ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածները ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

СХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Сборник статей

под редакцией А. А. Талаляна

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Статьи настоящего сборника посвящены некоторым аспектам многомерного гармонического анализа. В них исследуются вопросы сходимости и единственности кратных рядов по системам Хаара, Уолша и по тригонометрической системе. В связи с этим, изучены также аддитивные функции многомерных сегментов и функции многих переменных, имеющих ограниченную вариацию.

Исследование кратных тригонометрических рядов, а также кратных рядов по другим ортонормированным системам обычно требует применения новых, отличных от одномерного случая, методов. Это обстоятельство в некоторой степени отражено в настоящем сборнике.

Сборник может интересовать специалистов по теории функций и по гармоническому анализу. В сборнике содержатся также результаты о сходимости интегральных средних Римана частных сумм кратных рядов Фурье, а также о равномерной сходимости и явлении Гиббса для двойных рядов Фурье–Уолша. Эти результаты могут интересовать специалистов по теории приближений.

Ереван, сентябрь 1995 *А. А. Талалян*

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВОИЧНЫХ КУБОВ И РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА[1]

Г. Г. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

В работе рассматриваются аддитивные функции двоичных кубов. Доказано, что если функция распределения мажоранты двоичных производных отношений удовлетворяет некоторому необходимому условию и почти всюду существует двоичная производная, то аддитивную функцию можно восстановить по ее производной. Указан процесс восстановления. Полученные результаты применены к рядам Хаара.

Сегменты вида $[m2^{-k},(m+1)2^{-k}]$, $m\in\mathbb{Z}$ назовем двоичными ранга k и их совокупность обозначим через Ω_k, $k\in\mathbb{Z}$. Через Ω_k^d обозначим совокупность d –мерных кубов ранга k, т. е.

$$\Omega_k^d=\left\{\Delta:\quad \Delta=\left[\frac{m_1}{2^k},\frac{m_1+1}{2^k}\right]\times\ldots\times\left[\frac{m_d}{2^k},\frac{m_d+1}{2^k}\right],\quad m_1,\ldots,m_d\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Пусть $\Omega^d=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Omega_k^d$. Функция Φ, определенная на Ω^d, называется аддитивной функцией двоичных кубов, если для любых $I,I_1,\ldots,I_n\in\Omega^d$, удовлетворяющих $I=\bigcup_{i=1}^n I_i$ и $\mathring{I}_i\cap\mathring{I}_j=\emptyset$ при $i\neq j$, где $\mathring{I}$ –внутренность I, имеет место

$$\Phi(I)=\sum_{i=1}^n\Phi(I_i).$$

Для точек $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ с двоично–иррациональными координатами x_i, определим производную $\Phi'(x)$ и мажоранту $\Phi^*(x)$ производной следующим образом :

$$\Phi'(x)=\lim_{x\in I_k\in\Omega_k^d}\frac{\Phi(I_k)}{\mu(I_k)},\qquad \Phi^*(x)=\sup_{x\in I\in\Omega^d}\frac{|\Phi(I)|}{\mu(I)}.$$

Здесь и ниже μ – мера Лебега.

---

[1]Работа частично финансирована АО “Прометевс”.

Теорема 1. *Пусть Φ – аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \in \Omega^d$. Если*

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \Phi^*(x) > \lambda\} = 0 \tag{1}$$

и $\Phi'(x) = 0$ почти всюду (п. в.) на I_0, то $\Phi(I) = 0$ для всех $I \in \Omega^d$ и $I \subset I_0$.

Теорема 2. *Пусть Φ – аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \in \Omega^d$. Если выполняется условие (1) и п.в. на I_0, $\Phi'(x) = f(x) \in L_1(I_0)$, то для всех $I \in \Omega^d$, $I \subset I_0$ имеет место*

$$\Phi(I) = \int_I f(x)\, dx. \tag{2}$$

Теорема 2 следует из теоремы 1, так как из $\Phi_1(I) = \int_I f(x)\, dx$, $I \in \Omega^d$, $I \subset I_0$ следует, что (см. [1], стр. 38 – 41)

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \Phi_1^*(x) > \lambda\} = 0. \tag{3}$$

Поэтому по теореме Лебега о дифференцировании интегралов в $\mathbb{R}^d$ $\Phi_1'(x) = f(x)$ п. в.. Следовательно аддитивная функция двоичных кубов $\Phi_1(\Delta) - \Phi(\Delta) \equiv 0$ и имеет место (2).

Теорема 1 является частным случаем более общей теоремы 3.

Теорема 3. *Пусть Φ – аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \subset \Omega^d$. Если для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$*

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_m \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \Phi^*(x) > \lambda_m\} = 0$$

и п. в. существует $\Phi'(x)$, то для всех $I \in \Omega^d$ и $I \subset I_0$

$$\Phi(I) = \lim_{m \to \infty} \int_I [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx, \tag{4}$$

где

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad |\varphi(x)| \le \lambda \\ 0, & \text{если} \quad |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Напомним, что функция $g(x)$ называется A–интегрируемой на множестве G, если

$$\mu\{x \in G: \quad |g(x)| > \lambda\} = o\left(\lambda^{-1}\right)$$

и существует предел

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_G [g(x)]_\lambda \, dx = (A) \int_G g(x) \, dx.$$

Из теоремы 3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть Φ –аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \in \Omega^d$. Если*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \Phi^*(x) > \lambda\} = 0$$

и $\Phi'(x) = f(x)$ п. в. на I_0, то для всех $I \in \Omega^d$ и $I \subset I_0$ имеет место

$$\Phi(I) = (A) \int_I f(x) \, dx. \tag{5}$$

Доказательство Теоремы 3. Очевидно, что достаточно доказать теорему в случае $I = I_0$. Разделим куб I_0 на 2^{kd} равных двоичных кубов $\Delta_i^{(k)}$, $i = 1, 2, ..., 2^{kd}$ и положим

$$\Phi_k(x) = \frac{\Phi(\Delta_i^{(k)})}{\mu(\Delta_i^{(k)})}, \quad \text{когда} \quad x \in \overset{\circ}{\Delta}{}_i^{(k)}. \tag{6}$$

Тогда п. в. существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \Phi_k(x) = \Phi'(x) = f(x) \tag{7}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_m \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \sup_k |\Phi_k(x)| > \lambda_m\} = 0.$$

Пусть ε – произвольное положительное число и $\varepsilon < 2^{-d} \cdot \mu(I_0)$. Тогда для достаточно больших m

$$\lambda_m \cdot \mu(E_m) < \varepsilon, \qquad \text{где} \quad E_m = \{x \in I_0: \quad \Phi^*(x) > \lambda_m\} \tag{8}$$

и при фиксированном m для достаточно больших k

$$\mu\{x \in I_0: \quad |\Phi_k(x) - \Phi'(x)| > \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{\lambda_m}. \tag{9}$$

Пусть k и m фиксированы и выполняются (8) и (9). Построим последовательность функций $\widetilde{\Phi}_p(x)$, $1 \le p \le k$ следующим образом. Положим $\widetilde{\Phi}_1(x) = \Phi_1(x)$. Функция $\widetilde{\Phi}_1(x)$ на кубах объема $2^{-d} \cdot \mu(I_0)$ принимает постоянные значения по модулю не больше чем λ_m. Пусть Δ - один из кубов постоянства функции $\widetilde{\Phi}_1(x)$. Разделим Δ на 2^d равных кубов $\Delta_1,\dots, \Delta_{2^d}$. Если на всех Δ_i, $i = 1, \dots, 2^d$ модуль функции $\Phi_2(x)$ не превосходит λ_m, то на Δ положим $\widetilde{\Phi}_2(x) = \Phi_2(x)$ и кубы Δ_i назовем кубами первого класса для $\widetilde{\Phi}_2(x)$. В противном случае $\widetilde{\Phi}_2(x) = \widetilde{\Phi}_1(x)$ на Δ и куб Δ назовем кубом второго класса для $\widetilde{\Phi}_2(x)$. Пусть построена функция $\widetilde{\Phi}_p(x)$. Построим функцию $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$ следующим образом. Кубы второго класса функции $\widetilde{\Phi}_p(x)$ остаются кубами второго класса для функции $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$ и на них положим $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x) = \widetilde{\Phi}_p(x)$. Если Δ –куб первого класса для $\widetilde{\Phi}_p(x)$, то разделим Δ на 2^d равных кубов $\Delta_1,\dots, \Delta_{2^d}$. Если на всех Δ_i, $i = 1, \dots, 2^d$ модуль функции $\Phi_{p+1}(x)$ не превосходит λ_m, то положим $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x) = \Phi_{p+1}(x)$ на Δ и кубы Δ_i назовем кубами первого класса для $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$. В противном случае куб Δ назовем кубом второго класса для $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$ и на Δ положим $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x) = \widetilde{\Phi}_p(x)$. Итак, функция $\widetilde{\Phi}_k(x)$ принимает постоянные значения на двоичных кубах $\Delta_1,\dots, \Delta_q$ (вообще говоря, разных рангов) и

$$\widetilde{\Phi}_k(x) = \frac{\Phi(\Delta_i)}{\mu(\Delta_i)}, \quad \text{когда} \quad x \in \mathring{\Delta}_i. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$|\widetilde{\Phi}_k(x)| \le \lambda_m. \tag{11}$$

Положим

$$\Gamma_1 = \{i: \ \Delta_i - \text{куб первого класса}\} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \{i: \ \Delta_i - \text{куб второго класса}\}.$$

Заметим, что если Δ_i –куб второго класса, то по меньшей мере на 2^{-d} порции Δ_i имеем $\Phi^*(x) > \lambda_m$. Поэтому

$$E_m \subset \bigcup_{i\in\Gamma_2} \Delta_i \quad \text{ и } \quad \mu\left(\bigcup_{i\in\Gamma_2} \Delta_i\right) \le 2^d \cdot \mu(E_m). \tag{12}$$

Положим

$$\Gamma_3 = \{i \in \Gamma_1 : \quad |\widetilde{\Phi}_k(x) - \Phi'(x)| \le \varepsilon, \quad \text{когда} \quad x \in \mathring{\Delta}_i\}, \quad \Gamma_4 = \Gamma_1 \setminus \Gamma_3. \tag{13}$$

Поскольку $\widetilde{\Phi}_k(x) = \Phi_k(x)$ на $\bigcup_{i\in\Gamma_1} \Delta_i$, то из (9) следует, что

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\Gamma_4} \Delta_i\right) < \frac{\varepsilon}{\lambda_m}.$$

Ясно, что (см. (8) и (10))

$$\begin{aligned}
&\left|\Phi(I_0) - \int_{I_0} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx\right| = \\
&= \left|\sum_{i=1}^{q} \Phi(\Delta_i) - \int_{E_m} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx - \int_{I_0\setminus E_m} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx\right| \le \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{q} \mu(\Delta_i)\,\frac{\Phi(\Delta_i)}{\mu(\Delta_i)} - \int_{I_0\setminus E_m} \Phi'(x)\, dx\right| + \lambda_m \mu(E_m) \le \\
&\le \left|\int_{I_0} \widetilde{\Phi}_k\, dx - \int_{I_0\setminus E_m} \Phi'(x)\, dx\right| + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее, учитывая, что $\bigcup_{i\in\Gamma_3} \Delta_i \subset I_0 \setminus E_m$ (см. (12)), получаем (см. также (13), (11), (8) и (14))

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{I_0} \widetilde{\Phi}_k\, dx - \int_{I_0\setminus E_m} \Phi'(x)\, dx\right| \le \left|\int_{\cup\Gamma_3 \Delta_i} \widetilde{\Phi}_k\, dx - \int_{\cup\Gamma_3 \Delta_i} \Phi'(x)\, dx\right| + \\
&+ \left|\int_{\cup\Gamma_2\cup\Gamma_4 \Delta_i} \widetilde{\Phi}_k\, dx\right| + \left|\int_{(I_0\setminus E_m)\setminus\cup\Gamma_3 \Delta_i} \Phi'(x)\, dx\right| \le \\
&\le \varepsilon\mu(I_0) + \lambda_m\mu\left(\bigcup_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} \Delta_i\right) + \lambda_m\mu\left((I_0\setminus E_m)\setminus\left(\bigcup_{\Gamma_3}\Delta_i\right)\right) \le \\
&\le \varepsilon\mu(I_0) + 2\lambda_m\mu\left(\bigcup_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} \Delta_i\right) \le \varepsilon\mu(I_0) + 2\lambda_m\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_m} + 2^d\mu(E_m)\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (9), (14) и (15) следует

$$\left|\Phi(I_0) - \int_{I_0} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx\right| \le \varepsilon(\mu(I_0) + 3 + 2^{d+1}).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Любую аддитивную функцию двоичных кубов Φ можно аддитивно продолжить на семейство двоичных параллелепипедов следующим образом. Для

$$I=\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right]\times\ldots\times\left[\frac{m_d}{2^{k_d}},\frac{m_d+1}{2^{k_d}}\right] \quad \text{и} \quad I=\bigcup_p I_p,\ I_p\in\Omega^d,\ \mathring{I}_p\cap\mathring{I}_{p'}=\emptyset,\ p\neq p,'$$

положим $\Phi(I)=\sum\limits_p \Phi(I_p)$. Очевидно, что в теоремах 3 и 4 соотношения (4) и (5) будут выполняться для любого двоичного параллелепипеда.

Замечание 2. Легко видеть, что последовательность функций $\Phi_k(x)$, определяемая (6), является регулярным мартингалом. Поэтому из условия $\sup_k|\Phi_k(x)|<$ $<+\infty$ п. в. следует существование $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_k(x)$ (см. [2] или [3], стр. 242). Следовательно, существование производной в теоремах 1 – 4 (а в теоремах 5 – 8 п. в. сходимость ряда) не является дополнительным условием.

Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ –ортонормированная система Хаара. Тогда любой ряд по кратной системе Хаара

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)=\sum_{\substack{n_i\in\mathbf{N}\\ i=1,\ldots,d}} a_{n_1\ldots n_d}\chi_{n_1}(x_1)\ldots\chi_{n_d}(x_d) \tag{16}$$

порождает аддитивную функцию двоичных кубов по формуле

$$\Phi(\Delta)=\lim_{N\to\infty}\int_\Delta\sum_{\overline{n}\leq N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\,dx, \quad \text{если} \quad \Delta\in\Omega^d, \tag{17}$$

где запись $\overline{n}\leq N$ означает, что $\max\limits_{1\leq i\leq d}\{n_i\}\leq N$. Предел в правой части (17) существует для всех $\Delta\in\Omega^d$, так как для достаточно больших $N=N(\Delta)$

$$\int_\Delta a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\,dx=0, \quad \text{когда} \quad \max_{1\leq i\leq d}\{n_i\}\geq N.$$

Для всех x с двоично–иррациональными координатами из (17) следует

$$\Phi'(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{\overline{n}\leq N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x), \quad \text{и} \quad \Phi^*(x)=\sup_N\left|\sum_{\overline{n}\leq N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\right|. \tag{18}$$

Используя это и применяя теорему 3, получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть кубические суммы кратного ряда Хаара (16) п. в. сходятся к $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \mu\{x \in [0,1]^d : \quad \Phi^*(x) > \lambda_m\} = 0.$$

Тогда для всех $n = (n_1, ..., n_d)$

$$a_n = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)]_{\lambda_m^{\overline{n}}}\,dx,$$

где $\lambda_m^{\overline{n}} = \lambda_m \cdot \|\chi_{\overline{n}}\|_\infty$.

Доказательство. Фиксируем некоторое $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$. Функция $\chi_{\overline{n}}(x)$ принимает значения $\pm\|\chi_{\overline{n}}\|_\infty$ на двоичных параллелепипедах $\Delta_1, ..., \Delta_{2^d}$, а вне $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ равна нулю. Для двоичного куба $I \subset \Delta_i$, положим

$$\Phi_i(I) = \lim_{N\to\infty} \int_I \chi_{\overline{n}}(x) \sum_{\overline{k}\le N} a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(x)\,dx, \qquad i = 1, ..., 2^d. \tag{19}$$

Ясно, что функция $\Phi_i(x)$ является аддитивной функцией двоичных кубов

$$\Phi_i'(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\overline{k}\le N} a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(x)\chi_{\overline{n}}(x) = f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x) \qquad \text{п. в.} \qquad \text{и} \tag{20}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \mu\{x \in \Delta_i : \quad \Phi_i^*(x) > \|\chi_{\overline{n}}\|_\infty \cdot \lambda_m\} = 0. \tag{21}$$

В силу теоремы 3 и замечания 1, из (20) и (21) следует

$$\Phi_i(\Delta_i) = \lim_{m\to\infty} \int_{\Delta_i} [f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)]_{\lambda_m^{\overline{n}}}\,dx, \qquad i = 1, ..., 2^d. \tag{22}$$

Складывая соотношения (24) и учитывая аддитивность интеграла, получаем (см. также (19))

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)]_{\lambda_m^{\overline{n}}}\,dx = \sum_{i=1}^{2^d} \Phi_i(\Delta_i) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{[0,1]^d} \sum_{\overline{k}\le N} a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(x)\chi_{\overline{n}}(x)\,dx = a_{\overline{n}}.$$

Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 немедленно следуют теоремы 6 и 7.

Теорема 6. *Если кубические суммы ряда* $\sum\limits_{\overline{n}\le N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *п. в. сходятся к* $f(x)$ *и*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mu\left\{x\in[0,1]^d:\quad \sup_N \left|\sum_{\overline{n}\le N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\right| > \lambda\right\} = 0, \tag{23}$$

то все функции $f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)$, $\overline{n}\in\mathbf{N}^d$ *A–интегрируемы и*

$$a_{\overline{n}} = (A)\int_{[0,1]^d} f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)\,dx,\qquad \overline{n}\in\mathbf{N}^d.$$

Теорема 7. *Если кубические суммы ряда* $\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *п. в. сходятся к интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *и*

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\{x\in[0,1]^d:\quad \Phi^*(x)>\lambda\} = 0, \tag{24}$$

то ряд $\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *является рядом Фурье–Хаара функции* $f(x)$, *т. е.*

$$a_{\overline{n}} = \int_{[0,1]^d} f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)\,dx,\qquad \overline{n}\in\mathbf{N}^d. \tag{25}$$

Ясно, что условие (23) сильнее, чем (24). Но тем не менее теорема 7 не следует из теоремы 6. Можно построить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, который удовлетворяет (23) и п. в. сходится к некоторой функции $f(x)$, но не выполняется (25). (Предельная функция может оказаться не интегрируемой по Лебегу, см. [4].) Сопоставляя соотношения (3), (17), (18) с теоремой 7, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Ряд* $\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *будет рядом Фурье некоторой интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда выполняется (24) и*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{\overline{n}\le N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x) = f(x)\qquad \text{п. в. на}\quad [0,1]^d.$$

Теперь рассмотрим ряды Хаара одной переменной.

Лемма. *Для рядов Хаара* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *следующие условия эквивалентны :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > \lambda\right\} = 0 \qquad \text{и} \tag{26}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть выполняется (27). Ясно, что множество

$$E_\lambda = \left\{x\in[0,1]:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \tag{28}$$

является объединением двоичных сегментов и (см. [5], стр. 104 – 105)

$$\left[\sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} \le \lambda, \tag{29}$$

где $\{n\}$ –носитель функции $\chi_n(x)$. Очевидно, что

$$\begin{gathered}\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > \lambda\right\} \subset \\ \subset \left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N\left|\sum_{\substack{n=1\\ \{n\}\not\subset E_\lambda}}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > \lambda\right\}\bigcup E_\lambda.\end{gathered} \tag{30}$$

Известно, что система Хаара является системой типа (2,2) (см. [5], стр. 83). Следовательно

$$\begin{gathered}\mu\left\{x\in[0,1]:\ \sup_N\left|\sum_{\substack{n=1\\ \{n\}\not\subset E_\lambda}}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > \lambda\right\} \le \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 \sup_N\left|\sum_{\substack{n=1\\ \{n\}\not\subset E_\lambda}}^{N} a_n\chi_n(x)\right|^2 dx \le \\ \le \frac{c}{\lambda^2}\int_0^1 \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2\chi_n^2(x)\,dx,\end{gathered} \tag{31}$$

где c –абсолютная постоянная. Положим

$$E_\lambda^k = \left\{x\in[0,1]:\quad \frac{\lambda}{2^k} < \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} \le \frac{\lambda}{2^{k-1}}\right\},\qquad k=1,2,... \tag{32}$$

Из (29) и (32) имеем

$$\begin{gathered}\int_0^1 \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2\chi_n^2(x)\,dx = \int_{E_\lambda} \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2\chi_n^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_\lambda^k} \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2\chi_n^2(x)\,dx \le \\ \le \lambda^2\mu(E_\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_\lambda^k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\,dx \le \\ \le \lambda^2\mu(E_\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{2^{2k-2}}\,\mu(E_\lambda^k).\end{gathered} \tag{33}$$

Из (30), (31) и (33) следует

$$\lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0,1]: \quad \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x) \right| > \lambda \right\} \le$$

$$\le \lambda \mu(E_\lambda) + c\, \lambda \mu(E_\lambda) + 4c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\lambda}{2^k}\, \mu(E_\lambda^k) \right). \tag{34}$$

Очевидно, что при фиксированном k, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left[\lambda\, 2^{-k}\, \mu(E_\lambda^k) \right] = 0$ (ср. с (27) и (32)). Поэтому (26) следует из (34), (27) и (28).

Теперь пусть выполняется (26). Положим

$$B_\lambda = \left\{ x \in [0,1]: \quad \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x) \right| > \lambda \right\}. \tag{35}$$

Множество B_λ можно представить в виде $B_\lambda = \bigcup_m I_m$, где I_m – двоичный сегмент ранга k_m, $\mathring{I}_m \cap \mathring{I}_{m'} = \emptyset$ при $m \ne m'$. Если I_m^* – двоичный сегмент ранга $k_m - 1$, содержащий I_m, то

$$I_m^* \not\subset B_\lambda. \tag{36}$$

Для множества

$$B_\lambda^* = \bigcup_m I_m^* \tag{37}$$

имеем $\mu(B_\lambda^*) \le 2\mu(B_\lambda)$ и

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ \{n\} \not\subset B_\lambda^*}}^{N} a_n \chi_n(x), \qquad \text{когда} \quad x \notin B_\lambda^*. \tag{38}$$

Из (35) — (38) получаем

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \{n\} \not\subset B_\lambda^*}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| = \sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x) \right|, \qquad \text{когда} \quad x \notin B_\lambda^* \tag{39}$$

и

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \{n\} \not\subset B_\lambda^*}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \le \lambda \qquad \text{для всех} \quad x. \tag{40}$$

Очевидно, что

$$\left\{x:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \subset$$
$$\subset B_\lambda^* \bigcup \left\{x:\quad \left[\sum_{\{n\}\not\subset B_\lambda^*} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \tag{41}$$

и

$$\mu\left\{x:\quad \left[\sum_{\{n\}\not\subset B_\lambda^*} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \le \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 a_n^2\chi_n^2(x)\,dx. \tag{42}$$

Обозначая

$$B_{\lambda,k} = \left\{x \in [0,1]:\quad \frac{\lambda}{2^k} < \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| \le \frac{\lambda}{2^{k-1}}\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

из (39) — (42) получаем

$$\lambda\cdot\mu\left\{x \in [0,1]:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \le$$
$$\le 4\lambda\mu(B_\lambda) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_{\lambda,k}} \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| dx \le \tag{43}$$
$$\le 4\lambda\mu(B_{\lambda,k}) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{\lambda}{2^k}\mu(B_{\lambda,k})\right).$$

Так как для каждого k, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\, 2^{-k}\mu(B_{\lambda,k})\right] = 0$, из (43) получим (27). Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть выполнено условие (26). Тогда для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,\chi_n(x)$ является рядом Фурье–Хаара в смысле A–интегрирования.*

Доказательство. В силу леммы из (26) следует (27). Поэтому для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ имеем

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x \in [0,1]:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2\, a_n^2\,\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} = 0. \tag{44}$$

Опять применяя лемму, из (44) получаем

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n\, a_n\, \chi_n(x)\right| > \lambda\right\} = 0.$$

Остается применить теорему 6. Теорема 9 доказана.

Условию (26) удовлетворяют ряды Фурье–Хаара всех интегрируемых по Лебегу функций. Поэтому, полагая $\varepsilon_n = 0$ или 1, получаем седствие теоремы 9.

Следствие (Л. А. Балашов [6]) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, \chi_n(x)$ является рядом Фурье–Хаара некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$. Тогда всякий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\, \chi_n(x)$, где $\varepsilon_n = 0$ или 1, сходится п. в. к некоторой A–интегрируемой функции $g(x)$ и является ее рядом Фурье в смысле A–интегрирования.

В связи с полученными результатами возникает следующий вопрос : Пусть функция $f(x)$ A–интегрируема на любом двоичном сегменте $[m\,2^{-k}, (m+1)\,2^{-k}]$ и $\sum\limits_{n=1\infty} a_n\, \chi_n(x)$ – ее ряд Фурье–Хаара в смысле A–интегрирования, т. е.

$$a_n = (A)\int_0^1 f(x)\,\chi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Будет ли в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, \chi_n(x)$ удовлетворять условию (26) ? Ниже мы покажем, что ответ отрицательный.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена на $[-1,1]$ и монотонно убывающая на $[0,1]$. Кроме того

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\{x\in[0,1]:\quad \varphi(x)>\lambda\} = 0, \quad \text{и} \quad \varphi(-x) = -\varphi(x). \tag{45}$$

Очевидно, что $\varphi(x)$ A–интегрируема на $[-1,1]$ и существуют неотрицательные числа $x_1 > \ldots > x_k > x_{k+1} > \ldots$ с условиями (см. (45))

$$x_k < 2^{-k-2} \qquad \text{и} \quad k < \int_{x_{k+1}}^{x_k} \varphi(x)\,dx \le k+1. \tag{46}$$

Пусть $f_k(x) = \varphi(x)\,\chi_{G_k}(x)$, где $\chi_{G_k}(x)$ –характеристическая функция множества $G_k = [-x_k, -x_{k+1}] \cup [x_{k+1}, x_k]$. Положим $\xi_k = 2^{-k} + 2^{-k-1}$ и $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x - \xi_k)$.

Нетрудно видеть, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ равноизмеримы и $f(x)$ A– интегрируема на любом сегменте $[a,b]\subset[0,1]$. Более того, $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $[\varepsilon,1]$, $\varepsilon>0$.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$ – ряд Фурье–Хаара функции $f(x)$ в смысле A–интегрирования и $x\in[2^{-k}+2^{-k-1},2^{-k+1}]$. Тогда (см. (49))

$$\sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right|\ge\sum_{n=1}^{2^{k+1}} a_n\,\chi_n(x)=2^{k+1}\int_{x_{k+1}}^{x_k} f(x)\,dx>k\,2^{k+1}. \tag{47}$$

Учитывая, что $\mu([2^{-k}+2^{-k-1},2^{-k+1}])=2^{-k-1}$, из (47) получаем

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad\sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right|>\lambda\right\}>0.$$

Следовательно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$ не выполнено (26).

Напомним (см. [7], [8]), что функция $f(x)$ называется UA–интегрируемой (равномерно A–интегрируемой) на $[0,1]$, если последовательность

$$F_n(x)=\int_0^x [f(t)]_n\,dt,\qquad n=1,2,\dots \tag{48}$$

сходится равномерно.

Оказывается, что даже UA–интегрируемость функции $f(x)$ не обеспечивает выполнение (26). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно в предыдущем примере функции $f_k(x)$, $k=1,2,\dots$ из отрезка $[-x_k,x_k]$ продолжить с периодом $2x_k$ и положить $\Psi_k(x)=f_k(k^3x)\,\chi_{G_k}(x)$ и $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Psi_k(x-\xi_k)$.

Покажем, что из условия (26) не следует UA–интегрируемость предельной функции ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$.

Нетрудно убедиться, что если $\varepsilon_k\downarrow 0$ и $2^k<n_k\le 2^{k+1}$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad\sup_N\left|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\,2^{k/2}\chi_{n_k}(x)\right|>\lambda\right\}=0.$$

Пусть числа ε_k и m_i выбраны так, чтобы $\varepsilon_1>\dots>\varepsilon_k>\dots>0$ и $\sum\limits_{k=m_i+1}^{m_{i+1}}\varepsilon_k>i$.

Положим $x_i=\xi_i+2^{-i}/3$, где $\xi_i=\sum\limits_{j=1}^{i-1}2^{-j}$, и выберем n_k так, чтобы $x_i\in\{n_k\}$ для

$k \in [m_i + 1, m_{i+1}]$. Ясно, что

$$\int_{\xi_i}^{x_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \varepsilon_k \, 2^{k/2} \chi_{n_k}(x)\, dx = \frac{1}{6} \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \varepsilon_k > \frac{i}{6}. \tag{49}$$

Пусть $f(x)$ - поточечный предел ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \, 2^{k/2} \chi_{n_k}(x)$. Тогда $f(x)$ ограничена на любом отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ и, как видно из (49)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\xi_i}^{x_i} [f(x)]_n \, dx > \frac{i}{6}. \tag{50}$$

Из (48) следует, что функции (47) не являются равномерно ограниченными. Следовательно, функции $F_n(x)$ не могут равномерно сходиться. Значит функция $f(x)$ не является UA–интегрируемой. В заключение отметим, что вопросы, близкие к рассмотренным здесь, были исследованы в работах [9 – 16].

ABSTRACT. **The paper studies additive functions of dyadic cubes. It is proved, if the distribution function of majorant of dyadic derivative ratio satisfies to some necessary condition and almost everywhere there exists dyadic derivative, then the additive function may be restored by its derivative. The process of restoration is indicated. The receiving results to Haar series are applied.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гусман, Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$, Москва, Мир, 1978.
2. Y. S. Chow, "Convergence theorems of martingales," Z. Wahrsch. und Ver. Gebiete, vol. 1, pp. 340 - 346,1962.
3. R. F. Gundy, "Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 124, № 2, pp. 228 - 248, 1966.
4. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических рядах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, т. 52, № 3, стр. 17 - 34, 1992.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука, 1984.
6. Л. А. Балашов, "Обобщенное интегрирование рядов по системе Хаара," Тезисы докладов Всесоюзной школы по теории функций, Ереван, 1987.
7. О. Д. Церетели, "О неопределенном A–интеграле и о рядах Фурье (A)," Studia Math., vol. 22, № 1, pp. 59 - 63, 1962.
8. О. Д. Церетели, "О неопределенном A–интеграле и о рядах Фурье (A)", Сообщ. АН Груз. ССР, т. 29, № 2, стр. 129 - 134, 1962.
9. А. Б. Александров, "Об A–интегрируемости граничных значений гармонических функций", Мат. заметки, т. 30, стр. 59 - 72, 1981.
10. А. А. Талалян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 132, № 1, стр. 104 - 130, 1987.
11. А. А. Талалян, "О единственности и интегрируемости кратных тригонометрических рядов", Труды МИАН, т. 190, стр. 234 - 254, 1989.

12. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 180, № 11, стр. 1462 - 1474, 1989 .
13. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 184, № 11, стр. 93 - 130, 1993.
14. С. Ш. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегментов и тригонометрических рядов", Мат. заметки, т. 56, № 4, стр. 38 - 47, 1994.
15. Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. заметки, т. 46, № 2, стр. 51 - 58, 1989.
16. Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. заметки, в печати.

2 сентября 1995 Ереванский государственный университет

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

К. А. Навасардян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

В статье доказывается следующая теорема : пусть $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$–последовательность, удовлетворяющая условию $0 < \varepsilon_{\overline{m}} \leq \varepsilon_{\overline{n}}$, если $\overline{m} \geq \overline{n}$ и $\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} \varepsilon_{\overline{n}}^2 = \infty$ для любого $\overline{M}$, то существует функция $f(\overline{x}) \in \bigcap_{p<2} L_p[0,1]^k$ с коэффициентами Фурье–Уолша $|\hat{f}(\overline{n})| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$, ряд Фурье–Уолша которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков $\{\lambda_{\overline{n}}\}$, $\lambda_{\overline{n}} = \pm 1$ ряд $\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} \lambda_{\overline{n}} \hat{f}(\overline{n}) W_{\overline{n}}(\overline{x})$ является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть S – некоторый класс измеримых функций. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется *универсальным в S относительно знаков*, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность знаков $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = \pm 1$, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится почти всюду (п. в.) к $F(x)$.

Ряд (1) называется *универсальным относительно подрядов в классе S*, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность чисел $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = 0$ или 1, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится п. в. к $F(x)$.

Ряд (1) называется *универсальным относительно перестановок в классе S*, если для лйюбой функции $F(x) \in S$ члены ряда (1) можно переставить так, чтобы полученный ряд сходился к $F(x)$ п. в.

Первые примеры (в выше указанных смыслах) универсальных тригонометрических рядов были построены в работах [1] – [5]. Отметим некоторые из них.

Теорема А. *(А. А. Талалян [3]) Существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\tag{2}$$

обладающий следующим свойством : для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0,2\pi]$ ($f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры) и для любого натурального N найдется подряд этого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_kx+b_{n_k}\sin n_kx),\quad N<n_1<n_2<\cdots,$$

сходящийся к $f(x)$ п.в. на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходящийся к $f(x)$ по мере на $[0,2\pi]$.

В работе [4] Г. М. Мушегяном описан некоторый класс ортогональных систем, для которых существуют универсальные ряды относительно перестановок в классе всех измеримых функций. В частности, в этот класс входят системы Уолша, Хаара и тригонометрическая система.

Теорема В. *(Н. Б. Погосян [8]) Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ -последовательность чисел, удовлетворяющая условиям $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$ и $\{\varepsilon_n\}\notin l_2$. Тогда существует функция $f(x)\in\cap_{p<2}L_p[0,2\pi]$ с коэффициентами Фурье a_n,b_n, $|a_n|+|b_n|\le\varepsilon_n$, $n\ge 1$, для которой тригонометрический ряд (2) является универсальным в классе п.в. конечных измеримых функций, одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов.*

Об универсальных ортогональных рядах подробно можно узнать из [6] и [7].

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем некоторые обозначения. Пусть $\overline{m}=(m_1,...,m_k)$ и $\overline{n}=(n_1,...,n_k)$-векторы из $\mathbb{N}_0^k$, где $\mathbb{N}_0$ -множество целых неотрицательных чисел. Обозначим через $|\overline{n}|$ сумму $n_1+\cdots+n_k$, а символом $2^{\overline{n}}$ вектор $(2^{n_1},...,2^{n_k})$. Сумму и разность двух векторов, как обычно, будем определять покоординатно, т. е.

$\overline{m} \pm \overline{n} = (m_1 \pm n_1, ..., m_k \pm n_k)$. Если M –неотрицательное целое число, то $\overline{M} = (M, ..., M) \in \mathbb{N}_0^k$. Запись $\overline{m} \leq \overline{n}$ ($\overline{m} < \overline{n}$) будет означать $m_i \leq n_i$ ($m_i < n_i$) для всех $i = 1, ..., k$. Для $\overline{x} = (x_1, ..., x_k) \in [0,1]^k$ обозначим через $W_{\overline{n}}(\overline{x})$ функцию $W_{n_1}(x_1) \cdots W_{n_k}(x_k)$, где $W_n(x)$ –система Уолша. Положим

$$\sum_{\overline{p}=\overline{n}}^{\overline{m}} \varphi_{\overline{p}}(\overline{x}) = \sum_{p_1=n_1}^{m_1} \cdots \sum_{p_k=n_k}^{m_k} \varphi_{\overline{p}}(\overline{x}).$$

Мы будем рассматривать мажоранту

$$S^*(f, \overline{x}) = \sup_{\overline{n}} \left| \sum_{\overline{p}=\overline{0}}^{\overline{n}} \hat{f}(\overline{p}) W_{\overline{p}}(\overline{x}) \right|,$$

где

$$\hat{f}(\overline{p}) = \int_{[0,1]^k} f(\overline{x}) W_{\overline{p}}(\overline{x}) \, d\overline{x}.$$

В настоящей статье мы докажем следующий неполный аналог Теоремы B для кратных рядов по системе Уолша.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_{\overline{n}}\} = \{\varepsilon_{n_1,...,n_k}\}$ *удовлетворяет следующим условиям :* $0 < \varepsilon_{\overline{m}} \leq \varepsilon_{\overline{n}}$ *при* $\overline{m} \geq \overline{n}$ *и* $\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} \varepsilon_{\overline{n}}^2 = \infty$ *для любого* M. *Тогда существует функция* $f(\overline{x}) \in \cap_{p<2} L_p[0,1]^k$, *с коэффициентами Фурье* $|\hat{f}(\overline{n})| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$, *ряд Фурье которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков* $\{\gamma_{\overline{n}}\}$, $\gamma_{\overline{n}} = \pm 1$, *ряд*

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} \gamma_{\overline{n}} \hat{f}(\overline{n}) W_{\overline{n}}(\overline{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

Непосредсдственным следствием этой теоремы является следующая теорема, доказанная в работе [9].

Теорема C. *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ *удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда существует нуль-ряд* $\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} a_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ *с коэффициентами* $|a_{\overline{n}}| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим

$$H = \{\overline{n} \in \mathbb{N}_0^k : n_1 \geq \cdots \geq n_k\}, \quad B(\overline{n}) = 2^{|\overline{n}|}\varepsilon_{2^{\overline{n}}}^2.$$

Для любого M имеем $\sum\limits_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty$. Без ограничения общности можно считать, что для любого M

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in H}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty. \tag{3}$$

Рассмотрим следующее подмножество $H_1 = \left\{\overline{n} \in H : B(\overline{n}) > 2^{-|\overline{n}|/(2k)}\right\}$. Ясно, что

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{0}\\ \overline{n}\in H\setminus H_1}}^{\infty} B(\overline{n}) \leq \sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} 2^{-\frac{|\overline{n}|}{2k}} = \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{-\frac{n_1}{2k}} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} 2^{-\frac{n_k}{2k}} < \infty.$$

Поэтому для любого M (см. также (3)) $\sum\limits_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in H_1}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty$. Нетрудно убедиться, что существует последовательность $\{\alpha_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in H_1}$, $0 < \alpha_{\overline{n}} \leq 1$, удовлетворяющая следующим условиям :

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in H_1}}^{\infty} \alpha_{\overline{n}} B(\overline{n}) = \infty \quad \text{для каждого} M, \tag{4}$$

$$\lim_{\substack{\overline{n}\to\infty\\ \overline{n}\in H_1}} \alpha_{\overline{n}} B(\overline{n}) = 0, \quad \alpha_{\overline{n}} B(\overline{n}) \geq 2^{-\frac{|\overline{n}|}{2k}}, \quad \overline{n} \in H_1.$$

Для $2^{\overline{n}-\overline{1}} \leq \overline{m} < 2^{\overline{n}}$, $\overline{n} \in H_1$ обозначим

$$\sigma_{\overline{m}} = \sqrt{\alpha_{\overline{n}}}\varepsilon_{2^{\overline{n}}}. \tag{5}$$

Очевидно, что $\sigma_{\overline{m}} \leq \varepsilon_{\overline{m}}$ (при условии, что $\sigma_{\overline{m}}$ существует) и для любого M (см. (4) и (5))

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ (\overline{n}+\overline{1})\in H_1}}^{\infty} 2^{|\overline{n}|}\sigma_{2^{\overline{n}}}^2 = \sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ (\overline{n}+\overline{1})\in H_1}}^{\infty} 2^{|\overline{n}|}\alpha_{\overline{n}+\overline{1}}\varepsilon_{2^{\overline{n}+\overline{1}}}^2 = \infty.$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что для последовательности $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ существует множество $G \subset H$, для которого выполняются следующие условия :

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in G}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty \quad \text{для любого} M, \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{\overline{n}\to\infty \\ \overline{n}\in G}} B(\overline{n}) = 0, \quad B(\overline{n}) \geq 2^{-\frac{|\overline{n}|}{2k}}, \quad \text{когда} \quad \overline{n}\in G, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\overline{m}} = \varepsilon_{2^{\overline{n}}}, \quad \text{если} \quad 2^{\overline{n}} \leq \overline{m} < 2^{\overline{n}+\overline{1}}, \ \overline{n}\in G. \tag{8}$$

(Если одно из условий (6) – (8) не выполняется, то вместо $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ можно взять последовательность $\{\sigma_{\overline{m}}\}$, а $G = \{\overline{n}\in \mathbb{N}_0^k : (\overline{n}+\overline{1}) \in H_1\}$).

Существуют натуральные числа $\{r_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in G}$, $r_{\overline{n}} \to \infty$ такие, что

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{2^{\overline{n}}} < 2^{-r_{\overline{n}}} \leq \varepsilon_{2^{\overline{n}}}, \quad \overline{n}\in G.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\varepsilon_{\overline{0}} = 1, \quad \varepsilon_{2^{\overline{n}}} = 2^{-r_{\overline{n}}}, \quad \overline{n}\in G. \tag{9}$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in G}}^{\infty} 2^{-2r_{\overline{n}}+|\overline{n}|} = \infty \quad \text{для любого} M, \tag{10}$$

$$\lim_{\substack{\overline{n}\to\infty \\ \overline{n}\in G}} [|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}}] = -\infty, \tag{11}$$

$$|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} \geq -\frac{|\overline{n}|}{2k} \geq -\frac{n_1}{2}, \quad \overline{n}\in G. \tag{12}$$

Мы будем предполагать также, что

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in B}}^{\infty} 2^{-2r_{\overline{n}}+|\overline{n}|} = \infty \quad \text{для любого} M, \tag{13}$$

где $B = \{\overline{n}\in G : n_1 \text{ –четное }\}$. В случае, когда ряд (13) сходится, для любого M ряд

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in G\setminus B}}^{\infty} 2^{|\overline{n}|-2r_{\overline{n}}-1}$$

расходится, и всегда вместо (13) мы можем рассматривать этот ряд.

Следующая лемма доказана в [9].

Лемма 1. *Для любого интервала* $I = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \le i < 2^\sigma$ *и для любого натурального* $n > \sigma$, *где* $n - \sigma$ *–четное число, существует полином по системе Уолша* $P(x) = \sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)$ *такой, что*

1. $|a_n^{(k)}| = 2^{-(n+\sigma)/2} = (2^{-n}\mu I)^{1/2}, \quad 1 \le k \le 2^n$,
2. $P(x) = 1$, *если* $x \in E_1 \subset I$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I$,
3. $P(x) = -1$, *если* $x \in E_2 \subset I$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I$,
4. $P(x) = 0$, *если* $x \notin I$,
5. $S^*(P, x) \le (2^n \mu I)^{-1/2}$, *если* $x \notin I$,
6. $S^*(P, x) \le C$, *если* $x \in I$,

причем множества E_1 *и* E_2 *являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а* C *– абсолютная постоянная.*

Пусть множество B, $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ и $\{r_{\overline{n}}\}$ удовлетворяют условиям (8) – (13), тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Для любых неотрицательных целых чисел* i, M, *для любых положительных* η, p, $1 \le p < 2$ *и для любого* k*-мерного куба типа Хаара* Δ, $\mu\Delta = 2^{-k\gamma}$ *существует полином* $P(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ *и числа* $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ *такие, что*

1. $|c_{\overline{n}}| \le 2^{-i}\varepsilon_{\overline{n}}, \quad \overline{M} \le \overline{n} \le \overline{N}$,
2. $P(\overline{x}) = 1$, *когда* $\overline{x} \in E_1 \subset \Delta$, $\mu E_1 = \frac{1}{2}\mu\Delta$,
3. $P(\overline{x}) = -1$, *когда* $\overline{x} \in E_2 \subset \Delta$, $\mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta$,
4. $P(\overline{x}) = 0$, *когда* $\overline{x} \notin \Delta$,
5. $S^*(P, \overline{x}) \le C$, *когда* $\overline{x} \in \Delta$,
6. $S^*(P, \overline{x}) \le \eta$, *когда* $\overline{x} \notin \Delta$,
7. $P'(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = 0$, *когда* $\min_{1 \le i \le k}\{x_i\} > \frac{1}{M}$,
8. $S^*(P', \overline{x}) \le \eta$, *когда* $\min_{1 \le i \le k}\{x_i\} > \frac{2}{M}$,
9. $\|P'(\overline{x})\|_p \le \eta$,

где E_1 и E_2 являются конечными объединениями кубов типа Хаара, а C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Из (12) следует, что существует M_0 такое, что

$$n_1 + |\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i + (k-1)\gamma > 0, \quad \text{когда} \quad \overline{n} \in B,\ \overline{n} > \overline{M}_0. \tag{14}$$

Пусть $1 \le p < 2$ –произвольное число. Выберем M_0 так, чтобы выполнялись и следующие условя (см. (11)) :

$$(Cn_1)^{k-1} 2^{-n_1/4 + [2i-(k-1)\gamma]/2} < \frac{\delta}{4}, \quad \text{когда} \overline{n} > \overline{M}_0, \tag{15}$$

$$(2C)^{k-1} 2^{-[n_j - \gamma - 1]/2} < \frac{\delta}{4}, \quad \text{когда} \quad \overline{n} > \overline{M}_0,\ j = 2, 3, ..., k, \tag{16}$$

$$|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i < 0, \quad \text{когда}\ \overline{n} > \overline{M}_0, \tag{17}$$

$$\sum_{\overline{n}=\overline{M}_0}^{\infty} 2^{\frac{(p-2)|\overline{n}|}{2p}} < \frac{\eta}{M^k}, \tag{18}$$

где C – постоянная из леммы 1. Из (11) и (13) следует, что существует конечное подмножество $D \subset B$ такое, что

$$\sum_{\overline{n} \in D} 2^{|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i} = \mu\Delta = 2^{-k\gamma} \tag{19}$$

и

$$\min\{n_k : \overline{n} = (n_1, ..., n_k) \in D\} > \max\{\log_2 M,\ \gamma + 1,\ M_0\}. \tag{20}$$

Из (19) следует, что куб Δ является конечным объединением k-мерных прямоугольников типа Хаара

$$\Delta = \bigcup_{\overline{n} \in D} I_{\overline{n}} = \bigcup_{\overline{n} \in D} \left(I_{\overline{n}}^{(1)} \times \cdots \times I_{\overline{n}}^{(k)} \right),$$

где $I_{\overline{n}}^{(j)}$, $j = 1, ..., k$ –интервалы типа Хаара, $\mu I_{\overline{n}} = 2^{|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i}$, $\mu I_{\overline{n}}^{(j)} = 2^{-\gamma}$, если $n_j - \gamma$ –четное и $\mu I_{\overline{n}}^{(j)} = 2^{-\gamma-1}$, если $n_j - \gamma$ –нечетное, $j = 2, ..., k$ и

$$\mu I_{\overline{n}}^{(1)} = \mu I_{\overline{n}} \left(\prod_{j=2}^{k} \mu I_{\overline{n}}^{(j)} \right)^{-1}.$$

Пусть $\overline{n} \in D$ фиксировано. Из (20) и (14) следует, что для $j = 1, ..., k$ к $I_{\overline{n}}^{(j)}$ и n_j (напомним, что n_1 – четное, так как $\overline{n} \in D \subset B$) применима лемма 1. В итоге получаем полиномы

$$P_{j\overline{n}}(x_j) = \sum_{m=1}^{2^{n_j}} a_{j\overline{n}}^{(m)} W_{n_j}^{(m)}(x_j), \quad j = 1, ..., k,$$

которые удовлетворяют условиям

a) $|a_{j\overline{n}}^{(m)}| = \left[2^{-n_j} \mu I_{\overline{n}}^{(j)}\right]^{1/2}, \quad 1 \leq m \leq 2^{n_j}, \quad j = 1, ..., k,$

b) $P_{j\overline{n}}(x_j) = 1, \quad$ когда $\quad x_j \in E'_{j\overline{n}} \subset I_{\overline{n}}^{(j)}, \quad \mu E'_{j\overline{n}} = \frac{1}{2}\mu I_{\overline{n}}^{(j)},$

c) $P_{j\overline{n}}(x_j) = -1, \quad$ когда $\quad x_j \in E''_{j\overline{n}} \subset I_{\overline{n}}^{(j)}, \quad \mu E''_{j\overline{n}} = \frac{1}{2}\mu I_{\overline{n}}^{(j)},$

d) $P_{j\overline{n}}(x_j) = 0, \quad$ когда $\quad x_j \notin I_{\overline{n}}^{(j)},$

e) $S^*(P_{j\overline{n}}, x_j) \leq \left[2^{n_j} \mu I_{\overline{n}}^{(j)}\right]^{-1/2}, \quad$ когда $\quad x_j \notin I_{\overline{n}}^{(j)},$

f) $S^*(P_{j\overline{n}}, x_j) \leq C, \quad$ когда $\quad x_j \in I_{\overline{n}}^{(j)},$

где $E'_{\overline{n}}$ и $E''_{\overline{n}}$, $j = 1, ..., k$ являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а C – абсолютная постоянная. Рассмотрим следующий полином

$$P(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{\overline{n}\in D} \left(\prod_{j=1}^{k} P_{j\overline{n}}(x_j)\right). \tag{21}$$

Из (8), (9), (21) и a) следует, что $|c_{\overline{n}}| \leq 2^{-i}\varepsilon_{\overline{n}}$, $\overline{M} \leq \overline{n} \leq \overline{N}$. Из b) – d) и (21) получаем, что $P(\overline{x})$ удовлетворяет условиям 2 – 4 леммы 2.

Пусть $\overline{q} = (q_1, ..., q_k) \in \mathbb{N}_0^k$. Обозначим $\alpha_{j\overline{n}} = \min\{2^{n_j}, q_j - 2^{n_j} + 1\}$, $j = 1, ..., k$, тогда

$$\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{q}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = J_1(\overline{x}) + J_2(\overline{x}) + J_3(\overline{x}), \tag{22}$$

где

$$J_1(\overline{x}) = \sum_{\substack{\overline{n}\in D \\ 2^{\overline{n}+\overline{1}} \leq \overline{q}}} \sum_{m_1=1}^{2^{n_1}} \cdots \sum_{m_k=1}^{2^{n_k}} \Omega, \quad J_2(\overline{x}) = \sum_{\substack{\overline{n}\in D,\, 2^{\overline{n}+\overline{1}} \nleq \overline{q} \\ 2^{n_1+1} \leq q_1,\, 2^{\overline{n}} \leq \overline{q}}} \sum_{m_1=1}^{2^{n_1}} \sum_{m_2=1}^{\alpha_{2\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{\alpha_{k\overline{n}}} \Omega,$$

$$J_3(\overline{x}) = \sum_{\substack{\overline{n}\in D,\, 2^{\overline{n}} \leq \overline{q} \\ 2^{n_1+1} > q_1 \geq 2^{n_1}}} \sum_{m_1=1}^{\alpha_{1\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{\alpha_{k\overline{n}}} \Omega,$$

$$\Omega = \left(a_{1\overline{n}}^{(m_1)} \cdots a_{k\overline{n}}^{(m_k)} W_{n_1}^{(m_1)}(x_1) \cdots W_{n_k}^{(m_k)}(x_k)\right).$$

Пусть $\overline{x} \notin \Delta$. Очевидно (см. d)), что $J_1(\overline{x}) = 0$. Так как x_1 может принадлежать не более, чем 2^{k-1} интервалам $I_{\overline{n}}^{(1)}$, $\overline{n} \in D$ (это следует из способа дробления куба Δ), то количество ненулевых слагаемых в J_2 не превосходит 2^{k-1}. Для таких $\overline{n}$ из $\overline{x} \notin \Delta$ следует, что для некоторого g, $1 < g \le k$, $x_g \notin I_{\overline{n}}^{(g)}$. Поэтому из b) и c) (если $j = 1$), e) (если $j = g$) и f) получаем

$$|J_2(\overline{x})| \le 2^{k-1} C^{k-2} \left(2^{n_g} \mu I_{\overline{n}}^{(g)}\right)^{-1/2} \le C^{k-2} 2^{-(n_g-\gamma-1)/2+k-1}. \tag{23}$$

Из (16), (20) и (23) следует, что

$$|J_2(\overline{x})| \le \frac{\eta}{4}. \tag{24}$$

Разобьем J_3 на две части

$$J_3(\overline{x}) = J_3'(\overline{x}) + J_3''(\overline{x}), \tag{25}$$

где

$$J_3'(\overline{x}) = \sum_T \sum_{m_1=1}^{a_{1\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{a_{k\overline{n}}} \Omega, \quad T = \left\{\overline{n} \in D,\ 2^{\overline{n}} \le \overline{q},\ 2^{n_1} \le q_1 < 2^{n_1+1},\ x_1 \in I_{\overline{n}}^{(1)}\right\},$$

$$J_3''(\overline{x}) = \sum_{\overline{T}} \sum_{m_1=1}^{a_{1\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{a_{k\overline{n}}} \Omega, \quad \overline{T} = \left\{\overline{n} \in D,\ 2^{\overline{n}} \le \overline{q},\ 2^{n_1} \le q_1 < 2^{n_1+1},\ x_1 \notin I_{\overline{n}}^{(1)}\right\}.$$

Так как $\overline{x} \notin \Delta$, то из $x_1 \in I_{\overline{n}}^{(1)}$ следует, что для некоторого $g = 2, \dots, k$, $x_g \notin I_{\overline{n}}^{(g)}$. Но число таких $\overline{n} \in D$, для которых $x_1 \in I_{\overline{n}}^{(1)}$ не более чем 2^{k-1}. Поэтому из (16), (20), (25), e) ($j = g$) и f) получаем

$$|J_3'(\overline{x})| \le 2^{k-1} C^{k-1} \left(2^{n_g} \mu I_{\overline{n}}^{(g)}\right)^{-1/2} \le (2C)^{k-1} 2^{-(n_g-\gamma-1)/2} < \frac{\eta}{4}. \tag{26}$$

Поскольку $n_1 \ge \cdots \ge n_k$ при $\overline{n} \in D \subset B$, то количество слагаемых в J_3'' не превосходит n_1^{k-1} (заметим, что при фиксированном $\overline{q}$ число n_1 тоже фиксировано). Следовательно (см. e) (j=1) и f))

$$|J_3''(\overline{x})| \le n_1^{k-1} C^{k-1} \left(2^{n_1} \mu I_{\overline{n}}^{(1)}\right)^{-1/2} \le (n_1 C)^{k-1} 2^{-[n_1+(k-1)\gamma+|\overline{n}|]/2+r_{\overline{n}}+i}. \tag{27}$$

Из (12), (15), (20) и (27) получаем

$$|J_3''(\overline{x})| \leq (n_1 C)^{k-1} 2^{-\frac{n_1}{4} + \frac{2i-(k-1)\gamma}{2}} < \frac{\eta}{4}. \tag{28}$$

Из (22), (24) – (26) и (28) следует, что $S^*(P, \overline{x}) < \eta$, есл $\overline{x} \notin \Delta$.

Пусть теперь $\overline{x} \in \Delta$. Из b) – d) следует, что

$$J_1(\overline{x}) = 1 \quad \text{или} \quad J_1(\overline{x}) = 0. \tag{29}$$

Из b) – d) (для $j = 1$) и f) получаем

$$|J_2(\overline{x})| \leq (2C)^{k-1}, \tag{30}$$

так как x_1 может принадлежать не более чем 2^{k-1} интервалам $I_{\overline{n}}^{(1)}$, $\overline{n} \in D$.

Следовательно, из b) – d), e) (для $j = 1$) и f) имеем

$$|J_3(\overline{x})| \leq |J_3'(\overline{x})| + |J_3''(\overline{x})| \leq (2C)^{k-1} + \sum_{\substack{\overline{n} \in D \\ 2^{n} \leq q_1 < 2^{n_1+1}}} \left(2^{n_1} \mu I_{\overline{n}}^{(1)}\right)^{-1/2} C^{k-1}. \tag{31}$$

Поскольку $n_1 \geq \cdots \geq n_k$ при $\overline{n} \in D \subset B$, то количество слагаемых в правой части (31) не превосходит n_1^{k-1}. Следовательно, из (12), (15), (20) и (31) получаем

$$\begin{aligned} |J_3(\overline{x})| &\leq (2C)^{k-1} + (n_1 C)^{k-1} 2^{-[n_1 + (k-1)\gamma + |\overline{n}|]/2 + r_{\overline{n}} + i} \leq \\ &\leq (2C)^{k-1} + (n_1 C)^{k-1} 2^{-\frac{n_1}{4} + \frac{2i-(k-1)\gamma}{2}} \leq C_1, \end{aligned} \tag{32}$$

где C_1 – абсолютная постоянная.

Известно, что функции системы Хаара выражаются функциями системы Уолша : $\chi_0^{(0)}(t) = W_0^{(0)}(t)$, а для $n = 0, 1, ..., 1 \leq k \leq 2^n$,

$$\chi_n^{(k)}(t) = 2^{-n/2} \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_n^{(m)}(t), \quad \varepsilon_{k,m}^{(n)} = \pm 1. \tag{33}$$

Из a), (21) и (33) следует, что существуют $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что

$$P'(\overline{x}) \equiv \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in D} \left(\prod_{j=1}^{k} |a_{j\overline{n}}^{(1)}| 2^{n_j/2} \chi_{n_j}^{(1)}(x_j) \right). \tag{34}$$

Ясно, что $P'(\overline{x}) = 0$, когда $\min\limits_{1 \leq j \leq k} \{x_j\} > \frac{1}{M}$. Из a), (17), (18), (20) и (34) получаем

$$||P'(\overline{x})||_p \leq \sum_{\overline{n} \in D} 2^{-r_{\overline{n}} - i + |\overline{n}|/2} \left\| \prod_{j=1}^{k} \chi_{n_j}^{(1)}(x_j) \right\|_p \leq \sum_{\overline{n} \in D} 2^{\frac{|\overline{n}|(p-2)}{2p}} < \frac{\eta}{M^k} \leq \eta. \tag{35}$$

Для доказательства утверждения 8 будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема D. *(см. [10]) Пусть $f \in L_1[0,1]^k$ и $f(\overline{x}) = 0$ вне некоторого k–мерного прямоугольника $\Delta = \prod_{j=1}^{k} \Delta_j$. Тогда*

$$S^*(f,\overline{x}) \le C\frac{\|f(\overline{x})\|_1}{d(\overline{x},\Delta)}, \quad d(\overline{x},\Delta) = \prod_{j=1}^{k} \rho(x_j,\Delta_j),$$

где C–абсолютная постоянная и $\rho(x_j,\Delta_j)$–расстояние точки x_i до интервала Δ_i.

В силу монотонности L_p-норм ($\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2}$ если $p_1 \le p_2$), из (35) и теоремы D получаем утверждение 8. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого натурального числа M, для любых чисел $l,\eta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $1 \le p \le 2$ и для любого k-мерного куба типа Хаара Δ существуют полином $P(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} b_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$, множество $E \subset \Delta$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что*

1. $|b_{\overline{n}}| \le \varepsilon_{\overline{n}}$, $\quad \overline{M} \le \overline{n} \le \overline{N}$,

2. $P(\overline{x}) = l$, $\quad$ когда $\quad \overline{x} \in E$, $\quad \mu E > (1-\varepsilon)\mu\Delta$,

3. $P(\overline{x}) = 0$, $\quad$ когда $\quad \overline{x} \notin \Delta$,

4. $S^*(P,\overline{x}) \le C\frac{|l|}{\varepsilon}$, $\quad$ когда $\quad \overline{x} \in \Delta$, где C –абсолютная постоянная,

и утверждения 6 – 9 леммы 2 имеют место.

Доказательство. Обозначим $\alpha = [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1$. В силу леммы 2 существуют полином $P_1(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}_1} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что

1. $|c_{\overline{n}}| \le \frac{1}{|l|}\varepsilon_{\overline{n}}$, $\quad \overline{M} \le \overline{n} \le \overline{N}_1$,

2. $P_1(\overline{x}) = 1$, $\quad$ когда $\quad \overline{x} \in E_1' \subset \Delta$, $\quad \mu E_1' = \frac{1}{2}\mu\Delta$,

3. $P_1(\overline{x}) = -1$, $\quad$ когда $\quad \overline{x} \in E_1 \subset \Delta$, $\quad \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu\Delta$,

и соответствующие утверждения 4 – 9 леммы 2 с $\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha|l|}$ имеют место.

Пусть полиномы $P_1(\overline{x}),\dots,P_{m-1}(\overline{x})$ и множества $E_1,\dots,E_{m-1}$ уже построены и $E_{m-1} = \cup_{i=1}^{\nu_m} \Delta_{im}$, где Δ_{im} – k-мерный куб типа Хаара, $i = 1,\dots,\nu_m$. В силу леммы 2, для каждого i, $i = 1,\dots,\nu_m$ существуют полином $P_{im}(\overline{x}) =$
$= \sum_{\overline{n}=\overline{M}_{im}}^{\overline{N}_{im}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$, $\overline{M}_{im} \le \overline{n} \le \overline{N}_{im}$, $M_{im} > N_{i-1,m}$, $N_{0m} = N_{m-1}$ такие, что

1'. $|c_{\overline{n}}| \leq \dfrac{1}{2^{m-1}|l|}\varepsilon_{\overline{n}}$,

2'. $P_{im}(\overline{x}) = 1$, когда $\overline{x} \in E'_{im} \subset \Delta_{im}$, $\mu E'_{im} = \dfrac{1}{2}\mu\Delta_{im}$,

3'. $P_{im}(\overline{x}) = -1$, когда $\overline{x} \in E_{im} \subset \Delta_{im}$, $\mu E_{im} = \dfrac{1}{2}\mu\Delta_{im}$,

4'. $P_{im}(\overline{x}) = 0$, когда $\overline{x} \notin \Delta_{im}$,

5'. $S^*(P_{im}, \overline{x}) \leq C$, когда $\overline{x} \in \Delta_{im}$,

6'. $S^*(P_{im}, \overline{x}) < \min\left\{\dfrac{C}{\nu_m}, \dfrac{\eta}{2^{m-1}\alpha|l|\nu_m}\right\}$, когда $\overline{x} \notin \Delta_{im}$,

7'. $P'_{im}(\overline{x}) \equiv \sum\limits_{\overline{n}=\overline{M}_{im}}^{\overline{N}_{im}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = 0$, когда $\min\limits_{1\leq j\leq k}\{x_j\} > \dfrac{1}{M_{im}}$,

8'. $S^*(P'_{im}, \overline{x}) < \dfrac{\eta}{2^{m-1}\alpha|l|\nu_m}$, когда $\min\limits_{1\leq j\leq k}\{x_j\} > \dfrac{2}{M_{im}}$,

9'. $||P'_{im}(\overline{x})||_p < \dfrac{\eta}{2^{m-1}\alpha|l|\nu_m}$.

Обозначим

$$P_m(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu_m} P_{im}(\overline{x}), \quad P'_m(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu_m} P'_{im}(\overline{x}), \quad E_m = \bigcup_{i=1}^{\nu_m} E_{im}.$$

Нетрудно убедиться, что полиномы

$$P(\overline{x}) = \sum_{m=1}^{\alpha} 2^{m-1} l P_m(\overline{x}), \quad P'(\overline{x}) = \sum_{m=1}^{\alpha} 2^{m-1} l P'_m(\overline{x})$$

и множество $E = \Delta \setminus E_\alpha$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим множество $\{(\Delta, l, \varepsilon)\}$, зависящее от трех параметров : Δ пробегает все k-мерные кубы типа Хаара, l пробегает множество всех рациональных чисел, а ε – множество положительных рациональных чисел. Пронумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, l_1, \varepsilon_1), ..., (\Delta_m, l_m, \varepsilon_m), ... \tag{36}$$

Возьмем последовательности положительных чисел $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \cdots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \infty, \tag{37}$$

$$1 \leq q_1 < q_2 < \cdots, \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 2. \tag{38}$$

В силу леммы 3, для любого $m = 1, 2, \ldots$ существуют полином $P_m(\overline{x}) =$
$= \sum\limits_{\overline{n}=\overline{M}_m+\overline{1}}^{\overline{M}_{m+1}} b_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$, множество $E_m \subset \Delta_m$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что

A) $|b_{\overline{n}}| \leq \varepsilon_{\overline{n}}, \quad \overline{M}_m \leq \overline{n} \leq \overline{M}_{m+1}$,

B) $P_m(\overline{x}) = l_m, \quad$ когда $\quad \overline{x} \in E_m, \quad \mu E_m > (1-\varepsilon_m)\mu\Delta_m$,

C) $P_m(\overline{x}) = 0, \quad$ когда $\quad \overline{x} \notin \Delta_m$,

D) $S^*(P_m, \overline{x}) \leq C\dfrac{|l_m|}{\varepsilon_m}, \quad$ когда $\quad \overline{x} \in \Delta_m$,

E) $S^*(P_m, \overline{x}) < \eta_m, \quad$ когда $\quad \overline{x} \notin \Delta_m$,

F) $P'_m(\overline{x}) = \sum\limits_{\overline{n}=\overline{M}_m+\overline{1}}^{\overline{M}_{m+1}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = 0$, когда $\min\limits_{1\leq i\leq k}\{x_i\} > \dfrac{1}{M_m+1}$,

G) $S^*(P'_m, \overline{x}) < \eta_m, \quad$ когда $\quad \min\limits_{1\leq i\leq k}\{x_i\} > \dfrac{2}{M_m+1}$,

H) $||P'_m(\overline{x})||_{q_m} < \eta_m$.

Положим

$$G_m = \left\{\overline{x} \in [0,1]^k : \min_{1\leq i\leq k}\{x_i\} > \frac{2}{M_m}\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{39}$$

Поскольку $M_{m+1} > M_m$, $m = 1, 2, \ldots$, то, очевидно, что

$$G_{m-1} \subset G_m, \quad \mu G_m \to 1 \quad \text{при } m \to \infty \tag{40}$$

и

$$P'_n(\overline{x}) = 0 \quad \text{при} \quad n \geq m, \ \overline{x} \in G_m. \tag{41}$$

Лемма 4. *Пусть $\varphi(x)$ –п.в.конечная измеримая функция, определенная на $[0,1]^k$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, $\delta > 0$ –произвольные числа, а m –произвольное натуральное число. Тогда существуют натуральные числа $m_1, \ldots, m_j$, $m < m_1 < \cdots < m_j$ и множество E, удовлетворяющие условиям :*

a) $E \subset [0,1]^k, \quad \mu E > 1 - 2\varepsilon$,

b) $\left|\sum\limits_{i=1}^{j} P_{m_i}(\overline{x}) - \varphi(\overline{x})\right| < \delta \quad$ для всех $\quad \overline{x} \in E$, *c)* $S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, \overline{x}\right) \le C\dfrac{|\varphi(\overline{x})|}{\varepsilon} + \varepsilon$ *для всех* $\overline{x} \in E$, *где* C *–абсолютная постоянная.*

Доказательство. Легко видеть, что существуют конечное разбиение куба $[0,1]^k$ на попарно непересекающиеся кубы типа Хаара $\Delta'_1, ..., \Delta'_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset [0,1]^k, \quad \mu E_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{42}$$

$$|\varphi(\overline{x})| \ge |l'_i| \quad \text{при} \quad \overline{x} \in \Delta'_i \cap E_0,\ i = 1, ..., j, \tag{43}$$

$$|\varphi(\overline{x}) - l'_i| < \delta \quad \text{при} \quad \overline{x} \in \Delta'_i \cap E_0,\ i = 1, ..., j. \tag{44}$$

Для фиксированного i, $1 \le i \le j$ существует подпоследовательность $(\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_1})$, ..., $(\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_n})$, ..., последовательности (36) такая, что

$$\varepsilon_{k_n} \ge \varepsilon, \quad n = 1, 2, ... \quad \text{и} \quad \varepsilon_{k_n} \to \varepsilon \text{ при } \quad n \to \infty. \tag{45}$$

Применяя условия B) – E) для $m = k_n$ с достаточно большим индексом n, в силу (37) (43) и (45) для $m_i = k_n > m_{i-1}$ получаем

$$P_{m_i}(\overline{x}) = l'_i \quad \text{когда} \quad \overline{x} \in E_{m_i}, \tag{46}$$

где

$$E_{m_i} \subset \Delta'_i, \quad \mu E_{m_i} > (1 - \varepsilon_{k_n})\mu\Delta'_i > (1 - \varepsilon)\mu\Delta'_i - \frac{\varepsilon}{2j}, \tag{47}$$

$$P_{m_i}(\overline{x}) = 0, \quad \text{когда} \quad \overline{x} \notin \Delta'_i, \tag{48}$$

$$S^*(P_{m_i}, \overline{x}) < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad \overline{x} \notin \Delta'_i, \tag{49}$$

$$S^*(P_{m_i}, \overline{x}) \le C\frac{|l'_i|}{\varepsilon_{k_n}} \le C\frac{|\varphi(\overline{x})|}{\varepsilon}, \quad \text{когда} \quad \overline{x} \in \Delta'_i \cap E_0. \tag{50}$$

Обозначим

$$E = E_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i}\right). \tag{51}$$

Из (47) следует, что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i}\right) = \sum_{i=1}^{j} \mu E_{m_i} > (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{j} \mu\Delta_i' - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Поэтому, с учетом (42) и (51), получаем $\mu E > 1 - 2\varepsilon$. Из (46) – (48), (44) и (51) следует утверждение b).

Поскольку $\overline{M}_{m_i} < \overline{n} \leq \overline{M}_{m_{i+1}}$ как только $\hat{P}_{m_i}(\overline{n}) \neq 0$, то для любого $\overline{x} \in E$ существуют $i_0 \in \mathbb{N}$ и $\overline{Q} \in \mathbb{N}_0^k$ такие, что

$$S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, \overline{x}\right) = J_1(\overline{x}) + J_2(\overline{x}), \tag{52}$$

где

$$J_1(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{i_0-1} P_{m_i}(\overline{x}), \quad J_2(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}_{m_{i_0}}}^{\overline{Q}} b_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}).$$

Пусть $\overline{x} \in \Delta_{j_0}'$. В силу (48) – (50), при $j_0 < i_0$

$$|J_1(\overline{x})| \leq S^*(P_{m_{j_0}}, \overline{x}) \leq C\frac{|\varphi(\overline{x})|}{\varepsilon}, \tag{53}$$

$$|J_2(\overline{x})| \leq S^*(P_{m_{i_0}}, \overline{x}) < \varepsilon.$$

Отсюда следует c).

Если $j_0 \geq i_0$, то (см. (48)) $J_1(\overline{x}) = 0$. В этом случае неравенство c) следует из (49), (50) и (52). Лемма 4 доказана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} a_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m'(\overline{x}) \tag{54}$$

и докажем, что он удовлетворяет теореме 1. Из (54), A) и F) следует, что $|a_{\overline{n}}| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$ для любого $\overline{n} \in \mathbb{N}_0^k$. Из (37), (38), H) и из монотонности L_p-норм следует, что ряд (54) является рядом Фурье некоторой функции из $\cap_{q<2} L_q[0,1]^k$. Выберем последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}$ и i_0 таких, что (см. (40))

$$1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \quad \mu G_{i_0} > 1 - \frac{\gamma_1}{4}. \tag{55}$$

Пусть $f(\overline{x})$ – п.в. конечная измеримая функция, определенная на $[0,1]^k$. Тогда $f(\overline{x})-\sum\limits_{m=1}^{i_0}P'_m(\overline{x})$ также п.в. конечна. В силу леммы 4 для

$$\varphi(\overline{x})=f(\overline{x})-\sum_{m=1}^{i_0}P'_m(\overline{x}),\quad \varepsilon=\frac{\gamma_1}{4},\quad \delta=\frac{\gamma_2^2}{4},\quad m=i_0,$$

существуют полном $\sum\limits_{j=1}^{\alpha_0}P_{m_j^0}(\overline{x})$, $i_0<m_1^0<\cdots<m_{\alpha_0}^0$ и множество E_1 такие, что

$$\mu E_1>1-\frac{\gamma_1}{2} \tag{56}$$

и

$$\left|f(\overline{x})-\sum_{m=1}^{i_0}P'_m(\overline{x})-\sum_{j=1}^{\alpha_0}P_{m_j^0}(\overline{x})\right|<\frac{\gamma_2^2}{4},\quad \overline{x}\in E_1. \tag{57}$$

Возьмем $i_1>m_{\alpha_0}^0$ так, чтобы выполнялись условия (см. (37) и (40))

$$\sum_{m=i_1}^{\infty}\eta_m<\gamma_2,\quad \mu G_{i_1}>1-\frac{\gamma_2}{4}.$$

Положим

$$J_1=\{1,2,...,i_0,m_1^0,...,m_{\alpha_0}^0\},$$

$$Q_1(\overline{x})=\sum_{m=1}^{i_0}P'_m(\overline{x})+\sum_{j=1}^{\alpha_0}P_{m_j^0}(\overline{x})+\sum_{\substack{m=i_0+1\\ m\notin J_1}}^{i_1}P'_m(\overline{x}), \tag{58}$$

$$E'_1=E_1\cap G_{i_0}. \tag{59}$$

Из (55), (56) и (59) имеем $\mu E'_1>1-\gamma_1$, а из (41), (57) и (58) получаем

$$|f(\overline{x})-Q_1(\overline{x})|<\frac{\gamma_2^2}{4},\quad \text{для всех} \overline{x}\in E'_1.$$

Пусть на p-ом шаге определены число i_p, множество E'_p и полином $Q_p(\overline{x})$ такие, что

$$\sum_{m=i_p}^{\infty}\eta_m<\gamma_{p+1}, \tag{60}$$

$$\mu G_{i_p}>1-\frac{\gamma_{p+1}}{4},\quad \mu E'_p>1-\gamma_p,\quad E'_p\subset G_{i_{p-1}}, \tag{61}$$

$$\left|f(\overline{x})-\sum_{j=1}^{p}Q_j(\overline{x})\right|\le\frac{\gamma_{p+1}^2}{4},\quad \overline{x}\in E'_p. \tag{62}$$

Положим

$$f_p(\overline{x}) = f(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{p} Q_j(\overline{x}). \tag{63}$$

В силу леммы 4 для

$$\varphi(\overline{x}) = f_p(\overline{x}), \quad \varepsilon = \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \delta = \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}, \quad m = i_p,$$

существуют натуральные числа $i_p < m_1^p < \cdots < m_{\alpha_p}^p$ и множество E_{p+1} такие, что

$$\mu E_{p+1} > 1 - \frac{\gamma_{p+1}}{2}, \tag{64}$$

$$\left| f_p(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(\overline{x}) \right| < \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad \overline{x} \in E_{p+1}, \tag{65}$$

$$S^* \left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, \overline{x} \right) \le C \frac{4|f_p(\overline{x})|}{\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \overline{x} \in E_{p+1}, \tag{66}$$

где C –абсолютная постоянная. Возьмем $i_{p+1} > m_{\alpha_p}^p$ так, чтобы выполнялись условия (см. (37) и (40))

$$\sum_{m=i_{p+1}}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}, \quad \mu G_{i_{p+1}} > 1 - \frac{\gamma_{p+2}}{2}$$

и положим

$$J_{p+1} = \{1, 2, ..., i_p, m_1^p, ..., m_{\alpha_p}^p\},$$

$$Q_{p+1}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(\overline{x}) + \sum_{\substack{m=i_p+1 \\ m \notin J_{p+1}}}^{i_{p+1}} P'_m(\overline{x}), \tag{67}$$

$$E'_{p+1} = E_{p+1} \cap G_{i_p}, \quad E''_{p+1} = E'_{p+1} \cap E'_p. \tag{68}$$

Из (61), (64) и (68) следует, что

$$\mu E'_{p+1} > 1 - \gamma_{p+1}, \quad \mu E''_{p+1} > 1 - \gamma_p - \gamma_{p+1}. \tag{69}$$

Из (41), (65), (67) и (68) следует, что на множестве E'_{p+1}

$$|f_p(\overline{x}) - Q_{p+1}(\overline{x})| < \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}.$$

Поэтому (см. также (63))

$$\left| f(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{p+1} Q_j(\overline{x}) \right| \leq \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad \overline{x} \in E'_{p+1}. \tag{70}$$

Из (62), (63), (66) и (68) получаем, что на множестве E''_{p+1}

$$S^* \left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, \overline{x} \right) \leq C \frac{4\gamma_{p+1}^2}{\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4} < (C+1)\gamma_{p+1}. \tag{71}$$

Из G), (39), (40), (60) и (68) имеем, что на множестве E''_{p+1}

$$S^* \left(\sum_{\substack{m=i_p+1 \\ m \notin J_{p+1}}}^{i_{p+1}} P'_m, \overline{x} \right) \leq \sum_{m=i_p+1}^{\infty} S^*(P'_m, \overline{x}) \leq \sum_{m=i_p}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}. \tag{72}$$

Следовательно (см. (67), (71) и (72))

$$S^*(Q_{p+1}, \overline{x}) < (C+2)\gamma_{p+1}, \quad \overline{x} \in E''_{p+1}. \tag{73}$$

Рассмотрим множества

$$E'_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E'_p, \quad E''_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E''_p, \quad (E'_1 = [0,1]^k).$$

Из (55) и (69) следует, что $\mu E'_0 = \mu E''_0 = 1$. Следовательно, учитывая также (55), (70) и (73), получаем, что ряд

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} a'_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(\overline{x})$$

сходится к $f(\overline{x})$ на множестве $E'_0 \cap E''_0$, $\mu(E'_0 \cap E''_0) = 1$.

Аналогично можно доказать, что ряд

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} b'_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(\overline{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

Теорема 1 доказана.

ABSTRACT. In the paper we prove the following theorem. Let $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ be a sequence satisfying the condition $0 < \varepsilon_{\overline{m}} \leq \varepsilon_{\overline{n}}$, if $\overline{m} \geq \overline{n}$ and $\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} \varepsilon_{\overline{n}}^2 = \infty$ for any $\overline{M}$. Then there exists a function $f(\overline{x}) \in \bigcap_{p<2} L_p[0,1]^k$ with Fourier-Walsh coefficients $|\hat{f}(\overline{n})| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$, the Fourier-Walsh series of which is a universal relative to signs in the class of a.e. finite functions, and there exists a sequence $\{\lambda_{\overline{n}}\}$, $\lambda_{\overline{n}} = \pm 1$ such that the series $\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} \lambda_{\overline{n}} \hat{f}(\overline{n}) W_{\overline{n}}(\overline{x})$ is a universal relative to subseries in the class of a.e. finite functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "Об универсальных тригонометрических рядах", ДАН СССР, т. 49, стр. 79 – 82, 1945.
2. Д. Е. Меньшов, "О частных суммах тригонометрических рядах", Мат. сборник, т. 20(62), стр. 197 – 237, 1947.
3. А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, сер. мат., т. 27, № . 3, стр. 621 – 660, 1963.
4. Г. М. Мушегян, "Об универсальности рядов относительно перестановок", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 12, № . 4, стр. 278 – 302, 1977.
5. Н. Б. Погосян, "Представление измеримых функций ортогональными рядами", Мат. сборник, т. 98(140), стр. 102 – 112, 1975.
6. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", Успехи Мат. Наук, т. 15, № . 5(95), стр. 77 – 141, 1960.
7. А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, "Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций ", Успехи Мат. Наук, т. 47, № 5(287), стр. 15 – 44, 1992.
8. Н. Б. Погосян, "Об универсальных рядах Фурье", Успехи Мат. Наук, т. 38, № 1, стр. 185 -- 186, 1983.
9. К. А. Навасардян, "О нуль–рядах по двойной системе Уолша", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № . 1, стр. 50 – 68, 1994.
10. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды Уолша и Преобразования, Наука, М. 1987.

28 сентября 1995

Ереванский государственный университет

О СХОДИМОСТИ И ЯВЛЕНИИ ГИББСА ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

О. Г. Саргсян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

В статье доказывается, что если интегрируемая функция $f(x,y)$ имеет ограниченную гармоническую вариацию и непрерывна в каждой точке компакта K, то двойной ряд Фурье–Уолша функции $f(x,y)$ равномерно сходится на K. Применяя этот результат, исследуется явление Гиббса для двойных рядов Фурье–Уолша.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f(x)$, $x \in (-\infty,\infty)$, 2π-периодическая, интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, и пусть

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx) \tag{1}$$

ее ряд Фурье. Следующая теорема хорошо известна (см. [1], стр. 121).

Теорема А. *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$ и непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$, то ряд (1) сходится к $f(x)$ равномерно на $[a,b]$.*

Аналог теоремы А имеет место также для рядов Фурье–Уолша (см. [2], стр. 58).

Напомним определение понятия ограниченной гармонической вариации, введенной А. Саакяном в [3]. Всюду ниже функция $f(x,y)$ считается измеримой. Пусть I–интервал или отрезок на $(-\infty,\infty)$ с концами a и b. Через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n,b_n)$, для которых $[a_n,b_n] \subset I$. При фиксированном y_0 положим

$f(I,y_0)=f(b,y_0)-f(a,y_0)$, и через $V_x(f(x,y_0),I)$ обозначим обычную гармоническую вариацию функции $f(x,y_0)$ на I относительно x :

$$V_x(f(x,y_0),I)=\sup_{\{I_n\}\in\Omega(I)}\sum_n\frac{|f(I_n,y_0)|}{n}.$$

Аналогично, при фиксированном x_0 определяются $f(x_0,I)$ и $V_y(f(x_0,y),I)$.

Положим

$$f(I,\Delta)=f(a,\alpha)-f(a,\beta)-f(b,\alpha)+f(b,\beta),$$

$$V_{x,y}(f,I\times\Delta)\equiv\sup_{\substack{\{I_n\}\in\Omega(I)\\ \{\Delta_k\}\in\Omega(\Delta)}}\sum_{n,k}\frac{|f(I_n,\Delta_k)|}{nk},$$

где Δ –интервал с концами α и β.

Определение. Скажем, что функция $f(x,y)$ имеет *ограниченную гармоническую вариацию на прямоугольнике* $D=I\times\Delta$ ($f\in$BHV(D)), если

$$V_H(f,D)\equiv V_{x,y}(f,D)+V_x(f(x,\alpha),I)+V_y(f(a,y),\Delta)<\infty.$$

Теорема B. *(А. Саакян [3]) Пусть $f(x,y)$ непрерывна в точках открытого множества $E\subset[-\pi,\pi]^2$ и $f(x,y)\in BHV([-\pi,\pi]^2)$. Тогда прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x,y)$ равномерно сходятся к $f(x,y)$ на каждом компакте $K\subset E$.*

Эта теорема была усилена автором (см. [4]) :

Теорема C. *(см. [4]) Пусть интегрируемая функция $f(x,y)$ принадлежит классу $BHV([-\pi,\pi]^2)$. Если $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке некоторого компакта $K\subset[-\pi,\pi]^2$, то прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x,y)$ равномерно сходятся к $f(x,y)$ на компакте K.*

Понятие функции Гиббса было введено в [6].

Определение. Пусть x_0 точка разрыва функции $g(x)$, имеющей ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки x_0, причем $|g(x_0+0)-g(x_0-0)|=2d$, и пусть последовательность функций $\{g_n(x)\}$ сходится к g в каждой точке некоторой окрестности x_0. Функция

$$G(x_0, g, \{g_n\}) = G(x_0) = \varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ n \to \infty}} \frac{1}{d} \left| g_n(x) - \frac{g(x_0+0) + g(x_0-0)}{2} \right|$$

называется *функцией Гиббса* для последовательности $\{g_n\}$. Если $G(x_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{g_n\}$ в точке x_0 имеет место *явление Гиббса.*

Хорошо известно (см. [1], стр. 123 - 126), что для частичных сумм ряда Фурье (1) имеет место явление Гиббса, причем функция $G(x_0)$ не зависит от x_0 и равна

$$G(x_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 1.7,$$

называемой постоянной Гиббса. Для частичных сумм ряда Фурье–Уолша наличие явления Гиббса установлено А. М. Зубакиным в [5]. В работе [6] показано, что для частичных сумм ряда Фурье–Уолша функция $G(x_0)$ не является постоянной и найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции. Для кратных рядов Фурье функций из класса BHV явление Гиббса было установлено в [4].

В настоящей статье исследуются равномерная сходимость и явление Гиббса двойных рядов Фурье–Уолша функций из класса BHV.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через G множество последовательностей из нулей и единиц, т. е.

$$\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = (x_0, x_1, ..., x_j, ...), \quad x_j = 0 \quad \text{или} \quad 1, \quad j = 0, 1, 2...$$

Через G' обозначим подмножество G, которое получается, если из G исключить все последовательности, члены которых равны 1, начиная с некоторого места, за исключением последовательности, все члены которой равны 1. Если $x \in [0, 1]$, то $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i / 2^{i+1}$, где $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in G'$.

Суммой двух последовательностей $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется последовательность $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\{z_i\}_{i=0}^{\infty} = \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \oplus \{y_i\}_{i=0}^{\infty} = \{x_i \oplus y_i\}_{i=0}^{\infty},$$

где

$$x_i \oplus y_i = \begin{cases} 0, & \text{если} x_i + y_i = 0 \text{ или } 2, \\ 1, & \text{если } x_i + y_i = 1, \end{cases}$$

т.е. операция $\oplus$ представляет собой покоординатное сложение по модулю 2. Для $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i/2^{i+1}$ и $y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} y_i/2^{i+1}$ определим сумму

$$z = x \oplus y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i \oplus y_i}{2^{i+1}}, \quad \text{если} \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \oplus \{y_i\}_{i=0}^{\infty} \in G'.$$

При фиксированном y сумма $x \oplus y$ определена всюду на $[0,1]$, за исключением некоторого счетного множества. Ниже полуинтервалы $\Delta_m^{(k)} = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right)$ будем называть *двоичными интервалами* ранга $k \geq 0$. Обозначим через $r_k(x)$ функции Радемахера : при $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i/2^{i+1}$ с $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in G'$, $r_k(x) = (-1)^{x_k}$.

Напомним определение функций системы Уолша в нумерации Пэли. Положим $W_0(x) \equiv 1$. Чтобы определить $W_n(x)$ при $n \geq 1$, представим натуральное число n в двоичной записи $n = \sum\limits_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_k = 1$ и $\varepsilon_i = 0$ или 1, когда $i = 0, 1, ..., k-1$. Очевидно $2^k \leq n < 2^{k+1}$, где $k = k(n)$. Положим

$$W_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i} = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} (r_i(x))^{\varepsilon_i}.$$

С системой Уолша, а также с операцией $\oplus$ подробно можно ознакомиться в книге [2]. Нам нужны следующие свойства :

1) если $x \oplus y$ определена, то

$$W_n(x) \cdot W_n(y) = W_n(x \oplus y); \tag{2}$$

2) если $n = 2^k + m, \quad 1 \leq m \leq 2^k$, то

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i(x) = D_{2^k}(x) + W_{2^k}(x) D_m(x); \tag{3}$$

3) для любого $x \in (0,1)$

$$|D_n(x)| < \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset [0,1]$ и для любого $x \in [0,1]$ множество $E \oplus x = \{t \oplus x, t \in E\}$ измеримо и $\operatorname{mes}(E \oplus x) = \operatorname{mes} E$. Следовательно

$$\int_0^1 f(t \oplus x)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{5}$$

Рассмотрим прямоугольную частичную сумму ряда Фурье–Уолша функции $f(x,y) \in L^1([0,1]^2)$:

$$S_{N,M}(f,x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m} W_n(x) W_m(y), \quad N, M = 1, 2, ...,$$

где

$$c_{n,m} \equiv c_{n,m}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) W_n(x) W_m(y)\, dxdy$$

коэффициенты Фурье–Уолша функции $f(x,y)$. Положим

$$\overline{P}(f,x_0,y_0) = \overline{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(N,M)\to\infty}}} S_{N,M}(f,x,y), \quad \underline{P}(f,x_0,y_0) = \underline{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(N,M)\to\infty}}} S_{N,M}(f,x,y).$$

Скажем, что последовательность $S_{N,M}(f,x,y)$ *сходится к s равномерно* в точке (x_0,y_0) при $(N,M) \to \infty$, если $\overline{P}(f,x_0,y_0) = \underline{P}(f,x_0,y_0) = s$. Пусть $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеет разрыв первого рода, т.е. существуют пределы

$$d_{++}(f,x_0,y_0) = f(x_0+0, y_0+0), \quad d_{+-}(f,x_0,y_0) = f(x_0+0, y_0-0),$$

$$d_{-+}(f,x_0,y_0) = f(x_0-0, y_0+0), \quad d_{--}(f,x_0,y_0) = f(x_0-0, y_0-0).$$

Точка (x_0,y_0) называется *точкой устранимого разрыва*, если

$$\overline{d}(f,x_0,y_0) \equiv \max\left\{d_{\pm\pm}(f,x_0,y_0)\right\} = \underline{d}(f,x_0,y_0) \equiv \min\left\{d_{\pm\pm}(f,x_0,y_0)\right\}.$$

В противном случае точка (x_0,y_0) называется *точкой неустранимого разрыва*. Точка (x_0,y_0) называется *двоично-иррациональной*, если x_0 и y_0 – двоично-иррациональные числа.

Скажем, что для последовательности $S_{N,M}(f,x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеет место *явление Гиббса*, если

$$\frac{\overline{d}(f,x_0,y_0) - \underline{d}(f,x_0,y_0)}{\overline{P}(f,x_0,y_0) - \underline{P}(f,x_0,y_0)} < 1.$$

Нам потребуются следующие леммы (см. [3], [4]).

Лемма 1. *(см. [3]) Если $f(x,y) \in BHV(D)$, $D = I \times \Delta$, то для произвольных $(x,y),(x',y') \in D$*

$$a) \quad V_y(f(x,y),\Delta) \le V_H(f,D), \quad V_x(f(x,y),I) \le V_H(f,D),$$

$$b) \quad |f(x,y) - f(x',y')| \le 2V_H(f,D).$$

Лемма 2. *(см. [4]) Если функция $f(x,y) \in BHV(D)$ и непрерывна в (x_0,y_0), то*

$$\lim_{h\to 0} V_H(f,[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-h,y_0+h]) = 0.$$

Теорема D. *(см. [6]) В каждой двоично-иррациональной точке x_0 имеет место оценка*

$$\frac{4}{3} \le G(x_0,g,\{S_n(g)\}) \le \frac{3}{2} \quad и \quad G(x_0,g,\{S_n(g)\}) = \frac{3}{2} \quad п. в.$$

Вместе с тем, существуют двоично-иррациональные точки, для которых имеет место равенство $G(x_0,g,\{S_n(g)\}) = \frac{4}{3}$.

Обозначим

$$\chi_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_0 < t \le 1, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le t \le x_0, \end{cases}$$

$$\overline{a}(x_0) = \varlimsup_{\substack{t\to x_0\\ n\to\infty}} S_n(\chi_{x_0}(t),t), \quad \underline{a}(x_0) = \varliminf_{\substack{t\to x_0\\ n\to\infty}} S_n(\chi_{x_0}(t),t),$$

где $S_n(\chi_{x_0}(t),t)$ -частичные суммы ряда Фурье–Уолша функции $\chi_{x_0}(t)$.

Лемма 3. *Для частичных сумм ряда Фурье–Уолша функции $\chi_{x_0}(t)$ справедливы следующие равенства :*

а) для двоично-иррациональных точек x_0 и x

$$S_n(\chi_{x_0}(t),x) + S_n(\chi_{1-x_0}(t),1-x) = 1;$$

б) для $n \ge 2^{k+1}$ и $x, x_0 \in \Delta_0^{(k+1)}$

$$S_n(\chi_{x_0}(t),x) = S_n\left(\chi_{x_0+2^{-k-1}}(t), x + \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Доказательство. Так как

$$W_0(1-x)\int_0^1 \chi_{1-x_0}(t)W_0(t)\,dt + W_0(x)\int_0^1 \chi_{x_0}(t)W_0(t)\,dt = 1,$$

то для доказательства а) нужно убедиться, что для $k \geq 1$

$$A_k \equiv W_k(1-x)\int_0^1 \chi_{1-x_0}(t)W_k(t)\,dt + W_k(x)\int_0^1 \chi_{x_0}(t)W_k(t)\,dt = 0. \tag{6}$$

Согласно (2), (5) и $\int_0^1 W_k(t)\,dt = 0$, $k \geq 1$, имеем

$$A_k = \int_0^1 \chi_{1-x_0}(t)W_k(t\oplus(1-x))\,dt + \int_0^1 \chi_{x_0}(t)W_k(t\oplus x)\,dt =$$
$$= \int_{1-x_0}^1 W_k(t\oplus(1\oplus x))\,dt + \int_{x_0}^1 W_k(t\oplus x)\,dt = \int_{1\oplus[1-x_0,1]} W_k(t\oplus x)\,dt +$$
$$+ \int_{[x_0,1]} W_k(t\oplus x)\,dt = \int_{[0,1]} W_k(t\oplus x)\,dt = \int_0^1 W_k(t)\,dt = 0.$$

Таким образом, равенство (6), а следовательно и утверждение а), доказаны. Тетерь докажем утверждение б). Нетрудно видеть, что функции Радемахера обладают следующими свойствами :

$$r_i\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}\right) = r_i(x), \quad i\neq k, \quad r_k\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}\right) = -r_k(x), \quad x\in\Delta_0^{(k+1)}. \tag{7}$$

Из определения функций Уолша и из (7) получим

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} B_i = \sum_{i=0}^{2^k-1} B_i + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} B_i = \sum_{i=0}^{2^k-1}\int_0^{x_0+2^{-k-1}} W_i(t)\,dt - \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\int_0^{2^{-k-1}} 1\,dt +$$
$$+ \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\int_{2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} 1\,dt = 2^{k+1}x_0 = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} W_i(x)\int_0^1 (1-\chi_{x_0}(t))W_i(t)\,dt, \tag{8}$$

где

$$B_i = W_i\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\int_0^1 \left(1-\chi_{x_0+2^{-k-1}}(t)\right)W_i(t)\,dt.$$

Из (8) следует, что

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} B_i' = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} W_i(x)\int_0^1 \chi_{x_0}(t)W_i(t)\,dt,$$

$$B_i' = W_i\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\int_0^1 \chi_{x_0+2^{-k-1}}(t)W_i(t)\,dt.$$

Поэтому достаточно доказать, что при $i = 2^{k+1}, ..., n-1$

$$B_i' = W_i(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_i(t)\, dt.$$

Пусть $i \geq 2^{k+1}$ и $i = 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j 2^j$, $\varepsilon_j = 0$ или 1. Тогда из (7) и из определения системы Уолша следует, что

$$B_i = W_i\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \left[\int_{2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} W_i(t)\, dt + \int_0^{2^{-k-1}} W_i(t)\, dt\right] =$$

$$= W_i\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \int_{2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} W_i(t)\, dt = W_i\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \int_0^{x_0} W_i\left(t + \frac{1}{2^{k+1}}\right) dt =$$

$$= W_{i-\varepsilon_k 2^k}\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \left[r_k\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right]^{\varepsilon_k} \int_0^{x_0} W_{i-\varepsilon_k 2^k}\left(t + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \times$$

$$\times \left[r_k\left(t + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right]^{\varepsilon_k} dt = W_{i-\varepsilon_k 2^k}(x)[-r_k(x)]^{\varepsilon_k} \int_0^{x_0} W_{i-\varepsilon_k 2^k}(t)[-r_k(t)]^{\varepsilon_k}\, dt =$$

$$= W_i(x) \int_0^1 (1 - \chi_{x_0}(t)) W_i(t)\, dt.$$

Теперь, учитывая $\int_0^1 W_j(t)\, dt = 0$, $j \geq 1$, получаем

$$-B_i' = B_i = -W_i(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_i(t)\, dt, \quad i = 2^{k+1}, ..., n-1.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для почти всех* $x \in [0,1]$, $\overline{a}(x) = 5/4$, $\underline{a}(x) = -1/4$.

Доказательство. Из теоремы D и из определения функции Гиббса следует, что

$$\overline{a}(x) \leq \frac{5}{4}, \quad \underline{a}(x) \geq -\frac{1}{4}, \quad \text{mes}\left\{x \in [0,1] : \overline{a}(x) = \frac{5}{4}, \text{ или } \underline{a}(x) = -\frac{1}{4}\right\} = 1. \quad (9)$$

Согласно лемме 3, для двоично-иррациональных точек

$$\overline{a}(x) + \underline{a}(1-x) = 1, \quad (10)$$

и для $x \in \Delta_0^{(k+1)}$ имеем

$$\overline{a}(x) = \overline{a}\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right), \quad \underline{a}\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \underline{a}(x). \quad (11)$$

Обозначим

$$E_1 = \left\{x : \ \overline{a}(x) < \frac{5}{4} \text{ и } \underline{a}(x) = -\frac{1}{4}\right\},$$

$$E_2 = \left\{x : \ \overline{a}(x) = \frac{5}{4} \text{ и } \underline{a}(x) > -\frac{1}{4}\right\},$$

$$E_3 = \left\{x : \ \overline{a}(x) = \frac{5}{4} \text{ и } \underline{a}(x) = -\frac{1}{4}\right\}.$$

Из (10) следует, что

$$\text{mes}\,(E_1) = \text{mes}\,(E_2). \tag{12}$$

Применяя индукцию по k докажем, что

$$\text{mes}\,\left(E_1 \cap \Delta_j^{(k)}\right) = 2^{-k}\,\text{mes}\,(E_1), \quad j = 0, 1, ..., 2^k - 1, \ k \geq 1. \tag{13}$$

При $k = 1$ равенство (13) следует из (11). Предположим, что (13) имеет место при $k - 1$. Так как

$$\Delta_{2j}^{(k)} = \Delta_0^{(k)} + 2j2^{-k}, \quad j = 1, ..., 2^{k-1} - 1, \quad \Delta_1^{(k)} = \Delta_0^{(k)} + 2^{-k}, \quad j = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i 2^i,$$

где $\varepsilon_j = 0$ или 1, из (11) имеем

$$\overline{a}(x) = \overline{a}\left(x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_i 2^i}{2^{k-1}}\right), \quad \underline{a}(x) = \underline{a}\left(x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_i 2^i}{2^{k-1}}\right), \quad x \in \Delta_0^{(k)}.$$

Следовательно, для $j = 1, ..., 2^{k-1} - 1$ имеем

$$\text{mes}\,\left(E_1 \cap \Delta_0^{(k)}\right) = \text{mes}\,\left(E_1 \cap \Delta_1^{(k)}\right) = \text{mes}\,\left(E_1 \cap \Delta_{2j}^{(k)}\right). \tag{14}$$

Из этих соотношений и из индукционого предположения следует (13).

Из (13) следует, что в каждой точке множества E_1 для достаточно малых h имеет место равенство

$$\frac{1}{2h}\,\text{mes}\,((x - h, x + h) \cap E_1) = \text{mes}\,(E_1).$$

Так как почти все точки множества E_1 являются точками плотности множества E_1, то $\text{mes}(E_1) = 0$ или $\text{mes}(E_1) = 1$. Согласно (9) и (12)

$$1 = \text{mes}\,(E_1) + \text{mes}\,(E_2) + \text{mes}\,(E_3) = \text{mes}\,(E_3) + 2\,\text{mes}\,(E_1). \tag{15}$$

Поэтому $\operatorname{mes}(E_1) \neq 1$. Следовательно, $\operatorname{mes}(E_1) = 0$ и $\operatorname{mes}(E_3) = 1$.

Лемма 4 доказана.

Для $A = (A_1, ..., A_m) \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим норму

$$\omega(A) = \max\left\{|A_i|, |A_i - A_j|,\ i, j = 1, ..., m\right\}.$$

Норму матрицы B порядка $m \times m$ определим как

$$||B||_\omega = \sup_{A \neq 0} \frac{\omega(BA)}{\omega(A)}.$$

Обозначим через $\Delta_x^{(p)}$ замыкание множества $\Delta_j^{(p)}$, для которого $x \in \Delta_j^{(p)}$. Запись $A \subset\neq B$ будет означать, что $A \subset B$ и $A \neq B$.

Замечание 1. Мы будем использовать следующие простые свойства функции $\psi^*(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 xy$.

а) На прямоугольнике $I \times \Delta = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ функция $\psi^*(x, y)$ принимает свое максимальное и минилальное значения на вершинах прямоугольника $I \times \Delta$;

б) если функция ψ^* постоянная, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

в) если $I_1 \subset\neq I$ и $\Delta_1 \subset\neq \Delta$ и функция $\psi^*(x, y)$ непостоянная, то

$$\max_{(x,y)\in I\times\Delta} \psi^*(x, y) - \min_{(x,y)\in I\times\Delta} \psi^*(x, y) > \max_{(x,y)\in I_1\times\Delta_1} \psi^*(x, y) - \min_{(x,y)\in I_1\times\Delta_1} \psi^*(x, y).$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Теорема 1. *Если* $f(x, y) \in BHV([0, 1]^2)$ *и* $N, M > 2^{p+1}$, *то*

$$|f(x, y) - S_{N,M}(f, x, y)| \leq 8V_H\left(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)}\right) + 4 \cdot 2^p V_H(f, [0, 1]^2)\left(\frac{1}{\ln N} + \frac{1}{\ln M}\right).$$

Замечание 2. Из теоремы 1, в частности, следует, что для функций из класса BHV имеет место принцип локализации, т. е. если $f(x, y) = 0$ на открытом множестве $E \subset [0, 1]^2$, то $S_{N,M}(f, x, y) \to 0$ равномерно на каждом компакте $K \subset E$ при $(N, M) \to \infty$. Принцип локализации для двойных рядов Фурье функций из класса BHV по системе $\left\{e^{i(nx+my)}\right\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$ был доказан А. А. Саакяном [3].

Доказательство Теоремы 1. Из (2), (3) и (5) имеем

$$S_{N,M}(f,x,y)=\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus t,y\oplus s)D_N(t)D_M(s)\,dt\,ds, \tag{16}$$

где $D_N(t)=\sum\limits_{i=0}^{N-1}W_i(t)$ –ядро Дирихле системы Уолша. Для $N=2^n+N_1$, $1\le N_1\le 2^n$, $M=2^m+M_1$, $1\le M_1\le 2^m$ имеем

$$f(x,y)-S_{N,M}(f,x,y)=\int_0^1\int_0^1 F\cdot D_N(t)D_M(s)\,dt\,ds=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 F[D_{2^n}(t)+W_{2^n}(t)D_{N_1}(t)][D_{2^m}(s)+W_{2^m}(s)D_{M_1}(s)]\,dt\,ds=\sum_{i=1}^4 I_i,$$

где

$$F=f(x,y)-f(x\oplus t,y\oplus s),$$

$$I_1=\int_0^1\int_0^1 F\cdot D_{2^n}(t)D_{2^m}(s)\,dt\,ds,\quad I_2=\int_0^1\int_0^1 F\cdot D_{2^n}(t)D_{M_1}(s)W_{2^m}(s)\,dt\,ds,$$

$$I_3=\int_0^1\int_0^1 F\cdot D_{2^m}(s)W_{2^n}(t)D_{N_1}(t)\,dt\,ds,$$

$$I_4=\int_0^1\int_0^1 F\cdot W_{2^n}(t)D_{N_1}(t)D_{M_1}(s)W_{2^m}(s)\,dt\,ds.$$

Достаточно доказать, что

$$|I_i|\le 2V_H\left(f,\Delta_x^{(p)}\times\Delta_y^{(p)}\right)+2^pV_H(f,[0,1]^2)\left(\frac{1}{\ln N}+\frac{1}{\ln M}\right). \tag{17}$$

При $i=1$ неравенство (17) непосредственно следует из пункта б) леммы 1. Выражение I_2 представим в виде

$$I_2=\sum_{j=0}^{2^m-1}I_2^{(j)},\quad I_2^{(j)}=\int\limits_{\Delta_0^{(n)}}\int\limits_{\Delta_j^{(m)}}F\cdot D_{2^n}(t)D_{M_1}(s)W_{2^m}(s)\,ds\,dt. \tag{18}$$

Очевидно $D_{M_1}(s)$ постоянна на каждом $\Delta_j^{(m)}=\Delta_{2j}^{(m+1)}\cup\Delta_{2j+1}^{(m+1)}$, и $W_{2^m}(s)=1$, когда $s\in\Delta_{2j}^{(m+1)}$, и $W_{2^m}(s)=-1$, когда $s\in\Delta_{2j+1}^{(m+1)}$. Кроме того, если $s\in\Delta_{2j}^{(m+1)}$, то $s\oplus 2^{-m-1}\in\Delta_{2j+1}^{(m+1)}$. Поэтому

$$I_2^{(j)}=\int\limits_{\Delta_0^{(n)}}\int\limits_{\Delta_{2j}^{(m+1)}}F\cdot D_{M_1}(s)D_{2^n}(t)\,ds\,dt-\int\limits_{\Delta_0^{(n)}}\int\limits_{\Delta_{2j+1}^{(m+1)}}F\cdot D_{2^n}(t)D_{M_1}(s)\,ds\,dt=$$

$$= \int\limits_{\Delta_0^{(n)}} \int\limits_{\Delta_{2j}^{(m+1)}} \left[f\left(x \oplus t, y \oplus s \oplus \frac{1}{2^{m+1}}\right) - f(x \oplus t, y \oplus s) \right] D_{2^n}(t) D_{M_1}(s)\, ds\, dt.$$

Учитывая, что $D_{M_1}(s)$ постоянна на каждом $\Delta_j^{(m)}$, из (4) получим $|D_{M_1}(s)| \le \le \frac{2^m}{j+1}$, при $s \in \Delta_j^{(m)}$. В каждом из интегралов сделаем замену переменной $s \longmapsto s \oplus j2^{-m}$, тогда получим

$$|I_2| \le \sum_{j=0}^{2^{m-p}-1} \int\limits_{\Delta_0^{(n)}} \int\limits_{\Delta_0^{(m+1)}} |K_j| \frac{2^{m+n}}{j+1}\, ds\, dt + \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} \int\limits_{\Delta_0^{(n)}} \int\limits_{\Delta_0^{(m+1)}} |K_j| 2^{p+n}\, ds\, dt,$$

где

$$K_j = f\left(x \oplus t, y \oplus \frac{2j}{2^{m+1}} \oplus s\right) - f\left(x \oplus t, y \oplus \frac{2j+1}{2^{m+1}} \oplus s\right).$$

Легко видеть, что для различных j пары точек $\left\{ y \oplus \frac{2j}{2^{m+1}} \oplus s,\ y \oplus \frac{2j+1}{2^{m+1}} \oplus s \right\}$ принадлежат разным интервалам ранга m. Поэтому они образуют непересекающиеся интервалы. Следовательно, согласно пункта а) леммы 1 имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{2^m-2^{m-p}} i^{-1} \right) \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} \int\limits_{\Delta_0^{(n)}} \int\limits_{\Delta_0^{(m+1)}} |K_j| 2^{p+n}\, ds\, dt \le 2^p(1-2^{-p}) V_H(f, [0,1]^2).$$

Таким образом

$$|I_2| \le \frac{1}{2} V_H\left(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)}\right) + \frac{2^p(1-2^{-p}) V_H(f,[0,1]^2)}{2\ln(2^m - 2^{m-p})} \le$$
$$\le \frac{1}{2} V_H\left(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)}\right) + \frac{2^p}{\ln M} V_H(f,[0,1]^2).$$

Неравенство (17) при $i = 3$ доказывается аналогично. Остается рассмотреть случай $i = 4$. Имеем

$$I_4 = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_i^{(n)}} \int_{\Delta_j^{(m)}} F \cdot W_{2^n}(t) D_{N_1}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s)\, ds\, dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_{2i}^{(n+1)}} \int_{\Delta_j^{(m)}} \left[f\left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, y \oplus s\right) - f(x \oplus t, y \oplus s) \right] \times$$
$$\times D_{N_1}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s)\, ds\, dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_{2i}^{(n+1)}} \int_{\Delta_{2j}^{(m+1)}} \left[f\left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, y \oplus s \oplus \frac{1}{2^{m+1}}\right) - \right.$$
$$\left. - f\left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, y \oplus s\right) - f\left(x \oplus t, y \oplus s \oplus \frac{1}{2^{m+1}}\right) + f(x \oplus t, y \oplus s) \right] \times$$
$$\times D_{N_1}(t) D_{M_1}(s)\, ds\, dt.$$

Ниже мы будем использовать следуюшие обозначения :

$$F_{ij} = \Delta^2_{2^{-m-1}}\Delta^1_{2^{-n-1}} f\left(x\oplus t\oplus \frac{2i}{2^{n+1}}, y\oplus s\oplus \frac{2j}{2^{m+1}}\right),$$

$$\Delta^1_h f(u,v) = f(u\oplus h, v) - f(u,v), \quad \Delta^2_h f(u,v) = f(u, v\oplus h) - f(u,v).$$

Имеем

$$I_4 = \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^m-1}\int_{\Delta_0^{(n+1)}}\int_{\Delta_0^{(m+1)}} F_{ij}D_{M_1,j}D_{N_1,i}\,ds\,dt = \sum_{i=1}^{3} J_i,$$

где $D_{M_1 j}$ – постоянное значение ядра $D_{M_1}(s)$ на интервале $\Delta_j^{(m)}$ и

$$J_1 = \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1}\sum_{j=0}^{2^{m-p}-1} T_{ij}, \quad J_2 = \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1}\sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} T_{ij}, \quad J_3 = \sum_{i=2^{n-p}}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^m-1} T_{ij},$$

$$T_{ij} = \int_{\Delta_0^{(n+1)}}\int_{\Delta_0^{(m+1)}} F_{ij}D_{M_1,j}D_{N_1,i}\,ds\,dt.$$

Из определения гармонической вариации следует, что

$$|J_1| \le \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1}\sum_{j=0}^{2^{m-p}-1}\int_{\Delta_0^{(n+1)}}\int_{\Delta_0^{(m+1)}} |F_{ij}|\frac{2^{n+m}}{(i+1)(j+1)}\,ds\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{4}V_H\left(f, \Delta_x^{(p)}\times\Delta_y^{(p)}\right),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{2^m-2^{m-p}} k^{-1}\right)\sum_{i=0}^{2^{n-p}-1}\sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1}\int_{\Delta_0^{(n+1)}}\int_{\Delta_0^{(m+1)}} |F_{ij}|\frac{2^{p+n}}{i+1}\,ds\,dt \le$$

$$\le 2^{p-2}(1-2^{-p})V_H(f,[0,1]^2),$$

$$|J_2| \le \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1}\sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1}\int_{\Delta_0^{(n+1)}}\int_{\Delta_0^{(m+1)}} |F_{ij}|\frac{2^{n+p}}{i+1}\,ds\,dt \le \frac{2^{p-1}}{\ln M}V_H(f,[0,1]^2).$$

Аналогично доказывается, что

$$|J_3| \le \frac{2^{p-1}}{\ln N}V_H(f,[0,1]^2).$$

Отсюда следует неравенство (17). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(x,y)\in BHV([0,1]^2)$. Если (x_0,y_0) – точка устранимого разрыва функции $f(x,y)$, то частичные суммы $S_{N,M}(f,x,y)$ равномерно сходятся к $f(x_0+0, y_0+0)$ в точке (x_0,y_0).*

Из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Если $f(x,y) \in BHV([0,1]^2)$ и $f(x,y)$ непрерывна в точках некоторого компакта $K \subset [0,1]^2$, то частичные суммы $S_{N,M}(f,x,y)$ равномерно сходятся к $f(x,y)$ на K.*

Доказательство Теоремы 2. Пусть функция $\widetilde{f}(x,y)$ равна $f(x_0+0,y_0+0)$ на множестве $\{x_0\}\times[0,1]$ и $[0,1]\times\{y_0\}$, и равна $f(x,y)$ – в остальных точках множества $[0,1]^2$. Так как $S_{N,M}(f,x,y) = S_{N,M}(\widetilde{f},x,y)$ и $\widetilde{f}(x_0+0,y_0+0) = f(x_0+0,y_0+0)$, то остается доказать, что $S_{N,M}(\widetilde{f},x,y) \to \widetilde{f}(x_0+0,y_0+0)$ равномерно в точке (x_0,y_0) при $(N,M)\to\infty$. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Согласно лемме 2, существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что

$$V_H\left(\widetilde{f},[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\cap[0,1]^2\right)<\frac{\varepsilon}{48}.$$

Фиксируем натуральное число p, удовлетворяющее условию $2^{-p}<\delta/4$. Тогда из леммы 1 следует, что на множестве $Q=\left\{(x,y):\ |x-x_0|<\frac{\delta}{2},\ |y-y_0|<\frac{\delta}{2}\right\}$ выполняется

$$V_H\left(\widetilde{f},\Delta_x^{(p)}\times\Delta_y^{(p)}\right)<3V_H\left(\widetilde{f},[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\cap[0,1]^2\right).$$

Если N и M достаточно большие, то согласно теореме 1, на множестве Q имеем

$$\left|\widetilde{f}(x,y)-S_{N,M}(\widetilde{f},x,y)\right|\le\varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Определим верхнюю и нижнюю функции Гиббса в точке (x_0,y_0) равенствами

$$\overline{G}(x_0,y_0)=\sup_f G(f,x_0,y_0),\quad \text{и}\quad \underline{G}(x_0,y_0)=\inf_f G(f,x_0,y_0),$$

$$G(f,x_0,y_0)=\frac{\overline{d}(f,x_0,y_0)-\underline{d}(f,x_0,y_0)}{\overline{P}(f,x_0,y_0)-\underline{P}(f,x_0,y_0)},$$

где sup и inf берется по всем функциям из класса BHV, для которых (x_0,y_0) является точкой неустранимого разрыва.

Теорема 4. *В каждой двоично-иррациональной точке имеет место оценка*

$$0 < \underline{G}(x_0, y_0) < \overline{G}(x_0, y_0) < 1,$$

и почти всюду $\underline{G}(x_0, y_0) = \frac{4}{9}, \quad \overline{G}(x_0, y_0) = \frac{2}{3}.$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y) \in \mathrm{BHV}([0,1]^2)$ имеет неустранимый разрыв в точке (x_0, y_0). Обозначим .

$$\psi(t,s) = d_{++}(f, x_0, y_0)\chi_{y_0}(s)\chi_{x_0}(t) + d_{-+}(f, x_0, y_0)\chi_{y_0}(s)(1 - \chi_{x_0}(t)) +$$

$$+ d_{+-}(f, x_0, y_0)(1 - \chi_{y_0}(s))\chi_{x_0}(t) + d_{--}(f, x_0, y_0)(1 - \chi_{y_0}(s))(1 - \chi_{x_0}(t)).$$

Система уравнений

$$\begin{cases} A_0 = d_{--}(f, x_0, y_0), \\ A_1 = d_{+-}(f, x_0, y_0) - d_{--}(f, x_0, y_0), \\ A_2 = d_{-+}(f, x_0, y_0) - d_{--}(f, x_0, y_0), \\ A_3 = d_{++}(f, x_0, y_0) - d_{-+}(f, x_0, y_0) - d_{+-}(f, x_0, y_0) + d_{--}(f, x_0, y_0) \end{cases} \tag{19}$$

равносильна уравнению $A = Cd$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_{--}(f, x_0, y_0) \\ d_{+-}(f, x_0, y_0) \\ d_{-+}(f, x_0, y_0) \\ d_{++}(f, x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Точка (x_0, y_0) является точкой устранимого разрыва для функции $f(x, y) - \psi(x, y)$. Согласно теореме 2, частичные суммы двойных рядов Фурье-Уолша функции $f(x, y) - \psi(x, y)$ равномерно сходятся к нулю в точке (x_0, y_0). Следовательно

$$\overline{P}(f, x_0, y_0) = \overline{P}(\psi, x_0, y_0), \quad \underline{P}(f, x_0, y_0) = \underline{P}(\psi, x_0, y_0). \tag{20}$$

Согласно теореме D имеем

$$[0,1] \subset\neq [\underline{a}(x_0), \overline{a}(x_0)], \quad [0,1] \subset\neq [\underline{a}(y_0), \overline{a}(y_0)]. \tag{21}$$

Пусть $\psi^*(x,y) = A_3xy + A_2y + A_1x + A_0$ и $I(\cdot) = [\underline{a}(\cdot), \overline{a}(\cdot)]$. Тогда из пункта а) замечания 1 следует,что

$$\overline{P}(\psi, x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in I(x_0)\times I(y_0)} \psi^*(x,y) = \max_{(x,y)\in \partial I(x_0)\times \partial I(y_0)} \psi^*(x,y), \tag{22}$$

$$\underline{P}(\psi, x_0, y_0) = \min_{(x,y)\in I(x_0)\times I(y_0)} \psi^*(x,y) = \min_{(x,y)\in \partial I(x_0)\times \partial I(y_0)} \psi^*(x,y), \tag{23}$$

$$\overline{d}(\psi, x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in [0,1]^2} \psi^*(x,y) = \max_{(x,y)\in \partial[0,1]\times \partial[0,1]} \psi^*(x,y), \tag{24}$$

$$\underline{d}(\psi, x_0, y_0) = \min_{(x,y)\in [0,1]^2} \psi^*(x,y) = \min_{(x,y)\in \partial[0,1]\times \partial[0,1]} \psi^*(x,y), \tag{25}$$

где ∂I обозначает множество концевых точек интервала I. Обозначим

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a}(x_0) & \underline{a}(y_0) & \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ 1 & \overline{a}(x_0) & \underline{a}(y_0) & \overline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ 1 & \underline{a}(x_0) & \overline{a}(y_0) & \underline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) \\ 1 & \overline{a}(x_0) & \overline{a}(y_0) & \overline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) \end{pmatrix}; \widetilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \widetilde{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \overline{a}(x_0) - \underline{a}(x_0) & 0 & \overline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ 0 & \overline{a}(y_0) - \underline{a}(y_0) & \underline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ \overline{a}(x_0) - \underline{a}(x_0) & \overline{a}(y_0) - \underline{a}(y_0) & \overline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \end{pmatrix}; \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что матрицы D и $\widetilde{D}$ обратимы. Допустим противное, тогда существуют действительные числа λ_i, $i = 0,1,2,3$ такие, что $\sum\limits_{i=0}^{3} \lambda_i^2 \neq 0$ и

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \underline{a}(x_0) \\ \overline{a}(x_0) \\ \underline{a}(x_0) \\ \overline{a}(x_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \underline{a}(y_0) \\ \underline{a}(y_0) \\ \overline{a}(y_0) \\ \overline{a}(y_0) \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ \overline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ \underline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) \\ \overline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Следовательно, функция $\psi_1(x,y) = \lambda_0 + \lambda_1 x \lambda_2 y + \lambda_3 xy$ принимает значение нуль на вершинах прямоугольника $I(x_0) \times I(y_0)$. Из замечания 1 следует, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Это противоречие доказывает, что $\det(D) \neq 0$. Строки матрицы $\widetilde{D}$ линейно независимы, так как в противном случае существовали бы действительные числа μ_i, $i = 1,2,3$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i^2 \neq 0$ и

$$\mu_1(\overline{a}(x_0) - \underline{a}(x_0),\ 0,\ \overline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) +$$

$$+ \mu_2(0,\ \overline{a}(y_0) - \underline{a}(y_0),\ \underline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) +$$

$$+ \mu_3(\overline{a}(x_0) - \underline{a}(x_0),\ \overline{a}(y_0) - \underline{a}(y_0),\ \overline{a}(x_0)\overline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) = (0,\ 0,\ 0),$$

и следовательно

$$
\begin{aligned}
&-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)(1,\ \underline{a}(x_0),\ \underline{a}(y_0),\ \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0))+\\
&+\mu_1(1,\ \overline{a}(x_0),\ \underline{a}(y_0),\ \overline{a}(x_0)\underline{a}(y_0))+\\
&+\mu_2(1,\ \underline{a}(x_0),\ \overline{a}(y_0),\ \underline{a}(x_0)\overline{a}(y_0))+\\
&+\mu_3(1,\ \overline{a}(x_0),\ \overline{a}(y_0),\ \overline{a}(x_0)\overline{a}(y_0))=(0,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Из (27) следует, что строки матрицы D линейно независимы, что противоречит существованию обратной матрицы D^{-1}. Нетрудно видеть, что

$$
\widetilde{D}^{-1}=\begin{pmatrix}\overline{a}(y_0)L^{-1} & \underline{a}(y_0)L^{-1} & -\underline{a}(y_0)L^{-1}\\ \underline{a}(x_0)L^{-1} & \overline{a}(x_0)L^{-1} & -\underline{a}(x_0)L^{-1}\\ -L^{-1} & -L^{-1} & L^{-1}\end{pmatrix},
$$

где $L=\sqrt{\det\widetilde{D}}=|I(x_0)|\cdot|I(y_0)|$. Из (20), (22) – (25) следует, что

$$
\overline{P}(f,x_0,y_0)-\underline{P}(f,x_0,y_0)=\omega(\widetilde{D}\widetilde{A}),
\tag{28}
$$

$$
\overline{d}(f,x_0,y_0)-\underline{d}(f,x_0,y_0)=\omega(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{A}).
\tag{29}
$$

В силу замечания 1 имеем $G(f,x_0,y_0)<1$. Отсюда и из (28), (29) следует

$$
G(f,x_0,y_0)=\frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{A})}{\omega(\widetilde{D}\widetilde{A})}=\frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}z)}{\omega(z)}<1,
\tag{30}
$$

где $z=\widetilde{D}\widetilde{A}$. Множество $\{z\in\mathbb{R}^3:\omega(z)=1\}$ компактно в $\mathbb{R}^3$ по норме $\omega(\cdot)$ и $\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}$ является непрерывным оператором. Поэтому из (30) следует, что

$$
\left\|\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}\right\|_\omega<1.
\tag{31}
$$

Из (19) вытекает, что (x_0,y_0) является точкой устранимого разрыва тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}=0$. Согласно (30) имеем

$$
\overline{G}(x_0,y_0)=\sup_{\widetilde{A}\neq0}\frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{A})}{\omega(\widetilde{D}\widetilde{A})}=\sup_{z\neq0}\frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}z)}{\omega(z)}=\left\|\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}\right\|_\omega,
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{G}(x_0,y_0)&=\left[\sup_f\frac{1}{G(f,x_0,y_0)}\right]^{-1}=\left[\sup_{\widetilde{A}\neq0}\frac{\omega(\widetilde{D}\widetilde{A})}{\omega(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{A})}\right]^{-1}=\\
&=\left[\sup_{z\neq0}\frac{\omega(\widetilde{D}\widetilde{C}z)}{\omega(z)}\right]^{-1}=\left\|\widetilde{D}\widetilde{C}\right\|_\omega^{-1}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Из (31) – (33) следует, что

$$0 < \underline{G}(x_0, y_0), \quad \overline{G}(x_0, y_0) < 1.$$

Докажем неравенство $\underline{G}(x_0, y_0) < \overline{G}(x_0, y_0)$. Допустим противное : $\underline{G}(x_0, y_0) = \overline{G}(x_0, y_0)$. Тогда при

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

будем иметь

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}A^1)}{\omega(\widetilde{D}A^1)} = \frac{1}{\overline{a}(x_0) - \underline{a}(x_0)} = \frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}A^2)}{\omega(\widetilde{D}A^2)} = \frac{1}{\overline{a}(y_0) - \underline{a}(y_0)},$$

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{1}{\max\{\overline{a}(x_0)[\overline{a}(y_0) - \underline{a}(y_0)]; \overline{a}(y_0)[\overline{a}(x_0) - \underline{a}(x_0)]\}} = \frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}A^3)}{\omega(\widetilde{D}A^3)}.$$

Отсюда следует, что $\overline{a}(y_0) = \overline{a}(x_0) = 1$, $\underline{a}(x_0) = \underline{a}(y_0)$. Из теоремы D имеем $|\underline{a}(x_0)| \le \frac{1}{4}$, следовательно

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{\omega(\widetilde{C}^{-1}A^4)}{\omega(\widetilde{D}A^4)} = \frac{3}{(1 - \underline{a}(x_0))(3 + \underline{a}(x_0))} \quad \text{и} \quad \underline{a}(x_0) = 0.$$

С другой стороны, имеем $\overline{a}(y_0) = \overline{a}(x_0) = 1$ и $\underline{a}(x_0) = \underline{a}(y_0) = 0$, которое противоречит (21).

Согласно лемме 4, для почти всех (x_0, y_0) имеем

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\omega(\widetilde{D}\widetilde{C}\widetilde{A}) \le \frac{9}{4}\omega(\widetilde{A}), \quad \omega\left(\widetilde{D}\widetilde{C}(A^4 - A^3)\right) = \frac{9}{4}\omega(A^4 - A^3),$$

$$\omega\left(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}\widetilde{A}\right) \le \frac{2}{3}\omega(\widetilde{A}), \quad \omega\left(\widetilde{C}^{-1}\widetilde{D}^{-1}A^3\right) = \frac{2}{3}\omega(A^3).$$

Следовательно, $\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$, $\underline{G}(x_0, y_0) = \frac{4}{9}$ для почти всех (x_0, y_0).

Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Если x_0 и y_0 двоично-рациональные, то в точке (x_0, y_0) отсутствует явление Гиббса.

В случае, когда только одна из точек x_0 и y_0 двоично-рациональна, явление Гиббса зависит от функции. Например, в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ для частичных сумм двойного ряда Фурье-Уолша функции

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{при } 1/2 \le x \le 1, \\ 0, & \text{при } 0 \le x < 1/2, \end{cases}$$

отсутствует явление Гиббса, а для функции

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{\sqrt{3}} < y \le 1, \\ 0, & \text{при } 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

в той же точке имеет место явление Гиббса. Автор приносит благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постоянное внимание к работе.

ABSTRACT. In the paper is proved that if an integrable function $f(x,y)$ has bounded harmonic variation and is continuous at each point of a compact K, then the double Fourier–Walsh series of function $f(x,y)$ uniformly convergence on K. Applying this result the Gibbs phenomenon for double Fourier–Walsh series is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
2. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения, Наука, Москва, 1987.
3. А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 6, стр. 517 – 529, 1987.
4. О. Г. Саргсян, "О сходимости и явление Гиббса для кратных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 1 – 20, 1993.
5. А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виленкина-Джафарли", Сиб. Мат. Журнал, т. 12, № 1, стр. 147 – 157, 1971.
6. Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Явление Гиббса для системы Уолша", ДАН СССР, т. 268, № 5, стр. 1033 – 1034, 1983.

28 сентября 1995

Ереванский государственный университет

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

В настоящей работе путем подходящего выбора последовательностей векторов $\overline{h} = (h_1, ..., h_m)$, $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$ определяется линейный метод суммирования, равномерно суммирующий кубические и сферические средние частных сумм рядов Фурье функции $f \in \mathbf{C}(T_m)$.. Дается оценка сверху отклонения этих частных сумм от $f(\overline{x})$ в терминах модуля непрерывности $\omega(f;\overline{\delta})$. Аналогичные результаты доказываютая для пространств $L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Введем следующие обозначения :

$\mathbb{R}^m$ – m–мерное вещественное евклидово пространство; $\overline{x} = (x_1, ..., x_m)$, $\overline{t} = (t_1, ..., t_m)$ – элементы пространства $\mathbb{R}^m$; $\overline{n} = (n_1, ..., n_m) \in \mathbb{R}^m$ обозначает векторы с целочисленными координатами ; $T_m = [-\pi, \pi)^m$ – m–кратное декартово произведение интервала $[-\pi, \pi)$; $\overline{n}\cdot\overline{x} = n_1x_1+...+n_mx_m$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ векторов $\overline{n}$ и $\overline{x}$; $\overline{N} = (N_1, ..., N_m)$ – вектор с натуральными координатами ; $\mathbf{C}(T_m)$ – класс 2π–периодических по каждой переменной, непрерывных на T_m функций $f(\overline{x})$; $L_q(T_m)$ – класс 2π–периодических по каждой переменной, интегрируемых на T_m в степени q $(1 \leq q < \infty)$ функций $f(\overline{x})$; $\|f\|_\infty$ и $\|f\|_q$ – нормы в пространствах $\mathbf{C}(T_m)$ и $L_q(T_m)$ соответственно.

Для заданного $\overline{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_m)$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq m$, обозначим через $\omega(f;\overline{\delta})$ и $\omega^{(q)}(f;\overline{\delta})$ модули непрерывности в $\mathbf{C}(T_m)$ и $L_q(T_m)$, соответственно :

$$\omega(f;\overline{\delta}) = \sup_{\substack{\overline{x}, |h_j| \leq \delta_j \\ 1 \leq j \leq m}} |f(x_1 + h_1, ..., x_m + h_m) - f(x_1, ..., x_m)|,$$

$$\omega^{(q)}(f;\overline{\delta}) = \sup_{\substack{|h_j|\le\delta_j \\ 1\le j\le m}} \|f(x_1+h_1,...,x_m+h_m) - f(x_1,...,x_m)\|_q.$$

Ряд Фурье функции $f \in L_1(T_m)$ пишется в виде

$$\sum_{\overline{n}} c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} c_{n_1...n_m} e^{in_1x_1}...e^{in_mx_m}, \tag{1.1}$$

где

$$c_{\overline{n}} = c_{n_1...n_m} = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m} f(\overline{x})\, e^{-i\overline{n}\,\overline{x}}\, d\overline{x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\pi}^{\pi} ... \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1,..,x_m)\, e^{-in_1x_1}...e^{-in_mx_m}\, dx_1...dx_m \tag{1.2}$$

- коэффициенты Фурье.

Для заданного натурального вектора $\overline{N}$ обозначим через $S_{\overline{N}}(f,\overline{x})$ прямоугольные частные суммы ряда (1.1) :

$$S_{\overline{N}}(f,\overline{x}) = \sum_{|\overline{n}|\le|\overline{N}|} c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} ... \sum_{n_m=-N_m}^{N_m} c_{n_1...n_m} e^{in_1x_1}...e^{in_mx_m}. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже запись $|\overline{n}| \le |\overline{N}|$ и $|\overline{n}| > |\overline{N}|$ означают $|n_j| \le |N_j|$ и $|n_j| > |N_j|$ для всех $1 \le j \le m$, соответственно.

В частности, если $\overline{N} = (N,...,N)$, где N - натуральное число, то кубические частные суммы $S_{\overline{N}}(f,\overline{x})$ будем обозначать через $S_N(f,\overline{x})$.

Пусть $\overline{p} = (p_1,...,p_m)$, $\overline{h} = (h_1,...,h_m)$, где p_j – натуральные числа, $h_j > 0$, $1 \le j \le m$ и

$$p_j \ge 2, \qquad p_jh_j \le \pi, \quad 1 \le j \le m. \tag{1.4}$$

Положим

$$\Delta(\overline{p},\overline{h}) = [-p_1h_1, p_1h_1] \times ... \times [-p_mh_m, p_mh_m], \tag{1.5}$$

$$R_{h_j}^{(p_j)}(x_j) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{n_j=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{\sin(n_jh_j)}{n_jh_j}\right)^{p_j} e^{in_jx_j}\right), \qquad 1 \le j \le m, \tag{1.6}$$

$$R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m} R_{h_j}^{(p_j)}(x_j), \tag{1.7}$$

где $\sum'$ означает отсутствие в сумме члена с $n_j = 0$.

Известно (см. [1], р. 364), что функция $R_{h_j}^{(p_j)}(x_j)$ обладает следующими свойствами :

$$R_{h_j}^{(p_j)}(x_j) \geq 0, \qquad x_j \in [-p_j h_j, p_j h_j], \tag{1.8}$$

$$R_{h_j}^{(p_j)}(x_j) = 0, \qquad x_j \in [-\pi, \pi] \setminus [-p_j h_j, p_j h_j]. \tag{1.9}$$

Следовательно, согласно (1.5) и (1.7) имеем

$$R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{x}) \geq 0, \quad \overline{x} \in \Delta(\overline{p}, \overline{h}) \quad \text{и} \quad R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{x}) = 0, \quad \overline{x} \in T_m \setminus \Delta(\overline{p}, \overline{h}). \tag{1.10}$$

Из (1.6) — (1.10) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_{h_j}^{(p_j)}(x_j)\, dx_j = \int_{-p_j h_j}^{p_j h_j} R_{h_j}^{(p_j)}(x_j)\, dx_j = 1, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{1.11}$$

$$\int_{T_m} R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x})\, d\overline{x} = \int_{\Delta(\overline{p}, \overline{h})} R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x})\, d\overline{x} = 1. \tag{1.12}$$

Обозначив через $a_{\overline{n}} = a_{n_1 \ldots n_m}$ коэффициенты Фурье функции $R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x})$, из (1.6) и (1.7) будем иметь

$$a_{\overline{n}} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x}) e^{-i\overline{n}\,\overline{x}}\, d\overline{x} = \frac{1}{(2\pi)^m} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} e^{i n_j x_j}, \tag{1.13}$$

где в правой части (1.13) сомножители с $n_j = 0$ считаются равным 1.

Рассмотрим интегральные средние

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \int_{T_m} f(\overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t} = \int_{\Delta(\overline{p}, \overline{h})} f(\overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t}, \tag{1.14}$$

$$F_{\overline{h}, \overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \int_{T_m} S_{\overline{N}}(f, \overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t} = \int_{\Delta(\overline{p}, \overline{h})} S_{\overline{N}}(f, \overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t}. \tag{1.15}$$

Заметим, что вторые равенства в (1.14) и (1.15) следуют из (1.10).

В дальнейшем при $\overline{N} = (N, \ldots, N)$ вместо $F_{\overline{h}, \overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x})$ будем использовать обозначение $F_{\overline{h}, N}^{(\overline{p})}(f, \overline{x})$.

Из (1.13) следует, что ряд Фурье функции $R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})$ сходится абсолютно и равномерно. Поэтому, в силу (1.14) имеем

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} \right] c_{n_1 \ldots n_m} e^{i n_1 x_1} \ldots e^{i n_m x_m}. \tag{1.16}$$

Правая часть (1.16) является рядом Фурье функции $\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$, который сходится абсолютно и равномерно, так как $p_j \geq 2$.

Аналогично имеем

$$F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x}) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \dots \sum_{n_m=-N_m}^{N_m} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} \right] c_{n_1 \dots n_m} e^{in_1 x_1} \dots e^{in_m x_m}. \tag{1.17}$$

Из (1.10), (1.12), (1.14), (1.15) и теоремы о среднем значении интеграла от непрерывной функции получаем

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x}) = f(\overline{x} + \overline{\xi}(\overline{x})), \quad \overline{\xi}(\overline{x}) = (\xi_1(\overline{x}), \dots, \xi_m(\overline{x})) \in \Delta(\overline{p}, \overline{h}), \tag{1.18}$$

$$F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x}) = S_{\overline{N}}(f, \overline{x} + \overline{\eta}(\overline{x})), \quad \overline{\eta}(\overline{x}) = (\eta_1(\overline{x}), \dots, \eta_m(\overline{x})) \in \Delta(\overline{p}, \overline{h}). \tag{1.19}$$

В настоящей работе путем подходящего выбора последовательностей векторов $\overline{h} = (h_1, \dots, h_m)$, $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ мы определяем линейный метод суммирования, равномерно суммирующий кубические и сферические средние частных сумм рядов Фурье функций $f \in \mathbf{C}(T_m)$.. Мы приводим оценку сверху отклонения этих частных сумм от $f(\overline{x})$ в терминах модуля непрерывности $\omega(f;\overline{\delta})$. Аналогичные результаты доказываются также для пространств $L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $M = \{1, \dots, m\}$, и пусть B -подмножество M такое, что $B \neq \emptyset$ и $B \neq M$. Элементы множества B в возрастающем порядке обозначим через $j_\nu(B)$, $1 \leq \nu \leq$ $\leq |B|$, где $|B|$ – число элементов B. Через $j_\nu(B^c)$ обозначим также в возрастающем порядке, элементы множества $B^c = M \setminus B$. Для $B \subseteq M$ положим

$$\overline{x}(B) = (x_{j_1(B)}, \dots, x_{j_{|B|}(B)}), \qquad \overline{x}(M) = (x_1, \dots, x_m) \tag{2.1}$$

и

$$a(\overline{n}(B), \overline{h}(B), \overline{p}(B)) = \prod_{j \in B} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{|B|} \left(\frac{\sin(n_{j_\nu(B)} h_{j_\nu(B)})}{n_{j_\nu(B)} h_{j_\nu(B)}} \right)^{p_{j_\nu(B)}} . \qquad (2.2)$$

В этих обозначениях, для любого $B \subset M$, $B \neq \emptyset$, $B \neq M$ имеем

$$a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p}) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} =$$

$$= a(\overline{n}(B), \overline{h}(B), \overline{p}(B)) \cdot a(\overline{n}(B^c), \overline{h}(B^c), \overline{p}(B^c)). \qquad (2.3)$$

Для $B \subset M$ и $b_{\overline{n}} = b_{n_1 \dots n_m}$, будем обозначать

$$\sum_{|\overline{n}(B^c)| \leq \overline{N}(B^c)} \; \sum_{|\overline{n}(B)| > \overline{N}(B)} b_{\overline{n}} =$$
$$= \sum_{n_{j_1(B^c)} \leq N_{j_1(B^c)}} \cdots \sum_{n_{j_{|B^c|}(B^c)} \leq N_{j_{|B^c|}(B^c)}} \; \sum_{n_{j_1(B)} > N_{j_1(B)}} \cdots \sum_{n_{j_{|B|}(B)} \leq N_{j_{|B|}(B)}} b_{\overline{n}}. \qquad (2.4)$$

Нетрудно убедиться, что из (1.16) и (1.17) следует

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) - F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \sum_{|\overline{n}| > \overline{N}} a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p}) c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} +$$

$$+ \sum_{B \subset M} \; \sum_{|\overline{n}(B^c)| \leq \overline{N}(B^c)} \; \sum_{|\overline{n}(B)| > \overline{N}(B)} a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p}) c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}}, \qquad (2.5)$$

где сумма $\sum\limits_{B \subset M}$ распространяется на все непустые подмножества $B \subset M$, $B \neq M$.

Сначала мы докажем две леммы. Обозначим

$$\varepsilon_{\overline{N}(M)} = \sup\{|c_{\overline{n}}| : |\overline{n}| > \overline{N}\}, \qquad \varepsilon_{\overline{N}(B)} = \sup\{|c_{\overline{n}}| : |n_j| > N_j, j \in B\}. \qquad (2.6)$$

Лемма 1. *Для всех $f \in L(T_m)$, $\overline{N}$, $\overline{h}$ и $\overline{p}$, удовлетворяющих условию (1.4), имеет место неравенство*

$$||\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) - F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x})|| \leq \sum_{|\overline{n}| > \overline{N}} |a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p})||c_{\overline{n}}| +$$

$$+ \sum_{B \subset M} \; \sum_{|\overline{n}(B^c)| \leq \overline{N}(B^c)} \; \sum_{|\overline{n}(B)| > \overline{N}(B)} |a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p})||c_{\overline{n}}| \leq \qquad (2.7)$$

$$\leq \frac{2^m \varepsilon_{\overline{N}(M)}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \left[h_j^{p_j} N_j^{p_j - 1} (p_j - 1) \right]} + \sum_{B \subset M} 2^{|B|} \varepsilon_{\overline{N}(B)} \frac{\prod\limits_{j \in B^c} (2N_j + 1)}{\prod\limits_{j \in B} \left[h_j^{p_j} N_j^{p_j - 1} (p_j - 1) \right]}.$$

Доказательство. Первое неравенство в (2.7) немедленно следует из (2.5), поэтому нам нужно проверить только второе неравенство. Из (2.2), (2.3) и (2.6) следует

$$\sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})|\,|c_{\overline{n}}| \le \varepsilon_{\overline{N}(B)}\times \tag{2.8}$$

$$\times \sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B))|\cdot|a(\overline{n}(B^c),\overline{h}(B^c),\overline{p}(B^c))|.$$

Очевидно

$$|a(\overline{n}(B^c),\overline{h}(B^c),\overline{p}(B^c))| = \prod_{j\in B^c}\left|\frac{\sin(n_jh_j)}{n_jh_j}\right|^{p_j} \le 1, \tag{2.9}$$

$$|a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B))| = \prod_{j\in B}\left|\frac{\sin(n_jh_j)}{n_jh_j}\right|^{p_j} \le$$

$$\le \prod_{j\in B}\frac{1}{|n_j|^{p_j}h_j^{p_j}} = \prod_{\nu=1}^{|B|}\frac{1}{|n_{j_\nu(B)}h_{j_\nu(B)}|^{p_{j_\nu(B)}}}. \tag{2.10}$$

Поэтому

$$\sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})| \le \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B))| \le$$

$$\le \sum_{n_{j_1(B)}>N_{j_1(B)}} \cdots \sum_{n_{j_{|B|}(B)}\le N_{j_{|B|}(B)}} \prod_{\nu=1}^{|B|}\frac{1}{|n_{j_\nu(B)}h_{j_\nu(B)}|^{p_j}}. \tag{2.11}$$

Для всех $h>0$, $p>1$ и для натурального N имеем

$$\sum_{|n|>N}\frac{1}{n^ph^p} \le \frac{2}{h^pN^{p-1}(p-1)}. \tag{2.12}$$

Применяя эту оценку поочередно к каждой сумме правой части (2.11), получим

$$\sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})| \le 2^{|B|}\prod_{j\in B}\frac{1}{h_j^{p_j}N_j^{p_j-1}(p_j-1)}. \tag{2.13}$$

Из (2.9) и (2.13) следует

$$\sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})||c_{\overline{n}}| \le$$

$$\le 2^{|B|}\varepsilon_{\overline{N}(B)}\prod_{j\in B^c}(2N_j+1)\left(\prod_{j\in B}h_j^{p_j}N_j^{p_j-1}(p_j-1)\right)^{-1}. \tag{2.14}$$

Аналогично получаем

$$\sum_{|\overline{n}|>\overline{N}} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})||c_{\overline{n}}| \le 2^{|M|}\varepsilon_{\overline{N}(M)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} h_j^{p_j} N_j^{p_j-1}(p_j-1)}. \tag{2.15}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $\overline{h}$ и $\overline{p}$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию (1.4), то для всех $f(\overline{x}) \in \mathbf{C}(T_m)$ и $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$ имеют место, соответственно, неравенства*

$$\|f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})\| = \sup_{\overline{x}\in\mathbb{R}^m} |f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})| \le \omega(f;p_1h_1,...,p_mh_m), \tag{2.16}$$

$$\|f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})\|_q = \left(\int_{T_m} |f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})|^q\,d\overline{x}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \omega^{(q)}(f;p_1h_1,...,p_mh_m). \tag{2.17}$$

Доказательство. Неравенство (2.16) следует из (1.5), (1.18) и из определения модуля непрерывности $\omega(f;\overline{\delta})$. Докажем, что неравенство (2.17) следует из свойств (1.10), (1.12) и (1.14) функции $\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$. Применяя обобщенное неравенство Минковского получаем

$$\|f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})\|_q =$$

$$= \left(\int_{T_m} \left|\int_{T_m} f(\overline{x}) R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\,d\overline{t} - \int_{T_m} f(\overline{x}-\overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\,d\overline{t}\right|^q d\overline{x}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\int_{T_m} \left(\int_{\Delta(\overline{p},\overline{h})} |f(\overline{x}-\overline{t}) - f(\overline{x})|\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\,d\overline{t}\right)^q d\overline{x}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \int_{\Delta(\overline{p},\overline{h})} R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t}) \left(\int_{T_m} |f(\overline{x}-\overline{t}) - f(\overline{x})|^q\,d\overline{x}\right)^{1/q} d\overline{t} \le$$

$$\le \int_{\Delta(\overline{p},\overline{h})} R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\,\omega^{(q)}(f;p_1h_1,...,p_mh_m)\,d\overline{t} = \omega^{(q)}(f;p_1h_1,...,p_mh_m).$$

Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Пусть $\theta \ge m$, и пусть $Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})$, $T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})$ обозначают функции, полученные, соответственно, из $\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$ и $F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$, когда в них полагается

$$\overline{h} = (e^{\theta}/N_1,...,e^{\theta}/N_m), \qquad \overline{p} = ([\ln N_1],...,[\ln N_m]), \tag{3.1}$$

где $[a]$ -целая часть числа a. Условимся считать, что

$$\mathbf{C}(T_m) = L_\infty(T_m), \quad \|f\|_\infty = \|f\| = \max_{\overline{x}} |f(\overline{x})|, \quad \omega^{(\infty)}(f;\overline{\delta}) = \omega(f;\overline{\delta})$$

и $1/q = 0$ при $q = \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$, $\theta \geq m$. *Тогда для всех* $\overline{N}$, *удовлетворяющих условиям* $\ln N_j > 2$ *и* $e^\theta \ln N_j / N_j \leq \pi$, $1 \leq j \leq m$, *имеет место неравенство*

$$\|f(\overline{x}) - T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q \leq$$

$$\leq \omega^{(q)}\left(f; \frac{e^\theta \ln N_1}{N_1}, \dots, \frac{e^\theta \ln N_m}{N_m}\right) + \varepsilon_{\overline{N}(M)} \frac{2^m e^{\theta m} (2\pi)^{m/q}}{\prod\limits_{j=1}^{m} N_j^{\theta-1} (\ln N_j - 2)} +$$

$$+ \sum_{B \subset M} \varepsilon_{\overline{N}(B)} \frac{2^{|B|} e^{\theta |B|} (2\pi)^{m/q} \prod\limits_{j \in B^c} (2N_j + 1)}{\prod\limits_{j \in B} N_j^{\theta-1} (\ln N_j - 2)}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что для всех q, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место

$$\|f(\overline{x}) - T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q \leq \|f(\overline{x}) - Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q + \|Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x}) - T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q \leq$$

$$\leq \omega^{(q)}\left(f; \frac{e^\theta \ln N_1}{N_1}, \dots, \frac{e^\theta \ln N_m}{N_m}\right) + \|Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x}) - T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q. \tag{3.3}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (3.3), мы применяем лемму 1 с векторами $\overline{h}$ и $\overline{p}$, определенными в (3.1). Подставляя эти значения $\overline{h}$ и $\overline{p}$ из (3.1) в (2.7), вычисляя $\|\cdot\|_q$ нормы обеих частей этого неравенства и используя следующие неравенства :

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{m} \left(\frac{e^\theta}{N_j}\right)^{[\ln N_j]} N_j^{[\ln N_j]-1} ([\ln N_j] - 1)} \leq \frac{e^{\theta m}}{\prod\limits_{j=1}^{m} N_j^{\theta-1} (\ln N_j - 2)},$$

$$\frac{1}{\prod\limits_{j \in B} \left(\frac{e^\theta}{N_j}\right)^{[\ln N_j]} N_j^{[\ln N_j]-1} ([\ln N_j] - 1)} \leq \frac{e^{\theta |B|}}{\prod\limits_{j \in B} N_j^{\theta-1} (\ln N_j - 2)},$$

получаем (3.2). Теорема 1 доказана.

Положим

$$\alpha(\theta,q,N)=\varepsilon_{N(M)}\,\frac{2^m e^{\theta m}(2\pi)^{m/q}}{N^{m(\theta-1)}(\ln N-2)^m}+$$
$$+\sum_{B\subset M}\varepsilon_{N(B)}\,\frac{2^{|B|}e^{\theta|B|}(2\pi)^{m/q}(2N+1)^{m-|B|}}{N^{|B|(\theta-1)}(\ln N-2)^{|B|}},$$

$$\beta(\theta,N)=\frac{2^m e^{\theta m}}{N^{m(\theta-1)}(\ln N-2)^m}+\sum_{B\subset M}\frac{2^{|B|}e^{\theta|B|}(2N+1)^{m-|B|}}{N^{|B|(\theta-1)}(\ln N-2)^{|B|}}, \tag{3.4}$$

где $\theta\geq m$, N -натуральное число, $\varepsilon_{N(M)}=\varepsilon_{\overline{N}(M)}$ и $\varepsilon_{N(B)}=\varepsilon_{\overline{N}(B)}$ при $N_j=N$ (см. (2.6)).

Полагая $\overline{N}=(N,...,N)$ в формулировке теоремы 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\theta\geq m$ и N – натуральное число такие, что $\ln N>2$, $e^\theta\ln N/N<\pi$. Тогда для любой функции $f(\overline{x})\in L_q(T_m)$, $1\leq q\leq\infty$ имеет место неравенство*

$$\|f(\overline{x})-T_{\theta,N}(f,\overline{x})\|_q\leq\omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta\ln N}{N},...,\frac{e^\theta\ln N}{N}\right)+\alpha(\theta,q,N), \tag{3.5}$$

где $T_{\theta,N}(f,\overline{x})=T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})$ при $N_j=N$, $1\leq j\leq m$.

Теперь рассмотрим сферические частные суммы ряда (1.1)

$$\sigma_R(f,\overline{x})=\sum_{\|\overline{n}\|\leq R}c_{\overline{n}}e^{i\overline{n}\,\overline{x}},\quad \|\overline{n}\|=\left(\sum_{j=1}^m n_j^2\right)^{1/2},\quad R>0. \tag{3.6}$$

$$N_R=\left[\frac{R}{\sqrt{m}}\right],\qquad \overline{N}_R=(N_R,...,N_R), \tag{3.7}$$

$$a(\overline{n},\theta,N_R)=\prod_{j=1}^m\left(\frac{\sin(n_je^\theta/N_R)}{n_je^\theta/N_R}\right)^{[\ln N_R]}, \tag{3.8}$$

$$A_{\theta,R}(f,\overline{x})=\sum_{\|\overline{n}\|\leq R}a(\overline{n},\theta,N_R)\,c_{\overline{n}}e^{i\overline{n}\,\overline{x}}. \tag{3.9}$$

Коэффициенты $a(\overline{n},\theta,N_R)$, $\|\overline{n}\|\leq R$ определяют линейный метод суммирования сферических частных сумм (3.6). Так как m–мерный куб $[-N_R,N_R]^m$ содержится в m-мерном шаре радиуса R, то в силу (1.16) с $\overline{N} = \overline{N}_R$ и (3.8), (3.9), имеем

$$\|Q^{(\overline{p})}_{\theta,\overline{N}_R}(f,\overline{x}) - A_{\theta,R}(f,\overline{x})\| \leq \sum_{|\overline{n}|>\overline{N}_R} |a(\overline{n},\theta,N_R)||c_{\overline{n}}| +$$

$$+ \sum_{B\subset M} \sum_{|\overline{n}(B^c)|\leq \overline{N}_R(B^c)} \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}_R(B)} |a(\overline{n},\theta,N_R)||c_{\overline{n}}|. \tag{3.10}$$

Теорема 3. *Пусть* $\theta \geq m$ *и* $N_R = [R/\sqrt{m}]$ такие, что $\ln N_R > 2$, $\dfrac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}} < \pi$. *Тогда для любой функции* $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} &\|f(\overline{x}) - A_{\theta,R}(f,\overline{x})\|_q \leq \\ &\leq \omega^{(q)}\left(f; \frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}, ..., \frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}\right) + \alpha(\theta,q,N_R). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Доказательство. Из (3.7) и леммы 2 следует

$$\|f(\overline{x}) - Q_{\theta,\overline{N}_R}(f,\overline{x})\|_q \leq \omega^{(q)}\left(f; \frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}, ..., \frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}\right). \tag{3.12}$$

С другой стороны, повторяя доказательство теоремы 2 с $N = N_R$ и учитывая (3.10), получаем

$$\|A_{\theta,R}(f,\overline{x}) - Q_{\theta,\overline{N}_R}(f,\overline{x})\|_q \leq \alpha(\theta,q,N_R). \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует (3.11). Теорема 3 доказана.

Используя подходящие замены переменных x_j в формуле коэффициентов Фурье, легко проверить, что для любого непустого подмножества $B \subset M$, $B \neq M$ и для любого натурального числа N имеет место неравенство

$$\varepsilon_{N(B)} \leq \frac{1}{2}\omega^{(q)}\left(f; \frac{\pi}{N}, ..., \frac{\pi}{N}\right) \cdot (2\pi)^{-m/q}.$$

В условиях теорем 2 и 3 справедливы, соответствено, следующие оценки :

$$\frac{e^\theta \ln N}{N} > \frac{\pi}{N}, \qquad \frac{e^\theta \ln(R/\sqrt{m})}{R/\sqrt{m}-1} > \frac{\pi}{N_R}. \tag{3.14}$$

Поэтому из теорем 2 и 3 вытекают

Следствие 1. Пусть $\theta \geq m$, и пусть N -натуральное число такие, что $\ln N > 2$, $e^\theta \ln N/N < \pi$. Тогда для всех $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|f(\overline{x}) - T_{\theta,N}(f,\overline{x})\|_q \leq \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\theta,N)\right)\omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta \ln N}{N},\dots,\frac{e^\theta \ln N}{N}\right).$$

Следствие 2. Пусть $\theta \geq m$, и пусть $N_R = [R/\sqrt{m}]$ такие, что $\ln N_R > 2$, $\dfrac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}} < \pi$. Тогда для всех $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|f(\overline{x}) - A_{\theta,R}(f,\overline{x})\|_q \leq$$
$$\leq \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\theta,[R/\sqrt{m}])\right)\omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1},\dots,\frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}\right).$$

Из (3.4) следует, что величины $\beta(\theta,N)$ и $\beta(\theta,[R/\sqrt{m}])$ не зависят от функции $f(\overline{x})$ и для всех $\theta \geq m$ стремятся к нулю, при $N \to \infty$ или $R \to \infty$. При этом чем больше θ тем быстрее они сходятся к нулю.

ABSTRACT. In the present paper by means of an appropriate choice of sequences of vectors $\overline{h} = (h_1,\dots,h_m)$, $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$ we define a linear summation method which sums the cubic and spherical means of partial sums of the Fourier series of $f \in \mathbf{C}(T_m)$ uniformly. We give an estimate from above for the deviation of these partial sums from $f(\overline{x})$ in terms of the modulus of continuity $\omega(f;\overline{\delta})$. We also prove similar results for the spaces $L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Наука, 1965.

28 августа 1995 Ереванский государственный университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РИМАНОВЫМИ СРЕДНИМИ ЧАСТНЫХ СУММ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

Для функций многих переменных оценивается разность между некоторыми римановыми интегральными средними и аналогичными средними для кубических частных сумм рядов Фурье этих функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей стстье $\mathbb{R}^m$ обозначает m–мерное вещественное евклидово пространство, $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^m$ определяются равенствами

$$\overline{xy} = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j, \quad \|\overline{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2}.$$

Через $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ будем обозначать векторы с целочисленными координатами. Запись $|\overline{n}| \leq N$, где N –натуральное число, будет означать, что $|n_j| \leq N$, $1 \leq j \leq m$.

Через T_m обозначается m-кратное декартово произведение интервала $[0, 2\pi)$.

Пусть $f(\overline{x})$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ –периодическая по каждой переменной, с периодом 2π функция, которая принимает действительные значения и интегрируема на T^m по Лебегу. Тогда ее ряд Фурье по m-кратной тригонометрической системе $e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = e^{in_1x_1} \ldots e^{in_mx_m}$ обозначается через

$$\sum_{\overline{n}} C_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} C_{n_1 \ldots n_m} e^{in_1x_1} \ldots e^{in_mx_m}, \tag{1}$$

т. е. полагаем

$$C_{\overline{n}} = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m} f(\overline{x})e^{-i\overline{n}\,\overline{x}}\,d\overline{x} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(x_1,\ldots,x_m)\,e^{-in_1x_1}\cdots e^{-in_mx_m}\,dx_1\ldots dx_m. \tag{2}$$

Для натурального N через $S_N(\overline{x})$ обозначаются кубические частные суммы ряда Фурье функции $f(\overline{x})$. Кубические частные суммы ряда Фурье функции $f(\overline{t}+\overline{x})$, где $\overline{t}\in T_m$ рассматривается как параметр, обозначаются через $S_N(\overline{t},\overline{x})$.

Имеем

$$S_N(\overline{t},\overline{x}) = \sum_{|\overline{n}|\le N} C_{\overline{n}}e^{in(\overline{t}+\overline{x})} = S_N(\overline{t}+\overline{x}) = \\ = \sum_{|n_1|\le N}\cdots\sum_{|n_m|\le N} C_{n_1\ldots n_m}e^{in_1(t_1+x_1)}\ldots e^{in_m(t_m+x_m)}. \tag{3}$$

Для натурального числа k и вектора $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_m)$, где $1\le\nu_j\le k$, $j=1,\ldots,m$, натуральные числа, через Δ_k^ν обозначаются m-мерные интервалы

$$\Delta_k^\nu = \left[\frac{2\pi(\nu_1-1)}{k},\frac{2\pi\nu_1}{k}\right)\times\cdots\times\left[\frac{2\pi(\nu_m-1)}{k},\frac{2\pi\nu_m}{k}\right). \tag{4}$$

Для положительного h и натурального числа p, удовлетворяющих условиям $ph<\pi$, $h<1$, $p\ge 1$, обозначим

$$R_p(h,x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\sin qh}{qh}\right)^p\cos qx\right). \tag{5}$$

Известно (см. [1], стр. 364), что $R_p(h,x)$ обращается в нуль на интервалах (ph,π), $(-\pi,-ph)$, неотрицательна на $(-\pi,\pi)$, является полиномом степени $p-1$ на каждом из интервалов $((p-2)h,ph)$, $((p-4)h,(p-2)h)$, ..., и имеет непрерывные производные до порядка $p-2$. Легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_p(h,x)dx = \int_{-ph}^{ph} R_p(h,x)dx = 1 \tag{6}$$

и

$$R_p(h,x)\le\frac{C}{h}, \tag{7}$$

где $C > 0$ -абсолютная постоянная.

Неравенство (7) вытекает из следующих неравенств : для $h < 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
|R_p(h,x)| &\le \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{[\frac{1}{h}]+1}\left|\frac{\sin qh}{qh}\right|^p + \sum_{q=[\frac{1}{h}]+2}^{\infty}\left|\frac{\sin qh}{qh}\right|^p\right) \le \\
&\le \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{h}\right] + 1 + \sum_{q=[\frac{1}{h}]+2}^{\infty}\frac{1}{q^p h^p}\right) \le \\
&\le \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{h} + h^{-p}\frac{1}{([\frac{1}{h}]+1)^{p-1}}\right) \le \\
&\le \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{h} + 2\frac{1}{h} + h^{p-1}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^p\right).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Как обычно, $[a]$ обозначает целую часть числа a. Рассмотрим функции

$$
R_p^k(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\sin q\frac{\pi}{kp}}{q\frac{\pi}{kp}}\right)^p \cos qx\right) = R_p\left(\frac{\pi}{kp}, x\right), \quad k = 2, 3, \ldots \tag{9}
$$

и

$$
R_{pj}^{(k)}(x) = \begin{cases} R_p^{(k)}\left(x - \dfrac{\pi(2j-1)}{k}\right), & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{2\pi(j-1)}{k}, \dfrac{2\pi j}{k}\right) \\ 0, & \text{при} \quad x \in [0, 2\pi) \setminus \left[\dfrac{2\pi(j-1)}{k}, \dfrac{2\pi j}{k}\right). \end{cases} \tag{10}
$$

Для $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$, $1 \le \nu_j \le k$, определим на T_m функцию m переменных $R_{p\nu}^{(k)}(\overline{x})$ равенством

$$
R_{p\nu}^{(k)}(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m} R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j) = \prod_{j=1}^{m} R_p^{(k)}\left(x_j - \frac{\pi(2\nu_j - 1)}{k}\right). \tag{11}
$$

Определим также кусочно-постоянные функции

$$
\Phi_k^{(p)}(\overline{x}) = \int_{\Delta_k^{\nu}} f(\overline{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, d\overline{u}, \quad \overline{x} \in \Delta_k^{\nu}, \tag{12}
$$

$$
\Psi_{k,N}^{(p)}(\overline{x}) = \int_{\Delta_k^{\nu}} S_N(\overline{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, d\overline{u}, \quad \overline{x} \in \Delta_k^{\nu}. \tag{13}
$$

Так как

$$
\bigcup_{\nu} \Delta_k^{\nu} = T_m, \tag{14}
$$

то функции $\Phi_k^{(p)}(\overline{x})$ и $\Psi_{k,N}^{(p)}(\overline{x})$ определены на T_m и на каждом m-мерном интервале Δ_k^ν совпадают, соответственно, с интегральным средним Римана порядка p функции $f(\overline{x})$ и кубической частной суммой ряда Фурье функции $f(\overline{x})$.

Целью настоящей работы является оценивание сверху модуля разности $|\Phi_k^{(p)}(\overline{x})-\Psi_{k,N}^{(p)}(\overline{x})|$ при различных $N=N(k)$. В случае $p=1$ (случай обычных интегральных средних) мы доказываем некоторые вероятностные оценки для величины $||\Phi_k^{(1)}(\overline{x})-\Psi_{k,k^2}(\overline{x})||_2$, где $||\cdot||_2$ -норма пространства $L_2(T_m)$.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Если $f(\overline{x})$ непрерывна, то для каждого натурального $p\geq 1$ последовательность $\{\Phi_k^{(p)}(\overline{x})\}_{k=1}^\infty$ сходится к $f(\overline{x})$ равномерно и сходится к $f(\overline{x})$ в метрике $L_q(T_m)$, $q\geq 1$, если $|f(\overline{x})|^q$ интегрируема на T_m.*

Доказательство. Если $f(\overline{x})$ – непрерывная периодическая функция с периодом 2π по каждой переменной, то она равномерно непрерывна.

Так как $R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\geq 0$ при $\overline{u}\in\Delta_k^\nu$, то имеем

$$M_2\int_{\Delta_k^\nu}R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})d\overline{u}\leq\int_{\Delta_k^\nu}f(\overline{u})\,R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\,d\overline{u}\leq M_1\int_{\Delta_k^\nu}R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\,d\overline{u},\qquad(15)$$

где M_1,M_2 -наибольшее и наименьшее значениия $f(\overline{x})$ на Δ_k^ν, соответственно. Из (9) — (11) имеем

$$\int_{\Delta_k^\nu}R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\,d\overline{u}=1.$$

Следовательно

$$\int_{\Delta_k^\nu}f(u)R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\,d\overline{u}=f(\xi_\nu),\quad \xi_\nu\in\Delta_k^\nu.\qquad(16)$$

Из (16) и из равномерной непрерывности $f(\overline{x})$ на T_m следует, что последовательность $\{\Phi_k^{(k)}(\overline{x})\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится к $f(\overline{x})$ на T_m.

Рассмотрим случай, когда $f(\overline{x})\in L_q(T_m)$, $q>1$. Сначала покажем, что

$$||\Phi_k^{(p)}(\overline{x})||_q\leq C||f||_q,\quad k=2,3,\ldots,\qquad(17)$$

где $||\cdot||_q$ - норма в $L_q(T_m)$, а C - постоянная, зависящая от q и m.

Заметим, что согласно (7), (9), (10)

$$0 \le R^{(k)}_{p\nu_j}(x_j) \le C\left(\frac{kp}{\pi}\right), \quad x_j \in \left[\frac{2\pi(\nu_j-1)}{k}, \frac{2\pi\nu_j}{k}\right), \tag{18}$$

и, следовательно

$$0 \le R^{(k)}_{p\nu}(\overline{x}) \le C^m\left(\frac{kp}{\pi}\right)^m, \quad \overline{x} \in \Delta^\nu_k. \tag{19}$$

Применяя неравенство Гельдера, из (12), (14) и (19) получаем

$$\begin{aligned}
&||\Phi^{(p)}_k(\overline{x})||_q = \left(\sum_\nu \int_{\Delta^\nu_k} |\Phi^{(p)}_k(\overline{x})|^q\, d\overline{x}\right)^{1/q} = \\
&= \left(\sum_\nu \left(\frac{2\pi}{k}\right)^m \left|\int_{\Delta^\nu_k} f(\overline{u}) R^{(k)}_{p\nu}(\overline{u})\, d\overline{u}\right|^q\right)^{1/q} \le \\
&\le C^m \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{m/q} \left(\frac{kp}{\pi}\right)^m \left(\sum_\nu \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{m(q-1)} \int_{\Delta^\nu_k} |f(\overline{u})|^q\, d\overline{u}\right)^{1/q} = \\
&= C^m \left(\frac{2}{k}\right)^{m/q} (kp)^m \left(\frac{2}{k}\right)^{m(q-1)/q} ||f(\overline{x})||_q = C(m,p)\,||f(\overline{x})||_q.
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, неравенство (17) доказано.

Пусть $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем непрерывную функцию $\varphi(\overline{x})$ такую, что

$$||f(\overline{x}) - \varphi(\overline{x})||_q < \varepsilon. \tag{21}$$

Для заданной функции $F(\overline{x})$ обозначим через $\Phi^{(p)}_k(F,\overline{x})$ средние, определенные (12) с $F(\overline{x})$ вместо $f(\overline{x})$. Имеем

$$\Phi^{(p)}_k(f-\varphi,\overline{x}) = \Phi^{(p)}_k(f,\overline{x}) - \Phi^{(p)}_k(\varphi,\overline{x}), \quad ||\Phi^{(p)}_k(f-\varphi,\overline{x})||_q < C(m,p)\,\varepsilon \tag{22}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
&||\Phi^{(p)}_k(f,\overline{x}) - f(\overline{x})||_q \le ||\Phi^{(p)}_k(f,\overline{x}) - \Phi^{(p)}_k(\varphi,\overline{x})||_q + \\
&+ ||\Phi^{(p)}_k(\varphi,\overline{x}) - \varphi(\overline{x})||_q + ||\varphi(\overline{x}) - f(\overline{x})||_q \le \\
&\le \varepsilon + C_q\varepsilon + ||\Phi^{(p)}_k(\varphi,\overline{x}) - \varphi(\overline{x})||_q.
\end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что третье слагаемое правой части (23) стремится к нулю, при $k \to \infty$. Следовательно, $\Phi^{(p)}_k(\overline{x})$ сходится к $f(\overline{x})$ в метрике $L_q(T_m)$, когда $k \to \infty$. Справедливость этого утверждения в случае $q = 1$ доказывается аналогично.

Лемма 2. *Пусть $f(\overline{x})$ – интегрируемая на T_m функция и, пусть $k \geq 2$, $p \geq 2$ - натуральные числа. Тогда для любого интервала Δ_k^ν имеет место*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(\overline{u})\, R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, d\overline{u} = \int_{\Delta_k^\nu} f(\overline{u})\, R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, d\overline{u}. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть

$$a_{\overline{n}} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, e^{-i\overline{n}\overline{u}}\, d\overline{u}, \tag{25}$$

где $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ и

$$a_{n_j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{p\nu_j}^{(k)}(u_j) e^{-in_j u_j} du_j, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{26}$$

Для натурального N обозначим через $S'_N(\overline{x})$ кубические частные суммы ряда Фурье функции $R_{p\nu}^{(k)}(\overline{x})$ и через $S'_N(x_j)$ -частные суммы ряда Фурье функции $R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j)$.

Из (11), (25) и (26) следует

$$S'_N(\overline{x}) = \sum_{|n_1|\leq N} \cdots \sum_{|n_m|\leq N} a_{n_1} \cdots a_{n_m} e^{in_1x_1} \cdots e^{in_mx_m} = \prod_{j=1}^m S'_N(x_j). \tag{27}$$

Каждая из последовательностей $\{S'_N(x_j)\}_{N=1}^\infty$, $1 \leq j \leq m$, равномерно сходится к $R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j)$, которая равна нулю на множестве $[0, 2\pi] \setminus \left[\frac{2\pi(\nu_j - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_j}{k}\right)$. Поэтому из (27) следует, что последовательность $\{S'_N(\overline{x})\}_{N=1}^\infty$ равномерно сходится к $R_{p\nu}^{(k)}(\overline{x})$ на T_m. Последовательность $f(\overline{x})S'_N(\overline{x})$ сходится к $f(\overline{x})R_{p\nu}^{(k)}(\overline{x})$ почти всюду и имеет интегрируемую мажоранту $M \cdot |f(\overline{x})|$, где $M > 0$ – постоянная. Следовательно

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T_m} f(\overline{x})\, S'_N(\overline{x})\, d\overline{x} = \lim_{N\to\infty} \int_{\Delta_k^\nu} f(\overline{x})\, S'_N(\overline{x})\, d\overline{x} = \int_{\Delta_k^\nu} f(\overline{x}) R_{p\nu}^{(k)}(\overline{x})\, d\overline{x}. \tag{28}$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(\overline{x})\, S'_N(\overline{x})\, d\overline{x} = \sum_{|\overline{n}|\leq N} c_{-\overline{n}} a_{\overline{n}}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m} S_N(\overline{x})\,R^{(k)}_{p\nu}(\overline{x})\,d\overline{x} = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\Delta^\nu_k} S_N(\overline{x})\,R^{(k)}_{p\nu}(\overline{x})\,d\overline{x} = \sum_{|\overline{n}|\le N} c_{\overline{n}}\,a_{-\overline{n}}. \tag{30}$$

Правые части (29) и (30) – действительные числа, следовательно они равны. Имеем

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Delta^\nu_k} S_N(\overline{x})\,R^{(k)}_{p\nu}(\overline{x})\,d\overline{x} = \lim_{N\to\infty}\int_{T_m} f(\overline{x})\,S'_N(\overline{x})\,d\overline{x} = \int_{\Delta^\nu_k} f(\overline{x})\,R^{(k)}_{p\nu}(\overline{x})\,d\overline{x}. \tag{31}$$

Лемма 2 доказана.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное p такое, что для любой функции $f(\overline{x}) \in L_1(T_m)$ имеем*

$$\lim_{k\to\infty}\max_{\overline{x}\in T_m}|\Phi^{(p)}_k(\overline{x}) - \Psi^{(p)}_{k,[k^{(1+\varepsilon)m}+1]}(\overline{x})| = 0, \tag{32}$$

где функции $\Phi^{(p)}_k(\overline{x})$ и $\Psi^{(p)}_{k,[k^{(1+\varepsilon)m}+1]}(\overline{x})$ определены (12) и (13), соответственно.

Доказательство. Согласно (9) и (10) имеем

$$R^{(k)}_{p\nu_j}(x_j) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\sin q\frac{\pi}{kp}}{q\frac{\pi}{kp}}\right)^p\cos\left(x_j - \frac{\pi(2\nu_j-1)}{k}\right)q\right), \tag{33}$$

или в комплексной форме

$$R^{(k)}_{p\nu_j}(x_j) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n_j=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin n_j\dfrac{\pi}{kp}}{n_j\dfrac{\pi}{kp}}\right)^p e^{in_jx_j}\exp\left(-in_j\,\frac{\pi(2\nu_j-1)}{k}\right), \tag{34}$$

где $\sum'$ означает отсутствие члена с $n_j = 0$.

Пусть B – непустое подмножество множества $(1,2,\ldots,m)$, и пусть $\overline{n} = (n_1,\ldots,n_m)$ – вектор с отличными от нуля целыми координатами. Определим вектор $\overline{n}_B = (n'_1,\ldots,n'_m)$, где $n'_j = n_j$ при $j\in B$ и $n'_j = 0$ – в противном случае. Для $B = (j_1, j_2, \ldots, j_q)$ обозначим

$$\alpha_{n(B)}(\Delta^\nu_k) = \prod_{j=1}^{|B|}\exp\left(-i\pi n_j(2\nu_j-1)k^{-1}\right), \tag{35}$$

где $|B| = q$ – число элементов множества B.

Согласно (11) и (26) имеем

$$a_{\overline{n}} = \frac{1}{2\pi}\int_{T_m} R^{(k)}_{p\nu}(\overline{x})\, e^{-i\overline{n}\overline{x}}\, d\overline{x} = \prod_{j=1}^{m} a_{n_j}, \tag{36}$$

$$a_{\overline{n}(B)} = \frac{1}{(2\pi)^{m-|B|}}\prod_{j\in B} a_{n_j}, \qquad a_{\overline{0}} = \frac{1}{(2\pi)^m}, \tag{37}$$

где $\overline{0} = (0,\ldots,0)$.

При $n_j \neq 0$, в силу (34) имеем

$$a_{n_j} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi n_j}{kp}}{\frac{\pi n_j}{kp}}\right)^p \exp\left(-i\pi n_j(2\nu_j-1)k^{-1}\right). \tag{38}$$

Из (30) и (35) – (38) получаем

$$\int_{T_m} S_N(\overline{u})\, R^{(k)}_{p\nu}(\overline{u})\, d\overline{u} = (2\pi)^m \sum_{|\overline{n}|\le N} c_{\overline{n}}\overline{a_{\overline{n}}} =$$

$$= c_{\overline{0}} + \sum_B (2\pi)^{|B|} \sum_{|\overline{n}_B|\le N} \overline{\alpha_{\overline{n}(B)}}(\Delta^\nu_k) \prod_{j\in B}\left(\frac{\sin\frac{\pi|n_j|}{kp}}{\frac{\pi|n_j|}{kp}}\right)^p c_{\overline{n}(B)}, \tag{39}$$

где $\sum_B$ - сумма, распространенная на все непустые множества $B \subset (1,2,\ldots,m)$.

Согласно лемме 2 получаем

$$\int_{\Delta^\nu_k} f(\overline{u})\, R^{(k)}_{p\nu}(\overline{u})\, d\overline{u} = c_{\overline{0}} + \sum_B (2\pi)^{|B|} \sum_{\overline{n}_B} \overline{\alpha_{\overline{n}(B)}}(\Delta^\nu_k) \prod_{j\in B}\left(\frac{\sin\frac{\pi|n_j|}{kp}}{\frac{\pi|n_j|}{kp}}\right)^p c_{\overline{n}(B)}. \tag{40}$$

Заметим, что при $p \geq 2$ все ряды правой части (40) абсолютно сходятся, так как $|\overline{\alpha_{\overline{n}(B)}}(\Delta^\nu_k)| \leq 1$, коэффициенты Фурье $c_{\overline{n}(B)}$ равномерно ограничены и

$$\lim_{\max\{|n_j|,\, j\in B\}\to\infty} c_{\overline{n}(B)} = 0.$$

Для данного $B \subset (1,2,\ldots,m)$ обозначим через $Q(B)$ множество тех векторов $\overline{n}(B)$, для которых $|n_j| > N$ хотя бы для одного $j \in B$. Из (39) и (40) получаем

$$\int_{\Delta^\nu_k} f(\overline{u})\, R^{(k)}_{p\nu}(\overline{u})\, d\overline{u} - \int_{\Delta^\nu_k} S_N(\overline{u})\, R^{(k)}_{p\nu}(\overline{u})\, d\overline{u} =$$

$$= \sum_B (2\pi)^{|B|} \sum_{\overline{n}(B)\in Q_N(B)} c_{\overline{n}(B)}\overline{\alpha_{\overline{n}(B)}}(\Delta^\nu_k) \prod_{j\in B}\left(\frac{\sin\frac{\pi|n_j|}{kp}}{\frac{\pi|n_j|}{kp}}\right)^p. \tag{41}$$

При оценке сверху модуля каждой из внутренних сумм, достаточно оценить соответствующую сумму для $B = (1, 2, \ldots, q)$, $1 \le q \le m$. В этом случае $\overline{n}(B) = (n_1, n_2, \ldots, n_q, 0, \ldots, 0)$. Обозначив $c_{\overline{n}(B)} = c'_{n_1 n_2 \cdots n_q}$, получим

$$\left| \sum_{\overline{n}(B) \in Q_N(B)} c_{\overline{n}(B)} \overline{\alpha_{\overline{n}(B)}}(\Delta_k^{\nu}) \prod_{j \in B} \left(\frac{\sin \frac{\pi |n_j|}{kp}}{\frac{\pi |n_j|}{kp}} \right)^p \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{q} \Big| \sum_{|n_j| > N} \sum_{l \ne j} \sum_{|n_l| \ge 1} |c'_{n_1 \cdots n_q}| \frac{(kp)^{qp}}{\pi^{qp} |n_1^p| |n_2^p| \cdots |n_q^p|} \Big|. \tag{42}$$

Положим

$$\varepsilon_N = \max_{1 \le j \le m} \sup_{|n_j| > N} |c_{n_1 \cdots n_m}|, \tag{43}$$

где внутренний максимум берется по всем n_l, $l \ne j$. Для оценки правой части (42) достаточно оценить модуль внутренней суммы при $j = 1$. Имеем

$$\Big| \sum_{|n_1| = N+1}^{\infty} \sum_{|n_2| = 1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_q| = 1}^{\infty} |c'_{n_1 \cdots n_q}| \frac{(kp)^{qp}}{\pi^{qp} |n_1^p| \cdots |n_q^p|} \Big| \le \frac{2C}{p-1} \varepsilon_N \frac{(kp)^{mp}}{\pi^{mp}} \frac{1}{N^{p-1}}, \tag{44}$$

где $p \ge 2$, $k \ge 2$

$$C = \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2}{l^2} \right)^{m-1}.$$

Из (41) — (44) следует

$$\left| \int_{\Delta_k^{\nu}} f(\overline{u})\, R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, d\overline{u} - \int_{\Delta_k^{\nu}} S_N(\overline{u})\, R_{p\nu}^{(k)}(\overline{u})\, d\overline{u} \right| \le M \frac{(kp)^{mp}}{(p-1)\pi^{mp}} \frac{1}{N^{p-1}} \varepsilon_N, \tag{45}$$

для всех $p \ge 2$, $k \ge 2$ и $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, где

$$M = m 2^{m+1} \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right)^m (2\pi)^m.$$

Следовательно (см. (12), (13)) имеем

$$\max_{\overline{x} \in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\overline{x}) - \Psi_{k,N}^{(p)}(\overline{x})| \le M \frac{(kp)^{mp}}{(p-1)\pi^{mp}} \frac{1}{N^{p-1}} \varepsilon_N, \tag{46}$$

для всех $p \ge 2$, $k \ge 2$, $N \ge 2$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Полагая $N = [k^{(1+\varepsilon)m}]$ и учитывая неравенство $k^{(1+\varepsilon)m} + 1 >$

$> k^{(1+\varepsilon)m}$, из (46) получаем

$$\max_{\overline{x}\in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\overline{x}) - \Psi_{k,N}^{(p)}(\overline{x})| \leq \frac{M(kp)^{mp}\varepsilon_{[k^{(1+\varepsilon)m}]}}{(p-1)\pi^{mp}k^{(1+\varepsilon)m(p-1)}} \leq$$

$$\leq \frac{M\,p^p}{(p-1)\pi^{mp}} \cdot \frac{1}{k^{(1+\varepsilon)m(p-1)-mp}} \cdot \varepsilon_{[k^{(1+\varepsilon)m}]}. \tag{47}$$

Пусть p такое, что $(1+\varepsilon)m(p-1) - mp > \alpha > 0$, тогда для целого $p \geq 2$, удовлетворяющего неравенству $p > 1 + \varepsilon^{-1} + \alpha/(m\varepsilon)$, имеем

$$\max_{\overline{x}\in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\overline{x}) - \Psi_{k,[k^{(1+\varepsilon)m}]}^{(p)}(\overline{x})| < \frac{M\,p^p}{(p-1)\pi^{mp}}\,\frac{1}{k^\alpha}\,\varepsilon_{[k^{(1+\varepsilon)m}]}, \tag{48}$$

для всех $k \geq 2$.

Так как $\varepsilon_{[k^{(1+\varepsilon)m}]} \to 0$ при $k \to \infty$, то для указанных p правая часть (48) стремится к нулю при $k \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает следующая теорема.

Пусть $L_\infty(T_m)$ – пространство 2π-периодических непрерывных функций.

Теорема 2. *Для любых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1+\varepsilon^{-1}+\alpha/(m\varepsilon)$, где p - натуральное число, и для любой $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство*

$$||f(\overline{x}) - \Psi_{k,[k^{(1+\varepsilon)m}]}^{(p)}(\overline{x})||_q \leq \frac{M\cdot p^p}{(p-1)\pi^{mp}}\,\frac{1}{k^\alpha}\,\varepsilon_{[k^{(1+\varepsilon)m}+1]} + ||f(\overline{x}) - \Phi_k^{(p)}(\overline{x})||_q \tag{49}$$

для всех k и

$$\lim_{k\to\infty} ||f(\overline{x}) - \Psi_{k,[k^{(1+\varepsilon)m}]}^{(p)}(\overline{x})||_q = 0. \tag{50}$$

§3. СЛУЧАЙ $m = 2$, $p = 1$

Теперь докажем одну теорему о приближении обычных интегральных средних функций из L_2 интегральными средними частных сумм ее ряда Фурье. Обычные интегральные средние получаются из интегральных средних Римана порядка p при $p = 1$. Для простоты выкладок рассмотрим двумерный случай, а интегральные средние будем брать на интервалах

$$\Delta_k^\nu(\overline{t}) = \left[t_1 + \frac{2\pi(\nu_1-1)}{k}, t_1 + \frac{2\pi\nu_1}{k}\right) \times \left[t_2 + \frac{2\pi(\nu_2-1)}{k}, t_2 + \frac{2\pi\nu_2}{k}\right),$$

и $\Delta_k^{\nu}(\overline{0}) = \Delta_k^{\nu}$, где k -натуральное число, $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$, $1 \le \nu_1 \le k$, $1 \le \nu_2 \le k$, $t = (t_1, t_2) \in T_2$. Имеем

$$T_2(\overline{t}) = [t_1, t_1 + 2\pi) \times [t_2, t_2 + 2\pi), \quad T_2(\overline{0}) = T_2.$$

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $f(\overline{x}) \in L_2(T_2)$ периодична с периодом 2π по каждой из переменных x_1, x_2, и пусть ряд .

$$\sum_{\overline{n}} c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = c_{00} + \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}' c_{n_1 0} e^{in_1 x_1} + \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{0 n_2} e^{in_2 x_2} + \\ + \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{n_1 n_2} e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)} \tag{51}$$

является рядом Фурье функции $f(\overline{x})$, т. е.

$$c_{\overline{n}} = c_{n_1 n_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) e^{-in_1 x_1} e^{-in_2 x_2} dx_1 dx_2. \tag{52}$$

Квадратичные частные суммы $S_N(x)$ имеют вид

$$S_N(x) = S_N(x_1, x_2) = c_{00} + \sum_{n_1=-N}^{N}{}' c_{n_1 0} e^{in_1 x_1} + \sum_{n_2=-N}^{N}{}' c_{0 n_2} e^{in_2 x_2} + \\ + \sum_{n_1=-N}^{N}{}' \sum_{n_2=-N}^{N}{}' c_{n_1 n_2} e^{in_1 x_1} \cdot e^{in_2 x_2}. \tag{53}$$

Имеем

$$\frac{1}{|\Delta_k^{\nu}(\overline{t})|} \int_{\Delta_k^{\nu}(\overline{t})} S_N(u_1, u_2)\, du_1\, du_2 = \\ = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{t_1 + \frac{2\pi(\nu_1 - 1)}{k}}^{t_1 + \frac{2\pi\nu_1}{k}} \int_{t_2 + \frac{2\pi(\nu_2 - 1)}{k}}^{t_2 + \frac{2\pi\nu_2}{k}} S_N(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ = c_{00} + \frac{k}{2\pi} \sum_{n_1=-N}^{N}{}' \frac{c_{n_1 0}}{in_1} \alpha(n_1, k, \nu_1) e^{in_1 t_1} + \frac{k}{2\pi} \sum_{n_2=-N}^{N}{}' \frac{c_{0 n_2}}{in_2} \alpha(n_2, k, \nu_2) e^{in_2 t_2} + \\ + \frac{k^2}{4\pi^2} \sum_{n_1=-N}^{N}{}' \sum_{n_2=-N}^{N}{}' \frac{c_{n_1 n_2}}{in_1 n_2} \alpha(n_1, k, \nu_1) \alpha(n_2, k, \nu_2) e^{in_1 t_1} e^{in_2 t_2} = \tag{54} \\ = c_{00} + \sum_{n_1=-N}^{N}{}' \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right) c_{n_1 0} \beta(n_1, \nu_1, k)\, e^{in_1 t_1} + \\ + \sum_{n_2=-N}^{N}{}' \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right) c_{0 n_2} \beta(n_2, \nu_2, k)\, e^{in_2 t_2} + \sum_{n_1=-N}^{N}{}' \sum_{n_2=-N}^{N}{}' \gamma_{n_1 n_2},$$

где

$$\alpha(n,k,j)=\exp\left(in\frac{2\pi j}{k}\right)-\exp\left(in\frac{2\pi(j-1)}{k}\right)=2i\sin\left(n\frac{\pi}{k}\right)\exp\left(in\frac{\pi(2j-1)}{k}\right),$$
$$\beta(n,j,k)=\exp\left(in\frac{\pi(2j-1)}{k}\right), \tag{55}$$

и

$$\gamma(n_1,n_2)=c_{n_1n_2}\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)\beta(n_2,\nu_1,k)\beta(n_2,\nu_2,k)e^{in_1t_1}e^{in_2t_2}.$$

Легко проверить, что утверждение леммы 2 верно и для $p=1$ (см.[2], стр. 4), т. е.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\Delta_k^\nu(\bar t)|}\int_{\Delta_k^\nu(\bar t)}S_N(u_1,u_2)\,du_1\,du_2=$$
$$=\frac{1}{|\Delta_k^\nu(\bar t)|}\int_{\Delta_k^\nu(\bar t)}f(u_1,u_2)\,du_1\,du_2=c_{00}+\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)c_{n_10}\beta(n_1,\nu_1,k)e^{in_1t_1}+$$
$$+\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)c_{0n_2}\beta(n_2,\nu_2,k)e^{in_2t_2}+\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}'\gamma_{n_1n_2}. \tag{56}$$

Заметим, что для каждого фиксированного k ряды правой части (56) абсолютно сходятся, так как $|\beta(n,j,k)|\le 1$ и

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}'|c_{n_10}|^2<+\infty,\qquad \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}'|c_{0n_2}|^2<+\infty,\qquad \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}{}'|c_{n_1n_2}|^2<+\infty.$$

Для $\bar t=(t_1,t_2)$ и $\bar x\in\Delta_k^\nu(\bar t)$ на квадрате $T_2(\bar t)=[t_1,t_1+2\pi)\times[t_2,t_2+2\pi)$ определим кусочно-постоянные функции :

$$\Phi_k(\bar t,\bar x)=\frac{1}{|\Delta_k^\nu(\bar t)|}\int_{\Delta_k^\nu(\bar t)}f(u_1,u_2)\,du_1\,du_2=\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{\Delta_k^\nu(\bar t)}f(u_1,u_2)\,du_1du_2, \tag{57}$$

$$\Psi_N(\bar t,\bar x)=\frac{1}{|\Delta_k^\nu(\bar t)|}\int_{\Delta_k^\nu(\bar t)}S_N(u_1,u_2)\,du_1\,du_2=\frac{k^2}{4\pi^2}\int_{\Delta_k^\nu(\bar t)}S_N(u_1,u_2)\,du_1\,du_2. \tag{58}$$

Согласно (55) и (56) имеем для всех $\bar x\in\Delta_k^\nu(\bar t)$

$$\Phi_k(\bar t,\bar x)-\Psi_N(\bar t,\bar x)=\sum_{|n_1|>N}\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)c_{n_10}\beta(n_1,\nu_1,k)e^{in_1t_1}+$$
$$+\sum_{|n_2|>N}\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)c_{0n_2}\beta(n_2,\nu_2,k)e^{in_2t_2}+\sum_{|n_1|>N}\sum_{|n_2|>N}\gamma(n_1,n_2)+ \tag{59}$$
$$+\sum_{|n_1|=1}^{N}\sum_{|n_2|>N}\gamma(n_1,n_2)+\sum_{|n_1|>N}\sum_{|n_2|=1}^{N}\gamma(n_1,n_2).$$

Теорема 3. *Пусть $f(\overline{x}) \in L_2(T_2)$, и пусть (51) является рядом Фурье функции $f(\overline{x})$ по двойной системе $e^{in\overline{x}}$. Тогда*

$$\int_{T_2}\left(\int_{T_2(\overline{t})}|\Phi_k(\overline{t},\overline{x})-\Psi_{k^2}(\overline{t},\overline{x})|^2\,d\overline{x}\right)dt \le 16\pi^2\left(\sum_{|n_1|>k^2}|c_{n_10}|^2+\sum_{|n_2|>k^2}|c_{0n_2}|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{|n_1|=1}^{k^2}\sum_{|n_2|>k^2}|c_{n_1n_2}|^2+\sum_{|n_1|>k^2}\sum_{|n_2|=1}^{k^2}|c_{n_1n_2}|^2+\sum_{|n_1|>k^2}\sum_{|n_2|>k^2}|c_{n_1n_2}|^2\right) \tag{60}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\int_{T_2}\left(\int_{T_2(\overline{t})}|\Phi_k(\overline{t},\overline{x})-\Psi_{k^2}(\overline{t},\overline{x})|^2\,d\overline{x}\right)dt=0, \tag{61}$$

где $\Phi_k(\overline{t},\overline{x})$ определена равенством (57) и $\Psi_{k^2}(\overline{t},\overline{x})$ определена (58) для $N=k^2$.

Доказательство. Обозначим через $Q^{(\nu)}_{N,k}(\overline{t})$ правую часть (59). Заметим, что модули чисел $\beta(n,\nu,k)$ равны 1 (см. (55)), а интервалы $\Delta^{\nu}_k(\overline{t})$ попарно непересекаются и $\bigcup_\nu \Delta^{\nu}_k(\overline{t}) = T_2(\overline{t})$. Следовательно, используя (59), получим

$$\begin{aligned}&\int_{T_2}\left(\int_{T_2(\overline{t})}|\Phi_k(\overline{t},\overline{x})-\Psi_N(\overline{t},\overline{x})|^2\,d\overline{x}\right)dt=\\&=\int_{T_2}\left(\sum_\nu\int_{\Delta^{\nu}_k(\overline{t})}|\Phi_k(\overline{t},\overline{x})-\Psi_N(\overline{t},\overline{x})|^2\,d\overline{x}\right)dt=\\&=\int_{T_2}\left(\sum_\nu\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2|Q^{(\nu)}_{N,k}(t)|^2\right)dt=\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2\sum_\nu\int_{T_2}|Q^{(\nu)}_{N,k}(t)|^2\,dt.\end{aligned} \tag{62}$$

Так как сумма квадратов модулей коэффициентов

$$\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)c_{n_10},\qquad \left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)c_{0n_2},\qquad \left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)c_{n_1n_2}$$

сходится, получаем, что правая часть (59) является рядом Фурье функции $Q^{\nu}_{k,N}$ по системе $e^{in\overline{t}}$ и $Q^{\nu}_{k,N}\in L_2(T_2)$.

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi^2}\int_{T_2}|Q_{N,k}^{(\nu)}(\bar t)|^2\,d\bar t=\\
&=\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)^2|c_{n_10}|^2+\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)^2|c_{0n_2}|^2+\\
&+\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)^2\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)^2|c_{n_1n_2}|^2+\\
&+\sum_{|n_1|=1}^{N}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)^2\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)^2|c_{n_1n_2}|^2+\\
&+\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=1}^{N}\left(\frac{\sin n_1\frac{\pi}{k}}{n_1\frac{\pi}{k}}\right)^2\left(\frac{\sin n_2\frac{\pi}{k}}{n_2\frac{\pi}{k}}\right)^2|c_{n_1n_2}|^2.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Обозначим через $A_1 - - A_5$, соответственно, суммы в правой части (63) и оценим каждую из A_i сверху. Имеем

$$
A_1=\left(\frac{k}{\pi}\right)^2\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\left(\sin n_1\frac{\pi}{k}\right)^2\frac{|c_{n_10}|^2}{|n_1|^2}\le\left(\frac{k}{\pi}\right)^2\frac{1}{N^2}\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}|c_{n_10}|^2, \tag{64}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3&=\left(\frac{k}{\pi}\right)^4\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}\frac{(\sin n_1\frac{\pi}{k})^2(\sin n_2\frac{\pi}{k})^2}{n_1^2n_2^2}|c_{n_1n_2}|^2\le\\
&\le\left(\frac{k}{\pi}\right)^4\frac{1}{N^4}\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}|c_{n_1n_2}|^2,
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$$
\begin{aligned}
A_4&=\left(\frac{k}{\pi}\right)^4\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=1}^{N}\frac{(\sin n_1\frac{\pi}{k})^2(\sin n_2\frac{\pi}{k})^2}{n_1^2n_2^2}|c_{n_1n_2}|^2\le\\
&\le\left(\frac{k}{\pi}\right)^4\frac{1}{N^2}\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=1}^{N}|c_{n_1n_2}|^2,
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
A_5&\le\left(\frac{k}{\pi}\right)^4\frac{1}{N^2}\sum_{|n_1|=1}^{N}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}|c_{n_1n_2}|^2,\\
A_2&\le\left(\frac{k}{\pi}\right)^2\frac{1}{N^2}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}|c_{0n_2}|^2.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Из (62) и (63), учитывая (64) – (67), получаем

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_2}\left(\int_{T_2(\bar t)}|\Phi_k(\bar t,\bar x)-\Psi_{k^2}(\bar t,\bar x)|^2\,d\bar x\right)d\bar t\le\\
&\le16\pi^2\frac{k^2}{N^2}\left(\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}|c_{n_10}|^2+\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}|c_{0n_2}|^2\right)+\frac{16k^4}{N^2}\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=1}^{N}|c_{n_1n_2}|^2+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{16k^4}{N^2}\left(\sum_{|n_1|=1}^{N}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}|c_{n_1n_2}|^2+\frac{1}{N^2}\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty}\sum_{|n_2|=N+1}^{\infty}|c_{n_1n_2}|^2\right). \qquad (68)$$

Из (68) с $N = k^2$ следует (60). Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. For functions of several variables we estimate the difference between certain Riemann integral means and similar means for cubic partial sums of their Fourier series.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Наука, 1965.
2. Н. А. Талалян, "О приближении случайных интегральных средних интегральными средними частных сумм рядов Фурье", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 1, стр. 24 – 37, 1993.

28 ноября 1994

Ереванский государственный университет

О ФУНКЦИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ СУЩЕСТВЕННОЙ ВАРИАЦИИ ПО ВИТАЛИ

Ф. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

Работа посвящена изучению функций многих переменных с конечной существенной вариацией по Витали.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы автора [1] и посвящена дальнейшему изучению функций многих переменных с конечной существенной вариацией по Витали. Мы пользуемся обозначениями, введенными в [1] и [2], где можно найти необходимые определения, в частности, определение понятия существенной вариации по Витали. Нами было доказано ([1], теорема 3), что если суммируемая на n-мерном сегменте J функция f удовлетворяет условию

$$\int_J |\Delta_n(f;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])|\,d\lambda_n(\overline{x}) = O(|h_1\ldots h_n|), \tag{1}$$

то ess var $(f;J) < \infty$.

В одномерном случае имеет место также обратное утверждение, т. е. конечность существенной вариации влечет (1). Это следует из того, что функция одной переменной с конечной существенной вариацией почти всюду совпадает с некоторой функцией ограниченной вариации. Автору неизвестно справедливо ли указанное свойство в многомерном случае. Тем не менее при одном естественном дополнительном условии на функцию, обратное утверждение удается доказать и в многомерном случае.

Указанное дополнительное условие заключается в требовании, чтобы существенная вариация рассматриваемой функции была почти аддитивной функцией сегмента в смысле следующего определения.

Определение. Пусть $J = [\overline{a}, \overline{b}]$ есть n-мерный сегмент, $\overline{a} < \overline{b}$, и пусть Φ – функция, определенная на всех n-мерных сегментах I, содержащихся в J. Φ называется *почти аддитивной* функцией сегмента на J, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует множество $E_i \subset [a_i, b_i]$ с мерой $\lambda_1(E_i) = b_i - a_i$ такое, что для любого сегмента $I \subset J$ и для любой точки $c_i \in (a_i, b_i)$ выполняется равенство

$$\Phi(I) = \Phi\left[I \cap \{\overline{x} : x_i < c_i\}\right] + \Phi\left[I \cap \{\overline{x} : x_i > c_i\}\right]. \qquad (2)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая.

Теорема 1. *Пусть f – существенно ограниченная действительная функция на n-мерном сегменте J такая, что* ess var $(f; I)$ *является конечной почти аддитивной функцией сегмента на J. Тогда имеет место соотношение (1).*

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Сначала докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть J есть n-мерный сегмент, Φ – аддитивная функция сегмента на J, и пусть $\overline{c} \in J$ – произвольная точка. Положим*

$$F(\overline{x}) = sign \left[\prod_{j=1}^{n}(x_i - c_i)\right] \Phi([\overline{c}, \overline{x}]), \quad \overline{x} \in J. \qquad (3)$$

Тогда для каждого n-мерного сегмента $I \subset J$ такого, что $\overline{c}$ не лежит на $(n-1)$-мерных гиперплоскостях, определяемых $(n-1)$-мерными гранями I, имеет место равенство

$$\Phi(I) = \Delta_n(F; I). \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть $I = [\overline{a}, \overline{b}]$, $\overline{a} < \overline{b}$. Положим $N_1 = \{i : a_i < c_i < b_i\}$, $N_2 = \{i : c_i < a_i\}$, $N_3 = \{i : b_i < c_i\}$. Рассмотрим следующие пять случаев (еще два логически возможных случая, отсутствующих в приведенном списке, аналогичны, соответственно, 1) и 3)).

1). $N_1 = \emptyset, \quad N_2 = \emptyset$

2). $N_2 = \emptyset, \quad N_3 = \emptyset$

3). $N_1 \neq \emptyset, \quad N_2 = \emptyset, \quad N_3 \neq \emptyset$

4). $N_1 = \emptyset, \quad N_2 \neq \emptyset, \quad N_3 \neq \emptyset$

5). $N_1 \neq \emptyset, \quad N_2 \neq \emptyset, \quad N_3 \neq \emptyset.$

Имеем

$$\Delta(F; I) = \sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} F((\overline{1} - \overline{\alpha})\overline{a} + \overline{\alpha}\overline{b}) =$$

$$= \sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} \mathrm{sign} \left[\prod_{i=1}^{n}((1-\alpha_i)a_i + \alpha_i b_i - c_i)\right] \Phi\left[[\overline{c}; (\overline{1} - \overline{\alpha})\overline{a} + \overline{\alpha}\overline{b}]\right]. \quad (5)$$

Правую часть равенства (5) обозначим через A. В случае 1) имеем

$$A = \sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{|\overline{\alpha}|} \Phi\left[[\overline{c}; (\overline{1} - \overline{\alpha})\overline{a} + \overline{\alpha}\overline{b}]\right] = \Phi(I).$$

В случае 2) имеем $\overline{c} \in \mathrm{int}\,(I)$ и, следовательно

$$I = \bigcup_{\overline{w}\in \mathrm{vert}\,(I)} [\overline{c}, \overline{w}]. \quad (6)$$

Кроме того, для каждого $\overline{\alpha} \in \mathrm{vert}\,(Q^n)$

$$\mathrm{sign} \left[\prod_{i=1}^{n}((1-\alpha_i)a_i + \alpha_i b_i - c_i)\right] = (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}. \quad (7)$$

Из (5) – (7) получим

$$A = \sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} \Phi\left[[\overline{c}; (\overline{1} - \overline{\alpha})\overline{a} + \overline{\alpha}\overline{b}]\right] = \sum_{\overline{w}\in \mathrm{vert}\,(I)} \Phi([\overline{c}, w]) = \Phi(I).$$

Теперь рассмотрим случай 3). Без ограничения общности можно считать, что $N_1 = \{1, \ldots, k\}$ и $N_3 = \{k+1, \ldots, n\}$ при некоторых $1 \leq k < n$. Представим $\overline{\alpha}$ в виде $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}', \overline{\alpha}'')$, где $\overline{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\overline{\alpha}'' = (k+1, \ldots, n)$. Выражения $\overline{\alpha}'$, $\overline{1}'$, $\overline{x}''$, I'' имеют аналогичный смысл (например I' есть k-мерный сегмент $[\overline{a}', \overline{b}']$).

Имеем

$$\operatorname{sign}\left[\prod_{i=1}^{n}((1-\alpha_i)a_i+\alpha_i b_i-c_i)\right]=(-1)^{n-|\overline{\alpha}'|}.$$

Рассматривая $\Phi\left([\overline{c}',(\overline{1}'-\overline{\alpha}')\overline{a}'+\overline{\alpha}'\overline{b}']\times[\overline{c}'',(\overline{1}''-\overline{\alpha}'')\overline{a}''+\overline{\alpha}''\overline{b}'']\right)$ как функцию сегмента сначала на I'', а потом на I' и применяя, соответственно, случаи 1) и 2), получим

$$\begin{aligned}A=&\sum_{\overline{\alpha}'\in\text{vert }(Q^k)}(-1)^{k-|\overline{\alpha}'|}\sum_{\overline{\alpha}\in\text{vert }(Q^{n-k})}(-1)^{n-k-|\overline{\alpha}''|}(-1)^{|\overline{\alpha}'|}\Phi([\overline{c};(\overline{1}-\overline{\alpha})\overline{a}+\overline{\alpha}\overline{b}])=\\ =&\sum_{\overline{\alpha}'\in\text{vert }(Q^k)}\sum_{\overline{\alpha}''\in\text{vert }(Q^{n-k})}(-1)^{n-|\overline{\alpha}''|}\times\\ &\times\Phi\left([\overline{c}',(\overline{1}'-\overline{\alpha}')\overline{a}'+\overline{\alpha}'\overline{b}']\times[\overline{c}'',(\overline{1}''-\overline{\alpha}'')\overline{a}''+\overline{\alpha}''\overline{b}'']\right)=\\ =&\sum_{\overline{\alpha}\in\text{vert }(Q^k)}\Phi\left([\overline{c}',(\overline{1}'-\overline{\alpha}')\overline{a}'+\overline{\alpha}'\overline{b}']\times I''\right)=\Phi(I'\times I'')=\Phi(I).\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай 4). Можно считать, что $N_2=\{1,\dots,k\}$ и $N_3=\{k+1,\dots,n\}$, где $1\le k<n$. Тогда имеем

$$\operatorname{sign}\left[\prod_{i=1}^{n}((1-\alpha_i)a_i+\alpha_i b_i-c_i)\right]=(-1)^{n-k}$$

и

$$A=\sum_{\overline{\alpha}\in\text{vert }(Q^n)}(-1)^{k+|\overline{\alpha}|}\Phi\left[[\overline{c};(\overline{1}-\overline{\alpha})\overline{a}+\overline{\alpha}\overline{b}]\right].\tag{8}$$

Вершина $\overline{w}=(b_1,\dots,b_k,a_{k+1},\dots,a_n)$ сегмента I, полученная при $\overline{\alpha}=$ $=(1,\dots,1,0,\dots,0)$, обладает тем свойством, что I целиком лежит в n-мерной квадратуре с вершиной в точке $\overline{w}$, содержащей $\overline{c}$. При этом, противоположная с $\overline{w}$) вершина I лежит в сегменте $[\overline{c},\overline{w}]$. Коэффициент при $\Phi([\overline{c},\overline{w}])$ в правой части (8) равен 1. Так как Φ аддитивна, то в силу известной комбинаторной формулы, правая часть (8) совпадает с $\Phi(I)$, что и требовалвлось.

Случай 5). Можно считать, что $N_1=\{1,\dots,k\}$ и $N_2\cup N_3=\{k+1,\dots,n\}$, где $1\le k\le n-2$, $N_2\ne\emptyset$, $N_3\ne\emptyset$. Заметим, что относительно координат $\{k+1,\dots,n\}$ выполняется случай 4). Представляя $\overline{\alpha}$ в виде $\overline{\alpha}=(\overline{\alpha}',\overline{\alpha}'')$, где $\overline{\alpha}'=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$

и $\overline{\alpha}'' = (k+1,\dots,n)$, будем иметь

$$I = \bigcup_{\overline{\alpha}' \in \mathrm{vert}\,(Q^k)} [\overline{c}', (\overline{1}' - \overline{\alpha}')\overline{a}' + \overline{\alpha}'\overline{b}'] \times I''. \tag{9}$$

Заметим, что сегменты под знаком суммы попарно не перекрываются.

Теперь, применяя случай 4) к сумме по $\overline{\alpha}''$ и учитывая (9) и аддитивность Φ, получаем

$$A = \sum_{\overline{\alpha}' \in \mathrm{vert}\,(Q^k)} \sum_{\overline{\alpha}'' \in \mathrm{vert}\,(Q^{n-k})} (-1)^{n-k-|\overline{\alpha}''|} \mathrm{sign} \left[\prod_{i=1}^{n} ((1-\alpha_i)a_i + \alpha_i b_i - c_i)\right] \times$$
$$\times \Phi\left([\overline{c}', (\overline{1}' - \overline{\alpha}')\overline{a}' + \overline{\alpha}'\overline{b}'] \times \times [\overline{c}'', (\overline{1}'' - \overline{\alpha}'')\overline{a}'' + \overline{\alpha}''\overline{b}'']\right) =$$
$$= \sum_{\overline{\alpha}' \in \mathrm{vert}\,(Q^k)} \Phi\left([\overline{c}', (\overline{1}' - \overline{\alpha}')\overline{a}' + \overline{\alpha}'\overline{b}'] \times I''\right) = \Phi(I' \times I'') = \Phi(I).$$

Лемма 2. *Для каждой почти аддитивной функции сегмента Φ на J существует множество $E \subset J$ с $\lambda_n(J \setminus E) = 0$ такое, что для каждого сегмента $I \subset J$ с $\mathrm{vert}\,(I) \subset E$ и для каждой точки $\overline{c} \in E$, не лежащей на гиперплоскостях, определенных $(n-1)$-мерными гранями I, имеет место равенство*

$$\Phi(I) = \Delta_n(F; I). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $E_i \subset [a_i, b_i]$ -множество из определения почти аддитивности. Пологая $E = E_1 \times \dots \times E_n$, получим $\lambda_n(J \setminus E) = 0$. Для каждой точки $\overline{c} \in E$ и для каждого n-мерного сегмента I с $\mathrm{vert}\,(I) \subset E$, дословным повторением доказательства Леммы 1, приходим к требуемому результату.

Для каждого $\alpha' \in \mathrm{vert}\,(Q^n)$ положим

$$A(\overline{\alpha}) = (Q^n + \overline{\alpha}\overline{h}) \cap (Q^n - \overline{h} + \overline{\alpha}\overline{h}) \quad \text{и} \quad B(\overline{\alpha}) = (Q^n + \overline{\alpha}\overline{h}) \setminus (Q^n - \overline{h} + \overline{\alpha}\overline{h}).$$

Лемма 3. *Пусть $0 < |h_i| < \frac{1}{2}$ для $i = 1,\dots,n$ и $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left| \sum_{\overline{\alpha} \in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} \int_{A(\overline{\alpha})} G\, d\lambda_n \right| \le M|h_1 \cdots h_n| \tag{11}$$

и

$$\left|\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}\int_{B(\overline{\alpha})} G\,d\lambda_n\right| \le M|h_1\cdots h_n|, \tag{12}$$

где M - постоянная, зависящая от G и n.

Доказательство. Можно считать, что $h_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$. Пусть S есть семейство всех сегментов вида

$$\prod_{i\in\varphi_o}[0,h_i]\times\prod_{i\in\varphi_1}[h_i,1-h_i]\times\prod_{i\in\varphi_2}[1-h_i,1], \tag{13}$$

где $\varphi_o,\varphi_1,\varphi_2$ попарно не пересекаются и $\varphi_o\cup\varphi_1\cup\varphi_2=\{1,\ldots,n\}$. Из очевидного неравенства

$$A(\overline{\alpha})=\prod_{\alpha_i=0}[0,1-h_i]\times\prod_{\alpha_i=1}[h_i,1]$$

следует, что для каждого $\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)$ множество $A(\overline{\alpha})$ можно представить как объединение некоторых сегментов из S. Следовательно, имеет место равенство

$$\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}\int_{A(\overline{\alpha})} G\,d\lambda_n=\sum_{J\in S} C_J\int_J Gd\lambda_n, \tag{14}$$

где коэффициенты C_J ограничены некоторым числом, зависящим только от n. Пусть J - сегмент из S, для которого в представлении (13) имеем $\varphi_i\neq\emptyset$. Допустим, что $j\in\varphi_1$. Если $J\subset A(\overline{\alpha})$, то имеет место также включение $J\subset A(\overline{\alpha}+\overline{\delta}^j(\overline{1}-2\overline{\alpha}))$, где $\overline{\delta}^j$ есть n-мерный вектор с координатами $(\overline{\delta}^j)_i=\delta_{ij}$, $i=1,\ldots,n$ (δ_{ij} - символ Кронекера). Таким образом, если сегмент $J\in S$ имеет вид (10) с непустым φ_1, то множество вершин $\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)$, для которых $J\subset A(\overline{\alpha})$, состоит из пар соседних (т. е. отличающихся на одну координату) вершин. Следовательно в равенстве (14) коэффициенты C_J, соответствующие указанным сегментам, равны нулю и имеем

$$\sum_{\overline{\alpha}\in \mathrm{vert}\,(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|}\int_{A(\overline{\alpha})} G\,d\lambda_n=\sum_{J\in S'} C_J\int_J Gd\lambda_n, \tag{15}$$

где S' - семейство всех сегментов вида

$$\prod_{i\in\varphi_o}[0,h_i]\times\prod_{i\in\varphi_2}[1-h_i,1],\quad \varphi_o\cap\varphi_2=\emptyset,\quad \varphi_o\cup\varphi_2=\{1,\ldots,n\}.$$

Так как $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda_n(J) = h_1 \cdots h_n$ для $J \in S'$, из (15) получим (11).

Перейдем к доказательству неравенства (12).

Сначала заметим, что для каждого $\overline{\alpha} \in \mathrm{vert}\ (Q^n)$ имеет место равенство

$$B(\overline{\alpha}) = \bigcup_{j=1}^{n}([1 + (\alpha_j - 1)h_j, 1 + \alpha_j h_j] \times \prod_{i \neq j}[\alpha_i h_i, 1 + \alpha_i h_i]). \tag{16}$$

Далее обозначим через S семейство всех сегментов вида

$$\prod_{i \in \varphi_o}[0, h_i] \times \prod_{i \in \varphi_1}[h_i, 1 - h_i] \times \prod_{i \in \varphi_2}[1 - h_i, 1] \times \prod_{i \in \varphi_3}[1, 1 + h_i], \tag{17}$$

где φ_o, φ_1, φ_2, φ_3 попарно не пересекаются, $\varphi_o \cup \varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \varphi_3 = \{1, \ldots, n\}$ и $\varphi_2 \cup \varphi_3 \neq \emptyset$. Из равенства (16) следует, что каждое множество $B(\overline{\alpha})$ есть объединение некоторых сегментов $J \in S$. Следовательно

$$\sum_{\overline{\alpha} \in \mathrm{vert}\ (Q^n)} (-1)^{n - |\overline{\alpha}|} \int_{B(\overline{\alpha})} G\, d\lambda_n = \sum_{J \in S} C_J \int_J G d\lambda_n. \tag{18}$$

Из (16) и (17) следует, что если $J \subset B(\overline{\alpha})$ и $j \in \varphi_1$ для некоторых $J \in S$ и $\overline{\alpha} \in \mathrm{vert}\ (Q^n)$, то выполняется также включение $J \subset B(\overline{\alpha} + \overline{\delta}^j(\overline{1} - 2\overline{\alpha}))$. Отсюда следует, что в равенстве (18) коэффициенты C_J, соответствующие сегментам $J \in S$ с $\varphi_1 \neq \emptyset$, равны нулю. Теперь остается записать равенство (18) без слагаемых, соответствующих указанным J и оценить его правую часть.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{ess\ var}\ (f; I)$ является почти аддитивной функцией сегмента на Q^n. Тогда, по лемме 2, существует множество $E \subset Q^n$ с $\lambda_n(E) = 1$ и точка $\overline{c} \in Q^n$ такие, что для каждого n-мерного сегмента $I \subset Q^n$ с $\mathrm{vert}\ (I) \subset E$ имеет место равенство

$$\Delta_n(F; I) = \mathrm{ess\ var}\ (f; I), \tag{19}$$

где

$$F(\overline{x}) = \mathrm{sign}\ \left[\prod_{i=1}^{n}(x_i - c_i)\right] \mathrm{ess\ var}\ [f; [\overline{c}, \overline{x}]]. \tag{20}$$

Имеем

$$\Delta_n(F-f;I) = \text{ess var}\,(f;I) - \Delta_n(f;I) \geq 0. \tag{21}$$

Из (19) и (21) следует, что при vert $(I) \subset E$

$$|\Delta_n(f;I)| \leq \Delta_n(2F-f;I). \tag{22}$$

Пусть задан вектор $\overline{h}$ с координатами $|h_i| < 1/2$, $i = 1,\ldots,n$. Для почти всех $\overline{x} \in Q^n \cap (Q^n - \overline{h})$ имеем vert $([\overline{x}, \overline{x}+\overline{h}]) \subset E$. Поэтому, в силу (11) и (12), будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_{Q^n\cap(Q^n-\overline{h})} |\Delta_n(f;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])|d\lambda_n(\overline{x}) \leq \\ &\leq \int_{Q^n\cap(Q^n-\overline{h})} |\Delta_n(2F-f;[x,x+h])|d\lambda_n(x) = \\ &= \sum_{\overline{\alpha}\in \text{vert }(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} \int_{Q^n\cap(Q^n-\overline{h})} (2F-f)(\overline{x}+\overline{\alpha}\overline{h})d\lambda_n(\overline{x}) = \\ &= \left| \sum_{\overline{\alpha}\in \text{vert }(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} \int_{A(\overline{\alpha})} (2F-f)d\lambda_n \right| \leq M|h_1\cdots h_n|. \end{aligned} \tag{23}$$

В силу (12) и (22) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{Q^n\setminus(Q^n-\overline{h})} |\Delta_n(f;[\overline{x},\overline{x}+\overline{h}])|d\lambda_n(\overline{x}) \leq \\ &\leq \int_{Q^n\setminus(Q^n-\overline{h})} |\Delta_n(2F-f;[x,x+h])|d\lambda_n(x) = \\ &= \left| \sum_{\overline{\alpha}\in \text{vert }(Q^n)} (-1)^{n-|\overline{\alpha}|} \int_{B(\overline{\alpha})} (2F-f)d\lambda_n \right| \leq M|h_1\cdots h_n|. \end{aligned} \tag{24}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (23) и (24).

ABSTRACT. **The paper is devoted to investigation of functions of several variables with finite essential variation in the sense of Vitali.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. А. Талалян, "О существенной вариации в смысле Витали функций многих переменных", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 4, стр. 67 – 77, 1993.
2. Ф. А. Талалян, "Монотонные функции многих переменных и многомерная вторая теорема о среднем", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 2, стр. 83 – 103, 1992.

28 июля 1994

Институт прикладных проблем
физики НАН Армении

О ПОДСИСТЕМАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПОЛНЫХ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

А. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

1. Пусть E–измеримое множесто, $\mu(E)$ – его лебегова мера. Обозначим через $L_2(E)$ пространство интегрируемых с квадратом на E функций, и пусть $\|\cdot\|_E$ – норма в $L_2(E)$.

Определение 1. Ортонормальная на $[a,b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной на измеримом множестве $E \subset [a,b]$, $\mu(E) > 0$, если для любой $f(x) \in$ $\in L_2(E)$ из равенств

$$\int_E f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

следует, что $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Определение 2. Ортонормальная на $[a,b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной по рядам из L_2 на измеримом множестве $E \subset [a,b]$, $\mu(E) > 0$, если для любой $f(x) \in L_2(E)$ найдется сходящийся в метрике $\|\cdot\|_{[a,b]}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x), \qquad \sum_n a_n^2 < +\infty, \tag{2}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L_2(E)$.

Определение 3. Ортонормальная на $[a, b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется почти полной по рядам из L_2, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [a, b]$, $\mu(E) > b - a - \varepsilon$, на котором она полна по рядам из L_2.

Известно (см. [1], стр. 120), что существует ортонормальная на $[0, 1]$ система, которая полна на любом интервале $[0, 1 - \delta]$, $\delta > 0$, но не является полной по рядам из L_2 на $[0, 1 - \delta]$.

Пусть $p_1, ..., p_q$ –первые q простые числа, и пусть $n_i = \prod_{j=1}^{q} p_j^{\alpha_j(i)}$. В работе [2] В. Я. Козлов доказал, что если из тригонометрической системы $\{1, \cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx)\}$ удалить функции $\cos(2\pi n_i x)$, $\sin(2\pi n_i x)$, $i = 1, 2, ...$, то оставшаяся система будет полной (в смысле определения 1) на каждом измеримом множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) < 1$. Нам неизвестно, следует ли из полноты подсистемы тригонометрической системы на множестве E ее полнота по рядам из L_2 на том же множестве E.

В работе [3] показано, что ряд важных свойств полных в $L_2[a, b]$ ортонормированных систем $\{\varphi_n(x)\}$ остается в силе и для тех подсистем, которые полны в смысле определений 2 и 3.

В настоящей заметке показывается, что некоторые системы, полученные из системы $\{\sin(2\pi nx)\}$ после удаления из нее бесконечного числа функций, являются полными по рядам из L_2 на любом множестве $[0, \pi] \setminus (a, b)$, $(a, b) \subset [0, \pi]$, $b - a < \pi$.

2. Верна следующая

Теорема. *Для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$\limsup_{n \to \infty} (k_{n+1} - k_n) = +\infty, \tag{3}$$

система $\{\sin n_j x\}_{j=1}^{\infty} = \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{\sin 2^{k_n} x\}_{n=1}^{\infty}$ *полна по рядам из* L_2 *на любом множестве* $[0, \pi] \setminus (a, b)$, $(a, b) \subset [0, \pi]$, $b - a < \pi$, *т. е. для любого интервала* $(a, b) \subset [0, \pi]$, $0 < b - a < \pi$ *и для любой функции* $f(x) \in L_2([0, \pi])$ *существует* *сходящийся в* $L_2([0,\pi])$ *ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin n_i x, \qquad \sum_i a_i^2 < +\infty, \tag{4}$$

сумма которого совпадает с $f(x)$ *почти всюду на множестве* $[0,\pi]\setminus[a,b]$.

Доказательство. Сперва докажем, что система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{\sin 2^k x\}_{k=n}^{\infty}$ полна по рядам из L_2 на множестве $[2^{-n}\pi, \pi]$. Пусть $f(x) \in L_2([0,\pi])$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in [\pi/2, \pi] \\ f(\pi - x), & \text{если} \quad x \in [0, \pi/2]. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть a_{k1} – коэффициенты Фурье $f_1(x)$ относительно системы $\{\sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $f_1(x)$ четна относительно точки $\pi/2$ и $\sin(2^n x)$, $n \geq 1$ нечетны относительно $\pi/2$, то имеем $a_{k1} = 0$ для всех $k = 2^n$, $n = 1,2,\ldots$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k1} \sin kx$ сходится к $f(x)$ в метрике L_2 на множестве $[\pi/2, \pi]$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k1}^2 < +\infty$, $a_{2^n 1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Далее, положим

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - f_1(x), & \text{если} \quad x \in [\pi/4, \pi/2] \\ f(\pi/2 - x) - f_1(\pi/2 - x), & \text{если} \quad x \in [0, \pi/4] \\ 0, & \text{если} \quad x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases} \tag{6}$$

Легко видеть, что $f_2(x)$ четна на $[0, \pi/2]$ относительно точки $\pi/4$, а функции $\sin 2^k x$, $k \geq 2$, нечетны. Поэтому, если a_{k2} – коэффициенты Фурье функции $f_2(x)$, то $a_{k2} = 0$ при $k = 2^n$, $n \geq 2$.

Пусть $b_{k2} = a_{k1} + a_{k2}$. Из определения a_{k1}, a_{k2} следует, что $b_{k2} = 0$ для всех $k = 2^n$, $n \geq 2$ и $\sum\limits_k b_{k2}^2 < +\infty$. С другой стороны, согласно (5) и (6) имеем

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x), \qquad x \in [\pi/4, \pi]. \tag{7}$$

Из определения коэффициентов a_{k1}, a_{k2}, b_{k2} и (7) следует, что в метрике $L_2([0,\pi])$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{k2} \sin kx = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in [\pi/4, \pi] \\ f_1(x) + f_2(x), & \text{если} \quad x \in [0, \pi/4]. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть для натурального $n \geq 2$ определены функции $f_i(x) \in L_2([0,\pi])$, $1 \leq i \leq n-1$ такие, что

$$F_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) = f(x), \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2^{n-1}}, \pi\right], \tag{9}$$

а коэффициенты Фурье a_{ki} этих функций удовлетворяют условиям

$$\sum_k a_{ki}^2 < +\infty, \qquad a_{2^j i} = 0, \quad j \geq i, \quad 1 \leq i \leq n-1. \tag{10}$$

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - F_{n-1}(x), & \text{если} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^{n-1}}\right] \\ f\left(\frac{\pi}{2^{n-1}} - x\right) - F_{n-1}\left(\frac{\pi}{2^{n-1}} - x\right), & \text{если} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2^n}\right] \\ 0, & \text{если} \quad x \in [\frac{\pi}{2^{n-1}}, \pi]. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что функция $f_n(x)$ четная на $[0, \pi 2^{1-n}]$ относительно $\pi 2^{-n}$, а функции $\sin 2^k x$, $k \geq 2^n$, нечетны. Поэтому, обозначив через a_{kn} коэффициенты Фурье функции $f_n(x)$, получим

$$\sum_k a_{kn}^2 < +\infty, \qquad a_{2^j n} = 0, \quad j \geq n. \tag{12}$$

Положим

$$b_{kn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (F_{n-1}(x) + f_n(x)) \sin kx \, dx, \qquad k \geq 1. \tag{13}$$

Из индукционных предположений (10) и из (12), (13) следует, что

$$b_{kn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}, \qquad b_{2^j n} = 0, \quad j \geq n, \quad \sum_k b_{kn}^2 < +\infty. \tag{14}$$

Из (9) и (11) следует, что

$$F_{n-1}(x) + f_n(x) = f(x), \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2^n}, \pi\right] \tag{15}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \sin kx = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2^n}, \pi\right] \\ F_{n-1}(x) + f(x), & \text{если} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2^n}\right] \end{cases} \tag{16}$$

в метрике $L_2([0,\pi])$. Следовательно, ряд в левой части (16) сходится в метрике $L_2([0,\pi])$ и его сумма совпадает с $f(x)$ на интервале $[\pi 2^{-n}, \pi]$. Таким образом, для любого $n \geq 1$ и для любой $f(x) \in L_2([0,\pi])$ мы построили ряд (16), который сходится в метрике $L_2([0,\pi])$ и сумма которого совпадает с $f(x)$ на множестве $[2^{-n}\pi, \pi]$.

Замечание 1. Используя вышеприведенные расуждения, легко проверить, что система $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{\sin(2^j x)\}_{j=n}^{\infty}$ также полна по рядам из L_2 на всех множествах вида

$$[0,\pi] \setminus \left[\frac{(i-1)\pi}{2^n}, \frac{i\pi}{2^n}\right], \qquad 1 \le i \le 2^n. \tag{17}$$

Пусть $0 < \alpha < \pi/8$. Пользуясь (3)выберем натуральное ν такое, что

$$\pi 2^{[\gamma]+1} < \alpha, \tag{18}$$

где $\gamma = (k_{\nu+1} - k_\nu)/2$ и $[\gamma]$ означает целую часть числа γ. Положим $[\gamma] - 1 = m$. Заметим, что

$$k_{\nu+1} - (k_\nu + m) > 2. \tag{19}$$

Рассмотрим интервалы

$$\Delta_i = \left[(i-1)\pi 2^{-(k_\nu+m)}, i\pi 2^{-(k_\nu+m)}\right], \qquad 1 \le i \le 2^{k_\nu}, \tag{20}$$

полученные разбиением интервала $[0, \pi 2^{-m}]$ на 2^{k_ν} равные части.

Пусть $f(x) \in L_2([0,\pi])$. Как было установлено выше, существует сходящийся в метрике $L_2([0,\pi])$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_{2^j} = 0, \quad j \ge m \tag{21}$$

такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = f(x), \qquad x \in [\pi 2^{-m}, \pi].$$

Пусть $F(x)$ –сумма ряда (21) в метрике $L_2([0,\pi])$, т. е. b_k –коэффициенты Фурье функции $F(x)$. Согласно (19) имеем $k_{\nu+1} > m$. Поэтому из (21) следует $b_{2^{k_n}} = 0$, $n \ge \nu + 1$.

Докажем, что существуют действительные числа c_i, $1 \le i \le 2^{k_\nu}$ такие, что кусочно постоянная функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, & \text{если} \quad x \in \Delta_i, \quad 1 \le i \le 2^{k_\nu} \\ 0, & \text{если} \quad x \in [\pi 2^{-m}, \pi] \end{cases} \tag{22}$$

удовлетворяет условию

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\sin(kx)\,dx = -b_k, \qquad 1 \le k \le 2^{k_\nu}. \tag{23}$$

Для этого достаточно доказать, что следующая система линейных уравнений имеет решение :

$$c_1\int_{\Delta_1}\sin x\,dx + c_2\int_{\Delta_2}\sin x\,dx + \ldots + c_{2^{k_\nu}}\int_{\Delta_{2^{k_\nu}}}\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,b_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{24}$$

$$c_1\int_{\Delta_1}\sin 2^{k_\nu}x\,dx + c_2\int_{\Delta_2}\sin 2^{k_\nu}x\,dx + \ldots + c_{2^{k_\nu}}\int_{\Delta_{2^{k_\nu}}}\sin 2^{k_\nu}x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,b_{2^{k_\nu}}.$$

Покажем, что строки матрицы системы (24)линейно независимы. Пусть α_j, $1 \le j \le 2^{k_\nu}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\alpha_j\int_{\Delta_i}\sin jx\,dx = 0, \qquad 1 \le i \le 2^{k_\nu}. \tag{25}$$

Пологая $x_0 = 0$, $x_i = i\pi 2^{-(k_\nu+m)}$, $1 \le i \le 2^{k_\nu}$ уравнения (25) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\frac{\alpha_j}{j}(\cos jx_i - \cos jx_{i-1}) = 0, \qquad 1 \le i \le 2^{k_\nu}. \tag{26}$$

Обозначим

$$T(x) = \sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\frac{\alpha_j}{j}\cos jx, \qquad c_0 = \sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\frac{\alpha_j}{j}.$$

Полином $T(x)$ – четный. Следовательно, из (26) следует, что $T(x)$ принимает значение c_0 в точках $\pm x_i$, $0 \le i \le 2^{k_\nu}$, лежащих на $[-\pi, \pi]$. Поэтому все числа α_j равны нулю. Таким образом, детерминант системы (24) отличен от нуля и (24) имеет решение. Если c_i, $1 \le i \le 2^{k_\nu}$ –решение системы (24), то функция $\varphi(x)$, определенная (22), удовлетворяет (23). Положим

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(kx)\,dx, \qquad k \ge 1. \tag{27}$$

Если $j \ge k_{\nu+1}$, то в силу (19) имеем $j - (k_\nu + m) \ge 2$. Поэтому

$$\int_{\Delta_i}\sin 2^j x\,dx = -2^{-j}\left(\cos\left(i\pi 2^{j-(k_\nu+m)}\right) - \cos\left((i-1)\pi 2^{j-(k_\nu+m)}\right)\right) = 0. \tag{28}$$

Из (28) следует, что

$$a_{2^j} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2^{k_\nu}} c_i \int_{\Delta_i} \sin 2^j x \, dx = 0, \qquad j \geq k_{\nu+1}. \tag{29}$$

Пологая

$$\Psi(x) = F(x) + \varphi(x), \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Psi(x) \sin kx \, dx, \tag{30}$$

из (21) и (22) получаем

$$\Psi(x) = f(x), \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2^m}, \pi\right]. \tag{31}$$

В силу (30) и (23) имеем $c_k = 0$, $1 \leq k \leq 2^{k_\nu}$. С другой стороны, в силу (28) $c_{2^{k_n}} = 0$, $n \geq \nu + 1$. Следовательно

$$c_{2^{k_n}} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Из (18) и (19) следует, что $[\alpha, \pi] \subset [\pi 2^{-m}, \pi]$. Из (30)—(32) вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx, \qquad c_{2^{k_n}} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

сходится в метрике $L_2([0, \pi])$ и на $[\alpha, \pi]$ его сумма совпадает с $f(x)$. Легко видеть (см. замечание 1), что в наших рассуждениях вместо интервала $(0, \alpha)$ можно взять любой интервал $(a, b) \subset (0, \pi)$, $b - a < \pi$ и построить сходящийся в метрике $L_2([0, \pi])$ ряд, сумма которого совпадает с $f(x)$ на $[0, \pi] \setminus (a, b)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Наука, 1965.
2. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, т. 15, № 5, стр. 77 — 141, 1960.
3. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. сборник, т. 26, № 3, стр. 351 — 364, 1950.
4. А. А. Талалян, "О локальном характере некоторых свойств полных ортонормированных систем", Труды МИАН, т. CLXV, стр. 155 — 168, 1983.

28 октября 1995 Институт математики НАН Армении

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 30 НОМЕР 5 1995

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

СХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Сборник статей

Страницы

CONTENTS

VOLUME 30 NUMBER 5 1995

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS
(NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

CONVERGENCE AND SUMMABILITY OF MULTIPLE FOURIER SERIES

Collection of Papers