $A_\gamma \ge 0$ – некоторая константа. Это означает, что $\mathbf{E}|S_{V_n}|^\gamma < \infty$. Для последовательности $\{S_{V_n}\}$ условие (2.6) можно проверить аналогично :

$$(\mathbf{E}|S_{V_n} - S_{V_{n-1}}|^\gamma)^{1/\gamma} = \left(\mathbf{E}\left|\sum_{t\in\Delta_n} \xi_t\right|^\gamma\right)^{1/\gamma} \le B_\gamma |\Delta_n|^{1/2},$$

где $B_\gamma \ge 0$ – константа. Таким образом

$$\mathbf{E}|S_{V_n} - S_{V_{n-1}}|^\gamma \le B_\gamma^\gamma |\Delta_n|^{\gamma/2} \le C_\gamma n^{\gamma\delta/2}, \quad C_\gamma = A^{\gamma/2} B_\gamma^\gamma$$

и, тем самым, условие (2.6) выполняется. Теорема 5 доказана.

Теорема 5 представляет УЗБЧ относительно п.в.к.п., имеющей особую структуру. Тем не менее мы можем привести условия для конечномерных плотностей, при наличии которых УЗБЧ выполняется для любой п.в.к.п.

Теорема 6. *Пусть конечномерные плотности случайного поля ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ являются четными и инвариантны относительно спиновых инверсий. Тогда УЗБЧ имеет место относительно произвольной п.в.к.п.*

Доказательство. Доказательство теоремы 6 является следствием теорем 1, 3 и 5. Условие (2.4) обеспечивает УЗБЧ для случайного поля относительно п.в.к.п., имеющей особую структуру теоремы 5. Из условия (1.5) следует сходимость (п.н. и в смысле $\mathbf{L}^1$) нормированных сумм

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \xi_t \to \mathbf{E}(\xi_0/\sigma_{\infty}), \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где $\{V_n\}_{n\ge 0}$ – произвольная п.в.к.п. Из единственности предела следует, что это случайное поле должно быть нулем. Теорема 6 доказана.

§3. ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И ОБРАТНЫЕ МАРТИНГАЛЫ

В этом параграфе мы приведем условия на потенциал Φ, при которых соответствующее гиббсовское случайное поле образует обратный мартингал. Ситема $\Phi = \{\Phi_V,\ V \in \mathbf{W}\}$ измеримых функций, каждая из которых определена в соответствующем пространстве $(X_V, \mathcal{A}_V, \mu_V)$, называется *потенциалом*. Норма потенциала Φ определяется по формуле

$$\|\Phi\| = \sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \sum_{J:\, t\in J\in\mathbf{W}} \sup\{|\Phi_J(x)| :\ x \in X_J\}.$$

Для $V \in \mathbf{W}$ потенциальную энергию определим как

$$U_V(x) = \sum_{\substack{J\subset V\\ J\neq\emptyset}} \Phi_J(x_J), \quad x = (x_t,\ t\in V) \in X_V, \quad x_J = (x_t,\ t\in J), \quad J \subset V.$$

Потенциальная энергия конечна, если, например, условие $\|\Phi\| < \infty$ выполнено. Вероятностное распределение G_V на $(X_V, \mathcal{A}_V)$, абсолютно непрерывное относительно меры μ_V с плотностью

$$q_V^{\Phi}(x) = \frac{\exp[-U_V(x)]}{\int_{X_V} \exp[-U_V(x)]\, d\mu_V(x)}, \quad x \in X_V \tag{3.1}$$

называтеся *распределением Гиббса* в V, соответствующим потенциалу Φ. Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ называется *гиббсовским случайным полем* (ГСП), если его конечномерные распределения P_V являются пределами распределений Гиббса в конечных множествах, т.е. существует п.в.к.п. $\{J_m\}_{m\geq 1}$, $\cup_m J_m = \mathbb{Z}^d$, такая, что равномерно по $A \in \mathcal{A}_V$

$$P_V(A) = \lim_{m\to\infty} (G_{J_m})_V(A), \tag{3.2}$$

где $(G_J)_V(A) = G_J(A \otimes X_{J\setminus V})$, $V \subset J$.

Будем говорить, что потенциал Φ инвариантен относительно спиновых инверсий, если для любых $V \in \mathbf{W}$, $s,t \in V$ и $x \in X_V$

$$\Phi_V(x) = \Phi_V(\widetilde{x}), \tag{3.3}$$

где $\widetilde{x} \in X_V$; $\widetilde{x}_u = x_u$, при $u \in V \setminus \{s,t\}$, и $\widetilde{x}_s = x_t$, $\widetilde{x}_t = x_s$.

Предложение 2. *Пусть потенциал Φ с конечной нормой инвариантен относительно спиновых инверсий. Если для любых $s, t \in \mathbb{Z}^d$ и $x, y \in X$, $z \in X_{\mathbb{Z}^d}$*

$$\sum_{J \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{s,t\}} [\Phi_{\{s\} \cup J}(x, z_J) - \Phi_{\{s\} \cup J}(y, z_J)] = \sum_{J \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{s,t\}} [\Phi_{\{t\} \cup J}(x, z_J) - \Phi_{\{t\} \cup J}(y, z_J)], \tag{3.4}$$

то для соответствующего ГСП ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$, процесс $Y_V = \frac{1}{|V|} \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$, является обратным мартингалом, ассоциированным с произвольной п.в.к.п.

Доказательство. Существование ГСП следует из свойства финитности нормы потенциала (см., например, [4], [5]). Покажем, что конечномерные гиббсовские плотности обладают свойством (1.5). Поскольку плотности p_V, $V \in \mathbf{W}$ гиббсовские, то существует п.в.к.п. $\{J_m\}_{m \geq 1}$, $\cup J_m = \mathbb{Z}^d$ такая, что

$$p_V(x) = \lim_{m \to \infty} (q^{\Phi}_{J_m})_V(x)$$

для любых $V \in \mathbf{W}$ и $x \in X_V$. Пусть $\widetilde{x} \in X_V$ такое, что $\widetilde{x}_u = x_u$ для $u \in V \setminus \{s, t\}$, а $\widetilde{x}_s = x_t$, $\widetilde{x}_t = x_s$ для любых фиксированных точек $s, t \in V$, $s \neq t$ и $x \in X_V$. Тогда

$$p_V(x) - p_V(\widetilde{x}) = \lim_{m \to \infty} [(q^{\Phi}_{J_m})_V(x) - (q^{\Phi}_{J_m})_V(\widetilde{x})] = \tag{3.5}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{\int_{X_{J_m \setminus V}} \exp\{-U_{J_m}(x, z)\}[1 - \exp\{-U_{J_m}(x, z) + U_{J_m}(\widetilde{x}, z)\}]\, d\mu_{J_m \setminus V}(z)}{\int_{X_{J_m}} \exp\{-U_{J_m}(z)\}\, d\mu_{J_m}(z)}.$$

Согласно (3.3) при достаточно больших m, для которых $J_m \supset V$, имеем

$$U_{J_m}(x, z) - U_{J_m}(\widetilde{x}, z) = \sum_{J \subset J_m \setminus V} [\Phi_{\{V \setminus \{s\}\} \cup J}(x_{V \setminus \{s\}}, z_J) - \Phi_{\{V \setminus \{s\}\} \cup J}(\widetilde{x}_{V \setminus \{s\}}, z_J)] -$$

$$- \sum_{J \subset J_m \setminus V} [\Phi_{\{V \setminus \{t\}\} \cup J}(x_{V \setminus \{t\}}, z_J) - \Phi_{\{V \setminus \{t\}\} \cup J}(\widetilde{x}_{V \setminus \{t\}}, z_J)]. \tag{3.6}$$

Положив $\widetilde{J} = J \cup \{V \setminus \{s, t\}\}$ и $\widetilde{z}_{\widetilde{J}} = (x_{V \setminus \{s,t\}}, z_J)$ в правой части (3.6), получим

$$U_{J_m}(x, z) - U_{J_m}(\widetilde{x}, z) = \sum_{\widetilde{J} \subset J_m \setminus \{s,t\}} [\Phi_{\{s\} \cup \widetilde{J}}(x_s, \widetilde{z}_{\widetilde{J}}) - \Phi_{\{s\} \cup \widetilde{J}}(x_t, \widetilde{z}_{\widetilde{J}})] -$$

$$- \sum_{\widetilde{J} \subset J_m \setminus \{s,t\}} [\Phi_{\{t\} \cup \widetilde{J}}(x_s, \widetilde{z}_{\widetilde{J}}) - \Phi_{\{t\} \cup \widetilde{J}}(x_t, \widetilde{z}_{\widetilde{J}})].$$

Поэтому из (3.4)

$$\lim_{m \to \infty} (U_{J_m}(x, z) - U_{J_m}(\widetilde{x}, z)) = 0.$$

Отсюда, в силу (3.5), следует (1.5). Для завершения доказательства предложения 2 остается применить предложение 1 и теорему 1.

С помощью предложения 2 можно построить ГСП, образующие обратные мартингалы. Следующая теорема обобщает предыдущую.

Теорема 7. *Пусть потенциал Φ с конечной нормой инвариантен относительно спиновых инверсий и удовлетворяет условию (3.4). Тогда случайный процесс $Y_V = \frac{1}{|V|}\sum_{t\in V}\phi(\xi_t)$, $V \in \mathbf{W}$, является обратным мартингалом, ассоциированным с произвольной п.в.к.п. для любой функции ϕ, интегрируемой на X.*

Доказательство непосредственно следует из предложения 1, теоремы 2 и предложения 2.

Скажем, что потенциал Φ *четный*, если для любых $V \in \mathbf{W}$, $x \in X$ и $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_{|V|})$ такой, что $\theta_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, ..., |V|$, имеем

$$\Phi_V(x_{\overline{\theta}}) = \Phi_V(x), \quad x_{\overline{\theta}} = (\theta_1 x_{t_1}, ..., \theta_{|V|} x_{t_{|V|}}) \in X_V. \tag{3.7}$$

Теорема 8. *Если Φ – четный потенциал, то соответствующее ГСП удовлетворяет УЗБЧ относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, для которой $|\Delta_n| \leq An^\delta$; $A > 0$, $0 \leq \delta < 1$; $\Delta_n = V_n \setminus V_{n-1}$, $n = 1, 2, ...$.*

Теорема 9. *Если потенциал Φ является четным и инвариантным относительно спиновых инверсий, то для соответствующего ГСП имеет место УЗБЧ относительно любой п.в.к.п.*

Для доказательства теорем 8 и 9 достаточно заметить, что из условия (3.7) следует свойство (2.4) для гиббсовских плотностей, и последовательно применить теоремы 5, 6 и предложение 2.

Автор выражает благодарность Б.С. Нахапетяну и С.К. Погосяну за ценные советы и обсуждения.

ABSTRACT. In the paper we discribe a class of random fields, for which the normalized sums of components form reverse martingales asssocciated with sequences of increasing finite sets. Under additional restrictions we establish the limiting behavior of these normalized sums. The results are applied to the Gibbs random fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. S. Chow, "On a strong law of large numbers for martingales", Ann. Math. Statist., vol. 38, № 2, p. 610, 1967.
2. Y. S. Chow, H. Teicher, Probability Theory, Springer-Verlag, New-York, 1978.
3. K. L. Chung, "The strong law of large numbers", Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Univ. of California Press, pp. 341 – 352, 1951.
4. R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields for lattice system with pairwise interactions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 292 – 301, 1968.
5. R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields. General case", Funct. Anal. Appl., vol.3, № 1, pp. 27 – 35, 1969.
6. J. L. Doob, Stochastic Processes, J. Wiley & Sons, Chapman & Hall, 1953.
7. P. A. Meyer, Probability and Potentials, Massachusetts-Toronto-London, 1966.
8. Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Центральная предельная теорема для мартингалов, ассоциированных с возрастающими множествами", Докл. АН АрмССР, т. 85, № 1, стр. 12 – 15, 1987.
9. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A.I.Math., vol. 17, pp. 105 – 107, 1992.
10. A. N. Petrosian, "On a martingale property of the Gibbs random fields", J. Int. Eq. Math. Phys., vol. 1, № 1, pp. 152 – 157, 1992.
11. Ю. В. Прохоров, "О сильном законе больших чисел", Изв. АН СССР , Мат., т. 14, № 6, стр. 523 – 536, 1950.

19 сентября 1995

Институт математики
НАН Армении

УБЫВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ В КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С ВАКУУМОМ

Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 6, 1995

В настоящей статье мы рассматриваем решетчатые спиновые системы с общим вакуумным потенциалом и стандартное спиновое пространство. Эти системы обобщают так называемые конфигурационные системы, которые относятся к особому случаю, когда спиновое пространство – синглетон. Мы показываем, что при некоторых условиях на потенциал, гиббсовские распределения в больших сосудах удовлетворяют условию равномерно сильного перемешивания. Получается, что конечно–сосудистые гиббсовские распределения и соответствующие предельные поля имеют существенно различные оценки для коэффициента перемешивания. В первом случае они представляют собой сумму двух членов, один из которых отвечает за скорость убывания корреляций, а другой – за скорость стремления к предельному гиббсовскому полю при увеличении сосуда.

1⁰. Слабая коррелированность значений случайного поля является тем фундаментальным свойством, которое позволяет для случайных полей, им обладающих, устанавливать многие содержательные теоремы, в частности, построить теорию предельных теорем, аналогичную имеющей место для последовательностей независимых случайных величин (см., например, [1] — [3]). В работах, посвященных этой тематике, используется широкий спектр определений этого свойства : эргодичность, условия перемешивания, семиинвариантные условия слабой зависимости, ассоциативность, (положительная зависимость) и т.д.

Другим направлением, где убывание корреляций играет важную роль, является проблема существования и единственности случайного поля с заданной системой условных распрделений. Это впервые обсуждалось в основополагающей работе

Добрушина [4] о задании случайного поля с помощью системы условных распределений. В связи с этим, особый интерес представляют гиббсовские случайные поля. Совокупность гиббсовских распределений в конечных сосудах, вообще говоря, не является согласованной в смысле Колмогорова. Таковыми оказываются системы конечномерных распределений для предельных гиббсовских распределений. Гиббсовские распределения в конечных сосудах представляют собой систему условных распределений для предельных гиббсовских полей (см. [5,6]).

В настоящей работе мы изучаем решетчатые спиновые системы с вакуумным потенциалом общего взаимодействия и стандартным спиновым пространством. Эти системы естественным образом обобщают так называемые конфигурационные системы, которые соответствуют особому случаю, когда спиновое пространство – синглетон. Приводятся условия на потенциал, при которых соответствующие гиббсовские распределения в больших, но конечных сосудах удовлетворяют условию равномерно сильного перемешивания. Оказывается, что конечномерные гиббсовские распределения и соответствующие предельные поля имеют существенно разные выражения для оценки коэффициента перемешивания. В первом случае это сумма двух членов, один из которых отвечает за скорость убывания корреляций, а другой – за скорость стремления к предельному гиббсовскому распределению при увеличении сосуда.

Из полученных оценок следует, что предельное гиббсовское распределение единственно и удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания. При степенном или экспоненциально убывающем потенциале, когда увеличивается расстояние между рассматриваемыми значениями поля, оценки убывают, соответственно, степенным или экспоненциальным образом. с одинаковой скоростью. В статье мы развиваем результаты работы [7].

Следует отметить, что применение общих результатов Добрушина [4] к рассматриваемым нами системам приводит к более ограничительным условиям на потенциал. Используемые в статье корреляционные уравнения были получены одним из авторов [7] и являются обобщением корреляционных уравнений Галлавоти и Миракл–Соля [8].

2⁰. Пусть X – полное сепарабельное метрическое пространство[1] с конечной и неотрицательной мерой μ, и пусть $\mathcal{B}$ – σ–алгебра его борелевских подмножеств. Для простоты предполагаем, что $\mu(X) = 1$.

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$ – ν–мерная целочисленная решетка. Для $I \subset \mathbb{Z}^\nu$ через $\mathcal{C}(I)$ обозначим множество всех конечных подмножеств I, а через X^I – декартово произведение $\prod_{t\in I} X_t$, где все X_t являются копиями пространства X. Мы также будем считать X^I пространством функций $(x(t), t \in I)$, определенных на I со значениями в X. Через $\mathcal{B}^I$ обозначим борелевскую σ–алгебру на X^I, соответствующую топологии произведения, а через μ^I – соответствующее мер произведение мер.

Рассмотрим пространство

$$L(I) = \bigcup_{J\in\mathcal{C}(I)} X^J, \qquad I \subset \mathbb{Z}^\nu$$

с σ–алгеброй $\mathcal{B}(I)$ и мерой m_I. По определению, их проекции на каждое X^J, $J \in \mathcal{C}(I)$ совпадают с $\mathcal{B}^J$ и μ^J соответственно. Здесь $X^\emptyset = \{\emptyset\}$ и $\mu^\emptyset(X^\emptyset) = 1$.

Для любого $I \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu)$, $L(I)$ – компактное сепарабельное метрическое пространство и $\mathcal{B}(I)$ – его борелевская σ–алгебра.

Пространство $(L(I), \mathcal{B}(I), m_I)$ назовем пространством конфигураций в I.

Мы также будем рассматривать пространство

$$\widetilde{L}(I) = \bigcup_{J\subset I} X^J, \quad I \subset \mathbb{Z}^\nu.$$

Элемент $x \in L(I)$ назовем конфигурацией на J и обозначим $s(x) = J$, если $x \in X^J$, $J \subset I$. Сужение x на $V \subset J$ обозначим через x_V, т.е. $x_V = (x(t); t \in V)$. Если $x = (x(t), t \in I)$, $\widetilde{x} = (\widetilde{x}(t), t \in \widetilde{I})$, $I \cap \widetilde{I} = \emptyset$, то через $x + \widetilde{x}$ обозначим конфигурацию на $I \cup \widetilde{I}$, определяемую формулой

$$(x+\widetilde{x})(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in I, \\ \widetilde{x}(t), & \text{если} \quad t \in \widetilde{I}. \end{cases}$$

Пусть для $A \in \mathcal{B}(I)$, $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\widetilde{I})$ $A + \widetilde{A} = \{x + \widetilde{x}\colon \ x \in A, \widetilde{x} \in \widetilde{A}\}$.

[1]Результаты работы остаются верными, если X – стандартное борелевское пространство (см. [9])

Предполагается, что потенциал взаимодействия Φ – измеримая вещественная функция на L. Здесь и ниже будем писать L, $\widetilde{L}$ и C вместо $L(\mathbb{Z}^\nu)$, $\widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu)$ и $C(\mathbb{Z}^\nu)$. Потенциал Φ назовем трансляционно-инвариантным, если для любых $a \in \mathbb{Z}^\nu$ и $x \in L$ с $s(x) = I$ имеем $\Phi(x) = \Phi(\widetilde{x})$, где $s(\widetilde{x}) = I + a$ и $\widetilde{x}(t) = x(t-a)$, $t \in I + a$. Предположим, что $\Phi(x) = 0$ при $|s(x)| = 1$, где $|\cdot|$ означает кардинальность множества. Положим также $z(x) = \prod_{t\in s(x)} \exp\left(-\Phi(x(t))\right)$.

Мы будем рассматривать трансляционно-инвариантные потенциалы Φ, удовлетворяющие условию

$$\|\Phi\| = \sum_{\substack{I\in C,\\ O\in I}} \sup_{x\in X^I} |\Phi(x)| < \infty.$$

Пусть $I \in C$ и $\overline{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus I)$. Потенциальная энергия конфигурации $x \in L(I)$ с граничным условием $\overline{x}$ определяется формулой

$$U^{\overline{x}}(x) = \sum_{J:\ \emptyset\neq J\subset s(x)} \ \sum_{\overline{J}\in C(s(\overline{x}))} \Phi(x_J + \overline{x}_{\overline{J}}).$$

Определим распределение Гиббса в конечном объеме $I \in C$ с граничным условием $\overline{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus I)$ как вероятностную меру $P_I^{\overline{x}}$ на $B(I)$, абсолютно непрерывную относительно m_I, с плотностью

$$q_I^{\overline{x}}(x) = \frac{z(x)\exp\left(-U^{\overline{x}}(x)\right)}{\Xi(I,\overline{x})}, \quad x \in L(I), \tag{2.1}$$

где нормирующий множитель

$$\Xi(I,\overline{x}) = \int_{L(I)} z(x)\exp\left(-U^{\overline{x}}(x)\right) m_I(dx)$$

называется статистической функцией.

Корреляционные функции

$$\rho_I^{\overline{x}}(x) = \begin{cases} \int_{L(I\setminus s(x))} \dfrac{z(x+y)\exp\left(-U^{\overline{x}}(x+y)\right)}{\Xi(I,\overline{x})} m_{I\setminus s(x)}(dy), & \text{если} \quad x \in L(I), \\ 0, \quad \text{в противном случае} \end{cases} \tag{2.2}$$

будут основным инструментом в нашем изучении свойств распределения (2.1).

Для любых $I \subset \mathbb{Z}^\nu$, $J \in C(I)$ определим отображение $\pi_{I,J}\colon\ \widetilde{L}(I) \to L(J)$ по формуле $\pi_{I,J}(x) = x_J$, $x \in \widetilde{L}(I)$. Пусть $\widetilde{B}(I)$ – σ-алгебра в $\widetilde{L}(I)$, порожденная отображениями $\{\pi_{I,J};\ J \in \mathcal{C}(I)\}$. Тогда $(\widetilde{L}(I), \widetilde{\mathcal{B}}(I))$ – проективный предел измеримых пространств $\{(L(J), \mathcal{B}(J);\ J \in \mathcal{C}(I)\}$.

Для вероятностной меры P на $\widetilde{\mathcal{B}}(I)$ или $\mathcal{B}(I)$, $I \subset \mathbb{Z}^\nu$, через $(P)_J$ (часто через P_J) обозначим сужение P на $\mathcal{B}(J)$, $J \in \mathcal{C}(I)$.

Пусть $T \subset \mathbb{Z}^\nu$ – бесконечное подмножество и $\bar{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$. Если для возрастающей последовательности множеств $\Lambda_n \in \mathcal{C}$, $\Lambda_n \uparrow T$, $n \to \infty$ и последовательности граничных условий $\bar{x}_n \in \widetilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$ существует предел $P^{\bar{x}}_{T,J} = w \lim\limits_{n\to\infty} \left(P^{\bar{x}+\bar{x}_n}_{\Lambda_n}\right)_J$ при любом $J \in \mathcal{C}(T)$, то существует единственная вероятностная мера $P^{\bar{x}}_T$ на проективном пределе $(\widetilde{L}(T), \widetilde{\mathcal{B}}(T))$, причем такая, что $\left(P^{\bar{x}}_T\right)_J = P^{\bar{x}}_{T,J}$, $J \in \mathcal{C}(T)$ (см. [9]). Эту вероятностную меру мы назовем предельной гиббсовской мерой на T. Если $T = \mathbb{Z}^\nu$, то $P \equiv P^{\emptyset}_{\mathbb{Z}^\nu}$ – обычная предельная гиббсовская мера на $\mathbb{Z}^\nu$.

3^0. В этом параграфе мы даем необходимые определения и формулируем основные результаты. Через $\mathcal{A}$ обозначим класс трансляционно инвариантных потенциалов Φ, удовлетворяющих следующим условиям :

$$\|\Phi\| < \infty; \qquad \gamma_\Phi(z)\left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right) < 1,$$

где

$$z = \sup_{x\in X} z(x), \quad \gamma_\Phi(z) = \frac{z \exp(\|\Phi\|)}{1 + z\exp(\|\Phi\|)},$$

$$C_\Phi = 2\exp\left(e^{\|\Phi\|} - 1\right) - 2, \quad \widetilde{C}_\Phi(z) = \beta(X)\, z\, e^{2\|\Phi\|}\left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right)(C_\Phi + 2),$$

$$\beta(X) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |X| = 1, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любых x_1, $x_2 \in \widetilde{L}$ положим

$$x_1 \Delta x_2 = s(x_1) \cup s(x_2) \setminus E(x_1, x_2),$$

где $E(x_1, x_2)$ – наибольшее множество S такое, что $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in S$.

Рассмотрим следующую метрику на $\mathbb{Z}^\nu$:

$$\delta(t_1, t_2) = \max_{1\le i\le \nu} |t_1^{(i)} - t_2^{(i)}|, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^\nu.$$

Для J_1, $J_2 \subset \mathbb{Z}^\nu$ через $\delta(J_1, J_2)$ обозначим расстояние между множествами J_1, J_2 :

$$\delta(J_1, J_2) = \inf_{t_1 \in J_1, t_2 \in J_2} \delta(t_1, t_2).$$

Предполагаем, что $\delta(J, \emptyset) = \infty$ для любого $J \in \mathcal{C}$. Для потенциала $\Phi \in \mathcal{A}$ и неотрицательного числа d положим

$$\alpha(d) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma_\Phi(z)\left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n r\left(\frac{d}{n+1}\right), \tag{3.1}$$

где

$$r(d) = \frac{1}{\|\Phi\|} \sum_{J \in \mathcal{C}:\ O \in J \not\subset S(O,d)} \sup_{x \in X^J} |\Phi(x)|. \tag{3.2}$$

Здесь $S(O, d) = \{t \in \mathbb{Z}^\nu : \quad \delta(O, t) \leq d\}$. Очевидно $r(d)$ – монотонно убывающая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Положим $r(\infty) = 0$.

Предложение 1. а) *Если потенциал $\Phi \in \mathcal{A}$ убывает степенным образом с показателем γ, т. е.*

$$\|\Phi\|_\gamma = \sum_{J \in \mathcal{C}:\ O \in J} (Diam\, J)^\gamma \sup_{x \in X^J} |\Phi(x)| < \infty, \quad \gamma > 0, \tag{3.3}$$

то величины α и r убывают степенным образом с тем же показателем.

б) Если $\Phi \in \mathcal{A}$ убывает экспоненциально, т. е.

$$\|\Phi\|_\gamma^{(1)} = \sum_{J \in \mathcal{E}:\ O \in J} e^{\gamma \cdot \mathrm{Diam}\, J} \sup_{x \in X^J} |\Phi(x)| < \infty, \quad \gamma > 0, \tag{3.4}$$

то величины α и r убывают экспоненциально.

Доказательство. Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$r(d) \leq \frac{\|\Phi\|_\gamma}{\|\Phi\|} d^{-\gamma}.$$

Следовательно

$$\alpha(d) \leq d^{-\gamma} \frac{\|\Phi\|_\gamma}{\|\Phi\|} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma_\Phi(z)\ \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n (n+1)^\gamma,$$

что и доказывает пункт а).

Аналогичным образом из (3.4) получаем

$$r(d) \leq \frac{\|\Phi\|_\gamma^{(1)}}{\|\Phi\|} e^{-\gamma d}.$$

Поэтому

$$\alpha(d) \leq e^{-\gamma d} \frac{\|\Phi\|_{\gamma}^{(1)}}{\|\Phi\|} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma_{\Phi}(z) \left(1 + C_{\Phi} + \widetilde{C}_{\Phi}(z)\right)\right]^{n} \exp\left(\gamma d \frac{n}{n+1}\right).$$

Предложение 1 доказано.

Мы будем говорить, что случайное поле P_T на $T \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания $\varphi_I(d)$, $d \geq 0$, $\varphi_I(d) \to 0$ при $d \to \infty$, если для всех I, $V \in \mathcal{C}(T)$, $I \cap V = \emptyset$ имеет место следующее неравенство :

$$\left|(P_T)_{I/V}(A/B) - (P_T)_I(A)\right| \leq \varphi_I(\delta(I, V)), \tag{3.5}$$

где $A \in \mathcal{B}(I)$, $B \in \mathcal{B}(V)$, $(P_T)_V(B) > 0$ и

$$(P_T)_{I/V}(A/B) = \frac{(P_T)_{I \cup V}(A+B)}{(P_T)_V(B)}.$$

Для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ положим

$$\chi_{\Lambda}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in L(\Lambda), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательства нижеследующих теорем 1– 4 даны в разделе 5.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi \in \mathcal{A}$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathcal{C}$, *и пусть* $x \in L(\Lambda_1)$, $\overline{x}_i \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda_i)$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\left|\rho_{\Lambda_1}^{\overline{x}_1}(x) - \rho_{\Lambda_2}^{\overline{x}_2}(x)\right| \leq B_{\Phi} \cdot \alpha(\delta(s(x), \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)) + \gamma_{\Phi}(z) \left(C_{\Phi} + \widetilde{C}_{\Phi}(z)\right) \alpha(\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)), \tag{3.6}$$

где

$$B_{\Phi} = \frac{z e^{2\|\Phi\|} \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) \cdot \left(1 + z e^{\|\Phi\|}\right)}{\left(\widehat{z} + e^{\|\Phi\|}\right) \left(1 + 2z e^{\|\Phi\|}\right)} \left(2 + C_{\Phi} + \widetilde{C}_{\Phi}(z)\right) +$$

$$+ \gamma_{\Phi}(z) e^{\|\Phi\|} \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) \cdot \left[2 + C_{\Phi} + 4z\left(C_{\Phi} + 1\right)\right]$$

и $\widehat{z} = \int_X z(x)\, \mu(dx)$.

Пусть $\{\Lambda_n \in \mathcal{C}, n = 1, 2, \ldots\}$ – возрастающая последовательность множеств такая, что $\Lambda_n \uparrow T$, где T – бесконечное подмножество $\mathbb{Z}^{\nu}$. Пусть $\overline{x}_n \in \widetilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность граничных условий.

Теорема 2. *Для потенциалов Φ из класса $\mathcal{A}$ существуют предельные корреляционные функции*

$$\rho_T^{\bar{z}}(x) = \lim_{n\to\infty} \rho_{\Lambda_n}^{\bar{z}+\bar{z}_n}(x), \qquad x \in L(T) \tag{3.7}$$

с граничным условием $\bar{z} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$, не зависящие от выбора Λ_n and $\bar{z}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для любых $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^\nu$, $\bar{z}_i \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda_i)$, $i = 1; 2$ и $x \in L(\Lambda_1)$ имеем (3.6).

Следствие 1. Если $\Phi \in \mathcal{A}$, то для всяких $T \subset \mathbb{Z}^\nu$, $\Lambda_n \in \mathcal{C}(T)$, $n = 1, 2, \ldots, \Lambda_n \uparrow T$ и граничных условий $\bar{z}_n \in \widetilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$, $\bar{z} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$ выполняется неравенство

$$\left|\rho_T^{\bar{z}}(x) - \rho_{\Lambda_n}^{\bar{z}+\bar{z}_n}(x)\right| \le \left[B_\Phi + \gamma_\Phi(x)\left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(x)\right)\right] \alpha(\delta(s(x), \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda)), \quad x \in L(T).$$

Если $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ и $\bar{z}_i \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda_i)$, $i = 1, 2$, то

$$\left|\rho_\Lambda^{\bar{z}_1}(x) - \rho_\Lambda^{\bar{z}_2}(x)\right| \le B_\Phi \cdot \alpha(\delta(s(x), \bar{z}_1 \Delta \bar{z}_2)).$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(q_{\Lambda_n}^{\bar{z}+\bar{z}_n}\right)_I(x) = \left(q_T^{\bar{z}}\right)_I(x), \qquad x \in L(I) \tag{3.8}$$

для любых $L \in \mathcal{C}(T)$, который не зависит от выбора Λ_n и $\bar{z}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Следующая формула выражает плотности $q_\Lambda^{\bar{z}}$ через корреляционные функции $\rho_\Lambda^{\bar{z}}$: для всех $\Lambda \in \mathcal{C}$, $I \subset \Lambda$ и $x \in L(I)$

$$\left(q_\Lambda^{\bar{z}}\right)_I(x) = \int_{L(I\setminus s(x))} (-1)^{|y|} \rho_\Lambda^{\bar{z}}(x+y)\, m_{I\setminus s(x)}(dy). \tag{3.9}$$

Эту формулу можно доказать, подставив (2.2) в правую часть (3.9). Теперь (3.8) следует из (3.7) и (3.9).

Замечание 1. Из вышесказанного следует, что формула (3.9) имеет место при любых $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $I \in \mathcal{C}(\Lambda)$ и $x \in L(I)$.

Определим

$$\left(q_\Lambda^{\bar{z}}\right)_{I/V}(x|y) = \frac{\left(q_\Lambda^{\bar{z}}\right)_{I\cup V}(x+y)}{\left(q_\Lambda^{\bar{z}}\right)_V(y)}$$

для любых $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $I, V \in \mathcal{C}(\Lambda)$, $I \cap V = \emptyset$, $x \in L(I)$, $y \in L(V)$ и $\bar{z} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda)$.

Теорема 3. *Пусть $\Phi \in \mathcal{A}$. Тогда при любых $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $I, V \in C(\Lambda)$, $I \cap V = \emptyset$, $x \in L(I)$, $y \in L(V)$ и $\overline{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$ имеет место следующее неравенство :*

$$\left|\left(q_\Lambda^{\overline{x}}\right)_{I/V}(x|y) - \left(q_\Lambda^{\overline{x}}\right)_I(x)\right| \le 2^{|I|} B_\Phi \alpha(\delta(I, V)). \qquad (3.10)$$

Теорема 4. *Если $\Phi \in \mathcal{A}$, то для любого подмножества $T \subset \mathbb{Z}^\nu$ и граничного условия $\overline{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$ гиббсовское случайное поле $P_T^{\overline{x}}$ единственно и удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания*

$$\varphi_I(d) = 4^{|I|} B_\Phi \cdot \alpha(\delta(I, V)).$$

4^0. В этом разделе приводятся некоторые необходимые технические результаты. Для $x, y \in L$, $\overline{x} \in \widetilde{L}$ и $t \in s(x)$ полагаем

$$W_t^{\overline{x}}(x) = \sum_{I: t \in I \subset s(x)} \sum_{\overline{I} \in C(s(\overline{x}))} \Phi(x_I + \overline{x}_{\overline{I}}), \qquad (4.1)$$

если $s(x) \cap s(y) = \emptyset$, и $W_t^{\overline{x}}(x) = 0$ – в противном случае ;

$$\gamma_t^{\overline{x}}(x) = \frac{z(x) \exp\left(-W_t^{\overline{x}}(x)\right)}{1 + \int_{X_t} z(u + x') \exp\left(-W_t^{\overline{x}}(u + x')\right) \mu_t(du)}, \qquad (4.2)$$

где x' – сужение x на $s(x) \setminus \{t\}$;

$$W_t^{\overline{x}}(x; y) = \sum_{I: t \in I \subset s(x)} \sum_{\overline{I} \in C(s(\overline{x}))} \Phi(x_I + \overline{x}_{\overline{I}} + y), \qquad (4.3)$$

если $s(x)$, $s(\overline{x})$ и $s(y)$ попарно не пересекаются, 0 – в противном случае. Мы также полагаем

$$K_t^{\overline{x}}(x; y) = \sum_{n \ge 1} \sum_{\{V_1, \ldots, V_n\}}^{*} \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(-W_t^{\overline{x}}(x; y_{V_i})\right) - 1\right), \qquad (4.4)$$

где $\sum^*$ означает суммирование по всем n непустым разным наборам $V_1, \ldots, V_n$ таким, что $\bigcup_1^n V_i = s(y)$.

Мы будем пользоваться также следующими величинами. Для $J, V \in C$, $t \in J$ и $\overline{J} \subset \mathbb{Z}^\nu$ положим

$$\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J; V) = \sum_{I: t \in I \subset J} \sum_{\overline{I} \in C(s(\overline{J}))} \sup_{\substack{x \in X^I, \overline{x} \in X^{\overline{I}} \\ y \in X^V}} |\Phi(x + \overline{x} + y)|, \qquad (4.5)$$

если J, $\overline{J}$ и V попарно не пересекаются и $\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J;V) = 0$ – в противном случае.

Пусть

$$\widehat{K}_t^{\overline{J}}(J;V) = \sum_{n\geq 1} \sum_{\{V_1,\dots,V_n\}}^{*} \prod_{i=1}^{n} \left(\exp\left(\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J;V_i)\right) - 1\right). \tag{4.6}$$

Очевидно

$$\left|W_t^{\overline{x}}(x;y)\right| \leq \widehat{W}_t^{s(\overline{x})}(s(x);s(y)), \qquad \left|K_t^{\overline{x}}(x;y)\right| \leq \widehat{K}_t^{s(\overline{x})}(s(x);s(y)).$$

Корреляционные функции $\rho_\Lambda^{\overline{x}}$ удовлетворяют следующим соотношениям (см. [7]) :

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda^{\overline{x}}(x) &= \chi_\Lambda(x)\cdot\gamma_t^{\overline{x}}(x)\ \Big\{\rho_\Lambda^{\overline{x}}(x') + \left(G^{\overline{x}}\rho_\Lambda^{\overline{x}}\right)(x) + \\ &+ \int_{X_t} z(u+x')\exp\left(-W_t^{\overline{x}}(u+x')\right)\ \left[\left(G^{\overline{x}}\rho_\Lambda^{\overline{x}}\right)(x) - \left(G^{\overline{x}}\rho_\Lambda^{\overline{x}}\right)(u+x')\right]\ \mu_t(du)\Big\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$\left(G^{\overline{x}}\rho_\Lambda^{\overline{x}}\right)(x) =$$

$$= \int_{L(\Lambda\setminus s(x))} K_t^{\overline{x}}(x;y)\ \left[\rho_\Lambda^{\overline{x}}(x'+y) - \int_{X_t}\rho_\Lambda^{\overline{x}}(u+x'+y)\,\mu_t(du)\right]\ m_{\Lambda\setminus s(x)}(dy).$$

Пространство $\mathcal{E}$ комплекснозначных функций φ, определенных на L и таких, что

$$\|\varphi\| = \sup_{J\in C}\int_{X_J}|\varphi(x)|\,\mu^J(dx) < \infty, \tag{4.8}$$

является комплексным банаховым пространством. В $\mathcal{E}$ будем рассматривать также норму

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{J\in C}\ \sup_{x\in X^J}|\varphi(x)|. \tag{4.9}$$

Для любого $\overline{x}\in\widetilde{L}$ определим операторы $G^{\overline{x}}$, $F^{\overline{x}}$, $\mathcal{K}^{\overline{x}}$:

$$\left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(x) =$$

$$= \int_{L(\mathbb{Z}^\nu\setminus s(x))} K_t^{\overline{x}}(x;y)\ \left[\varphi(x'+y) - \int_{X_t}\varphi(x'+u+y)\,\mu_t(du)\right]\ m_{\mathbb{Z}^\nu\setminus s(x)}(dy), \tag{4.10}$$

$$\left(F^{\overline{x}}\varphi\right)(x) = \int_{X_t} z(u+x')\exp\left(-W_t^{\overline{x}}(u+x')\right)\ \left[\left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(x) - \left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(u+x')\right]\ \mu_t(du), \tag{4.11}$$

$$\left(\mathcal{K}^{\overline{x}}\varphi\right)(x) = \begin{cases} \gamma_t^{\overline{x}}(x)\ \left\{\varphi(x') + \left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(x) + \left(F^{\overline{x}}\varphi\right)(x)\right\}, & \text{если}\quad |s(x)|>1, \\ \gamma_t^{\overline{x}}(x)\ \left\{\left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(x) + \left(F^{\overline{x}}\varphi\right)(x)\right\}, & \text{если}\quad |s(x)|=1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Ниже показано (см. формулы (4.18), (4.24), (4.15)), что при условии $\|\Phi\| < \infty$ эти три оператора отображают пространство $\mathcal{E}$ в себя.

Очевидно (4.7) можно переписать в операторной форме :

$$\rho_\Lambda^{\overline{s}} = \chi_\Lambda \, \varepsilon \, \gamma^{\overline{s}} + \chi_\Lambda \mathcal{K}^{\overline{s}} \rho_\Lambda^{\overline{s}}, \tag{4.13}$$

где $\varepsilon(x) = 0$, если $|s(x)| > 1$ и $\varepsilon(x) = 1$, если $|s(x)| = 1$.

Лемма 4.1. *Пусть трансляционно-инвариантный потенциал Φ имеет конечную норму : $\|\Phi\| < \infty$. Тогда*

$$(\text{a}) \qquad \sum_{V \subset S(J, d/(n+1))} \widehat{K}_t^{\overline{J}}(J; V)\, r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n}\right) \le \frac{1}{2} C_\Phi\, r\left(\frac{d}{n+1}\right),$$

где O – произвольное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$;

$$(\text{б}) \qquad \sum_{V \in C:\ V \not\subset S(J, d/(n+1))} \widehat{K}_t^{\overline{J}}(J; V) \le \frac{1}{2} C_\Phi\, r\left(\frac{d}{n+1}\right);$$

где $S(J, d) = \{t \in \mathbb{Z}^\nu : \quad \delta(J, t) \le d\}$.

Доказательство. Так как $V \subset S(J, d/(n+1))$, то $\delta(J \cup V, O) \ge \dfrac{nd}{n+1}$ и следовательно $r\left(\dfrac{\delta(J \cup V, O)}{n}\right) \le r\left(d/(n+1)\right)$. Теперь, используя оценку (см. [8]) :

$$\sum_{V \in C(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} \widehat{K}_t^{\overline{J}}(J; V) \le \frac{1}{2} C_\Phi, \tag{4.14}$$

получаем (а).

Используя (3.2) и (4.6), находим

$$\sum_{V \in C:\ V \not\subset S(J, d/(n+1))} \widehat{K}_t^{\overline{J}}(J; V) \le \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n!} \left[\sum_{V \in C(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} \left(\exp\left(\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J; V)\right) - 1\right) \right]^{n-1} \times$$

$$\times \sum_{V \in C:\ V \not\subset S(J, d/(n+1))} \left(\exp\left(\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J; V)\right) - 1\right) \le$$

$$\le \frac{e^{\|\Phi\|} - 1}{\|\Phi\|} \sum_{n \ge 1} \frac{\left(e^{\|\Phi\|} - 1\right)^{n-1}}{n} \sum_{V \in C:\ V \not\subset S(J, d/(n+1))} \widehat{W}_t^{\overline{J}}(J; V) \le \frac{1}{2} C_\Phi\, r\left(\frac{d}{n+1}\right).$$

Лемма 4.1 доказана.

Пусть

$$M_t^{\overline{J}}(J; V) = \sum_{n \ge 1} \sum_{\{V_1, \ldots, V_n\}}^{*} \sum_{k=1}^{n} \left(\exp\left(\Psi_t^{\overline{J}}(J; V_k)\right) - 1\right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} \left(\exp\left(\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J; V_k)\right) - 1\right)$$

при $J, V \in \mathcal{C}$, $J \cap V = \emptyset$, $\overline{J} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus (J \cap V)$, $t \in J$ и $M_t^{\overline{J}}(J; V) = 0$ – в противном случае, где

$$\Psi_t^{\overline{J}}(J; V_k) = \sum_{J_1 \in \mathcal{C}(J' \cup \overline{J})} \sup_{x \in X^{J_1 \cup V_k}} \sup_{u,v \in X_t} |\Phi(u + x) - \Phi(v + x)|,$$

$J' = J \setminus \{t\}$, $k = 1, ..., n$. Положим далее

$$D_\Phi = \sum_{J \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\})} \sup_{x \in X^J} \sup_{u,v \in X_0} |\Phi(u + x) - \Phi(v + x)|.$$

Заметим, что

$$\Psi_t^{\overline{J}}(J, V) \leq D_\Phi \quad \text{и} \quad D_\Phi \leq 2\beta(X) \|\Phi\|.$$

Лемма 4.2. *Пусть Φ – трансляционно-инвариантный потенциал с $\|\Phi\| < \infty$. Тогда*

$$(а) \quad \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus (J \cup \overline{J}))} M_t^{\overline{J}}(J; V) \leq$$

$$\leq \left(e^{D_\Phi} - 1\right) \exp\left(e^{\|\Phi\|} - 1\right) \leq \frac{\beta(X)}{2} (C_\Phi + 2) \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right),$$

$$(б) \quad \sum_{V \subset S(J, d/(n+1))} M_t^{\overline{J}}(J; V)\, r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\beta(X)}{2} (C_\Phi + 2) \cdot \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1}\right),$$

где $O \subset \mathbb{Z}^\nu$, $d > 0$,

$$(в) \quad \sum_{V \in \mathcal{C} : V \not\subset S(J, d/(n+1))} M_t^{\overline{J}}(J; V) \leq$$

$$\leq \frac{\beta(X)}{2} (C_\Phi + 2) \cdot \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1}\right),$$

$$(г) \quad \left|W_t^{\overline{x}}(u + x'; y) - W_t^{\overline{x}}(v + x'; y)\right| \leq \Psi_t^{s(\overline{x})}(s(x); s(y)), \quad u, v \in X_t.$$

Доказательство. Утверждения (а) — (в) можно доказать аналогично предыдущей лемме 4.1, используя формулу

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, ..., V_n\}}^{*} \sum_{k=1}^{n} g(V_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f(V_i) \leq$$

$$\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} g(V) \left(\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} f(V) \right)^{n-1},$$

где g и f – неотрицательные функции на пространстве $\mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu)$. Утверждение (г) очевидно.

Лемма 4.3. *Пусть Φ – трансляционно-инвариантный потенциал с $\|\Phi\| < \infty$. Тогда для любого $\overline{x} \in \widetilde{L}$*

$$\|\mathcal{K}^{\overline{x}}\| \leq \gamma_{\Phi}(z) \left(1 + C_{\Phi} + \widetilde{C}_{\Phi}(z)\right). \tag{4.15}$$

Доказательство. Сначала заметим, что если X – синглетон, т. е. $X = \{*\}$, то оценка (4.15) совпадает с хорошо известной оценкой из [8]. Согласно (4.2) и (4.12)

$$\|\mathcal{K}^{\overline{x}}\| \leq \gamma_{\Phi}(z) \left(1 + \|G^{\overline{x}}\| + \|F^{\overline{x}}\|\right). \tag{4.16}$$

Оценим $G^{\overline{x}}$. Для любого $\varphi \in \mathcal{E}$

$$\left|\left(G^{\overline{x}}\varphi(x)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{V \in C(\mathbb{Z}^{\nu}\setminus J)} \widehat{K}_t^{\overline{J}}(J;V) \int_{X^V} \left[|\varphi(x'+y)| + \int_{X_t} |\varphi(u+x'+y)|\, \mu_t(du)\right] \mu^V(dy), \tag{4.17}$$

где $J = s(x)$, $\overline{J} = s(\overline{x})$. Отсюда и из (4.14) получаем оценки

$$\|G^{\overline{x}}\varphi\| \leq C_{\Phi}\, \|\varphi\| \qquad \text{и} \qquad \|G^{\overline{x}}\varphi\|_1 \leq C_{\Phi}\, \|\varphi\|_1. \tag{4.18}$$

Теперь оценим $F^{\overline{x}}$. Имеем

$$\begin{aligned} &\left|\left(F^{\overline{x}}\varphi\right)(x)\right| \leq z e^{\|\Phi\|} \int_{X_t} \left|\left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(x) - \left(G^{\overline{x}}\varphi\right)(v+x')\right| \mu_t(dv) \leq \\ &\leq z e^{\|\Phi\|} \sum_{V \in C(\mathbb{Z}^{\nu}\setminus J)} \int_{X_t} \sup_{y \in X^V} \left|K_t^{\overline{x}}(x;y) - K_t^{\overline{x}}(v+x';y)\right| \cdot \int_{X^V} \big[|\varphi(x'+y)| + \\ &+ \int_{X_t} |\varphi(w+x'+y)|\, \mu_t(dw)\Big]\, \mu^V(dy)\, \mu_t(dv), \end{aligned} \tag{4.19}$$

Осталось оценить величину $\sup_{y \in X^V} \left|K_t^{\overline{x}}(x;y) - K_t^{\overline{x}}(v+x';y)\right|$ для любого $v \in X$. Из (4.3) — (4.6) имеем

$$\left|K_t^{\overline{x}}(x;y) - K_t^{\overline{x}}(v+x';y)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1,\dots,V_n\}}^{*} \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(e^{\widehat{W}_t^{\overline{J}}(J;V_i)} - 1\right) \cdot \left|e^{-W_t^{\overline{x}}(x;y_{V_k})} - e^{-W_t^{\overline{x}}(v+x';y_{V_k})}\right|. \tag{4.20}$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) \prod_{i=1}^{k-1} a_i \prod_{i=k+1}^{n} b_i.$$

Учитывая утверждение (г) леммы 4.2, получим

$$\left|\exp\left(-W_i^{\overline{x}}(x;y)\right) - \exp\left(-W_i^{\overline{x}}(v+x';y)\right)\right| \le e^{\|\Phi\|}\left(\exp\left(\Psi_i^{\overline{J}}(J;V)\right) - 1\right). \quad (4.21)$$

Подставляя (4.20) в (4.19), получим

$$\sup_{y\in X^V}\left|K_i^{\overline{x}}(x;y) - K_i^{\overline{x}}(v+x';y)\right| \le M_i^{\overline{J}}(J;V)\,e^{\|\Phi\|}. \quad (4.22)$$

Из (4.19) — (4.22) находим

$$\left|\left(F^{\overline{x}}\varphi\right)(x)\right| \le z e^{2\|\Phi\|}\sum_{V\in C(\mathbb{Z}^\nu\setminus J)} M_i^{\overline{J}}(J;V)\times$$

$$\times\int_{X^V}\left[\left|\varphi(x'+y)\right| + \int_{X_i}\left|\varphi(w+x'+y)\right|\mu_i(dw)\right]\mu^V(dy). \quad (4.23)$$

Согласно утверждению (а) леммы 4.2 это означает, что

$$\|F^{\overline{x}}\varphi\| \le \widetilde{C}_\Phi(z)\,\|\varphi\| \quad \text{и} \quad \|F^{\overline{x}}\varphi\|_1 \le \widetilde{C}_\Phi(z)\,\|\varphi\|_1. \quad (4.24)$$

Теперь оценка (4.15) является следствием (4.16), (4.18) и (4.24). Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Пусть Φ – трансляционно-инвариантный потенциал с $\|\Phi\| < \infty$. Пусть $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^\nu$ и $\varphi \in \mathcal{E}$ с $\|\varphi\|_1 < 1$. Тогда для любых $\overline{x}_2 \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda_2)$ и $x \in L$*

$$\left|\left(\chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \le \gamma_\Phi(z)\left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right) r\left(\delta(J, \Lambda_2\setminus\Lambda_1)\right),$$

где $J = s(x)$.

Доказательство. Так как $\left(\chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x) = 0$ при $x \notin L(\Lambda_1)$, то

$$\left|\left(\chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \le$$

$$\le \gamma_\Phi(z)\left\{\left|\left(G^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right| + \left|\left(F^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right|\right\}. \quad (4.25)$$

Для оценки величины $\left|\left(G^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right|$ используем (4.3) и утверждение (в) леммы 4.2. Имеем

$$\left|\left(G^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \le 2\sum_{\substack{V\subset\Lambda_2\setminus J\\ V\cap(\Lambda_2\setminus\Lambda_1)\ne\emptyset}} \widehat{K}_i^{\overline{J}_2}(J;V) \le C_\Phi\, r\left(\delta(J,\Lambda_2\setminus\Lambda_1)\right), \quad (4.26)$$

где $\overline{J}_2 = s(\overline{x}_2)$.

Теперь оценим $\left|\left(F^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1}-\chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right|$. Заметим, что интеграл

$$\int_{X^V} |((\chi_{\Lambda_1}-\chi_{\Lambda_2})\varphi)(x+y)|\, \mu^V(dy)$$

равен 0, если $V \cap (\Lambda_2 \setminus \Lambda_1) = \emptyset$ и ограничен сверху величиной $\|\varphi\|_1$. Согласно утвеждению (в) леммы 4.2

$$\left|\left(F^{\overline{x}_2}\left(\chi_{\Lambda_1}-\chi_{\Lambda_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \leq 2ze^{2\|\Phi\|} \sum_{V\subset\Lambda_2\setminus J:\, V\cap(\Lambda_2\setminus\Lambda_1)\neq\emptyset} M_1^{\overline{J}_2}(J;V) \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_\Phi(z)\, r\left(\delta(J,\Lambda_2\setminus\Lambda_1)\right). \tag{4.27}$$

Теперь утвеждение леммы 4.4 следует из (4.25) — (4.27).

Лемма 4.5. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{E}$, $\|\varphi\|_1 \leq 1$ *и* $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \widetilde{L}$. *Тогда*

$$\left|\left(\chi_{\Lambda_1}\left(\mathcal{K}^{\overline{x}_1}-\mathcal{K}^{\overline{x}_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \leq \overline{B}_\Phi\, r\left(\delta(J,\overline{x}_1\Delta\overline{x}_2)\right), \quad x \in L,$$

где

$$\overline{B}_\Phi = \gamma_\Phi(z)e^{\|\Phi\|}\left(e^{2\|\Phi\|}-1\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{\left(1+2ze^{\|\Phi\|}\right)\left(1+C_\Phi+\widetilde{C}_\Phi(z)\right)}{\widehat{z}+e^{\|\Phi\|}}+(C_\Phi+2)\left(1+2ze^{\|\Phi\|}\right)+2zC_\Phi\right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\left(\chi_{\Lambda_1}\left(\mathcal{K}^{\overline{x}_1}-\mathcal{K}^{\overline{x}_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \leq$$

$$\leq \left|\gamma_t^{\overline{x}_1}(x)-\gamma_t^{\overline{x}_2}(x)\right| \left[|\varphi(x')|+\left|\left(G^{\overline{x}_1}\varphi\right)(x)\right|+\left|\left(F^{\overline{x}_1}\varphi\right)(x)\right|\right]+$$

$$+\gamma_\Phi(z)\left[\left|\left(\left(G^{\overline{x}_1}-G^{\overline{x}_2}\right)\varphi\right)(x)\right|+\left|\left(\left(F^{\overline{x}_1}-F^{\overline{x}_2}\right)\varphi\right)(x)\right|\right]. \tag{4.28}$$

Затем

$$\left|\gamma_t^{\overline{x}_1}(x)-\gamma_t^{\overline{x}_2}(x)\right| = \frac{z(x)\left(\exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(x)\right)-\exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(x)\right)\right)}{1+\int_{X_t} z(u+x')\exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(u+x')\right)\mu_t(du)}+$$
$$+\frac{z(x)\exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(x)\right)}{\left(1+\int_{X_t} z(u+x')\exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(u+x')\right)\mu_t(du)\right)}\times$$
$$\times\frac{\int_{X_t} z(u+x')\left[\exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(u+x')\right)-\exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(u+x')\right)\right]\mu_t(du)}{\left(1+\int_{X_t} z(u+x')\exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(u+x')\right)\mu_t(du)\right)}\le \tag{4.29}$$
$$\le\frac{z\,e^{\|\Phi\|}}{1+\widehat{z}\,e^{-\|\Phi\|}}\left\{\exp\left(\left|W_t^{\overline{x}_1}(x)-W_t^{\overline{x}_2}(x)\right|\right)-1+\right.$$
$$\left.+\frac{\int_{X_t} z(y)\exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(y)\right)\left(\exp\left(\left|W_t^{\overline{x}_1}(y)-W_t^{\overline{x}_2}(y)\right|\right)-1\right)\mu_t(du)}{1+\int_{X_t} z(y)\exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(y)\right)\mu_t(du)}\right\},$$

где $y=u+x'$, а $\widehat{z}$ определено в теореме 1.

Заметим, что для $\overline{x}_1\neq\overline{x}_2$

$$\left|W_t^{\overline{x}_1}(x)-W_t^{\overline{x}_2}(x)\right|\le$$
$$\le\sum_{I:\ t\in I\subset J}\left|\sum_{\overline{I}_1\in C(\overline{J}_1)}\Phi\left(x_I+(\overline{x}_1)_{\overline{I}_1}\right)-\sum_{\overline{I}_2\in C(\overline{J}_2)}\Phi\left(x_I+(\overline{x}_2)_{\overline{I}_2}\right)\right|=$$
$$=\sum_{I:\ t\in I\subset J}\left|\sum_{\substack{\overline{I}_1\in C(\overline{J}_1),\\ \overline{I}_1\cap(\overline{J}_1\setminus\overline{x})\neq\emptyset}}\Phi\left(x_I+(\overline{x}_1)_{\overline{I}_1}\right)-\sum_{\substack{\overline{I}_2\in C(\overline{J}_2),\\ \overline{I}_2\cap(\overline{J}_2\setminus\overline{x})\neq\emptyset}}\Phi\left(x_I+(\overline{x}_2)_{\overline{I}_2}\right)\right|\le$$
$$\le 2\sum_{I:\ t\in I\subset J}\ \sum_{\substack{\overline{I}\in C(\overline{J}_1\cup\overline{J}_2),\\ \overline{I}\cap(\overline{x}_1\Delta\overline{x}_2)\neq\emptyset}}\ \sup_{x\in X^I}\ \sup_{\overline{x}\in X^{\overline{I}}}\left|\Phi(x+\overline{x})\right|\le 2\,\|\Phi\|\,r\left(\delta(J,\overline{x}_1\Delta\overline{x}_2)\right).$$

Поэтому для любых $\overline{x}_1,\overline{x}_2\in\widetilde{L}$

$$\exp\left(\left|W_t^{\overline{x}_1}(x)-W_t^{\overline{x}_2}(x)\right|\right)-1\le\left(e^{2\|\Phi\|}-1\right)r\left(\delta(J,\overline{x}_1\Delta\overline{x}_2)\right). \tag{4.30}$$

Подставляя (4.30) в (4.29), получаем

$$\left|\gamma^{\overline{x}_1}(x)-\gamma^{\overline{x}_2}(x)\right|\le\frac{z\,e^{\|\Phi\|}\left(e^{2\|\Phi\|}-1\right)}{1+\widehat{z}\,e^{-\|\Phi\|}}\left(1+\frac{z\,e^{\|\Phi\|}}{1+z\,e^{\|\Phi\|}}\right)r\left(\delta(J,\overline{x}_1\Delta\overline{x}_2)\right)=$$
$$=B_\Phi^{(1)}\cdot r\left(\delta(J,\overline{x}_1\Delta\overline{x}_2)\right), \tag{4.31}$$

где

$$B_{\Phi}^{(1)} = \frac{z\, e^{2\|\Phi\|} \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) \left(1 + 2\, z\, e^{\|\Phi\|}\right)}{\left(\widehat{z} + e^{\|\Phi\|}\right) \left(1 + z\, e^{\|\Phi\|}\right)}. \tag{4.32}$$

Для $J,\, V \in \mathcal{C}$, $J \cap V = \emptyset$ положим

$$N_t(J;V) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1,\dots,V_n\}}^{*} \sum_{k=1}^{n} \left(\exp\left(2\varphi_t(J;V_k)\right) - 1\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k-1} \left(e^{\widehat{W}_t^{\overline{J}_1}(J;V_i)} - 1\right) \prod_{i=k+1}^{n} \left(e^{\widehat{W}_t^{\overline{J}_2}(J;V_i)} - 1\right), \tag{4.33}$$

где

$$\varphi_t(J;V) = \sum_{I:\ t \in I \subset J} \ \sum_{\substack{\overline{I} \in \mathcal{C}(\overline{J}_1 \cup \overline{J}_2), \\ I \cap (\overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2) \neq \emptyset}} \ \sup_{x \in X^{I \cup V \cup \overline{I}}} \|\Phi(x)\|,$$

если множества J, V и $\overline{J}_1 \cup \overline{J}_2$ попарно не пересекаются и $\varphi_t(J;V) = 0$ – в противном случае.

Как и при выводе (4.19) можно показать, что

$$\begin{aligned} \left|\left(\left(G^{\overline{x}_1} - G^{\overline{x}_2}\right)\varphi\right)(x)\right| \leq & \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus s(x))} \sup_{y \in X^V} \left|K_t^{\overline{x}_1}(x;y) - K_t^{\overline{x}_2}(x;y)\right| \times \\ & \times \int_{X^V} \left[|\varphi(x' + y)| + \int_{X_t} |\varphi(w + x' + y)|\, \mu_t(dw)\right] \mu^V(dy). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Поскольку

$$\left|\exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(x;y)\right) - \exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(x)\right)\right| \leq e^{\|\Phi\|} \left(e^{2\varphi_t(s(x);s(y))} - 1\right),$$

то сравнивая с (4.22) и полагая $J = s(x)$, получим

$$\sup_{y \in X^V} \left|K_t^{\overline{x}_1}(x;y) - K_t^{\overline{x}_2}(x;y)\right| \leq e^{\|\Phi\|} N_t(J;V). \tag{4.35}$$

Поскольку

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} \varphi_t(J;V) \leq \|\Phi\|\, r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right),$$

то с помощью пункта (а) Леммы 4.2 получим

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} N_t(J;V) \leq \exp\left(e^{\|\Phi\|} - 1\right) \left[\exp\left(2\|\Phi\|\, r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right)\right) - 1\right]. \tag{4.36}$$

Из (4.35) и (4.36) следует, что

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu \setminus J)} \sup_{y \in X^V} \left|K_t^{\overline{x}_1}(x;y) - K_t^{\overline{x}_2}(x;y)\right| \leq$$

$$\leq e^{\|\Phi\|} \exp\left(e^{\|\Phi\|} - 1\right) \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right).$$

Поэтому из (4.34) имеем

$$\left| \left(\left(G^{\overline{x}_1} - G^{\overline{x}_2} \right) \varphi \right)(x) \right| \leq B_\Phi^{(2)}\, r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right), \tag{4.37}$$

где

$$B_\Phi^{(2)} = e^{\|\Phi\|} \left(C_\Phi + 2\right) \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right).$$

Теперь оценим $\left| \left(\left(F^{\overline{x}_1} - F^{\overline{x}_2} \right) \varphi \right)(x) \right|$. Согласно (4.11), (4.18), (4.30) и (4.37) имеем

$$\left| \left(\left(F^{\overline{x}_1} - F^{\overline{x}_2} \right) \varphi \right)(x) \right| \leq$$

$$\leq z \int_{X_t} \left| \exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(u + x')\right) - \exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(u + x')\right) \right| \mu_t(du) \left| \left(G^{\overline{x}_1} \varphi \right)(x) \right| +$$

$$+ z e^{\|\Phi\|} \int_{X_t} \left| \left(\left(G^{\overline{x}_1} - G^{\overline{x}_2} \right) \varphi \right)(u + x') \right| \mu_t(du) + z e^{\|\Phi\|} \left| \left(\left(G^{\overline{x}_1} - G^{\overline{x}_2} \right) \varphi \right)(x) \right| +$$

$$+ z \int_{X_t} \left| \exp\left(-W_t^{\overline{x}_1}(u + x')\right) - \exp\left(-W_t^{\overline{x}_2}(u + x')\right) \right| \left| \left(G^{\overline{x}_2} \varphi \right)(u + x') \right| \mu_t(du) \leq$$

$$\leq 2 z C_\Phi\, e^{\|\Phi\|} \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right) +$$

$$+ 2 z e^{2\|\Phi\|} \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) \left(C_\Phi + 2\right) r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right) = B_\Phi^{(3)} \cdot r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right), \tag{4.38}$$

где

$$B_\Phi^{(3)} = 2 z\, e^{\|\Phi\|} \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) \left[C_\Phi + e^{\|\Phi\|} \left(C_\Phi + 2\right)\right].$$

Комбинируя (4.18), (4.24), (4.28), (4.32), (4.37) и (4.38), получим

$$\left| \left(\chi_{\Lambda_1} \left(K^{\overline{x}_1} - K^{\overline{x}_2} \right) \varphi \right)(x) \right| \leq \overline{B}_\Phi\, r\left(\delta(J, \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right),$$

где

$$\overline{B}_\Phi = B_\Phi^{(1)} \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right) + \gamma_\Phi(z) \left(B_\Phi^{(2)} + B_\Phi^{(3)}\right).$$

Лемма 4.5 доказана.

5^0. Этот параграф содержит доказательства теорем 1 — 4.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\Delta_1(x) = \rho_{\Lambda_1}^{\overline{x}_1}(x) - \rho_{\Lambda_1}^{\overline{x}_2}(x), \qquad \Delta_2(x) = \rho_{\Lambda_1}^{\overline{x}_2}(x) - \chi_{\Lambda_1}(x)\, \rho_{\Lambda_2}^{\overline{x}_2}(x). \tag{5.1}$$

Тогда

$$\rho^{\bar{x}_1}_{\Lambda_1}(x) - \chi_{\Lambda_1}(x)\,\rho^{\bar{x}_2}_{\Lambda_2}(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x). \tag{5.2}$$

Рассмотрим первую величину Δ_1. Согласно (4.13) имеем

$$\Delta_1 = \chi_{\Lambda_1}\,\varepsilon\left(\gamma_t^{\bar{x}_1} - \gamma_t^{\bar{x}_2}\right) + \chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_1}\Delta_1 + \chi_{\Lambda_1}\left(\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2}\right)\rho^{\bar{x}_2}_{\Lambda_1}.$$

Отсюда следует, что Δ_1 удовлетворяет соотношению

$$\Delta_1 = \chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_1}\Delta_1 + g, \tag{5.3}$$

где

$$g(x) = (\chi_{\Lambda_1}\varepsilon)(x)\left(\gamma_t^{\bar{x}_1} - \gamma_t^{\bar{x}_2}\right)(x) + \left[\chi_{\Lambda_1}\left(\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2}\right)\rho^{\bar{x}_2}_{\Lambda_1}\right](x). \tag{5.4}$$

В условиях теоремы 1 $\|\mathcal{K}^{\bar{x}_1}\| < 1$ и мы можем переписать (5.3) в виде

$$\Delta_1 = \sum_{n\geq 0}\left(\chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_1}\right)^n g. \tag{5.5}$$

Теперь рассмотрим Δ_2. Снова используя (4.13), получим

$$\Delta_2 = \chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_2}\Delta_2 + \chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_2}(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2})\,\rho^{\bar{x}_2}_{\Lambda_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_2 = \sum_{n\geq 1}\left(\chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_2}\right)^n \chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\bar{x}_2}(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2})\,\rho^{\bar{x}_2}_{\Lambda_2}. \tag{5.6}$$

Для оценки величин Δ_1 и Δ_2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть $\Phi \in \mathcal{A}$, и пусть $f \in \mathcal{E}$ удовлетворяет оценке*

$$|f(x)| \leq A_\Phi\, r(\delta(s(x), O)), \tag{5.7}$$

где O – подмножество $\mathbb{Z}^\nu$, а $A_\Phi > 0$ – постоянная, зависящая от потенциала Φ. Тогда для любых $\Lambda \in \mathcal{C}$, $\bar{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda)$, $x \in L(\Lambda)$ и неотрицательного целого n

$$\left|\left(\left(\chi_\Lambda\mathcal{K}^{\bar{x}}\right)^n f\right)(x)\right| \leq (n+1)\,A_\Phi\left[\gamma_\Phi(z)\left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n r\left(\frac{\delta(s(x), O)}{n+1}\right). \tag{5.8}$$

Доказательство по индукции. При $n = 0$ оценка (4.9) совпадает с (4.8). Предположим, что (4.9) верна для некоторого натурального n. Тогда, полагая $f_n = \left(\chi_\Lambda K^{\bar{x}}\right)^n f$, будем иметь

$$|f_{n+1}(x)| \leq \gamma_\Phi(z)\left\{|f_n(x')| + \left|\left(G^{\bar{x}} f_n\right)(x)\right| + \left|\left(F^{\bar{x}} f_n\right)(x)\right|\right\}. \tag{5.9}$$

Поскольку согласно (4.8) $\|f\|_1 \le A_\Phi$, то из леммы 4.3 следует, что

$$\|f_n\|_1 \le A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n. \tag{5.10}$$

Пусть $d_0 = \delta(J, O)$, где $J = s(x)$. Используя (4.17), (5.8), (5.10) и пункт (б) леммы 4.1, находим

$$\begin{aligned}
&\left|\left(G^{\overline{x}} f_n\right)(x)\right| \le 2A_\Phi (n+1) \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n \times \\
&\times \sum_{V:\, V \subset S(J, d_0/(n+2))} \widehat{K}_i^{\overline{J}}(J; V)\, r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1}\right) + \\
&+ 2A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n \sum_{V \in C:\, V \not\subset S(J, d_0/(n+2))} \widehat{K}_i^{\overline{J}}(J; V) \le \\
&\le A_\Phi \cdot C_\Phi (n+2) \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n r\left(\frac{d_0}{n+2}\right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Аналогично из (4.23), (5.8) и (5.10) имеем

$$\begin{aligned}
&\left|\left(F^{\overline{x}} f_n\right)(x)\right| \le 2ze^{2\|\Phi\|}(n+1)\, A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n \times \\
&\times \sum_{V:\, V \subset S(J, d_0/(n+2))} M_i^{\overline{J}}(J; V)\, r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1}\right) + \\
&+ 2ze^{2\|\Phi\|} A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n \sum_{V \in C:\, V \not\subset S(J, d_0/(n+2))} M_i^{\overline{J}}(J; V).
\end{aligned}$$

Согласно пунктам (б) и (в) леммы 4.2 отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&\left|\left(F^{\overline{x}} f_n\right)(x)\right| \le \beta(X) z e^{2\|\Phi\|} A_\Phi \left(C_\Phi + 2\right)(n+2) \left(e^{2\|\Phi\|} - 1\right) \times \\
&\times \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n r\left(\frac{d_0}{n+2}\right) = \\
&= (n+2)\widetilde{C}_\Phi(z)\, A_\Phi \cdot \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n r\left(\frac{d_0}{n+2}\right).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Теперь, комбинируя (5.9), (5.11) и (5.12), получаем

$$|f_{n+1}(x)| \le (n+2) A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^{n+1} r\left(\frac{d_0}{n+2}\right).$$

Лемма 5.1 доказана.

Оценим Δ_2. Применяя лемму 4.4, получим

$$\left|\left(\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\overline{x}_2} \left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right) \rho_{\Lambda_2}^{\overline{x}_2}\right)(x)\right| \le \gamma_\Phi(z) \left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right) r\left(\delta(J, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)\right).$$

Согласно лемме 5.1 отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\left(\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\overline{x}_2}\right)^n \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\overline{x}_2} \left(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}\right) \rho_{\Lambda_2}^{\overline{x}_2}\right)(x)\right| \le \\
&\le (n+1)\, \gamma_\Phi(z) \left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right) \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(z)\right)\right]^n r\left(\frac{\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Поэтому из (5.6)

$$|\Delta_2(x)| \le \gamma_\Phi(x)\ \left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(x)\right) \sum_{n\ge1}(n+1)\left[\gamma_\Phi(x)\ \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(x)\right)\right]^n \times$$
$$\times\, r\left(\frac{\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)}{n+1}\right) = \gamma_\Phi(x)\ \left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(x)\right)\ \alpha\left(\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)\right), \tag{5.13}$$

где величина α определена в (3.1).

Теперь рассмотрим Δ_1. Из леммы 4.5

$$\left|\left(\chi_{\Lambda_1}\left(\mathcal{K}^{\overline{x}_1} - \mathcal{K}^{\overline{x}_2}\right)\rho_{\Lambda_1}^{\overline{x}_2}\right)(x)\right| \le \overline{B}_\Phi\, r\left(\delta(s(x), \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right).$$

Отсюда, в силу (5.4) и (4.31), получаем

$$|g(x)| \le \left(B_\Phi^{(1)} + \overline{B}_\Phi\right)\ r\left(\delta(s(x), \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right).$$

Применение леммы 5.1 дает

$$\left|\left(\left(\chi_{\Lambda_1}\mathcal{K}^{\overline{x}_1}\right)^n g\right)(x)\right| \le$$
$$\le \left(B_\Phi^{(1)} + \overline{B}_\Phi\right)\ (n+1)\ \left[\gamma_\Phi(x)\ \left(1 + C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(x)\right)\right]^n\ r\left(\frac{\delta(s(x), \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)}{n+1}\right).$$

Следовательно

$$|\Delta_1| \le B_\Phi \cdot \alpha\left(\delta(s(x), \overline{x}_1 \Delta \overline{x}_2)\right), \tag{5.14}$$

где

$$B_\Phi = B_\Phi^{(1)} + \overline{B}_\Phi.$$

Остается применить (5.2), (5.13) и (5.14). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{\Lambda_n \in \mathcal{C},\ n = 1, 2, \ldots\}$ – возрастающая последовательность конечных множеств, $\Lambda_n \uparrow T$, где T – бесконечное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$. Пусть $\overline{x}_n \in \widetilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\overline{x} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$ – произвольные граничные условия. Тогда из теоремы 1 следует, что

$$\left|\rho_{\Lambda_n}^{\overline{x}+\overline{x}_n}(x) - \chi_{\Lambda_n}(x)\,\rho_{\Lambda_{n+k}}^{\overline{x}+\overline{x}_{n+k}}(x)\right| \le B_\Phi\, \alpha\left(\delta(s(x), \overline{x}_n \Delta \overline{x}_{n+k})\right) +$$
$$+\, \gamma_\Phi(x)\ \left(C_\Phi + \widetilde{C}_\Phi(x)\right)\ \alpha\left(\delta(s(x), \Lambda_{n+k} \setminus \Lambda_n)\right). \tag{5.15}$$

Ясно, что для всех n и k достаточно больших, правая часть (5.15) сколь угодно мала, откуда следует существование предела (3.6) и его независимость от выбора Λ_n и $\overline{x}_n$. Неравенство (3.7) следует из теоремы 1 и (3.6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, для $f \in \mathcal{E}$, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{C}$ $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$,

$$\int_{L(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} f(x)\, m_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}(dx) = \int_{L(\Lambda_1)} \int_{L(\Lambda_2)} f(x_1 + x_2)\, m_{\Lambda_1}(dx_1)\, m_{\Lambda_2}(dx_2). \quad (5.16)$$

Напомним фундаментальное свойство гиббсовских плотностей $q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}$:

$$\left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_{I/V}(x/y) = \left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+y}\right)_I(x), \quad x \in L(I), \quad y \in L(V), \quad (5.17)$$

которое выполняется при $\Lambda \in \mathcal{C}$, $I, V \subset \Lambda$, $I \cap V = \emptyset$ и $\bar{\bar{x}} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda)$. Согласно следствию 2, (5.17) выполняется для любого $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$.

Используя (5.16) и (5.17) для $\Lambda \in \mathcal{C}$ находим

$$\begin{aligned}
&\left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_I(x) = \int_{L(\Lambda\setminus I)} q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}(x+y)\, m_{\Lambda\setminus I}(dy) = \\
&= \int_{L(\Lambda\setminus(I\cup V))} \int_{L(V)} q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}(x+y+z)\, m_{\Lambda\setminus(I\cup V)}(dy)\, m_V(dz) = \\
&= \int_{L(\Lambda\setminus(I\cup V))} \int_{L(V)} q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+z}(x+y)\, \left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_V(z)\, m_{\Lambda\setminus(I\cup V)}(dy)\, m_V(dz) = \\
&= \int_{L(V)} \left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+z}\right)_I(x)\, \left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_V(z)\, m_{\Lambda\setminus(I\cup V)}(dy)\, m_V(dz).
\end{aligned} \quad (5.18)$$

С другой стороны, из (5.17) имеем

$$\left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_{I/V}(x/y) = \int_{L(V)} \left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+y}\right)_I(x)\, \left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_V(z)\, m_V(dz).$$

Следовательно, для $\Lambda \in \mathcal{C}$

$$\left|\left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_{I/V}(x/y) - \left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_I(x)\right| \le \int_{L(V)} \left(q_\Lambda^{\bar{\bar{x}}}\right)_V(z)\, \left|\left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+z}\right)_I(x) - \left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+y}\right)_I(x)\right| m_V(dz). \quad (5.19)$$

Теперь, применяя теорему 1 и формулу (3.9), получим

$$\begin{aligned}
&\left|\left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+z}\right)_I(x) - \left(q_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+y}\right)_I(x)\right| \le \\
&\le \int_{L(I\setminus s(x))} \left|\rho_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+z}(x+u) - \rho_{\Lambda\setminus V}^{\bar{\bar{x}}+y}(x+u)\right| m_{I\setminus s(x)}(du) \le 2^{|I|}\, B_\Phi\, \alpha(\delta(I,V)).
\end{aligned}$$

В силу (5.19) отсюда следует (3.10) для случая конечного Λ. Для доказательства (3.10) с бесконечным Λ достаточно применить (3.8). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 Для любого подмножества $T \subset \mathbb{Z}^\nu$ и граничного условия $\bar{\bar{x}} \in \widetilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$

$$\begin{aligned}
&\left|\left(P_T^{\bar{\bar{x}}}\right)_{I/V}(A/B) - \left(P_T^{\bar{\bar{x}}}\right)_I(A)\right| \le \left(\int_B \left(q_T^{\bar{\bar{x}}}\right)_V(y)\, m_V(dy)\right)^{-1} \times \\
&\times \int_A \int_B \left|\left(q_T^{\bar{\bar{x}}}\right)_{I/V}(x/y) - \left(q_T^{\bar{\bar{x}}}\right)_I(x)\right| \left(q_T^{\bar{\bar{x}}}\right)_V(y)\, m_V(dy)\, m_I(dx).
\end{aligned}$$

Это неравенство выполняется для любых $I, V \in \mathcal{C}(T)$, $I \cap V = \emptyset$ и $A \in \mathcal{B}(I)$, $B \in \mathcal{B}(V)$. Поэтому из теоремы 3 находим

$$\left|\left(P_T^{\bar{x}}\right)_{I/V}(A/B) - \left(P_T^{\bar{x}}\right)_I(A)\right| \le 4^{|I|} B_* \, \alpha(\delta(I, V)).$$

Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. In the present paper we consider lattice spin systems with general vacuum potential and standard spin space. These systems naturally generalise the so-called configurational systems, which correspond to the special case, where the spin space is a singleton. We show that under certain conditions on the potential, Gibbs distributions in large volumes satisfy uniformly strong mixing condition. It turns out that the finite-volume Gibbs distributions and the corresponding limiting fields have essentially different expressions for the bound of the mixing coefficient. In the former case it is a sum of two terms : one term is responsible for the rate of decay of correlations and the other for the rate of convergence to the limiting Gibbs field as the volume increases.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. A. Ibragimov, V. V. Linnik, Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Wolters–Noordhoff, Groningen, 1971.
2. А. В. Булинский, Предельные Теоремы для Случайных Процессов и Полей, Мос. Унив., 1981.
3. B. S. Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics, Teubner–Texte zur Mathematik, Stuttgart–Leipzig, 1991.
4. R. L. Dobrushin, "The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity", Theory Prob. Appl., vol. 13, pp. 197 — 224, 1968.
5. R. L. Dobrushin, "Gibbs random fields for lattice systems with pair–wise interactions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 292 — 301, 1968.
6. R. L. Dobrushin, "The problem of uniqueness of a Gibbsian random field and the problem of phase transitions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 302 — 312, 1968.
7. Б. С. Нахапетян, "Условие сильного перемешивания для гиббсовских случайных полей с дискретным параметром и некоторые применения", Изв. АН АрмССР, т. 10, № 2, стр. 242 – 254, 1975.
8. D. Ruelle, Statistical Mechanics. Rigorous Results, Benjamin, New York, 1969.
9. K. R. Parthasarathy, Introduction to Probability and Measure, New Delhi, 1980.

12 августа 1995

Институт математики
НАН Армении

ОПИСАНИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ–ИСКЛЮЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

С. Ю. Дашян, Б. С. Нахапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В работе описыватеся подход включения–исключения для построения случайных полей на ν-мерной целой решетке. Представлено сравнение с классическим гиббсовским описанием.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Подход включения-исключения был удачно применен в работе Амбарцумяна и Сукиасяна [1] в теории точечных процессов. Основным результатом этого подхода явилась следующая теорема.

Теорема А. *(Р. В. Амбарцумян, Г. С. Сукиасян) Пусть задана система $\{f(x_1, ..., x_n)\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$ неотрицательных симметричных функций, удовлетворяющая условию $f(x_1, ..., x_n) < b^n$, $n = 1, 2, ...$ для некоторого $b > 0$. Если для почти всех $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$ и всех выпуклых $D \subset \mathbb{R}^d$ имеют место неравенства*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_D \cdots \int_D f(y_1, ..., y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \geq 0,$$

$$f(x_1, ..., x_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_D \cdots \int_D f(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \geq 0, \quad m > 0,$$

то существует точечный процесс P такой, что в точках продолжения значения f совпадают с плотностями P.

Целью настоящей работы является применение того же подхода к конструкциям случайных полей на целой решетке $\mathbb{Z}^\nu$. Особое внимание уделяется классическим гиббсовским случайным полям. В работе описываются основные факты при предлагаемом подходе, приводятся некоторые примеры и утверждения для достаточно широкого класса негиббсовских случайных полей. Отметим, что в настоящее время в статистической физике интенсивно изучаются негиббсовские случайные поля (см., например, [2] – [5]).

§2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И P–ФУНКЦИИ

Рассмотрим случайные поля на целой ν-мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$. Для простоты предположим, что фазовое пространство X состоит из двух точек : $X = \{0, 1\}$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$, и пусть

$$X^\Lambda = \{x_t,\ t \in \Lambda\}, \quad x_t \in X, \quad t \in \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}$$

– множество конфигураций (реализаций) на Λ. Каждый элемент $x \in X^\Lambda$ однозначно определяется по подмножеству Λ, где под конфигурацией x предполагается значение 1 (согласно физической терминологии это – подмножество, захваченное частицами). Поэтому всякую конфигурацию на Λ будем отождествлять с соответствующим подмножеством Λ. Вероятностное распределение на X^Λ обозначим через $P_\Lambda = \{P_\Lambda(x),\ x \subseteq \Lambda\}$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Для $\Lambda = \emptyset$ существует только одно вероятностное распределение $P_\emptyset(\emptyset) = 1$. Для $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $I \subseteq \Lambda$ обозначим

$$(P_\Lambda)_I(x) = \sum_{J \subseteq \Lambda \setminus I} P_\Lambda(x \cup J), \quad x \subseteq I.$$

Определение 1. Множество вероятностных распределений $P = \{P_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$ называется *согласованным в смысле Колмогорова*, если для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $I \subseteq \Lambda$ $(P_\Lambda)_I(x) = P_I(x)$, $x \subseteq I$.

Хорошо известно, что всякое множество вероятностных распределений, согласованное в смысле Колмогорова, определяет некоторую меру вероятности на $X^{\mathbb{Z}^\nu}$, эквивалентную некоторому случайному полю. При подходе включения-исключения условие согласованности в смысле Колмогорова заменяется некоторым условием неотрицательности, налагаемым на некоторые конечные суммы с меняющимися знаками слагаемых.

Пусть B – банахово пространство всех ограниченных функций, определенных на $\mathcal{E}$, с нормой

$$||b|| = \sup_{\Lambda \in \mathcal{E}} \frac{1}{2n(\Lambda)} \sum_{J \subset \Lambda} |b_J|, \quad b = \{b_J,\ J \in \mathcal{E}\} \in B,$$

где $n(\Lambda)$ – некоторая нумерация элементов из $\mathcal{E}$.

Определение 2. Функцию $f = \{f_J,\ J \in \mathcal{E}\}$, $f \in B$ назовем *P-функцией*, если $f_\emptyset = 1$ и для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $x \subseteq \Lambda$

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J} \geq 0, \tag{1}$$

где $|\cdot|$ означает число точек конечного множества.

Заметим, что пространство $B^P \subset B$ всех P-функций является выпуклым закрытым подмножеством B. Нетрудно показать, что B^P компактно.

Теорема 1. *Система $P = \{P_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$ вероятностных распределений согласована в смысле Колмогорова тогда и только тогда, когда существует P-функция f такая, что*

$$P_\Lambda(x) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J}, \quad P_\Lambda(\emptyset) = f_\Lambda, \quad x \subseteq \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}. \tag{2}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $P = \{P_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$ – система вероятностей, согласованная в смысле Колмогорова. Положим $f_\Lambda = P_\Lambda(\emptyset)$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Очевидно $0 \leq f_\Lambda \leq 1$, $f_\emptyset = P_\emptyset(\emptyset) = 1$. Далее

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J} = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} P_{\Lambda \setminus J}(\emptyset) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} (P_\Lambda)_{\Lambda \setminus J}(\emptyset) =$$

$$= \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \sum_{\widetilde{J}:\widetilde{J} \subseteq J} P_\Lambda(\widetilde{J}) = \sum_{\widetilde{J} \subseteq x} P_\Lambda(\widetilde{J}) \sum_{J:\widetilde{J} \subseteq J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} = P_\Lambda(x).$$

На последнем шаге мы воспользовались соотношением

$$\sum_{A:B \subset A \subset C} (-1)^{|C \setminus A|} = \begin{cases} 1, & B = C, \\ 0, & B \neq C. \end{cases} \tag{3}$$

Достаточность. Пусть f – P-функция. Положим

$$P_\Lambda(x) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J}, \quad x \subseteq \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}$$

и покажем, что $P = \{P_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$ – семейство вероятностных распределений, согласованное в смысле Колмогорова. Имеем

$$\sum_{x \subseteq \Lambda} P_\Lambda(x) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J} = \sum_{J \subseteq \Lambda} f_{\Lambda \setminus J} \sum_{x:J \subseteq x \subseteq \Lambda} (-1)^{|x \setminus J|} = f_\emptyset = 1,$$

т.е. P – система вероятностных распределений. Проверим, что оно согласовано. Для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $I \subseteq \Lambda$ можем написать

$$(P_\Lambda)_I(x) = \sum_{J \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{\widetilde{J} \subseteq x \cup J} (-1)^{|x \cup J \setminus \widetilde{J}|} f_{\Lambda \setminus \widetilde{J}} =$$

$$= \sum_{J \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{\widetilde{J}_1 \subseteq x} (-1)^{|x \setminus \widetilde{J}_1|} \sum_{\widetilde{J}_2 \subseteq J} (-1)^{|J \setminus \widetilde{J}_2|} f_{\Lambda \setminus (\widetilde{J}_1 \cup \widetilde{J}_2)} =$$

$$= \sum_{\widetilde{J}_1 \subseteq x} (-1)^{|x \setminus \widetilde{J}_1|} \sum_{\widetilde{J}_2 \subseteq \Lambda \setminus I} f_{\Lambda \setminus (\widetilde{J}_1 \cup \widetilde{J}_2)} \sum_{J : \widetilde{J}_2 \subseteq J \subseteq \Lambda \setminus I} (-1)^{|J|} =$$

$$= \sum_{\widetilde{J}_1 \subseteq x} (-1)^{|x \setminus \widetilde{J}_1|} f_{I \setminus J_1} = P_I(x).$$

§3. ПРИМЕРЫ P-ФУНКЦИЙ

Пример 1. Пусть f – P-функция. Для любого $B \in \mathcal{E}$ такого, что $f_B > 0$, рассмотрим функцию $f^{(B)} = \left\{ f_{B \cup J} (f_B)^{-1}, J \in \mathcal{E} \right\}$. Легко видеть, что $f^{(B)}$ – снова P-функция. Реализации соответствующих случайных полей могут достигнуть значения 1 только вне B.

Пример 2. Пусть P – случайное поле с независимыми компонентами, и пусть $f_t = P_{\{t\}}(\emptyset)$, $t \in \mathbb{Z}^\nu$. Соответствующей P-функцией будет

$$f = \left\{ \prod_{t \in J} f_t, \ J \in \mathcal{E} \right\}.$$

Случай $f_t \equiv q$, $t \in \mathbb{Z}^\nu$, $0 \le q \le 1$ соответствует случайному полю Бернулли.

Пример 3. Пусть $p(x)$, $x \in [0,1]$ – плотность вероятности и $f = \{q^{|J|}, J \in \mathcal{E}\}$ – P-функция Бернулли. Функция

$$b = \left\{ \int_0^1 q^{|J|} p(q)\, dq, \quad J \in \mathcal{E} \right\}$$

является P-функцией, соответствующей смеси случайных полей Бернулли. В случае $p(x) = \tau x^{\tau - 1}$, $\tau > 0$ соответствующей P-функцией является

$$b = \left\{ \tau \int_0^1 q^{|\Lambda| + \tau - 1}\, dq = \frac{\tau}{|\Lambda| + \tau}, \quad \Lambda \in \mathcal{E} \right\}.$$

В этом случае множеством конечномерных распределений является

$$P_\Lambda(x) = \frac{\tau}{|\Lambda| + \tau} \prod_{i=1}^{|\Lambda|} \frac{\tau}{|\Lambda| + \tau - i}, \quad \Lambda \in \mathcal{E}.$$

В §7 мы покажем, что это случайное поле негиббсовское.

Пример 4. Пусть $\beta_{t,s}$, $t,s \in \mathbb{Z}^\nu$ – набор неотрицательных чисел таких, что $\sum_{t\in\mathbb{Z}^\nu} \beta_{t,s} < \infty$. Рассмотрим

$$f = \left\{ \exp\left[-\sum_{t,s\in J} \beta_{t,s} \right], \quad J \in \mathcal{E} \right\}.$$

Она – P-функция, которая является дискретным аналогом точечного случайного поля в $\mathbb{R}^d$ Амбарцумяна–Сукиасяна [1]. Кратко напомним основной результат работы [1]. Рассматривается следующая последовательность функций :

$$f(x_1) \equiv \alpha, \quad f(x_1, ..., x_n) = \alpha^n \prod_{\{i,j\}\subset\{1,...,n\}} h(x_i, x_j), \quad n = 2, 3, ..., \tag{4}$$

где $0 \le h(x,y) \le 1$ – симметричная функция в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$ – параметр (интенсивность), а произведение проводится по всем возможным два-подмножествам $\{1, ..., n\}$. При условии сходимости

$$\sup_x \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h(x,y)]\, dy < \infty$$

существует точечный процесс P в $\mathbb{R}^d$, для которого (4) представляет так называемые *абсолютные плотности*, т.е. для каждой последовательности $x_1, ..., x_n$

$$P(dx_1, ..., dx_n) = f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Этот результат доказан в [1] с помощью теоремы А. Кажется возможным доказательство соответствующего результата для P-функций.

Пример 5. Здесь мы введем некоторые P-функции, встречающиеся в теории гиббсовских случайных полей. Для любого непустого $A \in \mathcal{E}$ фиксируем произвольную точку $t_A \in A$ и определим частичную упорядоченность в $\mathcal{E}$. Предположим, что $B < A$, $B, A \in \mathcal{E}$, если существует последовательность $B = B_1, B_2, ...,$ $B_n = A$ такая, что $B_{i-1} = B_i \setminus t_{B_i}$, $i = 2, ..., n$. Последовательность

$$\beta = \{B_1, T_1; ...; B_n, T_n\}, \quad B_i, T_i \in \mathcal{E}, \quad T_i \cap B_i = t_{B_i}, \quad i = 1, ..., n,$$

$$B_1 \le A, \quad B_i \le B_{i-1} \cup T_{i-1}, \quad i = 2, ..., n$$

назовем *путем с началом в A и длиной n*. Множество всех путей с началом в A и длиной n мы обозначим через $B_A^{(n)}$, $A \in \mathcal{E}$. Пусть $K = (K_J,\, J \in \mathcal{E})$ – функция такая, что

$$\sum_{\substack{J \ni t \in J \in \mathcal{E} \\ |J| = n}} |K_J| < \alpha \lambda^n, \quad \lambda(1+\sqrt{\alpha})^2 < 1, \quad \lambda, \alpha > 0.$$

Тогда функция

$$f_J = 1 + \sum_n \sum_{\beta \in B_J^{(n)}} (-1)^n K_{T_1} \cdots K_{T_n}, \quad J \in \mathcal{E}$$

представляет собой P-функцию (см., например, [9], [10]).

§4. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И Q-ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы построим P-функции по принципу, используемому в теории гиббсовских случайных полей.

Определение 3. Функция $\theta = \{\theta_J,\, J \in \mathcal{E}\}$ называется *Q-функцией*, если $\theta_J > 0$, $J \in \mathcal{E}$, $\theta_\emptyset = 1$ и для любого $x \in \mathcal{E}$

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|}\, \theta_J \geq 0. \tag{5}$$

В противовес P-функциям Q-функции имеют простое построение.

Теорема 2. *Функция $\theta = \{\theta_J,\, J \in \mathcal{E}\}$ будет Q-функцией тогда и только тогда, когда существует функция $H = \{H_S,\, S \in \mathcal{E}\}$, $H_S \geq 0$, $S \in \mathcal{E}$, $H_\emptyset = 1$ такая, что для каждого $J \in \mathcal{E}$, $\theta_J = \sum_{S \subseteq J} H_S$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\theta = \{\theta_J,\, J \in \mathcal{E}\}$ – Q-функция. Положим

$$H_S = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|}\, \theta_J, \quad S \in \mathcal{E}. \tag{6}$$

Поскольку θ – Q-функция, то согласно определению H_S имеем $H_S \geq 0$, $S \in \mathcal{E}$ и $H_\emptyset = 1$. Имеем

$$\sum_{S \subseteq \Lambda} H_S = \sum_{S \subseteq \Lambda} \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|}\, \theta_J = \sum_{J \subseteq \Lambda} \theta_J \sum_{S: J \subseteq S \subseteq \Lambda} (-1)^{|S \setminus J|} = \theta_\Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}.$$

Достаточность. Пусть $\theta_\Lambda = \sum_{S \subseteq \Lambda} H_S$. Очевидно $\theta_J > 0$, $J \in \mathcal{E}$, $\theta_\emptyset = 1$. Наконец

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|}\, \theta_J = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} \sum_{\tilde{J} \subseteq J} H_{\tilde{J}} =$$

$$= \sum_{\widetilde{J} \subseteq S} H_{\widetilde{J}} \sum_{J: \widetilde{J} \subseteq J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} = H_S > 0, \quad S \in \mathcal{E}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $\theta = \{\theta_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ – Q-функция. Пусть $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ – последовательность возрастающих подмножеств такая, что для любого $J \in \mathcal{E}$ существует предел*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} \frac{\theta_{\Lambda \setminus J}}{\theta_\Lambda} = f_J. \tag{7}$$

Тогда $f = \{f_J, J \in \mathcal{E}\}$ – P-функция.

Доказательство. Для любого $I \in \mathcal{E}$ имеем

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{I \setminus J} = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \frac{\theta_{\Lambda \setminus (I \setminus J)}}{\theta_\Lambda} =$$

$$= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} \frac{1}{\theta_\Lambda} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_{(\Lambda \setminus I) \cup J}, \quad x \subseteq I.$$

Поскольку θ – Q-функция, то для $\Lambda \in \mathcal{E}$, $I \subseteq \Lambda$, $S \subset \Lambda \setminus I$ и $x \subseteq I$ имеем $\sum\limits_{J \subseteq x \cup S} (-1)^{|x \cup S \setminus J|} \theta_J \geq 0$, поэтому

$$D \equiv \sum_{S \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{J \subseteq x \cup S} (-1)^{|x \cup S \setminus J|} \theta_J \geq 0.$$

Отсюда

$$D = \sum_{S \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{J_1 \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J_1|} \sum_{J_2 \subseteq \Lambda \setminus I} \theta_{J_1 \cup J_2} \sum_{J_2 : J_2 \subseteq S \subseteq \Lambda \setminus I} (-1)^{|S \setminus J_2|} =$$

$$= \sum_{J_1 \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J_1|} \theta_{(\Lambda \setminus I) \cup J_1} \geq 0.$$

Теорема 3 доказана.

Дадим характеристику Q-систем, используемых ниже в §§5,6.

Определение 4. Семейство вероятностных распределений $Q = \{Q_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $Q_\Lambda(\emptyset) > 0$, $Q_\emptyset(\emptyset) = 1$ называется *согласованным в смысле Добрушина*, если для любых $\widetilde{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}$, $\Lambda \cap \widetilde{\Lambda} = \emptyset$

$$Q_{\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}}(x) = \frac{Q_{\Lambda \cup \widetilde{\Lambda}}(\emptyset)}{Q_\Lambda(\emptyset)} Q_\Lambda(x), \quad x \subseteq \Lambda. \tag{8}$$

Перепишем (8) в эквивалентном виде

$$Q_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}(x) = Q_\Lambda(x)\big(Q_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}\big)_{\widetilde{\Lambda}}(\emptyset). \tag{9}$$

Теорема 4. *Система $Q = \{Q_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $Q_\Lambda(\emptyset) > 0$, $Q_\emptyset(\emptyset) = 1$ вероятностных распределений согласована в смысле Добрушина тогда и только тогда, когда существует Q-функция $\theta = \{\theta_J,\ J \in \mathcal{E}\}$ такая, что для любого $\Lambda \in \mathcal{E}$*

$$Q_\Lambda(x) = \frac{1}{\theta_\Lambda}\sum_{J\subseteq x}(-1)^{|x\setminus J|}\,\theta_J, \quad x \subseteq \Lambda. \tag{10}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $Q = \{Q_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $Q_\Lambda(\emptyset) > 0$, $Q_\emptyset(\emptyset) = 1$ – множество вероятностных распределений, согласованное в смысле Добрушина. Положим $\theta_\Lambda = [Q_\Lambda(\emptyset)]^{-1}$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Имеем

$$1 = \sum_{S\subseteq J} Q_J(S) = \sum_{S\subseteq J}\frac{Q_J(\emptyset)}{Q_\Lambda(\emptyset)}Q_\Lambda(S) = \frac{Q_J(\emptyset)}{Q_\Lambda(\emptyset)}\sum_{S\subseteq J} Q_\Lambda(S).$$

Отсюда получим

$$\theta_J = \theta_\Lambda \sum_{S\subseteq J} Q_\Lambda(S).$$

Следовательно

$$\sum_{J\subseteq x}(-1)^{|x\setminus J|}\,\theta_J = \theta_\Lambda \sum_{J\subseteq x}(-1)^{|x\setminus J|}\ \sum_{S\subseteq J} Q_\Lambda(S) = \theta_\Lambda Q_\Lambda(x),$$

и мы получим (10).

Достаточность. Пусть существует Q-функция $\theta = \{\theta_J,\ J \in \mathcal{E}\}$ такая, что имеет место (10). Согласно определению, $Q_\Lambda(x) \geq 0$, $Q_\emptyset(\emptyset) = 1$. Далее имеем

$$\sum_{x\subseteq\Lambda} Q_\Lambda(x) = \frac{1}{\theta_\Lambda}\sum_{x\subseteq\Lambda}\sum_{J\subseteq x}(-1)^{|x\setminus J|}\,\theta_J = \frac{1}{\theta_\Lambda}\sum_{J\subseteq\Lambda}\theta_J \sum_{x:J\subseteq x\subseteq\Lambda}(-1)^{|x\setminus J|}\theta_J = 1,$$

т.е. система (10) – множество вероятностных распределений. Проверим его согласованность в смысле Добрушина. Сначала заметим, что $Q_\Lambda(\emptyset) = \dfrac{1}{\theta_\Lambda}$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Далее

$$Q_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}(x) = \frac{1}{\theta_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}}\sum_{J\subseteq x}(-1)^{|x\setminus J|}\,\theta_J = \frac{\theta_\Lambda}{\theta_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}}Q_\Lambda(x) = \frac{Q_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}(\emptyset)}{Q_\Lambda(\emptyset)}Q_\Lambda(x), \quad x \subseteq \Lambda.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Если $\theta = \{\theta_J,\ J \in \mathcal{E}\}$ – Q-функция, то

$$f^{(\Lambda)} = \left\{ f_J = \frac{\theta_{\Lambda \setminus J}}{\theta_\Lambda}, \quad J \in \mathcal{E} \right\}$$

– P-функция с параметрическим множеством $\Lambda \in \mathcal{E}$. Вероятностные распределения для соответствующих случайных полей имеют вид

$$P_I^{(\Lambda)}(x) = (P_\Lambda)_{\Lambda \cap I}(x), \quad x \subset I,$$

$$(P_\Lambda)_\emptyset(x) = \begin{cases} 1, & x = \emptyset, \\ 0, & x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Это – случайное поле *в конечном объеме* Λ.

Замечание 2. Поскольку множество всех P-функций компактно, то можно выбрать сходящуюся последовательность P-функций $f^{(\Lambda_k)} \to f$ (при $k \to \infty$), где $\Lambda_k \uparrow \mathbb{Z}^\nu$, $k \to \infty$ – некоторая возрастающая последовательность подмножеств. Случайное поле с P-функцией f называется *предельным* для случайных полей в конечных объемах.

§5. Q-ФУНКЦИИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $P = \{P_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{E}\}$ – случайное поле. Согласно хорошо известной теореме мартингальной сходимости для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$, $x \subset \Lambda$, $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$ существует предел

$$Q_\Lambda^{\bar{x}}(x) = \lim_{\tilde{\Lambda} \uparrow \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda} \frac{P_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}(x \cup \bar{x}_{\tilde{\Lambda}})}{P_{\tilde{\Lambda}}(\bar{x}_{\tilde{\Lambda}})} \quad \text{п.н.}, \tag{11}$$

где $\bar{x}_{\tilde{\Lambda}} = \bar{x} \cap \tilde{\Lambda}$. Для каждого $\Lambda \in \mathcal{E}$ величина (11) определяет некоторое вероятностное распределение, называемое *условным распределением на Λ с граничным условием* $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$ (см. [6], [7]). Семейство условных распределений, зависящих от $\Lambda \in \mathcal{E}$ и граничных условий $\bar{x}$

$$Q = \{Q_\Lambda^{\bar{x}},\ \Lambda \in \mathcal{E},\ \bar{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda\} \tag{11'}$$

называется *условным распределением* случайного поля P.

Определение 5. Система вероятностных распределений (11') называется *согласованной в смысле Добрушина*, если для любых $\widetilde{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}$, $\Lambda \cap \widetilde{\Lambda} = \emptyset$ и любых $x \subset \Lambda$, $y \subset \widetilde{\Lambda}$, $\overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus (\Lambda \cup \widetilde{\Lambda})$

$$Q^{\overline{x}}_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}(x \cup y) = Q^{\overline{x}\cup y}_{\Lambda}(x) \left(Q^{\overline{x}}_{\Lambda\cup\widetilde{\Lambda}}\right)_{\widetilde{\Lambda}}(y). \tag{12}$$

Определение 6. Функция $\theta(\overline{x}) = \{\theta^{\overline{x}_{J^c}}_J, J \in \mathcal{E}\}, \theta^{\overline{x}}_\emptyset = 1, \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu, \overline{x}_{J^c} = \overline{x} \cap (\mathbb{Z}^\nu \setminus J)$ называется *Q-функцией с граничным условием $\overline{x}$*, если для любого $x \in \mathcal{E}$

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x\setminus J|}\, \theta^{\overline{x}_{J^c}}_J \geq 0.$$

Любая функция $H(\overline{x}) = \{H^{\overline{x}_{J^c}}_J, J \in \mathcal{E}\}$, $H^{\overline{x}}_\emptyset = 1$, $\overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu$ с неотрицательными значениями называется *H-функцией с граничным условием $\overline{x}$*.

Теорема 5. *Функция $\theta(\overline{x}) = \{\theta^{\overline{x}_{J^c}}_J, J \in \mathcal{E}\}, \theta^{\overline{x}}_\emptyset = 1, \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu$ является Q-функцией с граничным условием $\overline{x}$ тогда и только тогда, когда существует H-функция $H(\overline{x})$ такая, что для любого $\Lambda \in \mathcal{E}$*

$$\theta^{\overline{x}_{\Lambda^c}}_\Lambda = \sum_{J \subset \Lambda} H^{\overline{x}_{J^c}}_J.$$

Определение 7. Система $\theta = \{\theta(\overline{x}), \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu\}$ Q-функций, зависящих от граничных условий, называется *согласованной*, если соответствующая система $H = \{H(\overline{x}), \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu\}$ H-функций обладает следующим свойством : для любых $J_1, J_2 \in \mathcal{E}$ и $\overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu$

$$H^{\overline{x}_{(J_1\cup J_2)^c}}_{J_1\cup J_2} = H^{\overline{x}_{(J_1\cup J_2)^c}}_{J_1} H^{J_1\cup\overline{x}_{(J_1\cup J_2)^c}}_{J_2}.$$

Теорема 6. *Система условных распределений (11') согласована в смысле Добрушина тогда и только тогда, когда существует согласованная система Q-функций $\theta = \{\theta(\overline{x}), \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu\}$ такая, что*

$$Q^{\overline{x}}_\Lambda(x) = \frac{1}{\theta^{\overline{x}_{\Lambda^c}}_\Lambda} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x\setminus J|}\, \theta^{\overline{x}_{J^c}}_J, \quad x \subset \Lambda.$$

Доказательства теорем 5,6 аналогичны доказательствам теорем 2,4. Последние соответствуют случаю пустых граничных условий.

§6. Q-ФУНКЦИИ ДЛЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Измеримую функцию Φ, определенную на $\mathcal{E}$, назовем *потенциалом*, если

$$\sup_{a\in\mathbb{Z}^\nu} \sum_{J:a\in J\in\mathcal{E}} |\Phi(J)| < \infty. \tag{13}$$

Потенциальная энергия конфигурации $x \subset \Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{E}$ с граничным условием $\overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda$ определяется по формуле

$$U^{\overline{x}}(x) = \sum_{\emptyset\neq J\subset x} \sum_{\widetilde{J}\subset\overline{x}} \Phi(J\cup\widetilde{J}).$$

Q-функции с граничным условием $\overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu$ для гиббсовских случайных полей имеют вид

$$\mathbb{Z}(\overline{x}) = \left\{ \mathbb{Z}_\Lambda^{\overline{x}_{\Lambda^c}} = \sum_{x\subset\Lambda} \exp\left[-U^{\overline{x}_{\Lambda^c}}(x)\right], \quad \Lambda\in\mathcal{E} \right\}.$$

Соответствующими гиббсовскими условными распределениями являются

$$Q_\Lambda^{\overline{x}_{\Lambda^c}}(x) = \left(\mathbb{Z}_\Lambda^{\overline{x}_{\Lambda^c}}\right)^{-1} \exp\left[-U^{\overline{x}_{\Lambda^c}}(x)\right], \quad x\subset\Lambda.$$

Всякий элемент закрытой выпуклой оболочки множества предельных гиббсовских распределений называтеся *гиббсовским случайным полем* (см. [7], [8]). Отметимтакже, что всякая H-система, соответствующая гиббсовскому случайному полю, имеет вид

$$\left\{ H_S^{\overline{x}} = \exp\left[-U^{\overline{x}}(S)\right], \quad S\in\mathcal{E}, \quad \overline{x}\subset\mathbb{Z}^\nu\setminus S \right\}.$$

§7. НЕГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Ниже мы построим некоторые негиббсовские случайные поля.

Предложение 1. *Пусть $\theta = \{\theta_J^{\overline{x}},\ J\in\mathcal{E},\ \overline{x}\subset\mathbb{Z}^\nu\setminus J\}$ – согласованная система Q-функций и $H = \{H_J^{\overline{x}},\ J\in\mathcal{E},\ \overline{x}\subset\mathbb{Z}^\nu\setminus J\}$ – соответствующая система неотрицательных функций (H-система). Пусть функция $R(\overline{x})$, $\overline{x}\subset\mathbb{Z}^\nu$ такая, что $R(\overline{x}_1) = R(\overline{x}_2)$, если $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ до конечного числа точек решетки. Тогда система*

$$H_R = \left\{ \left(H_J^{\overline{x}}\right)^{R(\overline{x})}, \quad J\in\mathcal{E}, \quad \overline{x}\subset\mathbb{Z}^\nu\setminus J \right\}$$

определяет некоторую соласованную θ-систему Q-функций, которую обозначим через θ_R.

Доказательство. Для любых $J_1, J_2\in\mathcal{E}$ и $\overline{x}\subset\mathbb{Z}^\nu\setminus\{J_1\cup J_2\}$ можем написать

$$\left(H_{J_1\cup J_2}^{\overline{x}}\right)^{R(\overline{x})} = \left(H_{J_1}^{\overline{x}} H_{J_2}^{\overline{x}\cup J_1}\right)^{R(\overline{x})} =$$

$$= \left(H_{J_1}^{\overline{x}}\right)^{R(\overline{x})} \left(H_{J_2}^{\overline{x}\cup J_1}\right)^{R(\overline{x})} = \left(H_{J_1}^{\overline{x}}\right)^{R(\overline{x})} \left(H_{J_2}^{\overline{x}\cup J_1}\right)^{R(\overline{x}\cup J_1)} .$$

Предложение 2. *Пусть $\theta = \{\theta_J,\ J \in \mathcal{E},\ \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus J\}$ – гиббсовская система Q-функций. Тогда соответствующая θ_R – негиббсовская система Q-функций.*

Доказательство. Поскольку θ – гиббсовская, то соответствующая H система имеет вид

$$H = \left\{\exp\left[-U^{\overline{x}}(x)\right],\quad x \subset \Lambda,\quad \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda,\quad \Lambda \in \mathcal{E}\right\}.$$

Следовательно

$$H_R = \left\{\exp\left[-U^{\overline{x}}(x)R(\overline{x})\right],\quad x \subset \Lambda,\quad \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda,\quad \Lambda \in \mathcal{E}\right\}.$$

Согласно предложению 1 H_R определяет некоторую θ_R, которая согласована и, следовательно, в свою очередь, определяет случайное поле. Покажем, что это случайное поле негиббсовское, т.е. нет такого потенциала $\widetilde{\Phi}$, что

$$U^{\overline{x}}(x)R(\overline{x}) = \sum_{J\subset x}\ \sum_{\emptyset\neq\widetilde{J}\subset\overline{x}} \widetilde{\Phi}(J\cup\widetilde{J}). \tag{14}$$

Предположим, что обратное утверждение верно, т.е. имеет место (14). Для $x = \emptyset$ имеем

$$\left(\Phi(\emptyset) + \sum_{\emptyset\neq J\subset\overline{x}} \Phi(J)\right) R(\overline{x}) = \widetilde{\Phi}(\emptyset) + \sum_{\emptyset\neq J\subset\overline{x}} \widetilde{\Phi}(J).$$

Следовательно, если $\overline{x} = \emptyset$, то $\Phi(\emptyset)R(\emptyset) = \widetilde{\Phi}(\emptyset)$ и если $\overline{x} = \{t\}$, то

$$[\Phi(\emptyset)+\Phi(t)]R(t) = \widetilde{\Phi}(\emptyset)+\widetilde{\Phi}(t),\quad [\Phi(\emptyset)+\Phi(t)]R(\emptyset) = \widetilde{\Phi}(\emptyset)+\widetilde{\Phi}(t),\quad \Phi(t)]R(\emptyset) = \widetilde{\Phi}(t).$$

Аналогичным образом находим, что $\Phi(J)R(\emptyset) = \widetilde{\Phi}(t)$ для любого $J \in \mathcal{E}$. Поэтому

$$H^{\overline{x}}(x)R(\overline{x}) = H^{\overline{x}}(x)R(\emptyset) \quad \text{или} \quad R(\overline{x}) = R(\emptyset).$$

Однако последнее соотношение неверно, если $\overline{x}$ бесконечно.

Теперь покажем, что случайное поле примера 3 негиббсовское. Условные вероятности имеют вид

$$Q_\Lambda^{\overline{x}}(x) = p^{|x|}(\overline{x})(1-p(\overline{x}))^{|\Lambda|-|x|},\quad x \subset \Lambda,\quad \overline{x} \subset \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda,\quad \Lambda \in \mathcal{E},$$

где

$$p(\overline{x}) = \lim_{|\Lambda|\uparrow\infty} \frac{|\overline{x}|}{|\Lambda|} \quad \text{п.н.}$$

Запишем $Q_\Lambda^{\overline{x}}(x)$ в виде

$$Q_\Lambda^{\overline{x}}(x) = \frac{\left(\frac{p(\overline{x})}{1-p(\overline{x})}\right)^{|x|}}{(1-p(\overline{x}))^{-|\Lambda|}}.$$

Поэтому нормирующим фактором будет $Z_\Lambda(\overline{x}) = (1-p(\overline{x}))^{-|\Lambda|}$, а потенциальной энергией будет

$$U^{\overline{x}}(x) = |x| \ln \frac{p(\overline{x})}{1-p(\overline{x})}.$$

Согласно предложению 2, эта потенциальная энергия не порождает гиббсовского случайного поля в классическом смысле.

ABSTRACT. **The inclusion-exclusion approach towards construction of random fields on the ν-dimensional integer lattice is described. Comparison with classical Gibbs description is presented.**

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, H. S. Sukiasian, "Inclusion-exclusion and point processes", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 15 – 31, 1991.
2. R. H. Schonmann, "Projections of Gibbs measures may be non Gibbsian", CMP, vol. 124, pp. 1 – 7, 1989.
3. R. B. Israel, "Banach algebras and Kadanoff transformations", in Random Fields (Estergom 1979), North– Holland, vol. 7, pp. 593 – 608, 1981.
4. J. L. Lebovitz, C. Mayes, "The effect of an external field on an interface, entropic repulsion", J. Stat. Phys., vol. 46, pp. 39 – 49, 1987.
5. A. van Enter, R. Fernandez, A. Sokal, "Regularity properties and pathologies of position – space renormalization – group transformations : scope and limitations of Gibbsian theory", J. Stat. Phys., vol. 72, № 5,6, 1993.
6. R. L. Dobrushin, "The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity", Th. Prob. Appl., vol. 13, pp. 197 – 224, 1968.
7. R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 292 – 301, 1968.
8. R. L. Dobrushin, "The problem of uniqueness of a Gibbs random field and the problem of phase transition", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 302 – 312, 1968.
9. V. A. Malyshev, "Cluster expansion in lattice models of statistical physics and the quantum theory of fields", Russian Math. Surveys, vol. 35, no. 2, pp. 3 – 53, 1980.
10. В. А. Малышев, Р. А. Минлос, Гиббсовские Случайные Поля. Метод Кластерных Расширений, Наука, М., 1985.

19 ноября 1995

Институт математики
НАН Армении

ОБ ОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. Машурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В работе изучается последовательность трансляционно–инвариантных маркированных точечных процессов в $\mathbb{R}^d$ с пространством марок $\{1,...,n\}$. Процессы взаимодействуют согласно некоторому механизму, определенному случайным графом, который превращает последовательность в марковскую. Найдены условия, гарантирующие эргодичность последовательности. Предлагается стохастическое построение эргодического распределения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Р. В. Амбарцумян показал в [1], что распределение $P(A)$ всякого классического гиббсовского точечного процесса в $\mathbb{R}^d$, управляемого "парным потенциалом", является единственным решением некоторого уравнения вида

$$P(A) = \int Q(A,\omega)\, P(d\omega), \tag{0.1}$$

где ядро $Q(A,\omega)$ – распределение точечного процесса в $\mathbb{R}^d$, зависящее от реализации ω точечного процесса как параметра. Для любого ω распределение Q вполне определяется "параметром активности" и "парным потенциалом" гиббсовского процесса. Буква A в $P(A)$ и $Q(A,\omega)$ означает событие (измеримое множество) в стандартном ([2]) пространстве $\mathcal{M}$ реализаций точечного процесса в $\mathbb{R}^d$.

Начиная с некоторого начального распределения $P_1(d\omega)$ точечного процесса в $\mathbb{R}^d$ можно получить последовательность $P_1(d\omega), P_2(d\omega), \dots$ распределений точечных процессов в $\mathbb{R}^d$:

$$P_{s+1}(A) = \int Q(A,\omega) P_s(d\omega), \quad s = 1, 2, \dots$$

В работе [1] построением эргодической марковской цепи с пространством состояний $\mathcal{M}$ была показана сходимость последовательности $\{P_s\}$ к предельному распределению P, не зависящему от выбора P_1. Для этой цепи P_s становится вероятностным распределением состояния в момент времени s. Это построение проводилось с помощью случайного графа, вершинами которого являлись точки реализаций $\omega \in \mathcal{M}$.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для *маркированных точечных процессов*. Основным результатом является Теорема 1, которая задает некоторые условия, обеспечивающие эргодичность нашей марковской последовательности маркированных точечных процессов. Мы будем рассматривать только простые точечные процессы в терминологии [3].

§1. МАРКОВСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

В этом параграфе мы опишем марковскую последовательность точечных процессов с пространством состояний $\mathcal{M}'$, которое является пространством всех реализаций маркированных точечных процессов в $\mathbb{R}^d$ с марками из множества $\{1,\dots,n\}$. Каждая реализация $\varphi \in \mathcal{M}'$ – счетное множество $\{(x_k,i_k)\}_{k=1,2,\dots}$, где $\omega = \{x_k\}_{k=1,2,\dots} \in \mathcal{M}$ – реализация точечного процесса в $\mathbb{R}^d$, а $i_k \in \{1,\dots,n\}$ – марка точки $x_k \in \mathbb{R}^d$. Для φ мы будем использовать обозначение $\{(x_k,i_k)\}$, опуская индексы $k = 1,2,\dots$ Напомним, что счетное множество $\omega \subset \mathbb{R}^d$ является реализацией, если $card(\omega \cap B) < \infty$ для любого шара $B \subset \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{d+1}$ систему параллельных гиперплоскостей H_s, описываемых стандартными декартовыми координатами $(x^{(1)},\dots,x^{(d+1)})$ в $\mathbb{R}^{d+1}$ уравнением $x^{(d+1)} = s$, $s = 1,2,\dots$. Гиперплоскость H_s назовем *s-уровнем*. Ниже мы будем предполагать, что реализация (состояние) $\psi_s \in \mathcal{M}'$ нашей марковской последовательности в момент времени s, $s = 1,2,\dots$ лежит на s-уровне (т.е. $\psi_s \subset H_s$). Точнее, $\psi_s = \{(x_k,i_k)\} \subset H_s$ означает, что $\{x_k\} \subset H_s$.

Для построения нашей последовательности $(\psi_1,\psi_2,\dots)$ нам понадобится вероятностное распределение P_1 трансляционно-инвариантного маркированного точечного процесса, которое будет служить вероятностным распределением состояния последовательности на уровне $s = 1$. Нам также понадобится семейство функций

$$\{h_{ij}(x):\ h_{ij}:\mathbb{R}^d \longmapsto [0,1],\quad h_{ij}(-x)=h_{ij}(x),\quad 1\le i,j\le n\}$$

и распределение Q трансляционно–инвариантного маркированного точечного процесса в $\mathbb{R}^d$ с марками в $\{1,\dots,n\}$. Сначала выбираем φ_1 с распределением P_1 и помещаем φ_1 в H_1. Затем выбираем бесконечную последовательность независимых случайных реализаций $\varphi_2,\varphi_3,\dots$ с распределением Q и помещаем φ_s в H_s, $s=2,3,\dots$. Полагаем $\psi_1=\varphi_1$. Определим ψ_2 как случайное подмножество φ_2, получающееся из φ_2 применением случайной операции *разрежения*, зависящей от ψ_1. Разрежение действует следующим образом. Пусть $\psi_1=\{(x_k,i_k)\}$, $\varphi_2=$ $=\{(y_k,j_k)\}$. Точка (x,i) из ψ_1 ударяет точку (y,j) реализации φ_2 с вероятностью $1-h_{ij}((x-y)_d)$; по определению $(x-y)_d=(x^{(1)}-y^{(1)},\dots,x^{(d)}-y^{(d)})$; удары для различных пар предполагаются независимыми. Точку $(y,j)\in\psi_2$ назовем *активной*, если она не получает ударов из точек ψ_1; В случае хоть одного удара, (y,j) называется *мертвой*. Определим ψ_2 как множество *активных* точек φ_2. Для $s>2$ по индукции построим случайную реализацию ψ_s. Пусть реализации $\psi_1,\dots,\psi_{s-1}$ построены. Точка $(x,i)\in\psi_{s-1}$ ударяет точку $(y,j)\in\varphi_s$ с вероятностью $1-h_{ij}((x-y)_d)$. Удары для различных пар снова независимы. Определяем ψ_s как случайное подмножество активных точек φ_s. Распределение ψ_s обозначаем через P_s, $s=1,2,\dots$.

Лемма 1. *Случайная последовательность $\psi_1,\psi_2,\dots$ является марковской цепью.*

Доказательство. По построению, условное распределение последовательности $\psi_s,\psi_{s+1},\dots$ при условии $\psi_1,\dots,\psi_{s-1}$, совпадает с ее распределением при условии ψ_{s-1}. Лемма доказана.

Вероятностное распределение марковской последовательности процессов ψ_s, $s=1,2,\dots$ есть вероятность на счетном произведении V копий $\mathcal{M}'$: $V=\mathcal{M}'\times$ $\times\mathcal{M}'\times\cdots$. Для изучения эргодичности нашей марковской последовательности построим случайный граф $g\in G$, вершины которого – точки в реализациях $\varphi_1,\varphi_2,\dots$. Заметим, что каждая вершина – точка в $\mathbb{R}^d$, дополненная маркой из $\{1,...,n\}$.

Рассмотрим последовательности $v = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \in V$ и $e = (b_1, b_2, \ldots)$, где b_l равно 0 или 1. В качестве множества вершин g служит объединение $\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \cdots$, являющееся подмножеством $\mathbb{R}^{d+1}$. Пронумеруем числами $l = 1, 2, \ldots$ элементы множества $\{((x,i),(y,j)) : (x,i) \in \varphi_s, (y,j) \in \varphi_{s+1}, s = 1,2,\ldots\}$ пар точек реализаций, лежащих на соседних уровнях. Поместим *ребро* между точками l-ой пары из указанного множества тогда и только тогда, когда $b_l = 1$, $l = 1, 2, \ldots$ Полученный граф обозначим через g. Отметим, что ребра g могут связать только точки реализации, лежащие на соседних уровнях. На V рассмотрим вероятностную меру

$$\rho(dv) = P_1(d\psi_1) \times Q(d\varphi_2) \times Q(d\varphi_3) \times \cdots.$$

По заданной $v \in V$ определим вероятность $\rho_v(de)$ следующим образом : случайные величины b_l в $e = (b_1, b_2, \ldots)$ независимы и

$$\text{вероятность } (b_l = 1) \;=\; 1 - h_{ij}((x-y)_d), \tag{1.1}$$

где $((x,i),(y,j))$ – l-ая пара в нашей нумерации. Зададим вероятность на G, определив

$$\rho(dg) = \rho(dv) \times \rho_v(de). \tag{1.2}$$

Определим *отображение разрежения* $G \longmapsto V$. Образ $(\psi_1(g), \psi_2(g), \ldots) \in V$ графа $g = (v, e) \in G$ строится следующим образом : $\psi_1(g) = \varphi_1$; рекуррентно, $\psi_{s+1}(g)$ – множество тех точек φ_{s+1}, которые не связаны ребрами с точками $\psi_s(g)$, $s = 1, 2, \ldots$. Это отображение определяет вероятность на V. По построению, вероятность на V, индуцированная из G совпадает с распределением вышеописанной марковской последовательности и распределение каждой $\psi_s(g)$ есть P_s.

§2. ЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Нам понадобятся некоторые определения. Мы можем двигаться на каждом ребре графа $g \in G$ в двух направлениях. Движение из верхнего уровня в нижний назовем *движением вниз*. Для каждой вершины (x_k, i_k) графа g через t_k обозначим наибольший подграф g, вершин которого можно достичь из (x_k, i_k) движением вниз. Назовем t_k *направленным вниз деревом с корнем* (x_k, i_k). Аналогично, можем говорить о движении вверх и направленных вверх деревьях.

Знание t_k с корнем (x_k, i_k) в принципе позволяет выявить которое из двух случаев имеет место : (x_k, i_k) активна или (x_k, i_k) мертва. Следуя [1], дерево назовем *четным*, если его корень активен. Итак, $\psi_s = \{(x_k, i_k) \in \varphi_s : t_k \text{ четно}\}$. Пусть

$$v_s = \{(x_k, i_k) \in \varphi_s : \; t_k \text{ четно и не достигает второго уровня}\}. \tag{2.1}$$

Нашей первой целью является исследование интенсивности q_s процесса

$$\psi_s \setminus v_s = \{(x_k, i_k) \in \varphi_s : \; t_k \text{ четно и достигает второго уровня}\}. \tag{2.2}$$

В лемме 3 мы дадим достаточные условия для стремления q_s к 0 при $s \to \infty$. Легко проверить, что маркированный точечный процесс $\{(x_k, i_k, t_k)\}$ инвариантен относительно перемещений $\mathbb{R}^d$.

Напомним (подробности см. [4]) понятие ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с конечным числом типов частиц (i-частиц, $i = 1, \dots, n$). Процесс начинается с z_{11} частицами типа 1, z_{12} частицами типа $2, \dots, z_{1n}$ частицами типа n в первом поколении. Затем каждая частица, независимо от других, производит потомков, которые могут быть различных типов. Потомки частиц из первого поколения образуют второе поколение. Они, в свою очередь, производят своих потомков, которые образуют третье поколение и так далее. В каждом поколении i-частица $(i = 1, \dots, n)$ производит потомки, число которых случайно и управляется вероятностным распределением F_i, зависящим только от i а не от поколения.

Обозначим через Z_s последовательность $(z_{s1}, \dots, z_{sn})$, где z_{si} – число i-частиц в s-ом поколении. $Z_s = \overline{0}$ означает, что $z_{s1} = \cdots = z_{sn} = 0$. Событие $\{Z_s = \overline{0}$ для некоторого поколения $s\}$ назовем *вырождением*. Предположим, что $A = ||a_{ij}||$, $1 \leq i, j \leq n$, где a_{ij} – среднее число j-потомков i-частицы. Пусть σ – действительное собственное значение A $(\sigma \in \mathbb{R})$ с наибольшим модулем (такое собственное значение существует для каждой матрицы A с неотрицательными элементами ; см. [5]).

Далее, обозначим через $a_{ij}^{(s)}$ элементы s-ой степени матрицы $A : A^s = ||a_{ij}^{(s)}||$. Типы i и j $(1 \leq i, j \leq n)$ назовем ***сообщающимися***, если существуют натуральные s, s' такие, что $a_{ij}^{(s)} > 0$, $a_{ji}^{(s')} > 0$. Тип, не сообщающийся ни с собой, ни с другими типами, назовем ***особым***. Отношение сообщения делит множество не особых типов в непересекающиеся непустые классы. Класс C назовем ***финальным***, если число C-потомков каждой C-частицы равно 1 с вероятностью 1 (C-частица это частица с типом в C).

Следующее утверждение отвечает на вопрос : какова вероятность вырождения ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона ?

Утверждение 1. *([4]) Вероятность вырождения равна 1 для всех Z_1 тогда и только тогда, когда одновременно а) $\sigma \leq 1$ и б) нет финальных классов.*

Из этого утверждения мы выводим достаточные условия, обеспечивающие стремление к нулю интенсивности q_s процесса $\psi_s \setminus v_s$. Сначала докажем лемму. Определим новую вероятность $\rho^*(dg)$ в пространстве графов G :

$$\rho^*(dg) = \rho^*(dv) \times \rho_v^*(de), \tag{2.3}$$

где $\rho^*(dv) = Q(d\varphi_1) \times Q(d\varphi_2) \times \cdots$, а $\rho_v^*(de)$ определяется следующим образом. Случайные величины b_l в $e = (b_1, b_2, \ldots)$ снова независимы, однако в противоположность $\rho_v(de)$, для l-ой пары $((x, i), (y, j))$

$$\text{вероятность } (b_l = 1) \;=\; 1 - h_{ji}((x - y)_d) \tag{2.4}$$

(заметим изменение порядка i и j по сравнению с (1.1)). Обозначим через λ интенсивность φ_s и через $\{p_1, ..., p_n\}$ – распределение типичной марки в φ_s. Заметим,что эти величины не зависят от s и определяются через вероятностное распределение Q. Нам понадобится случайное дерево t_0^*. Для его определения рассмотрим сначала граф g_0, вероятностное распределение которого получается из (2.3), если взять φ_1 состоящим из одной единственной точки, а именно, начала координат O, и дадим марку i точке O с вероятностью p_i. Теперь определим t_0^* как направленный вверх (возможно бесконечный) подграф g_0 с корнем в O. Иными словами, t_0^* – наибольший подграф g_0, вершины которого достигаются из O движением вверх. Обозначим через F_0 вероятностное распределение t_0^*.

Лемма 2. *Если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняются неравенства*

$$a_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} [1 - h_{ji}(x)]dx < 1, \tag{2.5}$$

то $F_0(t_0^*$ конечно$) = 1$.

Доказательство. Построим "процесс частиц" T, помещающий частицы в заданных положениях, *являющихся вершинами* t_0^*, согласно следующему стохастическому закону.

1) С вероятностью 1 процесс T имеет только одну частицу в $O \in H_1$. С вероятностью p_i ее тип есть i.

2) Частица типа i, помещенная в $x \in \varphi_s$, производит потомка типа j, помещенного в $y \in \varphi_{s+1}$ с вероятностью $1 - h_{ji}((x-y)_d)$.

3) Если T помещает частицу в $x \in \varphi_s$, $s \geq 2$, то эта частица получает марку точки x.

4) При заданных $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ все индивидуальные акты производства потомков стохастически независимы.

Последовательность n-ок $(z_{s1}, \ldots, z_{sn})$, $s = 1, 2, \ldots$ чисел частиц процесса T – ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с n типами частиц со средним числом $a_{ij} = \lambda p_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} [1 - h_{ji}(x)]dx$ j-потомков i-частицы.

Пусть T_0 – граф в $\mathbb{R}^{d+1}$, который мы получаем, интерпретируя частицы T как вершины и помещая ребра между частицами и их потомками. Заметим, что T_0 может иметь несколько вершин в положениях; одинаковая пара положений также может быть соединена несколькими ребрами. Теперь построим подграф $t_0 \in T_0$ следующим образом. Вершины T_0 на первом и втором уровне сохраняются. Для каждого положения x на третьем уровне мы выбираем вершину в x, согласно результату независимого случайного эксперимента, который дает равные вероятности каждой частице в x. Затем мы устраняем остальные вершины в x со всем их потомством. На четвертом уровне мы действуем аналогичным образом и т.д. По определению, остается дерево t_0.

Легко видеть, что вероятностные распределения t_0 и t_0^* совпадают. Следовательно, достаточно показать, что t_0 конечно с вероятностью 1. По построению,

t_0 будет конечным, если процесс T вырождается с вероятностью 1. Покажем выполнение последнего обстоятельства.

В этом ветвящемся процессе нет финальных классов. Действительно, из существования финального класса C следовало бы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 1$ для каждой $i \in C$ (поскольку i имеет не менее одного потомка с вероятностью 1), что противоречило бы нашему предположению (2.5).

Из $\sigma \leq \max_{1\leq i\leq n} a_i$ (см. [5]) и (2.5) заключаем, что $\sigma < 1$. Таким образом, условия а) и б) утверждения 1 удовлетворяются и наш ветвящийся процесс T вырождается с вероятностью 1. Поэтому t_0, а с ним и t_0^*, конечны с вероятностью 1. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если условия (2.5) выполнены, то интенсивность q_s процесса $\psi_s \setminus \upsilon_s$, заданного по (2.2), стремится к 0 при $s \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие маркированные точечные процессы :

$$\{(x_k, t_k^*) : (x_k, i_k) \in \varphi_1\}, \tag{2.6}$$

$$\{(x_k, t_k^*) : (x_k, i_k) \in \varphi_1,\ t_k^* \text{ не достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}, \tag{2.7}$$

$$\{(x_k, t_k^*) : (x_k, i_k) \in \varphi_1,\ t_k^* \text{ достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}. \tag{2.8}$$

Здесь t_k^* – направленное вверх дерево с корнем в (x_k, i_k), т.е. наибольший подграф g, вершины которого достижимы из (x_k, i_k) движением вверх. Граф g определяется по формуле (2.3). Имеем также аналогичные маркированные точечные процессы, соответствующие $\rho(dg)$ в (1.2) :

$$\{(x_k, t_k) : (x_k, i_k) \in \varphi_s\}, \tag{2.9}$$

$$\{(x_k, t_k) : (x_k, i_k) \in \varphi_s,\ t_k \text{ не достигает второго уровня}\}, \tag{2.10}$$

$$\{(x_k, t_k) : (x_k, i_k) \in \varphi_s,\ t_k \text{ достигает второго уровня}\}. \tag{2.11}$$

Из построений ясно, что процессы (2.6) – (2.11) трансляционно-инвариантны и

$$\text{интенсивность (2.6)} = \text{интенсивности (2.9)},$$

$$\text{интенсивность (2.7)} = \text{интенсивности (2.10)}.$$

Обозначая через int интенсивность соответствующего точечного процесса, имеем

$$q_s \leq \text{int}\,(2.11) = \text{int}\,(2.9) - \text{int}\,(2.10) = \text{int}\,(2.6) - \text{int}\,(2.7) = \text{int}\,(2.8).$$

Покажем, что

$$\text{int}\,(2.8) \to 0. \tag{2.12}$$

Пусть F – распределение типичной марки (2.6) (подробности см. [2]). Для события B в пространстве направленных вверх деревьев имеем (см. [2]) : $F(B) = \lambda_B \lambda^{-1}$, где λ_B – интенсивность процесса $\{(x_k, t_k^*) : t_k^* \in B\}$, а λ – интенсивность (2.6). Выбирая $B = B_{s-1} = \{$деревья, достигающие $(s-1)$-го уровня$\}$, получаем : int (2.8) $\to 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s\to\infty} F(B_s) = 0$. Но $\{B_s\}$ – монотонно убывающая последовательность событий. Следовательно, $\lim F(B_s) = F(\lim B_s) = F(B_\infty)$, где $B_\infty = \cap B_s = \{$бесконечные деревья$\}$.

Итак, осталось показать, что $F(B_\infty) = 0$. Это следует из того (Лемма 4), что направленное вверх дерево t_0^* из Леммы 2 имеет вероятностное распределение F и по той же лемме оно конечно с вероятностью 1. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Вероятностное распределение F_0 направленного вверх дерева t_0^* совпадает с вероятностным распределением типичной марки точечного процесса (2.6), т.е. $F_0 = F$.*

Доказательство. Распределение F можно получить ([2]) как условное распределение следующим путем :

$$F(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P\left(\binom{\varepsilon}{1} \cap (t^* \in A)\right)}{P\binom{\varepsilon}{1}},$$

где ε – шар, убывая стремящийся к началу координат O, $\binom{\varepsilon}{1}$ – множество реализаций точечных процессов, имеющих только одну точку в ε, t^* – дерево с корнем в (единственной) точке из ε. Часть графа g, суженная на уровни $s = 2, 3, \ldots$ –стохастически независима от процесса $\varphi_1 = \psi_1$. Следовательно, обуславливающее событие $\binom{\varepsilon}{1}$ воздействует только на условное распределение марки i точки реализации из ε. В пределе последнее условное распределение превращается в распределение типичной марки в процессе $\{(x_k, i_k)\}$. Это распределение марки было использовано при построении дерева t_0^*. Лемма 4 доказана.

§3. ЭРГОДИЧНОСТЬ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Сформулированная ниже основная теорема вытекает из следующего утверждения, являющегося расслабленной версией теоремы из [3]. Будем использовать обозначение $\binom{B}{l} = \{$реализации с l точками в $B\}$.

Утверждение 2. *Пусть $P, P_1, P_2, \dots$ – распределения простых точечных процессов в полном сепарабельном метрическом пространстве X. Если для всех ограниченных борелевских множеств $B \subseteq X$ и всех неотрицательных целых l имеем $P_s\binom{B}{l} \to P\binom{B}{l}$ при $s \to \infty$, то последовательность $\{P_s\}$ слабо сходится к P.*

Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы наша марковская последовательность точечных процессов была эргодичной.

Теорема 1. *Если условия (2.5) выполнены, то вероятностное распределение P_s процесса ψ_s в марковской последовательности $(\psi_1, \psi_2, \dots)$ слабо сходится к распределению P^* маркированного точечного процесса $\psi^* = \{(x_k, i_k) \in \varphi_1 : t_k^*$ четно$\}$, соответствующего (2.3).*

Доказательство. Для каждого $s = 1, 2, \dots$ рассмотрим маркированные точечные процессы ψ_s и ψ^* как простые точечные процессы в $X = \mathbb{R}^d \times \{1, ..., n\}$ (реализации обоих точечных процессов лежат в X). Нам нужна метрика в X, в качестве которой мы выбираем сумму евклидовой метрики в $\mathbb{R}^d$ и дискретной метрики в $\{1, ..., n\}$. Пусть $B \subseteq X$ – ограниченное борелевское множество и $l \in \{0, 1, \dots\}$. Тогда существует ограниченное борелевское множество $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $B \subseteq B_0 \times \{1, \dots, n\}$. Теперь рассмотрим процесс

$$v_s^* = \{(x_k, i_k) \in \varphi_1 : \ t_k^* \text{ четно и не достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}, \tag{3.1}$$

$$\psi^* \setminus v_s^* = \{(x_k, i_k) \in \varphi_1 : \ t_k^* \text{ четно и достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}. \tag{3.2}$$

Обозначим через Q_s, R_s, Q_s^*, R_s^*, распределения точечных процессов (2.1), (2.2), (3.1), (3.2), соответственно. Пусть $\Im_s$ и $\Im_s^*$ совместные распределения пар точечных процессов (2.1),(2.2) и (3.1),(3.2). Легко проверить, что $Q_s = Q_s^*$. Пусть L_d – лебегова мера в $\mathbb{R}^d$. Используя знак $\mathbf{E}$ математического ожидания, получаем

$$\left|P^*\binom{B}{l} - P_s\binom{B}{l}\right| = \left|\sum_{i=0}^{l} \Im_s^*\left(\binom{B}{l-i} \times \binom{B}{i}\right) - \sum_{i=0}^{l} \Im_s\left(\binom{B}{l-i} \times \binom{B}{i}\right)\right| \le$$

$$\leq \left|\Im_s^*\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{0}\right)-\Im_s\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{0}\right)\right|+\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}=$$

$$=\left|\Im_s^*\left(\binom{B}{l}\times\mathcal{M}'\right)-\sum_{i=1}^{\infty}\Im_s^*\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{i}\right)-\right.$$

$$\left.-\Im_s\left(\binom{B}{l}\times\mathcal{M}'\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\Im_s\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{i}\right)\right|+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}\leq\left|Q_s^*\binom{B}{l}-Q_s\binom{B}{l}\right|+2\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+2\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}=$$

$$=2\left[\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}\right]\leq 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}iR_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}iR_s\binom{B}{i}\right]=$$

$$=2\left[\mathbf{E}R_s^*(B)+\mathbf{E}R_s(B)\right]\leq 2\left[\mathbf{E}R_s^*(B_0\times\{1,\dots,n\})+\mathbf{E}R_s(B_0\times\{1,\dots,n\})\right]=$$

$$=2L_d(B_0)\ [\mathrm{int}\ (3.2)+\mathrm{int}\ (2.2)]\ .$$

Из леммы 3 следует, что int (2.2) $= q_s \to 0$ и int (3.2) $\leq$ int (2.8) $\to 0$ (см. (2.12)). Поэтому $\left|P^*\binom{B}{l}-P_s\binom{B}{l}\right|\to 0$, и согласно Утверждению 2, теорема доказана.

ABSTRACT. The paper considers a sequence of translation-invariant marked point processes in $\mathbb{R}^d$ with mark space $\{1,\dots,n\}$. The processes interact according to some mechanism determined by a random graph, which renders the sequence to be Markov. Conditions are found which guarantee the ergodicity of the sequence. A stochastic construction of the ergodic distribution is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Random graph approach to Gibbs processes with pair interaction", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 3 – 14, 1991.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. press, 1990.
3. K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, Infinitely Divisible Point Processes, Wiley, Chichester, 1978.
4. T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer, Berlin, 1963.
5. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Наука, М., 1966.

19 ноября 1995 Ереванский государственный университет

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СУММАРНОГО СПИНА В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б. С. Нахапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В теории критических явлений достаточно общепринята точка зрения, что в решетчатых моделях классической статистической физики размерности $\nu = 2, 3$ суммарный спин в критической точке не может иметь асимптотически нормального поведения, т.е. подчиняться центральной предельной теореме (ЦПТ) (см., например, [1] – [3]). Для иллюстрации тех общих соображений, которыми обосновывается вышеуказанный вывод, обычно рассматривается модель классического изинговского ферромагнетика. Эта модель, изученная в статистической физике наиболее полно, задается на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$ с помощью потенциала ближайших соседей следующего вида :

$$\Phi_{\{t,s\}}(x_t, x_s) = \begin{cases} x_t x_s, & |t-s| = 1, \\ 0, & |t-s| \neq 1, \end{cases}$$

где

$$|t-s| = \max_{1\leq i\leq \nu} |t^{(i)} - s^{(i)}|, \quad t, s \in \mathbb{Z}^\nu, \quad x_t, x_s \in X = \{-1, 1\}.$$

Пусть $H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|\Lambda| < \infty$ – гамильтониан моделей Изинга на конфигурациях $x = (x_t,\, t \in \Lambda) \in X^\Lambda$ с граничными условиями $\overline{x} \in X^{\partial\Lambda}$

$$\partial\Lambda = \{t \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda :\ d(t, \Lambda) = 1\}, \quad d(t, \Lambda) = \inf_{s\in\Lambda}\{|t-s|\},$$

т.е.

$$H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x}) = \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s\in\Lambda}} x_t x_s + \beta \sum_{\substack{(t,s) \\ t\in\Lambda, s\in\partial\Lambda}} x_t \overline{x_s} + h \sum_{t\in\Lambda} x_t,$$

где $\langle t,s\rangle$ означает суммирование по ближайшим соседям, а параметры $h\in\mathbb{R}^1$ и $\beta\in\mathbb{R}^1_+$ называются *внешней магнетизацией* и *обратной температурой*, соответственно. Отвечающие этому гамильтониану гиббсовские распределения в конечном сосуде Λ с граничными условиями $\overline{x}\in X^{\partial\Lambda}$ имеют вид

$$P_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})=\left(\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta,h}(\overline{x})\right)^{-1}\exp[-H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})],\quad x\in X^\Lambda,$$

$$\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta,h}(\overline{x})=\sum_{x\in X^\Lambda}\exp[-H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})].$$

Граничные условия $\{x_t=1,\ t\in\partial\Lambda\}$ и $\{x_t=-1,\ t\in\partial\Lambda\}$, называемые "плюс" и "минус", соответственно, имеют особую важность. Соответствующие им гамильтонианы и гиббсовские распределения будут обозначены следующим образом : $H_{\Lambda,+}^{\beta,h}$, $P_{\Lambda,+}^{\beta,h}$, $H_{\Lambda,-}^{\beta,h}$, $P_{\Lambda,-}^{\beta,h}$. Хорошо известно, что при $\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu$ меры $P_{\Lambda,+}^{\beta,h}$ и $P_{\Lambda,-}^{\beta,h}$ слабо сходятся к пределам $P_+^{\beta,h}$ и $P_-^{\beta,h}$, причем эти предельные гиббсовские меры являются эргодическими. Все другие возможные предельные меры являются линейными комбинациями указанных эргодических мер.

При $h\neq 0$ и любом β, $0<\beta<\infty$ распределения $P_+^{\beta,h}$ и $P_-^{\beta,h}$ совпадают : $P_+^{\beta,h}=P_-^{\beta,h}=P^{\beta,h}$ и, таким образом, при указанных значениях параметров (β,h) в модели Изинга имеет место единственность. При $h=0$ единственность наблюдается только в пределах некоторого интервала $0<\beta\leq\beta_{cr}$, а при $\beta>\beta_{cr}$ имеем $P_+^{\beta,0}\neq P_-^{\beta,0}$. Последний факт интерпретируется как наличие фазового перехода, когда β возрастая, достигает обратной критической температуры β_{cr}. Отметим также, что для $0<\beta\leq\beta_{cr}$, $h=0$ пара корреляций $E^{\beta,0}x_tx_s$ для распределения $P^{\beta,0}$ убывает экспоненциально при $|t-s|\to\infty$, а именно, существует положительная величина $\tau(\beta,0)$, называемая *корреляционной длиной*, такая, что

$$E^{\beta,0}x_tx_s\ \sim\ \exp\left[-\frac{|t-s|}{\tau(\beta,0)}\right].$$

Типичное обоснование (не строгое) того, что в модели Изинга суммарный спин в критической точке не подчиняется ЦПТ состоит в следующем. При приближении β к β_{cr}, $\beta\leq\beta_{cr}$, $h=0$ происходит усиление корреляций между спинами, в результате чего корреляционная длина $\tau(0,\beta)$ стремится к бесконечности. В критической точке $\tau(0,\beta_{cr})$ корреляционная длина становится бесконечной, а убывание корреляций происходит степенным образом. Сами спины при этом никак нельзя считать слабо зависимыми случайными величинами. В этих условиях справедливости ЦПТ ожидать никак нельзя и ставится вопрос о нахождении другой более подходящей нормировки, при которой будет иметь место сходимость к некоторому другому, отличному от гауссовского, распределению.

В противовес этому ниже мы приведем пример простой, точно решаемой решетчатой модели, у которой суммарный спин в критической точке подчиняется ЦПТ. В этой модели ковариация спинов равна нулю для любых (h, β), в частности, для $\beta = \beta_{cr}$ и $h = h_{cr}$. Рассматриваемая модель описывается потенциалом следующего вида :

$$\widetilde{\Phi}_{\{t,s\}}(y_t, y_s) = \begin{cases} |y_t| \cdot |y_s|, & |t-s| = 1, \\ 0, & |t-s| \neq 1, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{Z}^\nu,$$

где $y_t, y_s \in Y = \{-1, 0, 1\}$. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y}) = \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} |y_t| \cdot |y_s| + \beta \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} |y_t| \cdot |\overline{y}_s| + h \sum_{t \in \Lambda} |y_t|, \quad y \in Y^\Lambda,\ \overline{y} \in Y^{\partial\Lambda}.$$

Перепишем гамильтониан $\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}$ в удобной для нас форме. Имеем

$$\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y}) = \frac{\beta}{8} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|y_s| - 1) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} |y_t| - \frac{\beta}{8} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} 1 +$$

$$+ \frac{\beta}{4} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|\overline{y}_s| - 1) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} |y_t| + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} |\overline{y}_s| - \frac{\beta}{4} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} 1 +$$

$$+ \frac{h}{2} \sum_{t \in \Lambda} (2|y_t| - 1) + \frac{h}{2} |\Lambda| = \frac{\beta}{8} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|y_s| - 1) + \frac{\beta}{4} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|\overline{y}_s| - 1) +$$

$$+ \frac{h}{2} \sum_{t \in \Lambda} (2|y_t| - 1) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} |y_t| + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} |\overline{y}_s| - \frac{\beta}{8} |\Lambda|^2 - \frac{\beta}{4} |\Lambda| \cdot |\partial\Lambda| + \frac{h}{2} |\Lambda| =$$

$$= \frac{\beta}{8} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|y_s| - 1) + \frac{\beta}{4} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|\overline{y}_s| - 1) + \frac{h}{2} \sum_{t \in \Lambda} (2|y_t| - 1) +$$

$$+ \frac{\beta}{2} \sum_{t \in \Lambda} |y_t| \cdot 2\nu - \frac{\beta}{8} |\Lambda|^2 - \frac{\beta}{4} |\Lambda| \cdot |\partial\Lambda| + \frac{h}{2} |\Lambda| + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} |\overline{y}_s|.$$

Окончательно получаем

$$\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y}) = \frac{\beta}{8} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|y_s| - 1) + \frac{\beta}{4} \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} (2|y_t| - 1)(2|\overline{y}_s| - 1) +$$

$$+\frac{h+\beta\nu}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2|y_t|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|+\frac{\beta\nu}{2}|\Lambda|-\frac{\beta}{8}|\Lambda|^2-\frac{\beta}{4}|\Lambda|\cdot|\partial\Lambda|= \quad (1)$$

$$=H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|+\frac{\beta\nu}{2}|\Lambda|-\frac{\beta}{8}|\Lambda|^2-\frac{\beta}{4}|\Lambda|\cdot|\partial\Lambda|,$$

где

$$2|y|-1=\{2|y_t|-1,\ t\in\Lambda\},\quad 2|\overline{y}|-1=\{2|\overline{y}_t|-1,\ t\in\partial\Lambda\}.$$

Воспользовавшись (1) выпишем соответствующее гиббсовское распределение :

$$Q_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=\frac{\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}{\sum_{y\in Y^\Lambda}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}.$$

Положим $\widetilde{Y}=\{0,1\}$. Тогда

$$\sum_{y\in Y^\Lambda}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}^\Lambda}2^{\sum_{t\in\Lambda}\widetilde{y}_t}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|\widetilde{y}|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=2^{|\Lambda|/2}\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}^\Lambda}2^{\frac{1}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2\widetilde{y}_t-1)}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|\widetilde{y}|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=2^{|\Lambda|/2}\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}^\Lambda}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\widetilde{y}|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=2^{|\Lambda|/2}\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\overline{y}|-1).$$

Далее

$$Q_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|}2^{\frac{1}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2y_t-1)}\frac{\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}{\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\overline{y}|-1)}=$$

$$=2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|}\frac{\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}{\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\overline{y}|-1)}=$$

$$=2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|}P_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1).$$

Рассмотрим теперь две совокупности граничных условий

$$\{y\in Y^\Lambda:\ y_t=0,\ t\in\Lambda\},\quad \{y\in Y^\Lambda:\ y_t\neq 0,\ t\in\Lambda\}.$$

Первое множество состоит только из нулевых конфигураций, второе содержит все конфигурации с ненулевыми компонентами. Обозначим через $Q^{\beta,h}_{\Lambda,0}$, $Q^{\beta,h}_{\Lambda,+}$ гиббсовские распределения, отвечающие нулевым граничным условиям и ненулевым условиям соответственно. Имеем

$$Q^{\beta,h}_{\Lambda,0}(y) = 2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|} P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,-}(2|y|-1),$$

$$Q^{\beta,h}_{\Lambda,+}(y) = 2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|} P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,+}(2|y|-1).$$

При $I \subset \Lambda$ справедливы следующие равенства :

$$(Q^{\beta,h}_{\Lambda,0})_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \sum_{\widetilde{y}\in Y^{\Lambda\setminus I}} 2^{-\sum_{t\in\Lambda\setminus I}|\widetilde{y}_t|} P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,-}(2|y|-1, 2|\widetilde{y}|-1) =$$

$$= 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,-}\right)_I (2|y|-1), \tag{2}$$

где

$$(2|y|-1, 2|\widetilde{y}|-1) = (2y_t-1,\ t\in I,\ 2\widetilde{y}_t-1,\ t\in\Lambda\setminus I).$$

Аналогично

$$(Q^{\beta,h}_{\Lambda,+})_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,+}\right)_I (2|y|-1). \tag{3}$$

Поскольку при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ пределы в правых частях (2) и (3) существуют, то получаем

$$(Q^{\beta,h}_0)_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{-}\right)_I (2|y|-1),$$

$$(Q^{\beta,h}_+)_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{+}\right)_I (2|y|-1), \quad y\in Y^I.$$

Отсюда ясно, что при $h+\beta\nu-\ln 2 \neq 0$ предельное гиббсовское распределение в нашей модели единственно (поскольку в этом случае при соответствующих значениях параметров единственность имеет место в модели Изинга) и происходит фазовый переход на прямой $h+\beta\nu-\ln 2 = 0$, $0<\beta<\infty$. Критическая точка имеет координаты $\beta^*_{cr} = 4\beta_{cr}$, $\quad h^*_{cr} = -\beta^*_{cr}\nu + \ln 2$, где β_{cr} – критическая обратная температура для модели Изинга.

Заметим, что гиббсовское распределение нашей модели в критической точке единственно, а следовательно, оно эргодично. Это распределение является трансляционно-инвариантным и обладает свойством мартингал-разности, поскольку потенциал рассматриваемой модели четный (см., например, [4], [5]).

Остается применить результат, доказанный автором, согласно которому любое однородное эргодическое, мартингал-разностное случайное поле второго порядка удовлетворяет ЦПТ (см. [5], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Синай, Теория Фазовых Переходов, Наука, М., 1986.
2. R. S. Ellis, Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. Springer-Verlag, 1985.
3. Г. О. Георги, Гиббсовские Меры и Фазовые Переходы, Наука, М., 1990.
4. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser.A.I. Math., vol. 17, pp. 105 – 110, 1992.
5. B. S. Nahapetian, "Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, ser. I, pp. 1539 – 1544, 1995.
6. Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Предельные теоремы для мартингал-разностных случайных полей", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 6, стр. 22 — 38, 1995.

19 сентября 1995

Институт математики
НАН Армении

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАРТИНГАЛ–РАЗНОСТНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

С. К. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В работе [1] Б. Нахапетян доказал центральную предельную теорему для мартингал–разностных случайных полей (см. также статью Нахапетяна в этом номере). В настоящей заметке этот результат обобщается и доказывается функциональная центральная предельная теорема для трансляционно–инвариантных, эргодических мартингал–разностных случайных полей.

1^0. Рассмотрим случайное поле $\{\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ со значениями в $\mathbb{R}^1$. Соответствующим вероятностным пространством будет $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^\nu}$ – пространство всех вещественных функций $x = \{x_t, \ t \in \mathbb{Z}^\nu\}$, $\mathcal{F}$ – σ–алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, а P – вероятностное распределение поля ξ_t. Для любого $V \subset \mathbb{Z}^\nu$ через $\mathcal{C}(V)$ обозначим семейство всех конечных подмножеств V, а через $\mathcal{F}(V)$ – σ–алгебру, порожденную случайными величинами ξ_t, $t \in V$.

Определение 1. Случайное поле $\{\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ называется мартингал–разностным случайным полем, если для каждого $t \in \mathbb{Z}^\nu$, $E|\xi_t| < \infty$ и

$$E\left(\xi_t / \mathcal{F}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \{t\})\right) = 0 \qquad \text{п. н.} \tag{1.1}$$

Отметим, что если $\{\xi_t, \ t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ – мартингал–разностное случайное поле, то $\{S_V, \ V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu)\}$, где $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$ – мартингал с частично упорядоченным параметрическим множеством $\mathcal{C}(\mathbb{Z}^\nu)$ (см., например, [3]).

Пусть $\mathbf{J}$ – σ–алгебра инвариантных подмножеств Ω :

$$\mathbf{J} = \{A \in \mathcal{F} : \ \tau_u A = A \text{ для любого } u \in \mathbb{Z}^\nu\},$$

где $\{\tau_u, u \in \mathbb{Z}^\nu\}$ есть группа трансляций, действующих на Ω по формуле $(\tau_u x)_t = x_{t-u}$, $t, u \in \mathbb{Z}^\nu$.

Определение 2. Случайное поле $\{\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ называется эргодическим, если его вероятностное распределение P тривиально на $\mathbf{J}$, т.е. $P(A) = 1$ или $P(A) = 0$ для каждого $A \in \mathbf{J}$.

Мы будем рассматривать трансляционно–инвариантные (однородные) случайные поляв : это означает, что $P(\tau_u A) = P(A)$ для любых $u \in \mathbb{Z}^\nu$, $A \in \mathcal{F}$.

Пусть V_n, $n = 1, 2, \ldots$ – следующая последовательность кубов :

$$V_n = \{u = (u_1, \ldots, u_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu : \quad 0 \le u_i \le n, \quad i = 1, \ldots, \nu\}$$

и $p = p(n)$ – функция, принимающая натуральные значения и удовлетворяющая следующим условиям : $p(n) \to \infty$, $p(n) = o(n)$, $n \to \infty$. Для любых $n = 1, 2, \ldots$ и мультииндексов $(i_1, \ldots, i_\nu)$ таких, что $1 \le i_j \le [n/p]$, $j = 1, \ldots, \nu$, положим

$$V_n(i_1, \ldots, i_\nu) = [(i_1 - 1)\, p, i_1\, p) \times \ldots \times [(i_\nu - 1)\, p, i_\nu\, p)\, .$$

Как обычно, под $[\cdot]$ понимается целая часть числа.

Очевидно $\{V_n(i_1, \ldots, i_\nu)\}$ – семейство $k_n = [n/p]^\nu$ подкубов с длиной стороны каждого p. Каким–либо образом пронумеруем элементы семейства $\{V_n(i_1, \ldots, i_\nu)\}$: $\Lambda_{n,1}, \ldots, \Lambda_{n,k_n}$.

Обозначив

$$\Lambda_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} \Lambda_{n,k},$$

имеем $V_n = \Lambda_n \cup Q_n$, где $Q_n = V_n \setminus \Lambda_n$.

Для заданного трансляционно–инвариантного поля $\{\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ положим

$$\eta_{n,j}(\omega) = \sum_{u \in \Lambda_{n,j}} \xi_u(\omega), \quad j = 1, \ldots, k_n,$$

$$S_{n,k}(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \eta_{n,j}(\omega), \quad k = 1, \ldots, k_n; \quad S_{n,0} = 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим последовательность случайных элементов из $D[0,1]$[1]

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma n^{\nu/2}} S_{[tk_n]}(\omega), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad 0 \le t \le 1, \tag{1.3}$$

[1]Обычно мы будем опускать первый индекс n ; например, мы будем писать $S_{[tk_n]}$ вместо $S_{n,[tk_n]}$

где $D[0,1]$ – пространство вещественных на $[0,1]$ функций, непрерывных справа и имеющих левосторонние пределеы в каждой точке (см. [2]).

Пусть $\mathcal{F}_{n,k} = \sigma(\eta_{n,1}, ..., \eta_{n,k})$, $k = 1, ..., k_n; n = 1, 2, ...$, – σ–алгебра, порожденная случайными величинами $\eta_{n,1}, ..., \eta_{n,k}$; $\mathcal{F}_{n,0} = \{\emptyset, \Omega\}$. Очевидно

$$E(S_{n,k}/\mathcal{F}_{n,k-1}) = S_{n,k-1} \qquad \text{п.н.} \quad k = 1, ..., k_n$$

откуда следует, что $(S_{n,k}, k = 1, ..., k_n)$ – мартингал.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ – трансляционно–инвариантное, эргодическое мартингал–разностное случайное поле с $0 < \sigma^2 = E\xi_0^2 < \infty$. Тогда распределения случайных функций X_n, определенных формулой (1.3) слабо сходятся к мере Винера W.*

Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении, фактически являющемся теоремой 19.4 из [2] с $\rho(t) = 0$ и $\sigma^2(t) = 1$, что соответствует процессу Винера.

Пусть задана последовательность случайных элементов $X_n \in D[0,1]$. Через $\omega(X_n, \delta)$ обозначим модуль непрерывности элемента X_n, соответствующий пространству $C[0,1]$. Пусть выполнены следующие условия :

Условие 1. При $0 \leq t < 1$ имеем

$$\text{(a)} \quad \lim_{h\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{h} E\left\{\left|E\left(X_n(t+h) - X_n(t)/\mathcal{F}_{[tk_n]}\right)\right|\right\} = 0,$$

$$\text{(б)} \quad \lim_{h\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{h} E\left\{\left|E\left((X_n(t+h) - X_n(t))^2/\mathcal{F}_{[tk_n]}\right) - h\right|\right\} = 0.$$

Условие 2. Имеем

$$\sup_{t\in[0,1]} \limsup_{n\to\infty} E\left(X_n^2(t)\right) < \infty.$$

Условие 3. При $0 \leq t < 1$

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{h\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{h} \int_{(X_n(t+h)-X_n(t))^2 \geq ah} (X_n(t+h) - X_n(t))^2 \, dP = 0.$$

Теорема 2. *Пусть $\{X_n, \ n \geq 1\}$ – последовательность случайных элементов из $D[0,1]$, для которых $\{X_n^2(t), \ n \geq 1\}$ равномерно интегрируема при каждом t,*

$X_n(0) \xrightarrow{P} 0$ и для каждых положительных ε и τ существует положительное δ такое, что

$$P(\omega(X_n,\delta) \geq \varepsilon) \leq \tau \tag{1.4}$$

для достаточно больших n. Если $\{X_n\}$ удовлетворяет условиям 1 — 3, то распределения случайных элементов X_n слабо сходятся к мере Винера W.

2^0. Доказательство Теоремы 1. Мы покажем, что функции X_n, определенные формулой (1.3), удовлетворяют условиям теоремы 2. Очевидно $X_n(0) = 0$. Проверим выполнение пункта (а) условия 1. Сначала заметим, что согласно (1.1)

$$E\left(\xi_t/\sigma(\xi_s, s \in V)\right) = 0 \qquad \text{п.н.}$$

для любых $V \subset \mathbb{Z}^\nu$ и $t \in \mathbb{Z}^\nu \setminus V$. Поэтому

$$E\left(\eta_{n,i}/\mathcal{F}_{n,i-1}\right) = 0, \qquad \text{п.н.} \quad i = 1,\dots,k_n. \tag{2.1}$$

Следовательно

$$E\left(X_n(t+h) - X_n(t)/\mathcal{F}_{[tk_n]}\right) = \frac{1}{\sigma n^{\nu/2}} E\left(S_{[(t+h)k_n]} - S_{[tk_n]}/\mathcal{F}_{[tk_n]}\right) = 0 \qquad \text{п.н..}$$

Теперь обратимся к пункту (б) условия 1. По (2.1) случайные величины $\{\eta_{ni}, \;\; i = 1,\dots,k_n\}$ ортогональны. Положим $r_n(h) = [n(t+h)] - [nt]$. Поскольку случайное поле $\{\xi_t, \; t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ мартингал-разностно и трансляционно-инвариантно, то

$$\begin{aligned}
&E\left\{\left|E\left((X_n(t+h) - X_n(t))^2/\mathcal{F}_{[tk_n]}\right) - h\right|\right\} = \\
&= \frac{1}{\sigma^2} E\left\{\left|\frac{1}{n^\nu} \sum_{i=[tk_n]+1}^{[tk_n]+r_n(h)} E\left(\sum_{t \in \Lambda_{n,i}} \left(\xi_t^2 - \frac{\sigma^2 n^\nu h}{r_n(h)\,|\Lambda_{n,i}|}\right)/\mathcal{F}_{[tk_n]}\right)\right|\right\} \leq \\
&\leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=[tk_n]+1}^{[tk_n]+r_n(h)} \frac{|\Lambda_{n,i}|}{n^\nu} E\left\{\left|\frac{1}{|\Lambda_{n,i}|} \sum_{t \in \Lambda_{n,i}} \left(\xi_t^2 - \frac{\sigma^2 n^\nu h}{r_n(h)\,|\Lambda_{n,i}|}\right)\right|\right\} = \\
&= \frac{r_n(h) p^\nu}{\sigma^2 n^\nu} E\left\{\left|\frac{1}{|\Lambda_{n,1}|} \sum_{t \in \Lambda_{n,1}} \left(\xi_t^2 - \frac{\sigma^2 n^\nu h}{r_n(h)\,|\Lambda_{n,1}|}\right)\right|\right\}.
\end{aligned}$$

Последний член стремится нулю при $n \to \infty$ согласно эргодической теореме (см., например, [4]). Итак условие 1 выполняется.

Аналогично

$$EX_n^2(t) = \frac{1}{\sigma^2 n^\nu} \sum_{i=1}^{[tk_n]} |\Lambda_{n,i}|\, E\xi_0^2 \le \frac{p^\nu \left[\frac{n}{p}\right]^\nu}{n^\nu} \to 1 \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

откуда следует условие 2.

Для случайной величины X и вещественного α положим

$$E_\alpha X = \int_{\{X \ge \alpha\}} X\, dP.$$

Заметим, что $E_\alpha(cX) = cE_{\alpha/c}X$, $c > 0$ и $E_\alpha X \le E_\alpha Y$ для любых случайных переменных X и Y таких, что $0 \le X \le Y$. Используя свойства E_α, получим

$$E_\alpha \left(X_n^2(t)\right) \le \frac{1}{\sigma^2} E_{\alpha\sigma^2} \left(\frac{1}{n^\nu} \max_{i \le k_n} S_{n,i}^2\right).$$

Поэтому для проверки равномерной интегрируемости $\{X_n^2(t),\, n \ge 1\}$ достаточно показать, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sup_n E_\alpha \left(\frac{1}{n^\nu} \max_{i \le k_n} S_{n,i}^2\right) = 0. \tag{2.2}$$

Сначала покажем, что из (2.2) следует (1.4), которое является условием плотности. Действительно, согласно теореме 8.4 из [2], (1.4) вытекает из следующего свойства : для любого положительного ε существуют λ, $\lambda > \sigma$ и целое n_0 такие, что при $n \ge n_0$

$$P\left(\max_{i \le k_n} |S_{n,i}| \ge \lambda n^{\nu/2}\right) \le \frac{\varepsilon}{\lambda^2}. \tag{2.3}$$

Для получения (2.3) из (2.2) заметим, что

$$P\left(\max_{i \le k_n} |S_{n,i}| \ge \lambda n^{\nu/2}\right) = P\left(\max_{i \le k_n} S_{n,i}^2 \ge \lambda^2 n^\nu\right) \le \frac{1}{\lambda^2} E_{\lambda^2}\left(\frac{1}{n^\nu} \max_{i \le k_n} S_{n,i}^2\right).$$

Наконец, нетрудно убедиться в том, что из (2.2) следует условие 3. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 остается проверить (2.2).

Согласно свойству мартингал–разности для каждого конечного $V \subset \mathbb{Z}^\nu$

$$E\left(\sum_{t \in V} \xi_t\right)^2 = \sigma^2 |V|. \tag{2.4}$$

Аналогично

$$E\left(\sum_{t \in V} \xi_t\right)^4 = \sum_{u,v \in V} E\left(\xi_u^2 \xi_v^2\right). \tag{2.5}$$

Предположим, что $|\xi_0| \le C$ п.н., где $C > 0$ – постоянная. Тогда из (2.5)

$$E\left(S_{k_n}^4\right) \le C^4 n^{2\nu}.$$

Хорошо известно (см. [5], гл. VII, теорема 3.4), что если неотрицательные случайные величины X_j, $j = 1, ..., n$ образуют полумартингал, то

$$E\left(\max_{1\le j\le n} X_j^\gamma\right) \le \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) E\left(X_n^\gamma\right), \quad \gamma > 1. \tag{2.6}$$

Следовательно

$$E\left(\max_{i\le k_n} S_{n,i}^2\right) \le 4E\left(S_{k_n}^2\right) \le 4\sigma^2 n^\nu \tag{2.7}$$

и

$$E\left(\max_{i\le k_n} S_{n,i}^4\right) \le \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(S_{k_n}^4\right) \le \left(\frac{4}{3}\right)^4 C^4 n^{2\nu}. \tag{2.8}$$

Для $c > 0$ определим

$$\xi_t^{(c)} = \begin{cases} \xi_t, & \text{если} \quad |\xi_t| \le c, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \qquad \overline{\xi}_t^{(c)} = \xi_t^{(c)} - E\left(\xi_t^{(c)}/\mathcal{F}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \{t\})\right)$$

и

$$\zeta_t^{(c)} = \xi_t - \overline{\xi}_t^{(c)} = \xi_t - \xi_t^{(c)} - E\left(\xi_t - \xi_t^{(c)}/\mathcal{F}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \{t\})\right).$$

Очевидно $\{\overline{\xi}_t^{(c)}, t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ и $\{\zeta_t^{(c)}, t \in \mathbb{Z}^\nu\}$ – мартингал-разностные случайные поля. Обозначим

$$T_{n,i}^{(c)} = \sum_t \overline{\xi}_t^{(c)}; \quad R_{n,i}^{(c)} = \sum_t \zeta_t^{(c)},$$

где суммирование $\sum_t$ проводится по всем $t \in \bigcup_{j=1}^i \Delta_{n,j}$.

В этих обозначениях $S_{n,i} = T_{n,i}^{(c)} + R_{n,i}^{(c)}$, $i = 1, ..., k_n$ и

$$\frac{1}{n^\nu} \max_{i\le k_n} S_{n,i}^2 \le \frac{2}{n^\nu} \max_{i\le k_n} \left(T_{n,i}^{(c)}\right)^2 + \frac{2}{n^\nu} \max_{i\le k_n} \left(R_{n,i}^{(c)}\right)^2. \tag{2.9}$$

Поскольку $|\overline{\xi}_t^{(c)}| \le 2c$, то из (2.6), а также из свойства мартингал разности поля $\{\overline{\xi}_t^{(c)}, t \in \mathbb{Z}^\nu\}$

$$E_\alpha\left(\frac{1}{n^\nu} \max_{i\le k_n} \left(T_{n,i}^{(c)}\right)^2\right) \le \frac{1}{\alpha} E\left(\frac{1}{n^{2\nu}} \max_{i\le k_n} \left(T_{n,i}^{(c)}\right)^2\right) \le \frac{1}{\alpha}\left(\frac{4}{3}\right)^4 (2c)^4. \tag{2.10}$$

Аналогичным образом

$$E_\alpha\left(\frac{1}{n^\nu} \max_{i\le k_n} \left(R_{n,i}^{(c)}\right)^2\right) \le 4E\left(\left(\zeta_0^{(c)}\right)^2\right). \tag{2.11}$$

Лемма 1 из [2, §21] утверждает, что для любых двух σ–алгебр $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}_2$ и любой случайной величины ξ с $E(\xi^2) < \infty$ выполняется следующее неравенство :

$$E\left\{(\xi - E(\xi/\mathrm{J}_2))^2\right\} \leq E\left\{(\xi - E(\xi/\mathrm{J}_1))^2\right\}. \tag{2.12}$$

Применяя (2.12), получаем

$$E\left\{\left(\zeta_0^{(c)}\right)^2\right\} \leq E\left\{\left(\xi_0 - \xi_0^{(c)}\right)^2\right\} - \left\{E\left(\xi_0 - \xi_0^{(c)}\right)\right\}^2 \leq E_{c^2}\xi_0^2.$$

Поэтому согласно (2.11)

$$E_\alpha\left(\frac{1}{n^\nu}\max_{i\leq k_n}\left(R_{n,i}^{(c)}\right)^2\right) \leq 4E_{c^2}\xi_0^2. \tag{2.13}$$

Используя неравенство

$$E_\alpha(X+Y) \leq 2E_{\alpha/2}(X) + 2E_{\alpha/2}(Y),$$

справедливое для любых случайных величин X, Y с $E|X| < \infty$ и $E|Y| < \infty$, из (2.9), (2.10) и (2.13) получим

$$E_\alpha\left(\frac{1}{n^\nu}\max_{i\leq k_n}S_{n,i}^2\right) \leq 4E_{\alpha/2}\left(\frac{1}{n^\nu}\max_{i\leq k_n}\left(T_{n,i}^{(c)}\right)^2\right) +$$

$$+4E_{\alpha/2}\left(\frac{1}{n^\nu}\max_{i\leq k_n}\left(R_{n,i}^{(c)}\right)^2\right) \leq A\left[\frac{c^4}{\alpha} + E_{c^2}\xi_0^2\right],$$

где $A > 0$ – абсолютная константа. Отсюда следует (2.2). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. S. Nahapetian, "Billingsley–Ibragimov theorem for martingale–difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, Serie I, pp. 1539 — 1544, 1995.
2. P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Willey, New York, 1968.
3. E. Wong, M. Sakai, "Martingales and stochastic integrals for processes with a multi–dimensional parameter", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 109 — 122, 1974.
4. А. Н. Ширяев, Вероятность, Наука, М., 1989.
5. J. L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953.

30 июля 1995

Институт математики
НАН Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 30 НОМЕРА 1 — 6 1995

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ЯЖ 411

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 30 НОМЕР 6 1995

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ: МАРТИНГАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА и УБЫВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

Сборник статей

Страницы

CONTENTS

VOLUME 30 NUMBER 6 1995

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS

(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

GIBBS RANDOM FIELDS:

MARTINGALE PROPERTIES and DECAY OF CORRELATIONS

Collection of Papers

PAGES