

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱՍ  
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ  
ИЗВЕСТИЯ  
НАН АРМЕНИИ

ISSN 00002-3048

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ  
МАТЕМАТИКА

## ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԳՐԵՍ

Պլխավոր խմբագիր Ռ. Վ. ՀԱՄԱՐՁՈՒԹՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԻԱԶԵԼՅԱՆ  
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ  
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ  
Ա. Ր. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ  
Ռ. Լ. ՇԱՀԱՆՂՅԱՆ  
գլխավոր խմբագրի տեղակալ

Պատասխանատու քարտուղար Մ. Ա. Հոփթանգիյան

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն ամսաց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մասնուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—8 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մասնուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման քացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին ամֆրածեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլիերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Միծառու լատինական տառերը, որոնք միանման են համաճում փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով մերթնում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով. ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, մշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար մշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար մշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը մշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում ամֆրածեշտ է մշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է նտորագրի հոդվածը, մշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր: Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

**ПРИБЛИЖЕНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ,  
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ  
И ОСОБЕННОСТИ**

**сборник статей**

**под редакцией Н. У Аракеляна**



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Статьи, вошедшие в настоящий сборник, объединены основными идеями и понятиями вейерштрассовской теории аналитических функций, такими, как единственность, аналитическое продолжение, особенности, а также общей концепцией этой теории – выразить свойства аналитической функции в терминах коэффициентов его ряда Тейлора. Эта проблематика исследовалась и получила мощное развитие в работах Адамара, Фабри, Линделефа, Поля, Карлсона и др. Что касается комплексных приближений, то они представлены в сборнике двояким образом: как средство исследования вейерштрассовских проблем и обратно, как исследование постановок аппроксимационных проблем, возникших под влиянием последних.

Проблема единственности в разных постановках исследована в статьях [1] – [3] (нумерация согласно содержанию настоящего сборника). В работе [1] вопрос о единственности аналитических и гармонических функций ставится и исследуется с единой методологической точки зрения, получив решение в рамках расширенной трактовки концепции “передачи малости”. В [3] исследуется влияние ограниченности целой функции в некоторых неограниченных областях на лакуны в ее разложении Тейлора. В работе [2] продолжается исследование проблем эффективного аналитического продолжения степенных рядов в терминах их функций коэффициентов, включая случай векторно-значных коэффициентов. Здесь приближения целыми функциями выступают как вспомогательное средство исследования. К этой проблематике примыкает и заметка [6]. В заметке [7] изучены вопросы локализации особенностей степенных рядов с векторно-значными коэффициентами. В статьях [4] и [5] исследуется задача о возможности равномерного и касательного приближения целыми и аналитическими функциями, разложения Тейлора которых имеют предписанные лакуны. Такие приближения могут найти применения в вопросах аналитического продолжения и локализации особенностей степенных рядов.

В заключение, считаю своим долгом отметить, что исследования, вошедшие в этот сборник, не были бы выполнены без существенной международной поддержки и солидарности. Исследования [2] – [7] были выполнены благодаря финансовой поддержке Международного Научного Фонда, а статья [1] при поддержке NSERC (Канада) и FCAR (Квебек). Всем этим организациям я выражаю свою глубокую благодарность и признательность.

# ПЕРЕДАЧА МАЛОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. У. Аракелян, П. М. Готье

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

В настоящей работе мы устанавливаем некоторые аналоги теоремы Адамара о трех окружностях для случая гармонических функций  $n \geq 2$  переменных и для трех возможных некоцентрических  $n$ -мерных шаров (см. Теоремы 1-2). Эти результаты приводят к теореме единственности для гармонических и голоморфных функций в духе классической теоремы Фрагмена-Линделефа (см. Теоремы 3-6).

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция "передачи малости" была развита в основном для голоморфных функций. Ее можно рассматривать в качестве следствия свойства логарифмической субгармоничности модуля голоморфной функции, выраженной в теореме о двух константах (см. [12], гл. III, §2). Эта теорема приводит к теореме Адамара о трех окружностях и к теореме Фрагмена-Линделефа со следующим дополнением :

Пусть  $f$  - голоморфная функция в верхней полуплоскости  $\Pi$ ,  $|f(z)| \leq 1$  для  $z \in \Pi$  и  $|f(z)| \leq \varepsilon_m$  для  $z \in \Pi$ ,  $|z| = R_m \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ . Если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m^{-1} \log \varepsilon_m = -\infty, \quad (*)$$

то  $f \equiv 0$  в  $\Pi$ .

Для гармонических функций двух (и более) переменных свойство логарифмической субгармоничности их модулей не действительно и приведенное выше утверждение о единственности теряет силу.

---

Данное исследование было поддержано со стороны NSERC (Канада) и FCAR (Квебек).

Контрпример. Рассмотрим полукольцо

$$\Omega = \{z \in \Pi: 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\},$$

и пусть  $u$  - гармоническая мера радиальных интервалов  $[-r_2, -r_1] \cup [r_1, r_2]$  относительно  $\Omega$ . По принципу симметрии гармонических функций,  $u$  имеет ограниченное гармоническое продолжение на  $\Pi$  такое, что  $u(z) = 0$  для  $z \in \Pi$ ,  $|z| = r_m$ , где  $r_m = r_1(r_2/r_1)^{m-1} \rightarrow \infty$ .

Таким образом, для гармонических функций двух переменных полуокружность является слишком "тонким" множеством для передачи малости. Для того, чтобы иметь некоторые ориентиры для этого случая, рассмотрим опять условия отмеченного выше утверждения о единственности. Используя решение проблемы Карлемана-Мию (см. [12], гл. IV, §5), мы легко можем вывести из этих условий, что для  $m \in N$

$$|f(z)| < \epsilon_m^c \quad \text{при} \quad z \in \Pi, \quad |z - ir_m| \leq \frac{r_m}{2}, \quad (**)$$

где  $c > 0$  - некоторая абсолютная константа.

Для ограниченных голоморфных на  $\Pi$  функций условие (\*\*) вместе с (\*) снова достаточно для заключения  $f \equiv 0$  на  $\Pi$ . Интересно, что это же самое утверждение верно и для гармонических функций. Это легко следует из приведенных далее Теорем 4, 5 (случаи  $p = \infty$  и  $n = 2$ ).

В настоящей статье трудности, связанные с отсутствием свойства логарифмической субгармоничности для гармонических функций, обходятся с помощью развития некоторых гармонических аналогов теоремы Адамара о трех окружностях на случай трех  $n$ -мерных ( $n \geq 2$ ) и возможно неконцентрических шаров (см. ниже Теоремы 1-2; в связи с этим см. также [4], [5] и [11]). Из этих результатов мы выводим некоторые теоремы единственности в духе классического условия (\*). Относительно проблемы единственности см. также [1].

Мы благодарим Луис-Филип Жиро и Манфред Стол за полезные комментарии.

Мы будем использовать следующие обозначения :

$\mathbb{R}^n$  =  $n$ -мерное евклидово пространство;



$$\mathbb{R}_a^n = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \text{ для } a \in \mathbb{R}^n;$$

$$\langle x, y \rangle = \text{скалярное произведение для } x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$$|x| = \text{норма элемента } x \in \mathbb{R}^n, |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle};$$

$$B_{x,r} = B_{x,r}^n = \{y \in \mathbb{R}^n: |y - x| < r\}, \quad B_r = B_{0,r};$$

$$B = B^n (\equiv B_{0,1}) \text{ — открытый единичный шар } \mathbb{R}^n;$$

$$S_{x,r} = S_{x,r}^n = \text{граница } B_{x,r}, \text{ сфера с центром в } x \text{ и радиуса } r, \quad S_r = S_{0,r};$$

$$S = S^n (\equiv S_{0,1}) \text{ — единичная сфера в } \mathbb{R}^n;$$

$$d\nu = d\nu_n \text{ — } n\text{-мерная мера Лебга, } \nu_n(r) \equiv \nu(B_{x,r}) = \nu_n r^n;$$

$$d\sigma = d\sigma_n \text{ — } (n-1)\text{-мерная поверхностная мера, } \sigma_n(r) \equiv \sigma_n(S_{x,r}) = \sigma_n r^{n-1};$$

$$\text{Отметим: } \sigma_n = n\nu_n;$$

$$C(E) = \text{множество непрерывных комплекснозначных функций на } E \subset \mathbb{R}^n;$$

$$\|f\|_{\infty, E} = \sup\{|f(x)|: x \in E\}.$$

Для поверхности  $S \subset \mathbb{R}^n$  с  $\sigma(X) < +\infty$  и функции  $f \in C(S)$  мы полагаем

$$\|f\|_{p,S} = \left( \frac{1}{\sigma(S)} \int_S |f|^p d\sigma \right)^{1/p}, \text{ для } 0 < p < \infty;$$

$$L_p(x, r, f) = \|f\|_{p,S} \text{ для } S = S_{x,r} \text{ и } L_p(r, f) = L_p(0, r, f) \text{ для } 0 < p \leq \infty.$$

Для открытого множества  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с  $\nu(\Omega) < +\infty$  и функции  $f \in C(\Omega)$ , мы полагаем

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left( \frac{1}{\nu(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^p d\nu \right)^{1/p}, \text{ при } 0 < p < \infty;$$

$$A_p(x, r, f) = \|f\|_{p,\Omega} \text{ для } \Omega = B_{x,r} \text{ и } A_p(r, f) = A_p(0, r, f) \text{ при } 0 < p \leq \infty;$$

$$h(\Omega) = \text{множество (комплекснозначных) гармонических на } \Omega \text{ функций};$$

$$H(\Omega) = \text{множество голоморфных на } \Omega \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \text{ функций}.$$

Мы рассматриваем следующие пространства Харди:

$$h^p = \{u \in h(B^n): \|u\|_p \equiv \sup_{0 \leq r < 1} L_p(r, u) < +\infty\};$$

$$H^p = \{f \in H(B^2): \|f\|_p \equiv \sup_{0 \leq r < 1} L_p(r, f) < +\infty\};$$

$$h_p^n = \{u \in h(B^n): \|u\|_{p,B^n} < +\infty\};$$

$$H_p^2 = \{f \in H(B^2): \|f\|_{p,B^2} < +\infty\}.$$

## §2. СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ И

## ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

Для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  и  $m = 0, 1, 2, \dots$ , через  $\mathcal{P}_m^n$  обозначим семейство всех однородных гармонических на  $\mathbb{R}^n$  полиномов точной степени  $m$  (и, таким образом, точной степени однородности  $m$ ). Включение в  $\mathcal{P}_m^n$  нулевого полинома 0, имеющего бесконечную степень однородности, превращает  $\mathcal{P}_m^n$  в линейное полупространство  $h(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $S = S^n$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^n$ . Сужение  $P|_S$ , где  $P \in \mathcal{P}_m^n$ , иногда называется *сферической гармоникой* в  $\mathbb{R}^n$  (степени  $m$ ) (см. [2], [3] или [13]).

В  $\mathcal{P}^n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m^n$  естественно использовать норму  $P \rightarrow \|P\|_{2,S}$  наслаждаясь следующим свойством ортогональности: для  $P \in \mathcal{P}_i^n$  и  $Q \in \mathcal{P}_j^n$

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_S P \bar{Q} d\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j, \\ \|P\|_{2,S}^2 & \text{если } i = j \text{ и } Q = P. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим теперь *гармонический элемент*  $u$  на  $\mathbb{R}^n$  (с центром 0), т. е. функцию  $u$ , гармоническую в некоторой окрестности начала координат. Поскольку  $u$  — аналитическая функция от вещественных переменных  $(x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$ , существует  $\delta > 0$  такое, что  $u$  может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд на  $\bar{B}_\delta$ , т. е.

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \bar{B}_\delta \quad (2)$$

с мультииндексами  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ . Отсюда вытекает следующее однородное разложение  $u$  на  $\bar{B}_\delta$ :

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), \quad u_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha. \quad (3)$$

Очевидно, что  $u_m$  является однородным полиномом степени  $m$  (или  $u_m \equiv 0$ ), и ряд (3) сходится абсолютно и равномерно на  $\bar{B}_\delta$ .

Заменяя в (3)  $x$  на  $tx$ ,  $t \geq 0$ , для любого фиксированного  $x \in \mathbb{R}^n$  мы получим разложение по степеням  $t$

$$u(tx) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m u_m(x), \quad |x| \leq \delta, \quad (4)$$

сходящееся абсолютно и равномерно для  $|x| \leq \delta$ . Из (4) следует единственность разложения (3). Кроме того, применяя к (4) оператор Лапласа  $\Delta$  для достаточно



малых  $t$ , имеем, что  $\Delta u_m(x) = 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ , так что  $u_m \in \mathcal{P}_m^n$  для  $m = 0, 1, 2, \dots$

Полагая в (5)  $x = \theta \in S$  и  $t = r \leq \delta$ , мы получим следующее разложение в терминах сферических гармоник :

$$u(r\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m u_m(\theta), \quad \text{для } \theta \in S, \quad 0 \leq r \leq \delta, \quad (5)$$

где сходимость абсолютная и равномерная (относительно  $r$  и  $\theta$ ). Из (5) и (1) прямым вычислением следует равенство Парсеваля :

$$L_2^2(r, u) = \|u\|_{2, S_r}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \|u_m\|_{2, S}^2, \quad \text{для } 0 \leq r \leq \delta, \quad (6)$$

где  $S_r = S_{0,r}$ . Обозначим также  $B_r = B_{0,r}$  и  $B_{\infty} = \mathbb{R}^n$ .

**Замечание 1.** Любой гармонический полином  $P$  имеет только конечное число сферических гармоник (остальные тождественно равны нулю). Равенство Парсеваля выполняется для  $u = P$  при  $0 \leq r \leq \delta$  и в частности для самого  $P$  для всех  $r \geq 0$ .

Кратко подведем итоги. С каждым гармоническим элементом  $u$  мы ассоциируем однозначно определенную последовательность  $(u_m)_{m=0}^{\infty}$  сферических гармоник  $u_m \in \mathcal{P}_m^n$ . Абсолютно и равномерно сходящееся разложение (5), а также тождество (6) выполняется для достаточно малого  $\delta > 0$ . Обратно, любое такое разложение для некоторой последовательности  $u_m \in \mathcal{P}_m^n$  определяет гармонический элемент  $u$ . Следующая лемма дает дополнительную информацию о взаимосвязи между  $u$  и  $(u_m)_{m=0}^{\infty}$ . Для ее формулировки введем некоторую терминологию. Для  $R < +\infty$ , скажем что точка  $x_0 \in S_R$  является *особой* точкой функции  $u \in h(B_R)$ , если для любой окрестности  $\omega$  точки  $x_0$  не существует функции  $v \in h(\omega)$ , такой, что  $u(x) = v(x)$  для  $x \in \omega \cap B_R$ . В противном случае точку  $x_0$  назовем *регулярной* точкой.

**Лемма 1..** Пусть  $u \in h(B_R)$  с ассоциированной последовательностью полиномов  $u_m \in \mathcal{P}_m^n$ . Тогда :

1) Для ряда (3) выполняется формула типа формулы Коши-Адамара :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{2, S}^{1/m} \leq 1/R, \quad (7)$$

где  $1/R = 0$ , если  $R = \infty$ ;

2) В случае  $R < \infty$  равенство в (7) выполняется только при условии, что  $u$  имеет особую точку на  $S_R$ ;

3) Ряд (5) сходится к  $u$  абсолютно для  $x = r\theta \in B_{R'}$  и равномерно относительно  $x = r\theta$  на любом замкнутом шаре  $\overline{B}_{R'} \subset B_R$ ;

4) Равенство Парсеваля для суммы  $u$  в (5) выполняется для всех  $0 \leq r < R$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать лемму для случая  $R < \infty$ , и в этом случае можно без ограничения общности считать, что  $R = 1$ . Поскольку любая непрерывная функция на сфере может быть равномерно приближена линейными комбинациями сферических гармоник (см. [13]), для функции  $u \in h(B)$  существует последовательность  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  гармонических полиномов на  $\mathbb{R}^n$ , так что  $\|u - P_k\|_{\infty, \overline{B}_r} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $0 \leq r < 1$ . Для  $k \in \mathbb{N}$  обозначим через  $P_{m,k}$ ,  $m = 0, 1, \dots$  сферические гармоники для  $P_k$ . Фиксируя  $r = \delta < 1$  и  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , для  $u - P_k$  из (6) мы получим, что

$$\|u_m - P_{m,k}\|_{2,S} \leq \delta^{-m} \|u - P_k\|_{2,S_\delta} \leq \delta^{-m} \|u - P_k\|_{\infty,S_\delta} \rightarrow 0 \quad (8)$$

при  $k \rightarrow \infty$  (см. также Замечание 1). Для  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  имеем

$$\|P_{m,k}\|_{2,S} \rightarrow \|u_m\|_{2,S}, \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

и полагая  $k \rightarrow \infty$  в неравенстве  $\|P_{m,k}\|_{2,S} \leq r^{-m} \|P_k\|_{2,S_r}$ , получим

$$\|u_m\|_{2,S} \leq r^{-m} \|u\|_{2,S_r}.$$

Мы заключаем, что

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{2,S}^{1/m} \leq 1/r \quad \text{для } 0 < r < 1,$$

что и доказывает (7) при  $R = 1$ .

Относительно других утверждений леммы: 2) следует прямо из 1) и единственности  $u_m$ ; 3) это Следствие 5.23 из [2]; 4) следует из утверждения 3) и из (1) прямым вычислением.

Функцию  $L > 0$  на  $(R_0, R)$  называют *логарифмически выпуклой* (см. [6], стр. 16), если  $\log L$  выпукла. Аналогично, если  $0 \leq R_0 < R \leq +\infty$ , мы скажем, что

функция  $L > 0$  на  $(R_0, R)$  логарифмически-выпуклая (лог-выпуклая) функция (от логарифма), если для  $r \in (R_0, R)$  и  $x = \log r$  функция  $x \mapsto \log L(e^x)$  выпуклая. Равносильное условие состоит в том, что для  $r_1, r_2 \in (R_0, R)$  и  $\alpha \in (0, 1)$

$$L(r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}) \leq L^\alpha(r_1) L^{1-\alpha}(r_2) \quad (9)$$

или что для  $r \in (r_1, r_2)$  и  $\alpha$ , заданное по  $r = r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}$

$$L(r) \leq L^\alpha(r_1) L^{1-\alpha}(r_2), \quad \alpha = \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)}. \quad (10)$$

Отметим, что если  $L \geq 0$  удовлетворяет условию (10) и  $L(r_1) = 0$  для некоторого  $r_1$ , то  $L \equiv 0$ . Более общо, для функции  $L > 0$ , удовлетворяющей (10), имеем

$$\inf_{r \in (R_0, R)} \frac{\log L(r)}{|\log r| + 1} > -\infty, \quad (11)$$

где  $|\log r|$  может быть заменен 0, если  $R_0 \neq 0$  и  $R \neq \infty$ . Теория выпуклых функций учит (см. [6], секция 3), что функция  $L > 0$ , удовлетворяющая (10), должна быть непрерывна или даже локально удовлетворять условию Липшица. Кроме того, пределы  $L(R_0 + 0)$  и  $L(R - 0)$  существуют в  $[0, +\infty]$  и в (9) и (10) мы можем положить  $r_1 = R_0$  и  $L(R_0) = L(R_0 + 0)$ , если  $0 < R_0$  и  $L(R_0 + 0) \in (0, +\infty)$  (соответственно, мы можем положить  $r_2 = R$  и  $L(R) = L(R - 0)$ , если  $R < +\infty$  и  $L(R - 0) \in (0, +\infty)$ ).

Предполагая, что  $L$  ограничена вблизи  $R_0 = 0$ , рассмотрим функцию

$$A(r) = \int_0^1 L(rt) d\mu(t), \quad \text{для } r \in (0, R), \quad (12)$$

где  $\mu$  - положительная мера на  $(0, 1)$ . Из (10) следует, что для  $r_1, r_2 \in (0, R)$  и  $\alpha \in (0, 1)$

$$A(r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}) \leq \int_0^1 L^\alpha(r_1 t) L^{1-\alpha}(r_2 t) d\mu(t).$$

Применяя неравенство Гельдера (с  $p = 1/\alpha$  и  $q = 1/(1-\alpha)$ ) к интегралу в правой части, приходим к условию (9) для  $A$ . Итак, имеет место следующая

**Лемма 2.** Если  $L$  - лог-выпуклая функция от  $\log$ , такова же функция  $A$ , определенная по (12).



### Примеры

1. Теорема Харди о выпуклости (см. [7], стр. 9, теорему 1.5) утверждает, что для функции  $f$ , голоморфной в единичном круге  $\mathbb{C} (\equiv \mathbb{R}^2)$  и  $0 < p \leq +\infty$

(i) функция  $L_p(r, f)$  — неубывающая функция от  $r$ ;

(ii) если  $f \not\equiv 0$ , то функция  $L_p(r, f)$  является лог-выпуклой от  $\log$ .

В случае  $p = \infty$ , утверждение (ii) — это хорошо известная теорема Адамара о трех окружностях. Случай  $p = 0$  также может быть включен, если мы положим

$$L_0(r, f) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right).$$

Тогда оба свойства (i) и (ii) следуют из свойства субгармоничности функции  $\log^+ |f|$ .

2. Для функции  $u$ , гармонической в единичном шаре  $B$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , свойство (i) выполняется для  $p \geq 1$ : функция  $v = |u|^p$  субгармонична и тогда  $L_1(r, v) = L_p^p(r, u)$  — неубывающая функция от  $r$  (см. [9], стр. 70, Лемма 4.18). Важно отметить, что свойство (ii) выполняется для  $p = 2$  (см. [11], Лемма 2.1). Это сразу следует из теоремы Адамара о трех окружностях, примененной к степенному ряду в тождестве Парсеваля для  $u$ .

3. Легко видеть, что для функции  $f \in C(B_{x,r})$

$$A_p^p(x, r, f) = \int_0^1 L_p^p(x, rt, f) dt^n.$$

Отсюда и из предыдущей леммы следует, что если функция  $f$  обладает свойствами (i) и (ii) (с центром  $x$ ), то этим двум свойствам удовлетворяет также функция  $A_p(x, r, f)$ .

## §3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

### 3.1. Инверсия и преобразование Кельвина

Инверсия относительно сферы  $S_{a,\rho}$  — это взаимно-однозначное преобразование  $\varphi = \varphi_{a,\rho}: \mathbb{R}_a^n \rightarrow \mathbb{R}_a^n$ , определенное по формуле

$$\varphi(x) = a + \frac{\rho^2}{|x - a|^2}(x - a).$$

Точки  $x \in \mathbb{R}_a^n$  и  $x^* = \varphi(x)$  называются симметричными относительно  $S_{a,\rho}$ .

Очевидно,  $\varphi^{-1} = \varphi$ , т. е.  $(x^*)^* = x$ .

**Замечание 2.** Для  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  мы отождествим разность  $x_2 - x_1$  с вектором с начальной точкой в  $x_1$  и концом в  $x_2$ . Тогда по приведенному выше определению

а) векторы  $x - a$  и  $x^* - a$  коллинеарны, одинаково направлены и  $|x - a||x^* - a| = \rho^2$ ;

б) если  $|x - a| > \rho$ , тогда для  $r = (|x - a|^2 - \rho^2)^{1/2}$  сферы  $S_{x,r}$  и  $S_{a,\rho}$  ортогональны; вектор  $x^* - a$  является ортогональной проекцией на направление  $x - a$  касательных к  $S_{x,r}$  векторов с началом в точке  $a$ .

Преобразование  $\varphi$  бесконечно дифференцируемо на  $\mathbb{R}_a^n$ . Чтобы вычислить  $\varphi' = \varphi'_{a,\rho}$ , достаточно рассмотреть  $a = 0$ . Очевидно

$$\varphi'(x)v = \frac{\rho^2}{|x|^2}v - \frac{2\rho^2(x,v)}{|x|^4}x \quad \text{для } x \in \mathbb{R}_0^n, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

или

$$\varphi'(x) = \frac{\rho^2}{|x|^2}I - \frac{2\rho^2}{|x|^4}(x, \cdot)x,$$

где  $I$  — тождественный оператор в  $\mathbb{R}^n$ .

Вычислим Якобиан  $J_\varphi(x) = \det \varphi'(x)$ . Полагая  $x = \sum_1^n x_i e_i$ , где  $(e_i)_1^n$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ , имеем

$$\varphi'(x) = \left( \frac{\rho^2}{|x|^2} a_{ij} \right)_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Таким образом

$$J_\varphi(x) = \left( \frac{\rho}{|x|} \right)^{2n} \det(a_{ij}).$$

Полагая  $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n = d(x_1, \dots, x_n)$  и записывая элементы последнего столбца  $a_{in}$  в виде

$$a_{in} = \delta_{in} - \frac{2x_i x_n}{|x|^2},$$

мы представляем  $\det(a_{ij})$  как сумму соответствующих детерминантов:

$$d(x_1, \dots, x_n) = d(x_1, \dots, x_{n-1}) + d'.$$

Детерминант  $d'$  может быть легко вычислен. После того, как мы вынесем множитель  $-x_n$  из последнего столбца, умножая этот столбец на  $x_j$  и прибавляя к  $j$ -тому столбцу,  $j$ -тый столбец становится равным  $\delta_{ij}$ . Поэтому  $d' = -2(x_n/|x|)^2$

и поскольку  $d(x_1) = 1 - 2(x_1/|x|)^2$ , мы получим, что  $d(x_1, \dots, x_n) = -1$ . Окончательно мы имеем, что  $J_\varphi(x) = -(\rho/|x|)^{2n}$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^n$ , а для произвольного  $a \in \mathbb{R}^n$

$$J_{\varphi_{a,p}}(x) = -\left(\frac{\rho}{|x-a|}\right)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}_a^n. \quad (13)$$

С каждой функцией  $f \in C(\Omega)$ , где  $\Omega \subset \mathbb{R}_a^n$ , мы ассоциируем ее *преобразование Кельвина*  $f^* = f_{a,p} \in C(\varphi(\Omega))$  (где  $\varphi = \varphi_{a,p}$ ), определенное в  $\varphi(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega)$  формулой

$$f^*(y) = \left(\frac{\rho}{|y-a|}\right)^{n-2} \overline{f(\varphi(y))}, \quad y \in \varphi(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega). \quad (14)$$

Главное свойство  $f^*$  состоит в том, что  $f^* \in h(\varphi(\Omega))$  если  $f \in h(\Omega)$ . Для  $n = 2$   $f^* \in H(\varphi(\Omega))$ , если  $f \in H(\Omega)$ . Кроме того,  $(f^*)^* = f$ . С помощью замены переменных, учитывая (13) для  $0 < p < +\infty$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x-a|^\beta |f(x)|^p dx &= \int_{\varphi(\Omega)} |y-a|^\beta |f_{a,p}(y)|^p dy, \\ \int_{\varphi(\Omega)} |f_{a,p}(y)|^p dy &= \int_{\Omega} \left(\frac{|x-a|}{\rho}\right)^{2\beta} |f(x)|^p dx, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\beta = (p/2)(n-2) - n = (n/2)(p-2) - p$ . Интересно отметить, что  $\beta$  не зависит от  $n$ , если  $p = 2$  и не зависит от  $p$ , если  $n = 2$ .

Если  $0 < d_1 < |y-a| < d_2$  для  $y \in \Omega \cup \varphi(\Omega)$ , то из первой формулы следует, что

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{-|\beta|} \int_{\Omega} |f|^p d\nu \leq \int_{\varphi(\Omega)} |f^*|^p d\nu \leq \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{|\beta|} \int_{\Omega} |f|^p d\nu$$

или

$$c^{-1} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{-\gamma} \cdot \|f\|_{p,\Omega} \leq \|f^*\|_{p,\varphi(\Omega)} \leq c \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{\gamma} \cdot \|f\|_{p,\Omega}, \quad (16)$$

где

$$\gamma = |\beta|/p = \left| \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{p}\right) - 1 \right|, \quad c = [\nu(\Omega)/\nu(\varphi(\Omega))]^{1/p}.$$

Из (14) легко видеть, что (16) выполняется также для  $p = \infty$ , когда  $\gamma = \frac{n}{2} - 1$  и  $c = 1$ .

### 3.2. Концентрация шаров

Найдем теперь образ  $\varphi(\Omega)$  в случае  $\Omega = B_{x,r}$ . Поскольку  $a \notin B_{x,r}$ , то длина касательной точки  $a$  к сфере  $S_{x,r}$  равна

$$\rho_{x,r}(a) = \rho_{x,r} = (|x-a|^2 - r^2)^{1/2}. \quad (17)$$



Заметим, что условие  $\zeta \in B_{x,r}$  равносильно условию

$$|\zeta - a|^2 - 2\langle \zeta - a, x - a \rangle + \rho_{x,r}^2 < 0.$$

Полагая  $z = \varphi(\zeta)$  для  $z \in \varphi(B_{x,r})$  и учитывая, что  $|z - a| |\zeta - a| = \rho^2$  и  $\zeta = \varphi(z)$ , имеем

$$\rho^4 - 2\langle z - a, \rho^2(x - a) \rangle + \rho_{x,r}^2 |z - a|^2 < 0,$$

так что  $|z - x'| < r'$ , т.е.  $\varphi(B_{x,r}) = B_{x',r'}$ , где

$$x' = a + \left( \frac{\rho}{\rho_{x,r}} \right)^2 (x - a), \quad r' = \left( \frac{\rho}{\rho_{x,r}} \right)^2 r. \quad (18)$$

Согласно (18) векторы  $x' - a$  и  $x - a$  коллинеарны и одинаково направлены. Для наблюдателя из точки  $a$  шары  $B_{x,r}$  и  $\varphi(B_{x,r})$  видны под одинаковым углом  $\alpha$ . Это следует из равенства

$$\frac{r'}{|x' - a|} = \frac{r}{|x - a|} \equiv \sin(\alpha/2).$$

Рассмотрим теперь шары  $B_{x,r} \subset B_{x_0,r_0}$  и пусть  $x \neq x_0$ . Найдем условия на  $\rho$  и  $a \notin \overline{B_{x_0,r_0}}$  при которых  $\varphi = \varphi_{a,\rho}$ -образы этих шаров становятся концентрическими. Очевидное необходимое условие состоит в том, чтобы границы этих шаров не пересекались и поэтому  $|x - x_0| + r < r_0$ .

Мы полагаем, что  $\rho$  задан соотношением  $\rho = \rho_{x_0,r_0}(a)$  (см. (17)). Тогда сферы  $S_{x_0,r_0}$  и  $S_{a,\rho}$  ортогональны и из (18) имеем, что  $x'_0 = x_0$  и  $r'_0 = r_0$ , так что  $\varphi(B_{x_0,r_0}) = B_{x_0,r_0}$ . Согласно (17) и (18), образ  $B_{x',r'}$  шара  $B_{x,r}$  концентричен с  $B_{x_0,r_0}$ , если  $x' = x_0$ , т.е. если

$$\frac{x_0 - a}{\rho^2} = \frac{x - a}{\rho_{x,r}^2}. \quad (19)$$

Можно легко проверить, что (19) можно записать как  $\varphi_{a,\rho_{x_0,r_0}}(x_0) = \varphi_{a,\rho_{x,r}}(x)$ . Используя Замечание 2, мы приходим к следующей геометрической интерпретации условия (19): векторы  $x_0 - a$  и  $x - a$  коллинеарны и одинаково направлены; ортогональные проекции на это направление касательных от точки  $a$  к сферам  $S_{x_0,r_0}$  и  $S_{x,r}$  совпадают.



Рассмотрим теперь (19) как уравнение относительно переменной  $a$ , и докажем существование и единственность решения. Поскольку векторы  $x_0 - a$  и  $x - a$  коллинеарны с  $x_0 - x$  и выполнено условие  $|x - a| > r_0$ , мы имеем

$$x_0 - a = \lambda(x_0 - x), \quad x - a = (\lambda - 1)(x_0 - x), \quad (20)$$

для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}$ , такого, что  $|\lambda| > r_0 |x - x_0|^{-1}$ . Вместе с (20) уравнение (19) эквивалентно

$$\frac{\rho_{x_0, r_0}^2}{\lambda} = \frac{\rho_{x, r}^2}{\lambda - 1}.$$

Учитывая (17) и (20), имеем

$$\frac{r_0^2}{\lambda} = \frac{r^2}{\lambda - 1} + |x - x_0|^2. \quad (21)$$

Квадратное уравнение (21) (относительно переменной  $\lambda$ ) имеет два корня  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , причем  $\lambda_1 \lambda_2 = r_0^2 |x - x_0|^{-2}$ , так что  $\lambda = \lambda(a) = \lambda_2$  — единственный корень (21) такой, что  $\lambda > r_0 |x - x_0|^{-1}$ . Таким образом, чтобы найти точку  $a \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющую (19), мы можем воспользоваться (20) с  $\lambda = \lambda(a)$ .

Следующая двусторонняя оценка  $\lambda(a)$  будет нам полезна :

$$\frac{2r_0 - r - |x - x_0|}{|x - x_0|} < \lambda(a) < \frac{r_0^2}{|x - x_0|^2}. \quad (22)$$

Вторая оценка в (22) сразу следует из (21). Чтобы доказать первую оценку отметим сначала очевидное неравенство

$$\lambda \geq 2 \frac{r_0}{|x - x_0|} - \frac{r_0^2/\lambda}{|x - x_0|^2}, \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

Остается подставить значение  $r_0^2/\lambda$  из (21) и заметить, что согласно (20)

$$\frac{r}{(\lambda - 1)|x - x_0|} = \frac{r}{|a - x|} < 1.$$

Для  $a$ , удовлетворяющего (19), обозначим через  $d = d(a)$  расстояние  $a$  от  $B_{x_0, r_0}$ .

Поскольку для  $\lambda = \lambda(a)$

$$d = |a - x_0| - r_0 = \lambda |x - x_0| - r_0,$$

неравенства (22) приводят к

$$0 < \delta_0 < d < \frac{r_0}{|x - x_0|} \delta, \quad (23)$$

где  $\delta_0 = r_0 - |x - x_0| - r$ ,  $\delta = r_0 - |x - x_0|$ . Используя также формулу (18) для радиуса  $r'$  шара  $\varphi(B_{x,r})$ , мы получим по (19) и (20), что  $r'r^{-1} = \lambda(\lambda - 1)^{-1}$ . Отсюда и (22) легко вывести оценки

$$\frac{r_0}{2\delta} < \frac{r'}{r} < \frac{r_0}{\delta}, \quad \text{при } r < r'. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь множество  $\mathcal{M}$  всех шаров  $B_{\bar{x},\bar{r}} \subset B_{x_0,r_0}$ ,  $\varphi = \varphi_{a,\rho}$ , образы которых концентричны с  $B_{x_0,r_0}$ . Фактически, параметры  $a$  и  $\rho$  были выбраны таким образом, чтобы обеспечить включение  $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}$  для предыдущих двух случаев, когда соответственно  $\bar{x} = x_0$ ,  $\bar{r} = r_0$  и  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{r} = r$ . Согласно (18) условие

$$\frac{x_0 - a}{\rho^2} = \frac{\bar{x} - a}{\rho_{\bar{x},\bar{r}}^2} \quad (25)$$

необходимо и достаточно для включения  $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}$ .

Согласно (25) вектор  $\bar{x} - a$  коллинеарен и одинаково направлен с  $x_0 - a$  и поэтому с  $x_0 - x$ . Можно считать, что  $\bar{x} - x_0 = \mu(x - x_0)$  для некоторого  $\mu \geq 0$  и переписать (25) в виде

$$\frac{\rho_{x_0,r_0}^2}{|a - x_0|} = \frac{\rho_{\bar{x},\bar{r}}^2}{|a - \bar{x}|}$$

или согласно (17)

$$\frac{r_0^2}{|a - x_0|} = \frac{\bar{r}^2}{|a - \bar{x}|} + |\bar{x} - x|. \quad (26)$$

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{M}_0 = \{B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M} : B_{\bar{x},\bar{r}} \subset B_{x,r}\}.$$

Необходимым и достаточным условием для  $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}_0$  вместе с (26) является условие  $\bar{r} \geq r$ . Поскольку  $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}$ , мы приходим к условию

$$\bar{r}^2 = \left( \frac{r_0^2}{|a - x_0|} - |\bar{x} - x_0| \right) |a - \bar{x}| \geq \left( \frac{r_0^2}{|a - x_0|} - |x - x_0| \right) |a - x| = r^2.$$

Очевидно, что неравенство выполняется тогда и только тогда, если  $|a - \bar{x}| \geq |a - x|$ , т.е. если  $|\bar{x} - x_0| \leq |x - x_0|$  или  $\mu \leq 1$  и таким образом  $\bar{x} \in [x_0, x]$ . Правая часть этого неравенства положительна, а левая часть определяет  $\bar{r}^2$  как функцию от  $\bar{x}$ . Наконец,  $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}_0$  тогда и только тогда, если  $\bar{x} \in [x_0, x]$  и  $\bar{r}$  является положительным корнем (26).



Имеется другое представление  $\bar{r}$  без привлечения точки  $a$ . Легко проверить, что (26) может быть записано в виде

$$\frac{r_0^2 + |\bar{x} - x_0|^2 - \bar{r}^2}{|\bar{x} - x_0|} = \frac{r_0^2 + |a - x_0|^2}{|a - x_0|}.$$

Правая часть этого равенства не зависит от  $\bar{x}$  и  $\bar{r}$ ; заменяя  $\bar{x}$  на  $x$  и  $\bar{r}$  через  $r$ , находим

$$\frac{r_0^2 + |\bar{x} - x_0|^2 - \bar{r}^2}{|\bar{x} - x_0|} = \frac{r_0^2 + |x - x_0|^2 - r^2}{|x - x_0|}. \quad (27)$$

Это равенство явным образом определяет  $\bar{r}$  в терминах  $x_0, r_0, x, r$  и  $\bar{x} \in [x_0, x]$ .

Полагая теперь  $\varphi(B_{x,r}) = B_{x_0,r'}$ , из (18) получим

$$\frac{\bar{r}'}{\bar{r}} = \frac{|a - x_0|}{|a - \bar{x}|} = \frac{|a - x_0|}{|a - x_0| - |\bar{x} - x_0|} < \frac{r_0}{r_0 - |\bar{x} - x_0|}, \quad (28)$$

так как  $|a - x_0| > r_0$ . Чтобы оценить  $\bar{r}'$  сверху, представим (26) в виде

$$\bar{r}^2 = |a - \bar{x}|^2 - \frac{|a - \bar{x}|}{|a - x_0|} \rho_{x_0, r_0}^2,$$

откуда с учетом (28)

$$(\bar{r}')^2 = r_0^2 - \frac{|\bar{x} - x_0|}{|a - \bar{x}|} \rho_{x_0, r_0}^2.$$

Поскольку для  $d = d(a)$

$$|a - x_0| = r_0 + d, \quad \rho_{x_0, r_0}^2 > 2r_0 d, \quad |a - \bar{x}| = (r_0 - |\bar{x} - x_0|) + d,$$

из (23) следует, что

$$\rho_{x_0, r_0}^2 > 2r_0 \delta_0, \quad |a - \bar{x}| < \frac{2r_0}{|\bar{x} - x_0|} (r_0 - |\bar{x} - x_0|).$$

С учетом этих оценок и формулы  $(\bar{r}')^2$  получим

$$\left(\frac{\bar{r}'}{r_0}\right)^2 < 1 - \left(\frac{|\bar{x} - x_0|}{r_0}\right)^2 \frac{\delta_0}{r_0 - |\bar{x} - x_0|} = 1 - t.$$

Так как  $0 < t < 1$ , из оценки  $\log(1 - t)^{-1} > t$  имеем

$$\log \frac{r_0}{\bar{r}'} > \frac{|\bar{x} - x_0|^2}{2r_0^2} \cdot \frac{\delta_0}{r_0 - |\bar{x} - x_0|}. \quad (29)$$

*Подведем итоги предыдущей дискуссии.* Для не касающихся и неконцентрических шаров  $B_{x,r} \subset B_{x_0,r_0}$ , (20) определяет точку  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{x_0,r_0}$ , где  $\lambda = \lambda(a) -$

наибольший корень (21). Далее определим  $\rho$  из условия  $\rho = \rho_{x_0, r_0}(a)$  (см. (17)).

Тогда для инверсии  $\varphi = \varphi_{a, \rho}$  имеем, что  $\varphi(B_{x_0, r_0}) = B_{x_0, r_0}$  и  $\varphi(B_{x, r}) = B_{x_0, r'}$ .

Мы доказали, что для любой  $\bar{x} \in [x_0, x]$  и для  $\bar{r} > 0$ , удовлетворяющего (26) или (27),  $\varphi = \varphi_{a, \rho}$ -образы шаров  $B_{x, r} \subset B_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B_{x_0, r_0}$  концентричны с  $B_{x_0, r_0}$ :

$$\varphi(B_{x, r}) = B_{x_0, r'} \subset \varphi(B_{\bar{x}, \bar{r}}) = B_{x_0, \bar{r}'} \subset \varphi(B_{x_0, r_0}) = B_{x_0, r_0}.$$

#### §4. ЛОГ-ВЫПУКЛОСТЬ (НЕКОНЦЕНТРИЧНЫЕ ШАРЫ)

Обозначим через  $B_r = B_{0, r}$  открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке 0 и радиуса  $r$ ;  $B_1 = B = B^n$  — это единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим теперь обсужденные выше не касающиеся и неконцентричные шары. Для простоты будем полагать, что  $B_{x_0, r_0} = B$ , т.е.  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ . Тогда отмеченные выше параметры зависят лишь от  $x$  и  $r$ . Итак, мы рассматриваем шары  $B_{x, r} \subset B_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B$  для  $\bar{x} \in [0, x]$ , имеющие концентрические  $\varphi = \varphi_{a, \rho}$ -образы

$$B_{r'} = \varphi(B_{x, r}) \subset B_{\bar{r}'} = \varphi(B_{\bar{x}, \bar{r}}) \subset B = \varphi(B). \quad (30)$$

Возьмем функцию  $f \in C(B)$  с  $\|f\|_{p, B} < +\infty$  для некоторого  $p \in (0, +\infty]$  и ее преобразование Кельвина  $f^* = f_{a, \rho}$  с параметрами  $a$  и  $\rho$  как выше. Поскольку  $\varphi(B) = B$ , из (14) и (16) следует, что  $f^* \in C(B)$  и  $\|f^*\|_{p, B} < +\infty$ . Подчиним функцию  $A_p(r) = A_p(r, f^*)$  на  $[0, 1]$  следующим условиям:

- (i)  $A_p$  не убывает;
- (ii)  $A_p$  является лог-выпуклой от  $\log$ .

Согласно (ii) и (10) для  $A_p$  с  $r_1 = r'$ ,  $r = \bar{r}'$  и  $r_2 = 1$  получим

$$A_p(\bar{r}', f^*) \leq A_p^\alpha(r', f^*) A_p^{1-\alpha}(1, f^*), \quad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{\log(1/\bar{r}')}{\log(1/r')}. \quad (32)$$

Из (i) следует, что в (31) можно заменить  $\alpha$  произвольным  $\omega \in (0, \alpha]$ . Согласно (18)  $r'/r = |a|/|a - x|$ ,  $\bar{r}'/\bar{r} = |a|/|a - \bar{x}|$ , где  $\bar{r} > 0$  — корень уравнения (27) (с  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ ). Кроме того,  $a = \lambda x$ , где  $\lambda$  (см. (21)) — больший корень уравнения  $1/\lambda = r^2/(\lambda - 1) + |x|^2$ .

Для того, чтобы переписать (31) в терминах  $f$ , мы должны оценить  $A_p(\bar{r}', f^*)$  снизу и  $A_p(r', f^*)$  вместе с  $A_p(1, f^*)$  сверху. Отметим сначала, что для некоторого  $y \in B$  из (23) следует, что  $\delta_0 < |y - a| < 2 + d < 2|x|^{-1}$ .

Применяя (16) для  $\Omega = B_{r'}$  с  $d_1 = \delta_0$  и  $d_2 = 2|x|^{-1}$  и учитывая, согласно (24)  $r < r'$  и отсюда в (16)  $c < 1$ , получим

$$A_p(r', f^*) \leq \left( \frac{2}{\delta_0|x|} \right)^7 A_p(x, r, f).$$

Аналогично, согласно (28), (30) и (16) имеем

$$A_p(\bar{r}', f^*) \geq \left( \frac{2}{\delta_0|x|} \right)^{-7} (1 - |\bar{x}|)^{n/p} A_p(\bar{x}, \bar{r}, f), \quad A_p(1, f^*) \leq \left( \frac{2}{\delta_0|x|} \right)^7 A_p(1, f).$$

Подставляя последние три оценки в (31), для  $0 < \omega \leq \alpha$  мы приходим к следующему "приближенному" условию лог-выпуклости:

$$A_p(\bar{x}, \bar{r}, f) \leq A_p^\omega(x, r, f) A_p^{1-\omega}(1, f) \cdot \left[ \left( \frac{2}{|x|} \right)^{2\gamma} (1 - |\bar{x}|)^{-n/p} \right] \delta_0^{-2\gamma}, \quad (33)$$

где  $\gamma = |\beta|/p$ ,  $2\beta = p(n-2) - 2n$ . Из (32), (27), (29) (для  $x_0 = 0$  и  $r_0 = 1$ ) можно усмотреть некоторое конкретное значение  $\omega \in (0, \alpha]$ , определенное формулой

$$\omega = \frac{|\bar{x}|^2}{2(1 - |\bar{x}|)} \cdot \frac{\delta_0}{\log \frac{1-|\bar{x}|}{(r/2)}}, \quad \text{где } \delta_0 = 1 - |x| - r. \quad (34)$$

Применяя (15) в (31), представим вместо (33) более точную версию лог-выпуклости для неконцентрических шаров. Полагая  $d\mu_a = |x - a|^{2\beta} dx$ , получим для  $0 < \omega \leq \alpha$

$$\int_{B_{\bar{x}, \bar{r}}} |f|^p d\mu_a \leq \left( \int_{B_{x, r}} |f|^p d\mu_a \right)^\omega \left( \int_B |f|^p d\mu_a \right)^{1-\omega}. \quad (35)$$

Напомним теперь, что наши условия (i) и (ii) фактически выполнены в следующих двух случаях (см. §2, Примеры 1-3):

1). Если  $p = 2$  и  $f \in h(B)$ , где  $B = B^n$  - единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , то (i) и (ii) следуют из Примера 2. Если  $f \in h_\nu^2$ , то  $f^* \in h_\nu^2$ .

2). Если  $n = 2$  и  $f \in H(B)$ ,  $p > 0$ , где  $B$  - единичный круг в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , то (i) и (ii) следуют из Примеров 1 и 3. Если  $f \in H_\nu^p$ , то  $f^* \in H_\nu^p$ .

Следующие теоремы резюмируют (31)-(35).



**Теорема 1.** Пусть  $f \in h^2_\nu$  в  $B = B^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $\overline{B}_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B$ ,  $\bar{x} \in [0, x]$  и  $\bar{r} > 0$  – корень уравнения (27) (с  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ ). Пусть  $\omega \in (0, \alpha]$ , где  $\alpha$  определяется по (32) (в частности,  $\omega$  может быть выбран согласно (34)). Тогда, для  $p = 2$  условия (33) и (35) выполняются с  $\beta = -2$  и  $\gamma = 1$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f \in H^p_\nu$  в единичном круге  $B \subset \mathbb{C}$  для некоторого  $p \in (0, +\infty]$ ,  $\overline{B}_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B$ ,  $\bar{x} \in [0, x]$  и  $\bar{r} > 0$  – корень уравнения (27) (с  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ ). Пусть  $\omega \in (0, \alpha]$ , где  $\alpha$  определяется по (32) (в частности,  $\omega$  может быть выбрано согласно (34)). Тогда условия (33) и (35) выполняются с  $\beta = -2$  и  $\gamma = 2/p$ .

**Замечание 3.** В Теоремах 1 и 2 условия (33) и (35) могут быть рассмотрены как аналоги хорошо-известной теоремы Адамара о трех окружностях в новой ситуации (гармонические функции многих переменных, неконцентрические шары). Условие (33) представляется более “приближенным”, а условие (35) более точным, особенно для  $\omega = \alpha$ .

## §5. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Из Теорем 1 и 2 мы можем вывести некоторые результаты о *единственности*.

**Теорема 3.** Пусть  $u \in h^2_\nu$  в  $B = B^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $B_{x_m, r_m} \subset B$  и  $A_2(x_m, r_m, u) \leq \varepsilon_m$ , для  $m \in \mathbb{N}$ . Если для некоторой константы  $c > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \rho_m \log \varepsilon_m + c \log \frac{1}{1 - |x_m|} \right) = -\infty, \quad \text{где} \quad \rho_m = \frac{1 - |x_m|}{\log \frac{1 - |x_m|}{(r_m/2)}}, \quad (36)$$

то  $u \equiv 0$  в  $B$ .

**Доказательство.** Классический вариант теоремы единственности для  $u \in h(B)$  утверждает, что если  $u(x) = 0$  для  $x \in \overline{B}_{x_0, \sigma_0} \subset B$ , то  $u \equiv 0$  в  $B$ . Последнее условие может быть заменено на  $A_2(x_0, \sigma_0, u) = 0$ . Используя аргумент компактности, мы заключаем: для фиксированной  $u \in h(B)$ ,  $u \not\equiv 0$  и  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\sigma \in (0, 1 - \tau)$  существует константа  $a = a_{\tau, \sigma} > 0$ , такая, что

$$a_{\tau, \sigma} < A_2(x, \sigma, u) \quad \text{для} \quad x \in \overline{B}_\tau. \quad (37)$$

Докажем, что допущение  $u \not\equiv 0$  противоречит предположениям Теоремы 3.

Пусть сначала  $r_m \neq 0$ . Тогда  $1 - |x_m| \geq r_m > 2\sigma$  для некоторого  $\sigma > 0$  и подпоследовательности  $m = m_k \rightarrow \infty$ . Из (36) заключаем, что  $\varepsilon_{m_k} \rightarrow 0$ . Однако

$$A_2(x_{m_k}, \sigma, u) \leq A_2(x_{m_k}, r_{m_k}, u) \leq \varepsilon_{m_k},$$

что противоречит условию (37) с  $\tau = 1 - 2\sigma$  для  $k > k_\sigma$ .

Предположим теперь, что  $r_m \rightarrow 0$  и  $|x_m| \neq 1$ . Тогда  $1 - |x_m| > 4\sigma$  для некоторого  $\sigma > 0$  и  $m = m_k \rightarrow \infty$ . Из (36) следует что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon_{m_k}}{\log(1/r_{m_k})} = -\infty. \quad (38)$$

Полагая  $\tau = 1 - 4\sigma$ , рассмотрим константу  $b_\sigma > 1$ , для которой

$$A_2(x, e\sigma, u) < b_\sigma \quad \text{для} \quad x \in \overline{B}_\tau. \quad (39)$$

Применим теперь свойство (10) лог-выпуклости к функции  $L(r) = A_2(x, r, u)$  (см. §2, примеры 1—3). Поскольку  $r_{m_k} < \sigma$  для  $k > k_\sigma$ , в (10) можно выбрать  $r_1 = r_{m_k}$  для  $k > k_\sigma$ ,  $r = \sigma$  и  $r_2 = e\sigma$ . Используя также (37) и (39), получим

$$\log \frac{a_{\tau, \sigma}}{b_\sigma} < \alpha_k \log \varepsilon_{m_k}, \quad \text{где} \quad \alpha_k = \left( \log \frac{e\delta}{r_{m_k}} \right)^{-1}.$$

Левая часть этой оценки конечна и не зависит от  $k$ . Это противоречит условию (38).

Для завершения доказательства остается только рассмотреть случай  $|x_m| \rightarrow 1$ . Можно считать, что  $1 - |x_m| \geq 2r_m$  для  $m \in \mathbb{N}$  (иначе можно заменить  $B_{x_m, r_m}$  на  $B_{x_m, r_m/2}$ , не изменяя условия (36)). Применим Теорему 1 с (33) к функции  $f = u$  и к шарам  $B_{x_m, r_m} \subset B_{\bar{x}_m, \bar{r}_m} \subset B$ , где  $\bar{x}_m = \frac{1-2\sigma}{|x_m|} x_m$  с достаточно малым фиксированным  $\sigma \in (0, 1/4)$  и  $\bar{r}_m$ , определенным по (26) или (27) (с  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ ,  $x = x_m$ ,  $r = r_m$  и  $\bar{x} = \bar{x}_m$ ). Поскольку  $|x_m| \rightarrow 1$ , имеем, что  $|x_m| > 1 - \sigma$  для  $m > m_\sigma$ . Тогда  $\bar{r}_m > |x_m - \bar{x}_m| > \sigma$  и  $B_{x_m, \sigma} \subset B_{\bar{x}_m, \bar{r}_m}$ . Из (37) для  $\tau = 1 - 2\sigma$  и  $x = \bar{x}_m$  (полагая  $a_{\tau, \sigma} = a_\tau$ ) следует, что

$$a_\sigma < A_2(\bar{x}_m, \sigma, u) \leq A_2(\bar{x}_m, \bar{r}_m, u), \quad m > m_\sigma. \quad (40)$$

Поскольку  $\delta_0 = 1 - |x_m| - r_m \geq \frac{1}{2}(1 - |x_m|)$ , можно в (33) и (34) заменить  $\delta_0$  на  $\frac{1}{2}(1 - |x_m|)$ . Из (34) следует

$$\omega \geq \omega_m = \frac{1}{32\sigma} \rho_m, \quad m > m_\sigma. \quad (41)$$

Полагая  $b = 1 + A_2(1, u)$  и применяя (40), из (33) с  $p = 2$  и  $\gamma = 1$  для  $m > m_\sigma$  получим

$$\varepsilon_m^{\omega_m} (1 - |x_m|)^{-1} > b_\sigma, \quad \text{где} \quad b_\sigma = \frac{\sigma^{n/2} a_\sigma}{16b}.$$

Отсюда и из (41) для  $m > m_\sigma$  имеем

$$\rho_m \log \varepsilon_m + 64\sigma \log \frac{1}{1 - |x_m|} > c_\sigma \quad (42)$$

с  $c_\sigma = 32\sigma \log b_\sigma$ . Для константы  $c > 0$  в (36) можно выбрать  $\sigma$  так, чтобы  $64\sigma < c$ .

Тогда (42) противоречит (36). Это доказывает Теорему 3.

Совершенно аналогично, теорему единственности для голоморфных функций можно вывести из Теоремы 2 с условием (33).

**Теорема 4.** Пусть  $f \in H_p^r$  в единичном шаре  $B \subset \mathbb{C}$  для некоторого  $p \in (0, +\infty]$ ,  $B_{x_m, r_m} \subset B$  и  $A_p(x_m, r_m, f) \leq \varepsilon_m$  для  $m \in \mathbb{N}$ . Предположим, что условие (36) выполнено для некоторой константы  $c$ , полагая, что  $c > 0$ , если  $p \neq \infty$  и  $c = 0$  (см. (45)), если  $p = \infty$ . Тогда  $f \equiv 0$  в  $B$ .

**Замечание 4.** В Теоремах 3 и 4 условие (36) может быть заменено более простым условием

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( r_m \log \varepsilon_m + c \frac{1}{1 - |x_m|} \right) = -\infty, \quad (43)$$

которое в Теореме 4 для  $p = \infty$  принимает крайне простой вид :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m \log \varepsilon_m = -\infty. \quad (44)$$

Это следует из очевидной оценки  $\rho_m \geq (r_m/2)$ .

**Пример 4.** Условие (44) точное. Чтобы показать это, выберем произвольную последовательность  $x_m \in (0, 1)$ ,  $x_m \rightarrow 1$ , положим  $2r_m = 1 - x_m$  и выберем  $f \in H(B)$ ,  $B = B^2 \subset \mathbb{C}$ ,  $\|f\|_{\infty, B} = 1$  по формуле

$$f(z) = \exp \left( -A \frac{1+z}{1-z} \right), \quad A > 0.$$

Легко видеть, что для  $\varepsilon_m = \|f\|_{\infty, B_{x_m, r_m}}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m \log \varepsilon_m = -\frac{2}{3}A,$$



откуда следует, что для каждой последовательности  $\alpha_m \in (0, 1)$ ,  $\alpha_m \rightarrow 1$  и  $x_m$ , подчиненной условию  $(1 - x_m)^{1-\alpha_m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  мы имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m^{\alpha_m} \log \varepsilon_m = -\infty.$$

Следующее условие заменяет условие (36) в Теореме 4 для равномерной нормы  $p = \infty$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m \log \varepsilon_m = -\infty \quad \text{с} \quad \rho_m = \frac{1 - |x_m|}{\log \frac{1 - |x_m|}{(r_m/2)}}. \quad (45)$$

Для наиболее интересного случая  $|x_m| \rightarrow 1$ , условия (45) и (44) равносильны при условии  $1 - |x_m| = O(r_m)$  при  $m \rightarrow \infty$  (Пример 4).

Для общего случая рассмотрим произвольную последовательность  $\alpha_m \in (0, 1)$  такую, что  $\alpha_m \rightarrow 1$ , и построим функцию  $f \in H(B)$ ,  $B = B^2 \subset \mathbb{C}$ ,  $\|f\|_{\infty, B} = 1$  (так что  $f \neq 0$ ), удовлетворяющую слегка более слабому, чем (45) условию:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 - |x_m|)^{\alpha_m}}{\log \frac{1 - |x_m|}{r_m}} \log \varepsilon_m = -\infty. \quad (46)$$

Для  $m \in \mathbb{N}$  определим  $x_m \in (0, 1)$ ,  $x_m \rightarrow 1$  из

$$(1 - x_m)^{1-\alpha_m} = m^{-4} \quad (47)$$

и выберем  $r_m \in (0, 1 - x_m)$  произвольным образом; чтобы избежать трудностей со знаменателем в (46), мы теперь считаем, что  $2r_m \leq 1 - x_m$ .

Записывая через  $[t]$  целую часть числа  $t > 0$ , рассмотрим последовательность натуральных чисел

$$N_m = [(1 - x_m)^{-\frac{1+\alpha_m}{2}}], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (48)$$

Согласно (47) и (48),  $N_m(1 - x_m) \leq m^{-2}$ , что обеспечивает сходимость ряда  $\sum N_m(1 - x_m)$ . Это позволяет определить функцию  $f$  как произведение Бляшке:

$$f(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{x_m - z}{1 - x_m z} \right)^{N_m}, \quad |z| < 1.$$

Очевидно, для  $z \in B_{x_{r_m}, r_{r_m}}$

$$|f(z)| \leq \varepsilon_m = \left( \frac{r_m}{1 - x_m} \right)^{N_m}.$$

Выражение под знаком предела в (46) равно  $-(1-x_m)^{\alpha_m} N_m$ . Согласно (48) и (47), оно эквивалентно  $-m^2 \rightarrow -\infty$ . Что доказывает (46).

Из случая  $p = \infty$  Теоремы 4 напрашивается вопрос. Является ли присутствие константы  $c > 0$  реально необходимым в условии (36) Теорем 3 и 4 (случай  $p \neq \infty$ ), или выбор  $c = 0$  достаточен? Мы не имеем ответа на этот вопрос для Теоремы 4 (случай  $p \neq \infty$ ). Тем не менее, для Теоремы 3 ответ положителен (см. Теорему 6). Рассмотрим сначала равномерный вариант этой теоремы.

**Теорема 5.** Пусть  $u \in h_v^\infty$  в  $B = B^n$ ,  $n \geq 2$  и  $\|u\|_\infty \leq \varepsilon_m$  в  $B_{x_m, r_m} \subset B$  для  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда из условия (45) следует, что  $u \equiv 0$  в  $B$ .

**Доказательство.** Так как  $\|u\|_{2,\Omega} \leq \|u\|_{\infty,\Omega}$  для  $\Omega \subset B$ , имеем, что  $u \in h_v^2(B)$  и  $A_2(x_m, r_m, u) \leq \varepsilon_m$  для  $m \in \mathbb{N}$ . Если  $|x_m| \neq 1$ , то условия (45) и (36) становятся равносильными для некоторой подпоследовательности  $m = m_k \rightarrow \infty$ , и Теорема 5 следует из Теоремы 3.

Рассмотрим теперь главный случай  $x_m \rightarrow 1$  и допустим  $u \not\equiv 0$  в  $B$ . Применим Теорему 1 с условием (35) (полагая там  $p = 2$  и  $\beta = -2$ ) к функции  $f = u$  и к шарам  $B_{x_m, r_m} \subset B_{x_m, \bar{r}_m} \subset B$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Предположим, что  $1 - |x_m| \geq 2r_m$  для  $m \in \mathbb{N}$  (иначе, можно просто заменить  $r_m$  через  $r_m/2$ ). Как и в доказательстве Теоремы 1, выберем  $\bar{x}_m = \frac{1-2\sigma}{|x_m|} x_m$ , но теперь  $\sigma = 32^{-1}$ . Согласно (41), положим в (35)  $\omega = \rho_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Определим  $\bar{r}_m$  по (27) с  $x_0 = 0$ ,  $r_0 = 1$ ,  $x = x_m$ ,  $r = r_m$  и  $\bar{x} = \bar{x}_m$ . В частности,  $\bar{r}_m > |x_m - \bar{x}_m| > \sigma$  для  $m \geq m_1$ . Наконец, положим  $a_m = \lambda_m x_m$ , где  $\lambda = \lambda_m$  — больший корень уравнения

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{r_m^2}{\lambda - 1} + |x_m|^2.$$

Таким образом, согласно (35) при  $m \geq m_1$

$$\int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 d\mu_{a_m} \leq \left( \int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 d\mu_{a_m} \right)^{\rho_m} \left( \int_B |u|^2 d\mu_{a_m} \right)^{1-\rho_m}. \quad (49)$$

Из (23) для  $x \in B$  следует, что

$$|x - a_m| < 2 + d(a_m) < 2 + \frac{1 - |x_m|}{|x_m|} < 3.$$

Поскольку  $d\mu_{a_m} = |x - a_m|^{-4} dx > 3^{-4} dx$

$$\int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 d\mu_{a_m} > 3^{-4} \int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 dx > 3^{-4} \int_{B_{x_m, r}} |u|^2 dx > a, \quad (50)$$

где  $a > 0$  — не зависящая от  $m$  константа. Последнее утверждение следует из предшествующего (37) утверждения (с  $\sigma = 32^{-1}$  и  $\tau = 1 - 2\sigma$ ). Из (49) и (50), используя оценку  $\|u\|_\infty \leq \varepsilon_m$  в  $B_{x_m, r_m}$  и положив  $M = 1 + \|u\|_{\infty, B}$ , получим

$$a < \varepsilon_m^{p_m} M \int_B |x - a_m|^{-4} dx \quad \text{для } m \geq m_1. \quad (51)$$

Ограничим временно наше внимание случаем  $n \geq 5$ . Теперь последний интеграл сходится, если позволить  $a_m$  быть произвольной точкой  $\mathbb{R}^n$ , и интеграл достигает своего максимума при  $a_m = 0$ , так что

$$\int_B |x - a_m|^{-4} dx < \int_B |x|^{-4} dx = \frac{\sigma_n}{n-4},$$

где  $\sigma_n$  — поверхностная мера на  $S^n$ . Отсюда и из (51) для  $n \geq 5$

$$\frac{(n-4)a}{M\sigma_n} < \varepsilon_m^{p_m}, \quad m \geq m_1.$$

Левая часть этой оценки положительна и не зависит от  $m$ . Для достаточно больших  $m$  это противоречит условию (45), согласно которому  $\varepsilon_m^{p_m} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Это доказывает теорему для  $n \geq 5$ .

Доказательство Теоремы 5 для остальных размерностей  $n = 2, 3$  и  $4$  следует из утверждения: *если Теорема 5 верна для некоторой размерности  $n_0 > 2$ , то она верна также для всех размерностей  $n$  между 2 и  $n_0$ .*

Для доказательства мы используем вложение  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{n_0}$ , полагая  $\mathbb{R}^{n_0} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ ;  $l = n_0 - n$ . Функция  $u \in h_v^\infty(B^n)$  может быть продолжена до функции  $u \in h_v^\infty(B^n \times B^l)$  по формуле

$$u(x, y) = u(x), \quad \text{для } x \in B^n \text{ и } y \in B^l. \quad (52)$$

Применяя Теорему 5 с  $n = n_0$  к продолженной функции  $u$  и  $n_0$ -мерным шарам

$$B_{(x_m, 0), r_m}^{n_0} \subset B^{n_0}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

и учитывая, что  $\|u\|_\infty \leq \varepsilon_m$  остается в силе для  $m$ -того шара, мы получим, что  $u \equiv 0$  в  $B^{n_0}$  и поэтому в  $B^n$ . Это завершает доказательство Теоремы 5.

Теперь докажем  $L^2$ -нормный вариант Теоремы 5, используя процедуру вложения для всех размерностей  $n \geq 2$ . Мы приходим к следующей теореме, которая усиливает как Теорему 3, так и Теорему 5.



**Теорема 6.** Пусть  $u \in h^2_\nu$  в  $B^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $\|u\|_2 \leq \varepsilon_m$  в  $B^n_{x_m, r_m} \subset B^n$  для  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда из условия (45) следует, что  $u \equiv 0$  в  $B^n$ .

**Доказательство.** Сравним условия (36) и (45). Аналогично доказательству Теоремы 3, мы можем ограничиться случаем  $|x_m| \rightarrow 1$ . Пусть  $u \not\equiv 0$  в  $B^n$ . Вложив  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^{n+5}$  и используя (52) для  $l = 5$ , мы найдем продолжение функции  $u \in h^2_\nu(B^n)$  к функции  $u \in h^2_\nu(B^n \times B^5)$ . Как в доказательстве Теоремы 5, рассмотрим точки  $a_m = \lambda_m x_m$ , где  $\lambda = \lambda_m > 1$  – наибольший корень уравнения

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{r_m^2}{\lambda - 1} + |x_m|^2,$$

соответствующий шарам  $B^n_{x_m, r_m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Используем подготовительный материал доказательства Теоремы 5, включая оценки (49) и (50). Роль точек  $a_m$  для случая продолженной функции  $u$  и для  $(n+5)$ -мерных шаров (53) играют точки  $(a_m, 0) \in \mathbb{R}^{n+5}$ . Пусть для  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $y \in \mathbb{R}^5$

$$\psi_{a_m}(x, y) = |(x, y) - (a_m, 0)|^{-4} = (|x - a_m|^2 + |y|^2)^{-2}, \quad (54)$$

так что  $d\mu_{a_m} = \psi_{a_m} d\nu_{n+5}$ . Из (49) и (50), для  $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha < \left( \int_{B^{n+5}_{(x_m, 0), r_m}} |u|^2 \psi_{a_m} d\nu_{n+5} \right)^{\rho_m} \left( \int_{B^{n+5}} |u|^2 \psi_{a_m} d\nu_{n+5} \right)^{1-\rho_m}, \quad (55)$$

где  $\alpha > 0$  – константа, не зависящая от  $m \geq m_1$ .

Нам будет удобно распространять интегралы (55) на произведение множеств. Более точно, мы расширим первый интеграл на  $B^n_{x_m, r_m} \times B^5$ , а второй – на  $B^n \times B^5$ . Согласно (54)

$$\psi_{a_m}(x, y) \leq |y|^{-4}, \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^5.$$

Из (55) и (52), для  $m \geq m_1$ , применяя теорему Фубини, получим

$$\alpha < \left( \int_{B^n_{x_m, r_m}} |u(x)|^2 dx \right)^{\rho_m} \left( \int_{B^n} |u(x)|^2 dx \right)^{1-\rho_m} \int_{B^5} |y|^{-4} dy. \quad (56)$$

Поскольку  $r_m < 1$ , первый интеграл не превосходит  $\nu_n \varepsilon_m$  (где  $\nu_n$  – объем  $B^n$ ). Второй интеграл конечен и так как  $u \not\equiv 0$  в  $B^n$  можно считать его равным

1. Третий интеграл *сходящийся* и фактически равен  $\sigma_5$  – поверхностной мере сферы  $S^5$ . Поэтому из (56)

$$\frac{a}{\sigma_5} < (\nu_n \varepsilon_m)^{p_m}, \quad m \geq m_1.$$

Здесь левая часть положительна и независима от  $m \in \mathbb{N}$ , между тем правая часть согласно (45) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Это противоречие доказывает Теорему 6.

**Замечание 5.** Применяя нашу технику вложения, Примеры 4 и 5 могут быть прямо использованы для демонстрации точности условия (45) в Теоремах 5 и 6 для всех размерностей  $n$ .

**Замечание 6.** Пусть  $n = 2$ , тогда, для  $p = \infty$  Теорема 5 усиливает Теорему 4, а для  $p = 2$  Теорема 6 распространяет Теорему 4 на случай *гармонических функций*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. Armitage, T. Bagby and P. M. Gauthier, "Note on the decay of solutions of elliptic equations", Bull. London Math. Soc. vol. 17, pp. 554 — 556, 1985.
2. S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
3. М. Брело, Основы Классической Теории Потенциала, М., Мир, 1964.
4. R. G. M. Brummelhuis, "Logarithmic convexity of  $L^2$  norms for solutions of elliptic equations, Indag. Math. N.S., vol. 4, pp. 423 — 429, 1993.
5. R. G. M. Brummelhuis, Three-spheres Theorem for Second Order Elliptic Equations, preprint Leiden University, 1993.
6. W. F. Donoghue, Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, 1969.
7. P. L. Duren, Theory of  $H^p$  Spaces, Academic Press, New York, 1970.
8. У. Хейман, П. Кеннеди, Субгармонические Функции, М., Мир, 1980.
9. L. L. Helms, Introduction to Potential Theory, Wiley, New York, 1969.
10. J. Korevaar, Chebyshev-type Quadratures : use of complex analysis and potential theory, Complex potential theory, NATO-ASI, Series C, vol. 439, ed. P. M. Gauthier, Kluwer, Dordrecht, 1994.
11. J. Korevaar and J. L. M. Meyers, "Logarithmic convexity for supremum norms of harmonic functions", Bull. London Math. Soc., vol. 121, pp. 353 — 362, 1994.
12. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ, М.– Л., 1941.
13. И. Стейн, Г. Вейс, Введение в Гармонический Анализ на Евклидовых Пространствах, М., Мир, 1974.

28 Мая 1995

Ереванский государственный университет  
e-address : arakel@pnas.sci.am,

Монреальский университет  
e-address : gauthier@ere.umontreal.ca

# ЭФФЕКТИВНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. У. Аракелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

В работе автора [1] были установлены критерии эффективного аналитического продолжения степенных рядов от комплексного переменного вне логарифмически выпуклых множеств. Формулируемые в терминах голоморфных функций, интерполирующих коэффициенты степенных рядов, эти критерии обобщали классические результаты Э. Линделефа, Ф. Карлсона и др.

В настоящей статье результаты работы [1] обсуждаются более подробно и обобщаются на степенные ряды с векторнозначными коэффициентами. Дополнительно обсуждается вопрос о единственности интерполирующих "функций коэффициентов". Это позволяет устанавливать некоторые взаимосвязи указанного метода функций коэффициентов с теорией голоморфных полугрупп операторов.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $X$  – комплексное пространство Банаха.  $X$ -значный аналитический элемент с центром в нуле – это сходящийся в  $X$  степенной ряд от комплексной переменной  $z$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n, \quad |z| < R, \quad f_n \in X. \quad (1)$$

Аналитический элемент с центром в бесконечности определяется сходящимся рядом вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^{n+1}}, \quad |z| > R, \quad f_n \in X. \quad (2)$$

---

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным благодаря поддержке Грантом № MVK000 из Международного Научного Фонда.



Проблема описания коэффициентов  $f_n$ , обеспечивающих однозначное аналитическое продолжение рядов (1), (2) в ту или иную область, содержащую круг сходимости ряда, является (в случае  $X = \mathbb{C}$ ) основной проблемой Вейерштрассовской теории аналитических функций. Ограниченность возможностей и затруднения предложенного Вейерштрассом подхода изучения проблемы подтолкнули исследователей конца 19-го столетия к поиску новых более эффективных методов аналитического продолжения. Основы нового подхода были заложены в исследованиях Адамара, Ле Руа, Лео, Линделефа, Вигерта, получивших дальнейшее продолжение и развитие в работах Фабера, Карлсона, Поля, Коулинга и других авторов (подробную информацию об этих и других работах можно извлечь из книг [2] – [4], обзора [5] и работ [1], [6]).

В основе нового подхода к проблеме аналитического продолжения степенных рядов вида (1) или (2) лежит идея *интерполирования* коэффициентов ( $f_n$ ) некоторой голоморфной на полуоси  $[0, \infty)$  функцией  $\varphi$  (“функцией коэффициентов”) :

$$f_n = \varphi(n) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3)$$

Обычно полагают, что функция  $\varphi$  – целая либо голоморфная в некотором угле, содержащем  $[0, \infty)$ , связывая вопрос об аналитическом продолжении элемента с асимптотическим поведением функции  $\varphi$  вблизи бесконечности.

Следует отметить плодотворность указанного *метода функции коэффициентов* также при решении другой важной проблемы Вейерштрассовской теории аналитических функций – проблемы локализации особенностей степенных рядов (см. [7] и [8]).

Для заданного элемента вида (1) или (2) всегда можно указать (см. [4], §1.2) бесконечное множество функций коэффициентов, являющихся к тому же целыми функциями экспоненциального роста. Однако они, как правило, малопригодны для удовлетворительного решения задачи аналитического продолжения. Традиционно продолжение аналитических элементов (1) или (2) рассматриваются вне множеств особенностей  $E$  вида

$$E = \exp(L), \quad (4)$$

где  $L \subset \mathbb{C}$  – выпуклое и замкнутое множество (можно привести веские доводы в пользу рассмотрения именно такого вида множеств особенностей). Таким образом, деликатность построения функции коэффициентов  $\varphi$  заключается в необходимости связывания ее асимптотических свойств с величинами, характеризующими множества  $E$  или  $L$ .

В случае множеств  $E$  вида (4), где  $L$  – выпуклый компакт, Ф. Карлсон в основном решил задачу аналитического продолжения элемента (1) вне  $E$ , указав необходимые и достаточные условия в терминах экспоненциальной индикатриссы функции коэффициентов  $\varphi$  (см. [9] и [10], а также [4]). В случае же множества  $E$  с неограниченным  $L$  (включая простейший случай  $E = [1, \infty)$ ), имелись лишь отдельные достаточные условия (Линделеф, Лео). Некоторые критерии аналитического продолжения для неограниченных множеств (включая случай  $E = [1, \infty)$ ) впервые были получены в [6] благодаря применению результатов из теории касательных приближений целыми функциями. Дальнейшее развитие этого подхода в [1] привело к решению общей задачи продолжения элементов (1), (2) вне произвольных множеств  $E$  вида (4).

В настоящей статье результаты работы [1] об аналитическом продолжении в некоторых аспектах рассматриваются и обсуждаются более подробно; они обобщаются на ряды вида (1), (2) с коэффициентами из комплексного банахова пространства  $X$ . Специфический интерес представляет случай, когда  $X$  – алгебра Банаха с единицей.

Формулировка результатов, комментарии и доказательства приведены в параграфе 2, а параграф 1 содержит необходимые для этого понятия и факты из теории функций и теории приближений.

Мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{N}$  = множество натуральных чисел,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ;

$\mathbb{R}$  = вещественная ось;

$\mathbb{C}$  = комплексная плоскость,  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  = расширенная комплексная плоскость;

$X$  = комплексное банахово пространство

Для множества  $A \subset \mathbb{C}$  обозначим

$A^\circ$  = внутренность  $A$ ,  $\bar{A}$  = замыкание  $A$ ,  $\partial A$  = граница  $A$ ;

$H_X(A)$  = множество функций  $f : A \rightarrow X$ , голоморфных в окрестности  $A$ ,

$H(A) = H_{\mathbb{C}}(A)$ .

Для множества  $A \subset \mathbb{C}$  обозначим

$\hat{A}$  = замкнутая выпуклая оболочка  $A$ ;

$-A = \{-z : z \in A\}$ ,  $A^* = \{\bar{z} : z \in A\}$ ;

$f(A) = \{f(z) : z \in A\}$  для  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  и  $A \subset B \subset \mathbb{C}$ ;

$D_r(a)$  = открытый круг  $\{z : |z - a| < r\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ .

Для  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$  обозначим

$\Delta_\omega(\alpha, \beta)$  = спиральный угол  $\{re^{i\theta} : r \geq 0, \alpha \leq \theta - \omega \log r \leq \beta\}$ ;

$L_\omega(\alpha)$  = логарифмическая спираль  $\Delta_\omega(\alpha, \alpha)$ ;  $\Delta(\alpha, \beta)$  - угол  $\Delta_0(\alpha, \beta)$ ;

## §1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

1.1. *Опорная функция* Минковского  $H : \mathbb{C} \rightarrow (-\infty, \infty]$  непустого множества  $A \subset \mathbb{C}$  определяется следующей формулой :

$$H(z) = \sup_{\zeta \in A} \operatorname{Re}(\zeta \bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, имеем

$$H(z_1 + z_2) \leq H(z_1) + H(z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$H(-z) \geq -H(z), \quad H(\lambda z) = \lambda H(z), \quad z \in \mathbb{C}, \lambda > 0.$$

Из этих неравенств, учитывая, что  $H(0) = 0$  и договорившись положить  $0 \cdot \infty = 0$ , мы приходим к следующему свойству функции  $H$ . Если  $\lambda z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , то

$$\lambda H(z) \leq H(\lambda z) \leq \lambda_1 H(z_1) + \lambda_2 H(z_2). \quad (1.1)$$

В комплексном анализе более принято называть *опорной функцией* функцию (см. [11], гл. 1, §19)

$$K_A(\theta) = H(e^{i\theta}) = \sup_{\zeta \in A} \operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$



Легко проверить, что  $K_A = K_{\hat{A}}$ , где  $\hat{A}$  — замкнутая выпуклая оболочка множества  $A$ . Очевидно, что  $K_A$  является  $2\pi$ -периодической функцией на  $\mathbb{R}$ , непрерывной в случае ограниченных  $A$ . Отсюда следует, что в случае неограниченных  $A$  она является *полу*непрерывной *снизу* функцией. Характерным свойством функции  $K = K_A$  является свойство *тригонометрической выпуклости*:

$$K(\theta) \sin(\theta_2 - \theta_1) \leq K(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta) + K(\theta_2) \sin(\theta - \theta_1), \quad (1.2)$$

если  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ,  $\theta - \theta_1 < \pi$  и  $\theta_2 - \theta < \pi$ . Оно следует из (1.1) с учетом тождества

$$e^{i\theta} \sin(\theta_2 - \theta_1) = e^{i\theta_1} \sin(\theta_2 - \theta) + e^{i\theta_2} \sin(\theta - \theta_1).$$

Обратно, пусть  $K : \mathbb{R} \mapsto (-\infty, \infty]$  — некоторая  $2\pi$ -периодическая, *полу*непрерывная *снизу* и тригонометрически выпуклая функция. Тогда существует, и притом одно, непустое множество  $A$  такое, что  $A = \hat{A}$  и  $K = K_A$ , а именно

$$A = \bigcap_{|\theta| \leq \pi} \{ \zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}) \leq K(\theta) \}. \quad (1.3)$$

С небольшим изменением доказательство проводится аналогично случаю непрерывной  $K$  (см. [12], 5.2). В частности, условие  $A \neq \emptyset$  выводится из того, что функция  $K$  достигает *минимума* в некоторой точке  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда (см. [11], §16) из (1.2) следует, что

$$K(\theta) \geq K(\theta_0) \cos(\theta - \theta_0), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

так что  $K(\theta_0)e^{i\theta_0} \in A$ . Из (1.2) при  $\theta_2 = \beta$ ,  $\theta_1 = \beta - \pi$  следует оценка

$$K(\beta) + K(\beta - \pi) \geq 0 \quad \text{для } \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Левую часть оценки (1.4) называют *шириной множества  $A$  в направлении  $e^{i\beta}$* . Из (1.2) также следует, что множество  $K_A^{-1}(+\infty)$  либо пусто, либо состоит из интервалов длины не меньше  $\pi$ , концы которых могут принадлежать ему или нет. При этом функция  $K_A$  непрерывна на внутренности  $\mathbb{R} \setminus K_A^{-1}(+\infty)$ .

*Опорной прямой* множества  $A = \hat{A}$  при  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $K_A(\theta) < +\infty$ , называют прямую  $l_\theta : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) = K_A(\theta)$ . При этом  $A \cap l_\theta$  является замкнутым (в  $\mathbb{C}$ ) интервалом (или точкой), концы которого называются *крайними точками  $A$* . Отметим также, что для множеств  $A = \hat{A}$  и  $B = \hat{B}$  условие  $A \subset B$  равносильно условию  $K_A \leq K_B$ .

**1.2. Индикатор и индикаторная диаграмма.** Пусть  $X$  – комплексное банахово пространство. Для открытого множества  $\Omega \subset \mathbb{C}$  через  $H_X(\Omega)$  обозначим множество  $X$ -значных голоморфных в  $\Omega$  функций (см. [13], гл. 3, §2), полагая  $H_X(\Omega) = H(\Omega)$  при  $X = \mathbb{C}$ . Для *замкнутого* множества  $E \subset \mathbb{C}$  обозначим через  $H_X(E)$  объединение множеств  $H_X(\Omega)$  по открытым множествам  $\Omega \supset E$ , полагая  $H_X(E) = H(E)$  при  $X = \mathbb{C}$ . Для  $\varphi \in H_X(\Omega)$  и произвольного  $z^* \in X^*$  (сопряженное к  $X$  пространство) функция  $z \mapsto \log |z^*(\varphi(z))|$  *субгармонична* в  $\Omega$ . Легко заключить, что функция  $z \mapsto \log \|\varphi(z)\|$  является также субгармонической в  $\Omega$ . Это замечание позволяет распространить на  $X$ -значные голоморфные функции теорему о двух константах и ее следствия – теоремы Фрагмена-Линделефа, а также понятие индикатора с сохранением его свойств. Приведем вкратце нужные нам понятия и факты из этой области.

Для угла  $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$  обозначим через  $\Delta^\circ = \Delta^\circ(\alpha, \beta)$  его внутренность, полагая, что  $\Delta = \Delta^\circ = \mathbb{C}$  при  $\beta - \alpha = 2\pi$ . Положим также  $\Delta_\tau = \Delta(\alpha + \tau, \beta - \tau)$ , при  $0 < \tau < (\beta - \alpha)/2$ , так что  $\Delta_\tau \subset \Delta^\circ \cup \{0\}$  для всех  $\tau$ . *Экспоненциальным типом* функции  $\varphi \in H_X(\Delta)$  назовем величину

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(\Delta) = \limsup_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Delta}} |z|^{-1} \log^+ \|\varphi(z)\|$$

и скажем, что  $\varphi$  – *функция экспоненциального типа* (на  $\Delta$ ), если  $\sigma_\varphi < +\infty$ ; множество таких функций обозначим через  $H_X^B(\Delta)$ . Аналогично *внутренним экспоненциальным типом* функции  $\varphi \in H_X(\Delta^\circ)$  назовем величину

$$\sigma_\varphi^\circ = \sigma_\varphi(\Delta^\circ) = \sup_{\Delta_\tau \subset \Delta^\circ \cup \{0\}} \sigma_\varphi(\Delta_\tau).$$

Скажем, что  $\varphi$  – *функция внутреннего экспоненциального типа* (на  $\Delta^\circ$ ), если  $\sigma_\varphi^\circ < +\infty$ , а множество таких  $\varphi$  обозначим через  $H_X^B(\Delta^\circ)$ . Последний термин особенно уместен, когда  $\varphi \in H_X(\Delta)$ , поскольку тогда  $\sigma_\varphi(\Delta^\circ) \leq \sigma_\varphi(\Delta)$  и возможны случаи, когда  $\sigma_\varphi(\Delta^\circ) < +\infty$  и  $\sigma_\varphi(\Delta) = +\infty$ . Отметим однако, что  $\sigma_\varphi(\Delta^\circ) = \sigma_\varphi(\Delta)$  при  $\Delta = \mathbb{C}$ .

Введение функций внутреннего экспоненциального типа оказалось полезным в вопросах аналитического продолжения (см. [6], §1 и [5], гл. 1, §5). Они обладают

многими свойствами экспоненциального типа. Отметим, в частности, что для  $\varphi, \psi \in H_X(\Delta^\circ)$  и  $\mu \in H(\Delta^\circ)$

$$\sigma_{\varphi+\psi}^\circ \leq \sup(\sigma_\varphi^\circ, \sigma_\psi^\circ), \quad \sigma_{\mu\varphi}^\circ \leq \sigma_\varphi^\circ + \sigma_\mu^\circ. \quad (1.5)$$

Для функции  $\varphi \in H_X(\Delta^\circ)$ ,  $\varphi \not\equiv 0$  ее (экспоненциальный) индикатор  $h_\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow [-\infty, \infty]$  определяется формулой

$$h_\varphi(\theta) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \log \|\varphi(re^{i\theta})\|, \quad (1.6)$$

полагая  $h_\varphi \equiv -\infty$  при  $\varphi \equiv 0$ . Для  $\varphi \in H_X(\Delta)$  мы полагаем в (1.6)  $\theta \in [\alpha, \beta]$ . Интересно отметить, что если  $(0, +\infty) \subset \Delta^\circ$  и  $\varphi$  — полугруппа ограниченных линейных операторов, заданная и голоморфная в  $\Delta^\circ$ , то  $\sigma_\varphi(\Delta_\tau) < +\infty$  на каждом угле  $\Delta_\tau \subset \Delta^\circ \cup \{0\}$  и в (1.6) верхний предел можно заменить пределом.

Далее мы ограничимся рассмотрением функций из линейных классов  $H_X^B(\Delta)$  и  $H_X^B(\Delta^\circ)$ . Для них индикатор будет *ограниченной сверткой* функцией. В частности, если  $\varphi, \psi \in H_X^B(\Delta^\circ)$  и  $\mu \in H^B(\Delta^\circ)$ , то с учетом (1.5) имеем

$$h_{\varphi+\psi} \leq \sup(h_\varphi, h_\psi), \quad h_{\mu\varphi} \leq h_\varphi + h_\mu. \quad (1.7)$$

Об основных свойствах индикатора см. [11], гл. 1, §§15, 16 и [12], гл. 5. Наиболее важным из них является свойство *тригонометрической выпуклости* функции  $h = h_\varphi$  (ср. (1.2)) : если  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  и  $\theta_2 - \theta_1 < \pi$ , то

$$h(\theta) \sin(\theta_2 - \theta_1) \leq h(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + h(\theta_2) \sin(\theta - \theta_1), \quad (1.8)$$

полагая, что  $[\theta_1, \theta_2] \subset (\alpha, \beta)$ , если  $\varphi \in H_X^B(\Delta^\circ)$  и  $[\theta_1, \theta_2] \subset [\alpha, \beta]$ , если  $\varphi \in H_X^B(\Delta)$ .

Рассмотрим далее следующие два альтернативных случая : либо  $h > -\infty$  на  $(\alpha, \beta)$ , либо  $h(\theta_0) = -\infty$  для некоторого  $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ . В первом случае из (1.8) с учетом конечности  $h$  на  $(\alpha, \beta)$  и ее ограниченности сверху следует ограниченность  $h$  на  $(\alpha, \beta)$ . С учетом этого из (1.8) следует, что  $h$  удовлетворяет условию Липшица на  $(\alpha, \beta)$ , откуда следует, что  $h$  непрерывна на  $(\alpha, \beta)$ , а в точках  $\alpha$  и  $\beta$  существуют пределы соответственно справа и слева :

$$\lim_{\theta \rightarrow \alpha+0} h(\theta) = h(\alpha+0), \quad \lim_{\theta \rightarrow \beta-0} h(\theta) = h(\beta-0).$$



Если  $h$  определена на  $[\alpha, \beta]$ , то она ограничена там сверху и из (1.8) следует ее полунепрерывность сверху на  $[\alpha, \beta]$ . Это означает, что  $h(\alpha + 0) \leq h(\alpha)$  и  $h(\beta - 0) \leq h(\beta)$  (имеются примеры со строгими неравенствами). При  $\alpha = \beta - \pi$  из (1.8) следует :

$$h(\alpha + 0) + h(\beta - 0) \geq 0. \quad (1.9)$$

Отметим также следующее свойство индикатора (см. [12]), Теорема 5.1.9). Для  $\varepsilon > 0$  и  $\Delta_\tau \subset \Delta^\circ \cup \{0\}$  существует  $\tau_0 > 0$  такое, что

$$\tau^{-1} \log \|\varphi(\tau e^{i\theta})\| < h_\varphi(\theta) + \varepsilon, \quad \tau > \tau_0, \quad \tau e^{i\theta} \in \Delta_\tau. \quad (1.10)$$

Во втором случае из условия  $h(\theta_0) = -\infty$  и из (1.8) следует, что  $h = -\infty$  на  $(\alpha, \beta)$  и если  $\varphi \not\equiv 0$ , то для каждого угла  $\Delta_\tau \subset \Delta^\circ \cup \{0\}$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Delta_\tau}} |z|^{-1} \log \|\varphi(z)\| = -\infty. \quad (1.11)$$

В действительности последнее утверждение возможно только при  $\beta - \alpha \leq \pi$ ; это следует из утверждения, легко выводимого из [15], 5.8 : если  $\varphi \in H_X^B(\Delta)$ ,  $\varphi \not\equiv 0$  и  $\beta - \alpha = \pi$ , то

$$h(\alpha) + h(\beta) \geq 0. \quad (1.12)$$

При этом условие (1.12) нельзя заменить условием (1.9).

Сказанное выше позволяет, с учетом (1.12), распространить для функций  $\varphi \not\equiv 0$  свойство тригонометрической выпуклости на более общий случай, когда  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ,  $\theta - \theta_1 < \pi$  и  $\theta_2 - \theta < \pi$  (ср. (1.2)).

В частности, индикатор целой функции  $\varphi$  экспоненциального типа обладает всеми свойствами опорной функции некоторого выпуклого компакта  $I_\varphi$  (см. пункт 1.1.), названного Г. Поля индикаторной диаграммой функции  $\varphi$  (см. [14]). Нам будет удобно, следуя Г. Полю, называть индикаторной диаграммой функции  $\varphi \in H_X^B(\Delta^\circ)$  или  $\varphi \in H_X^B(\Delta)$  множество

$$I_\varphi = \bigcap_{\theta \in (\alpha, \beta)} \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}) \leq h_\varphi(\theta)\}.$$

Оно не изменится, если положить  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , заменяя в первом случае  $h(\alpha)$  на  $h(\alpha + 0)$  и  $h(\beta)$  на  $h(\beta - 0)$ . Кроме того,  $I_\varphi = \emptyset$  тогда и только тогда, если

$h_\varphi(\theta_0) = -\infty$  для некоторого  $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ . При  $\beta - \alpha > \pi$  это возможно только для  $\varphi \equiv 0$ . Если  $I_\varphi \neq \emptyset$ , то  $I_\varphi = \bar{I}_\varphi$  и для  $\beta - \alpha > \pi$ ,  $I_\varphi$  компактен. Кроме того, если  $K$  — опорная функция множества  $I_\varphi$ , то очевидно, что в общем случае  $K(\theta) \leq h_\varphi(\theta)$  для  $\theta \in (\alpha, \beta)$ , однако

$$K(\theta) = h_\varphi(\theta), \quad \theta \in (\alpha, \beta), \quad \text{при } \beta - \alpha \leq \pi. \quad (1.13)$$

Это следует из того, что полагая  $K(\alpha) = h_\varphi(\alpha+0)$ ,  $K(\beta) = h_\varphi(\beta-0)$ ,  $K(\theta) = +\infty$  для  $\theta \in (\beta, \alpha + 2\pi)$ , мы получим на  $[\alpha, \alpha + 2\pi)$  функцию,  $2\pi$ -периодическое продолжение которой на  $\mathbb{R}$  удовлетворяет всем свойствам опорных функций, а множество  $I_\varphi$  совпадает с множеством (1.3). Из сказанного следует, что при  $\beta - \alpha = \pi$  ширина индикаторной диаграммы  $I_\varphi$  в направлении  $e^{i\beta}$  (см. (1.4)) равна левой части (1.9), если конечно  $I_\varphi \neq \emptyset$ . Таким образом, в отличие от случая целых функций ( $\Delta = \mathbb{C}$ ), величина (1.12) может оказаться больше ширины  $I_\varphi$  в направлении  $e^{i\beta}$ .

Для  $\varphi \in H_X^B(\Delta^\circ)$  и  $a \in \Delta^\circ$  положим  $\varphi_a(z) = \varphi(z + a)$  для  $z \in \Delta^\circ$ . Мы утверждаем, что

$$h_{\varphi_a} = h_\varphi, \quad \text{т.е. } I_{\varphi_a} = I_\varphi, \quad \text{для } a \in \Delta^\circ. \quad (1.14)$$

В случае целых функций  $\varphi$  экспоненциального типа соотношение (1.14) было доказано Г. Поля (см. [14], гл. 2, п.29). При  $\Delta \neq \mathbb{C}$  можно ограничиться случаем  $h_\varphi > -\infty$  (иначе либо  $\varphi \equiv 0$ , либо выполняется (1.11), откуда  $I_{\varphi_a} = \emptyset$  для  $a \in \Delta^\circ$ ). Тогда мы можем воспользоваться оценкой (1.10).

Для  $a \in \Delta^\circ$  и  $\rho e^{it} \in \Delta_\tau^\circ$ ,  $\rho \geq \rho_0$ , положим  $\rho e^{it} + a = \tau e^{i\theta} \in \Delta^\circ$ . Поскольку

$$|\rho - \tau| \leq |a|, \quad |e^{i\theta} - e^{it}| \leq \frac{2|a|}{\rho},$$

то при подходящем выборе  $\rho_0$  имеем, что  $\tau e^{i\theta} \in \Delta_\tau$  и  $\tau \geq \tau_0$ . Так как  $\tau/\rho \rightarrow 1$  и  $e^{i\theta} \rightarrow e^{it}$  при  $\rho \rightarrow \infty$ , то учитывая непрерывность  $h_\varphi$  и переходя в (1.10) к верхнему пределу при  $\rho \rightarrow \infty$ , получим, что  $h_{\varphi_a}(t) \leq h_\varphi(t) + \varepsilon$ , так что  $h_{\varphi_a} \leq h_\varphi$ . Отсюда, заменяя  $a$  на  $-a$  и  $\varphi$  на  $\varphi_a$ , мы получим обратное неравенство  $h_{\varphi_a} \geq h_\varphi$ , что доказывает (1.14).

**1.3. Единственность.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  – целые функции экспоненциального типа со значениями из комплексного банахова пространства  $X$ . Спрашивается: при каких ограничениях на индикаторные диаграммы  $I_\varphi$  и  $I_\psi$  из условия

$$\varphi(n) = \psi(n) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.15)$$

следует, что  $\varphi \equiv \psi$ ? Ответ на поставленный вопрос необходим для выяснения запаса “функций коэффициентов”, обеспечивающих аналитическое продолжение соответствующего степенного ряда вне компактов Карлсона. Наиболее известный результат в этом направлении – это теорема единственности Карлсона (см. [12], гл.9 или [4], §1, Теорема 1.3.5; о векторнозначном аналоге см. [13], гл.3, Теорема 3.13.6). Она решает вопрос в терминах индикаторной диаграммы функции  $\phi = \varphi - \psi$ , требуя, чтобы ее ширина (см. (1.4)) в направлении мнимой оси была меньше  $2\pi$ . Это излишне строгое для наших целей требование. Простая идея рассмотрения ширины индикаторной диаграммы в подходящем направлении приводит нас к следующему результату.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\phi$  – целая  $X$ -значная функция и  $\sigma_\phi < \infty$ . Если  $\phi(n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  и индикаторная диаграмма  $I_\phi$  не содержит вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ , то  $\phi \equiv 0$ .

Отсюда следует ответ на интересующий нас вопрос.

**Теорема 1.2.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  – целые  $X$ -значные функции экспоненциального типа, удовлетворяющие (1.15). Пусть  $I_\varphi \subset A$  и  $I_\psi \subset A$ , где  $A$  – выпуклый компакт, не содержащий вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ . Тогда  $\varphi \equiv \psi$ .

**Краткое доказательство.** В самом деле, полагая  $\phi = \varphi - \psi$ , учитывая (1.5), (1.7) и свойство монотонности  $K_A$  по  $A$ , получим  $I_\phi \subset I_\varphi \cup I_\psi \subset A$ , откуда, согласно Теореме 1.1,  $\phi \equiv 0$ .

Саму Теорему 1.1 можно вывести из следующей теоремы.

**Теорема 1.3.** Пусть  $\phi \in H_X^B(\Delta)$ , где  $\Delta = \Delta(\alpha, \alpha + \pi)$  для некоторого  $\alpha \in (-\pi, 0)$ . Если  $\phi(n) = 0$  для  $n \in \mathbb{N}_0$  и

$$h_\phi(\alpha) + h_\phi(\alpha + \pi) < 2\pi |\sin \alpha|, \quad (1.16)$$



то  $\phi \equiv 0$  на  $\Delta$ .

Теорема 1.3 является аналогом теоремы единственности Карлсона для случая "косых" (относительно множества  $\mathbb{N}_0$ ) полуплоскостей, совпадая с ней при  $\alpha = -\pi/2$ . Доказательство стандартное. Если  $\phi \not\equiv 0$ , то полагая

$$F(z) = \frac{\phi(z)}{\sin \pi z} \quad \text{для } z \in \Delta,$$

получим, что  $F \not\equiv 0$  и

$$h_F(\theta) = h_\phi(\theta) - \pi |\sin \theta| \quad \text{для } \theta \in [\alpha, \alpha + \pi], \quad (1.17)$$

так как для функции  $\sin \pi z$  верхний предел в (1.6) можно при  $\theta \neq 0$  заменить пределом. Из (1.16) и (1.17) следует, что  $h_F(\alpha) + h_F(\alpha + \pi) < 0$ , что противоречит свойству (1.12).

Нам остается вывести Теорему 1.1 из Теоремы 1.3. Сколь угодно малым расширением мы можем заключить  $I_\phi$  в выпуклый компакт  $A$  с гладкой границей, состоящей из одних крайних точек. Мы можем считать, что множество  $A$  также не содержит вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ .

Полагая  $a = -K_A(\pi)$  и  $b = K_A(0)$ , согласно (1.4) имеем, что  $a \leq b$ . Таким образом,  $A$  лежит в полосе  $S_1 : a \leq \operatorname{Re} z \leq b$ . Для  $x \in [a, b]$  пересечение  $l_x$  множества  $A$  с прямой  $\operatorname{Re} z = x$  является отрезком, сводящемся к точке при  $x = a$  и  $x = b$ . Это исключает случай  $a = b$ , так что  $a < b$ . Длина  $l(x)$  отрезка  $l_x$  дифференцируема по  $x$  и  $l(a) = l(b) = 0$ . Поэтому  $l'(x_0) = 0$  для некоторой точки  $x_0 \in (a, b)$ , так что касательные к границе  $A$  в концах отрезка  $l_{x_0}$  параллельны.

Обозначим через  $S_2$  замкнутую полосу, ограниченную указанными касательными, и пусть  $e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in (-\pi, 0)$  — перпендикулярное к ним направление. Тогда ширина полосы  $S_2$  равна  $l(x_0)|\sin \alpha|$ , и поскольку  $l(x_0) < 2\pi$ , то ширина параллелограмма  $S_1 \cap S_2 \supset A \supset I_\phi$  в направлении  $e^{i\alpha}$  будет меньше  $2\pi|\sin \alpha|$ . Таким образом, условие (1.16) выполнено, и по Теореме 1.3,  $\phi \equiv 0$ .

**1.4. Логарифмически выпуклые компакты.** Компакт  $E \subset \hat{\mathbb{C}}$  назовем *логарифмически выпуклым* (лог-выпуклым), если  $E$  является замыканием в  $\hat{\mathbb{C}}$  множества вида  $\exp(L)$ , где  $L$  — некоторое выпуклое в  $\mathbb{C}$  множество. Нам будет удобно

считать лог-выпуклыми также множества  $E = \{0\}$  и  $E = \{\infty\}$ , полагая для них  $L = \emptyset$ . Множества вида  $\exp(L)$ , где  $L \subset \mathbb{C}$  выпукло и замкнуто, естественно возникают в связи с задачами аналитического продолжения степенных рядов в терминах их коэффициентов. Случай *ограниченных*  $L$  впервые в общем виде рассмотрен Ф. Карлсоном (см. [9] и [10]); общие *неограниченные* множества  $L$  рассмотрены в [1] и [5], гл.1, §5.

Лог-выпуклый компакт очевидно связан. Без ограничения общности можно считать, что определяющее  $E$  выпуклое множество  $L$  замкнуто в  $\mathbb{C}$ , так что  $L = \bar{L}$ . Тогда

$$E \setminus \{0, \infty\} = \exp(L). \quad (1.18)$$

Отметим, что точка 0 или  $\infty$  не может быть изолированной точкой  $E$ , если  $L \neq \emptyset$ . Условие  $0 \notin E$  или  $\infty \notin E$  равносильно ограниченности  $L$ , соответственно, слева и справа. Лог-выпуклые компакты  $E$ , содержащие обе точки 0 и  $\infty$ , имеют простую структуру:  $E = L_\omega(\alpha, \beta)$  при некотором  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$ . Далее мы рассмотрим лишь лог-выпуклые компакты  $E$ , для которых либо  $\infty \notin E$ , либо  $0 \notin E$ . Кроме того, достаточно ограничиться лог-выпуклыми компактами  $E$  со связным дополнением.

Итак, пусть  $E \subset \mathbb{C}$  — лог-выпуклый компакт со связным дополнением. Рассмотрим сначала случай  $0 \notin E^\circ$ . Тогда из (1.18) следует, что  $L$  не может содержать вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ , так что функция  $\exp$  однолистка на  $L$ . Это означает, что существует непрерывная в некоторой окрестности множества  $E \setminus \{0\}$  ветвь логарифма  $\log$ , такая, что

$$L = \log(E \setminus \{0\}), \quad (1.19)$$

оправдывая введение термина “логарифмически выпуклый компакт”. Из (1.19) следует в частности, что

$$\log(\partial E \setminus \{0\}) = \partial L(E). \quad (1.20)$$

Множество  $L = L(E)$ , определенное в рассмотренном случае с точностью до сдвигов на вектор  $2\pi m i$  (где  $m$  — целое число) назовем *логарифмической диаграммой*  $E$ . Для уточнения геометрии  $L(E)$  рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть  $0 \in \partial E$ . Будучи ограниченной справа  $L(E)$  неограничена слева ; с учетом выпуклости и замкнутости  $L(E)$ , для точки  $w \in L(E)$  существует такой луч  $l_w$ , что  $w \in l_w \subset L(E)$ . Поскольку  $L(E)$  не содержит вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ , то все лучи  $l_w$  параллельны и одинаково направлены, составляя с полуосью  $(-\infty, 0]$  острый угол  $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Назовем это число  $\beta = \beta(E)$  *направлением* логарифмической диаграммы  $L(E)$ . (Отметим, что вектор  $e^{i\beta}$  направлен противоположно лучам  $l_w$ .) Угловой коэффициент  $\omega = \tan \beta$  лучей  $l_w$  определяется однозначно по  $E$  :

$$\omega = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\theta(z)}{\log |z|}, \quad (1.21)$$

где  $\theta(z)$  — непрерывное значение аргумента точки  $z$  на  $E \setminus \{0\}$ . Отметим, наконец, что совокупность всех прямых, пересекающих  $L(E)$  и имеющих угловой коэффициент  $\omega$ , образует некоторую полосу вида

$$S = \{u + iv : v - \omega u \in J\}, \quad (1.22)$$

где  $J$  — интервал длины  $h \leq 2\pi$  (не обязательно замкнутый). Поскольку

$$\exp(S \setminus L(E)) = \mathbb{C} \setminus E, \quad (1.23)$$

мы заключаем, что  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  является  $\omega$ -звездной областью относительно точки  $\infty$ , т. е. для каждой точки  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus E$  область  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  содержит также дугу логарифмической спирали  $L_\omega(\alpha)$ , соединяющей  $\zeta$  с точкой  $\infty$ .

б) Пусть теперь  $0 \notin E$ , так что  $L(E)$  ограничена. Повторяя соответствующую часть доказательства Теоремы 1.1, мы можем заключить  $L(E)$  в параллелограмм, ограниченный некоторой полосой  $a \leq \operatorname{Re} w \leq b$  и замкнутой полосой  $S$  вида (1.22), где  $h < 2\pi$ . Часть полосы  $S$ , лежащая левее прямой  $\operatorname{Re} w = b$ , определяет *направление*  $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$  диаграммы  $L(E)$  с соответствующим угловым коэффициентом  $\omega = \tan \beta$ . Отметим, что в случае  $0 \notin E$  и при фиксированном  $L(E)$  полоса  $S$  и число  $\beta$  не единственны. Кроме того, из условия  $h < 2\pi$  следует существование логарифмической спирали  $L_\omega(\alpha) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ , соединяющей точки 0 и  $\infty$ .



Перейдем теперь к рассмотрению случая  $0 \in E^\circ$ , для которого приведенное выше определение (1.19) логарифмической диаграммы теряет силу. Положим

$$r_0 = e^{u_0} = \inf_{z \in \partial E} |z|, \quad r_1 = e^{u_1} = \sup_{z \in E} |z|,$$

и пусть  $L = \tilde{L}$  — порождающее  $E$ , согласно (1.18), множество. Если  $u_0 < u_1$ , то пересечение  $L$  с прямой  $\operatorname{Re} w = u$  является замкнутым отрезком длины *меньше*  $2\pi$ , если  $u \in (u_0, u_1]$  и имеет длину  $2\pi$ , если  $u = u_0$ . Пусть  $w_0 = u_0 + iv_0$  и  $w_1 = w_0 + 2\pi i$  — концы упомянутого отрезка. Рассмотрим опорные прямые множества  $L$  в точках  $w_0$  и  $w_1$ , и пусть  $l_0$  и  $l_1$  — их части, лежащие в полуплоскости  $\Pi : \operatorname{Re} w \leq u_0$ . Лучи  $l_0$  и  $l_1$  образуют с полуосью  $(-\infty, 0]$  углы соответственно раствора  $\beta_0, \beta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Кроме того,  $l_0$  и  $l_1$  не могут пересекаться на  $\Pi$  (иначе множество  $L$  будет ограниченным слева), откуда следует, что  $\beta_0 \leq \beta_1$ . Выбирая теперь  $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ ,  $\omega = \tan \beta$ , положим

$$S = \{u + iv : 0 \leq v - v_0 - \omega(u - u_0) \leq 2\pi\}.$$

Очевидно, что множество  $L_{u_0} = L \setminus \Pi^\circ$  замкнуто, выпукло и лежит в  $S$ . Полагая  $S_{u_0} = S \cap \Pi$ , легко проверить, что замкнутое множество  $L(E) = L_{u_0} \cup S_{u_0}$ , будучи пересечением замкнутых полуплоскостей, является выпуклым продолжением  $L_{u_0}$ . Кроме того,  $L(E) \subset S$  и

$$\exp(L_{u_0}) = E \setminus D_{r_0}(0), \quad \exp(S_{u_0}) = \overline{D_{r_0}(0)} \setminus \{0\},$$

так что  $L(E)$  удовлетворяет условию (1.18). Определенное таким образом множество  $L(E)$  мы назовем *логарифмической диаграммой* лог-выпуклого множества  $E$ , а число  $\beta$  — его *направлением*. Если  $u_0 = u_1$ , то  $E = \overline{D_{r_0}(0)}$  и мы полагаем  $L_{u_0} = \emptyset$ ,  $L(E) = S_{u_0}$ , выбирая  $\beta$  произвольно из интервала  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Очевидно, что как и в случае  $0 \in \partial E$ , условие (1.23) выполняются и при  $0 \in E^\circ$ , так что  $\hat{S} \setminus E$  является  $\omega$ -звездной областью относительно точки  $\infty$  для  $\omega = \tan \beta$ .

Из определения множества  $L_{u_0}$  следует, что функция  $\exp$  однолистка на  $L_{u_0} \setminus \{w_0, w_1\}$ , так что аналогично (1.19) существует непрерывная ветвь логарифма  $\log$  в некоторой окрестности множества  $E \setminus \overline{D_{r_0}(0)}$ , такая, что  $L_{u_0} = \log(E \setminus$

$\sqrt{D_{r_0}(0)}$ ). Отсюда, в частности следует, что

$$\log(\partial E \setminus \{\zeta_0\}) \subset \partial L(E), \quad \text{где } \zeta_0 = \exp(w_0). \quad (1.24)$$

Таким образом, понятие логарифмической диаграммы  $L(E)$  и ее направления  $\beta = \beta(E)$  с соответствующими свойствами мы определили для всех лог-выпуклых компактов  $E \subset \mathbb{C}$  со связным дополнением. Несколько другой вариант определения  $L(E)$  непосредственно в терминах лог-выпуклого компакта  $E$  см. [5], гл.1, 5.4.

Отметим в заключении, что полуплоскость  $\Delta\left(\beta - \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right)$  содержит полуось  $[0, \infty)$  и ортогональна к  $L(E)$ . При этом опорная функция  $K(\theta)$  множества  $L(E)$  ограничена для  $\theta \in \left[\beta - \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right]$  и равна  $+\infty$  для  $\theta \in \left(\beta + \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{3\pi}{2}\right)$ . Аналогичную роль для множества  $L^*(E)$  играет полуплоскость  $\Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Понятие логарифмической диаграммы (и ее направления) можно легко определить и для лог-выпуклых компактов  $E \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  со связным дополнением, для которых  $\infty \in E$ . Так как для преобразования  $\psi : z \mapsto z^{-1}$  мы имеем, что  $\psi(E) \subset \mathbb{C}$  является лог-выпуклым компактом и  $0 \in \psi(E)$ , то в этих терминах  $L(E) = -L(\psi(E))$ ,  $\beta = -\beta(\psi(E))$ , где  $\beta(E) \in (-\pi/2, \pi/2)$  угол между образующими  $L(E)$  лучами и полуосью  $[0, \infty)$ .

**Замечание.** Из аналитических представлений лог-выпуклых компактов  $E \subset \mathbb{C}$  (см. [5], гл.1, §5), следует, в частности, что граница  $\partial E$  является спрямляемой кривой.

**1.5. Результаты из теории приближений.** Для дальнейшего нам необходимо привлекать, как и в работах [6] и [1], некоторые результаты из теории касательных приближений целыми функциями. Первым результатом в этом направлении является следующая теорема, принадлежащая Т. Карлеману [16].

**Теорема.** Пусть  $\gamma$  — замкнутая жорданова кривая в  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\infty \in \gamma$ , комплексная функция  $f$  и функция  $\delta > 0$  непрерывны на  $\gamma \setminus \{\infty\}$ . Тогда для числа  $\varepsilon > 0$  существует целая функция  $g$  такая, что

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < \varepsilon \delta(\zeta) \quad \text{для } \zeta \in \gamma \setminus \{\infty\}. \quad (1.25)$$

Приближения вида (1.25) называют касательными, если  $\delta(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Функцию  $\delta$  называют скоростью касания (на бесконечности). Это более строгий сорт приближений, чем равномерные. Более подробные сведения о касательных приближениях можно найти в [17] и [18].

**Лемма 1.1.** Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — жордановы дуги в  $\hat{\mathbb{C}}$  с общим концом  $\zeta_0$  и  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\zeta_0\}$ , функция  $\delta > 0$  непрерывна на  $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$ . Тогда существуют голоморфные на  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\}$  функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  такие, что  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  и

$$|\lambda_k(\zeta)| < \delta(\zeta) \quad \text{для } \zeta \in \gamma_k \setminus \{\zeta_0\}, \quad k = 1, 2. \quad (1.26)$$

**Схема доказательства.** Без ограничения общности можно считать, что  $\zeta_0 = \infty$ , сделав в противном случае замену переменной  $\zeta = \zeta_0 + z^{-1}$ . Определим на  $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$  непрерывную функцию  $f$ , полагая  $f = 0$  на  $\gamma_1 \setminus \{\infty\}$  и  $f = 1$  на  $\gamma_2 \setminus \{\infty\}$ . Существует замкнутая жорданова кривая  $\gamma$ , такая, что  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \subset \gamma$ . Продолжим функции  $f$  и  $\delta$  непрерывным образом на  $\gamma \setminus \{\infty\}$ , сохраняя положительность  $\delta$ . Применяя теорему Карлемана с  $\varepsilon = 1$  и полагая  $\lambda_1 = g$ ,  $\lambda_2 = 1 - g$ , из (1.25) получим (1.26).

Пусть теперь  $X$  — комплексное пространство Банаха.

**Лемма 1.2** Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — жордановы дуги в  $\hat{\mathbb{C}}$  с общим концом  $\zeta_0$  и  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\zeta_0\}$ , функция  $\delta > 0$  непрерывна на  $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$ . Для  $X$ -значной голоморфной на  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\}$  функции  $g$  существуют  $X$ -значные голоморфные на  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\}$  функции  $g_1$  и  $g_2$  такие, что  $g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta)$  для  $\zeta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\}$  и

$$\|g_k(\zeta)\| < \delta(\zeta) \quad \text{для } \zeta \in \gamma_k \setminus \{\zeta_0\}, \quad k = 1, 2.$$

Лемма 1.2 следует из Леммы 1.1, если заменить там  $\delta(\zeta)$  на  $\frac{\delta(\zeta)}{\|g(\zeta)\| + 1}$  для  $\zeta \in (\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$  и положить  $g_k = \lambda_k g$  для  $k = 1, 2$ .

**Лемма 1.3.** Для последовательности  $(g_n)_{n=0}^\infty \subset X$  такой, что  $\|g_n\|^{1/n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и числа  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  существует  $X$ -значная целая функция  $\varphi$  порядка  $\leq 1$ , экспоненциального типа  $\leq \pi$  на полуплоскости  $\Delta\left(\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$  такая, что

$$\varphi(n) = g_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0, \quad \varphi(n) = 0 \quad \text{для } n = -1, -2, \dots, \quad (1.27)$$



$$h_{\varphi}(\theta) \equiv -\infty, \quad \text{если } |\theta - \alpha| < \frac{\pi}{2}. \quad (1.28)$$

Лемма 1.3 по существу является  $X$ -значным аналогом Леммы 1.2 работы [6]. С помощью Леммы 1.2 ее доказательство сводится к случаю, когда целая  $X$ -значная функция  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n g_n$  с экспоненциальной скоростью стремится к нулю на бесконечности на некоторой гладкой жордановой кривой  $\gamma$ , когда либо  $\gamma = L_{\omega}(-\pi)$ ,  $\omega = \tan \alpha$ , либо  $\gamma$  асимптотически стремится к спирали  $L_{\omega}(-\pi)$ , касаясь ее в бесконечности. В остальном повторяется доказательство Леммы 1.2 из [6].

Нам необходимы еще некоторые сведения о касательных приближениях целыми функциями вида (1.25), но на этот раз на неограниченных замкнутых в  $\mathbb{C}$  областях  $\Omega$  с жордановой границей,  $\infty \notin \Omega$ . Очевидно, функцию  $f$  необходимо считать непрерывной на  $\Omega$  и голоморфной внутри  $\Omega$ . Для нас достаточно рассмотреть случай, когда  $f$  просто голоморфна на  $\Omega$ . В этом случае возможность *равномерного* приближения  $f$  на  $\Omega$  целыми функциями (т.е. когда  $\delta \equiv 1$  на  $\Omega$ ) была указана Карлеманом еще в работе [16], однако вопрос о *касательном* приближении на  $\Omega$  оказался более деликатным. М. В. Келдыш показал (см. [19] и обзор [20]), что приближения вида (1.25) на  $\Omega$  могут оказаться невозможными для скоростей касания вида  $\delta(\zeta) = \exp(-|\zeta|^{\mu})$ , если  $\mu \geq 1/2$ , но они оказываются всегда возможными, если  $\mu \in (0, 1/2)$ . Это связано с существованием для  $\mu \in (0, 1/2)$  такой целой функции  $\omega$ , что

$$0 < |\omega(z)| < \exp(-|\zeta|^{\mu}) \quad \text{для } z \in \Omega. \quad (1.29)$$

Векторно-значный вариант результатов М. В. Келдыша также имеет место. Отметим в связи с этим статью [21], где получены аналоги общих теорем о *равномерном* приближении целыми функциями на случай приближения функций  $f$  со значениями в комплексном пространстве Банаха  $X$  (см. [21], Теорема 3). Для голоморфной на  $\Omega$   $X$ -значной функции  $f$ , равномерно аппроксимируя функцию  $(1/\omega)f$  целой  $X$ -значной функцией  $g_1$  и полагая  $g = \omega g_1$  с учетом (1.29) приходим к следующему результату (для удобства применения мы заменим точку  $\infty$  на  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ ).

**Лемма 1.4.** Пусть  $\Omega$  – замкнутая жорданова область в  $\mathbb{C}$ ,  $\zeta_0 \in \Omega$  и  $f \in H_X(\Omega \setminus \{\zeta_0\})$ . Для  $\varepsilon > 0$  и  $\mu \in [0, 1/2)$  существует функция  $g \in H_X(\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\})$ , такая, что

$$\|f(\zeta) - g(\zeta)\| < \varepsilon \exp(-|\zeta - \zeta_0|^{-\mu}) \quad \text{для } \zeta \in \Omega \setminus \{\zeta_0\}. \quad (1.30)$$

## §2. КРИТЕРИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

**2.1. Формулировка результатов.** Ниже через  $X$  мы будем обозначать произвольное комплексное банахово пространство. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть  $E \subset \mathbb{C}$  – лог-выпуклый компакт со связным дополнением и  $0 \in E$ . Пусть  $L(E)$  – логарифмическая диаграмма  $E$  с направлением  $\beta$ . Формальный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} f_n, \quad f_n \in X \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.1)$$

сходится в окрестности  $\infty$  и представляет голоморфную функцию, допускающую однозначное аналитическое продолжение в  $\mathbb{C} \setminus E$ , тогда и только тогда, если существует  $X$ -значная целая функция  $\varphi$  порядка не выше 1, экспоненциального типа на полуплоскости  $\Delta(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2})$  (на  $\mathbb{C}$ , если  $0 \in E^o$ ), такая, что

$$\varphi(n) = f_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2)$$

$$h_\varphi(\theta) \leq K_{L(E)}(-\theta), \quad \text{при } |\theta + \beta| < \frac{\pi}{2}. \quad (2.3)$$

**Замечания 1.** В случае  $X = \mathbb{C}$  Теорема 2.1 является версией Теорем 3.1 и 3.2 из [1].

**2.** Величина  $K_{L(E)}(-\theta)$  представляет собой опорную функцию сопряженного к  $L(E)$  множества  $L^*(E)$ . С учетом (1.13) и монотонности по  $A$  опорных функций  $K_A$ , условие (2.3) равносильно условию  $l_\varphi \subset L^*(E)$ , где  $l_\varphi$  – индикаторная диаграмма  $\varphi$ .

**3.** В доказательстве части достаточности Теоремы 2.1 ограничения на функцию  $\varphi$  можно ослабить, полагая, что  $\varphi \in H_X(\Delta)$  и  $\sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty$  для  $\Delta =$

$= \Delta(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2})$ , сохранив при этом условия (2.2) и (2.3). Тогда из части необходимости Теоремы 2.1 следует утверждение об интерполировании таких  $\varphi$  целыми функциями  $\phi$  ( $\phi(n) = \varphi(n)$  для  $n \in \mathbb{N}_0$ ) порядка не выше 1,  $\sigma_\phi(\Delta) < +\infty$  ( $\sigma_\phi < +\infty$  на  $\mathbb{C}$ , если  $0 \in E^\circ$ ), удовлетворяющими (2.3).

4. Теорема 2.1 содержательна даже в случае  $E = \{0\}$ , когда  $L(E) = \emptyset$ , предлагая условия для того, чтобы ряд (2.1) представлял целую  $X$ -значную функцию от  $z^{-1}$ . Условие (2.3) (или включение  $I_\varphi \subset L^*(E)$ ) означает, что интерполирующая согласно (2.2) целая функция  $\varphi$  (см. Лемма 1.3) должна удовлетворять условию

$$h_\varphi(\theta) \equiv -\infty, \quad \text{при } |\theta + \beta| < \frac{\pi}{2}, \quad \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.4)$$

5. Теорему 2.1 легко переформулировать для степенных рядов с центром в точке 0 вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n, \quad f_n \in X \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.5)$$

полагая, что  $E$  — лог-выпуклый компакт в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  со связным дополнением и  $\infty \in E$ . Необходимо лишь в условии (2.3) множество  $L(E)$  заменить на  $-L(E)$ , что равносильно включению  $I_\varphi \subset (-L^*(E))$ . При этом условие  $\sigma_\varphi < +\infty$  на  $\mathbb{C}$  утверждается при  $\infty \in E^\circ$ .

**Пример 1.** Для  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $\sigma \in [0, \pi)$  рассмотрим лог-выпуклый в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  компакт  $E = \Delta_\omega(-\sigma, \sigma) \setminus D_1(0)$ . Поскольку

$$-L^*(E) = \{u + iv : u \leq 0, |v + \omega u| \leq \sigma\},$$

то полагая  $\omega = \tan \beta$ ,  $|\beta| < \pi/2$ , получим

$$K_{-L^*(E)}(\theta) = \sigma |\sin \theta| \quad \text{при } |\theta + \beta| < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, из Теоремы 2.1 (ср. с Теоремой 1.2 в [6]) следует

**Теорема 2.2.** Если ряд (2.5) имеет радиус сходимости единица, то он допускает аналитическое продолжение в область  $\mathbb{C} \setminus \Delta_\omega(-\sigma, \sigma)$  тогда и только тогда, когда существует  $X$ -значная целая функция  $\varphi$  экспоненциального типа на



$\Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $|\beta| < \pi/2$ ,  $\tan \beta = \omega$ , удовлетворяющая (2.2) и условию  $h_\varphi(\theta) \leq \sigma |\sin \theta|$ , при  $|\theta + \beta| < \pi/2$ .

Следующий критерий регулярности дуги также может быть выведен из Теоремы 2.1 (аналогично случаю  $X = \mathbb{C}$  см. [1], Теорему 3.3).

**Теорема 2.3.** Степенной ряд (2.5) с радиусом сходимости единица может аналитически продолжаться через дугу

$$\gamma_\sigma = \{z : |z| = 1, \sigma < |\arg z| \leq \pi\}, \quad 0 \leq \sigma < \pi$$

тогда и только тогда, если существует ( $X$ -значная) целая функция  $\varphi$  экспоненциального типа, удовлетворяющая условию (2.2) и условиям

$$h_\varphi(0) = 0, \quad |(D_\pm h_\varphi)(0)| \leq \sigma,$$

где  $D_\pm h_\varphi$  — производные функции  $h_\varphi$  справа и слева.

В следующей теореме рассматривается не охваченный Теоремой 2.2 случай, когда индикаторная диаграмма лог-выпуклого компакта ограничена.

**Теорема 2.4.** (а) Пусть  $\varphi$  — целая  $X$ -значная функция экспоненциального типа с индикаторной диаграммой  $I = I_\varphi$ . Тогда из (2.2) следует, что ряд (2.1) имеет однозначное аналитическое продолжение на компоненту открытого множества  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \exp(I^*)$ , содержащую точку  $\infty$ .

(б) Если множество  $I = I_\varphi$  не содержит вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ , то из (2.2) следует, что представимая рядом (2.1) функция  $f$  имеет аналитическое продолжение в точку 0 вдоль логарифмической спирали  $L_\omega(\alpha)$  и в окрестности нуля имеет разложение вида (2.5)

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi(-n-1). \quad (2.6)$$

(с) Если выпуклый компакт  $I \subset \mathbb{C}$  не содержит вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ , а ряд (2.1) сходится в окрестности точки  $\infty$  и имеет однозначное продолжение в область  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \exp(I^*)$ , то существует  $X$ -значная целая функция  $\varphi$  экспоненциального типа с индикаторной диаграммой  $I_\varphi \subset I$ , удовлетворяющая условиям (2.2).

(d) Функция коэффициентов  $\varphi$ , фигурирующая в пункте (с), единственна.

Теорему 2.4 также легко переформулировать для степенных рядов вида (2.5) с центром 0. Учитывая это, выделим два частных случая Теоремы 2.4, хорошо известные при  $X = \mathbb{C}$ .

**Пример 2** (Г. Поля, [14]). Ряд (2.5) с радиусом сходимости 1 допускает однозначное аналитическое продолжение вне дуги  $\{e^{i\theta} : |\theta| \leq \sigma\}$ ,  $0 \leq \sigma < \pi$  тогда и только тогда, если существует целая функция  $\varphi$ , удовлетворяющая условиям (2.2) и такая, что  $\sigma_\varphi \leq \sigma$  и  $I_\varphi \subset [-i\sigma, i\sigma]$ , т.е.  $h_\varphi(\theta) \leq \sigma |\sin \theta|$  для  $|\theta| \leq \pi$ .

**Следствие.** (Лю, Вигерт; см. [4]) Ряд (2.5) представляет целую функцию от  $(z-1)^{-1}$  тогда и только тогда, если существует целая функция  $\varphi$ ,  $\sigma_\varphi = 0$ , удовлетворяющая условиям (2.2).

Отсюда и из Леммы 1.3 мы приходим к следующей лемме.

**Лемма 2.1.** Пусть  $g \in H_X(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\})$ , где  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$  и  $g(\infty) = 0$ . Тогда около точки  $\infty$  функция  $g$  разлагается в ряд (2.1) – (2.2), где  $\varphi$  – целая  $X$ -значная функция порядка  $\leq 1$  такая, что

а) если  $\zeta_0 = \exp(w_0)$ , то  $\sigma_\varphi < +\infty$  и  $I_\varphi = \{\overline{w_0}\}$ ;

б) если  $\zeta_0 = 0$ , то  $\sigma_\varphi(\Delta) < +\infty$  и  $I_\varphi = \emptyset$  для  $\Delta = \Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$  и произвольно фиксированного  $\beta$ ,  $|\beta| < \pi/2$ .

Отметим, что здесь условие  $I_\varphi = \emptyset$  означает, что  $\varphi$  удовлетворяет условию (1.28) для  $\alpha = -\beta$ .

**Замечания.** 6. Пункт (а) Теоремы 2.4 был установлен Ф. Карлсоном (при  $X = \mathbb{C}$ , что несущественно; см. [4], §§1 – 3, а также [9], [10]).

7. Ограничение на выпуклый компакт  $I$  в пунктах (b) и (с) Теоремы 2.4 означает, что множество  $\exp(I^*)$  не разделяет точки 0 и  $\infty$ . Об утверждениях этих пунктов см. Диффенуа и Пизо [22]. Ранее Ф. Карлсон (см. выше) в этих пунктах подчинил компакт  $I$  более строгому условию, что *ширина*  $I$  в направлении мнимой оси меньше  $2\pi$ , утверждая в (b) аналитическую продолжимость по некоторому радиусу; наличие логарифмической спирали в (b) следует из обсуждений §1, пункт 1.4.

8. В статье [23] получен аналог пункта (с) Теоремы 2.4 в том случае, когда множество  $\exp(I^*)$  отделяет точки 0 и  $\infty$ . Этот случай охвачен Теоремой 2.1 при  $\infty \in E^o$ .

9. Вопрос о единственности "функции коэффициентов"  $\varphi$  возникает и в условиях Теоремы 2.1, но здесь этот вопрос не разрешим чисто в терминах индикаторной диаграммы  $I_\varphi$ , поскольку либо  $I_\varphi$  содержит вертикальный отрезок длины  $2\pi$  (случай  $0 \in E^o$ ), либо функция  $h_\varphi$  может иметь разрывы в точках  $-\beta \pm \pi/2$  (случай  $0 \in \partial E$ ). В случае  $0 \in \partial E$  каждое из следующих условий обеспечивает единственность функции  $\varphi$  из Теоремы 2.1:

i) неравенство (2.3) выполняется также при  $\theta + \beta = \pm\pi/2$  и ширина множества  $L^*(E)$  в направлении  $-\beta + \pi/2$  меньше, чем  $2\pi \cos \beta$ ;

ii) функция  $\varphi$  удовлетворяет условию  $h_\varphi(-\beta \pm \pi/2) < \pi \cos \beta$ .

Доказательство следует из Теоремы 1.3 при  $\alpha = -\beta - \frac{\pi}{2}$  применительно к  $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ , где  $\varphi = \varphi_k$  — функции из Теоремы 2.1, удовлетворяющие одному из условий i), ii).

Предположим теперь, что в сформулированных выше теоремах банахово пространство  $X$  заменено некоторой комплексной алгеброй Банаха  $B$  с единицей  $e$  (в частности, алгеброй ограниченных линейных операторов в  $X$ ). Для элемента  $a \in B$  положим:

$\rho(a)$  = резольвентное множество  $a$ ;

$R_z(a)$  = резольвента  $a$  для  $z \in \rho(a)$ ;

$\sigma(a) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho(a)$  — спектр элемента  $a$ ;

$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$  — спектральный радиус  $a$ .

Голоморфная по  $z$  функция  $R_z(a)$  в окрестности точки  $\infty$  имеет разложение вида (2.1)

$$R_z(a) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n \quad \text{при } |z| > r(a). \quad (2.7)$$

Пусть теперь  $E \subset \mathbb{C}$  — некоторый лог-выпуклый компакт со связным дополнением,  $L(E)$  — логарифмическая диаграмма  $E$  с направлением  $\beta$ . Применим к аналитическому элементу (2.7) Теоремы 2.1 и 2.4. Из условия  $\sigma(a) \subset E$  следует



существование некоторой  $B$ -значной целой функции  $\varphi$  порядка  $\leq 1$  и экспоненциального типа на  $\Delta \left( -\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2} \right)$  (на  $\mathbb{C}$ , если  $0 \notin \partial E$ ), удовлетворяющей условию

$$\varphi(n) = a^n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.8)$$

и условию  $I_\varphi \subset L^*(E)$ . Для квазинильпотентного  $a$ , т.е.  $r(a) = 0$  и  $a \neq 0$ , последнее условие при  $E = \{0\}$  означает выполнение (2.4) для произвольно фиксированного  $\beta$ ,  $|\beta| < \pi/2$ . Обратно, если существует целая функция с указанными свойствами, то  $\sigma(a) \subset E$  и даже можно считать, что  $\sigma(a) \setminus \{0\} \subset \exp(I_\varphi^*)$ .

В случае, когда  $0 \notin E$ , из связности  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  следует, что диаграмма  $I_\varphi$  не содержит вертикального отрезка длины  $\geq 2\pi$ , и тогда пункт (d) Теоремы 2.4 утверждает, что "функция коэффициентов"  $\varphi$  единственна. Более того, для  $m \in \mathbb{N}_0$  рассмотрим целые по  $z$  функции

$$\varphi_m(z) = \varphi(m+z), \quad \psi_m(z) = \varphi(m)\varphi(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

удовлетворяющие согласно (2.8) условиям  $\varphi_m(n) = \psi_m(n)$  для  $n \in \mathbb{N}_0$ . Очевидно, что  $h_{\psi_m} \leq h_\varphi$ , так что  $I_{\psi_m} \subset I_\varphi$ , а из свойства (1.14) следует, что  $I_{\varphi_m} = I_\varphi$ . Применяя к функциям  $\varphi_m$  и  $\psi_m$  Теорему 1.2, мы получим, что  $\varphi_m \equiv \psi_m$  для  $m \in \mathbb{N}_0$ , т.е.

$$\varphi(m+z) = \varphi(m)\varphi(z) \quad \text{для } z \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Фиксируя  $z$  и применяя еще раз свойство (1.14) и Теорему 1.2, мы приходим к групповому свойству функции  $\varphi$ :

$$\varphi(\zeta+z) = \varphi(\zeta)\varphi(z) \quad \text{для } \zeta, z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(0) = e, \quad \varphi(1) = a. \quad (2.9)$$

Таким образом, множество  $\varphi(\mathbb{C})$  является аналитической группой.

Аналогичные рассуждения применительно к случаю  $0 \in \partial E$ , при условиях единственности "функции коэффициентов"  $\varphi$  в терминах индикатора  $h_\varphi$  (в частности, при выполнении одного из условий i) или ii) Замечания 9) приводят к соотношению (2.9) для  $\zeta, z \in \Delta = \Delta \left( -\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2} \right)$ , так что  $\varphi(\Delta)$  является аналитической полугруппой. Полагая  $b = \varphi'(0)$ , из (2.9) получим, что  $\varphi^{(n)}(0) = b^n$  для  $n \in \mathbb{N}_0$ , так что  $\varphi(z) = \exp(bz)$  для  $z \in \mathbb{C}$  (ср. [13], 9.5). При этом роль индикаторной диаграммы  $I_\varphi^*$  играет множество  $\widehat{\sigma(b)}$  (см. [13], 17.4).

Сказанное выше позволяет интерпретировать "функцию коэффициентов"  $\varphi$  применительно к интерполяционным данным вида (2.8) как некоторую замену экспоненциальной интерполирующей функции (в случае отсутствия последней), сохраняющую некоторые ее свойства (голоморфность, экспоненциальный рост, связь со спектром  $a$  (соотношение  $\sigma(a) \setminus \{0\} \subset \exp(I_\varphi^*)$ ) и т.д.).

**2.2. Доказательство Теоремы 2.1 : достаточность.** При доказательстве этой части Теоремы 2.1 ограничения на функцию  $\varphi$  можно ослабить, полагая, что  $\varphi \in H_X(\Delta)$ ,  $\sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty$  для  $\Delta = \Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\varphi$  удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3). Рассмотрим аналитический элемент  $f$ , представимый рядом (2.1), (2.2) : из условия (2.3) следует, что этот ряд сходится при  $|z| > K_{L(E)}(0)$  (при  $z \neq 0$ , если  $L(E) = \emptyset$ ). Возможность аналитического продолжения элемента  $f$  на остальную часть области  $\mathbb{C} \setminus E$  можно доказать, используя метод работы [1]. Это включает применение к рядам (2.1), (2.2) известной формулы Карлемана (см. [2]) и аналитическое продолжение контурного интеграла с помощью вариации контура интегрирования. В качестве альтернативы можно воспользоваться тем фактом, что часть достаточности Теоремы 2.1 доказана в случае  $X = \mathbb{C}$  в Теоремах 3.1 и 3.2 работы [1].

С этой целью рассмотрим сопряженное к  $X$  пространство линейных функционалов  $X^*$  и пусть  $x^* \in X^*$ . Полагая  $\varphi_* = x^* \varphi$  и учитывая, что  $|\varphi_*(z)| \leq \|x^*\| \cdot \|\varphi(z)\|$  для  $z \in \mathbb{C}$ , имеем, что  $\varphi_* \in H(\Delta)$  и

$$\sigma_{\varphi_*}(\Delta^o) \leq \sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty, \quad h_{\varphi_*}(\theta) \leq h_\varphi(\theta) \quad \text{при } |\theta + \beta| < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, скалярная функция  $\varphi_*$  удовлетворяет интерполяционным условиям  $\varphi_*(n) = x^*(f_n)$  для  $n \in \mathbb{N}_0$  и остальным условиям Теоремы 2.1. Тогда из указанных выше теорем работы [1] следует, что аналитический элемент  $x^* f$  с коэффициентами  $(x^* f_n)_{n=0}^\infty$  допускает однозначное аналитическое продолжение в область  $\mathbb{C} \setminus E$ . Учитывая это, заметим теперь, что если элемент  $f_a$  с центром  $a \in \mathbb{C} \setminus E$  является аналитическим продолжением элемента  $f$  вдоль некоторого пути  $l \subset \mathbb{C} \setminus E$ , то  $f_a$  должен сходиться в максимальном круге  $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus E$ . В противном случае особая точка  $f_a$  на границе  $\partial D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus E$  круга сходимости

была бы особой точкой скалярной функции  $x^* f_a$  хотя бы для одного  $x^* \in X^*$  (см. [13], 3.12). Однако  $x^* f_a$  является аналитическим продолжением вдоль  $l$  элемента  $x^* f$  и по сказанному выше не может иметь особых точек в  $\mathbb{C} \setminus E$ .

Напомним, что  $\mathbb{C} \setminus E$  является  $\omega$ -звездной областью относительно точки  $\infty$  (см. 1.4), рассмотрим такую область  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus E$ , где элемент  $f$  допускает однозначное аналитическое продолжение вдоль дуг логарифмических спиралей  $L_\omega(\alpha)$ , соединяющих  $\infty$  с точками  $\Omega$ . Из сказанного выше о максимальности кругов  $D_r(a)$  следует, что  $\Omega$  не может иметь граничных точек в  $\mathbb{C} \setminus E$ , так что  $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$ . Это завершает доказательство.

**2.3. Доказательство Теоремы 2.4.** Рассуждениями раздела 2.2 доказательство пункта (а) Теоремы 2.4 сводится к случаю  $X = \mathbb{C}$ , т.е. к теореме Карлсона. В условиях пункта (с) положим  $E = \exp(I^*)$  и рассмотрим голоморфную в  $\mathbb{C} \setminus E$  функцию  $f$ , заданную аналитическим элементом (2.1). Пусть  $\log$ -однозначная в некоторой окрестности  $\Omega$  множества  $E$  ветвь логарифма такая, что  $\log E = I^*$ . Рассмотрим целую функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^z f(\zeta) d\zeta, \quad (2.10)$$

где  $\zeta^z = \exp(z \log \zeta)$ , а  $\Gamma$  — гладкий контур Жордана в  $\Omega \setminus E$ , обходящий  $E$  в положительном направлении и отделяющий его от точек 0 и  $\infty$ . При этих условиях функция  $\varphi$  не зависит от выбора контура  $\Gamma$  и очевидно, что удовлетворяет интерполяционным условиям (2.2). Пусть  $\gamma_\varepsilon$  для  $\varepsilon > 0$  означает границу выпуклого компакта с опорной функцией  $K_{I^*} + \varepsilon$ . Для достаточно малого  $\varepsilon$   $\Gamma_\varepsilon = \exp(\gamma_\varepsilon) \subset \Omega \setminus E$ , и мы можем положить в (2.10)  $\Gamma = \Gamma_\varepsilon$  с соответствующей ориентацией. Тогда из (2.10) имеем оценку

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq M_\varepsilon \exp[r(K_{I^*}(\theta) + \varepsilon)],$$

где

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \|f(\zeta)\| |d\zeta|.$$

Отсюда следует, что  $h_\varphi(\theta) \leq K_{I^*}(\theta) + \varepsilon$  для  $\theta \in \mathbb{R}$ , т.е.  $h_\varphi \leq K_{I^*}$  или  $I_\varphi \subset I^*$ .

Утверждение пункта (d) Теоремы 2.4 следует непосредственно из Теоремы 1.2



параграфа 1 о единственности. Наконец, из (d) следует, что в условиях пункта (b) функция  $\varphi$  должна иметь вид (2.10). Тогда разложение (2.6) следует из формулы Коши

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

разложением ядра  $(\zeta - z)^{-1}$  по степеням  $z$  в достаточно малой окрестности нуля.

**2.4. Доказательство Теоремы 2.1 : необходимость.** Пусть  $f \in H_X(\bar{\mathbb{C}} \setminus E)$ ,  $f(\infty) = 0$  и около точки  $\infty$  имеет разложение (2.1). Заметим сначала, что если  $\varphi$  построена для  $g \in H_X(\bar{\mathbb{C}} \setminus E)$  и для функции  $F = f - g$ , то можем положить  $\varphi_f = \varphi_F + \varphi_g$ . Это легко следует из (1.7) и (2.1) – (2.3).

Рассмотрим далее точку  $\zeta_0 \in \partial E$  такую, что  $|\zeta_0| \leq |\zeta|$  для  $\zeta \in \partial E$ . При  $\zeta_0 \neq 0$  можно считать, что  $\zeta_0 = \exp(w_0)$ , где  $w_0 \in L(E)$  и  $(w_0 + 2\pi i) \in L(E)$ . Если теперь  $g \in H_X(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\})$  и  $g(\infty) = 0$ , то из Леммы 2.1 следует, что функция  $\varphi = \varphi_g$  из этой леммы удовлетворяет условиям Теоремы 2.1, если учесть Замечание 2 и включение  $l_{\varphi_g} \subset L^*(E)$ . Таким образом, для построения функции  $\varphi_f$  достаточно построить функцию  $\varphi_{f-g}$ , где выбор функции  $g \in H_X(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\})$ ,  $g(\infty) = 0$  произволен. Из рассмотрений раздела 1.4 следует (см. (1.20) и (1.24)) существование непрерывной ветви логарифма  $\log$  в некоторой окрестности  $O$  множества  $\partial E \setminus \{\zeta_0\}$ ,  $\zeta_0 \in \partial O$  такой, что  $\log(\partial E \setminus \{\zeta_0\}) \subset \partial L(E)$ . Тогда существует лог-выпуклый компакт  $E_1$  с жордановой границей  $\Gamma \cup \{\zeta_0\}$ ,  $\Gamma \subset O \setminus E$  такой, что  $E \subset E_1^o \cup \{\zeta_0\}$ . При этом можно считать, что  $\Gamma$  локально гладкая, имеет конечную длину (см. замечание в конце пункта 1.4), а в точке  $\zeta_0$  касательна к границе  $E$ .

Рассмотрим теперь жорданову область  $\Omega = \bar{\mathbb{C}} \setminus E_1^o$ , ограниченную контуром  $\Gamma \cup \{\zeta_0\}$ , положительно ориентированном относительно  $E_1$ . Применим к области  $\Omega$  и функции  $f$  аппроксимационную Лемму 1.4, полагая там  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1/3$ . Мы можем выбрать функцию  $g \in H_X(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\})$ ,  $g(\infty) = 0$  так, что для  $F = f - g \in H_X(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\})$ ,  $F(\infty) = 0$  согласно (1.30) имели

$$\|F(\zeta)\| < \exp(-|\zeta - \zeta_0|^{-1/3}), \quad \zeta \in \Omega. \quad (2.11)$$

Нам остается только построить функцию  $\varphi_F$ . Пусть  $(F_n)_{n=0}^{\infty}$  – коэффициенты

разложения  $F$  около  $\infty$ . Тогда

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^n F(\zeta) d\zeta \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) – это формула Коши для коэффициентов элемента  $F$  после деформации контура интегрирования к точке  $\zeta_0$  с учетом голоморфности подынтегральной функции и оценки (2.11). Искомую целую функцию  $\varphi_F$ , удовлетворяющую условиям  $\varphi_F(n) = F_n$  для  $n \in \mathbb{N}_0$ , определим формулой

$$\varphi_F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^z F(\zeta) d\zeta \quad \text{для } z \in \mathbb{C}, \quad (2.13)$$

где  $\zeta^z = \exp(z \log \zeta)$  с фиксированной выше ветвью логарифма на  $O$ . Подынтегральная функция здесь голоморфна по  $\zeta$  на  $O$ , целая по  $z$  и непрерывна по  $(\zeta, z)$ . В случае  $\zeta_0 \neq 0$ , она для  $\zeta \in \Gamma$  и  $z \in \mathbb{C}$  удовлетворяет, с учетом (2.11), оценке

$$\|\zeta^z F(\zeta)\| \leq \exp(\sigma|z|), \quad \sigma = \sup_{\zeta \in \Gamma} |\log \zeta|. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что  $\varphi_F$  – целая функция экспоненциального типа  $\leq \sigma$ .

В случае  $\zeta_0 = 0$  положим  $\Gamma_1 = \Gamma \cap D_1(0)$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$  и если  $\Gamma_2 \neq \emptyset$ , то разобьем интеграл (2.13) на два интеграла по  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , соответственно. Очевидно, что  $I_2$  имеет оценку вида (2.14). Для оценки интеграла  $I_1$  заметим, с учетом (1.21), что  $\frac{\log \zeta}{\log |\zeta|} \rightarrow 1 + \omega i$  при  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $\zeta \in \Gamma_1$ . Поэтому существуют константы  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$  такие, что

$$|\log \zeta| < c_1 \log \left( \frac{1}{|\zeta|} \right) + c_2 \quad \text{для } \zeta \in \Gamma_1.$$

Полагая  $|\zeta| = t^3$ , для  $z \in \mathbb{C}$  и  $\zeta \in \Gamma_1$  с учетом (2.11) получим оценку

$$\|\zeta^z F(\zeta)\| < \exp(c_2|z|) \sup_{t \in (0,1)} (t^{-3c_1|z|} e^{-t}) < (|z| + 2)^{c_3(|z|+1)},$$

где  $c_3 > 0$  – некоторая константа. Из этой оценки следует, что при  $\zeta_0 = 0$   $\varphi_F$  является целой функцией порядка  $\leq 1$ .

Остается доказать, что функция  $\varphi_F$  удовлетворяет условию (2.3), и если  $\zeta_0 = 0$ , то  $\sigma_{\varphi_F}(\Delta) < +\infty$  для  $\Delta = \Delta \left( -\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2} \right)$ . С этой целью для  $\zeta \in E_1 \setminus E$  обозначим через  $w_\zeta$  одну из ближайших к  $\zeta$  точек из  $\partial E$ , так что

$\log \zeta - \log w_\zeta \rightarrow 0$ , когда  $\zeta \rightarrow \zeta_0$ . Для числа  $\varepsilon > 0$ , выберем  $\rho > 0$  так, что  $|\log \zeta - \log w_\zeta| < \varepsilon$  для  $\zeta \in \Gamma \cap D_\rho(0)$ . Это неравенство сохраняется всюду на некоторой гладкой кривой  $\Gamma_\varepsilon \subset O \setminus E$  такой, что  $\Gamma_\varepsilon \cap D_\rho(0) = \Gamma \cap D_\rho(0)$ , а часть  $\Gamma_\varepsilon \setminus D_\rho(0)$  лежит в достаточно малой окрестности  $\partial E$  и гомотопна части  $\Gamma \setminus D_\rho(0)$ . Тогда для  $z \in \mathbb{C}$  и  $\zeta \in \Gamma_\varepsilon$  имеем

$$|\zeta^z| \leq \exp[\operatorname{Re}(z \log w_\zeta + \varepsilon|z|)] \leq \exp(H(z) + \varepsilon|z|), \quad (2.15)$$

где  $H$  — опорная функция Минковского для множества  $L^*(E)$ . Кроме того, с учетом (2.11)

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \|F(\zeta)\| |d\zeta| < +\infty. \quad (2.16)$$

Заменив в (2.13) контур интегрирования  $\Gamma$  на  $\Gamma_\varepsilon$ , с учетом (2.15) и (2.16) получим оценку

$$\|\varphi_F(z)\| \leq M_\varepsilon \exp[H(z) + \varepsilon|z|] \quad \text{для } z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда для  $\theta \in \mathbb{R}$  и  $r > 0$  имеем, что

$$r^{-1} \log \|\varphi_F(re^{i\theta})\| \leq K_{L^*(E)}(\theta) + \varepsilon + r^{-1} \log M_\varepsilon. \quad (2.17)$$

Из ограниченности функции  $K_{L^*(E)}(\theta)$  при  $|\theta + \beta| \leq \pi/2$  и из (2.17) следует, что  $\sigma_{\varphi_F}(\Delta) < \infty$  при  $\zeta_0 = 0$ . Наконец, из (2.17) имеем, что  $h_{\varphi_F}(\theta) \leq K_{L^*(E)}(\theta) + \varepsilon$  для  $\theta \in \mathbb{R}$ , откуда ввиду произвольности  $\varepsilon$  получим, что функция  $\varphi_F$  удовлетворяет условию (2.3). Это завершает доказательство Теоремы 2.1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. U. Arakelyan (Arakelian), "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in Approximation Theory, Springer-Verlag, pp. 295 - 313, 1992.
2. E. Lindelöf, Le Calcul de Residues et ses Applications a'la Theorie des Fonctions, Paris, 1905.
3. P. Dienes, Taylor Series, Clarendon Press, Oxford, 1931.
4. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
5. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, Степенные Ряды : Аналитическое Продолжение и Локализация Особенностей, Изд. ЕГУ, Ереван, 1991.
6. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. Сборник, т. 5, № 1, стр. 24-44, 1984.
7. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. Ан Арм. ССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 3-21, 1987.
8. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных



- рядов на границе круга сходимости, II", Изв. Ан Арм. ССР, Математика, т. 23, № 3, стр. 123–137, 1988.
9. F. Carlson, "Sur une classe de series de Taylor", Diss., Upsala, 1914.
  10. F. Carlson, "Über ganzwertige ganze funktionen", Math. Z., v. 11, pp. 1 – 23, 1921.
  11. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.
  12. R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
  13. Э. Хилле, Р. Филлипс, "Функциональный Анализ и Полугруппы", М., Иностран. Лит., 1962.
  14. G. Polya, "Untersuchungen uber Lücken und Singularitäten von Potenzreihen", Math. Z., vol. 29, pp. 549 – 640, 1929.
  15. Е. Титчмарш, Теория Функций, М., Наука, 1980.
  16. T. Carleman, "Sur un theoreme de Weierstrass," Ark. Mat. Astr. Fys., vol. 20, no. 4, pp. 1 – 5, 1927.
  17. N. U. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des fonctions analytiques", Proc. Internat. Congr. Math. (Nice 1970), Gauthier-Villars, Paris, v. 2, pp. 595 – 600, 1971.
  18. Н. У. Аракелян, П. М. Готье, "О касательном приближении голоморфными функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 17, № 6, стр. 421–441, 1982.
  19. М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми", ДАН СССР, т. 47, стр. 239 — 241, 1945.
  20. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", Успехи мат. наук, т. 7, № 2 (48), стр. 31 – 122, 1952.
  21. L. Brown, P. M. Gauthier, W. Seidel, "Complex approximation for vector-valued functions with an application to boundary behaviour", Trans. Amer. Math. Soc., v. 191, pp. 149 – 163, 1974.
  22. J. Dufresnoy, Ch. Pisot, "Prolongement analitique de la serie de Taylor", Ann. Sci. Ecole Norm. Super., ser. 3, v. 68, pp. 105 – 124, 1951.
  23. W. Gawronski, R. Trauthner, "Analytische Fortsetzungen von Potenzreihen", Serdica Math. Publ., Bulgar, v. 2, no. 4, pp. 369 – 374, 1976.

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ЛАКУНАРНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ОГРАНИЧЕННЫХ НА УГЛЕ ЖОРДАНА

Э. В. Габриелян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

В статье исследуются вопросы единственности целых функций, имеющих лакунарные степенные ряды и ограниченных на угле Жордана переменного раствора. Найдены новые достаточные условия на лакуны, сводящие любую ограниченную на угле Жордана функцию к постоянной.

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $Q$  – подпоследовательность натуральных чисел,  $E(Q)$  – множество всех целых функций, имеющих лакунарные степенные ряды

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad f_n = 0, \quad \text{при } n \notin Q \cup \{0\}. \quad (1)$$

Рассмотрим простой угол Жордана из конечной комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ :

$$\Delta = \{z: |\arg z| < \theta(|z|)\}.$$

Функция  $\theta$  является положительной, непрерывной и невозрастающей на полуоси  $[0, +\infty)$  и  $\theta(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow +\infty$ . В этой статье мы изучаем такие условия на подпоследовательность  $Q$  и угол Жордана  $\Delta$ , при которых произвольная ограниченная на  $\Delta$  функция из  $E(Q)$  является постоянной. Такого типа вопросы единственности целых функций берут начало от известных работ Г. Поля [1] и А. Макинтайра [2]. Помимо самостоятельного интереса эти вопросы имеют

---

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным благодаря поддержке второго автора Грантом № MVK000 из Международного Научного Фонда.

интересные связи с вопросами аппроксимации лакунарными полиномами. В настоящей работе получены новые результаты о единственности, обобщающие и усиливающие имевшиеся ранее в [3].

Статья состоит из двух частей: в §1 приведены вспомогательные утверждения, а в §2 – основные результаты.

## §1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем сперва некоторые обозначения. Для множества  $e \subset \mathbb{C}$  обозначим через  $\bar{e}$  замыкание  $e$  в  $\mathbb{C}$ . Положим  $\Pi = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$  и обозначим через  $H(\Pi)$  множество всех голоморфных на  $\Pi$  функций. Для  $a \in \mathbb{C}$  и  $r > 0$

$$D_r(a) = \{z : |z - a| < r\}, \quad D_r = D_r(0).$$

Пусть  $l$  – медленно изменяющаяся функция на полуоси  $[0, \infty)$ , т.е.  $l$  положительна и непрерывна на  $[0, \infty)$ , дифференцируема на  $(0, \infty)$  и

$$t \frac{l'(t)}{l(t)} \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Тогда функция  $tl(t)$  является уточненным порядком при порядке один в смысле Валирона. Из Леммы 9 главы 1 работы [4] следует, что функция

$$\psi(r, \theta) = \operatorname{Re} \left[ z \int_1^r \frac{l(t)}{t+z} dt - z^2 \int_r^\infty \frac{l(t)}{t(t+z)} dt \right], \quad z = re^{i\theta}$$

равномерно по  $\theta$ ,  $|\theta| \leq \pi/2$ , удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r, \theta)}{rl(r)(\cos \theta + \theta \sin \theta)} = 1. \quad (3)$$

Предположим дополнительно, что  $l$  ограничена и удовлетворяет условию

$$l^*(r) = \int_1^r \frac{l(t)}{t} dt \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \exp \left[ -z^2 \int_1^\infty \frac{l(t)}{t(t+z)} dt \right], \quad z \in \Pi. \quad (5)$$

Очевидно, что  $g \in H(\Pi)$  и не имеет нулей. Из (3) следует, что равномерно по  $\theta$ ,  $|\theta| \leq \pi/2$ ,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})| + rl^*(r) \cos \theta}{rl(r)(\cos \theta + \theta \sin \theta)} = 1. \quad (6)$$



Пусть  $\{\lambda_n\}_1^\infty$  — последовательность положительных чисел, для которой

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0 \quad \text{для некоторого } \delta > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Положим

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n} \exp\left(\frac{2z}{\lambda_n}\right), \quad z \in \Pi. \quad (8)$$

Из условия (7) (см. [5], стр. 159) следует, что  $h \in H(\Pi)$ , имеет нули только на последовательности  $\{\lambda_n\}_1^\infty$  и удовлетворяет оценкам

$$\log |h(z)| \leq (2N(|z|) + C_1) \operatorname{Re} z, \quad \text{при } z \in \Pi, \quad (9)$$

$$\log |h(z)| \geq (2N(|z|) + C_2) \operatorname{Re} z, \quad \text{при } z \in \Pi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\delta/3}(n), \quad (10)$$

где  $N(r) = \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-1}$  и постоянные  $C_1, C_2$  зависят только от  $\delta$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\{\lambda_n\}_1^\infty$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая (7). Для того чтобы существовала нетривиальная функция из  $H(\Pi)$  нулевого экспоненциального типа и имеющая нули на последовательности  $\{\lambda_n\}_1^\infty$ , необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log r} = 0. \quad (11)$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть существует функция  $\varphi$  с требуемыми свойствами. По формуле Т. Карлемана для полукруга  $\Pi \cap \overline{D_r}$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n \leq r} \left( \frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{r^2} \right) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log |\varphi(it)\varphi(-it)|}{1+t^2} + dt \\ &+ \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log |\varphi(re^{i\theta})| \cos \theta \, d\theta + O(1), \quad \text{при } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку  $\varphi$  нулевого экспоненциального типа на  $\Pi$ , то легко видеть, что интегралы в правой части (12) являются величинами порядка  $o(\log r)$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Из (7) следует, что левая часть (12) не меньше величины  $N(r) + O(1)$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Следовательно, из (12) вытекает (11).

**Достаточность.** Для построения требуемой функции  $\varphi$  рассмотрим два возможных случая. Если функция  $N$  ограничена, достаточно положить

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n}, \quad z \in \Pi.$$

Если  $N$  неограничена, то положим

$$\varphi(z) = h(z)g(z)\exp(-Cz), \quad z \in \Pi, \quad (13)$$

где  $h$  - функция (8),  $g$  - функция, соответствующая по (5) подлежащей выбору функция  $l$ ,  $C > 0$  - достаточно большое число, зависящее только от  $\delta$ . С целью выбора функции  $l$  положим

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{N(t)}{\log t} & , \quad \text{при } t \geq t_0 = \max(\lambda_1, e), \\ \frac{N(t_0)}{\log t_0} & , \quad \text{при } t \in [0, t_0] \end{cases}$$

и пусть  $\varepsilon_1(r) = \sup\{\varepsilon(t) : t \geq r\}$  при  $r \in [0, \infty)$ . Ясно, что  $\varepsilon_1(r)$  положительна, не возрастает и  $\varepsilon_1(r) \geq \varepsilon(r)$  на  $[0, \infty)$ . Кроме того, из (11) следует, что  $\varepsilon_1$  ограничена сверху и  $\varepsilon_1(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Рассмотрим функцию

$$\varepsilon^*(r) = \begin{cases} \int_{r/e}^r \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt & , \quad \text{при } r \geq e, \\ \int_1^e \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt & , \quad \text{при } r \in [0, e]. \end{cases}$$

Она положительна, непрерывна и не возрастает на  $[0, \infty)$ . Из невозрастания  $\varepsilon_1$  имеем

$$\varepsilon_1(r) \leq \varepsilon^*(r) \leq \varepsilon_1(r/e), \quad \text{при } r \geq e. \quad (14)$$

Положим теперь

$$l(r) = \frac{2}{\log r} \int_1^r \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt + \frac{1}{\log^2 r}, \quad \text{при } r \geq e$$

и продолжим  $l$  на  $[0, e)$  с сохранением положительности, убывания и дифференцируемости. Определенная функция  $l$ , очевидно, положительна и дифференцируема на  $[0, \infty)$  с отрицательной производной. Из невозрастания  $\varepsilon^*$  имеем

$$\int_1^r \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt \geq \varepsilon^*(r) \log r, \quad \text{при } r \geq 1.$$

Откуда легко следует, что  $l$  удовлетворяет условию (2) :

$$r \frac{l'(r)}{l(r)} = -\frac{1}{\log r} + \frac{2\varepsilon^*(r) \log^2 r - 1}{2 \log^2 r \int_1^r \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt + \log r} \rightarrow 0, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Далее, из невозрастания  $\varepsilon^*$ ,  $\varepsilon_1$ , из (14) и  $\varepsilon_1(r) \geq \varepsilon(r)$ , получим

$$l(r) \geq 2\varepsilon^*(r) \geq 2\varepsilon_1(r), \quad \text{при } r \geq e$$

и

$$\begin{aligned}
 l^*(r) &= \int_1^e \frac{l(t)}{t} dt + \int_e^r \frac{l(t)}{t} dt \geq \int_1^e \frac{l(t)}{t} dt + 2\varepsilon_1(r)(\log r - 1) \geq \\
 &\geq 2\varepsilon(r) \log r + O(1) = 2N(r) + O(1), \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Итак,  $l$  удовлетворяет условию (4). Отметим, что функция  $rl(r)$  возрастает к бесконечности на  $[e^2, \infty)$ . Применяя правило Лопиталья и учитывая (14) найдем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} l(r) = 2 \lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon^*(r) = 0.$$

Таким образом, выбор функции  $l$  осуществлен вполне корректно и следовательно, из (6), (9) и (15) вытекает, что формула (13) задает требуемую функцию. Лемма 1 доказана.

В следующей лемме оцениваются коэффициенты степенного ряда произвольной функции из  $E(Q)$ , если  $Q$  — достаточно редкая последовательность.

**Лемма 2.** Пусть  $\Delta = \{z : |\arg z| < \theta(|z|)\}$  — простой угол Жордана с положительной, непрерывной и невозрастающей на  $[0, +\infty)$  функцией  $\theta$  такой, что  $\theta(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow +\infty$ ,  $Q$  — подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию (11). Тогда для произвольной функции  $f \in E(Q)$  имеют место оценки: для любого  $r > 0$  и каждого  $s > 1, q > 1$

$$|f_{q_n}| r^{q_n} \leq C^{q_n} r M(f; sr) V(r; s, q), \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$V(r; s, q) = \max \left\{ 1, \int_0^\infty \exp[u(\pi q l(u) - \theta(sr))] \frac{du}{1+u^2} \right\},$$

$$M(f; r) = \max \{|f(z)| : z \in \overline{\Delta} \cap \overline{D_r}\},$$

$l$  — функция, соответствующая  $Q$  по Лемме 1, если функция  $N$  неограничена, и  $l = 0$ , если  $N$  ограничена,  $C > 0$  — постоянная, не зависящая от  $r$  и  $n$ .

**Доказательство.** Зафиксируем натуральное число  $n$  и определим

$$\Phi_n(z) = \frac{z}{(1+z)^4} h_n(z) g(z) \exp(-C_1 z) \in H(\Pi), \quad z \in \Pi,$$

где  $g$  соответствует по формуле (5) функции  $l$ ,  $h_n$  соответствует по формуле (8) последовательности  $Q \setminus \{q_n\}$  и  $C_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $z$  и  $n$ . Из (9),



(10) и рассуждений, использованных в доказательстве достаточной части Леммы 1, легко следует, что  $\Phi_n$  является нулевого экспоненциального типа на  $\Pi$ , имеет нули только на последовательности  $Q \cup \{0\} \setminus \{q_n\}$  и для каждого  $q > 1$

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{|z|}{1+|z|^4} \exp[q |\operatorname{Im} z| |\arg z| l(|z|)], \quad \text{при } z \in \Pi, \quad (17)$$

$$|\Phi_n(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^4} \exp(-C_2 \operatorname{Re} z), \quad \text{при } z \in \Pi \setminus \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} D_{1/3}(k), \quad (18)$$

где  $C_2 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $z$  и  $n$ . Поскольку  $\Phi_n$  нулевого экспоненциального типа на  $\Pi$ , то по классической теореме Е. Линделефа (см. [6], стр. 216 или [7], стр. 340) степенной ряд

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_n(k) z^k, \quad |z| < 1, \quad (19)$$

определяет функцию  $g_n$ , голоморфную в  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ . Рассмотрим адамаровскую композицию ([6], стр. 37) функций  $f$  и  $g_n$ :

$$h(z; f, g_n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \Phi_n(k) z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

С одной стороны, для произвольного  $r > 0$

$$h(r; f, g_n) = f_{q_n} \Phi_n(q_n) r^{q_n}. \quad (20)$$

С другой стороны

$$h(r; f, g_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) g_n(r/t) \frac{dt}{t}, \quad (21)$$

где  $\gamma$  — произвольная окружность с центром в нуле и радиусом больше  $r$ ,  $\operatorname{Ind}_{\gamma}(0) = 1$ . Для подходящей деформации контура  $\gamma$  возьмем  $s > 1$  и рассмотрим контур  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ,  $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(0) = 1$ , где

$$\Gamma_1 = \{t: |t| = sr, |\arg t| \leq \theta(sr)\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{t: \frac{a}{2} \leq |t| \leq sr, |\arg t| = \theta(sr)\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{t: |t| = \frac{a}{2}, \theta(sr) \leq |\arg t| \leq \pi\right\}, \quad a \in (0, 1).$$

Поскольку  $f$  — целая функция и  $g_n(r/t)$  голоморфна при  $t \in \mathbb{C} \setminus [0, r]$ , то контур  $\gamma$  в формуле (21) можем заменить на  $\Gamma$ . При таком выборе контура интегрирования из (20), (21) для произвольного  $r > 0$  имеем

$$|f_{g_n}| |\Phi_n(q_n)| r^{q_n} \leq C_3 r M(f; sr) \max\{|g_n(r/t)| : t \in \Gamma\}, \quad (22)$$

где  $C_3 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $r$  и  $n$ .

Для оценки функции  $g_n$  нам понадобится формула Линдефафа (см. [6], стр. 216) :

$$g_n(w) = - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Phi_n(\tau) \exp(\tau \log w)}{\exp(2\pi i \tau) - 1} d\tau, \quad \text{при } |\pi - \text{Arg } w| < \pi, \quad (23)$$

где  $\log w = \log |w| + i \text{Arg } w$ ,  $\text{Arg } w$  — однозначная ветвь аргумента с  $0 \leq \text{Arg } w < 2\pi$ . Совершая в (23) замену переменной  $\tau = iu$  и учитывая неравенство

$$|\exp(-2\pi i u) - 1| \geq C_4^{-1} \exp(\pi(|u| - u)), \quad u \in (-\infty, \infty),$$

где  $C_4 > 0$  — абсолютная постоянная, получим : при  $|\pi - \text{Arg } w| < \pi$

$$\begin{aligned} |g_n(w)| &\leq C_4 \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(iu)| \exp[|u|(|\pi - \text{Arg } w| - \pi)] du = \\ &= C_4 \int_0^{\infty} (|\Phi_n(iu)| + |\Phi_n(-iu)|) \exp[u(|\pi - \text{Arg } w| - \pi)] du. \end{aligned} \quad (24)$$

Перейдем к оценке  $|g_n(r/t)|$  при  $t \in \Gamma$ . Предположим сперва, что  $t \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . Для  $w = r/t$  выберем  $\text{Arg } w = -\arg t$  при  $\arg t < 0$  и  $\text{Arg } w = \pi - \arg t$  при  $\arg t > 0$ . Тогда из (24) найдем

$$|g_n(r/t)| \leq C_4 \int_0^{\infty} (|\Phi_n(iu)| + |\Phi_n(-iu)|) \exp[-u\theta(sr)] du, \quad t \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \quad (25)$$

Для  $t \in \Gamma_1$  имеем  $|w| = |r/t| \leq s^{-1}$ , так что из (19) и (17) найдем

$$|g_n(r/t)| \leq C_5, \quad \text{при } t \in \Gamma_1, \quad (26)$$

где  $C_5 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $r, t$  и  $n$ . Из (18), (22), (25) и (26) очевидно следует (16). Лемма 2 доказана.

Замечание 1. В предположениях Леммы 2, если функция  $N$  неограничена, то

$$V(r; s, q) \leq C_1 \exp \left[ \theta(sr) l^{-1} \left( \frac{\theta(sr)}{\pi q} \right) \right], \quad \text{для } r \geq 0,$$

где  $l^{-1}$  — обратная к функции  $l$ ,  $C_1 > 1$  — постоянная, не зависящая от  $r$ .

Замечание легко следует из (16), так как функция  $l$  убывает к нулю и непрерывна на  $[0, \infty)$ , а функция  $rl(r)$  возрастает на  $[e^2, \infty)$ .

Для выпуклой на полуоси  $[0, \infty)$  функции  $\psi$ , удовлетворяющей условию

$$\frac{\psi(r)}{r} \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty, \quad (27)$$

положим

$$\tau_\psi(r) = \max\{rt - \psi(t) : t \geq 0\}, \quad r \geq 0. \quad (28)$$

Хорошо известно (см. [8], стр. 7), что функция  $\tau_\psi$  сама является выпуклой

$$\frac{\tau_\psi(r)}{r} \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty$$

и

$$\psi(r) = \max\{rt - \tau_\psi(t) : t \geq 0\}, \quad r \geq 0.$$

Дж. Андерсон и К. Бинмор получили в [9] результат, который мы формулируем в приспособленной для наших целей форме.

**Теорема А.** Произвольная трансцендентная функция  $f \in E(Q)$ , для которой

$$|f_{q_n}| r^{q_n} \leq C^{q_n} \exp(\psi(\log r)), \quad r \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\psi$  — выпуклая функция на  $[0, \infty)$ , удовлетворяющая (27), и постоянная  $C > 1$  не зависит от  $n$  и  $r$ , является неограниченной на  $[0, \infty)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ N(r) - \frac{1}{2r} \tau_\psi(r) \right] = -\infty. \quad (29)$$



## §2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.** Пусть  $\Delta, Q, s, q$  и  $V$  — те же, что в Лемме 2. Тогда произвольная ограниченная на  $\Delta$  функция из  $E(Q)$  является постоянной, если существует выпуклая на  $[0, \infty)$  функция  $\psi$ , удовлетворяющая (27), (29) и условию

$$\psi(r) \geq r + \log V(e^r; s, q), \quad r \geq 0. \quad (30)$$

**Доказательство.** Пусть  $f$  — произвольная ограниченная на  $\Delta$  трансцендентная функция из  $E(Q)$ . Опеним коэффициенты  $f_{q_n}$  ряда Маклорена этой функции. Применяя Лемму 2, из (16), (30) и из ограниченности  $f$  на  $\Delta$  получим, что при  $r \geq 1$

$$|f_{q_n}| r^{q_n} \leq C^{q_n} \exp(\psi(\log r)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где постоянная  $C > 0$  не зависит от  $n$  и  $r$ . Из Теоремы А следует, что  $f$  является многочленом. Теорема доказана.

**Замечание 2.** В Теореме 1 условие (29) следует из условия

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ N(r) - \frac{1}{2} \psi^{-1}(r) \right] = -\infty, \quad (31)$$

где  $\psi^{-1}$  — обратная к функции  $\psi$ .

Подставляя в (28)  $t = \psi^{-1}(r)$  имеем  $\tau_\psi(r) \geq r\psi^{-1}(r) - r$  для  $r > 0$ , так что (31) влечет (29).

**Предложение 1.** Пусть  $\Delta$  — угол Жордана из Леммы 2,  $Q$  — подпоследовательность натуральных чисел с ограниченной функцией  $N$ . Тогда применима Теорема 1.

**Доказательство.** Из ограниченности  $N$  следует ограниченность функции  $V(r; s, q)$  для  $r > 0$ . Поэтому можем применить Теорему 1, положив в ней, например,  $\psi(r) = r^2 + C_1$ , где  $C_1 > 0$  — достаточно большая постоянная.

**Предложение 2.** Пусть  $\Delta$  — угол Жордана из Леммы 2,  $Q$  — подпоследовательность натуральных чисел, с неограниченной функцией  $N$ , удовлетворяющей следующим условиям а) и б) :

$$а) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{l(r) \log r} < 1, \quad (32)$$

где  $l$  — медленно изменяющаяся и убывающая к нулю на  $[0, \infty)$  функция, удовлетворяющая (4), а функция  $l(r) \log r$  — вогнутая на  $[0, \infty)$  и  $\frac{r}{l(r) \log r} \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$ ;

б) существуют постоянные  $s > 1$ ,  $q > 1$ ,  $C_1 \in (0, 2)$  и  $C_2$  такие, что

$$\nu^{-1}(r) \geq r + \theta(se^r)l^{-1}\left(\frac{\theta(se^r)}{\pi q}\right) + C_2, \quad \text{при } r \geq 0, \quad (33)$$

где  $l^{-1}$ ,  $\nu^{-1}$  — обратные к функциям  $l(r)$  и  $\nu(r) = C_1 l(r) \log r$  соответственно.

Тогда применима Теорема 1.

**Доказательство.** Поскольку функция  $N$  неограничена, то из (32) следует, что  $l(r) \log r \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Из вогнутости функции  $l(r) \log r$  на  $[0, +\infty)$  следует, что она возрастает к бесконечности на  $[0, +\infty)$ . Замечая еще, что функция  $r/\log r$  возрастает к бесконечности на  $[e, +\infty)$ , получим, что функция  $rl(r)$  также возрастает к бесконечности на  $[e, +\infty)$ . Следовательно, в Леммах 1, 2 можем выбрать  $l$  как в (32). Из условия  $\frac{r}{l(r) \log r} \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$  следует (27). Из (32) и Замечания 2 следует (29), а из (33) и Замечания 1 следует (30). Теперь можем применить Теорему 1. Доказательство завершено.

**Следствие.** Пусть подпоследовательность  $Q$  натуральных чисел и угол Жордана  $\Delta$  удовлетворяют одному из условий :

- 1)  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log \log \log r} < \frac{1}{2\beta}$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \theta(r) \exp(r^\beta) > 0$ ,  $\beta > 0$ ;
- 2)  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log \log r} < \frac{1}{2\beta}$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \theta(r) r^\beta > 0$ ,  $\beta > 0$ ;
- 3)  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{(\log r)^{1/\beta}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1+(1-\beta^{-1})^2} \left(\frac{2C}{\pi}\right)^{1/\beta}$ ,  
 $\theta(r)(\log r)^{\beta-1} \geq C$ , при  $r \geq e$ ,  $\beta > 1$ ,  $C > 0$ .

Тогда произвольная ограниченная на  $\Delta$  функция из  $E(Q)$  является постоянной.

Следствие легко вытекает из Предложений 1 и 2 соответственно ограниченности и неограниченности функции  $N$ .

Отметим, что Теорема 1 обобщает и усиливает имевшиеся ранее результаты о единственности из работы [3], в которых вместо функции  $N$  использовалась

функция  $n(r) : n(r)$  – число членов последовательности  $Q$ , не превосходящих числа  $r$ . В [3] имеются также некоторые результаты о точности Теоремы 1.

Теорема 1 легко обобщается на случай целых векторно-значных функций. Пусть  $X$  – комплексное пространство Фреше, т. е. локально выпуклое (комплексное) топологическое пространство, топология которого задается полной и инвариантной метрикой (см. [10], [11]). Пусть  $E(Q, X)$  – множество всех голоморфных отображений из  $\mathbb{C}$  в  $X$ , имеющих лакунарные степенные ряды вида (1) с коэффициентами из  $X$ .

**Теорема 2.** Для любого комплексного пространства Фреше  $X$  справедлива Теорема 1, если в ней множество  $E(Q)$  заменить на  $E(Q, X)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in E(Q, X)$  и  $x^*$  – произвольный линейный непрерывный функционал над  $X$ . Тогда целая функция  $x^*(f)$  принадлежит  $E(Q)$  и удовлетворяет Теореме 1. Поэтому имеем  $x^*(f(z)) = x^*(f(0))$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ . Поскольку линейные непрерывные функционалы над  $X$  разделяют точки пространства  $X$ , то получим, что  $f(z) = f(0)$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ . Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen", Math. Z., Bd. 29, S. 549 – 640, 1929.
2. A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", Proc. London Math. Soc. (3), vol. 2, pp. 286 – 296, 1952.
3. В. А. Мартиросян, "О целых функциях, представимых лакунарными степенными рядами и ограниченных на угле Жордана", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, № 3, стр. 280 — 300, 1986.
4. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.
5. R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
6. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
7. P. Dienes, Taylor Series, Clarendon Press, Oxford, 1931.
8. С. Мандельброт, Примакающие Ряды. Регуляризация Последовательностей. Применения. М., Иностранная Литература, 1955.
9. J. M. Anderson, K. G. Binmore, "On entire functions with gap power series", Glasgow Math. J., vol. 12, no. 2, pp. 79 – 97, 1971.
10. У. Рудин, Функциональный Анализ, М., Мир, 1975.
11. Х. Шефер, Топологические Векторные Пространства, М., Мир, 1971.

16 Мая 1995

Ереванский государственный Университет,  
Институт математики  
Национальной Академии Наук Армении



# О РАВНОМЕРНО-КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ НА МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕМАНА

В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

Пусть  $\Omega$  – односвязная область из конечной комплексной плоскости, содержащая начало координат,  $E \subset \Omega$  – множество Карлемана без внутренних точек. В работе доказывается, что произвольная непрерывная на  $E$  функция допускает равномерно-касательную аппроксимацию функциями, голоморфными в  $\Omega$  и представимыми в окрестности начала координат степенными рядами с лагунами произвольной нулевой плотности. Рассмотрены два приложения к теории граничных свойств аналитических функций.

## §0. ВВЕДЕНИЕ

В теории комплексных приближений и ее приложениях очень важна роль множеств Карлемана (см. [1], [2]). Пусть  $\Omega$  – область из расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$  с непустой границей  $\partial\Omega \neq \emptyset$ ,  $E$  – (относительно) замкнутое собственное подмножество из  $\Omega$ ,  $H(\Omega)$  – множество всех голоморфных в  $\Omega$  функций. Замкнутое собственное подмножество  $E \subset \Omega$  называется множеством Карлемана, если для любой непрерывной на  $E$  и голоморфной на множестве ее внутренних точек  $E^0$  функции  $f$  и для любой непрерывной на  $E$  функции  $\varepsilon > 0$  существует функция  $g \in H(\Omega)$  такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{для } z \in E. \quad (1)$$

Примеры множеств Карлемана для случая, когда  $\Omega = \mathbb{C}$ , впервые были найдены в 1927 г. Т. Карлеманом [3] и в 1937 г. А. Рот [4]. Дальнейшие исследования,

---

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным при частичной поддержке Гранта № MVK000 из Международного Научного Фонда.

проведенные в работах М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, Н. У. Аракеляна, П. М. Готье, А. А. Нерсисяна и других авторов, привели к характеристике этих множеств (см. [5] – [9]). Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем некоторые понятия.

Для произвольных множеств  $A, B$  из  $\bar{\mathbb{C}}$  обозначим через  $\rho(A, B)$  сферическое расстояние между ними

$$\rho(A, B) = \inf \left\{ \frac{|z - \zeta|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |\zeta|^2}} : z \in A, \zeta \in B \right\}.$$

Для каждого числа  $\varepsilon > 0$  положим

$$V_\varepsilon(\partial\Omega) = \{z \in \Omega : \rho(z, \partial\Omega) < \varepsilon\}$$

$\varepsilon$  – окрестность границы области  $\Omega$ .

**Определение 1.** Пусть  $F$  – компактное подмножество из  $\bar{\mathbb{C}}$ ,  $z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus F$ , и пусть  $\gamma$  – непрерывное отображение полуоткрытого интервала  $[0, 1)$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ , для которого

$$\gamma(0) = z, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \rho(F, \gamma(t)) = 0.$$

Тогда мы скажем, что  $\gamma$  соединяет  $z$  с  $F$ .

**Определение 2.** Произвольное (относительно) замкнутое подмножество  $E \subset \Omega$  называется  $K$ -множеством ( $E \in (K)$ ), если каждой точке  $z \in \Omega \setminus E$  соответствует непрерывная кривая  $\gamma_z \subset \Omega \setminus E$  такая что :

- а)  $\gamma_z$  соединяет  $z$  с  $\partial\Omega$  и
- б) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что при  $z \in V_\delta(\partial\Omega)$  следует  $\gamma_z \subset V_\varepsilon(\partial\Omega)$ .

Отметим, что свойство множества  $E$  быть  $K$ -множеством допускает равносильную переформулировку. Пусть  $\Omega^* = \Omega \cup \{\infty\}$  – одноточечная компактификация Александрова области  $\Omega$ . Тогда включение  $E \in (K)$  означает, что множество  $\Omega^* \setminus E$  связно и локально-связно в точке  $\infty$ .

**Определение 3.** Произвольное (относительно) замкнутое подмножество  $E \subset \Omega$  принадлежит классу  $(A)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta \in (0, \varepsilon)$  такое, что каждая компонента связности множества  $E^0$  может пересекаться только с одним из множеств  $V_\delta(\partial\Omega)$  и  $\Omega \setminus V_\delta(\partial\Omega)$ .

Полная характеристика множеств Карлемана дается следующей теоремой.

**Теорема А.** Произвольное (относительно) замкнутое подмножество  $E \subset \Omega$  является множеством Карлемана тогда и только тогда, когда  $E \in (K) \cap (A)$ .

В этой статье исследуются некоторые вопросы о возможности равномерно-касательных приближений на множествах Карлемана голоморфными функциями, представимыми в окрестности нуля лакунарными степенными рядами.

Для произвольного множества  $e$  из конечной комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  будем обозначать через  $\bar{e}$ ,  $\partial e$  и  $e^0$  соответственно его замыкание, границу и внутренность в  $\mathbb{C}$ . Пусть  $C(e)$  – множество всех непрерывных на  $e$  комплекснозначных функций. Для подпоследовательности  $Q = \{q_n\}_1^\infty$  натуральных чисел  $N$  будем обозначать через  $\Delta(Q)$  ее плотность :

$$\Delta(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n}.$$

Основным результатом статьи является следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{C}$  – односвязная область, содержащая начало координат,  $E \subset \Omega$  – множество Карлемана, для которого  $E^0 = \emptyset$ . Для любой подпоследовательности  $Q \subset N$  с плотностью  $\Delta(Q) = 1$  и произвольных функций  $f$  и  $\epsilon > 0$  из  $C(E)$  существует функция  $g \in H(\Omega)$ , представимая в виде

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\} \quad (2)$$

и удовлетворяющая условию (1).

**Замечание.** В Теореме 1, вообще говоря, невозможно понизить плотность последовательности  $Q$ . Это утверждение легко следует из соответствующего утверждения относительно равномерных приближений многочленами с пропусками [10]. Отметим также, что некоторые случаи, когда в Теореме 1 возможно понизить плотность, были исследованы в статье [11].

## §1. ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Для компакта  $e \subset \mathbb{C}$  пусть  $A(e)$  – банахово пространство всех непрерывных на  $e$  и голоморфных на его внутренней комплекснозначных функций с нормой  $\|f\| = \sup |f|(e)$ . Положим

$$D_r = \{z: |z| < r\} \quad \text{для} \quad 0 < r < +\infty.$$



**Лемма.** Пусть  $K \subset \mathbb{C}$  — компакт со связным дополнением  $\mathbb{C} \setminus K$  и  $0 \in K^0$ . Пусть  $Q \subset \mathbb{N}$  — подпоследовательность с плотностью  $\Delta(Q) = 1$ , а  $f$  — произвольная функция из  $C(K) \cap H(\overline{K^0})$ , представимая в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad f_n = 0 \quad \text{для } n \notin Q \cup \{0\}.$$

Тогда для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует многочлен

$$p(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n, \quad c_n = 0 \quad \text{для } n \notin Q \cup \{0\} \quad (3)$$

такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{при } z \in K.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\pi(Q)$  подпространство для  $A(K)$ , порожденное всеми многочленами вида (3). Мы должны доказать, что  $f \in \pi(Q)$ . Согласно теоремам Хана-Банаха и Ф. Риса достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля  $\mu$  на  $\partial K$  из выполнения соотношений

$$\int_{\partial K} z^n d\mu(z) = 0, \quad n \in Q \cup \{0\} \quad (4)$$

следует условие

$$\int_{\partial K} f(z) d\mu(z) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим преобразование Коши

$$G(t) = \int_{\partial K} \frac{d\mu(z)}{t - z}, \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \partial K.$$

Функция  $G \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \partial K)$ . С учетом соотношений (4) в окрестности бесконечности

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-p_n-1} \int_{\partial K} z^{p_n} d\mu(z), \quad |t| > R, \quad (6)$$

где  $R = \max\{|\zeta| : \zeta \in K\}$ ,  $P = \{p_n\}_1^{\infty}$  — подпоследовательность, дополнительная к  $Q = \{q_n\}_1^{\infty}$  относительно  $\mathbb{N}$ . Покажем, что ряд (6) сходится для всех таких  $t$ ,  $|t| > r$ , где  $r = \min\{|\zeta| : \zeta \in \overline{K^0}\}$ . В самом деле, поскольку  $G \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \partial K)$  и  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$  связно, то по (6) этот ряд аналитически продолжается на  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ . С другой стороны, из связности  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$  и включения  $\partial K^0 \subset \partial K$  следует, что на каждой

окружности  $\partial D_s$ ,  $s > r$  найдется открытая дуга положительного раствора  $\theta(s)$ , содержащаяся в  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ . Однако из условия  $\Delta(Q) = 1$  следует

$$\Delta(P) = 1 - \Delta(Q) = 0 < \frac{\theta(s)}{2\pi}, \quad s > r.$$

Следовательно, если бы радиус сходимости  $s$  ряда (6) удовлетворял условию  $s > r$ , то по теореме Фабри-Поля [12] на каждой открытой дуге окружности  $\partial D_s$ , имеющей раствор  $\theta(s)$ , этот ряд имел бы хоть одну особую точку. Полученное противоречие показывает, что  $s \leq r$ , т. е. ряд (6) сходится при  $|t| > r$ .

Обозначим через  $G_1(t)$ ,  $|t| > r$ , сумму ряда (6). Поскольку функции  $G(t)$ ,  $G_1(t)$  совпадают для  $|t| > R$  и  $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$  — связно, то по теореме единственности аналитических функций они будут совпадать для  $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ . Поэтому, с учетом связности  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K^0}$ , по теореме единственности для преобразования Коши ([13], стр. 69) найдем, что мера  $\mu$  сосредоточена на  $\partial \overline{K^0}$ . Следовательно, применяя еще раз теорему единственности аналитических функций, получим

$$G(t) = G_1(t) \quad \text{для } t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K^0}. \quad (7)$$

В условиях леммы существует открытое множество  $U$  такое, что  $\overline{K^0} \subset U$  и  $f \in H(U)$ . Поэтому найдется спрямляемый контур  $\Gamma \subset U \setminus \overline{K^0}$  с  $\text{Ind}_\Gamma(0) = 1$  такой, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{для } z \in \overline{K^0}.$$

Отсюда, с учетом (7) имеем

$$\int_{\partial \overline{K^0}} f(z) d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{K^0}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) G_1(\zeta) d\zeta.$$

Если теперь взять окружность  $\gamma = \{\zeta: |\zeta| = \rho\} \subset U$  такую, что  $\rho > r$ , то используя интегральную теорему Коши, получим

$$\int_{\partial \overline{K^0}} f(z) d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) G_1(\zeta) d\zeta.$$

Степенные ряды функций  $f$  и  $G_1$  абсолютно и равномерно сходящиеся при  $\zeta \in \gamma$ .

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) G_1(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-p_k-1} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{q_n} b_{p_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \zeta^{q_n - p_k - 1} d\zeta = 0,$$

так что

$$\int_{\partial K^0} f(z) d\mu(z) = 0.$$

Лемма доказана.

Приведенная лемма является лакунарным аналогом известной теоремы Рунге о приближении многочленами. Отметим, что частный случай леммы, когда  $f \in H(K)$ , установлен в работе [14] И. Кореваара и М. Диксона.

## §2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В доказательстве Теоремы 1 мы следуем аппроксимационной схеме, примененной в работе [5] М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, с внесением в нее определенных изменений. Без ограничения общности можем предполагать, что функция  $\varepsilon$  является функцией от  $\rho(z, \partial\Omega)$  и убывает при  $\rho(z, \partial\Omega) \rightarrow 0$ . Для каждого  $r \in (0, \rho(0, \partial\Omega))$  положим

$$A_r = \{z \in \Omega: \rho(z, \partial\Omega) \geq r\}.$$

Поскольку  $E \in (K)$ , то каждому  $r$  соответствует  $r^* \in (0, r)$  такое, что любую точку  $z$  множества  $(\Omega \setminus E) \cap (\Omega \setminus A_{r^*})$  можно соединить с  $\partial\Omega$  дугой  $\gamma_z \subset \mathbb{C} \cap (\Omega \setminus E) \cap (\Omega \setminus A_r)$ . Пусть  $B_r$  — множество всех  $z$  из  $(\Omega \setminus E) \cap (\Omega \setminus A_r)$ , которые можно соединить с  $\partial\Omega$  только такими дугами из  $\Omega \setminus E$ , которые пересекают  $A_r$ . Положим

$$\Omega_r = A \cup \overline{B_r}.$$

Отметим, что  $\Omega_r \subset \mathbb{C}$  — компакт и  $\Omega_r \subset A_{r^*}$ . Из определения  $\Omega_r$  с учетом односвязности  $\Omega$  в  $\mathbb{C}$  легко следует, что  $\Omega \setminus \Omega_r$  связно, поэтому  $\mathbb{C} \setminus \Omega_r$  — также связно. Отсюда с учетом условия  $E \in (K)$  следует, что для каждого  $r$  множество  $E \cap \Omega_r$  — компакт из  $\mathbb{C}$  со связным дополнением  $\mathbb{C} \setminus (E \cap \Omega_r)$ .

Выберем последовательность  $\{r_n\}_0^\infty$  положительных чисел так, что  $r_0 < \rho(0, \partial\Omega)$  и  $r_n < 2^{-1} (r_{n-1}^*)^*$  при  $n = 1, 2, \dots$ ; ясно, что  $r_n$  убывает к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Выберем также последовательности чисел  $\{s_n\}_0^\infty$  и  $\{t_n\}_0^\infty$  так что  $r_n^* < s_n <$



$< t_n < r_{n+1}$  при  $n = 0, 1, \dots$  и положим

$$F_{t_n} = \Omega_{t_{n-1}} \cup [E \cap (\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}})], \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что  $F_{t_n}$  — компакт из  $\mathbb{C}$ . Далее,  $\Omega \setminus F_{t_n}$  связно (значит  $\mathbb{C} \setminus F_{t_n}$  также связно), поскольку

$$\Omega \setminus F_{t_n} = [(\Omega \setminus \Omega_{t_{n-1}}) \cap (\Omega \setminus E)] \cup (\Omega \setminus \Omega_{t_n}).$$

Отметим, наконец, что множества  $F_{t_n} \cap (\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{r_n})$  и  $E \cap (\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{r_n})$  совпадают, так что они оба не имеют внутренности и, следовательно, замыкание внутренности множества  $F_{t_n}$  содержится в  $\Omega_{r_n}$ .

Построим по индукции подходящую последовательность  $\{p_n\}_0^\infty$  многочленов вида (3). Согласно Теореме 1 работы [10] можно найти многочлен  $p_0$  вида (3) такой, что

$$|f(z) - p_0(z)| < \frac{\varepsilon(t_0)}{2^5} \quad \text{при } z \in E \cap \Omega_{t_0}. \quad (8)$$

Предположим теперь, что многочлены  $p_0, p_1, \dots, p_n$  вида (3) построены так, что

$$|p_k(z)| < 2^{-k} \quad \text{при } z \in A_{r_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^n p_k(z)| < \begin{cases} \frac{\varepsilon(t_k)}{2^{k+2}} & \text{при } z \in E \cap (\Omega_{t_k} \setminus \Omega_{t_{k-1}}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{\varepsilon(t_n)}{2^{n+5}} & \text{при } z \in E \cap (\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}}). \end{cases} \quad (10)$$

Построим многочлен  $p_{n+1}$  вида (3). По теореме С. Н. Мергеляна существует многочлен  $q_{n+1}$  такой, что

$$|f(z) - \sum_{k=0}^n p_k(z) - q_{n+1}(z)| < \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+6}} \quad \text{при } z \in E \cap \Omega_{t_{n+1}}. \quad (11)$$

Далее, по лемме Урысона существует функция  $\psi_{n+1} \in C(F_{t_{n+1}})$  такая, что  $0 \leq \psi_{n+1}(z) \leq 1$  для  $z \in F_{t_{n+1}}$ , причем  $\psi_{n+1}(z) = 0$  при  $z \in F_{t_{n+1}} \cap A_{r_n}$  и  $\psi_{n+1}(z) = 1$  при  $z \in F_{t_{n+1}} \setminus \Omega_{t_n}$ . Функция  $q_{n+1}\psi_{n+1}$  принадлежит  $C(F_{t_{n+1}})$  и голоморфна на замыкании внутренности множества  $F_{t_{n+1}}$ . Поскольку  $\mathbb{C} \setminus F_{t_{n+1}}$  связно, согласно лемме найдем многочлен  $p_{n+1}$  вида (3) такой, что

$$|(q_{n+1}\psi_{n+1})(z) - p_{n+1}(z)| < \delta_{n+1} \quad \text{при } z \in F_{t_{n+1}}.$$

Следовательно, при подходящем выборе числа  $\delta_{n+1} > 0$  отсюда, в частности имеем (полагая  $\Omega_{t_{-1}} = \emptyset$ ):

$$|p_{n+1}(z)| < 2^{-n-1} \quad \text{при } z \in A_{r_n};$$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n+1} p_k(z)| < \frac{\varepsilon(t_k)}{2^{k+2}} \quad \text{при } z \in E \cap (\Omega_{t_k} \setminus \Omega_{t_{k-1}}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n+1} p_k(z)| < \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+6}} \quad \text{при } z \in E \cap (\Omega_{t_{n+1}} \setminus \Omega_{t_n}).$$

Кроме того, при  $z \in E \cap (\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}})$  из (10), (11) получим:

$$\begin{aligned} |f(z) - \sum_{k=0}^{n+1} p_k(z)| &\leq |f(z) - \sum_{k=0}^n p_k(z)| + \delta_{n+1} + |(q_{n+1}\psi_{n+1})(z)| < \\ &< 2|f(z) - \sum_{k=0}^n p_k(z)| + \delta_{n+1} + \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+6}} < \frac{\varepsilon(t_n)}{2^{n+2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Мы доказали, что многочлен  $p_{n+1}$  вида (3) удовлетворяет оценкам (9), (10) с заменой в них  $n$  на  $n+1$ , так что последовательность полиномов  $\{p_n\}_0^\infty$  вполне построена.

Поскольку  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то согласно (9) ряд  $g(z) = \sum_{k=0}^\infty p_k(z)$  сходится локально-равномерно в  $\Omega$ . Следовательно, его сумма  $g \in H(\Omega)$  и в окрестности нуля представляется степенным рядом вида (2). Пусть  $z \in E$ , тогда  $z \in E \cap (\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}})$  при некотором  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Поэтому, с учетом (10), (12), получим

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq |f(z) - \sum_{k=0}^n p_k(z)| + \\ &+ \left| \sum_{k=n}^\infty p_{k+1}(z) \right| < \frac{\varepsilon(t_n)}{2^{n+6}} + \sum_{k=n}^\infty \frac{\varepsilon(t_k)}{2^{k+2}} < \varepsilon(t_n) < \varepsilon(\rho(z, \partial\Omega)). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### §3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Теорему 1 можно использовать для изучения некоторых свойств лакунарных степенных рядов. Мы ограничимся двумя ее приложениями к теории граничных свойств аналитических функций.

**Теорема 2.** Пусть  $Q \subset \mathbb{N}$  – подпоследовательность с плотностью  $\Delta(Q) = 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  – односвязная область и  $0 \in \Omega$ ,  $\{\alpha_n(t)\}_0^\infty$  – счетное семейство взаимно непересекающихся простых граничных кривых из  $\Omega$ ,  $f$  – произвольная функция из  $C(\bigcup_1^\infty \alpha_n)$ . Тогда существует функция  $g \in H(\Omega)$ , представляемая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и такая, что для каждого  $n$

$$f(\alpha_n(t)) - g(\alpha_n(t)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

**Теорема 3.** Пусть  $Q \subset \mathbb{N}$  – подпоследовательность, удовлетворяющая условию  $\Delta(Q) = 1$ ,  $f$  – произвольная функция из  $C(D_1)$ ,  $F \subset \partial D_1$  – множество первой категории,  $\{L(\theta)\}$  – семейство взаимно непересекающихся граничных кривых, оканчивающихся в точках  $e^{i\theta} \in F$ , которое гомеоморфно семейству радиальных отрезков  $\{\lambda(\theta)\}$ , оканчивающихся в точках  $F$  (т.е. существует гомеоморфизм  $\varphi$  из  $\overline{D}_1$  на себя, который оставляет неподвижной каждую точку на  $\partial D_1$  и такой, что  $L(\theta) = \partial(\lambda(\theta))$ ). Тогда существует функция  $g \in H(D_1)$ , представляемая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и такая, что для каждого  $e^{i\theta} \in F$

$$f(z) - g(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow e^{i\theta} \text{ вдоль } L(\theta).$$

Теорема 2 является лакунарным аналогом хорошо известного результата Ф. Багемила и В. Сейделя (см. [15], [16] и обобщение в [17], [18]). Теорема 3 обобщает и усиливает известный результат, восходящий к Ф. Багемилу и В. Сейделу [16] и В. Рудину [19] (см. также [20], стр. 163). Обе Теоремы 2,3 доказываются точно так же, как их частные случаи (когда  $Q = \mathbb{N}$ ) с единственным различием, что вместо теоремы А используется Теорема 1 (подробности см. в [18]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. J. Fuchs, *Theorie de l'approximation des Fonctions d'une Variable Complexe*, Les Presses de l'Universite de Montreal, 1968.
2. Д. Гайер, *Лекции по Теории Аппроксимации*, М., Мир, 1986.
3. T. Carleman, "Sur un theoreme de Weierstrass," *Ark. Mat. Astr. Fys.*, Bd. 20, no. 4, s. 1 – 5, 1927.
4. A. Roth, "Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Functionen", *Comm. Math. Helv.*, Bd. 11, s. 77 — 125, 1938.
5. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, "Об одной задаче Карлемана", *ДАН СССР*, т. 23, № 8, стр. 746 — 748, 1939.
6. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного



- переменного", Успехи мат. наук, т. 7, № 2 (48), стр. 31 – 122, 1952.
7. Н. У. Аракелян, "Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 4–5, стр. 273 – 285, 1968.
  8. P. Gauthier, "Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disk", Изв. АН ССР, Математика, т. 4, № 5, стр. 319 — 326, 1969.
  9. А. А. Персесян, "О множествах Карлемана", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, № 6, стр. 465 — 471, 1971.
  10. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Матем. сб., т. 120, № 4, стр. 451 – 472, 1983.
  11. В. А. Мартиросян, Г. В. Арутюнян, "О равномерно-касательном приближении лакунарными степенными рядами на кривых комплексной плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 31 – 39, 1993.
  12. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
  13. Т. Гамелин, Равномерные алгебры, М., Москва, 1973.
  14. M. Dixon, J. Korevaar, "Approximation by lacunary polynomials," Nederl. Akad. Wetensch. Proced. Ser. A, vol. 80, no. 3, pp. 176 — 194, 1977.
  15. F. Bagemihl, W. Seidel, "Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination of analytic and meromorphic functions," Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 39, pp. 1251 — 1258, 1953.
  16. F. Bagemihl, "Some boundary properties of analytic functions", Math. Zeit., Bd. 61, s. 186 — 199, 1954.
  17. W. Kaplan, "Approximation by entire functions", Mich. Math. J., vol. 3, no. 1, pp. 43 – 52, 1955 – 1956.
  18. P. Gauthier, W. Seidel, "Some applications of Arakelian's approximation theorems to the theory of cluster sets", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6 № 6, стр. 458 — 464, 1971.
  19. W. Rudin, "Radial cluster sets of analytic functions," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 60, p. 455, 1954.
  20. E. F. Collingwood, A. J. Lohwater, The Theory of Cluster Sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

16 Марта 1995

Ереванский государственный университет  
Институт математики  
Национальной Академии Наук Армении

# О РАВНОМЕРНО-КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ НА МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕМАНА. II

Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

В статье исследуется вопрос о возможности равномерно-касательной аппроксимации лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана с внутренними точками произвольной односвязной области из комплексной плоскости.

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Статья продолжает начатое в работе В. А. Мартиросяна [1] изучение аппроксимативных свойств лакунарных степенных рядов. В указанной работе исследовались вопросы о возможности равномерно-касательной аппроксимации на произвольных множествах Карлемана без внутренних точек. В настоящей статье результаты работы [1] обобщаются на случай множеств Карлемана с непустой внутренностью. Определение множеств Карлемана и их описание см. [2] и [3].

Чтобы сформулировать основной результат статьи введем некоторые обозначения. Пусть  $N$  – множество натуральных чисел,  $\mathbb{C}$  – комплексная плоскость. Обозначим через  $\Delta(Q)$  плотность подпоследовательности  $Q = \{q_n\}_1^\infty \subset N$  :

$$\Delta(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} n/q_n.$$

Для произвольного множества  $e \subset \mathbb{C}$  обозначим через  $e^0$ ,  $\partial e$ ,  $\bar{e}$  и  $e^c$ , соответственно, внутренность, границу, замыкание и дополнение в  $\mathbb{C}$ . Для области  $\Omega$  из расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$  обозначим через  $H(\Omega)$  множество всех голоморфных в  $\Omega$  функций. Основным результатом статьи является следующая

---

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным при частичной поддержке второго автора Грантом № MVK000 из Международного Научного Фонда.

**Теорема 1.** Пусть  $Q \subset \mathbb{N}$  – подпоследовательность с плотностью  $\Delta(Q) = 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  – односвязная область с  $0 \in \Omega$ ,  $E \subset \Omega$  – множество Карлемана, удовлетворяющее условиям:

а)  $0 \notin E^0$  и  $0 \notin \partial E_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\{E_n\}_1^\infty$  – компоненты внутренности  $E^0$ ;

б) для произвольного компакта  $F \subset \Omega$  множество индексов  $n$ , для которых  $F \cap E_n \neq \emptyset$ , конечно.

Тогда для произвольных функций  $f$  и  $\varepsilon$ , где  $f$  – непрерывна на  $E$ , голоморфна на  $E^0$  и  $\varepsilon$  – положительна и непрерывна на  $E$ , существует функция  $g \in H(\Omega)$ , имеющая в окрестности нуля разложение

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\} \quad (1)$$

и такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{при} \quad z \in E. \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы дано в §2. В §1 приведены необходимые вспомогательные результаты.

## §1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть  $A(E)$  – банахово пространство всех непрерывных на компакте  $E \subset \mathbb{C}$  и голоморфных на  $E^0$  комплекснозначных функций с нормой  $\|f\| = \sup |f|(E)$ . Положим

$$D_r = \{z: |z| < r\} \quad \text{для} \quad 0 < r < +\infty; \quad D_0 = \emptyset.$$

Пусть  $\mu$  – комплексная мера Бореля на компакте  $E \subset \mathbb{C}$ , а  $|\mu|$  – ее вариация. Обозначим через  $G$  ее преобразование Коши

$$G(t) = \int_E \frac{d\mu(z)}{t - z}, \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E.$$

Функция  $G \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$ , причем  $G(\infty) = 0$ .

**Лемма 1.** Пусть  $E \subset \mathbb{C}$  – компакт со связным дополнением  $E^c$ ,  $D_r$  – максимальный круг, содержащийся в  $E^0$ ,  $\mu$  – комплексная мера Бореля на  $\partial E$ , и пусть  $G$  – ее преобразование Коши. Если существует функция  $G_1 \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_r})$  такая, что

$$G(t) = G_1(t) \quad \text{при} \quad t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad (3)$$



то равенство (3) выполняется для любого  $t \in \partial E \setminus \overline{D}_r$ , для которого сходится интеграл

$$\int_{\partial E} \frac{d|\mu|(z)}{|t-z|}.$$

В следующей Лемме 2  $E \subset \mathbb{C}$  — компакт со связным дополнением  $E^c$ ,  $D_r$  — максимальный круг, содержащийся в  $E^0$  и  $s$  — компонента внутренности  $E^0$  такая, что  $\partial s \cap \partial D_r = \emptyset$ , комплексная мера Бореля  $\mu$  будет сконцентрирована на  $\partial E$ . Пусть  $G$  — преобразование Коши комплексной меры Бореля  $\mu$ . Разложим  $\mu$  в сумму мер  $\mu = h_c + \sigma_c$ , где  $h_c$  абсолютно непрерывна, а  $\sigma_c$  сингулярна по произвольной гармонической мере  $\lambda_a$ , определенной на  $\partial E$  для  $a \in s$ .

**Лемма 2.** Предположим, что преобразование Коши меры  $\mu$  удовлетворяет (3), где функция  $G_1 \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_r)$ . Тогда

$$\int_{\partial E} \frac{d\sigma_c(z)}{t-z} = G_1(t) \quad \text{при } t \in (\overline{\mathbb{C}} \setminus E) \cup s. \quad (4)$$

Отметим, что в частном случае, когда  $D_r = \emptyset$ , Леммы 1,2 можно найти в [4], Леммы 5,7. В общем случае они доказываются аналогично этому частному случаю.

Мы скажем, что компакт  $E \subset \mathbb{C}$  удовлетворяет условию (C), если

- а) дополнение  $E^c$  компакта  $E$  связно ;
- б) 0 принадлежит внутренности  $E^0$  компакта  $E$ . Через  $E_i$  обозначим компоненты внутренности  $E^0$  и можем предположить, что  $0 \in E_1$  ;
- с)  $\partial E_1$  — гладкая кривая и  $\overline{E}_i \cap \overline{D}_r = \emptyset$  при  $i = 2, 3, \dots$ , где  $D_r$  — максимальный круг, содержащийся в  $E_1$ .

**Теорема 2.** Пусть  $Q \subset \mathbb{N}$  — подпоследовательность с плотностью  $\Delta(Q) = 1$ , и компактное множество  $E \subset \mathbb{C}$  удовлетворяет условию (C). Тогда произвольная функция  $f \in A(E)$ , имеющая представление (1), равномерно на  $E$  аппроксимируется полиномами вида

$$p(z) = \sum_{n=0}^m p_n z^n, \quad p_n = 0 \quad \text{при } n \notin Q \cup \{0\} \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть для произвольной комплексной меры Бореля  $\mu$  на  $\partial E$  справедливы соотношения

$$\int_{\partial E} z^n d\mu(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots (q_0 = 0). \quad (6)$$

В силу теоремы Хана-Банаха и Рисса достаточно доказать, что произвольная функция  $f \in A(E)$ , имеющая в нуле разложение вида (1), удовлетворяет условию

$$\int_{\partial E} f(z) d\mu(z) = 0. \quad (7)$$

При каждом фиксированном и достаточно большом по модулю  $t \in E^c$  равномерно по  $z \in \partial E$  сходится степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z/t)^n = (1 - z/t)^{-1}.$$

Интегрируя этот ряд по мере  $\mu$  и учитывая условия (6), получим

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n-1} \int_{\partial E} z^n d\mu(z),$$

где  $\{p_n\}_1^{\infty}$  — подпоследовательность, дополнительная к  $Q$  в  $\mathbb{N}$ . Так как  $G \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$ ,  $E^c$  связно и  $\{p_n\}_1^{\infty}$  имеет плотность нуль, то по теореме Фабри ([5], стр. 80) степенной ряд от  $1/t$  определяет функцию  $G_1 \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_r)$ . Следовательно, по теореме единственности аналитических функций, получим (3).

Разложим теперь меру  $\mu = h_{E_1} + \sigma_{E_1}$ , где  $h_{E_1}$  абсолютно непрерывна и  $\sigma_{E_1}$  сингулярна относительно любой гармонической меры на  $\partial E$ ; Возьмем  $a \in E_1$ .

По Лемме 2 имеем

$$\int_{\partial E} z^n dh_{E_1}(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots$$

и

$$\int_{\partial E} \frac{d\sigma_{E_1}(z)}{t - z} = G_1(t) \quad \text{при } t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad t \in E_1.$$

Аналогично,  $\sigma_{E_1} = h_{E_2} + \sigma_{E_2}$ , где  $h_{E_2}$  абсолютно непрерывна и  $\sigma_{E_2}$  сингулярна относительно любой гармонической меры на  $\partial E$ ; возьмем  $a \in E_2$ . По Лемме 2 имеем

$$\int_{\partial E} z^n dh_{E_2}(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots$$

и

$$\int_{\partial E} \frac{d\sigma_{E_2}(z)}{t-z} = G_1(t) \quad \text{при } t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad t \in E_1 \cup E_2.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} h_{E_k} + \sigma, \quad (8)$$

где ряд сходится по норме, определяемой полной вариацией, и

$$\int_{\partial E} z^n dh_{E_k}(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

и

$$\int_{\partial E} \frac{d\sigma(z)}{t-z} = G_1(t) \quad \text{при } t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k. \quad (10)$$

По теореме С. Н. Мергеляна [6] из (9) следует

$$\int_{\partial E} f(z) dh_{E_k}(z) = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Далее, из (6) и (9) имеем

$$\int_{\partial E} z^{q_n} d\sigma(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots$$

Из равенства (10) в силу Леммы 1, Лемм 1,4 из [4] следует, что мера  $\sigma$  сосредоточена на  $\partial E_1$ . Поэтому

$$\int_{\partial E_1} z^{q_n} d\sigma(z) = 0 \quad \text{при } n = 0, 1, \dots$$

Однако, так как  $\partial E_1$  — гладкая кривая и последовательность  $Q$  имеет плотность  $\Delta(Q) = 1$ , то согласно одному результату Кореваара и Диксона [7] получим

$$\int_{\partial E_1} f(z) d\sigma(z) = 0.$$

Отсюда, с учетом (8) и (11) следует (7). Теорема доказана.

## §2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для области  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$  обозначим через  $\rho(z, \partial\Omega)$  сферическое расстояние от точки  $z \in \Omega$  до границы  $\partial\Omega$ . Положим также

$$V_r(\partial\Omega) = \{z \in \Omega : \rho(z, \partial\Omega) < r\}, \quad 0 < r < +\infty.$$



**Доказательство.** Без ограничения общности можем считать, что  $\varepsilon$  является функцией от  $\rho(z, \partial\Omega)$  и убывает к нулю при  $\rho(z, \partial\Omega) \rightarrow 0$ . Поскольку  $E$  является множеством Карлемана, то для любого  $r \in (0, \rho(0, \partial\Omega))$  существует  $r^* \in (0, r)$  такое, что произвольную точку  $z \in E^c \cap V_{r^*}(\partial\Omega)$  можно соединить с  $\partial\Omega$  непрерывной кривой  $\gamma_z \subset E^c \cap V_{r^*}(\partial\Omega)$ . Далее из условия б) следует, что произвольная компонента множества  $E^0$  не пересекает одновременно кривые  $\alpha_r = \{z \in \Omega : \rho(z, \partial\Omega) = r\}$  и  $\alpha_{r^*} = \{z \in \Omega : \rho(z, \partial\Omega) = r^*\}$ . Для фиксированного  $r$  обозначим  $A = \Omega \setminus V_r(\partial\Omega)$ , и пусть  $B$  такое подмножество для  $E^c \cap A^c$ , все точки которого можно соединить с  $\partial\Omega$  только непрерывными кривыми, пересекающимися с  $A$ . Положим  $H_r = A \cup \overline{B}$  и обозначим через  $E_{i,r}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s(r)$  все компоненты множества  $E^0$ , для которых  $\overline{E}_{i,r} \cap H_r \neq \emptyset$ ; по условию б) число таких компонент конечно. Пусть теперь

$$\Omega_r = H_r \cup \left( \bigcup_{i=1}^{s(r)} \overline{E}_{i,r} \right)$$

Заметим, что  $\Omega_r^c$  связно. (см. [8]).

Выберем убывающую к нулю последовательность положительных чисел  $\{r_n\}_0^\infty$  ( $r_0 < \rho(0, \partial\Omega)$ ) так, чтобы  $r_n = (r_{n-1}^*)^*$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Положим  $\Omega_n = \Omega_{r_n}$ , и пусть

$$F_0 = E \cap \Omega_0, \quad F_n = \Omega_{n-1} \cup (E \cap (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1})) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots$$

Ясно, что  $F_n \subset \mathbb{C}$  — компакт и  $F_n^c$  связно; связность  $F_n^c$  следует из равенства

$$F_n^c = (\Omega_{n-1}^c \cap E^c) \cup \Omega_n^c, \quad n = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим множество

$$\overline{E^0} \cap (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}). \quad (12)$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в [8], получим, что каждая компонента  $K$  внутренности множества (12) является компонентой множества  $E^0$ , содержащейся в  $\Omega_n$ ; пересечение  $\overline{K} \cap \Omega_{n-1}$  содержит не более одной точки и число таких компонент конечно. Обозначим через  $K_{j,n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l(n)$ , компоненты внутренности множества (12), для которых  $K_{j,n} \cap \Omega_{n-1} = \emptyset$  и положим  $p_{j,n} = \overline{K}_{j,n} \cap \Omega_{n-1}$ . Покажем, что  $p_{j,n} \notin \partial D_r$ , где  $D_r$  — максимальный

круг, содержащийся в  $\Omega_{n-1}$ . В самом деле, с одной стороны из определения  $\Omega_{n-1}$  имеем  $\overline{K}_{j,n} \cap H_{r_{n-1}} = \emptyset$ ,  $j = 1, 2, \dots, l(n)$ . С другой стороны,  $\overline{K}_{j,n} \cap \left( \bigcup_{i=1}^{s(r_{n-1})} E_{i,r_{n-1}} \right) = \emptyset$ ,  $j = 1, 2, \dots, l(n)$ . Остается отметить, что из определения  $\Omega_{n-1}$  и условия b) следует

$$\partial D_r \subset H_{r_{n-1}} \cup \left( \bigcup_{i=1}^{s(r_{n-1})} E_{i,r_{n-1}} \right).$$

Построим по индукции подходящую последовательность многочленов  $\{p_j\}_0^\infty$  вида (5). Обозначим  $t_n = \min\{\rho(z, \partial\Omega) : z \in \Omega_n\}$ . Нулевой шаг. Положим  $f_0(z) = f(z)$  для  $z \in F_0$ . По Теореме 1 из [4] существует многочлен  $p_0$  вида (5) такой, что

$$|f_0(z) - p_0(z)| < \frac{\varepsilon(t_2)}{2^5}, \quad z \in F_0.$$

Предположим, что для  $j = 0, 1, \dots, n-1$  уже выбраны многочлены  $p_j$  вида (5), удовлетворяющие условиям

$$|f(z) - p_j(z)| < \begin{cases} \frac{\varepsilon(t_{j+1})}{2^{j+1}} & \text{при } z \in E \cap (\Omega_j \setminus \Omega_{j-1}), \\ \frac{\varepsilon(t_{j+2})}{2^{j+4}} & \text{при } z \in E \cap \partial\Omega_j \end{cases}$$

и

$$|p_j(z) - p_{j-1}(z)| < \frac{\varepsilon(t_{j+2})}{2^{j+5}}, \quad z \in \Omega_{j-1}.$$

Здесь положено  $\Omega_{-1} = \emptyset$  и  $p_{-1} = p_0$ .

Определим теперь многочлен  $p_n$ . Отметим сперва, что для указанных выше точек  $p_{j,n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l(n)$ , существует односвязная область  $G_{n-1}$  ( $\overline{G}_{n-1} \subset \Omega$ ) с гладкой границей  $\partial G_{n-1}$  такая, что

$$\Omega_{n-1} \subset G_{n-1} \cup \{p_{j,n} : j = 1, 2, \dots, l(n)\},$$

$$\overline{G}_{n-1} \cap \left( E \cap \left( \overline{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \right) \right) = \{p_{j,n} : j = 1, 2, \dots, l(n)\}$$

и  $p_{j,n} \notin \partial D_r$ , где  $D_r$  - максимальный круг, содержащийся в  $G_{n-1}$ . Положим  $f_n(z) = p_{n-1}(z)$  для  $z \in \overline{G}_{n-1}$ . Далее, аналогично [8] продолжим функцию  $f_n$  на  $\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}$  так, чтобы  $f_n \in A(\overline{G}_n \cup (E \cap (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1})))$  и

$$|f(z) - f_n(z)| < \begin{cases} \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+2}} & \text{для } z \in E \cap \left( \overline{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \right), \\ \frac{\varepsilon(t_{n+2})}{2^{n+5}} & \text{для } z \in E \cap \partial\Omega_n. \end{cases}$$

По Теореме 2 существует многочлен  $p_n$  вида (5) такой, что

$$|f_n(z) - p_n(z)| < \frac{\varepsilon(t_{n+2})}{2^{n+5}}, \quad z \in \overline{G}_n \cup (E \cap (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1})).$$

Отсюда имеем

$$|f(z) - p_n(z)| < \begin{cases} \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+1}} & \text{для } z \in E \cap (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}), \\ \frac{\varepsilon(t_{n+2})}{2^{n+4}} & \text{для } z \in E \cap \partial\Omega_n \end{cases} \quad (13)$$

и

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| < \frac{\varepsilon(t_{n+2})}{2^{n+5}}, \quad z \in \Omega_{n-1}, \quad (14)$$

так что многочлены  $\{p_n\}_0^\infty$  вида (5) построены.

Из (14) следует, что последовательность  $\{p_n\}_0^\infty$  локально равномерно в  $\Omega$  сходится к функции  $g \in H(\Omega)$ . Ясно, что  $g$  имеет в окрестности нуля разложение вида

(1). Если  $z \in E$ , то  $z \in \Omega_m \setminus \Omega_{m-1}$  для некоторого  $m$ . Для произвольного  $n > m$  имеем

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - p_m(z)| + \sum_{j=m+1}^n |p_j(z) - p_{j-1}(z)| + |p_n(z) - g(z)|.$$

Поэтому, учитывая (13), (14) и выбирая  $n$  достаточно большим, получим (2).

Теорема 1 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Мартиросян, "О равномерно-касательном приближении лакунарными степенными рядами на множествах Карлемана", в настоящем номере.
2. Н. У. Аракелян, "Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 4-5, стр. 273 - 286, 1968.
3. Д. Гайер, Лекции по Теории Аппроксимации, М., Мир, 1986.
4. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Матем. сб., т. 120, № 4, стр. 451 - 472, 1983.
5. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
6. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", Успехи мат. наук, т. 7, № 2 (48), стр. 31 - 122, 1952.
7. J. Korevaar, "Lacunary forms of Walsh's approximation theorems", Теория приближения функций, М., Наука, стр. 229 - 237, 1977.
8. P. Gauthier, "Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disk", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 4, № 5, стр. 319 - 326, 1969.



ВЕКТОРНОЗНАЧНЫЕ АНАЛОГИ  
ТЕОРЕМЫ ФАБРИ ОБ ОТНОШЕНИИ

Н. У. Аракелян, А. В. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

В настоящей работе установлены аналоги хорошо известной теоремы Фабри об отношении относительно особенностей степенных рядов с коэффициентами из некоторой комплексной банаховой алгебры.

Пусть  $X$  – комплексное банахово пространство,  $A$  – банахова алгебра с единицей  $e$ , а  $G(A)$  – множество обратимых элементов в  $A$ . Мы используем следующие обозначения :

$\sigma(a) = -$  спектр элемента  $a \in A$  ;

$\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a) = -$  резольвентное множество элемента  $a \in A$  ;

$r(a) = -$  спектральный радиус элемента  $a \in A$  ;

$\mathbb{N} = -$  множество натуральных чисел,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset A$ ,  $a_i a_j = a_j a_i$  для  $i, j \in \mathbb{N}_0$  и  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 a_1 \cdots a_n}{\lambda^{n+1}} \quad (1)$$

сходится при  $\lambda \neq 0$ , если  $r(a) = 0$ . Если же  $r(a) > 0$  и

$$\|a_n - a\| < r(a), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

то радиус сходимости ряда (1) равен  $r(a)$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_0 a_1 \cdots a_n\|^{1/n} = r(a). \quad (3)$$

При  $r(a) \neq 0$  все точки  $\lambda \in \sigma(a)$ ,  $|\lambda| = r(a)$  являются особыми точками ряда (1).

**Доказательство.** Положим  $b_k = a_k - a$  и заметим, что множество  $(b_k)_{k=0}^{\infty}$  также коммутативно. Для произвольного  $\varepsilon \in (0, 1)$  выберем  $n_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $\|b_k\| < \varepsilon$  для  $k > n_0$ . Имеем

$$\prod_{k=n_0+1}^n (a + b_k) = \sum_{k=0}^{n-n_0} a^k d_{n-n_0-k},$$

где  $d_k = \sum b_{j_1} \dots b_{j_k}$  для  $k = 1, 2, \dots, n - n_0$ ,  $d_0 = 1$ , и сумма берется по всем подмножествам  $\{j_1, \dots, j_k\}$  множества  $\{k\}_{k=n_0+1}^n$ . Легко видеть, что

$$\|d_k\| \leq C_{n-n_0}^k \varepsilon^k. \quad (4)$$

Пусть  $n_1 > n_0$  выбрано так, что  $\|a^p\| < (r(a) + \varepsilon)^p$  для  $p > n_1$ . Тогда с учетом (4), имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-n_0} a^k d_{n-n_0-k} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n_1} C_{n-n_0}^k \varepsilon^{n-n_0-k} \|a\|^k + \sum_{k=n_1+1}^{n-n_0} C_{n-n_0}^k (r(a) + \varepsilon)^k \varepsilon^{n-n_0-k} \leq M_\varepsilon (r(a) + 2\varepsilon)^n.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a_0 a_1 \dots a_n\|^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a_{n_0+1} \dots a_n\|^{1/n} \leq r(a) + 2\varepsilon.$$

Откуда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a_0 a_1 \dots a_n\|^{1/n} \leq r(a). \quad (5)$$

Таким образом, что при  $r(a) = 0$  ряд (1) сходится при  $\lambda \neq 0$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $r(a) > 0$ . Существует замкнутая коммутативная подалгебра  $B$  алгебры  $A$ , содержащая множество  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  и такая, что  $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$  для  $x \in B$  (см. [1], Теорема 11.22). В частности,  $\sigma(a)$  совпадает с множеством значений, которые принимают на элементе  $a$  мультипликативные на  $B$  функционалы.

Пусть  $\lambda \in \sigma(a)$ ,  $|\lambda| = r(a)$ . Существует мультипликативный на  $B$  функционал  $\varphi$  такой, что  $\varphi(a) = \lambda$ . Так как  $\|\varphi\| = 1$ , из условия (2) имеем, что  $|\varphi(a_k) - \varphi(a)| < r(a)$ . Откуда  $\varphi(a_k) \neq 0$  для  $k \in \mathbb{N}_0$ . Кроме того  $\varphi(a_k) \rightarrow \varphi(a)$ , так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(a_0) \varphi(a_1) \dots \varphi(a_n)|^{1/n} = r(a).$$

Учитывая, что

$$|\varphi(a_0)\varphi(a_1)\cdots\varphi(a_n)| = |\varphi(a_0a_1\cdots a_n)| \leq \|a_0a_1\cdots a_n\|,$$

получим

$$r(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_0a_1\cdots a_n\|^{1/n}.$$

Отсюда и из (5) следует (3). Применяя к ряду (1) функционал  $\varphi$ , получим скалярный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a_0)\varphi(a_1)\cdots\varphi(a_n)}{\lambda^{n+1}} \quad (6)$$

с отличными от нуля коэффициентами. Применяя теорему Фабри об отношении (см. [2]) к ряду (6), заключаем, что  $\lambda = \varphi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a_n)$  является особой точкой этого ряда. Это доказывает последнее утверждение Теоремы 1, поскольку особые точки ряда (6) будут особыми и для ряда (1).

**Замечание.** Если условие (2) Теоремы 1 заменить более сильным

$$\|a_n - a\| < \mu r(a), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad 0 < \mu < 1,$$

то Теорема 1 останется справедливой и в случае, когда условие  $a_n \rightarrow a$  выполняется для  $n \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N}_1$  — последовательность плотности 1.

**Теорема 2.** Пусть  $a_i \in G(A)$ ,  $a_i a_j = a_j a_i$ ,  $i, j \in \mathbb{N}_0$ ,  $Q_1 \subset \mathbb{N}_0$  — последовательность плотности  $\Delta$ ,  $Q_2 = \mathbb{N} \setminus Q_1$ . Предположим, что

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in Q_i}} a_k = \exp(b_i), \quad i = 1, 2.$$

Тогда

1) радиус сходимости ряда (1) равен  $r(a)$ , где  $a = \exp(\Delta b_1 + (1 - \Delta)b_2)$  и выполняется соотношение (3);

2) если  $r(a) \exp(i\theta_0) \in \sigma(a)$ , то ряд (1) имеет особую точку вида  $r(a) \exp(i\theta)$  такую, что

$$|\theta - \theta_0| \leq 2L\Delta(1 - \Delta), \quad L = \max_{z_k \in \sigma(b_k)} |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)|.$$

**Доказательство.** Положим  $c_k = a_k \exp(-b_i)$  для  $k \in Q_i$ ,  $i = 1, 2$ . Ясно, что  $c_n \rightarrow e$  и согласно Теореме 1 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_0 c_1 \cdots c_n\|^{1/n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_0^{-1} c_1^{-1} \cdots c_n^{-1}\|^{1/n} = 1. \quad (7)$$



Так как

$$a_0 a_1 \cdots a_n = c_0 c_1 \cdots c_n \exp[(\Delta n - m_n)b_2 + (m_n - \Delta n)b_1]a^n,$$

$$a^n = a_0 a_1 \cdots a_n c_0^{-1} c_1^{-1} \cdots c_n^{-1} \exp[(\Delta n - m_n)b_1 + (m_n - \Delta n)b_2],$$

с учетом (7) и условия  $m_n - \Delta n = o(n)$ , получим (3).

Далее, аналогично доказательству Теоремы 1, вложим коммутативное множество  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  в замкнутую коммутативную подалгебру  $B$  алгебры  $A$  так, что  $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$  для  $x \in B$ . Заметим теперь, что с помощью замены переменной в ряде (1) доказательство утверждения 2) можно свести к случаю, когда  $r(a) \exp(i\theta_0) = 1$ . Пусть  $\varphi$  — мультипликативный на  $B$  функционал такой, что  $\varphi(a) = 1$ , откуда  $\Delta \operatorname{Im} \varphi(b_1) + (1 - \Delta) \operatorname{Im} \varphi(b_2) = 2\pi k$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}$ . Выбирая значение аргумента  $\theta_n = \arg \varphi(a_n)$  так, чтобы

$$\lim_{n \in Q_j} \theta_n = \alpha_j = \operatorname{Im} \varphi(b_j) - 2\pi k, \quad j = 1, 2,$$

получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |\theta_k| = \Delta |\alpha_1| + (1 - \Delta) |\alpha_2|.$$

Так как  $\Delta \alpha_1 + (1 - \Delta) \alpha_2 = 0$ , то легко проверить, что

$$\Delta |\alpha_1| + (1 - \Delta) |\alpha_2| = 2|\alpha_1 - \alpha_2| \Delta (1 - \Delta).$$

Откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |\theta_k| \leq 2L\Delta(1 - \Delta).$$

Из последней оценки по Теореме 2 работы [3] следует, что ряд (6) имеет особую точку вида  $\exp(i\theta)$ , где  $|\theta| \leq 2L\Delta(1 - \Delta)$ . Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n, \quad f_n \in X. \quad (8)$$

Полагая  $f_n = 0$  для  $n = -1, -2, \dots$ , обозначим

$$\Delta^m(f_n) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f_{n-k}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Легко проверить, что для  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\Delta^0(f_n) = f_n, \quad \Delta^{m+1}(f_n) = \Delta^m(f_n) - \Delta^m(f_{n-1}). \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|^{1/n} = 1,$$

ряд (8) расходится при  $z = 1$  и для некоторого  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\Delta^m(f_n) \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

тогда точка 1 будет особой точкой ряда (8).

Доказательство. Предположим, что ряд (8) регулярен в точке 1. Для любого  $p \in \mathbb{N}_0$  при  $|z| < 1$  имеем

$$\begin{aligned} (1-z)^p \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k z^{n+k} f_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k z^n f_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Delta^p(f_n). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точка 1 будет регулярной и для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \Delta^p(f_n). \quad (11)$$

Заметим теперь, что предложенное М. Риссом доказательство теоремы Фату (см. [4], §20) сохраняет силу и в случае степенных рядов с векторнозначными коэффициентами. Условие (10) позволяет применить теорему Фату к ряду (11) при  $p = m$ , откуда следует, что ряд (11) сходится при  $z = 1$ . Из теоремы Абеля (см. [5], §1.2.2) следует, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^m(f_n) = 0$ . Отсюда, с учетом (9), имеем, что  $\Delta^{m-1}(f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Повторяя последовательно приведенное рассуждение, получим, что  $f_n = \Delta^0(f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда из теоремы Фату применительно к ряду (8) следует, что ряд (8) сходится при  $z = 1$ . Полученное противоречие доказывает Теорему 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. У. Рудин, Функциональный Анализ, М., Мир, 1975.
2. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
3. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. Ан Арм. ССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 3-21, 1987
4. Ж. Валирон, Аналитические Функции, М., Гос. изд. тех.-теор.лит., 1957.
5. Е. Титчмарш, Теория Функций, М., Наука, 1980.

# О СКОРОСТИ СУММИРОВАНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ВНЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

А. В. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
т. 30, № 4, 1995

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{C}$  —  $\alpha$ -звездная область относительно точки  $a \in \Omega$ . Обозначим через  $H_a(\Omega)$  множество всех аналитических элементов

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z-a)^n, \quad |z-a| < \inf_{\zeta \in \partial\Omega} |\zeta-a|,$$

имеющих однозначное аналитическое продолжение  $f$  в  $\Omega$ .

Пусть  $\{c_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность комплексных чисел, зависящая от параметра  $\omega$ ,  $\omega \in I$ , где  $I$  — некоторое множество с предельной точкой  $\omega_0$ . Назовем ее универсальной эффективной матрицей суммирования, если для любой  $\alpha$ -звездной области  $\Omega$  (относительно  $a$ ) и любой функции  $f \in H_a(\Omega)$  ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\omega) f_n(z-a)^n$$

сходится при  $z \in \Omega$  и

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\omega) f_n(z-a)^n = f(z)$$

локально равномерно в области  $\Omega$ .

Для  $\alpha \in \mathbb{R}$  положим

$$\Pi_\alpha = \{z: \operatorname{Re} z \geq \alpha \operatorname{Im} z\}.$$

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным при частичной поддержке Гранта № MVK000 из Международного Научного Фонда.



В [1] доказывается (Теорема 2.2) универсальная эффективность матриц вида  $c_n(\omega) = \varphi(\omega n)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega_0 = 0$ , где  $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$  — функция, удовлетворяющая определенным условиям.

Ниже исследуется вопрос о скорости суммирования такими матрицами в зависимости от свойств функции  $\varphi$ , а также оценивается точность приближения  $f \in H_\alpha(\Omega)$  многочленами вида  $\sum_{k=0}^n \varphi(\omega k) f_k(z-a)^k$ .

Ясно, что без ограничения общности, можно считать  $a = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$  ограничена в каждой замкнутой угловой области  $\Delta \subset \Pi_\alpha^0 \cup \{0\}$  и удовлетворяет условиям

$$h_\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log |\varphi(t)|}{t} = -\infty, \quad (1)$$

$$|\varphi(t) - 1| \leq C_0 \exp \left( -\frac{\rho}{t^\gamma} \log^\beta \frac{1}{t} \right), \quad t \in (0, 1], \quad (2)$$

где  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $C_0 > 0$  — постоянные.

Тогда, если область  $\Omega$  —  $\alpha$ -звездная относительно нуля, то для любого компакта  $K \subset \Omega$  существует  $\mu > 0$  такое, что для любой функции  $f \in H_0(\Omega)$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq M \exp \left( -\mu \omega^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} (1/\omega) \right), \quad \text{для } z \in K, \quad (3)$$

где  $0 < \omega < 1$  и постоянная  $M$  зависит лишь от  $f$  и  $K$ .

**Доказательство.** Из условия (1) следует, что для любого  $\omega > 0$  функция

$$C_\omega(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) z^k$$

целая по  $z$ .

Пусть  $D_{r_0} = \{\zeta: |\zeta| \leq r_0\} \subset \Omega$  для некоторого  $r_0 > 0$ .

Легко проверить, что для  $z \in \Omega$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_0} f(t) C_\omega(z/t) \frac{dt}{t}.$$

Положим

$$L_\alpha = \{\zeta: \zeta = \exp((1+i\alpha)\log t), \quad t \in [0, +\infty)\},$$

$$L_{\alpha}^{+} = \{\zeta: \quad \zeta = \exp((1 + i\alpha) \log t), \quad t \in [1, +\infty)\}.$$

Следуя доказательству Леммы 2.3 в [1] (стр. 40), мы заменим контур интегрирования  $|t| = r_0$  контуром  $\Gamma \subset \Omega$  (все контуры берутся положительно ориентированными), так чтобы  $z/t \in \mathbb{C} \setminus L_{\alpha}^{+}$ , когда  $z \in K$  и  $t \in \Gamma$ . Имеем

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) C_{\omega}(z/t) \frac{dt}{t}, \quad z \in K.$$

Отсюда получим, что

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq M_1 \max_{\zeta \in K_0} \left| C_{\omega}(\zeta) - \frac{1}{1-\zeta} \right|, \quad z \in K, \quad (4)$$

где  $K_0 = \{\zeta: \quad \zeta = z/t, \quad z \in K, \quad \zeta \in \Gamma\}$  — компакт, причем  $K_0 \subset \mathbb{C} \setminus L_{\alpha}^{+}$ , а  $M_1$  — постоянная, зависящая лишь от  $f$  и  $K$ . Оценим теперь

$$\max_{\zeta \in K_0} \left| C_{\omega}(\zeta) - \frac{1}{1-\zeta} \right|.$$

Для  $z \in D_r$ ,  $0 < r < 1$  и  $z > 0$ , с учетом (2), имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(\omega n) z^n - \frac{1}{1-z} \right| &\leq \sum_{n \leq z} |\varphi(\omega n) - 1| r^n + \sum_{n > z} |\varphi(\omega n) - 1| r^n \leq \\ &\leq \exp\left(-x \log \frac{1}{r}\right) \left[ C_1 \exp\left(-\rho \left[ \frac{1}{(\omega x)^{\gamma}} \log^{\beta} \frac{1}{\omega x} - x \frac{\log \frac{1}{r}}{\rho} \right]\right) + C_2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $z$  и  $\omega$ .

Легко проверить, что если

$$x = \frac{C_3 \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega}}{\omega^{\gamma/(1+\gamma)}}, \quad 0 < C_3 < \frac{\rho}{\log \frac{1}{r}}, \quad (6)$$

то для достаточно малых  $\omega$

$$\frac{1}{(\omega x)^{\gamma}} \log^{\beta} \frac{1}{\omega x} > x \frac{\log \frac{1}{r}}{\rho}.$$

Подставляя (6) в (5), получим, что для любого  $\rho_1 < \rho$  существует  $C_4 > 0$  такое, что для всех  $0 < \omega < 1$ ,  $z \in D_r$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) z^k - \frac{1}{1-z} \right| \leq C_4 \exp\left(-\rho_1 \omega^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega}\right). \quad (7)$$

Выберем теперь компакт  $K_1 \subset \mathbb{C} \setminus L_a^+$ , ограниченный жордановой кривой так, чтобы  $K_0 \subset K_1^0$  и  $D_r \subset K_1^0$ . Из Предложения 1.1 (см. [1]) следует, что для всех  $\omega > 0$  существует некоторая постоянная  $M_2 > 0$  такая, что

$$\left| C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leq M_2, \quad z \in K_1. \quad (8)$$

Пусть  $w(z)$  – гармоническая мера  $\partial K_1$  относительно  $K_1^0 \setminus D_r$ . Так как компакт  $K_0$  лежит внутри некоторой линии уровня  $w(z) = \delta$  ( $0 < \delta < 1$ ), то из теоремы о двух постоянных (см. [12], стр. 48), с учетом (7) и (8) получим

$$\max_{z \in K_0} \left| C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leq M_3 \exp \left( -\mu \omega^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega} \right),$$

где  $\mu = \rho_1(1 - \delta)$ .

Отсюда и из (4) приходим к требуемой оценке.

**Замечание 1.** Из Теоремы 1 видно, что скорость суммирования тем лучше, чем быстрее  $\varphi(z)$  стремится к 1 при  $z \rightarrow 0$ . С другой стороны, из неравенства Коши применительно к кругу  $D_r$  ( $r < 1$ ) имеем оценку снизу, а именно :

$$\max_{z \in D_r} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \geq \sup_n |\varphi(\omega n) - 1| |f_n| r^n. \quad (9)$$

Возьмем теперь в Теореме 1 в качестве  $\varphi$  целую функцию  $(\Gamma(1 + (1 + i\alpha)z))^{-1}$  ( $\Gamma$  – гамма функция Эйлера), определяющую обобщенный метод суммирования Миттаг-Леффлера. Так как  $\varphi$  аналитична в нуле, то условие (2) в Теореме 1 выполняется при  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 1$  и  $\rho = 1$ . Из оценки (3) следует, что для любого  $K \subset \Omega$  и  $f \in H_0(\Omega)$  существует  $\mu < 1$  такое, что

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k}{\Gamma(1 + (1 + i\alpha)k\omega)} z^k - f(z) \right| \leq M \omega^\mu, \quad z \in K. \quad (10)$$

Покажем, что в (10) можно взять  $\mu = 1$ , что согласно (9) является наилучшим допустимым показателем в (10).

Более общо, пусть  $\varphi$  – аналитическая в нуле функция, удовлетворяющая условиям Теоремы 1, и пусть  $\varphi^{(j)}(0) = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, p-1$ ,  $\varphi^{(p)}(0) \neq 0$ . Ясно, что для любого замкнутого угла  $\Delta \subset \Pi_\alpha^0$  существует  $C_1 > 0$  такое, что

$$|\varphi(z) - 1| \leq C_1 |z|^p, \quad z \in \Delta. \quad (11)$$



Представим компакт  $K_0 \subset \mathbb{C} \setminus L_\alpha^+$  в виде  $K_1 \cup K_2$ , где  $K_1 \subset \mathbb{C} \setminus L_\alpha$ , а  $K_2 \subset D_\tau$  для некоторого  $\tau < 1$ .

Для  $z \in K_2$  имеем

$$\left| C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(\omega n) - 1) z^n \right| \leq C_2 \omega^p.$$

Для компакта  $K_1$  можно подобрать  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (см. [1], стр. 34), так чтобы была справедлива формула Линделефа

$$C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{(\varphi(\omega \zeta) - 1) z^\zeta}{\exp(2\pi i \zeta) - 1} d\zeta.$$

Здесь  $\Gamma_1 = \{\zeta: \zeta = t \exp(i\theta_k), t > \varepsilon, k = 1, 2\}$ ,  $\Gamma_2 = \{\zeta: |\zeta| = \varepsilon, \theta_1 < \arg \zeta < \theta_2\}$ , а  $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$ ,  $\log z$  — непрерывная в  $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$  ветвь логарифма и  $\log(-1) = i\pi$ .

При этом для  $\zeta \in \Gamma_1$  имеем

$$\left| \frac{z^\zeta}{\exp(2\pi i \zeta) - 1} \right| \leq C_3 \exp(-\delta_0 |\zeta|), \quad \delta_0 > 0.$$

Отсюда, в силу (4) и (11), получим, что для любого  $K \subset \Omega$  и  $f \in H_0(\Omega)$  существует  $C_4 > 0$  такое, что

$$\max_{z \in K} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq C_4 \omega^p.$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$  удовлетворяет условиям Теоремы 1, и пусть

$$|\varphi(t)| \leq C_1 \exp(-t q(t)), \quad t \geq 1, \quad (12)$$

где  $q$  — неубывающая на  $[1, \infty)$  функция,  $q(t) \rightarrow +\infty$ ,  $q(t) = o(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а  $C_1$  — положительная постоянная. Тогда для любой функции  $f \in H_0(\Omega)$  и компакта  $K \subset \Omega$  существуют постоянные  $\nu > 0$  и  $C > 0$  такие, что для всех  $n > q(n)$

$$\left| \sum_{k=0}^n \varphi(\omega_n k) f_k z^k - f(z) \right| \leq C \exp \left( -\nu \omega_n^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega_n} \right). \quad (13)$$

Здесь  $\omega_n = \frac{A}{q\left(\frac{n}{q(n)}\right)}$  и константа  $A > 0$  зависит от  $K$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\left| \sum_{k=0}^n \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k \right|. \quad (14)$$

Положим

$$R = \max_{z \in K} |z|, \quad r = \min_{z \in \partial \Omega} |z|,$$

и пусть  $0 < r_1 < r$ .

Ясно, что  $|f_k| < C_2 r_1^k$ ,  $C_2 > 0$ . Отсюда, с учетом условия (12), получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k \right| &\leq C_3 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \exp(-\omega k q(\omega k)) \left( \frac{R}{r_1} \right)^k \leq \\ &\leq C_3 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \exp(-\omega k (q(\omega n) - d/\omega)), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $d = \max \{1/2, \log(R/r_1)\}$ .

Легко проверить, что  $q(\omega n) \geq 2d/\omega$ , когда  $q(n) < n$  и

$$\omega = \omega_n = \frac{2d}{q\left(\frac{n}{q(n)}\right)}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим, что для некоторого  $C_4 > 0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(\omega_n k) f_k z^k \right| \leq C_4 \exp(-dn).$$

Отсюда, с учетом (14) и (3), приходим к оценке (13). Теорема 2 доказана.

**Замечание 2.** В Теореме 2 можно выбрать  $\omega_n$  независимо от компакта. Действительно, из доказательства видно, что (13) выполняется, если выбрать  $\omega_n$  так, что

$$\frac{1}{\omega_n} = o\left(q\left(\frac{n}{q(n)}\right)\right).$$

**Замечание 3.** Условия Теоремы 2 ставят некоторые ограничения на рост функции  $q(t)$ . Так, если  $q(t) = t^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , то из ограниченности функции  $\varphi$  в любой замкнутой угловой области  $\Delta \subset \Pi_\alpha^0$  и из (12) следует, что  $\varphi = 0$ .

Пусть  $q(t) = t^{\rho(t)}$  — неубывающая функция, где  $\rho(t)$  — положительный уточненный порядок, стремящийся к нулю ([4], стр. 49). Покажем, что существует функция  $\varphi$ , удовлетворяющая условиям Теоремы 2 при  $\gamma = 1$  и  $\beta = 0$ . Согласно Теореме 5.1 (см. [3]) существует такая аналитичная в  $\Pi_0^0$ , положительная на положительной

оси функция  $g$ , что для любого  $0 < \delta < \pi$  равномерно относительно  $\theta$  в углу  $\{|\theta| < \pi - \delta\}$  выполняется

$$g(r e^{i\theta}) = (1 + o(1)) q(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Пусть

$$\Psi(z) = \frac{1}{C_0} \int_{\gamma}^{\infty} \exp(-t^{-1} - t g(t)) dt,$$

где путь интегрирования лежит в некотором замкнутом угле в правой полуплоскости, а

$$C_0 = \int_0^{\infty} e^{-1/t - t g(t)} dt > 0.$$

Легко проверить, что функция  $\varphi(z) = \Psi(\exp(-i \arctan \alpha)z)$  будет искомой.

В частности, если  $q(t) = \log^{p+\epsilon} t$ ,  $p+\epsilon > 0$  и  $\omega_n = \log^{-p} n$ , то согласно Замечанию 2, для любого компакта  $K \subset \Omega$  имеем

$$\max_{z \in K} \left| \sum_{k=0}^n \varphi(\omega_n k) f_k z^k - f(z) \right| = O\left(\exp\left(-\log^{p/2} n\right)\right), \quad n \geq n_0. \quad (17)$$

Теоремы 1 и 2 сформулированы для случая скалярных функций. Однако, почти полностью повторяя ход рассуждений, их доказательства можно провести и в случае, когда аналитические элементы принимают значения из некоторого банахового пространства. Получаемые при этом утверждения интересны в связи с применением к резольвенте.

Пусть  $X$  – банахова алгебра с единицей,  $R(z, a)$  – резольвента элемента  $a \in X$ . Если взять в качестве  $\Omega$  главную  $\alpha$ -звезду (относительно  $\infty$ ) аналитического элемента

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n},$$

то к  $R(z, a)$  применимы Теоремы 1 и 2.

Если дополнительно предположить, что элемент  $a \in X$  имеет счетный спектр с единственно возможной предельной точкой в нуле, то для любой точки  $\zeta \in \rho_a$  ( $\rho_a$  – резольвентное множество элемента  $a$ ) можно выбрать окрестность  $V_{\zeta}$  точки  $\zeta$  так, что  $\Omega_{\zeta} = L_{\alpha}^+ V_{\zeta} \subset \rho_a$  для некоторого  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



Пусть функция  $\varphi \in H(\Pi_a^0)$  удовлетворяет условиям Теоремы 2 для  $\gamma = 1, \beta = 0$  и  $q(t) = \log^{p+\varepsilon} t, p + \varepsilon > 0$ . Тогда, согласно (17), получим что для окрестности  $\bar{U}_\zeta \subset V_\zeta$  при  $z \in \bar{U}_\zeta$  имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(k \log^{-p} n)}{z^{k+1}} a^k - R(z; a) \right\| = O\left(\exp\left(-\log^{p/2} n\right)\right), \quad n \geq n_1.$$

В заключение автор выражает свою признательность профессору Н. У. Аракеляну за постановку задачи и руководство.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. сб., т. 5, стр. 24 – 44, 1984.
2. Р. Неванlinna, Однозначные Аналитические Функции, М.-Л., Гостехиздат, 1941.
3. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение Значений Мероморфных Функций, М., Наука, 1970.
4. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.

23 Апреля 1995

Ереванский государственный университет

## СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 30

НОМЕР 4

1995

### ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

#### ПРИБЛИЖЕНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ОСОБЕННОСТИ

Сборник статей

Страницы

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие редактора.....                                                                                                                    | 4  |
| Передача малости и единственность гармонических и голоморфных функций<br>Н. У. Аракелян, П. М. Готье.....                                     | 5  |
| Эффективное аналитическое продолжение степенных рядов с<br>векторнозначными коэффициентами<br>Н. У. Аракелян .....                            | 29 |
| О единственности целых функций, имеющих лакунарные степенные<br>ряды и ограниченных на угле Жордана<br>Э. В. Габриелян, В. А. Мартиросян..... | 58 |
| О равномерно-касательном приближении лакунарными степенными<br>рядами на множествах Карлемана<br>В. А. Мартиросян .....                       | 69 |
| О равномерно-касательном приближении лакунарными степенными<br>рядами на множествах Карлемана, II<br>Г. В. Арутюнян, В. А. Мартиросян .....   | 79 |
| Краткие сообщения                                                                                                                             |    |
| Векторнозначные аналоги теоремы Фабри об отношении<br>Н. У. Аракелян, А. В. Яврян.....                                                        | 87 |
| О скорости суммирования степенных рядов вне круга сходимости<br>А. В. Яврян.....                                                              | 92 |

# CONTENTS

VOLUME 30

NUMBER 4

1995

## JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA)

### APPROXIMATION, UNIQUENESS,

### ANALYTIC CONTINUATION AND SINGULARITIES

#### Collection of Papers

PAGES

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Editor's Preface .....                                                                                                            | 1  |
| Propagation of smallness and uniqueness for harmonic and holomorphic functions<br>N. U. Arakelian, P. M. Gauthier .....           | 2  |
| Efficient analytic continuation of power series with vector-valued coefficients<br>N. U. Arakelian .....                          | 25 |
| On uniqueness of entire functions with lacunary power series bounded in Jordan angle<br>E. V. Gabrielian, V. A. Martirosian ..... | 49 |
| On uniform tangential approximation by lacunary power series on Carleman sets<br>V. A. Martirosian .....                          | 59 |
| On uniform tangential approximation by lacunary power series on Carleman sets, II<br>G. V. Haroutunian, V. A. Martirosian .....   | 68 |
| <b>Brief Communications</b>                                                                                                       |    |
| Vector-valued versions of Fabry's ratio theorem<br>N. U. Arakelian, A. V. Yavrian .....                                           | 76 |
| On the speed of summation of power series outside the convergence circle<br>A. V. Yavrian .....                                   | 81 |

©1995 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of \$50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.