ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Журнал основан в 1996 г.
Выходит 6 раз в год
на русском и английском языках

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայաստանի Գիտությունների Ազգային Ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝ 1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն ոչ ավելի քան տեքստի 24 մեքենագրված էջ), իսկ համառոտ հաղորդումների ծավալը՝ ոչ ավելի քան 5—6 մեքենագրված էջ:

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ:

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում:

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով դրանց համարը և տեղը տեքստում՝ էջի ձախ մասում: 5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը, տարեթիվը և էջերը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում: 7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյանի պող., 24բ. Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА ГРИНА И ПРЕДСТАВИМОСТЬ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Л. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 2, 1995

В статье устанавливаются некоторые свойства потенциалов типа Грина для круга и для полуплоскости комплексной плоскости, построенных посредством факторов типа Бляшке М. М. Джрбашяна и аналогичных факторов, введенных А. М. Джрбашяном и Г. В. Микаеляном. Основными результатами статьи являются представления типа Рисса для некоторых весовых классов субгармонических функций. Результаты статьи обобщают представления для голоморфных и гармонических функций, полученные ранее М. М. Джрбашяном и Ф. А. Шамояном в круге и А. М. Джрбашяном в полуплоскости. Эти представления здесь распространены на субгармонические функции, а представляющие меры модифицированы с применением функциональных классов О. В. Бесова. Получены аналоги формулы обращения Стилтьеса.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В классической монографии Неванлинны (см. [1], раздел 216) содержатся некоторые результаты о распределении нулей голоморфных в единичном круге функций, удовлетворяющих условию весовой интегрируемости

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^{\alpha-1} \log^+ |f(re^{i\theta})| r dr d\theta < +\infty \quad (\alpha > 0, \ \log^+ |f| = \max\{\log |f|, 0\}).$$

Позднее, М. М. Джрбашян [2], [3] установил канонические факторизации этих классов, а Ф. А. Шамоян [4] – [7] – их параметрические представления. Аналогичные результаты для функций, мероморфных в полуплоскости, были получены А. М. Джрбашяном [8]. Основными результатами настоящей статьи являются представления типа Рисса, которые обобщают результаты работ [4] – [8]. Представления [4] – [8] здесь распространены на субгармонические функции, а представляющие меры модифицированы с применением функциональных классов О. В. Бесова. В то же время, результаты статьи усиливают и дополняют результаты работ [9], [10], в частности тем, что здесь устанавливаются формулы обращения, аналогичные формулам обращениям Стилтьеса. Полные доказательства даны в случае полуплоскости, который более сложен, а в случае круга доказательства мы пропускаем.

Возможность расширения факторизаций монографии [11] на субгармонические функции впервые была указана М. М. Джрбашяном [12]. На Международной конференции по теории аналитических функций, Ереван, 1965, М. М. Джрбашян ввел потенциалы типа Грина, основанные на своих произведениях типа Бляшке для единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (см. [11], гл. IX). Позднее, А. М. Джрбашян [13] ввел аналогичные потенциалы типа Грина для полуплоскости. В [10] были введены следующие потенциалы типа Грина :

$$V_\alpha(z) \equiv V_\alpha(z,\nu) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \log|A_\alpha(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1}$$

$$I_\alpha(z) \equiv I_\alpha(z,\mu) = \iint\limits_{G^+} \log|a_\alpha(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+. \tag{1.2}$$

Здесь

$$A_\alpha(z,\zeta) = \exp\left[-\int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\alpha}{(1-z\zeta^{-1}t)^{\alpha+1}}\,\frac{dt}{t}\right] \quad |\zeta| < 1,\ -1 < \alpha < +\infty. \tag{1.3}$$

– элементарный фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна [2], [3], а $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1} d\nu(\zeta) + \int\limits_{|\zeta|<1/2}\int \log\frac{1}{|\zeta|} d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{1.4}$$

Далее

$$a_\alpha(z,\zeta) = \exp\left[-\int_0^{2\operatorname{Im}\zeta} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(\tau + i\zeta - iz)^{\alpha+1}}\right] \quad (-1 < \alpha < +\infty) \tag{1.5}$$

– элементарный фактор типа Бляшке, введенный А. М. Джрбашяном и Г. В. Микаеляном [14], а $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера на G^+, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < +\infty. \tag{1.6}$$

Потенциалы типа Грина V_α и I_α становятся обычными потенциалами Грина при $\alpha = 0$. Всюду ниже, для простоты, вместо выражения ***неотрицательная борелевская мера*** будем употреблять слово ***мера***.

В статье установлены некоторые свойства потенциалов типа Грина (1.1) и (1.2), выраженные в терминах операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Вейля. Приведем определения этих операторов. Полагая, что $f(z) = f(re^{i\theta})$ – измеримая в $\mathbb{D}$ функция, рассмотрим оператор интегродифференцирования Римана–Лиувилля, определяемый следующим образом :

$$\begin{gathered} D^{-\alpha} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(te^{i\theta})dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\sigma)^{\alpha-1} f(\sigma z)d\sigma, \\ D^0 f(z) = f(z), \quad D^\alpha f(z) = \frac{\partial^n}{\partial r^n} D^{-(n-\alpha)} f(z), \qquad z = re^{i\theta}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $0 < \alpha < \infty$, а n – целое число, определяемое из неравенств $n - 1 < \alpha \leq n$. Для измеримых функций $f(z) = f(x+iy)$, заданных в G^+, введем в рассмотрение операцию интегродифференцирования по Вейлю относительно переменной y :

$$\begin{aligned} W_y^{-\alpha} f(z) \equiv W^{-\alpha} f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^{+\infty} (t-y)^{\alpha-1} f(x+it)dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(z+i\sigma)d\sigma, \\ W^0 f(z) = f(z), \quad W^\alpha f(z) &= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} W^{-(p-\alpha)} f(z), \qquad z = x+iy, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где α и n такие как выше. Сходимость этих интегралов и другие свойства операторов $D^{-\alpha}$ и $W^{-\alpha}$ исследованы в [11] и [13], [15]. Мы будем использовать также рассмотренные в [13], [15] классы M_β функций, убывающих в бесконечности. В соответствии с [13], [15] будем говорить, что измеримая в G^+ функция $f(z)$ принадлежит классу $M_\beta (\beta \geq 0)$, если существует угловая область

$$\Lambda(\delta_0, R_0) = \left\{z \in \mathbf{C} : \left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \delta_0, |z| > R_0\right\} \quad \left(0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}, 0 < R_0 < +\infty\right)$$

такая, что для любого компакта $K \subset \Lambda(\delta_0, R_0)$

$$\sup_{z\in K} \int_1^{+\infty} \sigma^{\beta-1}|f(z+i\sigma)|d\sigma < +\infty.$$

Следующие две теоремы являются основными результатами о потенциалах типа Грина.

Теорема 1. *Если $0 < \alpha < \infty$ и ν – мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4), то потенциал типа Грина $V_\alpha(z) \equiv V_\alpha(z,\nu)$ обладает следующими свойствами :*

1°. *Для любого $\beta \geq \alpha$ функция $r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(z)$ субгармонична в $\mathbb{D}$, непрерывна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, и*

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\beta(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \tag{1.9}$$

где интеграл абсолютно и равномерно сходится в любом кольце $\rho_1 < |z| < \rho_2$ $(0 < \rho_1 < \rho_2 < 1)$.

2°. *Для любого $\beta \geq \alpha$ функция $r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(z)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(re^{i\theta})\right)^+ d\theta < +\infty \quad (u^+ = \max\{u, 0\}), \tag{1.10}$$

и имеет место представление

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\alpha(z,\nu) = V_0(z,\nu_\alpha) + h_\alpha(z), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.11}$$

где ν_α – мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4) с $\alpha = 0$, а $h_\alpha(z)$ – гармоническая в $\mathbb{D}$ функция.

3°. *Для мер ν и ν_α справедлива следующая формула :*

$$\nu_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\nu(tE)dt, \qquad \overline{E} \subset \mathbb{D}, \tag{1.12}$$

где $tE = \{z \in \mathbf{C} : t^{-1}z \in E\}$.

Теорема 2. *Если $0 < \alpha < \infty$ и $\mu(\zeta)$ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6), то потенциал типа Грина $I_\alpha(z) \equiv I_\alpha(z,\mu)$ имеет следующие свойства :*

1°. *Если* $\alpha \le \beta < \alpha + 1$, *то включение* $I_\beta(z) \in M_\gamma$ *справедливо для всех* $\gamma \in (0, \alpha + 1)$.

2°. *Для любого* β $(\alpha \le \beta < \alpha + 1)$ *функции* $W^{-\beta} I_\beta(z)$ *и* $W^{-\alpha} I_\beta(z)$ *непрерывны и субгармоничны в* G^+. *При этом, имеют место представления*

$$W^{-\beta} I_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} W^{-\beta} \log |a_\beta(z, \zeta)| \, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+, \tag{1.13}$$

$$W^{-\alpha} I_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} W^{-\alpha} \log |a_\beta(z, \zeta)| \, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+, \tag{1.14}$$

где интегралы абсолютно и равномерно сходится в любой полуплоскости $G_\rho^+ = \{z \in \mathbf{C} : Im\, z > \rho\}$ $(\rho > 0)$.

3°. *Функция* $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} I_\alpha(x + iy)| dx < +\infty \tag{1.15}$$

и представима в виде

$$W^{-\alpha} I_\alpha(z, \mu) = I_0(z, \mu_\alpha) + h_\alpha(z), \qquad z \in G^+, \tag{1.16}$$

где μ_α – *мера на* G^+, *удовлетворяющая условию (1.6) с* $\alpha = 0$, *а* $h_\alpha(z)$ – *гармоническая в* G^+ *функция.*

4°. *Если* β $(\alpha < \beta < \alpha + 1)$ – *нецелое число, то функция* $W^{-\alpha} I_\beta(z)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha} |I_\beta(x + iy)| dx < +\infty. \tag{1.17}$$

5°. *Для мер* μ *и* μ_α *справедлива следующая формула :*

$$\mu_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} \mu(E + i\sigma) d\sigma, \tag{1.18}$$

где $E \subset G^+$ – *любое борелевское множество, удаленное от вещественной оси на положительное расстояние, а* $E + i\sigma = \{z \in \mathbf{C} : z - i\sigma \in E\}$.

Замечание. Утверждения, аналогичные 1°,2° (для $\beta = \alpha$) и 4° теоремы 2, ранее были установлены А. М. Джрбашяном [13] для его потенциалов типа

Грина. Кроме того, в [13] было указано на возможность установления формул, аналогичных (1.12) и (1.18). Следует отметить, что такие формулы можно доказывать аналогично (1.12) и (1.18).

В работс [10] введены следующие классы функций в верхней полуплоскости G^+ и в единичном круге $\mathbb{D}$: $S_\alpha^*(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ - как множество функций $u(z)$, субгармонических в G^+ и удовлетворяющих условиям

$$\iint_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < +\infty, \tag{1.19}$$

$$\sup_{y>y_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| dx < +\infty \qquad \text{для любого} \quad y_0 > 0, \tag{1.20}$$

$$\limsup_{y\to+\infty} y u(iy) \geq 0, \tag{1.21}$$

и класс $S_\alpha^*(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ – как множество функций $u(z) \not\equiv -\infty$, субгармонических в $\mathbb{D}$ и удовлетворяющих условию

$$\iint_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < +\infty, \tag{1.22}$$

где $u^+ = \max\{u, 0\}$, и m_2 – мера Лебега на плоскости.

Замечание. В [10] классы $S_\alpha^*(G^+)$ субгармонических в G^+ функций были введены иначе. А именно, классы $S_\alpha^*(G^+)$ были определены условиями (1.6) и

$$\iint_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} |u(z)|\, dm_2(z) < +\infty, \tag{1.23}$$

где μ – мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$. Ниже будет доказано, что условия (1.19) – (1.21) и (1.6), (1.23) эквивалентны.

Чтобы сформулировать основные результаты статьи, необходимо предварительно ввести некоторые известные функциональные классы и ряд обозначений. Пусть $H^p = H^p(G^+)$ и $h^p = h^p(G^+)$ $(0 < p \leq \infty)$ – обычные голоморфные и (вещественные) гармонические классы Харди в полуплоскости G^+. Обозначим через $H^p_\alpha = H^p_\alpha(G^+)$ $(0 < p < \infty, 0 < \alpha < \infty)$ пространство голоморфных в G^+ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{H^p_\alpha} = \left(\iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\, z)^{\alpha-1} |f(z)|^p \, dm_2(z)\right)^{1/p}, \tag{1.24}$$

и пусть $h^p_\alpha = h^p_\alpha(G^+)$ – аналогичный класс гармонических в G^+ функций. Удобно использовать обозначение $\|\cdot\|$, даже если это не является нормой. На вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ рассмотрим одномерные классы О. В. Бесова. Пусть для любых p, q, α $(1 \le p, q \le \infty, 0 < \alpha < 2)$

$$B^{p,q}_\alpha(f) = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-1-\alpha q} \|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\|_p^q dt\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup_{|t|>0} |t|^{-\alpha} \|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\|_p, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.25}$$

и для любых p, q, α $(1 \le p, q \le \infty, 0 < \alpha < \infty)$ –

$$L^{p,q}_\alpha(u) = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} y^{(m-\alpha)q-1} \|\partial^m u\|_p^q dy\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup_{y>0} y^{m-\alpha} \|\partial^m u\|_p, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.26}$$

где функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, а функция $u = u(x, y)$ – на G^+, $\|\cdot\|_p$ – норма Лебега в $L^p(\mathbb{R})$, m – целое число, превосходящее α, а $\partial^m u$ – частная производная $u(x, y)$относительно x и y суммарного порядка m. Определим следующие классы :

$$\Lambda^{p_0,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{p_0} + B^{p,q}_\alpha(f) < +\infty\}, \quad 1 \le p_0 \le \infty, 0 < \alpha < 2,$$

$$\Lambda^{BMO,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{BMO} + B^{p,q}_\alpha(f) < +\infty\}, \quad 0 < \alpha < 2,$$

где $\|\cdot\|_{BMO}$ – норма в пространстве функций с ограниченным средним колебанием (см., напр., [17]). Если $0 < \alpha < 1$, то вторая разность в (1.25) может быть заменена первой разностью $f(x+t) - f(x)$. Для произвольных $\alpha > 0$ положим

$$\Lambda^{p_0,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{p_0} + L^{p,q}_\alpha(u) < +\infty\}, \quad 1 \le p_0 \le \infty,$$

$$\Lambda^{BMO,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{BMO} + L^{p,q}_\alpha(u) < +\infty\},$$

где $u = u(x, y)$ – интеграл Пуассона функции $f(x)$ в G^+. Для удобства обозначим $\Lambda^{p_0}_\alpha = \Lambda^{p_0,1,1}_\alpha$ и $\Lambda^{BMO}_\alpha = \Lambda^{BMO,1,1}_\alpha$. Целое число m не фигурирует в приведенных определениях, поскольку имеет место следующая лемма, где, как и в [18], использовано обозначение

$$\|v\|_{pq} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \|v\|_p^q dy/y\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup_{y>0} \|v\|_p, & q = \infty. \end{cases}$$

Лемма А. *(Тейблсон [18]) Пусть* $0 < \beta < \infty$, $1 \le p, q \le \infty$ *и* $v = v(x,y)$ *– гармоническая в* G^+ *функция, ограниченная в каждой полуплоскости* $G^+_\rho = \{z \in \in \mathbf{C} : Im\ z > \rho\}$ $(\rho > 0)$. *Тогда*

$$\left\| y^{\beta+1} \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{pq} \le C_\beta \|y^\beta v\|_{pq}, \qquad \left\| y^{\beta+1} \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{pq} \le C_\beta \|y^\beta v\|_{pq},$$

а нормы $\left\|y^{\beta+1}\partial v/\partial y\right\|_{pq}$ *и* $\left\|y^{\beta+1}\partial v/\partial x\right\|_{pq}$ *эквивалентны. К тому же, если* $v(x,y) \to 0$ *при* $y \to +\infty$, *то*

$$\|y^\beta v\|_{pq} \le C_\beta \left\| y^{\beta+1} \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{pq}.$$

Таким образом, величина $L^{p,q}_\alpha(u)$ не зависит, с точностью до эквивалентности, от выбора $m > \alpha$ и производной $\partial^m u$. Заметим, что при $p = q = 1$ норма $\|y^\beta v\|_{pq}$ сводится к норме $\|v\|_{h^1_\beta}$. Ниже для положительных постоянных, зависящих только от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ мы будем пользоваться обозначениями c и C. При необходимости выражения зависимости таких постоянных от параметров будем записывать $c(\alpha, \beta, \ldots)$ или $C_{\alpha,\beta}$ и т. п. .

Классы О. В. Бесова на единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$ состоят из функций $f(\theta)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\lambda^{p,q}_\alpha} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |t|^{-1-\alpha q} \|f(\theta+t) + f(\theta-t) - 2f(\theta)\|_p^q \, dt\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \|f\|_p + \sup_{|t|>0} |t|^{-\alpha} \|f(\theta+t) + f(\theta-t) - 2f(\theta)\|_p, & q = \infty. \end{cases}$$

Для произвольного $\alpha > 0$ положим

$$\|f\|_{\lambda^{p,q}_\alpha} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int_0^1 (1-r)^{(m-\alpha)q-1} \|\partial^m u\|_p^q \, dr\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \|f\|_p + \sup_{0<r<1} (1-r)^{m-\alpha} \|\partial^m u\|_p, & q = \infty, \end{cases}$$

где $u = u(re^{i\theta})$ – интеграл Пуассона функции $f(\theta)$ в $\mathbb{D}$, $m > \alpha$ – целое число, а $\partial^m u$ обозначает частную производную функции $u(re^{i\theta})$ суммарного порядка m по переменным r и θ. При этом, норма $\|\cdot\|_{\lambda^{p,q}_\alpha} = \|\cdot\|_{p,q,\alpha}$ с точностью до эквивалентности независима от выбора $m > \alpha$ и производной $\partial^m u$. Основными результатами статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 3. а) *Класс $S^*_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций $u(z)$, представимых в G^+ в виде*

$$u(z) = \iint\limits_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{Re}\, \frac{1}{(it-iz)^{\beta+1}}\right] \varphi(t)\, dt, \quad (1.27)$$

где $\beta > \alpha$ – любое число, $a_\beta(z,\zeta)$ – элементарный фактор типа Бляшке (1.5), $\mu(\zeta)$ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6), а $\varphi(t) \equiv \varphi_\beta(t)$ – вещественнозначная функция, дифференцируемая k раз в $\mathbb{R}$ (k – целое число, определяемое из неравенств $k < \beta - \alpha \leq k+1$) и такая, что

$$\varphi^{(k)}(t) \in \Lambda^p_{\beta-\alpha-k} \qquad \text{при некотором} \quad p, \quad 1 \leq p \leq \infty. \qquad (1.28)$$

б) *Если функция $u(z)$ представима в виде (1.27) – (1.28), то мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$, совпадает с μ. Если к тому же $\beta \in (\alpha, \alpha+1)$, то почти для всех $x \in \mathbb{R}$ справедлива формула обращения*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to+0} W^{-\beta} u(x+iy) + \lim_{y\to+0} \Psi_\beta(x+iy), \qquad (1.29)$$

где функция $\Psi_\beta(x+iy)$ гармонична и неотрицательна в G^+.

Теорема 4. а) *Класс $S^*_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций $u(z)$, представимых в виде*

$$\begin{aligned} u(z) = {} & C\log|z| + \iint\limits_{\mathbb{D}} \log|A_\beta(z,\zeta)| d\nu(\zeta) + \\ & + \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\mathrm{Re}\, \frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}} - 1\right] \varphi(e^{i\theta})\, d\theta, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.30) \end{aligned}$$

где $C \geq 0$ и $\beta > \alpha$ – любые числа, $A_\beta(z,\zeta)$ – элементарный фактор типа Бляшке (1.3), $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4), и $\varphi(e^{i\theta})$ – вещественнозначная функция класса $\lambda^{1,1}_{\beta-\alpha}$.

б) *Если функция $u(z)$ представима в виде (1.30), то почти для всех $\theta \in \in (-\pi,\pi)$ справедлива формула обращения*

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to1-0} r^{-\beta} D^{-\beta} u(re^{i\theta}) + \lim_{r\to1-0} \Phi_\beta(re^{i\theta}), \qquad (1.31)$$

где $\Phi_\beta(re^{i\theta})$ – *функция класса Харди* $h^1(\mathbb{D})$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Рассмотрим функцию

$$v_\alpha(z) = W^{-\alpha}\log|a_\alpha(z,\zeta)| = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\mathrm{Re}\int_0^{2\mathrm{Im}\,\zeta}\frac{\tau^\alpha d\tau}{\tau+i\zeta-iz}, \qquad z\in\mathbf{C}, \quad (2.1)$$

исследованную в [14], подразумевается, что при $z\in(\overline{\zeta},\zeta)$ интеграл (2.1) следует понимать в смысле главного значения Коши.

Лемма 2.1. *Пусть $\zeta\in G^+$ – фиксированная точка. Тогда :*

а) *если $-1<\alpha<\infty$, то функция $v_\alpha(z)$ гармонична в $\mathbf{C}\setminus[\overline{\zeta},\zeta]$ и допускает непрерывное продолжение на интервал $(\overline{\zeta},\zeta)$;*

б) *если $0<\alpha<\infty$, то функция $v_\alpha(z)$ допускает непрерывное продолжение на отрезок $[\overline{\zeta},\zeta]$ и всюду в $\mathbf{C}$ представима в виде*

$$v_\alpha(z) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\mathrm{Im}\,\zeta)^\alpha\log\frac{1}{|\overline{\zeta}-z|}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\mathrm{Im}\,\zeta}t^{\alpha-1}\log|\zeta-z-it|dt. \quad (2.2)$$

К тому же, $v_\alpha(z)$ субгармонична в $\mathbf{C}\setminus\{\overline{\zeta}\}$.

Доказательство. Если в (2.1) $\zeta=\xi+i\eta$ и $z=\zeta-iw$ ($w\in\mathbf{C}\setminus[0,2\eta]$), то очевидно $v_\alpha(\zeta-iw)=2\pi(\Gamma(\alpha+1))^{-1}\mathrm{Im}\,\Phi_\alpha(w)$, где

$$\Phi_\alpha(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\eta}\frac{t^\alpha dt}{t-w}, \qquad -1<\alpha<\infty.$$

Поэтому а) и первое утверждение б) непосредственно следуют из известных свойств интеграла типа Коши. Представление (2.2) следует из (2.1) интегрированием по частям.

Теперь мы готовы к доказательству утверждений 1° и 2° теоремы 2. Пусть $\rho>0$ и $z=x+iy\in\overline{G_\rho^+}=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Im}\,z\geq\rho\}$ – любые фиксированные числа. Условившись, что $\alpha\leq\beta\leq\gamma<\alpha+1$ положим

$$I=\iint\limits_{G+}d\mu(\zeta)\int_0^{+\infty}\sigma^{\gamma-1}\big|\log|a_\beta(z+i\sigma,\zeta)|\big|d\sigma\equiv I^{(1)}+I^{(2)}+I^{(3)}, \quad (2.3)$$

где

$$I^{(1)} = \int\int\limits_{G^+\setminus G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{+\infty} \sigma^{\gamma-1} \big| \log |a_\beta(z+i\sigma,\zeta)| \big| d\sigma,$$

$$I^{(2)} = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_\eta^{+\infty} \sigma^{\gamma-1} \big| \log |a_\beta(z+i\sigma,\zeta)| \big| d\sigma,$$

$$I^{(3)} = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{\eta} \sigma^{\gamma-1} \big| \log |a_\beta(z+i\sigma,\zeta)| \big| d\sigma \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

и оценим интегралы $I^{(i)}$ по отдельности. Используя (1.5) и хорошо известную формулу

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}dx}{(x+w)^\delta} = \frac{\Gamma(\delta-\lambda)}{\Gamma(\delta)} \frac{1}{w^{\delta-\lambda}}, \qquad \delta > \lambda > 0, |\arg w| < \pi, \tag{2.4}$$

получим

$$I^{(1)} \le \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta+1)} \int\int\limits_{G^+\setminus G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \frac{\tau^\beta d\tau}{(\tau+y-\eta)^{\beta+1-\gamma}} =$$

$$= c(\beta,\gamma) \int\int\limits_{G^+\setminus G_y^+} \eta^{\beta+1} d\mu(\zeta) \int_0^2 \frac{t^\beta dt}{(\eta t+y-\eta)^{\beta+1-\gamma}} \le c(\alpha,\beta,\gamma,\rho) \int\int\limits_{G^+\setminus G_y^+} \eta^{\alpha+1} d\mu(\zeta). \tag{2.5}$$

Далее, ввиду представления (1.5)

$$I^{(2)} \le \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \tau^\beta d\tau \int_\eta^{+\infty} \frac{\sigma^{\gamma-1} d\sigma}{(\sigma+\tau+y-\eta)^{\beta+1}}.$$

Если $0 < \gamma \le 1$, то прямая оценка показывает, что

$$I^{(2)} \le c(\beta) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta).$$

Если $\gamma > 1$, то ввиду очевидного неравенства $(a+b)^\lambda \le \max\{1, 2^{\lambda-1}\}(a^\lambda + b^\lambda)$ $(a, b, \lambda > 0)$ и формулы (2.4)

$$I^{(2)} \le \max\{1, 2^{\gamma-2}\} \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \tau^\beta d\tau \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\gamma-1} + \eta^{\gamma-1}}{(\sigma+\tau+y)^{\beta+1}} d\sigma \le$$

$$\le c(\beta,\gamma) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta).$$

Таким образом, для любого $\gamma > 0$

$$I^{(2)} \le c(\beta,\gamma) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma d\mu(\zeta) \le c(\beta,\gamma,\rho) \iint\limits_{G_y^+} \eta^{\alpha+1} d\mu(\zeta). \tag{2.6}$$

Для оценки $I^{(3)}$ при $0<\beta<\infty$ и $p-1<\beta\le p$ используем представление

$$\log|a_\beta(z,\zeta)| = -\operatorname{Re}\int_\eta^{2\eta}\frac{\tau^\beta d\tau}{(\tau+i\zeta-iz)^{\beta+1}}+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\beta-k}\left(\frac{\eta}{i\xi-iz}\right)^{\beta-k}-\operatorname{Re}\int_0^\eta\frac{\tau^{\beta-p}d\tau}{(\tau+i\zeta-iz)^{\beta-p+1}}$$
$$(0<\beta<\infty,\ p-1<\beta\le p),$$

получающееся интегрированием (1.5) по частям. Тогда очевидно

$$I^{(3)}\le\iint\limits_{G_y^+}d\mu(\zeta)\int_0^\eta\sigma^{\gamma-1}\left[\int_\eta^{2\eta}\frac{\tau^\beta d\tau}{|\tau+i\zeta-iz+\sigma|^{\beta+1}}+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\beta-k}\left(\frac{\eta}{|\xi-z-i\sigma|}\right)^{\beta-k}+\right.$$
$$\left.+\left|\operatorname{Re}\int_0^\eta\frac{\tau^{\beta-p}d\tau}{(\tau+i\zeta-iz+\sigma)^{\beta-p+1}}\right|\right]d\sigma\equiv J_1+J_2+J_3, \tag{2.7}$$

где $J_{1,2,3}$ – интегралы от слагаемых в квадратных скобках. Используя (2.4), легко проверить, что

$$J_1\le c(\alpha,\beta,\gamma,\rho)\iint\limits_{G_y^+}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta). \tag{2.8}$$

Заметив, что при любом $\delta\in(0,\beta]$ имеем $\eta^\delta\int_0^\eta\frac{\sigma^{\gamma-1}d\sigma}{(\sigma+y)^\delta}\le c(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho)\eta^{\alpha+1}$, получим

$$J_2\le c(\alpha,\beta,\gamma,\rho)\iint\limits_{G_y^+}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta). \tag{2.9}$$

Для оценки J_3 рассмотрим два случая. Спачала, если β – не целое, т. е. $p-1<\beta<p$, то

$$J_3\le\iint\limits_{G_y^+}d\mu(\zeta)\int_0^\eta\int_0^\eta\frac{\sigma^{\gamma-1}\tau^{\beta-p}d\sigma d\tau}{|\sigma+\tau+y-\eta|^{\beta-p+1}}=$$
$$=\iint\limits_{G_y^+}\eta^\gamma\,d\mu(\zeta)\int_0^1\int_0^1\frac{\sigma^{\gamma-1}\tau^{\beta-p}d\sigma d\tau}{|\sigma+\tau-1+y/\eta|^{\beta-p+1}}.$$

Поскольку для любого $\lambda\in(0,1)$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\sigma^{\gamma-1}\tau^{\beta-p}}{|\sigma+\tau-\lambda|^{\beta-p+1}}d\sigma d\tau\le c(\beta,\gamma),$$

то получим

$$J_3\le c(\beta,\gamma,\rho)\iint\limits_{G_y^+}\eta^{\alpha+1}d\mu(\zeta). \tag{2.10}$$

Пусть теперь β – целое, т. е. $\beta = p$. Тогда

$$J_3 = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^\eta \sigma^{\gamma-1} \left| \mathrm{Re} \int_0^\eta \frac{d\tau}{\tau + i\zeta - iz + \sigma} \right| d\sigma,$$

где интеграл под знаком модуля понимается в смысле главного значения Коши.

Отсюда следует, что

$$J_3 = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^\eta \sigma^{\gamma-1} \left| \mathrm{v.p.} \int_0^\eta \frac{\tau + \sigma + y - \eta}{(\tau + \sigma + y - \eta)^2 + (x-\xi)^2} d\tau \right| d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^\eta \sigma^{\gamma-1} \left| \frac{1}{2} \log \frac{(\sigma + y)^2 + (x-\xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x-\xi)^2} \right| d\sigma \equiv T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$T_1 = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_{\eta - y}^\eta \sigma^{\gamma-1} \log \left(\frac{(\sigma + y)^2 + (x-\xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x-\xi)^2} \right)^{1/2} d\sigma,$$

$$T_2 = \int\limits_{y < \mathrm{Im}\,\zeta \le 2y} \int d\mu(\zeta) \int_0^{\eta - y} \sigma^{\gamma-1} \log \left(\frac{(\sigma + y)^2 + (x-\xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x-\xi)^2} \right)^{1/2} d\sigma,$$

$$T_3 = \iint\limits_{G_{2y}^+} d\mu(\zeta) \int_0^{\eta - y} \sigma^{\gamma-1} \left| \frac{1}{2} \log \frac{(\sigma + y)^2 + (x-\xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x-\xi)^2} \right| d\sigma,$$

Ввиду того, что $1 \le \beta \le \gamma < \alpha + 1$, и очевидных неравенств $1/2(a+b)^2 \le a^2 + b^2 \le$ $\le (a+b)^2$ $(a, b > 0)$ имеем

$$T_1 \le \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_{\eta - y}^\eta \sigma^{\gamma-1} \log \left(\sqrt{2} \frac{\sigma + y}{\sigma + y - \eta} \right) d\sigma \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2} \log 2 + 2 \right) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta) \le c(\alpha, \gamma, \rho) \iint\limits_{G_y^+} \eta^{\alpha+1} d\mu(\zeta). \tag{2.11}$$

Легко показать, что T_2 допускает такую же оценку. К тому же

$$T_3 \le \iint\limits_{G_{2y}^+} \eta^{\gamma-1} \, d\mu(\zeta) \left[\int_0^{\eta/2 - y} \log \left(\sqrt{2} \frac{\eta - y - \sigma}{\sigma + y} \right) d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_{\eta/2 - y}^{\eta - y} \log \left(\sqrt{2} \frac{\sigma + y}{\eta - y - \sigma} \right) d\sigma \right] \le c \iint\limits_{G_{2y}^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta) \le c(\alpha, \gamma, \rho) \iint\limits_{G_{2y}^+} \eta^{\alpha+1} \, d\mu(\zeta). \tag{2.12}$$

Поэтому из (1.6) и (2.3) – (2.12) заключаем, что

$$I \le c(\alpha, \beta, \gamma, \rho) \iint\limits_{G+} \eta^{\alpha+1} \, d\mu(\zeta) < +\infty.$$

Это, очевидно, доказывает включение $I_\beta(z) \in M_\gamma$ $(\beta \le \gamma < \alpha + 1)$ и равенство (1.13), где интеграл абсолютно и равномерно сходится в $\overline{G_\rho^+}$. Более того, поскольку $M_{\gamma_1} \subset M_{\gamma_2}$ $(\gamma_1 > \gamma_2)$, то доказанное включение справедливо для любого

$\gamma \in (0, \alpha+1)$. По лемме 1.1 из [13] и лемме 3.2 из [10], $W^{-\beta} I_\beta(z)$ есть функция, непрерывная и субгармоническая в G^+. Таким образом, утверждение 1° и формула (1.13) доказаны. Формула (1.14) доказывается аналогично. Теперь заметим, что согласно (1.13) и (2.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} I_\alpha(x+iy)| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \iint\limits_{G+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \tau^\alpha d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau+y-\eta| dx}{(\tau+y-\eta)^2+(x-\xi)^2} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}\pi}{\Gamma(\alpha+2)} \iint\limits_{G+} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < +\infty.$$

Применение теоремы XX из [19] и теоремы 8 из [20] ведет к представлению (1.16), и, тем самым, доказано также утверждение 3°. Утверждение 4° доказывается тем же способом.

Следующие две леммы необходимы для доказательства утверждения 5°.

Лемма 2.2. *Пусть* α $(-1 < \alpha < \infty)$ *– любое число,* μ *– мера на* G^+*, удовлетворяющая условию (1.6), и* $n(\rho) = \mu(G^+_\rho) = \iint\limits_{G^+_\rho} d\mu$, $0 < \rho < \infty$. *Тогда*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \rho^{\alpha+1} n(\rho) = 0, \qquad \lim_{\rho\to+0} \rho^{\alpha+1} n(\rho) = 0.$$

Доказательство. Поскольку в обобщенном смысле

$$dn(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x+it),$$

то

$$\iint\limits_{G+} (\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) = -\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} dn(t) < +\infty.$$

Устремляя $\rho \to +\infty$ в неравенстве

$$-\int_\rho^{+\infty} t^{\alpha+1} dn(t) \geq \rho^{\alpha+1} n(\rho),$$

получим $\lim_{\rho\to+\infty} \rho^{\alpha+1} n(\rho) = 0$. Далее, пределы

$$\lim_{\rho\to+0} \rho^{\alpha+1} n(\rho) \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to+0} \int_\rho^{+\infty} t^\alpha n(t) dt$$

существуют и конечны ввиду равенства

$$-\int_\rho^{+\infty} t^{\alpha+1} dn(t) = \rho^{\alpha+1} n(\rho) + (\alpha+1) \int_\rho^{+\infty} t^\alpha n(t) dt,$$

которое легко получить интегрированием по частям. Теперь остается заметить, что по критерию сходимости Коши

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\alpha+1} n(\rho) \le \int_{\rho/2}^{\rho} t^{\alpha} n(t)dt = o(1) \quad npu \quad \rho \to +0.$$

Тем самым, лемма доказана.

Пусть $\zeta \in \mathbf{C}$ – произвольная фиксированная точка, и пусть

$$\delta_{\zeta}(E) = \begin{cases} 1, & \text{при } E \ni \zeta \\ 0, & \text{при } E \not\ni \zeta, \quad E \subset \mathbf{C} \end{cases}$$

есть δ-мера Дирака с единичной массой в ζ. Вообще говоря, мера Рисса ν, ассоциированная с функцией $u(z)$, субгармонической в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}$, определяется формулой $\nu = (2\pi)^{-1}\Delta u$, где Δ – оператор Лапласа. Эту формулу следует понимать в смысле обобщенных функций, т. е. в смысле того, что для любой функции $\varphi(z) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \varphi(z)d\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} u(z)\Delta\varphi(z)\, dm_2(z),$$

где m_2 – мера Лебега на Ω, а $C_0^{\infty}(\Omega)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω. Ниже мы будем отождествлять борелевскую меру ν с линейным функционалом

$$(\nu, \varphi) = \iint\limits_{\Omega} \varphi(z)d\nu(z), \qquad \varphi(z) \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Лемма 2.3. *При любых фиксированных α $(0 < \alpha < \infty)$ и $\zeta \in G^+$ мера Рисса $\mathcal{E}_{\alpha}$, ассоциированная с функцией $v_{\alpha}(z) = W^{-\alpha}\log|a_{\alpha}(z,\zeta)|$, представима в виде*

$$\mathcal{E}_{\alpha}(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}\delta_{\zeta}(E+it)dt, \quad \overline{E} \subset \mathbf{C}\setminus\{\overline{\zeta}\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi(z) \in C_0^{\infty}(\mathbf{C}\setminus\{\overline{\zeta}\})$ имеем

$$(\mathcal{E}_{\alpha}, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} v_{\alpha}(z)\Delta\varphi(z)\, dm_2(z).$$

Следовательно, согласно (2.2)

$$(\mathcal{E}_{\alpha}, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}\left[\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}} \log|z-\zeta+it|\Delta\varphi(z)\, dm_2(z)\right] dt.$$

Поскольку интеграл в квадратных скобках – мера Рисса, ассоциированная с функцией $\log|z-(\zeta-it)|$ и равная δ–мере Дирака, сосредоточенной в точке $\zeta - it$, то

$$(\mathcal{E}_{\alpha}, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}(\delta_{\zeta-it}, \varphi)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}\varphi(\zeta - it)dt.$$

Так как $\varphi(z) \in C_0^\infty(\mathbf{C} \setminus \{\overline{\zeta}\})$ – произвольная функция, то

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{2\eta} t^{\alpha-1} \delta_{\zeta - it}(E) dt, \qquad \overline{E} \subset \mathbf{C} \setminus \{\overline{\zeta}\}.$$

Тем самым, воспользовавшись тем, что $\delta_{\zeta - it}(E) = \delta_\zeta(E + it)$, приходим к (2.13).

Замечание. Мера $\mathcal{E}_\alpha$ сосредоточена на $(\overline{\zeta}, \zeta]$ и

$$\mathcal{E}_\alpha\left((\overline{\zeta}, \zeta]\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{2\eta} t^{\alpha-1} dt = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \eta^\alpha.$$

Если $E \subset \overline{G^+}$, то $\delta_\zeta(E + it) = 0$ $(\eta < t < 2\eta)$. Поэтому, при $E \subset \overline{G^+}$ формулу (2.13) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} t^{\alpha-1} \delta_\zeta(E + it) dt. \tag{2.14}$$

Переходя к доказательству утверждения 5° заметим, что μ – мера Рисса функции $I_\alpha(z)$, а μ_α – мера Рисса функции $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$. Ясно, что

$$(\mu_\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G+} W^{-\alpha} I_\alpha(z) \Delta\varphi(z)\, dm_2(z) \quad \text{при любой} \quad \varphi \in C_0^\infty(G^+).$$

Следовательно, согласно (1.13) и (2.14)

$$(\mu_\alpha, \varphi) = \iint_{G+} (\mathcal{E}_\alpha, \varphi) d\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \iint_{G+} \left[\int_0^{\eta} t^{\alpha-1} \varphi(\zeta - it) dt\right] d\mu(\zeta).$$

Поменяв порядок интегрирования, отсюда находим

$$(\mu_\alpha, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \left[\iint_{G+} \varphi(\zeta) d\mu(\zeta + it)\right] dt.$$

Так как $\varphi \in C_0^\infty(G^+)$, то последнее равенство можно записать в виде (1.18), где E $(\overline{E} \subset G^+)$ – любое борелевское множество. Более того, формула (1.18) имеет место и в случае, когда $E \subset G^+$ – любое неограниченное борелевское множество, удаленное от вещественной оси на положительное расстояние. Действительно, при любом $\rho > 0$

$$n_\alpha(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} n(\rho + \sigma) d\sigma, \tag{2.15}$$

где n_α и n определены посредством мер μ_α и μ. Интегрированием по частям и использованием леммы 2.2 приходим к заключению, что интеграл (2.15) сходится. Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Как было отмечено выше, доказательство теоремы 1 мы пропускаем, поскольку оно аналогично и во многом проще доказательства теоремы 2. Тем не менее, приведем без доказательства следующие две леммы, относящиеся к факторам типа Бляшке М. М. Джрбашяна [2], [3], которые, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

Лемма 2.1′. *Пусть $\zeta \in \mathbb{D}$, $\zeta \neq 0$ – фиксированная точка.*

а) *Если $-1 < \alpha < \infty$, то функция*

$$u_\alpha(z) \equiv r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |A_\alpha(z,\zeta)| = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} Re \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\alpha}{1-z\zeta^{-1}t} \frac{dt}{t}, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

(где интеграл понимается в смысле главного значения Коши на (ζ,ζ^*), $\zeta^* = 1/\overline{\zeta}$) гармонична в $\mathbb{C} \setminus [\zeta,\zeta^*]$ и допускает непрерывное продолжение на интервал (ζ,ζ^*).

б) *Если $0 < \alpha < \infty$, то функция $u_\alpha(z)$ допускает непрерывное продолжение на сегмент $[\zeta,\zeta^*]$ и представима в виде*

$$u_\alpha(z) = \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \log \left| \frac{\zeta}{1-\overline{\zeta}z} \right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{|\zeta|^2}^{1} (1-t)^{\alpha-1} \log \left| z - \frac{\zeta}{t} \right| dt, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

При этом, функция $u_\alpha(z)$ субгармонична в $\mathbb{C} \setminus \{\zeta^*\}$.

Лемма 2.3′. *При любых фиксированных α $(0 < \alpha < \infty)$ и $\zeta \in \mathbb{D}$, $\zeta \neq 0$ рисовская мера $\mathcal{E}_\alpha$, ассоциированная с функцией $u_\alpha(re^{i\theta}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |A_\alpha(re^{i\theta},\zeta)|$, представима в виде*

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{|\zeta|^2}^{1} (1-t)^{\alpha-1} \delta_\zeta(tE) dt,$$

где E – любое борелевское множество такое, что $\overline{E} \subset \mathbb{C} \setminus \{\zeta^*\}$. В частности, если $E \subset \overline{\mathbb{D}}$, то

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{|\zeta|}^{1} (1-t)^{\alpha-1} \delta_\zeta(tE) dt.$$

§3. СООТНОШЕНИЯ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ТИПА ГРИНА

В [10] получена формула в полуплоскости, аналогичная формуле Иенсена. Именно, при предположении, что функция $u(z)$ субгармонична в G^+ и такова, что для любого $\rho > 0$

$$\sup_{y>\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| \, dx \le C_\rho < +\infty, \tag{3.1}$$

установлено, что при любом $\rho > 0$ имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x+i\rho)\,dx = -\int_{\rho}^{+\infty}(t-\rho)\,dn(t) + \frac{1}{2}\limsup_{R\to+\infty} Ru(iR), \tag{3.2}$$

где последний предел конечен, а $n(t)$ – значение меры Рисса μ, ассоциированной с $u(z)$, в полуплоскости $G_t^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > t\}$, т. е.

$$n(t) = \mu(G_t^+) = \iint\limits_{G_t^+} d\mu.$$

При этом, формула (3.2) остается справедливой, если в ней верхний предел заменить на $\lim_{n\to\infty} R_n u(iR_n)$ по любой последовательности $R_n \to +\infty$, $n \to \infty$, такой, что $u(R_n) > -\infty, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.1. *Пусть $0 < \alpha < \infty$ и $u(z) \in S_\alpha^*(G^+)$. Тогда выполнены условия (1.6) и (1.23), где μ – мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$. Кроме того, справедлива формула*

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\pi}\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}u(z)\,dm_2(z) = \iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta). \tag{3.3}$$

Доказательство. Для любой функции $u(z) \in S_\alpha^*(G^+)$ выполнено условие (3.1). Умножив члены (3.2) на $y^{\alpha-1}$ и проинтегрировав по $(0, +\infty)$, получим $\limsup_{R\to+\infty} Ru(iR) = 0$. Отсюда следуют все утверждения леммы.

Вторая лемма этого параграфа содержит оценку для модуля потенциала типа Грина (1.2). Эта оценка получена с применением метода Хеймана [21].

Лемма 3.2. *Пусть $0 \le \alpha < \infty$ и μ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6). Тогда для каждого $\beta \ge \alpha$ неравенство*

$$|I_\beta(x+iy)| \le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^{\alpha+1}}\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

справедливо для всех $y \ge 1$, за исключением некоторого открытого множества $E \subset [1, +\infty)$ конечной логарифмической длины, т. е. такого, что $\int_E r^{-1}dr < +\infty$.

Доказательство. Используем представление

$$\log|a_\beta(z,\zeta)| = \log|a_0(z,\zeta)| + \operatorname{Re}\ F_\beta(z,\zeta), \qquad z, \zeta \in G^+ \tag{3.5}$$

(см. доказательство леммы 3.2 из [10]), где $|F_\beta(z,\zeta)| \le K_\beta$ и K_β – постоянная, не зависящая от $z,\zeta \in G^+$. При фиксированном $z = x+iy \in G^+$ положим

$$|I_\beta(x+iy)| \le \iint\limits_{G+} \big|\log|a_\beta(z,\zeta)|\big|\, d\mu(\zeta) \le \int\limits_{0<\mathrm{Im}\ \zeta\le y/2}\int \big|\log|a_\beta(z,\zeta)|\big|\, d\mu(\zeta) +$$

$$+\iint\limits_{G^+_{y/2}} |\mathrm{Re}\ F_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \iint\limits_{G^+_{y/2}} \big|\log|a_0(z,\zeta)|\big|\, d\mu(\zeta) \equiv J_1+J_2+J_3$$

и оценим последние интегралы по отдельности. Непосредственная оценка J_1 и J_2 сразу приводит к требуемому неравенству для всех $y>0$. Действительно, если $\zeta = \xi+\eta$, то

$$J_1 \le \int\limits_{0<\mathrm{Im}\ \zeta\le y/2}\int d\mu(\zeta)\int_0^{2\zeta}\frac{\tau^\beta d\tau}{(y+\tau-\eta)^{\beta+1}} \le \frac{c_\beta}{y^{\beta+1}}\int\limits_{0<\mathrm{Im}\ \zeta\le y/2}\int \eta^{\beta+1}\, d\mu(\zeta) \le$$

$$\le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^{\alpha+1}}\int\limits_{0<\mathrm{Im}\ \zeta\le y/2}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

$$J_2 \le K_\beta \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^{\alpha+1}}\iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta).$$

Для оценки J_3 положим

$$J_3 = \int\limits_{G^+_{y/2}\cap\{|\zeta-z|\ge y/2\}}\int \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| d\mu(\zeta) + \int\limits_{|\zeta-z|<y/2}\int \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| d\mu(\zeta) \equiv T_1+T_2.$$

При $\zeta \in G^+_{y/2}\cap\{|\zeta-z|\ge y/2\}$ очевидно

$$0 \le \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{4y\eta}{|\zeta-z|^2}\right) \le 8\frac{\eta}{y}.$$

Следовательно

$$T_1 \le \frac{8}{y}\int\limits_{G^+_{y/2}\cap\{|\zeta-z|\ge y/2\}}\int \eta\, d\mu(\zeta) \le \frac{c_\alpha}{y^{\alpha+1}}\iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta).$$

Переходя к оценке T_2, предположим, что $\varepsilon>0$ – фиксированное число. Будем говорить, что число $y \ge 1$ ε–*нормально*, если

$$\int\limits_{y-h<\mathrm{Im}\ \zeta<y+h}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < \frac{h\varepsilon}{y} \qquad \text{для всех} \quad h\in(0,y/2]. \tag{3.6}$$

Далее, через R_ε обозначим множество всех ε–нормальных чисел и докажем, что при любом $\varepsilon>0$ множество $[1,+\infty)\setminus R_\varepsilon$ имеет конечную логарифмическую длину. Ввиду (3.6), для каждого $y \in [1, +\infty) \setminus R_\varepsilon$ существует число $h_y \in (0, y/2]$ такое, что

$$\int\limits_{y-h_y<\operatorname{Im}\zeta<y+h_y}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) \ge \frac{h_y\varepsilon}{y}.$$

Тем самым, множество $[1, +\infty) \setminus R_\varepsilon$ покрыто набором $\{L_y\}_y$ открытых интервалов $L_y = (y - h_y, y + h_y)$, $y \in [1, \infty) \setminus R_\varepsilon$. Очевидно, что существует не более чем счетное множество $\{L_{y_k}\}_k \subset \{L_y\}$, покрывающее $[1, \infty) \setminus R_\varepsilon$. Можем также добиться того, чтобы ни одна точка луча $[1, \infty)$ не была покрыта более чем двумя интервалами L_{y_k}. Тем самым

$$\sum_k \int\limits_{y_k-h_{y_k}<\operatorname{Im}\zeta<y_k+h_{y_k}}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) \le 2 \iint\limits_{G+} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta).$$

Полагая $E = \cup_k L_{y_k}$ и пользуясь двумя последними неравенствами, получим

$$\int_E \frac{dt}{t} \le \sum_k \int_{L_{y_k}} \frac{dt}{t} = \sum_k \log\left(1 + \frac{2h_{y_k}}{y_k - h_{y_k}}\right) \le 4 \sum_k \frac{h_{y_k}}{y_k} \le$$
$$\le \frac{4}{\varepsilon} \sum_k \int\limits_{y_k-h_{y_k}<\operatorname{Im}\zeta<y_k+h_{y_k}}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) \le \frac{8}{\varepsilon} \iint\limits_{G+} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta).$$

Далее, докажем неравенство (3.4) для всех чисел $y \ge 1$, ε–нормальных в смысле (3.6), т. е. для множества R_ε, где ε будет выбрано ниже. Рассмотрим следующие кольцевые множества : $D_k = \left\{\zeta : \frac{y}{2^{k+1}} \le |\zeta - z| < \frac{y}{2^k}\right\}$, $\quad k = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\{\zeta : |\zeta - z| < y/2\} = \{z\} \cup (\cup_{k=1}^{\infty} D_k)$. Кроме того, ввиду (3.6) для всех $h \in (0, y/2]$

$$\iint\limits_{\{z\}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) \le \int\limits_{y-h<\operatorname{Im}\zeta<y+h}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < \frac{h\varepsilon}{y}.$$

Устремляя здесь $h \to +0$, получим $\iint\limits_{\{z\}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) = 0$. Следовательно

$$T_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \iint\limits_{D_k} \log\left|\frac{\overline{\zeta} - z}{\zeta - z}\right| d\mu(\zeta). \tag{3.7}$$

С другой стороны, при $\zeta \in D_k$

$$\log\left|\frac{\overline{\zeta} - z}{\zeta - z}\right| = \log\left|1 + \frac{z - \overline{z}}{\zeta - z}\right| \le \log\left(1 + \frac{2y}{|\zeta - z|}\right) \le \log(5 \cdot 2^k).$$

Так как число y ε-нормально, то взяв $h = y/2^k$, получим

$$T_2 \le \left(\frac{2}{y}\right)^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{\infty} \log(5 \cdot 2^k) \iint\limits_{D_k} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) \le \left(\frac{2}{y}\right)^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{\infty} \log(5 \cdot 2^k) \times$$
$$\times \int\limits_{y-2^{-k}y<\operatorname{Im}\zeta<y+2^{-k}y}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) \le \varepsilon \left(\frac{2}{y}\right)^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(5 \cdot 2^k)}{2^k} \le \frac{2^{\alpha+3}}{y^{\alpha+1}}\varepsilon.$$

Беря $\varepsilon = \iint\limits_{G^+} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta)$, приходим к требуемому результату.

Лемма 3.3. *Пусть $0 < \alpha < \infty$ и μ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6). Тогда для любого $\beta \geq \alpha$ справедливы следующие соотношения :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_\beta(x+iy)|dx \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha} \iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta), \qquad y > 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I_\beta(x+iy)dx = -\int_y^{+\infty} (t-y)dn(t), \qquad y > 0, \tag{3.9}$$

$$I_\beta(z) \leq C_\beta \iint\limits_{G^+} \frac{(\mathrm{Im}\,\zeta)^{\beta+1}}{|\overline{\zeta}-z|^{\beta+1}}\, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+. \tag{3.10}$$

Доказательство. Обозначив $z = x+iy, \zeta = \xi + i\eta$, при фиксированном $y > 0$ положим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_\beta(x+iy)|dx \leq \iint\limits_{G^+} d\mu(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\log|a_\beta(z,\zeta)|\big|dx \equiv J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2}\int d\mu(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\log|a_\beta(x+iy,\zeta)|\big|dx,$$

$$J_2 = \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \int_{|x|>\eta} \big|\log|a_\beta(x+iy,\zeta)|\big|dx,$$

$$J_3 = \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \int_{-\eta}^{\eta} \big|\log|a_\beta(x+iy,\zeta)|\big|dx.$$

Оценим эти интегралы по отдельности. Используя представление (1.5), получим

$$J_1 \leq c(\beta) \int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2}\int d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \frac{\tau^\beta d\tau}{(y+\tau-\eta)^\beta} \leq$$

$$\leq \frac{c(\beta)}{y^\beta} \int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2}\int \eta^{\beta+1}\, d\mu(\zeta) \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha} \int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2}\int \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

$$J_2 \leq \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \int_{|x|>\eta} dx \int_0^{2\eta} \frac{\tau^\beta d\tau}{((y+\tau-\eta)^2 + x^2)^{(\beta+1)/2}} \leq$$

$$\leq \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \int_{|x|>\eta} \frac{dx}{|x|^{\beta+1}} \int_0^{2\eta} \tau^\beta d\tau \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha} \iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta).$$

Для оценки интеграла J_3 используем представление (3.5). Тогда получим

$$J_3 \le \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\log|a_0(z,\zeta)|\right| dx + 2K_\beta \iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta \, d\mu(\zeta).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| dx = \min\{y,\eta\}, \qquad z,\zeta\in G^+, z=x+iy, \zeta=\xi+i\eta,$$

то

$$J_3 \le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha} \iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

и неравенство (3.8) доказано. Далее заметим, что для потенциала $I_\beta(z) \equiv I_\beta(z,\mu)$ выполнена формула Иенсена (3.2). Кроме того, по лемме 3.2 $\overline{\lim}_{R\to+\infty} R|I_\beta(iR)| = 0$. Тем самым, (3.9) установлено. Наконец, (3.10) непосредственно следует из неравенства

$$\log|a_\beta(z,\zeta)| \le C_\beta \left(\frac{\eta}{|\overline{\zeta}-z|}\right)^{\beta+1}, \qquad z,\zeta\in G^+, \quad -1<\beta<\infty,$$

доказанного в лемме 3.1 из [8].

Лемма 3.4. *В условиях леммы 3.3 справедливы следующие соотношения :*

а) $$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\pi}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}dy \int_{-\infty}^{+\infty} I_\alpha(x+iy)dx = \iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta). \qquad (3.11)$$

б) *Если $\beta>\alpha$, то $I_\beta(z)\in S^*_\alpha(G^+)$, и следовательно*

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\pi}\iint\limits_{G^+} y^{\alpha-1} I_\beta(x+iy)dxdy = \iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta). \qquad (3.12)$$

в) *Для любого $\alpha>0$ существует мера ν на G^+, удовлетворяющая условию (1.6) и такая, что $I_\alpha(z,\nu)\notin S^*_\alpha(G^+)$.*

Доказательство. Если $\beta>\alpha$, то используя (3.10) легко показать, что

$$\iint\limits_{G^+} y^{\alpha-1} I^+_\beta(x+iy)dxdy \le c(\alpha,\beta)\iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

и утверждения а) и б) следуют из лемм 3.1 – 3.3. Контрпример с дискретной мерой, который доказывает утверждение в), построен в работе [8].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Первая лемма, доказанная ниже, является обобщением результата М. Тейблсона ([18], теорема 4).

Лемма 4.1. *Пусть $0 < \alpha < 2$, $1 \le p, q \le \infty$ и $f(x) \in L^1\left(dx/(1+x^2)\right)$, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx/(1+x^2) < +\infty$. Далее, пусть $u = u(x,y)$ – интеграл Пуассона функции $f(x)$ в G^+. Тогда величины $B_\alpha^{p,q}(f)$ и $L_\alpha^{p,q}(u)$ эквивалентны, т. е. существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что $c_1 B_\alpha^{p,q}(f) \le L_\alpha^{p,q}(u) \le c_2 B_\alpha^{p,q}(f)$.*

Для частного случая $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ доказательство леммы 4.1 можно найти в [18] (теорема 4) или в монографии И. М. Стейна [22] (гл. V, §5, предложение 8′). Мы не приводим доказательства леммы 4.1, так как метод доказательства по существу тот же, что в указанной монографии Стейна.

Следствие. Пусть $0 < \alpha < 2$, $1 \le p_0 \le \infty$ и $f(z) \in H^{p_0}(G^+)$. Тогда нижеследующие утверждения эквивалентны :

$$\text{а)}\ f''(z) \in H^1_{2-\alpha}, \qquad \text{б)}\ f(x) = \lim_{y \to +0} f(x+iy) \in \Lambda_\alpha^{p_0}.$$

Обозначим через $\widetilde{\psi}(x)$ функцию, сопряженную с $\psi(x)$, т. е. ее преобразование Гильберта

$$\widetilde{\psi}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\varepsilon} \frac{\psi(t)dt}{x-t}, \quad \text{если} \quad \psi(t) \in L^p \quad (1 \le p < \infty)$$

или

$$\widetilde{\psi}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\varepsilon} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right) \psi(t)dt, \quad \text{если} \quad \psi(t) \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right).$$

Отметим, что $L^p \subset L^1(dt/(1+t^2))$ при любом p $(1 \le p \le \infty)$, и $BMO(\mathbb{R}) \subset$ $\subset L^1(dt/(1+t^2))$.

Лемма 4.2. *Пусть $0 < \alpha < \infty$, $1 \le p, q \le \infty$ и $1 < p_0 < \infty$. Тогда*

а) если $\psi(x) \in \Lambda_\alpha^{p_0,p,q}$, то $\widetilde{\psi}(x) \in \Lambda_\alpha^{p_0,p,q}$,

б) если $\psi(x) \in \Lambda_\alpha^{\infty,p,q}$, то $\widetilde{\psi}(x) \in \Lambda_\alpha^{BMO,p,q}$,

в) если $\psi(x) \in \Lambda_\alpha^{BMO,p,q}$, то $\widetilde{\psi}(x) \in \Lambda_\alpha^{BMO,p,q}$.

Доказательство. Не теряя общности можно считать, что функция $\psi(x)$ вещественнозначна. Кроме того, $\widetilde{\psi} \in BMO$, если $\psi \in L^\infty$ или $\psi \in BMO$ (см., напр., [17]). Введем в рассмотрение функцию

$$U(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-t, y)\psi(t)dt,$$

и функцию

$$\widetilde{U}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-t,y)\psi(t)dt, \quad \text{если} \quad \psi(t) \in L^{p_0}\,(1 < p_0 < \infty),$$

$$\widetilde{U}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[Q(x-t,y) + \frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}\right]\psi(t)dt, \quad \text{если} \quad \psi \in L^\infty \quad \text{или} \quad \psi \in \mathrm{BMO}.$$

Здесь $P(x,y) = y/(\pi(x^2+y^2))$ и $Q(x,y) = x/(\pi(x^2+y^2))$, соответственно – ядро и сопряженное ядро Пуассона. Заметим, что

$$\widetilde{U}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-t,y)\widetilde{\psi}(t)dt,$$

и почти для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем $\lim_{y\to+0} U(x,y) = \psi(x)$ и $\lim_{y\to+0}\widetilde{U}(x,y) = \widetilde{\psi}(x)$. Отсюда, в силу лемм А и 4.1 следуют все необходимые утверждения, поскольку U и $\widetilde{U}$ – гармонически сопряженные функции.

Для функций $f(z) = f(x+iy)$, определенных в G^+, вместо интегродифференцирования Вейля по переменной y будем иногда пользоваться таким же интегродифференцированием по переменной x. Функции

$$W_{x(\pm)}^{-\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(z \mp \sigma)d\sigma, \quad \alpha > 0$$

будем называть, соответственно, левосторонним и правосторонним вейлевскими первообразными (интегралами) порядка α по переменной x от функции $f(z)$. Аналогично, производная $f(z)$ порядка $\alpha > 0$ определяется формулой

$$W_{x(\pm)}^{\alpha} = (\pm1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} W_{x(\pm)}^{-(n-\alpha)},$$

где n – целое число, определенное неравенствами $n-1 < \alpha \le n$.

Лемма 4.3. а) *Класс $H_\alpha^1(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ совпадает с множеством функций $g(z)$, представимых в виде*

$$g(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{(it-iz)^{\beta+1}}dt, \quad z \in G^+, \tag{4.1}$$

где $\beta > \alpha$ – любое число, $\varphi(t) \equiv \varphi_\beta(t)$ – любая вещественнозначная функция, k раз дифференцируемая в $\mathbb{R}$ (k – целое число, определяемое из неравенств $k < \beta - \alpha \le k+1$) и такая, что

$$\varphi^{(k)}(t) \in \Lambda_{\beta-\alpha-k}^{p} \quad \text{при некотором} \quad p, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{4.2}$$

б) *Если функция $g(z)$ представима в виде (4.1)–(4.2) с $\beta \in (\alpha, \alpha+1)$, то почти для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to+0} W^{-\beta} Re\ g(x+iy). \tag{4.3}$$

Доказательство. а) Пусть $0 < \alpha < \infty$ и $g(z) \in H^1_\alpha$ – какая-либо функция. Полагая $\beta > \alpha$, введем в рассмотрение функцию $\psi(z) = e^{i(\alpha-\beta)\pi/2} W_y^{-\alpha} g(z)$. Как легко проверить, $\psi(z) \in H^1(G^+)$. Тем самым, имеет место представление Пуассона

$$\mathrm{Re}\ \psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{Re}\ \frac{1}{\pi i(t-z)}\right] \mathrm{Re}\ \psi(t)dt$$

и

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\ \psi(t)}{t-z}dt. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что

$$e^{i(\alpha-\beta)\pi/2} g(z) = W_y^\alpha \psi(z), \tag{4.5}$$

так как очевидно $H^1_\alpha(G^+) \subset M_\gamma$ для всех $\gamma \in (0, \alpha+1)$, и, тем самым, оператор Вейля обратим (т. е. $W_y^\alpha W_y^{-\alpha} = W^0$) в классах $H^1_\alpha(G^+)$ (см. [15], формулу (1.19)). Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$W_y^\alpha \left[\frac{1}{\pi i(t-z)}\right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \frac{1}{[i(t-z)]^{\alpha+1}}, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{[i(t-z)]^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} e^{i(\alpha-\beta)\pi/2} \left[W_{t(+)}^{-(\beta-\alpha)} \frac{1}{(it-iz)^{\beta+1}}\right]. \tag{4.7}$$

Из формул (4.4) – (4.7) вытекает представление

$$g(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\ \psi(t) \left[W_{t(+)}^{-(\beta-\alpha)} \frac{1}{(it-iz)^{\beta+1}}\right] dt.$$

Поменяв порядок интегрирования, заключаем, что

$$g(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_{(-)}^{-(\beta-\alpha)} \mathrm{Re}\ \psi(t)}{(it-iz)^{\beta+1}}dt. \tag{4.8}$$

Теперь остается только показать, что функция $\varphi(t) = W_{(-)}^{-(\beta-\alpha)} \mathrm{Re}\ \psi(t)$ удовлетворяет условию (4.2). Для этого мы докажем, что этому условию удовлетворяет функция $f(t) = W_{(-)}^{-(\beta-\alpha)}\psi(t)$. Не теряя общности, можно считать, что

$0 < \beta - \alpha \leq 1$, т. е. $k = 0$ (при $k \geq 1$ интеграл (4.8) проинтегрируем по частям k раз). Сначала предположим, что $0 < \beta - \alpha < 1$. Ясно, что функция $f(t)$ допускает голоморфное продолжение в G^+ :

$$f(x+iy) = W_{x(-)}^{-(\beta-\alpha)}\psi(x+iy) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^{+\infty} \sigma^{\beta-\alpha-1}\psi(\sigma+x+iy)d\sigma.$$

Как следует из результатов [23] (теоремы G и H), интеграл Вейля $W_x^{-\gamma}$ $(0 < \gamma < < 1)$ является ограниченным оператором из $H^1(G^+)$ в $H^{1/(1-\gamma)}(G^+)$. Тем самым, $f(z) \in H^{1/(1-\beta+\alpha)}(G^+)$. Далее, для операторов Вейля W_x^γ и W_y^γ справедливы неравенства

$$\|W^\gamma F\|_{H^1_\lambda} \leq c(\gamma,\lambda)\|F\|_{H^1_{\lambda-\gamma}}, \tag{4.9}$$

$$\|W^{-\gamma} F\|_{H^1_{\lambda-\gamma}} \leq c(\gamma,\lambda)\|F\|_{H^1_\lambda}, \qquad 0 < \gamma < \lambda, \tag{4.10}$$

которые доказываются тем же способом, что и лемма A, пользуясь (4.9) и (4.10). Действительно, по лемме A $g'(z) \in H^1_{\alpha+1}(G^+)$, а по (4.10) $\psi'(z) \in H^1_1(G^+)$. Тем самым, $f'(z) \in H^1_{1-\beta+\alpha}(G^+)$. По той же причине $f'(z) = W_x^{-(\beta-\alpha)}\psi'(z) \in \in H^1_{1-\beta+\alpha}(G^+)$. Ввиду леммы 4.1, $f(x) = \lim_{y\to+0} f(x+iy) \in \Lambda_{\beta-\alpha}^{1/(1-\beta-\alpha)}$. В случае когда $\beta - \alpha = 1$ то же рассуждение приводит к включениям $f(z) \in \in H^\infty(G^+)$ и $f(x) \in \Lambda_1^\infty$. Для доказательства обратного утверждения предположим, что $g(z)$ – функция, представимая в виде (4.1) – (4.2) при некотором $\beta > \alpha$. Не теряя общности можно считать, что $\alpha < \beta \leq \alpha + 1$, т. е. $k = 0$ (при $k \geq 1$ интеграл (4.1) проинтегрируем по частям k раз). Рассмотрим по отдельности три случая : $1 < p < \infty$, $p = 1$ и $p = \infty$. В силу теорем вложения классов Бесова (см., напр., [18], теорему 9, или [22], гл. V, раздел 6.7)

$$\Lambda_\gamma^1 \subset \bigcap_{1<q<1/(1-\gamma)} L^q(\mathbb{R}) \quad (0 < \gamma \leq 1).$$

Следовательно, случай $p = 1$ приводится к случаю $1 < p < \infty$. Приведем полное доказательство только для наиболее сложного случая $p = \infty$. Рассмотрим функции

$$U(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-t,y)\varphi(t)dt,$$

$$\widetilde{U}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[Q(x-t, y) + \frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}\right] \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-t, y)\widetilde{\varphi}(t)dt,$$

$$F(z) = U(z) + i\widetilde{U}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{(t-z)(1+t^2)}\varphi(t)dt, \qquad z = x+iy. \tag{4.11}$$

По лемме 4.2 $\widetilde{\varphi}(x) \in \Lambda^{BMO}_{\beta-\alpha}$, поскольку $\varphi(x) \in \Lambda^{\infty}_{\beta-\alpha}$. Очевидно, что некасательные пределы $F_{\pm}(x) = \lim_{z\to x, z\in G^{\pm}} F(z)$ тоже принадлежат классам $\Lambda^{BMO}_{\beta-\alpha}$. В частности, $F_{\pm}(x) \in L^2(dx/(1+x^2))$ (см., например, [17]). Функция $\Phi(z) = F(z)/(i+z)$ приналлежит классу $H^2(G^+)$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)dt}{t-\overline{z}} = 0, \qquad z \in G^+.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(t)\left[\frac{1}{t-\overline{z}} - \frac{1}{t+i}\right]dt = 0, \qquad z \in G^+, \tag{4.12}$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_-(t)\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-i}\right]dt = 0, \qquad z \in G^+. \tag{4.13}$$

Далее, дифференцируя (4.12) и (4.13) по переменной y посредством оператора Вейля W^{β}, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(t)dt}{(t-\overline{z})^{\beta+1}} = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(t)dt}{(t-z)^{\beta+1}} = 0, \qquad z \in G^+, \tag{4.14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(x-t)dt}{(t-iy)^{\beta+1}} = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(x+t)dt}{(t-iy)^{\beta+1}} = 0, \qquad z \in G^+. \tag{4.15}$$

Интеграл в (4.11) можно рассматривать как интеграл типа Коши от функции $\omega(t,z) = 2(1+tz)\varphi(t)/(1+t^2)$. Согласно формулам Сохоцкого–Племеля

$$F_+(x) - F_-(x) = \omega(x,x) = 2\varphi(x) \quad \text{почти для всех} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Используя формулы (4.14) – (4.16), преобразуем функцию $g(z)$:

$$\begin{aligned} g(z) = &\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(t) - F_-(t)}{[i(t-z)]^{\beta+1}}dt = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(x+t) + F_+(x-t) - 2F_+(x)}{[i(t-iy)]^{\beta+1}}dt. \end{aligned}$$

Далее, оценивая получаем

$$\|g\|_{H^1_\alpha} \le c(\alpha,\beta) B^{1,1}_{\beta-\alpha}(F_+) < +\infty.$$

Наконец, для установления формулы (4.3) применяем к обеим частям представления (4.1) оператор Вейля $W_y^{-\beta}$ и устремляем $y \to +0$. Это завершит доказательство леммы 4.3.

Теперь нетрудно доказать и теорему 3. Пусть $0 < \alpha < \infty$, $\beta > \alpha$ – любые числа, и пусть $u(z) \in S^*_\alpha(G^+)$ – какая–либо функция. По лемме 3.1 мера Рисса μ, ассоциированная с $u(z)$, удовлетворяет условию (1.24), а по лемме 3.4 потенциал типа Грина $I_\beta(z) \equiv I_\beta(z,\mu)$ принадлежит $S^*_\alpha(G^+)$. Следовательно, гармоническая функция $h(z) = u(z) - I_\beta(z)$ принадлежит классу $S^*_\alpha(G^+)$, т. е. классу $h^1_\alpha(G^+)$. Поскольку оператор гармонического сопряжения – ограниченный оператор из h^1_α в h^1_α (см., например, [24] или [5]), то функция $g(z)$ ($\mathrm{Re}\ g(z) = h(z)$) принадлежит $S^*_\alpha(G^+)$, и остается только применить лемму 4.3. Обратно, если функция $u(z)$ представима в виде (1.27) – (1.28), то, опять же по леммам 3.4 и 4.3, $u(z) \in S^*_\alpha(G^+)$. Тем самым, класс $S^*_\alpha(G^+)$ совпадает с множеством всех субгармонических функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям (1.6) и (1.23). Для доказательства формулы обращения (1.29) используем некоторые свойства потенциалов типа Грина А. М. Джрбашяна [16], записанного в верхней полуплоскости G^+ :

$$I^*_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} \log|b_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \quad z \in G^+,$$

$$b_\beta(z,\zeta) = \exp\left[-\int_0^\eta \left(\frac{1}{(\tau + i\zeta - iz)^{\beta+1}} + \frac{1}{(i\bar\zeta - iz - \tau)^{\beta+1}}\right)\tau^\beta\, d\tau\right], \ \zeta = \xi + i\eta.$$

Повторяя рассуждения доказательств леммы 1.3 из [13] и теоремы 2, можно показать, что функция $W_y^{-\beta} I^*_\beta(z)$ $(\alpha < \beta < \alpha + 1)$ непрерывна и субгармонична в G^+, и что справедливо представление

$$W^{-\beta} I^*_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} W^{-\beta} \log|b_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \quad z \in G^+.$$

Так как для любой фиксированной точки $\zeta \in G^+$ имеем $W^{-\beta}\log|b_\beta(z,\zeta)| < 0$ $(z \in G^+)$, то функция $W^{-\beta} I^*_\beta(z)$ неположительна в G^+ и допускает представление

$$W^{-\beta}I_\beta^*(z) = Cy + I_0(z,\lambda) + h_\beta(z), \quad z = x+iy \in G^+,$$

где C – неположительная постоянная, λ – мера в G^+ такая, что

$$\iint\limits_{G^+} \frac{\operatorname{Im}\zeta}{1+|\zeta|^2} d\lambda(\zeta) < +\infty,$$

а $h_\beta(z)$ – интеграл Пуассона–Стилтьеса. По теореме Литтлвуда (см., например, [17]), почти при всех $x \in \mathbb{R}$ функция $W^{-\beta}I_\beta^*(z)$ имеет конечные граничные значения $\lim_{y\to+0} W^{-\beta}I_\beta^*(x+iy)$. С другой стороны, эти значения нулевые, так как

$$W^{-\beta}\log|b_\beta(x,\zeta)| = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

(см. [13], теорему 2.1), и по лемме Фату

$$\limsup_{y\to+0} |W^{-\beta}I_\beta^*(z)| \le \iint\limits_{G^+} \limsup_{y\to+0} \left|W^{-\beta}\log|b_\beta(z,\zeta)|\right| d\mu(\zeta) = 0.$$

Кроме того, функция

$$\Psi_\beta(z) = W^{-\beta}I_\beta^*(z) - W^{-\beta}I_\beta(z) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\operatorname{Re} \iint\limits_{G^+} \left[\int_\eta^{2\eta} \frac{\tau^\beta d\tau}{\tau + i\zeta - iz} - \int_0^\eta \frac{\tau^\beta d\tau}{i\zeta - iz - \tau}\right] d\mu(\zeta)$$

допускает представление

$$\Psi_\beta(z) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \iint\limits_{G^+} \eta^{\beta+1} \left[\int_0^1 \frac{\eta\sigma + y}{(\eta\sigma+y)^2 + (\xi - x)^2}\left((1+\sigma)^\beta - (1-\sigma)^\beta\right) d\sigma\right] d\mu(\zeta)$$

и она гармонична и неотрицательна в G^+. Применив к (1.27) оператор Вейля $W_y^{-\beta}$ порядка β, получим

$$W^{-\beta}u(x+iy) = W^{-\beta}I_\beta(x+iy) + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i(t-z)}\right]\varphi(t)dt =$$
$$= W^{-\beta}I_\beta^*(x+iy) - \Psi_\beta(x+iy) + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^2+y^2}.$$

Полагая, что $x \in \mathbb{R}$ фиксировано, устремим $y \to +0$ и придем к (1.29), чем и завершим доказательство теоремы 3.

В заключение приведем формулировки двух теорем, являющихся усилениями теорем 1 и 2 из [10]. Их доказательства вполне аналогичны доказательствам леммы 4.3 и теорем 3 и 4.

Теорема 5. **а)** *Класс $S_\alpha^*(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в G^+ в виде*

$$u(z)=\iint\limits_{G^+}\log|a_\beta(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta)+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[Re\ \frac{1}{(it-iz)^{\alpha+1}}\right]d\psi(t), \qquad (4.17)$$

где $\beta>\alpha$ – любое число, $\mu(\zeta)$ – мера в G^+, удовлетворяющая условию (1.6), а $\psi(t)$ – любая вещественнозначная функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, принадлежащая Λ_1^∞.

б) *Если функция $u(z)$ представима в виде (4.17), то ассоциированная с нею мера Рисса совпадает с μ. Кроме того, если число $\beta\in(\alpha,\alpha+1)$ не целое, то*

$$\psi(x)=\lim_{y\to+0}\int_0^x W^{-\alpha}u(t+iy)dt+\lim_{y\to+0}\int_0^x\Psi_{\alpha,\beta}(t+iy)dt, \qquad x\in\mathbb{R},$$

где $\Psi_{\alpha,\beta}(x+iy)$ – функция класса $h^1(G^+)$.

Теорема 6. **а)** *Класс $S_\alpha^*(\mathbb{D})$ $(0<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z)=C\log|z|+\iint\limits_{\mathbb{D}}\log|A_\beta(z,\zeta)|d\nu(\zeta)+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mathrm{Re}\ \frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{\alpha+1}}-1\right]d\psi(\theta), \quad z\in\mathbb{D}, \qquad (4.18)$$

где $\beta>\alpha$ – любое число, $\nu(\zeta)$ – мера в $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4), а $\psi(\theta)$ – любая вещественнозначная функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$, принадлежащая классу $\lambda_1^{1,1}$.

б) *Если функция $u(z)$ представима в виде (4.18), то*

$$\psi(\theta)=\lim_{r\to1-0}\int_0^\theta r^{-\alpha}D^{-\alpha}u(re^{it})dt+\lim_{r\to1-0}\int_0^\theta\Psi_{\alpha,\beta}(re^{it})dt, \qquad \theta\in[-\pi,\pi],$$

где $\Psi_{\alpha,\beta}(re^{i\theta})$ – функция из класса Харди $h^1(\mathbb{D})$.

ABSTRACT. The paper establishes some useful properties of the Green type potentials for the unit disk and for the half–plane of the complex plane, constructed by means of the Blaschke type factors of M. M. Djrbashian and similar factors of A. M. Jerbashian and G. V. Mikaelian.

The main results of the paper are some Riesz type representations for some weighted classes of subharmonic functions. These results are improvements of the representations of holomorphic and harmonic functions obtained by M. M. Djrbashian and F. A. Shamoyan in the disk and by A. M. Jerbashian in the half–plane. Here these representations are extended on subharmonic functions and representing measures are modified by the use of Besov's functional classes. Also the similarities of the Stieltjes inversion formula are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.– Л., 1941.
2. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
3. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщения Инст. Матем. и Мех. АН Арм. ССР, вып. 2, стр. 3 – 40, 1940.
4. Ф. А. Шамоян, " Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 13, № 5 – 6, стр. 405 – 422, 1978.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Leipzig, 1988.
6. Ф. А. Шамоян, "О параметрическом представлении классов Неванлинны–Джрбашяна", ДАН Арм. ССР, т. 90, № 3, стр. 99 – 103, 1990.
7. Ф. А. Шамоян, " Некоторые замечания о параметрическом представлении классов Неванлинны–Джрбашяна", Мат. заметки, т. 52, № 1, стр. 128 – 140, 1992.
8. А. М. Джрбашян, " Параметрические представления некоторых классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой Цудзи", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 5, стр. 451 – 422, 1987.
9. К. Л. Аветисян, "О параметрическом представлении некоторых классов функций, голоморфных в полуплоскости", Деп. в Арм. НИИНТИ, № 3, стр. 2, № 5, 14 октяб., 1992.
10. К. Л. Аветисян, "О представлениях некоторых классов функций, субгармонических в единичным круге и полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 3 – 15, 1994.
11. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
12. М. М. Джрбашян, " Классы функций и их параметрическое представление", Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965, с. 118 – 137, Наука, Москва, 1966.
13. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 34 - 49, 1994.
14. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 15, № 6, стр. 461 – 474, 1980.
15. А. М. Джрбашян, "Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для функций, мероморфных в полуплоскости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, № 3, стр. 213 – 279, 1986.
16. А. М. Джрбашян, "Функции типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 18, № 6, стр. 409 – 440 1983.

17. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, N.Y., 1981.
18. M. H. Taibleson, " On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, I. Principle properties", J. Math. Mech., vol. 13, pp. 407 – 479, 1964.
19. В. И. Крылов, "О функциях, регулярных в полуплоскости", Мат. сборник, т. 6 (48), № 1, стр. 95 – 138, 1939.
20. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, сер. мат., т. 5, стр. 73 – 91, 1959.
21. W. K. Hayman, " Questions of regularity connected with the Phragmén–Lindelöf principle", J. Math. pures et appl., vol. 35, pp. 115 – 126, 1956.
22. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.
23. E. M. Stein, G. Weiss, " On the theory of harmonic functions of several variables, I. The theory of H^p-spaces", Acta Math., vol. 103, № 1 – 2, pp. 25 – 62, 1960.
24. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа", ДАН СССР, т. 261, № 3, стр. 557 – 561, 1981.

6 февраля 1995 Ереванский государственный университет

Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ

А. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том. 30, № 2, 1995

При предположении, что $\omega_j\,(1 \le j \le n)$ – функции, в определенном смысле правильно изменяющиеся на интервале $(0,1)$, и $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, через $H^p(\omega)$ обозначено подпространство голоморфных в полидиске функций, для которых

$$\|f\|_{H^p(\omega)} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|) dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty.$$

В работе найдена исчерпывающая характеристика пространств $H^p(\omega)$ в терминах смешанных производных. В частности, доказано что $f \in$ $\in H^p(\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(f(z)z^{k+1})}{\partial z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}} \in H^p(\tilde{\omega}),$$

где $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, ..., \tilde{\omega}_n)$, $\tilde{\omega}_j(t) = t^{k_j}\omega_j(t)$ $(1 \le j \le n)$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть U^n – единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, а $\mathbf{T}^n$ – его остов. Далее, пусть $H(U^n)$ – множество голоморфных в полидиске функций. Символом S обозначим множество измеримых и неотрицательных на (0,1) функций ω, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω и q_ω, причем $m_\omega, q_\omega \in (0,1)$ таковы, что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega$$

при всех $r \in (0,1)$ и $\lambda \in [q_\omega, 1]$. Функции класса S изучены в [1]. Если $\omega_j \in S$, $j = 1, 2, ..., n$, то запись $\omega(1-|z|)$ будет означать произведение $\prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|)$. Если $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$, то, как обычно, $z^\alpha = \prod_{j=1}^n z_j^{\alpha_j}$. При $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}.$$

Пусть $\omega_j \in S$, $j = 1, 2, ..., n$ и $0 < p < +\infty$. Обозначим через $L^p(\omega) = L^p(\omega_1, ..., \omega_n)$ класс измеримых по Лебегу функций f в U^n, для которых

$$||f||_{L^p(\omega)} = \left(\int_{U^n} |f(z)|^p \omega(1-|z|) dm_{2n}(z)\right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь $m_{2n}(z)$ – $2n$-мерная мера Лебега на U^n. Далее, через $H^p(\omega) = H^p(\omega_1, ..\omega_n)$ обозначим класс голоморфных в U^n функций f, для которых $f \in L^p(\omega)$. Отметим, что при $n = 1$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ эти пространства были впервые введены и изучены М. М. Джрбашяном [2], [3]. В данной работе существенную роль играют интегральные представления, найденные в [2] и [3]. Цель работы – дать полную характеристику пространства $H^p(\omega)$ в терминах производных, посредством обобщения следующей теоремы Кехе Зу [4].

Теорема А. *Пусть $1 \le p < +\infty$. Тогда $f \in H^p$ тогда и только тогда, когда классу L^p принадлежат функции*

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1,0)}{\partial z_1}, \quad (1-|z_2|^2)\frac{\partial f(0,z_2)}{\partial z_2}, \quad \text{и} \quad (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}.$$

Мы обобщаем эту теорему по следующим направлениям : а) доказываем, что теорема верна для любого p $(0 < p < +\infty)$, б) берем производные любого порядка, в) рассматриваем анизотропные пространства $H^p(\omega)$. Точнее, доказываем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть f – голоморфная в U^n функция, $0 < p < +\infty$, $k = (k_1, ..., k_n) \in$*

$\in Z^n_+$. *Тогда следующие утверждения равносильны :*

1° $f \in H^p(\omega)$;

2° *каждая функция из последовательности* $(1-|z_j|^2)^{i_j}\dfrac{\partial^{i_j} f(z',0,z'')}{\partial z_j^{i_j}}$, *где* $0 \le$ $\le i_j \le k_j - 1$, $1 \le j \le n$, $z' = (z_1, ... z_{j-1})$, $z'' = (z_{j+1}, ..., z_n)$, $(1-|z|^2)^k \dfrac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k}$ *принадлежит* $L^p(\omega)$. *При этом, норма каждой функции указанной последовательности в пространстве* $L^p(\omega)$ *оценивается сверху нормой* $||f||_{H^p(\omega)}$.

Из этой теоремы можно вывести следующую характеристику класса $L^p(\omega)$ в терминах производных.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\omega_j \in S$ $(j = 1, ..., n)$, $k = (k_1, ..., k_n) \in Z^n_+$. *Тогда следующие утверждения равносильны :*

1° $f \in H^p(\omega)$,

2° $\partial^{|k|}(f(z)z^{k+1})/\partial z^k \in H^p(\tilde{\omega})$, где $\tilde{\omega}_j(t) = t^{k_j}\omega_j(t)$, $j = 1, ..., n$.

Отметим, что как установлено ниже (§2, следствие), при $n = 2$, $k_1 = k_2 = 1$ последняя теорема совпадает с теоремой A.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Будем полагать, чтоs_j, $1 \le j \le n$ – неотрицательные целые числа, r_j – целое число такое, что $-2^{s_j} \le r_j \le 2^{s_j} - 1$ и

$$\Delta_{s_j,r_j} = \left\{ z_j : 1 - \frac{1}{2^{s_j}} \le |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{s_j+1}}, \frac{\pi r_j}{2_j^s} \le \arg z_j < \frac{\pi(r_j+1)}{2^{s_j}} \right\},$$

$$\Delta_{s,r} = \Delta_{s_1,r_1} \times ... \times \Delta_{s_n,r_n}.$$

Нам часто понадобятся следующие неравенства (см. [5]) :

$$(1-\eta)(1-|z_{s_j,r_j}) \le (1-|z_j|) \le (1+\eta)(1-|z_{s_j,r_j}|), \quad 0 < \eta < 1, \quad z_j \in \Delta_{s_j,r_j},$$
$$\frac{(1-|z_{s_j,r_j}|)^2}{4} \le |\Delta_{s_j,r_j}| \le 4(1-|z_{s_j,r_j}|)^2, z_{s,r} \in \Delta_{s,r}. \tag{1.1}$$

Через $D_\alpha(\zeta, z)$ обозначим многомерное ядро М. М. Джрбашяна

$$D_\alpha(\zeta, z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j + 1}{\pi} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha_j}}{(1-\overline{\zeta}_j z_j)^{\alpha_j+2}}, \quad \zeta, z \in U^n.$$

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если f – голоморфная в U^n функция и*

$$(1-|z_j|)^{k_j} \frac{\partial^{k_j} f(z)}{\partial z_j^{k_j}} \in L^p(\omega),$$

то при $k_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$ и обозначениях $\omega' = (\omega_1, ..., \omega_{j-1})$, $\omega'' = (\omega_{j+1}, ..., \omega_n)$

$$(1-|z_j|)^{k_j} \frac{\partial^{k_j} f(z', 0, z'')}{\partial z_j^{k_j}} \in L^p(\omega', \omega'').$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем полагать, что $j = 1$. Ввиду субгармоничности функции $\left|\frac{\partial^{k_1} f(z)}{\partial z_1^{k_1}}\right|^p$, получаем

$$\left|\frac{\partial^{k_1} f(0, z_2')}{\partial z_1^{k_1}}\right|^p \leq \int_T \left|\frac{\partial^{k_1} f(\rho\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1^{k_1}}\right|^p dm(\zeta_1), \quad 0 < \rho_1 < 1, \ z_2' = (z_2, ..., z_n). \quad (1.2)$$

Умножив обе части этого неравенства на $\rho_1 \tilde{\omega}_1(1-\rho_1)$, положив $z_1 = \rho_1 \zeta_1$, проинтегрируем полученное неравенство. Тогда будем иметь

$$\left|\frac{\partial^{k_1} f(0, z_2')}{\partial z_1^{k_1}}\right|^p \int_U \tilde{\omega}_1(1-|z_1|) dm_2(z_1) \leq 2\pi \int_U \left|\frac{\partial^{k_1} f(z)}{\partial z_1^{k_1}}\right|^p \tilde{\omega}_1(1-|z_1|) dm_2(z_1).$$

Далее, умножив обе части этого неравенства на $\prod_{j=2}^{n} \omega_j(1-|z_j|)$ и проинтегрировав, получим

$$\int_{U^n} \left|\frac{\partial^{k_1} f(0, z_2')}{\partial z_1^{k_1}}\right|^p \tilde{\omega}_1(1-|z_1|) \prod_{j=2}^{n} \omega_j(1-|z_j|) dm_{2n}(\zeta) < +\infty.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем, полагая $m = (m_1, ..., m_n) \in Z_+^n$, будем обозначать $\delta_{m_i}(\zeta_i, z_i) =$ $= [1 - (1-\overline{\zeta}_i z_i)^{m_i+1}]/\overline{\zeta}_i$. Имеет место следующая

Лемма 2. *Если*

$$(1-|z_j|^2)^{k_j}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\in L^p(\omega),$$

то $(1-|z_j|^2)^{k_j-1}G(z)\in L^p(\omega)$, *где*

$$G(z)=\frac{m_i+1}{\pi}\int_U\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{m_j}}{(1-\overline{\zeta}_j z_j)^{m_j+1}}\delta_{m_j}(\zeta_j,z_j)\frac{\partial F(z',\zeta_j,z'')}{\partial\zeta_j}dm_2(\zeta_j).$$

При этом, $||\varphi||_{L^p(\omega)}\le||\psi||_{L^p(\omega)}$, *где* $\varphi(z)=(1-|z_j|^2)^{k_j-1}G(z)$, *а* $\psi(z)=$ $=(1-|z_j|^{k_j}\partial F(z)/\partial z_j$.

Доказательство. Пусть $j=1$. Сначала рассмотрим случай $0<p\le 1$. Имеем

$$\int_{U^n}|G(z)|^p(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)=C\int_{U^n}(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)\times$$
$$\times\left|\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{m_1+1}}\frac{\partial F(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1}dm_2(\zeta_1)\right|^p dm_{2n}(z)=I.$$

Легко убедится в том, что

$$|\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)|\le C(m_1). \tag{1.3}$$

Следовательно

$$I\le C(m_1)\int_{U^n}(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)\times$$
$$\times\left(\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}}{|1-\overline{\zeta}_1 z_1|^{m_1+1}}\left|\frac{\partial F(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1}\right|dm_2(\zeta_1)\right)^p dm_{2n}(z).$$

Учитывая, что $0<p\le 1$, получим

$$I\le C\int_{U^n}(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\times$$
$$\times\max_{\zeta_1\in\overline{\Delta}_{s_1,r_1}}\left\{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1p}\left|\frac{\partial F(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1}\right|^p\left(\int_{\Delta_{s_1,r_1}}\frac{dm_2(\zeta_1)}{|1-\overline{\zeta}_1 z_1|^{m_1+1}}\right)^p dm_{2n}(z)\right\}.$$

Теперь введем обозначения

$$J_{s_1,r_1}=\int_U\left(\int_{\Delta_{s_1,r_1}}\frac{dm_2(\zeta_1)}{|1-\overline{\zeta}_1 z_1|^{m_1+1}}\right)^p(1-|z_1|)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z_1|)dm_2(z_1).$$

Взяв m_j достаточно большим, можем предполагать, что $(m_1+2-k_1)p>2$. Оценим интеграл J_{s_1,r_1}. При этом, для простоты изложения будем опускать индексы. Используя определение прямоугольников $\Delta_{s,r}$, интеграл $J_{s,r}$ можно записать в следующем виде :

$$J_{s,r}=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(l-1)p}rdrd\theta.$$

Здесь $\rho_s = 1-2^{-s}$, $\alpha_{s,r}=\frac{\pi r}{2^s}$ и $-2^s \leq r \leq 2^{s-1}$. Используя эти равенства, получаем

$$J_{s,r}=\int_0^1\int_{-\pi}^{\alpha_{s,r}}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(l-1)p}rdrd\theta+$$

$$+\int_0^1\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(l-1)p}rdrd\theta+$$

$$+\int_0^1\int_{\alpha_{s,r+1}}^{\pi}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(l-1)p}rdrd\theta=$$

$$=J^1_{s,r}+J^2_{s,r}+J^3_{s,r}.$$

Оценим отдельно $J^1_{s,r}$, $J^2_{s,r}$ и $J^1_{s,r}$. Поскольку

(a) $|1-z\rho e^{-i\varphi}|\geq 1/4|1-z\rho_{s+1}e^{-i\varphi}|$ при условии, что $s\geq 2$, $\rho_s\leq\rho\leq\rho_{s+1}$ и $|z|\geq 1/2$,

(б) $|1-\rho_{s+1}re^{i(\theta-\varphi)}|\geq|1-\rho_{s+1}re^{i(\theta-\alpha_{s,r})}|$ при $-\pi\leq\theta\leq\alpha_{s,r}$,

то для $J^1_{s,r}$ имеем

$$J^1_{s,r}\leq C(p)|\Delta_{s,r}|^p\int_0^1\int_{-\pi}^{\alpha_{s,r}}\frac{r(1-r)^\alpha drd\theta}{|1-\rho_{s+1}re^{i(\theta-\alpha_{s,r})}|^{(m+1)p}}.$$

Теперь заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-r\rho e^{i\theta}|^\lambda}\leq\frac{C(\lambda)}{(1-r\rho)^{\lambda-1}}. \tag{1.4}$$

Используя это неравенство, а также лемму 2 из [5], получаем

$$J^1_{s,r}\leq\frac{C(p)|\Delta_{s,r}|^p\omega(1-\rho_{s+1})}{(1-\rho_{s+1})^{p(m-l+2)-2}}.$$

Последнее неравенство имеет место и для интегралов $J^2_{s,r}$, $J^3_{s,r}$. Действительно, для $J^2_{s,r}$ она следует из леммы 2 [5] и из равенства $\alpha_{s,r+1}-\alpha_{s,r}=2\pi(\rho_{s+1}-\rho_s)$, а для $J^3_{s,r}$ она получается рассуждением, аналогичным оценке $J^1_{s,r}$. Объединяя оценки $J^j_{s,r}$ $(j = 1, 2, 3)$ и учитывая (1.1), получим

$$I \leq C(p) \int_{U^{n-1}} \omega_2(1 - |z_2|) \dots \omega_n(1 - |z_n|) \times$$
$$\times \sum_{s_1=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \max_{\zeta_1 \in \overline{\Delta}_{s_1, r_1}} \left\{ (1 - |\zeta_1|^2)^{2+k_1 p} \omega_1(1 - |\zeta_1|) \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p \right\} dm_{2(n-1)}(z_2').$$

Применив лемму 4 из [5], получим

$$I \leq C(p) \int_{U^n} (1 - |z_1|^2)^{k_1 p} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z_1} \right|^p \omega(1 - |z|) dm_{2n}(z) \leq ||\psi||_{L^p(\omega)} < +\infty.$$

Перейдя к случаю $p > 1$ заметим, что $G(z)$ можно записать в виде

$$G(z) = C(m) \int_U D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1) \delta_{m_1}(\zeta_1, z_1)(1 - |\zeta_1|^2) \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} dm_2(\zeta_1).$$

Предположим, что γ_1 – число, удовлетворяющее условиям леммы 2 из [5]. Тогла, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|G(z)|^p \leq C(m) \int_U \frac{|D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)|}{\chi^p_{\gamma_1}(\zeta_1)} |\delta_{m_1}(\zeta_1, z_1)|^p \times$$
$$\times (1 - |\zeta_1|^2)^p \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p dm_2(\zeta_1) \left(\int_U |D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)| \chi^q_{\gamma_1}(\zeta) dm_2(\zeta_1) \right)^{p/q} \leq$$
$$\leq C(m) \chi^p_{\gamma_1}(z_1) \int_U \frac{|D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)|(1 - |\zeta_1|^2)^p}{\chi^p_{\gamma_1}(\zeta_1)} \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p dm_2(\zeta_1).$$

Здесь мы воспользовались леммой A и оценкой (1.3). Умножив обе части последнего неравенства на $(1 - |z_1|^2)^{(k_1-1)p} \omega(1 - |z|)$ и проинтегрировав, будем иметь

$$\int_{U^n} |G(z)|^p (1 - |z_1|^2)^{(k_1-1)p} \omega(1 - |z|) dm_{2n}(z) \leq C(m_1) \int_{U^n} (1 - |z_1|^2)^{(l_1-1)p} \times$$
$$\times \omega(1 - |z|) \chi^p_{\gamma_1}(z_1) \int_U \frac{|D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)|}{\chi^p_{\gamma_1}(\zeta_1)} (1 - |\zeta_1|^2)^p \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p dm_2(\zeta_1) dm_{2n}(z).$$

Используя лемму 2 из [5] получим

$$\int_{U^n} |G(z)|^p (1 - |z_1|^2)^{(l_1-1)p} \omega(1 - |z|) dm_{2n}(z) \leq C(m_1) \int_{U^{n-1}} \omega_2(1 - |z_2|) \dots \omega_n(1 - |z_n|) \times$$
$$\times \left(\int_U (1 - |\zeta_1|^2)^{k_1 p} \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p \omega_1(1 - |\zeta_1|) dm_2(\zeta_1) \right) dm_{2n-2}(z_2') =$$
$$= C(m_1) \int_{U^n} (1 - |z_1|^2)^{k_1 p} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z_1} \right|^p \omega(1 - |z|) dm_{2n}(z) \leq C(m_1) ||\psi||_{L^p(\omega)} < +\infty.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Используя леммы 1 и 2 докажем теорему 1. Сначала докажем импликацию 1) ⇒ 2). Пусть $f \in H^p(\omega)$. Тогда, по теореме М. М. Джрбашяна [2], при больших $m_j, 1 \le j \le n$ имеет место представление

$$f(z) = \int_{U^n} D_m(\zeta, z) f(\zeta) dm_{2n}(\zeta).$$

Дифференцированием отсюда получим

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} = C(m,n,k) \int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^m \zeta^k}{(1-\overline{\zeta} z)^{m+k+2}} f(\zeta) dm_{2n}(\zeta).$$

Сначала предположим, что $0 < p \le 1$. Тогда, повторяя рассуждения леммы 2, придем к оценке

$$I = \int_{U^n} \left| \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} \right|^p (1-|z|^2)^{kp} \omega(1-|z|) dm_{2n}(z) \le$$

$$\le C(p) \sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \dots \sum_{r_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1} \max_{\zeta \in \overline{\Delta}_{s,r}} \left\{ (1-|\zeta|^2)^{mp} |f(\zeta)|^p \right\} \times$$

$$\times \int_{U^n} \omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{kp} \left(\int_{\Delta_{s,r}} \frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\overline{\zeta} z|^{m+k+2}} \right)^p dm_{2n}(z).$$

Интеграл в правой части этой оценки обозначим через $J_{s,r}$. Для него нетрудно установить неравенство

$$|J_{s,r}| \le \frac{\omega(1-\rho_{s+1})}{(1-\rho_{s+1})mp-2}.$$

Следовательно

$$I \le C(p) \sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \dots \sum_{r_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1} \max_{\zeta \in \overline{\Delta}_{s,r}} \left\{ (1-|\zeta|^2)^2 \omega(1-|\zeta|) |f(\zeta)|^p \right\} \le$$

$$\le C_1(p) \int_{U^n} |f(\zeta)|^p \omega(1-|\zeta|) dm_{2n}(\zeta) = C_1(p) ||f||_{H^p(\omega)} < +\infty.$$

Рассмотрим случай $p > 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\left| \frac{\partial^k f(z)}{\partial z^k} \right|^p \le \int_{U^n} \frac{|D_{m+k}(\zeta,z)||f(\zeta)|^p}{\chi_\gamma^p(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{kp}} dm_{2n}(\zeta) \left(\int_{U^n} |D_{m+k}(\zeta,z)| \chi_\gamma^q(\zeta) dm_{2n}(\zeta) \right)^{p/q}.$$

Здесь γ удовлетворяет условиям леммы 2 из [5]. Из этой леммы следует, что

$$\left| \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} \right| \le C(p) \chi_\gamma^p(z) \int_{U^n} \frac{|D_{m+k}(\zeta,z)||f(\zeta)|^p}{\chi_\gamma^p(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{kp}} dm_{2n}(\zeta).$$

Отсюда имеем

$$\int_{U^n}\left|\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z^k}\right|^p(1-|z|^2)^{kp}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)\le$$
$$\le\int_{U^n}(1-|z|^2)^{kp}\omega(1-|z|)\chi^p_\gamma(z)\left(\int_{U^n}\frac{|D_{m+k}(\zeta,z)||f(\zeta)|^p}{\chi^p_\gamma(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{kp}}dm_{2n}(\zeta)\right)dm_{2n}(z).$$

Изменив порядок интегрирования и снова применив лемму 2 из [5], получим

$$\int_{U^n}\left|\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z^k}\right|^p(1-|z|^2)^{kp}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)\le$$
$$\le\int_{U^n}|f(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\le C(p)||f||_{H^p(\omega)}<+\infty.$$

Теперь, проведя аналогичные рассуждения, легко доказать, что

$$(1-|z_j|^2)^{i_j}\frac{\partial^{i_j}f(z',0,z'')}{\partial z_j^{i_j}}\in L^p(\omega),\quad z'=(z_1,...,z_{i-1})$$

при $z''=(z_{i+1},...,z_n)$, $0\le i_j\le k_j-1$, $1\le j\le n$. Перейдем к доказательству импликации $2^\circ\Rightarrow1^\circ$. Так как $\partial^{|k|}f(z)/\partial z^k\in H^p(\overline{\omega})$, то

$$\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z^k}=\frac{m_1+1}{\pi}\int_U D_{m_1}(\zeta_1,z_1)\frac{\partial^{|k|}f(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}}dm_2(\zeta_1).$$

Интегрируя это равенство по z_1 по радиусу, получаем

$$f_{k_1-1}(z)=f_{k_1-1}(0,z_2')+C(m_1)\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{m_1+1}}\frac{\partial^{|k|}f(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}}dm_2(\zeta_1),\tag{2.1}$$

где $f_{k_1-i}(z)=\partial^{k_1-i+k_2+...+k_n}f(z)/\partial z_1^{k_1-i}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}$, $0\le i\le k_1$. Ввиду того, что

$$(1-|z_1|^2)^{k_1-1}\frac{\partial^{k_1-1}f(0,z_2')}{\partial z_1^{k_1-1}}\in L^p(\omega),$$

очевидно имеем $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}f_{k_1-1}(0,z_2')\in L^p(\omega_1,\bar{\omega}_2')$ и $\bar{\omega}_2'=(\bar{\omega}_2',...,\bar{\omega}_n')$. Теперь, воспользовавшись леммой 2 приходим к заключению, что интегральное выражение (2.1), умноженное на $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}\prod_{j=2}^n(1-|z_j|^2)^{k_j}$, принадлежит $L^p(\omega)$. Следовательно $(1-|z_j|^2)^{k_1-1}f_{k_1-1}(z)\in L^p(\omega_1,\bar{\omega}_2')$. Тем самым,

$$f_{k_1-2}(z)=f_{k_1-2}(0,z_2')+$$
$$+C(m_1)\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{m_1+1}}\frac{\partial^{k_1-1+k_2+...+k_n}f(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1^{k_1-1}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}}dm_2(\zeta_1).$$

Отсюда следует, что $(1-|z_1|^2)^{k_1-2}f_{k_1-2}(z) \in L^p(\omega_1,\tilde{\omega}_2')$. Продолжая процесс снижения порядка дифференцирования, в итоге получаем

$$\frac{\partial^{k_2+\ldots+k_n}f(z)}{\partial z_2^{k_2}\ldots\partial z_n^{k_n}} \in L^p(\omega_1,\tilde{\omega}_2').$$

Повторяя эти рассуждения для остальных переменных, придем к заключению, что $f \in H^p(\omega)$.

Следствие. Функции $f(z_1,0)$ и $(1-|z_1|^2)\{\partial f(z_1,0)/\partial z_1\}$, а также функции $f(0,z_2)$ и $(1-|z_2|^2)\{\partial f(0,z_2)/\partial z_2\}$ принадлежат $L^p(\omega_1,\omega_2)$ одновременно. Действительно, пусть

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1,0)}{\partial z_1} \in L^p(\omega_1,\omega_2).$$

Тогда

$$f(z_1,0)=f(0,0)+C(m_1)\int_U \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{m_1+1}}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)\frac{\partial f(\zeta_1,0)}{\partial\zeta_1}dm_2(\zeta_1).$$

Из леммы 2 следует, что $f(z_1,0)\in L^p(\omega_1,\omega_2)$. Обратно, если $f(z_1,0)\in L^p(\omega_1,\omega_2)$, то

$$f(z_1,0)=\frac{m_1+1}{\pi}\int_U \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{m_1+2}}f(\zeta_1,0)dm_2(\zeta_1).$$

Дифференцируя это равенство и рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1,0)}{\partial z_1} \in L^p(\omega_1,\omega_2).$$

Что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы 2 введем обозначения

$$\Delta^*_{s_j,r_j}=\left\{z_j:\quad \frac{\pi(r_j-1)}{2^{s_j}}\le \arg z_j<\frac{\pi(r_j+2)}{2^{s_j}},1-\frac{1}{2^{s_j-1}}\le|z_j|<1-\frac{1}{2^{s_j+2}}\right\},$$
$$1\le j\le n,\quad -2^{s_j}\le r_j\le 2^{s_j}-1,\quad \Delta^*_{s,r}=\Delta^*_{s_1,r_1}\ldots\Delta^*_{s_n,r_n}.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in H^p(\omega)$. Тогда очевидно, что $z^{k+1}f(z)\in$ $\in H^p(\omega)$. Из теоремы 1 следует, что $\dfrac{\partial^{|k|}\left(f(z)z^{k+1}\right)}{\partial z^k}\in H^p(\tilde{\omega})$. Обратно, предположим, что выполнено последнее включение. Тогда $z^{k+1}f(z)\in H^p(\omega)$, и достаточно доказать, что $g(z) \in H^p(\omega)$, где $g(z) = z_1^{k_1} z_2^{k_2+1} \ldots z_n^{k_n+1} f(z)$. С этой целью докажем, что если $z_1 g(z) \in H^p(\omega)$, то $g \in H^p(\omega)$. Сначала покажем, что

$$\max_{z\in\overline{\Delta}_{s,r}} |g(z)|^p \leq C \max_{z\in\overline{\Delta}^{\to}_{s,r}} |g(z)z_{-1}|^p. \tag{2.2}$$

Действительно, если $s_1 \neq 0$, то $\dfrac{1}{|z_1|} \leq \dfrac{2^{s_1}}{2^{s_1}-1}$. Тем самым

$$\max_{z\in\overline{\Delta}_{s,r}} \left|\frac{g(z)z_1}{z_1}\right|^p \leq \frac{2^{s_1}}{2^{s_1}-1} \max_{z\in\overline{\Delta}^{\to}_{s,r}} |g(z)|^p,$$

поскольку $\overline{\Delta}^{\to}_{s,r}$ шире, чем $\overline{\Delta}_{s,r}$. Пусть $s_1 = 0$, тогда $0 \leq |z_1| < 1/2$. Взяв окружность $\Gamma_1 = \{\zeta_1, |\zeta_1| = 2/3\}$, получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta_1, z_2')\zeta_1 d\zeta_1}{\zeta_1(\zeta_1 - z_1)},$$

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta_1\in\Gamma_1} |g(\zeta_1, z_2')\zeta_1| \int_{\Gamma_1} \frac{|d\zeta_1|}{|\zeta_1||\zeta_1 - \zeta_1|} \leq \frac{1}{12\pi} \max_{\zeta_1\in\Gamma_1} |g(\zeta_1, z_2')\zeta_1|, \quad |\zeta_1 - z_1| > \frac{1}{6}.$$

Так как функции $|g(z)|^p$ и $|g(z)z_1|^p$ субгармоничны (по z_1), то применяя принцип максимума модуля получим, что (2.2) выполнено при всех s_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Тем самым, используя лемму 4 из [5] получим

$$\sum_{s_1\ldots s_n=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \cdots \sum_{r_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1} \max_{\zeta\in\overline{\Delta}^{\to}_{s,r}} \{|g(\zeta)\zeta_1|^p \omega(1-|\zeta|)|\Delta^*_{s,t}|\} \leq$$

$$\leq C_o \int_{U^n} |g(\zeta)\zeta_1|^p \omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta).$$

Таким образом

$$\int_{U^n} |g(z)|^p \omega(1-|z|)dm_{2n}(z) \leq C_o \int_{U^n} |g(\zeta)\zeta_1|^p \omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta) < +\infty.$$

Продолжая процесс деления, в итоге получим $||f||_{H^p(\omega)} < +\infty$. Теорема доказана.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить профессора Ф. А. Шамояна за постановку задач и постоянное внимание.

ABSRTACT. **Assuming that ω_j $(1 \leq j \leq n)$ are functions having somehow regular variation in $(0,1)$ and $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, a function f holomorphic in U^n is said to be of the weighted space $H^p(\omega)$, if**

$$||f||_{H^p(\omega)} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty.$$

In the paper it is found a complete characterization of the spaces $H^p(\omega)$ in the terms of partial derivatives. Particularly it is proved that $f \in H^p(\omega)$ if and only if

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(f(z)z^{k+1})}{\partial z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}} \in H^p(\tilde{\omega}),$$

where $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n)$, $\tilde{\omega}_j(t) = t^{k_j}\omega_j(t)$ $(1 \le j \le n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно изменяющиеся функции, Наука, Москва, 1985.
2. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении функций, мероморфных в круге", ДАН Армянской ССР, т. 3, №1, стр. 3 – 9, 1945.
3. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР, Вып. 2, стр. 3 – 30, 1948.
4. Kehe Zhu, "The Bergman spaces, the Bloch space and Geeasons problem", Trans. of AMS, v. 309, №1, стр. 253 – 267, 1988.
5. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и вопросы представимости в некоторых анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. мат. журнал, т. 31, №2, стр. 195 – 215, 1990.

6 февраля 1995

Ереванский государственный университет,
Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

РАСШИРЕНИЕ ТЕОРИИ ФАКТОРИЗАЦИИ М. М. ДЖРБАШЯНА*

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том. 30, № 2, 1995

В статье построенная М. М. Джрбашяном теория факторизации мероморфных в единичном круге функций расширена вплоть до исчерпывающей теории представлений типа Рисса δ-субгармонических функций. Общая теория построена по новому, упрощенному методу, подобному примененному при построении теории автора в полуплоскости и основанному на обратимости оператора L_ω М. М. Джрбашяна. Получен окончательный результат, относящийся к качественному сравнению ω-характеристических функций М. М. Джрбашяна с неванлинновскими характеристиками. Также получен частный результат, относящийся к проблеме вложения N_ω классов М. М. Джрбашяна и к аналогичной задаче для рассмотренных классов δ-субгармонических функций.

ВВЕДЕНИЕ

На Международной конференции по теории аналитических функций, Ереван 1965, М. М. Джрбашяном [1] была предложена общая идея расширения его теории факторизации классов N_α функций, мероморфных в круге (см. [2], гл. IX) до теории представлений типа Рисса определенных классов субгармонических функций. Поскольку основной отправной точкой этой идеи является замена $\log|f(z)|$ произвольной субгармонической функцией $u(z)$ и произведений типа Бляшке М. М. Джрбашяна – определенными потенциалами типа Грина, эта идея имеет смысл также при применении к его более поздней, исчерпывающей

*Работа частично финансирована исследовательским грантом акционерного общества "Закнефтегазстрой-Прометей"

теории факторизации и граничных свойств функций, мероморфных в единичном круге, часто называемой N_ω-теорией [3] – [7]. Однако, с 1965 года по расширению N_ω-теории получены лишь немногие результаты (см. [8] – [10], где в некотором частном случае решены сопряженные задачи).

В этой статье построена исчерпывающая теория представлений типа Рисса функций δ-субгармонических в единичном круге комплексной плоскости (т. е. представимых в $|z| < 1$ в виде разности двух субгармонических функций). Общая теория построена по упрощенному методу, аналогичному примененному в теории автора в полуплоскости [11]. Этот метод позволяет некоторым образом отождествлять рассматриваемые аналоги N_ω-классов с вполне определенными подмножествами неванлинновского класса N, рассматриваемого для δ-субгармонических функций. Рассуждения основаны на новых результатах об обратимости оператора L_ω М. М. Джрбашяна и о представлениях рассмотренных потенциалов типа Грина посредством обычных гриновских потенциалов со специальным распределением массы. Получен также окончательный результат, относящийся к качественному сравнению ω-характеристик М. М. Джрбашяна с характеристиками Неванлинны. Кроме того, доказан результат о вложении рассматриваемых классов δ-субгармонических функций, что приводит к частичному решению проблемы вложения N_ω классов М. М. Джрбашяна, которую можно сформулировать также в виде хаусдорфовой проблемы моментов [3, 12]. Решение последней в случае, когда классы N_ω являются *подмножествами* неванлинновского класса N мероморфных функций ограниченного вида в $|z| < 1$, ранее было найдено И. В. Островским [13]. Однако, здесь мы рассматриваем только аналоги классов N_ω, *содержащих* N, т. е. некоторые классы δ-субгармонических функций, *содержащие* функции, представимые в $|z| < 1$ в виде разности двух неотрицательных субгармонических функций и исчерпывающие все множество функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$.

Вспомогательные результаты §1 являются аппаратом, использованным в §2 для построения общей теории. Доказательства утверждений §1 отодвинуты в §3.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Начнем с некоторых упрощений общей операции интегродифференцирования типа Римана–Лиувилля L_ω, использованной в N_ω-теории. Оператор L_ω определен в [3] следующим образом. Функция $\omega(x)$ принадлежит классу Ω, если она положительна в $[0,1)$, $\omega(0)=1$ и

$$\int_0^1 \omega(x)dx < +\infty.$$

Далее, функция $P(t)$ принадлежит классу P_ω, если при некотором $\omega(x)\in\Omega$ имеем

$$P(0)=1 \quad \text{и} \quad P(t)=t\int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx, \quad 0<t<1. \tag{1.1}$$

Если $P(t)\in P_\omega$, то для измеримой в $|z|<R\le+\infty$ функции $u(z)$ формально

$$L_\omega u(re^{i\varphi}) = -\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1 u(tre^{i\varphi})dP(t)\right\}.$$

Использование этого определения оператора L_ω было целесообразно в N_ω-теории ввиду его приспособленности к обоим случаям $\omega(1-0)=0$ и $\omega(1-0)= =+\infty$. Однако, можно убедиться в том, что какие-либо ограничения на гладкость функции $\omega(x)$ вблизи *левого* конца интервала $(0,1)$, по существу, не приводит к потере общности в N_ω-теории. Поэтому могут быть успешно применены также упрощенные формы оператора L_ω, данные в нижеприведенной лемме.

Лемма 1.1. 1°. *Если функция $\omega(x)\in\Omega$ такова, что $\omega(1-0)=0$, $\omega'(x)$ существует при любом $x\in[0,1)$ и принадлежит $L_1(0,1)$, и, кроме того*

$$t\log t\int_t^1 \frac{\omega'(x)}{x}dx = o(1) \quad \text{при} \quad t\to+0, \tag{1.2}$$

то для любой функции $u(z)$, δ-субгармонической в $|z|<R\le+\infty$

$$L_\omega u(z) = -\int_0^1 u(tz)d\omega(t), \quad |z|<R. \tag{1.3}$$

2°. *Для любых функций $\omega(x) \in \Omega$ и $u(z)$, гармонической в $|z| < R \leq +\infty$*

$$L_\omega u(z) = u(0) + L_{\omega_1} U(z), \quad |z| < R, \tag{1.4}$$

где оператор L_{ω_1} определен как в (1.5), но

$$\omega_1(t) = \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x} dx \notin \Omega \quad \text{и} \quad U(z) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} u(z).$$

Замечание. Первое утверждение леммы 1.1 распространяет одну из формул леммы 2 работы [3] на δ-субгармонические функции, а второе утверждение, по существу, доказано в [3]. Кроме того, из (1.5) очевидно, что L_ω является обобщением оператора интегродифференцирования Римана–Лиувилля, поскольку приобретает такую форму при

$$\omega(x) = \frac{(1-x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

В следующей лемме мы называем область $G \subseteq \mathbb{C}$ *звездообразной*, если наряду с любой точкой $z \in G$ она содержит отрезок $[0, z]$.

Лемма 1.2. 1°. *Пусть функция $\omega(x) \in \Omega$ такова как в утверждении 1° леммы 1.1 и, кроме того, пусть $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема в $[0, 1)$ и при некотором $\beta > 0$*

$$|\omega(t)| \leq O\left((1-t)^\beta\right) \quad \text{при} \quad t \to 1-0. \tag{1.5}$$

Далее, пусть функция $u(z)$ субгармонична в некоторой звездообразной области G. Тогда функция $L_\omega u(z)$ субгармонична в G и непрерывна в $G \setminus \{0\}$. Кроме того, если $u(0) \neq -\infty$, то $L_\omega u(z)$ непрерывна также в точке $z = 0$.

2°. *Если $u(z)$ голоморфна или гармонична в звездообразной области G, то при любом $\omega(x) \in \Omega$ такого же типа в G и функция $L_\omega u(z)$. Кроме того, если $L_\omega u(z) \equiv C = const$ в окрестности начала координат, то $u(z) \equiv C$.*

1.2. Ниже приведены некоторые свойства потенциалов типа Грина, построенных с применением факторов типа Бляшке М. М. Джрбашяна

$$A_\omega(z,\zeta) = \exp\left\{-\int_{|\zeta|}^{1}\left[C_\omega\left(\frac{z}{\zeta}x\right) + C_\omega\left(\frac{z\bar{\zeta}}{x}\right) - 1\right]\frac{\omega(x)}{x}dx\right\},$$

$$A_\omega(z,\zeta)\Big|_{\omega(t)\equiv 1} = A(z,\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\frac{|\zeta|}{\zeta}, \tag{1.6}$$

$$A_\omega(z,0) = z, \quad C_\omega(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \quad \Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx.$$

Следует отметить, что при любом $\omega(x) \in \Omega$ функция $A_\omega(z,\zeta)$ ($|\zeta| < 1$) голоморфна в $|z| < 1$ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z = \zeta$ (см. [4], лемму 1.5 и формулы (1.9), (1.64) – (1.68)).

Теорема 1.1. *Пусть $\omega(x) \in \Omega$ – любая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 \frac{|1-\omega(x)|}{x}dx < +\infty.$$

и пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $|\zeta| < 1$ такая, что

$$\iint_{|\zeta|<1}\left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx\right)d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{1.7}$$

1°. *Тогда потенциал типа Грина*

$$I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) \tag{1.11}$$

– субгармоническая в $|z| < 1$ функция.

2°. *Если наряду с (1.7) $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{1.8}$$

то

$$I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1}\log|A(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} S_\omega(ze^{-i\theta})d\psi(\theta), \quad |z| < 1, \tag{1.9}$$

где

$$S_\omega(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1,$$

а $\psi(\theta)$ – ограниченная в $[0, 2\pi]$ функция, которую можно найти из соотношения

$$\psi(\theta) = \lim_{r\to 1-0}\int_0^\theta L_\omega[I_\omega(re^{i\varphi}) - I(re^{i\varphi})]d\varphi, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \qquad (1.10)$$

При этом, если $\omega(x)$ – невозрастающая функция, то $\psi(\theta)$ – неубывающая в $[0, 2\pi]$ и наоборот.

Ниже приведено иное представление потенциала типа Грина, осуществляемое посредством обычного гриновского потенциала, справедливое при $\omega(x)$, удовлетворяющем некоторым условиям гладкости в $[0, 1]$.

Теорема 1.2. *Пусть $\omega(x)$ ($\omega(0) = 1$) – положительная, непрерывно дифференцируемая в $[0, 1)$ функция, удовлетворяющая условию (1.5). Далее, пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $|\zeta| < 1$, подчиненная условию (1.7). Тогда функция $L_\omega I_\omega(z)$ субгармонична и непрерывна в $0 < |z| < 1$. Кроме того, в $|z| < 1$ имеет место представление*

$$L_\omega I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1} L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<1} \log|A(z,\zeta)|d\nu_\omega(\zeta), \qquad (1.11)$$

где

$$\nu_\omega(E) = L_\omega\nu(E) \equiv -\int_0^1 \omega'(t)\nu(tE)dt \qquad (1.12)$$

для любого борелевского множества E, компактно содержащегося в $\{|z| < 1\}$.

Обратимость оператора L_ω в классе гармонических функций, вытекающая из следующей теоремы, необходима для дальнейших построений.

Теорема 1.3. *Пусть функция $U(z)$ субгармонична в $|z| < 1$, и пусть $\omega(x)$ – невозрастающая в $[0, 1)$ функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2. Если $L_\omega U(z) \equiv 0$ в $|z| < 1$, то $U(z) \equiv 0$.*

Замечание. Как было отмечено выше, при $\omega(x) = (1 - x)^\alpha$, $\alpha > 0$, оператор L_ω переходит в дробное интегрирование Римана–Лиувилля. Тем самым, в этом случае L_ω имеет обратное, являющееся дробным дифференцированием такого же типа. В общем случае задача обратимости оператора L_ω была рассмотрена в [4] (теоремы Б и В) с целью нахождения явного вида обратного оператора. Это было достигнуто только в случае, когда $\omega(1-0)=+\infty$. В предыдущей же теореме рассматривается случай $\omega(1-0)=0$.

1.3. Ниже мы приводим лемму о разложимости оператора L_ω.

Лемма 1.3. *Пусть функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3 и, кроме того, пусть*

$$\omega_2(x)\equiv 1, \quad 0\le x\le \varepsilon_o$$

при некотором $\varepsilon_o\in(0,1)$. Тогда функция

$$\omega_3(x)=-\int_x^1 \omega_2\left(\frac{x}{t}\right)d\omega_1(t)=-\int_x^1 \omega_1\left(\frac{x}{t}\right)d\omega_2(t) \tag{1.13}$$

принадлежит Ω_s и справедливы равенства

$$\omega_3'(x)=-\int_x^1 \omega_1'(t)\omega_2'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}=-\int_x^1 \omega_2'(t)\omega_1'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{1.14}$$

Кроме того, если $u(z)$ – функция, δ-субгармоническая в звездообразной области D, то

$$L_{\omega_3}u(z)=L_{\omega_1}L_{\omega_2}u(z)=L_{\omega_2}L_{\omega_1}u(z), \quad z\in D. \tag{1.15}$$

§2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Метод построения нижеприводимой общей теории представлений типа Рисса функций, δ-субгармонических в $|z|<1$, основан на обратимости оператора L_ω и приведенных в предыдущем параграфе свойствах потенциалов типа Грина. Этот метод позволяет привести проблему представления к хорошо известному неванлинновскому случаю, когда функция – “ограниченного вида”, т. е. представима в $|z|<1$ как разность двух неположительных субгармонических функций. Всюду ниже будем говорить, что функция $u(z)$ δ-субгармонична в области D, если $u(z) \not\equiv \pm\infty$ и имеет место представление $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_{1,2}(z)$ - субгармонические в D функции.

2.1. Начнем с неванлинновской теории. Пусть функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z| < R \le +\infty$, и пусть $\nu(\zeta)$ – ассоциированная с ней мера. Для любого борелевского множества $E \subset \{|z| < R\}$, компактно содержащегося в $\{|z| < R\}$ (т. е. такого, что $\overline{E} \subset \{|z| < R\}$), обозначим

$$\nu_\pm(E) = \iint_E (d\nu(\zeta))^\pm .$$

Отметим, что мы пользуемся *верхними* индексами "+" и "–" как обычно, полагая $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a = a^+ - a^-$. Последний же интеграл можно понимать как $\sup\left\{\sum_k [\nu(E_k)]^+\right\}$, взятый по всевозможным разложениям $E = \bigcup_k E_k$, где E_k – непересекающиеся борелевы множества. Очевидно $\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E)$ и

$$\iint_E |d\nu(\zeta)| = \iint_E d\nu_+(\zeta) + \iint_E d\nu_-(\zeta).$$

Взяв $z = 0$ *в разности* риссовских представлений $u(z)$ в $|z| < r$ и в $|z| < r_o$ $(0 < r_o < r < R)$, приходим к формуле Иенсена–Неванлинны :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_o e^{i\theta})d\theta = &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta - \iint_{r_o<|\zeta|<r} \log\frac{r}{|\zeta|}d\nu(\zeta) - \\ &- \log\frac{r}{r_o}\iint_{|\zeta|\le r_o} d\nu(\zeta), \quad r_o < r < 1. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Далее, вводя неванлинновские характеристики $n_\pm(t) = \iint_{|\zeta|\le t} \nu_\mp(\zeta)$ и

$$\begin{aligned} m(r, \pm\infty) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^\pm(re^{i\theta})d\theta, \\ N(r, r_o, \pm\infty) &= \int_{r_o}^r \frac{n_\pm(t) - n_\pm(r_o)}{t}dt + n_\pm(r_o)\log\frac{r}{r_o}, \\ T(r, r_o, \pm\infty) &= m(r, \pm\infty) + N(r, r_o, \pm\infty), \end{aligned}$$

можем записать (2.1) в форме соотношения равновесия

$$T(r, r_o, +\infty) = T(r, r_o, -\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_o e^{i\theta})d\theta, \quad r_o < r < R, \qquad (2.2)$$

являющегося частным случаем первой основной теоремы Неванлинны. Класс N функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$, естественно определять условием

$$\sup_{r_o < r < 1} T(r, r_o, +\infty) < +\infty. \tag{2.3}$$

При этом, выбор $r_o \in (0,1)$ здесь не существенен, поскольку (2.3) очевидно эквивалентно тому же условию с любым другим $r_o \in (0,1)$. Далее, из (2.2) следует, что (2.3) эквивалентно ограниченности $T(r, r_o, -\infty)$. Кроме того, стандартные рассуждения, связанные с предельным переходом $r \to 1-0$ в представлении Рисса $u(z)$ в $|z| < r$, приводят к следующей неванлинновской теореме.

Теорема 2.1. 1°. *Класс N совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log\left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z}\right| d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta), \quad |z| < 1, \tag{2.4}$$

где $\nu(\zeta)$ – борелевская мера такая, что

$$\iint_{|\zeta|<1} (1 - |\zeta|)\, |d\nu(\zeta)| < +\infty, \tag{2.5}$$

а $\mu(\theta)$ – функция ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$.

2°. *Класс N совпадает с множеством функций, представимых в $|z| < 1$ в виде разности двух неположительных субгармонических функций.*

3°. *Если имеет место представление (2.4) – (2.5), то функция $\mu(\theta)$ может быть найдена из соотношения*

$$\mu(\theta) = \lim_{r \to 1-0} \int_0^{\theta} u(re^{i\varphi})\, d\varphi, \tag{2.6}$$

где предел конечен при любом $\theta \in [0, 2\pi]$. Если $\mu(\theta)$ определено по (2.6), то при любом $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\mu_{\pm}(\theta) \equiv \int_0^{\theta} (d\mu(t))^{\pm} = \lim_{r \to 1-0} \int_0^{\theta} u^{\pm}(re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

$$\mu(\theta)=\mu_+(\theta)-\mu_-(\theta),\quad \bigvee_0^\theta\mu=\bigvee_0^\theta\mu_+\bigvee_0^\theta\mu_-.$$

2.2. Для построения аналога теории факторизации М. М. Джрбашяна предположим, что функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z|<R\le+\infty$, и обозначим через Ω_s класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям :

(а) *функция $\omega(x)$ положительна, невозрастающая и непрерывно дифференцируемая в* $[0,1)$,

(б) $\omega(0)=1$ *и существует* $\beta>0$ *такое, что* $\omega(x)\le O((1-x)^\beta)$ *при* $x\to 1-0$.

Отметим что, если $\omega(x)\in\Omega_s$, то $\omega(x)$ удовлетворяет условиям всех утверждений предыдущего §1. Далее, полагая что $\nu(\zeta)$ – ассоциированная с $u(z)$ мера, для какого-либо $r\in(0,R)$ введем в рассмотрение гармоническую в $|z|<r$ функцию

$$U(z)=u(z)-\iint_{|\zeta|<r}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{r},\frac{\zeta}{r}\right)\right|d\nu(\zeta).$$

По лемме 1.2 гармонична в $|z|<r$ также функция $U_\omega(z)=L_\omega U(z)$. С другой стороны, по той же лемме функция $u_\omega(z)=L_\omega u(z)$ непрерывна в $\{|z|\le r\}\backslash\{0\}$. Кроме того, из представления (1.11) теоремы 1.2 следует, что

$$\lim_{\rho\to r-0}\int_0^{2\pi}\left|L_\omega\iint_{|\zeta|<r}\log\left|A_\omega\left(\frac{\rho}{r}e^{i\theta},\frac{\zeta}{r}\right)\right|d\nu(\zeta)\right|d\theta=0.$$

Поэтому, устремляя $\rho\to r-0$ в представлении Пуассона $U_\omega(z)$ в $|z|<\rho$, получим

$$U_\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}u_\omega(re^{i\theta})d\theta,\quad |z|<r.$$

Взяв $z=0$ в разности двух таких представлений, записанных в $|z|<r$ и в $|z|<r_o$ $(0<r_o<r<R)$, приходим к формуле типа Иенсена-Неванлинны

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_\omega u(r_oe^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_\omega u(re^{i\theta})d\theta-\iint_{r_o<|\zeta|<r}\left(\int_{|\zeta|/r}^1\frac{\omega(x)}{x}dx\right)d\nu(\zeta)-$$
$$-\iint_{|\zeta|\le r_o}\left(\int_{|\zeta|/r}^{|\zeta|/r_o}\frac{\omega(x)}{x}dx\right)d\nu(\zeta),\quad r_o<r<R.\qquad(2.7)$$

Однако предварительное применение представления (1.11) теоремы 1.2 приводит к другой форме этой формулы, где слагаемые, очевидно, равны соответствующим слагаемым в (2.7) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega u(r_o e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega u(re^{i\theta})d\theta - \iint_{r_o<|\zeta|<r} \log\frac{r}{|\zeta|}d\nu_\omega(\zeta) - $$
$$-\log\frac{r}{r_o}\iint_{|\zeta|\le r_o} d\nu_\omega(\zeta), \quad r_o<r<R.$$

Таким образом, Формула типа Иенсена–Неванлинны для функции $u(z)$ почленно совпадает с обычной формулой Иенсена–Неванлинны, записанной для функции $u_\omega(z) = L_\omega u(z)$. Тем самым, вводя ω-характеристики М. М. Джрбашяна

$$\begin{aligned}
m_\omega(r,\pm\infty) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[L_\omega u(re^{i\theta})\right]^{\pm} d\theta,\\
N_\omega(r,r_o,\pm\infty) =& \int_{r_o}^{r} \frac{n_\pm(t)-n_\pm(r_o)}{t}\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt + \int_0^{r_o}\left(\int_{t/r}^{t/r_o}\frac{\omega(x)}{x}dx\right)dn_\pm(t) =\\
&= \int_{r_o}^{r} \frac{n_\pm(t)-n_\pm(r_o)}{t}\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt+\\
&+\left\{n_\pm(r_o)\int_{r_o/r}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx + \int_0^{r_o}\frac{n_\pm(t)}{t}\left[\omega\left(\frac{t}{r}\right)-\omega\left(\frac{t}{r_o}\right)\right]dt\right\},\\
T_\omega(r,r_o,\pm\infty) =& m_\omega(r,\pm\infty) + N_\omega(r,r_o,\pm\infty),
\end{aligned}$$

приходим к нижеследующей теореме, относящейся к качественному сравнению этих характеристик с неванлинновскими.

Теорема 2.2. *Если $\omega(x)\in\Omega_s$ и функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z|<R\le$ $\le+\infty$, то при любых $r, r_o\in(0,R)$ ω-характеристики М. М. Джрбашяна от $u(z)$ совпадают с характеристиками Неванлинны функции $u_\omega(z)=L_\omega u(z)$.*

Замечание. Задача качественного сравнения характеристик М. М. Джрбашяна с характеристиками Неванлинны хорошо известна. Первые результаты были доказаны в [4] (леммы 4.6 и 4.7). Окончательный характер теоремы 2.2 – результат рассмотрения неванлинновских характеристик δ-субгамонических функций.

Аналоги классов М. М. Джрбашяна – классы N_ω функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$, естественно определять условием

$$\sup_{r_o<r<1} T_\omega(r, r_o, +\infty) < +\infty, \tag{2.8}$$

где $r_o \in (0,1)$ – любое фиксированное число. $T_\omega(r, r_o, +\infty, u) = T(r, r_o, +\infty, u_\omega)$ в силу теоремы 2.2. Поэтому выбор r_o здесь не существенен. С другой стороны,

$$u(z) \in N_\omega \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad u_\omega(z) \in N.$$

Более того, оказывается, что используя обратимость оператора L_ω (теорема 1.3) и представление неванлинновского класса N, можно установить представления классов N_ω.

Теорема 2.3. *Пусть $\omega(x) \in \Omega_s$ – любая функция. Тогда :*

1°. *Класс N_ω совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\, S_\omega(ze^{-i\theta})d\mu(\theta), \quad |z| < 1, \tag{2.9}$$

где A_ω – фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна

$$S_\omega(\zeta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{\Delta_k}, \quad \Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx$$

– его ядро типа Шварца, $\nu(\zeta)$ – борелевская мера, удовлетворяющая условию

$$\iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx\right) |d\nu(\zeta)| < +\infty, \tag{2.10}$$

а $\mu(\theta)$ – функция ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$.

2°. *Если имеют место представления (2.9) – (2.10), то для $\mu(\theta)$ справедливо утверждение 3° теоремы 2.1, где $u(z)$ заменено на $u_\omega(z) = L_\omega u(z)$.*

3°. *Класс N содержится в любом N_ω ($\omega(x) \in \Omega_s$). С другой стороны, теоретико-множественная сумма классов N_ω, взятая по всем $\omega(x) \in \Omega_s$, совпадает с множеством всех функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$.*

Доказательство. 1°. Если $u(z) \in N_\omega$, то $L_\omega u(z) = u_\omega(z) \in N$. Тем самым, функция $u_\omega(z)$ представима в виде (2.4) – (2.5), где ν заменено на ν_ω. Но

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = L_\omega \mathrm{Re}\, S_\omega(e^{-i\theta}z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \ |z| < 1,$$

поэтому, в силу (1.11)

$$L_\omega u(z) = L_\omega \left\{ \iint_{|\zeta|<1} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\theta}z)d\mu(\theta) \right\}, \quad |z|<1,$$

и (2.9) следует из теоремы 1.3, так как разность $u(z)$ и функции в фигурных скобках гармонична в $|z|<1$. Условие (2.10) легко следует из ограниченности характеристики $N_\omega(r, r_0, \pm\infty)$. Обратно, если $u(z)$ представима в виде (2.9) – (2.10), то из (1.11) следует, что $u_\omega(z)$ представима в виде (2.4) – (2.5). Отсюда следует, что $u_\omega(z) \in N$, и $u(z) \in \dot{N}_\omega$. Доказательство утверждения 2° очевидно.

3°. Если $u(z) \in N$, то $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_{1,2}(z)$ – неположительные, субгармонические в $|z|<1$ функции. Тем самым, $L_\omega u(z) = L_\omega u_1(z) - L_\omega u_2(z)$, где функции $L_\omega u_{1,2}(z)$ тоже неположительны и субгармоничны в $|z|<1$. Следовательно, $L_\omega u(z) \in N$, и $u(z) \in N_\omega$. Пользуясь вышеприведенными формулами для ω-характеристик, для любой функции $u(z)$, δ-субгармонической в $|z|<1$, нетрудно подобрать $\omega(x) \in \Omega_s$ такое, что $u(z) \in N_\omega$.

Замечание 1. Как было отмечено выше, $u(z) \in N_\omega$ при некотором $\omega(x) \in \in \Omega_s$ тогда и только тогда, когда $L_\omega u(z) \in N$. Более того, из приведенных рассуждений очевидно следует, что $L_\omega N_\omega$ является *строгим* подмножеством N, совпадающим с множеством *непрерывных* субгармонических в $|z|<1$ функций, допускающих представление вида

$$U(z) = \iint_{|z|<1} \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta} z}\right| d\nu_\omega(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\mu(\theta), \quad |z|<1,$$

где $\mu(\theta)$ и $\nu_\omega(\zeta)$ такие, как в представлении (2.4) – (2.5) класса N, однако, в дополнение, для ν_ω *существует борелевская мера* ν, *удовлетворяющая условию* (2.10) *и связанная с* ν_ω *формулой* (1.12).

Замечание 2. Если функция $u(z)$ *субгармонична* в $|z|<1$ и $\omega(x) \in \Omega_s$, то условие (2.8), определяющее класс N_ω, можно записать в виде

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left[L_\omega u(re^{i\theta})\right]^+ d\theta < +\infty.$$

Если, в добавок, $u(z)$ *неотрицательна*, то пользуясь представлением (1.3) оператора L_ω, можно показать, что последнее условие эквивалентно тому, что

$$\iint_{|z|<1} u(z)|\omega'(|z|)|d\sigma(z) < +\infty,$$

где $d\sigma(z)$ – плоская мера Лебега. Взяв здесь $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ $(\alpha > 0)$, можно проследить связь между N_ω и первоначальными классами, факторизованными М. М. Джрбашяном [14], [15]. Следует отметить, что некоторые свойства последних впервые были изучены Неванлинной (см. [16], п. 216).

2.3. Ниже установлены некоторые результаты, связанные с *проблемой вложения классов* N_ω.

Теорема 2.4. *Если функции $\omega_1(x), \omega_2(x) \in \Omega_*$ совпадают при $x \in [0,1]$ достаточно близком к 1, то $N_{\omega_1} = N_{\omega_2}$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – фиксированное число, и пусть $\omega_1(x) = \omega_2(x)$ для всех $x \in [\varepsilon, 1]$. Полагая, что функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z| < 1$, можно убедиться в том, что

$$m_{\omega_2}(r,+\infty) \le \max_{0\le t\le 1-\varepsilon} |\omega'_{1,2}(t)| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+\left((1-\varepsilon)e^{i\theta}\right) d\theta + m_{\omega_1}(r,+\infty), \quad 0<r<1.$$

С другой стороны, простое вычисление показывает, что

$$N_{\omega_2}(r, 1-\varepsilon, +\infty) = N_{\omega_1}(r, 1-\varepsilon, +\infty) + Q(r), \quad 1-\varepsilon < r < 1,$$

где слагаемое

$$Q(r) = \int_0^{(1-\varepsilon)^2} \frac{n(t)}{t}\left[\omega_2\left(\frac{t}{r}\right) - \omega_2\left(\frac{t}{1-\varepsilon}\right)\right] dt -$$
$$- \int_0^{(1-\varepsilon)^2} \frac{n(t)}{t}\left[\omega_1\left(\frac{t}{r}\right) - \omega_1\left(\frac{t}{1-\varepsilon}\right)\right] dt$$

равномерно ограничено в $[1-\varepsilon, 1]$. Отсюда следует, что

$$\sup_{1-\varepsilon<r<1} T_{\omega_2}(r, 1-\varepsilon, +\infty) < +\infty,$$

если T_{ω_1} удовлетворяет тому же условию. Таким образом, $u(z) \in N_{\omega_2}$, если $u(z) \in N_{\omega_1}$. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 2.4 показывает, что класс N_ω по существу определяется лишь поведением $\omega(x)$ вблизи 1. Тем самым, изменение $\omega(x) \in \Omega_s$ в окрестности начала координат (при котором $\omega(x)$ остается в Ω_s) не отражается на классе N_ω. Очевидно можно изменять значения $\omega(x) \in \Omega_s$ в окрестности начала координат, положив $\omega(x) \equiv 1$, $0 \le x \le l/2$, при некотором $l \in (0,1)$ и продолжив $\omega(x)$ в $l/2 \le x \le l$ как непрерывно дифференцируемую функцию. Использование такой функции $\tilde{\omega}(x) \in \Omega_s$, имеющей простое поведение вблизи начала координат, приводит, в частности, к доказательству следующей теоремы.

Теорема 2.5. *Если функции $\omega_{1,2}(x)$ принадлежат Ω_s и, для x достаточно близких к 1, $\omega_3(x) \in \Omega_s$ определена по формуле (1.13), то $N_{\omega_1}, N_{\omega_2} \subseteq N_{\omega_3}$.*

Доказательство. Пусть при $x \in [0,1]$ $(0 \le l < 1)$ функция $\omega_3(x)$ определена по формуле (1.13). Положив $\tilde{\omega}_{1,2}(x) \equiv 1$ при $0 \le x < l/2$ и продолжив $\tilde{\omega}_{1,2}(x)$ в $l/2 \le x \le l$ как непрерывно дифференцируемые функции, такие, что $\tilde{\omega}_{1,2}(x) = \omega_{1,2}(x)$ при $x \in [l,1]$, по формуле (1.13) получаем новую функцию $\tilde{\omega}_3(x) \in \Omega_s$ такую, что $\tilde{\omega}_3(x) \equiv \omega_3(x)$ при $x \in [l,1]$ и $\tilde{\omega}_3(x) \equiv 1$ при $x \in [0, l/2]$. С другой стороны, функции $\tilde{\omega}_{1,2,3}(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1.3. Тем самым, для этих функций верна формула (1.15). Если $u(z) \in N_{\tilde{\omega}_1}$, то $L_{\tilde{\omega}_1}u(z) \in N$, т. е. $L_{\tilde{\omega}_1}u(z) \equiv U_1(z) - U_2(z)$, где $U_{1,2}(z)$ субгармоничны и неположительны в $|z| < 1$. Следовательно, $L_{\tilde{\omega}_3}u(z) = V_1(z) - V_2(z)$, где $V_{1,2}(z) = L_{\tilde{\omega}_2}U_{1,2}(z)$ – неположительные субгармонические функции в $|z| < 1$. Отсюда следует, что $L_{\tilde{\omega}_3}u(z) \in N$ и, что то же самое, $u(z) \in N_{\tilde{\omega}_3}$. Итак, $N_{\tilde{\omega}_1} \subset N_{\tilde{\omega}_3}$. Аналогично доказывается вложение $N_{\tilde{\omega}_2} \subset N_{\tilde{\omega}_3}$, а нужное утверждение вытекает из равенства $N_{\tilde{\omega}_{1,2,3}} = N_{\omega_{1,2,3}}$ и теоремы 2.4.

2.4. Обратная задача вложения классов N_ω может быть сформулирована следующим образом : *при каком соотношении между $\omega_1(x) \in \Omega_s$ и $\omega_3(x) \in \Omega_s$ имеет место вложение $N_{\omega_1} \subset N_{\omega_3}$?* Эта проблема была предложена М. М. Джрбашяном [12] (для классов N_ω мероморфных функций) в форме проблемы моментов Хаусдорфа. Одновременно, в [12] было выдвинуто предположение (которое справедливо, когда функции $\omega(x)$ принадлежат основной шкале $(1-x)^\alpha$) : $N_{\omega_1} \subseteq N_{\omega_3}$ (или, что то же самое, предложенная проблема моментов имеет искомое решение) *если только* $\omega_{1,3}(x) \in \Omega$ *монотонны в* $[0,1)$, *и отношение* $\omega_3(x)/\omega_1(x)$ *не возрастает*. В дальнейшем решение этой проблемы было найдено И. В. Островским [13], рассмотревшим случай, когда функции $\omega_{1,3}(x)$ не убывают в $[0,1]$, т. е. классы N_ω являются *подмножествами* неванлинновского класса N мероморфных функций ограниченного вида в $|z| < 1$. В [13] было найдено условие, более ограничительное, чем невозрастание $\omega_3(x)/\omega_1(x)$, обеспечивающее вложение $N_{\omega_1} \subseteq N_{\omega_3}$. Было показано, что *найденное условие не может быть заменено невозрастанием* $\omega_3(x)/\omega_1(x)$.

Напомним, что в этой статье рассматривается случай, когда $\omega(1-0) = 0$, и, тем самым, классы N_ω *содержат* класс N и исчерпывают множество всех функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$. Как ясно из леммы 1.3, решение отмеченной проблемы вложения можно свести к решению интегрального уравнения Вольтерра (1.14). В общем случае это может быть предметом для нового исследования. Ниже мы будем рассматривать простой случай – когда $\omega_1(x)$ принадлежит основной шкале, т. е. $\omega_1(x) = (1-x)^\alpha$ $(\alpha > 0)$. В этом случае (1.13) переходит в интегральное уравнение Абеля

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1} g(t)dt,$$

где

$$f(y) = \frac{\omega_3(1-y)}{(1-y)\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{и} \quad g(y) = \frac{\omega_2(1-y)}{(1-y)^{1+\alpha}}.$$

Опираясь на теорему 2.5 и хорошо известное решение последнего уравнения, данное Я. Д. Тамаркиным [17] (см. также [2], стр. 574), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.6. *Пусть* $\omega_1(x) = (1-x)^\alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, p – *натуральное число, определенное из неравенств* $p - 1 < \alpha \le p$, *а функция* $\omega_3(x) \in \Omega_s$ *такова, что при некотором* $l \in [0, 1)$

(а) $d^p/dx^p\, A(x) \in L_1(l, 1)$ *при некотором* $l \in [0,1)$, *где*

$$a(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{p-\alpha-1} \omega_3(t) \frac{dt}{t},$$

(б) $a(1) = a'(1) = \ldots = a^{(p)}(1) = 0$,

(в) $(-1)^p x^{1+\alpha} a^{(p)}(x) \le 1$ – *неотрицательная, невозрастающая и непрерывно дифференцируемая в* $(l, 1)$ *функция.*

Тогда для функций $\omega_{1,3}(x)$ *и*

$$\omega_2(x) = \frac{(-1)^p x^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} a^{(p)}(x), \quad l < x < 1$$

в $(l, 1)$ *справедливы формулы (1.13) – (1.14). Кроме того,* $N_{\omega_1} \subseteq N_{\omega_3}$ *и* $N_{\omega_2^*} \subseteq N_{\omega_3}$ *при любом* $\omega_2^*(x) \in \Omega_s$, *совпадающем с* $\omega_2(x)$ *в* $(l, 1)$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство леммы 1.1. 1°. Из (1.1) вытекает, что $\omega(t) = P(t) - tP'(t)$. Поэтому, если $z = re^{i\varphi}$ и $|z| = r < R$, то

$$\int_0^r L_\omega u(xe^{i\varphi}) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^r u(xte^{i\varphi}) dx \right) d[P(t) - tP'(t)], \tag{3.1}$$

где интегралы абсолютно сходятся. Обозначив

$$J(te^{i\varphi}) = tP'(t) \int_0^r u(xte^{i\varphi}) dx, \quad 0 < t < 1, \tag{3.2}$$

заметим, что

$$J(te^{i\varphi}) = O(1) P'(t) = o(1) \quad \text{при} \quad t \to 1 - 0. \tag{3.3}$$

Для доказательства такого же соотношения при $t \to +0$ заметим, что по теореме Рисса

$$u(\sigma e^{i\varphi}) = \iint_{|\zeta|<r} \log \left| \frac{r(\zeta - \sigma e^{i\varphi})}{r^2 - \bar\zeta \sigma e^{i\varphi}} \right| d\nu(\zeta) + U_1(\sigma e^{i\varphi}) - U_2(\sigma e^{i\varphi}), \quad 0 \le \sigma < r,$$

где $U_{1,2}$ – наименьшие гармонические мажоранты субгармонических функций какого-либо разложения $u = u_1 - u_2$, а $\nu(\zeta)$ – ограниченная борелевская мера в $|\zeta| \le r$. Из этого представления и условия (1.2) следует, что

$$|J(te^{i\varphi})| \le P'(t) \iint_{|\zeta|<r} \left(\int_0^{rt} \log \frac{2r}{||\zeta| - \sigma|} \right) |d\nu(\zeta)| + o(1) \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Легко проверить, что в обоих случаях $0 \le |\zeta| < rt$ и $rt \le |\zeta| < r$ имеем

$$0 < \int_0^{rt} \log \frac{2r}{||\zeta| - \sigma|} d\sigma < rt \log \frac{2e}{t}, \quad 0 < t < \frac{1}{e}.$$

Отсюда, по (1.2) $A(te^{i\varphi}) = o(1)$ при $t \to +0$. Тем самым, из формул (3.1) – (3.3) следует, что

$$\int_0^r L_\omega u(xe^{i\varphi})dx = - \int_0^1 \left(\int_0^r u(xte^{i\varphi})dx \right) dP(t) - \int_0^1 tP'(t) d \left(\int_0^r u(xte^{i\varphi})dx \right) =$$
$$= -r \int_0^1 u(tre^{i\varphi}) dP(t).$$

2°. Согласно лемме 2 из [3]

$$L_\omega u(z) = u(0) + \int_0^1 \left(|z| \frac{\partial}{\partial |z|} u(z) \right) \Big|_{zt} \frac{\omega(t)}{t} dt = u(0) + L_{\omega_1} U(z).$$

Доказательство леммы 1.2. 2°. Если функция $u(z)$ голоморфна в G, то для функции $L_\omega u(z)$, записанной в виде (1.4), легко проверить справедливость полярных уравнений Коши-Римана. С другой стороны, если $u(z)$ гармонична в G, то существует функция $f(z)$, голоморфная в G и такая, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Тем самым, функция $L_\omega u(z) = \operatorname{Re} L_\omega f(z)$ гармонична в G. Далее, если функция $f(z)$ голоморфна в G, то ее разложение Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

сходится в $|z| < \rho = \min\{|z| : z \in \partial G\}$. Как легко проверить, разложение

$$L_\omega f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \Delta_k z^k, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx, \quad k \ge 1$$

имеет тот же радиус сходимости. Поэтому из тождества $L_\omega f(z) \equiv C = $ $= \text{const}$, $(|z| < \varepsilon)$ следует, что $C_0 = C$, $C_k = 0 (k \geq 1)$, и $f(z) \equiv C = C_0$. Это рассуждение очевидно можно повторить в случае, когда функция $u(z)$ гармонична в G и $L_\omega u(z) \equiv C = \text{const}$ в окрестности начала координат.

1°. Полагая, что $\zeta \neq 0$ – фиксированная точка, сначала докажем, что при любом $R > 0$ интеграл

$$J(z) = L_\omega \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{\zeta} z}\right| =$$
$$= -\int_0^1 \log|R(\zeta - zt)|\omega'(t)dt + \int_0^1 \log|R^2 - \bar{\zeta} zt|\omega'(t)dt \equiv J_1(z) + J_2(z)$$

– непрерывная в $|z| < R$ функция. Действительно, если $|z| \leq \delta < R$, то $J_2(z)$ равномерно сходится, поскольку

$$|\omega'(t) \log|R^2 - \bar{\zeta} zt|| \leq \max\left\{\log 2R, \log\frac{1}{R(R-\delta)}\right\}|\omega'(t)| \in L_1(0,1).$$

Тем самым, $J_2(z)$ гармонична в $|z| < R$. Далее, если $\mathbf{K}$ – содержащийся в $|z| < R$ компакт, не пересекающийся с отрезком $[\zeta, R\zeta/|\zeta|)$, а $z \in \mathbf{K}$, то ясно, что $|\log|R(\zeta - zt)|| \leq C < +\infty$ $(0 \leq t \leq 1)$, где C – постоянная, зависящая только от расстояния между $\mathbf{K}$ и $[\zeta, R\zeta/|\zeta|)$. Отсюда следует, что $J_1(z)$ гармонична в $\{|z| < R\} \setminus [\zeta, R\zeta/|\zeta|)$. Чтобы показать, что $J_1(z)$ непрерывно продолжима на отрезок $[\zeta, R\zeta/|\zeta|)$, предположим $z = \zeta/\lambda$ $(|\zeta|/R < \lambda \leq 1)$. Тогда

$$J_1(z) = \log R|\zeta| - \int_0^1 \log\left|1 - \frac{t}{\lambda}\right|\omega'(t)dt = \log R|\zeta| + \Phi(\lambda),$$

и, очевидно, достаточно только показать, что $\Phi(\lambda)$ (где λ рассматривается как комплексный параметр) непрерывно продолжима на отрезок $(|\zeta|/R, 1]$. Для этого воспользуемся представлением

$$\Phi(\lambda) = \text{Re} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t - \lambda} dt,$$

полученным интегрированием по частям. Так как функция $\omega'(t)$ непрерывна в $[0, 1)$ и удовлетворяет условию (1.5), то по хорошо известному свойству интегралов типа Коши (см., напр., [18], разделы 5.1 и 8.1) $\Phi(\lambda)$ непрерывно продолжима на $[\zeta/R,1]$. Далее, полагая, что $\delta\in(0,1)$ – любое число, $R=\sup\{\delta|z|: z\in G\}$, и обозначив

$$I_\delta(z)=\iint_{\zeta\in\delta G}\log\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\overline{\zeta}z}\right|d\nu(\zeta),$$

где $\nu(\zeta)$ – борелевская мера, ассоциированная с $u(z)$, докажем, что функция $L_\omega I_\delta(z)$ непрерывна в $0<|z|<R$ и такова, что

$$L_\omega I_\delta(z)=\iint_{\zeta\in\delta G}L_\omega\log\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\overline{\zeta}z}\right|d\nu(\zeta),\quad 0<|z|<R. \tag{3.4}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{R||\zeta|-|z|t|}{R^2-|\zeta z|t}\le\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\overline{\zeta}z}\right|\le 1,\quad |\zeta|,|z|\le R,\quad 0\le t\le 1.$$

Следовательно

$$\left|L_\omega\log\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\overline{\zeta}z}\right|\right|\le\int_0^1\log\frac{R^2-|\zeta z|t}{R||\zeta|-|z|t|}|\omega'(t)|dt<$$
$$<\log R+\int_0^1\log\frac{1}{||\zeta|-|z|t|}|\omega'(t)|dt\equiv\log R+A.$$

Если $|z|\le|\zeta|$, то ввиду свойств $\omega(t)$ имеем

$$A\le\log\frac{1}{|\zeta|}+\int_0^1\log\frac{1}{1-t}|\omega'(t)|dt\equiv\log\frac{1}{|\zeta|}+C_1<+\infty.$$

С другой стороны, если $|\zeta|<|z|<R$, то по тем же свойствам

$$A\le\log\frac{1}{|z|}+\int_0^1\log\frac{1}{\left|\left|\frac{\zeta}{z}\right|-t\right|}|\omega'(t)|dt\le$$
$$\le\log\frac{1}{|z|}+\max_{0\le x\le 1}\int_0^1\log\frac{1}{|x-t|}|\omega'(t)|dt\equiv\log\frac{1}{|z|}+C_2<+\infty.$$

Таким образом

$$\left|L_\omega\log\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\overline{\zeta}z}\right|\right|\le\log R+\min\left\{\log\frac{1}{|z|},\log\frac{1}{|\zeta|}\right\}+C_3. \tag{3.5}$$

Тем самым, правый интеграл в (3.4) абсолютно и равномерно сходится внутри $0<|z|<R$. Отсюда следует, что формула (3.4) справедлива и функция $L_\omega I_\delta(z)$ непрерывна в $0<|z|<R$. Если $u(0)\ne-\infty$, то

$$\iint_{|\zeta|<R/2}\log\frac{1}{|\zeta|}d\nu(\zeta)<+\infty$$

(см. [19], раздел 3.9). Следовательно, по (3.5) функция $L_\omega I_\delta(z)$ непрерывна также в точке $z = 0$. Наконец, остается заметить, что если D – звездообразная область такая, что $\overline{D} \subset \delta G$, и $g(\zeta, z)$ – ее функция Грина, то функция

$$\Psi(z) = \iint_{\zeta\in D} g(\zeta, z)d\nu(\zeta) + \iint_{\zeta\in\delta G} \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{\zeta}z}\right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в D. Следовательно, по только что доказанному утверждению 2°, $L_\omega\Psi(z)$ гармонична в D, а $L_\omega u(z)$ непрерывна в $D\setminus\{0\}$ (а также в точке $z = 0$, если $u(0) \neq -\infty$). Отсюда следует, что $L_\omega u(z)$ непрерывна в $G\setminus\{0\}$ (а также в $z = 0$, если $u(0) \neq -\infty$). Далее, неравенство между $L_\omega u(z)$ и ее средним, обеспечивающее нужную субгармоничность, можно непосредственно проверить, пользуясь формулой (1.3).

Доказательство теоремы 1.1. Полагая, что $\delta \in (0, 1)$ – любое число и пользуясь асимптотической формулой (1.68′) из [4], можно проверить, что второй интеграл в правой стороне представления

$$I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \iint_{\delta\leq|\zeta|<1} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) \tag{3.6}$$

является гармонической в $|z| < \delta$ функцией. Для исследования первого интеграла правой части этой формулы введем в рассмотрение функции

$$u(z,\zeta) = \log|A_\omega(z,\zeta)| - \log|A(z,\zeta)|, \quad u_\omega(z,\zeta) = L_\omega u(z,\zeta),$$

гармонические в $|z| < 1$. Из формул (2.21) и (3.10) работы [3] следует, что при $|\zeta| < \delta$ и $r \in (\delta, 1)$ имеем

$$u(z,\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\omega\left(\frac{z}{r}e^{-i\theta}\right) u_\omega(re^{i\theta},\zeta)d\theta\right\}, \quad |z| < r, \tag{3.7}$$

$$u_\omega(z,\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{r}e^{-i\theta}\right) u_\omega(re^{i\theta},\zeta)d\theta\right\}, \quad |z| < r, \tag{3.8}$$

где

$$S_\omega\left(\frac{z}{r}e^{-i\theta}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r}e^{-i\theta}\right)^k \Delta_k^{-1}\bigg|_{\omega(t)\equiv1} = \frac{e^{i\theta} + z/r}{e^{i\theta} - z/r} = S\left(\frac{z}{r}e^{-i\theta}\right),$$

$$\Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx, \quad k \geq 1.$$

Последние формулы могут быть рассмотрены также как очевидные следствия утверждения 2° леммы 1.2. Действительно, (3.8) справедливо, так как $u(z,\zeta)$ гармонична в $|z|<1$, а (3.7) следует из (3.8), поскольку разница правой и левой сторон (3.8) – гармоническая функция, обращающаяся тождественно в нуль после применения L_ω.

По формуле (2.40) из [4]

$$u_\omega(z,\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\log\frac{1}{|\zeta|} - \int_0^{|\zeta|}\frac{\omega(x)}{x-\zeta/z}dx - \int_{|\zeta|}^1\frac{\omega(x)}{x-\overline{\zeta}z}dx - \int_0^1\frac{\overline{\zeta}z\omega(x)}{1-\overline{\zeta}zx}dx\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}|u_\omega(z,\zeta)| \leq \left|\int_0^{|\zeta|}\frac{\omega(x)}{x-\zeta/z}dx\right| + \left|\int_0^1\frac{\overline{\zeta}z\omega(x)}{1-\overline{\zeta}zx}dx\right| + \\ + \left|\int_{|\zeta|}^1\left\{\frac{1}{x}-\frac{\omega(x)}{x-\overline{\zeta}z}\right\}dx\right| \equiv I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

При $z=re^{i\theta}$ и $|\zeta|<\delta$ $(\delta<r<1)$

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \max_{0\leq x\leq\delta}\{\omega(x)\}\int_0^{|\zeta|}\frac{dx}{|\zeta|/r-x} = \max_{0\leq x\leq\delta}\{\omega(x)\}\log\frac{1}{1-r} < +\infty,\\
I_2 &\leq \frac{\delta r}{1-\delta r}\int_0^1\omega(x)dx < +\infty,\\
I_3 &\leq \int_{|\zeta|}^1\left|\frac{1-\omega(x)}{x-\overline{\zeta}z}\right|dx + \left|\int_{|\zeta|}^1\frac{dx}{x} - \int_{|\zeta|}^1\frac{dx}{x-\overline{\zeta}z}\right| \leq\\
&\leq \pi + \frac{1}{1-r}\int_{|\zeta|}^1\frac{|1-\omega(x)|}{x}dx + \log\frac{1+r}{1-r} < +\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$|u_\omega(re^{i\theta},\zeta)| \leq M_{\delta,r} < +\infty, \quad |\zeta|<\delta<r<1, \tag{3.9}$$

где $M_{\delta,r}$ – постоянная, зависящая лишь от δ и r. Полагая, что $|z|\leq\kappa r$ $(0<\kappa<1)$, $|z|<\delta<r<1$, из (3.9) и (3.7) получим

$$|u(z,\zeta)| \leq M_{\delta,r}\left(1+2\sum_{k=1}^\infty \kappa^k\Delta_k^{-1}\right),$$

где

$$\Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx > k\int_{(1+\kappa)/2}^1 \omega(x)x^{k-1}dx \geq$$
$$\geq k\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{k-1}\int_{(1+\kappa)/2}^1 \omega(x)dx = k\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{k-1} J_\kappa > 0.$$

Тем самым, при $|z| \leq \kappa r$ $(0 < \kappa < 1)$ и $|\zeta| < \delta < r < 1$

$$|u(z,\zeta)| \leq M_{\delta,r}\left[1 + \frac{2}{J_\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{2\kappa}{1+\kappa}\right)^k\right].$$

Следовательно, интеграл

$$U_\delta(z) = \iint_{|\zeta|<\delta} u(z,\zeta)d\nu(\zeta)$$

абсолютно и равномерно сходится в $|z| \leq \kappa r$. Поскольку числа $\kappa \in (0,1)$ и $r \in (\delta, 1)$ произвольны, то функция $U_\delta(z)$ гармонична в $|z| < 1$ и

$$\iint_{|\zeta|<\delta} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + U_\delta(z), \quad |z| < 1. \tag{3.10}$$

Интеграл в правой части (3.6) является функцией, гармонической в круге $|z| < \delta$. Тем самым, ввиду последней формулы, интеграл $I_\omega(z)$ является функцией, субгармонической в любом круге $|z| < \delta < 1$ и обладает в любом таком круге тем же характером сходимости, что обычный потенциал Грина.

2°. Формулу (1.9) можно получить, устремив в (3.10) $\delta \to 1-0$. Однако, ниже мы кратко опишем иной, более предпочтительный путь получения (1.9). Полагая, что $\delta \in (0,1)$ и $|z| \leq \delta/2 = r$, будем иметь

$$\Phi(z) = \iint_{|\zeta|<1} F(z,\zeta)d\nu(\zeta) = \left(\iint_{|\zeta|<\delta} + \iint_{\delta\leq|\zeta|<1}\right) F(z,\zeta)d\nu(\zeta) \equiv \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{3.11}$$

где $F(z,\zeta)$ – интеграл из (3.7), являющийся голоморфной в $|z| < \delta/2$ функцией. Повторяя вышеприведенные рассуждения, придем к неравенству $|u_\omega(\delta e^{i\theta}/\zeta)| \leq$ $\leq M_\delta < +\infty$ $(|\zeta| < \delta)$, где M_δ – постоянная, зависящая лишь от δ. Из этого неравенства следует оценка $F(z,\zeta)$, обеспечивающая абсолютную и равномерную сходимость интеграла $\Phi_1(z)$ внутри $|z| < \delta/2$. Тем самым, функция $\Phi_1(z)$ голоморфна в $|z| < \delta/2$. С другой стороны, нетрудно показать, что

$$L_\omega \Phi_1(z) = \iint_{|\zeta|<\delta} L_\omega F(z,\zeta) d\nu(\zeta),$$

где правый интеграл абсолютно и равномерно сходится в $|z| < \delta/2$. Аналогичные утверждения для $\Phi_2(z)$ доказываются с привлечением надлежащих оценок слагаемых представления

$$F(z,\zeta) = -\Omega_\omega(z,\zeta) + \Omega(z,\zeta).$$

Здесь $-\Omega_\omega(z,\zeta)$ – интеграл в экспоненте в первой формуле (1.6), а

$$\Omega(z,\zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \left\{ \frac{1}{1-\frac{x\bar{\zeta}}{z}} + \frac{1}{1-\frac{zx}{\zeta}} - 1 \right\} \frac{dx}{x}$$

(см. [4], лемму 1.6, где доказана одна из используемых оценок). Итак, функция $\Phi(z)$ голоморфна в $|z| < 1$ и справедливо представление

$$L_\omega \operatorname{Re}\Phi(z) = \operatorname{Re} L_\omega \Phi(z) = \iint_{|\zeta|<1} L_\omega u(z,\zeta) d\nu(\zeta), \tag{3.12}$$

где интеграл абсолютно и равномерно сходится внутри $|z| < 1$. По лемме 2.5 из [4], $L_\omega u(z.\zeta) \equiv u_\omega(z,\zeta) \leq 0$, если $\omega(x)$ не убывает в $(0,1)$, и $u_\omega(z,\zeta) \geq 0$, если $\omega(x)$ не возрастает в $(0,1)$. Тем самым, по теореме Герглотца–Рисса

$$L_\omega \operatorname{Re}\Phi(z) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\psi(\theta) \right\}, \quad |z| < 1,$$

где $\psi(\theta)$ – мера с надлежащими свойствами. Отсюда легко следует формула (1.10), а (1.9) следует из (1.10) так, как (3.7) из (3.8).

Доказательство теоремы 1.2. Так как $\omega(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1° леммы 1.2, то функция $L_\omega I_\omega(z)$ непрерывна и субгармонична в $0 <$ $< |z| < 1$. Полагая $\delta \in (0,1)$, из (3.4), где берем $G = \{|z| < \delta^{-1}\}$, заключаем, что в $0 < |z| < 1$

$$L_\omega \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A(z,\zeta)| d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta} L_\omega \log|A(z,\zeta)| d\nu(\zeta).$$

Следовательно, ввиду (3.11) и (3.12)

$$L_\omega \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta} L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \quad 0<|z|<1. \tag{3.13}$$

Докажем первое равенство в (1.11). Ввиду (1.6), при $|z| \le \delta/2$ и $\delta < |\zeta| < 1$ имеем

$$|\log|A_\omega(z,\zeta)|| \le \frac{1}{\delta} \int_{|\zeta|}^1 \left\{1 + \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{z}{\zeta}x\right|^k \Delta_k^{-1} + \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{z\overline{\zeta}}{x}\right|^k \Delta_k^{-1}\right\} \omega(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\left\{1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k \Delta_k^{-1} + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \Delta_k^{-1}\right\} \int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx,$$

где суммы сходятся. Ввиду (1.3), (1.7) и теоремы Фубини при $|z| \le \delta/2$ для интегралов по области $\delta \le |\zeta| < 1$ имеет место аналогичное (3.13) равенство. Следовательно, (1.11) имеет место при $0 < |z| \le \delta/2$ $(0 < \delta < 1)$ и, тем самым, всюду в $0 < |z| < 1$. Перейдя к доказательству второго равенства (1.11), отметим, что $L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)| \le 0$ $(|z|, |\zeta| < 1)$. Как нетрудно проверить, при $r \to 1-0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |L_\omega l_\omega(re^{i\theta})|d\theta = \iint_{|\zeta|<r} \left(\int_{|\zeta|}^{|\zeta|/r} \frac{\omega(x)}{x}dx\right) d\nu(\zeta) +$$

$$+ \iint_{r\le|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x}dx\right) d\nu(\zeta) = o(1).$$

Отсюда следует равенство (1.11) с неотрицательной борелевской мерой ν_ω на $|\zeta| < 1$, удовлетворяющей условию (1.8).

Основной предпосылкой для доказательства (1.12) является формула

$$L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)| = -\int_{|\zeta|}^1 \log\left|A\left(z, \frac{\zeta}{x}\right)\right| \omega'(x)dx, \quad |z|, |\zeta| < 1, \tag{3.14}$$

которую нетрудно проверить, пользуясь (1.3), (1.6) и равенством $L_\omega C_\omega(z) = C(z) = (1-z)^{-1}$ (см. [4], формулы (1.9), (1.13) и (1.29)). Отметим, что формула (1.11) впервые была получена в работе [11], для специального случая $\omega(x) = (1-x)^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$, $0 < \alpha < +\infty$. Следуя рассуждению из [20], предположим, что $\zeta \in \mathbf{C}$ – фиксированная точка, $E \subset \mathbf{C}$ – борелевское множество и рассмотрим функцию Дирака

$$\delta_\zeta(E) = \begin{cases} 1, & \text{при } \zeta \in E \\ 0, & \text{при } \zeta \notin E. \end{cases}$$

Для ассоциированной меры ν субгармонической функции u хорошо известна формула $\nu = (2\pi)^{-1}\Delta u$, являющаяся следствием идентифицирования ν с линейным функционалом

$$(\nu, \varphi) \equiv \iint_D \varphi(z)d\nu(z) = \iint_D u(z)\Delta\varphi(z)d\sigma(z), \tag{3.15}$$

где $\sigma(z)$ – плоская мера Лебега. При этом, равенство (3.15) верно для любой субгармонической в области $D \subset \mathbf{C}$ функции $u(z)$ и любой функции $\varphi(z)$ из $C_o^\infty(D)$ (т. е. из класса бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, лежащим в D). Пусть $\nu_\omega^{(\zeta)}$ – ассоциированная мера функции $L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)|$, субгармонической в $|z| < 1$. Ввиду (3.14) и (3.15) имеем

$$\begin{aligned}(\nu_\omega^{(\zeta)}, \varphi) &= -\int_{|\zeta|}^1 \omega'(x)\left\{\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1} \log\left|A_\omega\left(z, \frac{\zeta}{x}\right)\right| \Delta\varphi(z)d\sigma(z)\right\} dx = \\ &= -\int_{|\zeta|}^1 \omega'(x)\varphi\left(\frac{\zeta}{x}\right) dx, \quad \varphi \in C_o^\infty(|z| < 1).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что

$$\nu_\omega^{(\zeta)}(E) = -\int_{|\zeta|}^1 \omega'(x)\delta_\zeta(xE)dx, \quad E \subset \{|z| < 1\}.$$

По первому из равенств (1.11), в силу (3.16), при любом $\varphi \in C_o^\infty(|z| < 1)$ имеем

$$\begin{aligned}(\nu_\omega, \varphi) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1} L_\omega I_\omega(z)\Delta\varphi(z)d\sigma(z) = \iint\limits_{|\zeta|<1} (\nu_\omega^{(\zeta)}, \varphi)d\nu(\zeta) = \\ &= -\int_0^1 \omega'(x)dx \iint\limits_{|\zeta|<1} \varphi(\zeta)d\nu(\zeta x),\end{aligned}$$

Отсюда приходим к (1.12).

Доказательство теоремы 1.3. По теореме представления Рисса, при любых $\rho_o \in (0,1)$ и z, $|z| < \rho_o$

$$U(z) = \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|\frac{\rho_o(z-\zeta)}{\rho_o^2 - z\bar{\zeta}}\right| d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_o^2 - |z|^2}{|\rho_o e^{i\theta} - z|^2} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta. \tag{3.17}$$

Тем самым

$$L_\omega U(z) = \log\frac{1}{\rho_o}\iint_{|\zeta|<\rho_o} d\nu(\zeta) + L_\omega \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|\frac{\frac{z}{\rho_o}-\frac{\zeta}{\rho_o}}{1-\frac{z}{\rho_o}\frac{\bar\zeta}{\rho_o}}\right| d\nu(\zeta) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta, \quad |z|<\rho_o. \tag{3.18}$$

Как следует из (1.9) и (1.11) – (1.12)

$$L_\omega \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|\frac{\frac{z}{\rho_o}-\frac{\zeta}{\rho_o}}{1-\frac{z}{\rho_o}\frac{\bar\zeta}{\rho_o}}\right| d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|A\left(\frac{z}{\rho_o},\frac{\zeta}{\rho_o}\right)\right| d\mu(\zeta) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2}\left(\iint_{|\zeta|<\rho_o} L_\omega \log\left|\frac{e^{i\theta}-\frac{\zeta}{\rho_o}}{1-e^{i\theta}\frac{\bar\zeta}{\rho_o}}\right| d\nu(\zeta)\right) d\theta,$$

где последнее слагаемое – гармоническая функция и

$$\mu(E) = L_\omega \nu(E) = -\int_0^1 \nu(tE)d\omega(t), \quad E\subset\{|z|<\rho_o\}.$$

Отсюда следует, что $\nu_1 \equiv \nu_2$. Тем самым

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta \equiv 0, \quad |z|<\rho_o.$$

Поскольку

$$L_\omega \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2} = \operatorname{Re} L_\omega \frac{1+e^{-i\theta}\frac{z}{\rho_o}}{1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho_o}} = \operatorname{Re} L_\omega\left\{2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k e^{-ik\theta}-1\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{-2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k e^{-ik\theta}\int_0^1 t^k d\omega(t) - 1\right\},$$

то последнее тождество можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k \int_0^1 t^k d\omega(t)\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}U(\rho_o e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta\right\} \equiv 0,$$

где $|z|<\rho_o$. Выражение в фигурных скобках является голоморфной в $|z|<\rho_o$ функцией. Поэтому, при $|z|<\rho_o$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k \int_0^1 t^k d\omega(t)\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}U(\rho_o e^{i\theta})d\theta \equiv iC,$$

где C – вещественная постоянная. Очевидно, что $C = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta = 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}U(\rho_o e^{i\theta})d\theta = 0, \quad k \geq 1.$$

Так как все коэффициенты Фурье функции $U(\rho_o e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ равны нулю, то $U(\rho_o e^{i\theta}) = 0$ почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, откуда следует, что $U(z) \equiv 0$.

Доказательство леммы 1.3. Определение (1.13) функции $\omega_3(x)$ корректно, поскольку в справедливости второго равенства нетрудно убедиться интегрированием по частям и простой заменой переменной. Поменяв порядок интегрирования, получим

$$\omega_3(x) = \int_x^1 \omega_1'(t)dt \int_{x/t}^1 \omega_2'(\tau)d\tau = \int_x^1 d\tau \int_\tau^1 \omega_1'(t)\omega_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) dt.$$

Следовательно, $\omega_3(0) = 1$ и верны равенства (1.14). В силу (1.14) функция $\omega_3'(x)$ непрерывна в $[0, 1]$. С другой стороны, при x достаточно близких к 1 заменой переменной $t \to x/t$ в первом из равенств (1.13) получим

$$\omega_3(x) = -\int_x^1 \omega_2(t)d\omega_1\left(\frac{x}{t}\right) \leq O(1-x)^{\varepsilon_2}\omega_1(x) \leq O(1-x)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

где $\varepsilon_{1,2} > 0$ такие же, как в соотношениях (1.5) для $\omega_{1,2}(x)$. Следовательно $\omega_3(x) \in \Omega_s$. Первое равенство (1.15) можно проверить используя (1.14), а второе справедливо, поскольку в рассуждении $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ можно поменять местами.

ABSTRACT. **M. M. Djrbashian's theory of factorization of functions meromorphic in the unit disk is extended to a exhaustive theory of Riesz type representations of δ-subharmonic functions. A new, simplified way of construction is chosen which resembles the author's previous consrtuctions for the half-plane and is based on the invertibility of the operator L_ω of M. M. Djrbashian. An exhausting result is obtained on the qualitative comparison of M. M. Djrbashian's ω-characteristics with Nevanlinna characteristics. Some results on the problems of embedding of M. M. Djrbashian's N_ω classes and of certain classes of δ-subharmonic functions also follow.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "Классы функций и их параметрическое представление",

Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965. стр. 118 – 137, Наука, Москва, 1966.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
3. М. М. Джрбашян, "Обобщенный оператор Римана–Лиувилля и некоторые приложения", Известия АН СССР, Сер. матем., т. 32, стр. 1075 – 1111, 1968.
4. М. М. Джрбашян, "Теория факторизации функций, мероморфных в круге", Мат. сборник, т. 79(121), стр. 517 – 615, 1969.
5. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, "Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида", Известия АН Армении, Математика, т. 2 – 3, стр. 182 – 194, 1971.
6. M. M. Djrbashian, "Theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in the disk", Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, pp. 197 – 202.
7. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге, Наука, Москва, 1993.
8. В. С. Захарян, "Сегментальные вариации потенциала типа Грина", ДАН Армении, т. 66, № 4, стр. 212 – 215, 1978.
9. В. С. Захарян, А. Г. Унанян, "Вариация потенциалов типа Грина на сегменте", ДАН Армении, т. 73, № 1, стр. 3 – 8, 1981.
10. С. Л. Берберян, "О граничном поведении субгармонических функций классов U_α", Известия АН Армении, Математика, т. 21, № 2, стр. 187 – 197, 1986.
11. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 34 – 49, 1994
12. M. M. Djrbashian, "Some open problems in the theory of representations of analytic functions", Lecture Notes in Mathematics, vol. 1043, pp. 522 – 526, 1984.
13. И. В. Островский, "Об одной проблеме моментов Хаусдорфа", Известия АН Армении, Математика, т. 25, № 1, стр. 91 – 96, 1990.
14. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении функций, мероморфных в единичном круге", ДАН Армянской ССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
15. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Института матем. и мех. АН Армянской ССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
16. R. Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1936.
17. J. D. Tamarkin, "On integrable solutions of Abel's integral equation", Ann. of Math., vol. (2)31, pp. 219 – 228, 1930.
18. Ф. Д. Гахов, Граничные задачи, ГИФМЛ, Москва, 1958.
19. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, Subharmonic functions, Ac. Press., London, 1976.
20. К. Л. Аветисян, "Потенциалы типа Грина и представимость весовых классов субгармонических функций", Известия НАН Армении, Математика, т. 30, № 2, стр. 3 – 34, 1995.

6 февраля 1995

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ

Г. С. Кочарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том. 30, № 2, 1995

В статье исследована сходимость в среднем на замкнутых кривых разложений функций по некоторым системам рациональных функций с заданными полюсами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Если функция $f(z)$ принадлежит классу H_p $(p > 0)$ в единичном круге, т. е. аналитична в $|z| < 1$ и при всех $r < 1$

$$\int_{|z|=r} |f(z)|^p |dz| \leq \mathbf{K}, \quad \text{где} \quad \mathbf{K} < +\infty - \text{постоянная},$$

то, как известно, почти всюду на единичной окружности $|z| = 1$ существуют некасательные граничные значения $f(z)$ при $|z| \to 1$ и

$$\int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| \leq \mathbf{K}.$$

Хорошо известно, что если

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < 1$$

– разложение Тейлора функции $f(z) \in H_p$ $(p > 1)$, то на окружности $|z| = 1$ имеет место сходимость в среднем :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \right|^p |dz| = 0.$$

Далее, если функция $f(z)$ определена лишь на единичной окружности, где она принадлежит классу L^p $(p > 1)$, т. е.

$$\int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| < +\infty,$$

то $f(z)$ разлагается в ряд Фурье, сходящийся в среднем на $|z| = 1$:

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=-m}^{n} c_k z^k \right|^p |dz| = 0.$$

Система функций $\{z^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна на единичной окружности. При этом, она является системой рациональных функций с полюсами в точках $z = 0$ и $z = \infty$.

Ниже мы рассмотрим разложения функций по обобщенным системам Уолша рациональных функций с заданным множеством полюсов.

§2. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Будем предполагать, что G – произвольная ограниченная, односвязная область со спрямляемой жордановой границей Г, а G^* – ее дополнение, содержащее точку $z = \infty$. Далее, будем предполагать, что функция $w = \Phi(z)$ осуществляет конформное отображение области G^* на $|w| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$ и $\lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z > 0$. Пусть $z = \psi(w)$ – обратная к Φ функция. Тогда функция

$$g(W, w) = \frac{\sqrt[q]{\psi'(w)}\sqrt[q]{\psi'(W)}}{\psi(W) - \psi(w)} - \frac{1}{W - w}$$

аналитична при $|w| > 1$ и $|W| > 1$. Положим

$$g_r(w) = \left\{ \int_{|W|=r} |g(W, w)|^q |dW| \right\}^{1/q},$$

где числа $p, q \geq 1$ удовлетворяют условию $p^{-1} + q^{-1} = 1$, а $r > 1$ произвольно.

Определение 1. Будем говорить, что кривая Г принадлежит классу $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\mathrm{M})$, если

$$\sup_{r,\rho>1} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|w|=\rho} |g_r(w)|^p |dw| \right\}^{1/p} = M < +\infty. \tag{1}$$

Определение 2. Аналитическую в области G функцию $f(z)$ отнесем к классу E_p, если существует постоянная $\mathrm{K} > 0$ такая, что

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| \leq \mathrm{K}$$

для любой замкнутой, спрямляемой кривой $\Gamma_r \subset G$.

Хорошо известно, что любая функция $f(z) \in E_p$ $(z \in G)$ обладает некасательными граничными значениями почти всюду на границе Γ, при этом

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta| < +\infty,$$

т. е. на окружности $|\tau| = 1$

$$\sqrt[p]{\psi'(\tau)} f\left[\psi(\tau)\right] \in L_p. \tag{2}$$

По существу, интеграл типа Коши

$$\theta(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\sqrt[p]{\psi'(\tau)} f\left[\psi(\tau)\right]}{\tau - w} d\tau \tag{3}$$

определяет пару функций – $\theta(w)$ и $\theta^*(w)$, аналитических, соответственно, в областях $|w| < 1$ и $|w| > 1$.

Теорема 1. *Если граница Γ области G принадлежит классу $\mathcal{M}_1(M)$ и $f(z) \in E_p$ $(p > 1)$ в G, то функция $\theta(w) \in H_p$ в круге $|w| < 1$. Кроме того*

$$C \int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p |d\tau| \leq \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta| \leq (1 + M)^p \int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p |d\tau|,$$

где $C > 0$ – постоянная.

Доказательство. В силу теоремы Рисса из (2) следует, что почти для всех t $(|t| = 1)$ существует сингулярный интеграл

$$S(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\sqrt[p]{\psi'(\tau)} f[\psi(\tau)]}{\tau - t} d\tau \quad (|t| = 1).$$

По той же теореме $S(f) \in L_p$ на $|t| = 1$ и

$$\int_{|t|=1} |S(f)|^p |dt| \leq C_1 \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |d\zeta|.$$

Пользуясь основной теоремой И. И. Привалова, из (3) получим, что

$$\theta(t) = S(f) + \frac{1}{2} \sqrt[p]{\psi'(t)} f[\psi(t)]$$

почти всюду на $|t| = 1$. Тем самым, интеграл типа Коши $\theta(w)$ обладает некасательными граничными значениями, суммируемыми в степени p. Отсюда, по теореме В. И. Смирнова, $\theta(w) \in H_p$ и

$$\int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p |d\tau| \leq C_2 \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |d\zeta|. \qquad (3')$$

Ввиду той же теоремы И. И. Привалова из (3) получим, что

$$\theta(t) - \theta^*(t) = \sqrt[p]{\psi'(t)} f[\psi(t)]$$

почти всюду на $|t| = 1$, и

$$f(\zeta) = \sqrt[p]{\Psi'(\zeta)} \{\theta[\Psi(\zeta)] - \theta^*[\Psi(\zeta)]\} \qquad (4)$$

почти всюду на Г. Для функции $\theta^*(w)$, аналитической в $|w| > 1$, ввиду (4) справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G, \qquad (5)$$

которое является обращением формулы (3). Снова воспользовавшись теоремой И. И. Привалова, из (5) получим, что для граничных значений функции $f(z)$ почти всюду на Г справедлива формула

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta - \xi} d\zeta + \frac{1}{2} \sqrt[p]{\Psi'(\xi)}\theta[\Psi(\xi)],$$

или почти всюду на окружности $|t| = 1$

$$\sqrt[p]{\psi'(t)} f[\psi(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\sqrt[p]{\psi'(t)}\sqrt[q]{\psi'(\tau)}}{\psi(\tau) - \psi(t)} \theta(\tau) d\tau + \frac{1}{2}\theta(t). \qquad (6)$$

Так как функция $\theta(w)$ аналитична в $|w| < 1$, то почти для всех t ($|t| = 1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\theta(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{2}\theta(t).$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$\sqrt[p]{\psi'(t)}f[\psi(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} g(\tau,t)\theta(\tau)d\tau + \theta(t) \qquad (|t| = 1). \tag{7}$$

Теперь положим

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} g(\tau,t)\theta(\tau)d\tau.$$

Пользуясь неравенством Гельдера для нормы

$$||\theta||_p = \left\{\int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p|d\tau|\right\}^{1/p},$$

получим, что почти для всех t ($|t| = 1$)

$$|\chi(t)| \leq \frac{1}{2\pi}||\theta||_p||g(\tau,t)||_q,$$

откуда и из (3′), (7) следует утверждение теоремы.

§3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

а) Пусть G – ограниченная, односвязная область с жордановой спрямляемой границей Γ, содержащей точку $z = 0$, функция $w = F(z)$ конформно отображает область G на круг $|w| > 1$ так, что $F(0) = \infty$ и $\lim_{z\to 0} zF(z) > 0$, а $z = \varphi(w)$ – обратное отображение.

Для последовательности чисел $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset G^*$ (некоторые из которых могут совпадать) построим рациональные функции

$$\chi_m(w) = \frac{\sqrt{|\lambda_m^*|^2 - 1}}{\lambda_m^* - w}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1 - \lambda_k^* w}{w - \lambda_k^*} \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где $\lambda_k^* = \Phi(\lambda_k)$ и $\prod_{k=1}^{0} = 1$. Следуя М. М. Джрбашяну [1], рассмотрим рациональные функции

$$M_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\frac{\chi_m[\Psi(\zeta)]}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in G \tag{9}$$

с полюсами $\{\lambda_k\}$. Равномерная сходимость в G ряда по системе $\{M_m(z)\}$ впервые была исследована М. М. Джрбашяном [1],[2] (1957), а затем Г. Ц. Тумаркиным [3] (1961). Такой ряд будет сходится также на Γ, после наложения дополнительного ограничения на границу Γ области G.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу E_p $(p > 1)$ в области G с границей $\Gamma \in \mathcal{M}_1$. Если полюсы системы (9) удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\lambda_k^*|^{-1}) = +\infty, \tag{10}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} \left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(\zeta) \right|^p |d\zeta| = 0,$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \sqrt[p]{\psi'(\tau)} f[\psi(\tau)] \overline{\chi_k(\tau)} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Кроме того, имеет место эквивалентность

$$C \int_{|\tau|=1} \left| \theta(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(\tau) \right|^p |d\tau| \le \int_{\Gamma} \left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(\zeta) \right|^p |d\zeta| \le$$
$$\le (1+M)^p \int_{|\tau|=1} \left| \theta(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(\tau) \right|^p |d\tau|.$$

Доказательство. Из (9) следует, что функции

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(z), \quad z \in G$$

в представлении (5) соответствует

$$\theta(w) - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(w) \quad (|w| < 1).$$

Далее, как было показано А. А. Китбаляном [4], для любой функции $\theta(w) \in H_p$, удовлетворяющей условию (3), справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \theta(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(t) \right\|_p = 0,$$

что, вместе с теоремой 1 приводит к нужному утверждению.

Отметим, что аналог теоремы 2 при других предположениях относительно области G при $p = 2$ был анонсирован Г. Ц. Тумаркиным [5]. В специальном случае, когда все $\{\lambda_k\}_1^\infty$ совпадают с точкой $z = \infty$, система $\{M_k(z)\}_1^\infty$ переходит в систему полиномов Фабера. Для системы Фабера утверждение теоремы 2 было доказано Розенблюмом и Варшавским [5] (при $p = 2$) и С. Я. Альпером [6] (при $p > 1$). Однако, в последней работе область G была подчинена несколько иным условиям.

б) Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(z) \in L_p$ задана лишь на жордановой спрямляемой кривой Г. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty \subset G$ – другая последовательность чисел. Построим функции

$$\psi_m(w) = \frac{\sqrt{|\mu_m^*|^2 - 1}}{\mu_m^* - w} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \overline{\mu_k^*} w}{w - \mu_k^*} \quad \mu_k^* = F(\mu_k) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$N_m(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sqrt[q]{F'(\zeta)}\psi_m[F(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G^* \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (11)$$

$$q(W, w) = \frac{\sqrt[q]{\varphi'(w)}\sqrt[q]{\varphi'(W)}}{\varphi(W) - \varphi(w)} - \frac{1}{W - w}.$$

Отметим, что функция $q(W, w)$ аналитична при $w \in G^*$ и $W \in G^*$. Положим

$$q_r(w) = \left\{ \int_{|w|=r} |q(W, w)|^q |dw| \right\}^{1/q} \qquad (r > 1).$$

Будем говорить, что кривая Г принадлежит классу $\mathcal{M}_2$, если для любых $r > 1$ и $p > 1$

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|w|=\rho} |q_r(w)|^p |dw| \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ *– замкнутая жорданова спрямляемая кривая. Если*

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\lambda_k^*|^{-1}) = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^\infty (1 - |\mu_k^*|^{-1}) = +\infty,$$

то для любой функции $f(z) \in L_p$ $(p > 1)$*, заданной на* Г*, справедливо соотношение*

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_{\Gamma}\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}a_kM_k(z)-\sum_{k=1}^{m}b_kN_k(z)\right|^p|dz|=0,$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\sqrt[p]{\psi'(\tau)}f[\psi(\tau)]\overline{\chi_k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau},$$
$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\sqrt[p]{\varphi'(\tau)}f[\varphi(\tau)]\overline{\psi_k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau},\quad k=1,2,\ldots$$

и

$$C\int_{|\tau|=1}\left|\theta(\tau)-\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k(\tau)-\sum_{k=1}^{m}b_k\psi_k(\tau)\right|^p|d\tau|\le$$
$$\le\int_{\Gamma}\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}a_kM_k(z)-\sum_{k=1}^{m}b_kN_k(z)\right|^p|dz|\le$$
$$\le(1+M)^p\int_{|\tau|=1}\left|\theta(\tau)-\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k(\tau)-\sum_{k=1}^{m}b_k\psi_k(\tau)\right|^p|d\tau|.$$

Доказательство. Из (9) и (3) следует, что при $z\in G$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kM_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k[\Psi(\zeta)]-\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.\quad(12)$$

Отсюда получим, что почти для всех $\zeta\in\Gamma$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kM_k(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k[\Psi(\zeta)]-\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta+$$
$$+\frac{\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k[\Psi(\zeta)]-\theta[\Psi(\zeta)]\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{f(\zeta)}{2}(13)$$

Аналогично получим, что при $z\in G^*$

$$\sum_{k=1}^{m}b_kN_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sqrt[p]{F'(\zeta)}\frac{\lambda[F(\zeta)]-\sum_{k=1}^{m}b_k\psi_k[F(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

и почти для всех $\zeta\in\Gamma$

$$\sum_{k=1}^{m}b_kN_k(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sqrt[p]{F'(\zeta)}\frac{\lambda[F(\zeta)]-\sum_{k=1}^{m}b_k\psi_k[F(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta-$$
$$-\frac{\sqrt[p]{F'(\xi)}}{2}\left(\lambda[F(\xi)]-\sum_{k=1}^{m}b_k\psi_k[F(\xi)]\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{f(\xi)}{2}(14)$$

где

$$\lambda(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\tau)}f[\varphi(\tau)]}{\tau-w}d\tau\quad(|w|<1).$$

Сложив равенства (13) и (14) почти для всех $\xi\in\Gamma$ получим

$$
\begin{aligned}
f(\xi) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(\xi) - \sum_{k=1}^{m} b_k N_k(\xi) = \\
= \sqrt[p]{\Phi'(\xi)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} g[\tau, \Phi(\xi)] \left(\theta(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(\tau) \right) d\tau + \\
+ \sqrt[p]{\Phi'(\xi)} \left(\theta[\Phi(\xi)] - \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k[\Phi(\xi)] \right) dt - \\
- \sqrt[p]{F'(\xi)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} g[\tau, F(\xi)] \left(\lambda(\tau) - \sum_{k=1}^{m} b_k \psi_k(\tau) \right) d\tau,
\end{aligned}
$$

откуда следует нужное утверждение.

В специальном случае, когда все полюсы $\lambda_k = \infty$ и $\mu_k = 0$, теорема 3 переходит в утверждение о сходимости в среднем обобщенного ряда Фурье

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F_k(1/z),
$$

равномерная сходимость которого была исследована в [7].

ABSTRACT. The paper considers the mean convergence on closed curves of expansions of functions in some systems of rational functions having prescribed zeros.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О разложениях аналитических функций по рациональным функциям с заданным множеством полюсов", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 10, № 1, стр. 21 – 29, 1957.
2. М. М. Джрбашян, "Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами", ДАН СССР, т. 143, № 1, стр. 17 – 20, 1962.
3. Г. Ц. Тумаркин, "Разложение аналитических функций по рациональным функциям с заданным множеством полюсов", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 14, № 1, стр. 9 – 31, 1961.
4. А. А. Китбалян, "Разложения по обобщенным тригонометрическим системам", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 16, № 6, стр. 3 – 24, 1963.
5. P. C. Rosenblum, S. E. Warschawski, "Approximation by polynomials", Lectures on functions of complex variable, The University of Michigan Press, pp. 287 – 302, 1955.
6. С. Я. Альпер, "О средней сходимости аналитических функций класса E_p", Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз, Москва, 1960.
7. Г. С. Кочарян, "Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 11, № 1, стр. 3 – 14, 1958.

6 февраля 1995 Ереванский государственный университет

Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $H^p(\alpha)$ М. М. ДЖРБАШЯНА

Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 2, 1995

В статье получена полная характеристика тех $h \in L^1(T^n)$, для которых теплицев оператор

$$T_h(f)(z_1,...,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)h(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}dm_{2n}(\zeta_1,...,\zeta_n)$$

действует ограниченно в пространствах аналитических в полидиске функций f, для которых

$$\int_{U^n}|f(z_1,...,z_n)|^p(1-|z_1|)^{\alpha_1}(1-|z_2|)^{\alpha_2}\cdots(1-|z_n|)^{\alpha_n}dm_{2n}(z_1,...,z_n) < +\infty.$$

Здесь U^n – единичный полидиск в C^n, dm_{2n} – $2n$-мерная мера Лебега на U^n, а T^n – остов полидиска U^n.

Пусть U^n – единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, а $\mathbf{T}^n$ – его остов, далее, пусть $H(U^n)$ – множество голоморфных в U^n функций. С мультииндексом $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ $(\alpha_j > -1,\ 1 \le j \le n)$ свяжем пространство

$$H^p(\alpha) = H^p(\alpha_1,...\alpha_n) = \\ = \left\{f \in H(U^n): \quad \|f\|_{H^p(\alpha)} = \left(\int_{U^n}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty\right\}.$$

Здесь через $m_{2n}(\zeta)$ обозначена $2n$-мерная мера Лебега на U^n и $(1-|\zeta|)^\alpha = (1-|\zeta_1|)^{\alpha_1}\cdots(1-|\zeta_n|)^{\alpha_n}$. Отметим, что в одномерном случае эти пространства были введены и изучены М. М. Джрбашяном [1], [2].

В данной работе исследована ограниченность теплицевых операторов в пространствах $H^p(\alpha)$. Напомним, что оператором Теплица с символом $h \in L^1(T^n)$ называется интегральный оператор

$$T_h(f)(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\zeta_1, ..., \zeta_n) h(\zeta_1, ..., \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)} dm_{2n}(\zeta_1, ..., \zeta_n) = \\ = P_+(f, h),$$

где P_+ – известный проектор Рисса. Исследуя операторы T_h на пространствах $H^p(\alpha)$, мы естественно рассматриваем их сначала на всюду плотном подмножестве $H^p(\alpha)$, скажем на подмножестве $C_A(U^n) = C(\overline{U}^n) \cap H(U^n)$, или же на множестве всех многочленов. Мы найдем полное описание тех символов h, при которых соответствующий оператор T_h имеет ограниченное расширение всюду на этих пространствах. Отметим, что часть приведенных результатов в одномерном случае была получена первым автором [3], [4]. Однако, поведение операторов $T_h(f)$ существенно отличается от одномерного случая и от случая сферы (см. [5]). Приложения операторов Теплица в различных вопросах анализа широко известны (см. [6], [7]).

Приведем теперь определение интегродифференциального оператора дробного порядка. Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \le j \le n$, $f \in H(U^n)$ и

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

При $z \in U^n$ положим

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1 + k_1) \cdots \Gamma(\alpha_n + 1 + k_n)}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \cdots \Gamma(\alpha_n + 1) \Gamma(k_1 + 1) \cdots \Gamma(k_n + 1)} a_{k_1, ..., k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}.$$

Обозначим через Λ_α^p, $0 < p \le 1, \alpha = (\alpha_1, ... \alpha_n)$ $(\alpha_j > -1, 1 \le j \le n)$ класс функций $f \in H(U^n)$, для которых при $\beta_j > (\alpha_j + 2)/p$, $1 \le j \le n$ выполнена оценка

$$||f||_{\Lambda_\alpha^p} = \sup_{z \in U^n} \left\{ |D^{1+\beta} f(z)| (1 - |z|)^{\beta + 2 - \frac{\alpha+2}{p}} \right\} < +\infty, \quad \beta = (\beta_1, ... \beta_n) \in Z_+^n.$$

Определение. Скажем, что суммируемая на T^n функция h принадлежит классу LR, если коэффициенты Фурье этой функции равны нулю вне множества $Z^n_+ \cup (-Z^n_+)$. Всюду ниже будем пользоваться обозначениями $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Кроме того, всегда будем полагать, что $h \in LR$ и через $H^p(U^n)$ будем обозначать класс Харди в U^n.

§1. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА $T_h(f)$ В ПРОСТРАНСТВАХ $H^p(\alpha)$, $0 < p \le 1$

Наша цель – доказать нижеприведенную теорему.

Теорема 1. *Пусть $0 < p \le 1$ и $h \in LR$. Тогда следующие утверждения равносильны :*

1) $T_h(f)$ ограниченно действует в $H^p(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $1 \le j \le n$.

2) Имеет место разложение $h = h_1 + \overline{h}_2$, где $h_1 \in H^\infty(U^n)$, а $h_2 \in \Lambda^p_\alpha$.

Доказательству этой теоремы предпошлем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где α_j $(1 \le j \le n)$ – неотрицательные целые числа. Тогда*

$$D^\alpha f(z) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}(f(z) z^\alpha)}{\partial z^\alpha}, \quad z = (z_1, ..., z_n),\ \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Доказательство. Очевидно, что при любом $z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$

$$D^\alpha f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k+1)} a_k z^k,$$

где $\Gamma(\alpha_j + k_j + 1)/(\Gamma(\alpha_j + 1)\Gamma(k_j + 1)) = (\alpha_j! + k_j!)/(\alpha_j! \kappa_j!)$ и $\alpha \in Z^n_+$. Далее, вычислим коэффициенты при z^k в разложении функции $\partial^{|\alpha|}(f(z) z^\alpha)/\partial z^\alpha$. Ясно, что

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f(z) z^\alpha)}{\partial z^\alpha} = \sum_{|k|=0}^{+\infty} (k + \alpha) \cdots k a_k z^k.$$

Однако

$$(k_j+\alpha_j)\cdots k_j = \frac{(k_j+\alpha_j)!\alpha_j!}{k_j!\alpha_j!} = \frac{\Gamma(k_j+\alpha_j+1)}{\Gamma(k_j+1)\Gamma(\alpha_j+1)}\alpha_j!.$$

Следовательно

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f(z)z^\alpha)}{\partial z^\alpha} = \alpha_1!\cdots\alpha_n! D^\alpha f(z).$$

Лемма 2. *Если $h \in H^\infty(U^n)$, то*

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_j}h(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_j^{k_j}}\right| \le \frac{const}{(1-|z_1|)^{k_1}\cdots(1-|z_j|)^{k_j}}, \quad 1 \le j \le n.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\Gamma_j = \left\{\zeta_j : \zeta_j = z_j + \eta(1-|z_j|e^{i\theta_j}\right\}, \quad a\zeta_j = \rho_j d\theta_j,\ j=1,2,\ldots,n.$$

Применяя формулу Коши и полагая $\Gamma^j = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_j$, получим

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_j}h(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdot\partial z_j^{k_j}} = \frac{1}{(2\pi i)^j}\int_{\Gamma^j}\frac{h(\zeta_1,\ldots,\zeta_j,z')d\zeta_1\cdots d\zeta_j}{(\zeta_1-z_1)^{k_1+1}\cdots(\zeta_j-z_j)^{k_j+1}}, \quad z'=(z_{j+1},\ldots,z_n).$$

Отсюда следует, что при $1 \le j \le n$

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_j}h(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_j^{k_j}}\right| \le$$

$$\le \frac{C}{(2\pi i)^j}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_j}{(1-|z_1|)^{k_1}\cdots(1-|z_j|)^{k_j}} = \frac{\text{const}}{(1-|z_1|)^{k_1}\cdots(1-|z_j|)^{k_j}}.$$

Лемма 3. $\Lambda_\alpha^p \subseteq H^\infty(U^n)$.

Доказательство. Пусть $h \in \Lambda_\alpha^p$. Тогда

$$|D^{\beta+1}h(z)| \le \frac{\text{const}}{(1-|z|)\beta+2-(\alpha+2)/p},$$

если только $\beta_j > (\alpha_j+2)/p$, $1 \le j \le n$ и $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Используя определение $D^{\beta+1}$, получим

$$h(re^{i\theta}) = c(\beta+1)\int_0^1\cdots\int_0^1(1-t)^\beta D^{\beta+1}h(tre^{i\theta})dt, \quad r=(r_1,\ldots,r_n)$$

(здесь и в дальнейшем через $c(\cdots)$ или $C(\cdots)$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от $(\cdots)$). Так как $2-(\alpha+2)/p<1$, $1\le j\le n$, из последнего равенства следует, что

$$|h(re^{i\theta})|\le c(\beta+1)\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{(1-t)^\beta dt}{(1-rt)^{\beta+2-(\alpha+2)/p}}\le \mathrm{const}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $T_h(f)$ действует ограниченно в пространстве $H^p(\alpha)$. Тогда $||T_h(f)||_{H^p_\alpha}\le c(p)||f||_{H^p_\alpha}$. Следовательно, $T_h(f)(0)$ – непрерывный линейный функционал на $H^p(\alpha)$. По теореме 6 из работы [7] существует функция $g\in\Lambda^p_\alpha$ такая, что

$$T_h(f)(0)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}dm_n(\zeta).$$

Но с другой стороны

$$T_h(f)(0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f(\zeta)h(\zeta)dm_n(\zeta)$$

для любой функции $f\in H^p(\alpha)$. Взяв $f(\zeta)=\zeta_1^{k_1}\cdots\zeta_n^{k_n}$, получим

$$c_{k_1,\dots,k_n}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\zeta^k h(\zeta)dm_n(\zeta),\qquad C_{k_1,\dots,k_n}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\zeta^k\overline{g(\zeta)}dm_n(\zeta).$$

Отсюда следует, что $h(\zeta)-\overline{g(\zeta)}\in H^1(U^n)$ и, тем самым, $h(\zeta)=\overline{g(\zeta)}+h_1(\zeta)$, где $h_2\equiv g$. Таким образом, $h=h_1+\overline{h}_2$, где $h_1\in H^1(U^n)$, $h_2\in\Lambda^p_\alpha$. Ниже мы докажем, что в действительности $h_1\in H^\infty(U^n)$. Ясно, что $T_h(f)(z)=T_{h_1}(f)(z)+T_{\overline{h}_2}(f)(z)$, $z\in U^n$. Докажем, что при $h_2\in\Lambda^p_\alpha$ оператор

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta \tag{1}$$

ограниченный. Так как $f\in H^p(\alpha)$, то применяя теорему М. М. Джрбашяна придем к представлению

$$f(z)=\int_{U^n}D_m(\zeta,z)f(\zeta)dm_{2n}(\zeta), \tag{2}$$

где $D_m(\zeta, z)$ – многомерное ядро М. М. Джрбашяна. Подставив (2) в (1), в силу теоремы Фубини можно поменять порядок интегрирования. Тем самым

$$T_{h_2}(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{m+1}{\pi^n}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^m f(\zeta)\int_{T^n}\frac{\overline{h_2(t)}dt}{(t-z)(1-\overline{\zeta}t)}dm_{2n}(\zeta)$$

(здесь и далее предполагаем, что числа m и m_j $(1 \le j \le n)$ достаточно большие). Вычислим последний интеграл. Ввиду того, что $d\overline{t_j} = -ie^{-i\varphi_j}d\varphi_j$, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{\overline{h_2(t)}dt}{(t-z)(1-\overline{\zeta}t)}dm_{2n}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{\overline{h_2(t)}dt}{(t-z)(1-\overline{\zeta}t)}dm_{2n}(\zeta) =$$
$$= \frac{1}{(m+1)!}\overline{\frac{\partial^{|m+1|}}{\partial\zeta^{m+1}}\left(\frac{h_3(\zeta)}{1-\zeta\overline{z}}\right)},$$

где $h_3(\zeta) = h_2(\zeta)\zeta^{m+1}$. Используя многомерный аналог теоремы Лейбница, можно записать

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z) =$$
$$= \frac{1}{m!\pi^n}\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{m_1+1,\dots,m_n+1} C_{m_1+1}^{k_1}\cdots C_{m_n+1}^{k_n}\int_{U^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^m f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^{m+2-k}}\overline{\frac{\partial^{|k|}h_3(\zeta)}{\partial\zeta^k}}dm_{2n}(\zeta).$$

Обозначив

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z) = \int_{U^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^m f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^{m+2-k}}\overline{\frac{\partial^{|k|}h_3(\zeta)}{\partial\zeta^k}}dm_{2n}(\zeta), \quad 0 \le k_j \le m_j+1,\ 1 \le j \le n,$$

достаточно оценить норму $||T_{\overline{h}_2}(f)||_{H^p(\alpha)}$ $(0 \le k_j \le m_j+1,\ 1 \le j \le n)$. Учитывая, что $0 < p \le 1$, получим

$$\int_{U^n}|T^k_{\overline{h}_2}f(z)(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \le c(m,\pi)\sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{+\infty}\sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{2^{s_1}-1}\sum_{l_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\cdots\sum_{l_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1}\times$$
$$\times\int_{U^n}\left|\int_{\Delta_{s,l}}\frac{(1-|\zeta|^2)^m}{(1-\overline{\zeta}z)^{m+2+k}}f(\zeta)\overline{\frac{\partial^{|k|}h_3(\zeta)}{\partial\zeta^k}}dm_{2n}(\zeta)\right|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \equiv \mathcal{J},$$

где

$$\mathcal{J} \le c(m,\pi)\sum_s\sum l_1\cdots\sum_{l_n}\max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{s,l}}\left\{(1-|\zeta|^2)^{mp}|f(\zeta)|^p\mathcal{J}_{s,l}\right\},$$

$$\mathcal{J}_{s,l} = \int_{U^n}\left(\int_{\Delta_{s,l}}\frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{m+2-k}}\right)^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z).$$

Для оценки последнего интеграла достаточно получить оценку лишь для одного из вполне однотипных факторов его представления $\mathcal{J}_{s,l} = \mathcal{J}_{s_1,l_1}\times\cdots\times\mathcal{J}_{s_n,l_n}$.

При этом, для простоты изложения этот фактор будем записывать без вторых индексов – как $\mathcal{J}_{s,l}$. Используя определение прямоугольников $\Delta_{s,l}$ из [7], можно записать

$$\mathcal{J}_{s,l} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\alpha_{s,l}} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta + \int_0^1 \int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta +$$
$$+ \int_0^1 \int_{\alpha_{s,l+1}}^{\pi} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta = I^1 + I^2 + I^3,$$

где

$$I_{s,l} = \left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}} \int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi} z|^{m+2-k}} \right)^p$$

при $\rho_s = 1 - 1/2^s$, $\alpha_{s,l} = \pi e/2^s$, $s = 0, 1, \ldots$ и $-2^s \leq e \leq 2^s$. Оценим интегралы $I^{1,2,3}$ по отдельности. Для этого положим

$$p(m_i + 2 - k_i) - \alpha_i > 2 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, j,$$
$$p(m_i + 2 - k_i) - \alpha_i < 2 \quad \text{при} \quad i = j+1, \ldots, \nu,$$
$$p(m_i + 2 - k_i) - \alpha_i = 2 \quad \text{при} \quad i = \nu+1, \ldots, n.$$

Во первых, пользуясь очевидными неравенствами

$$|1 - z\rho e^{-i\varphi}| \geq \frac{1}{4}|1 - z\rho_{s+1} e^{-i\varphi}|, \quad s \geq 2, \rho_s \leq \rho \leq \rho_{s+1}, |z| \geq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\rho e^{i\theta}|^\lambda} \leq \frac{C(\lambda)}{(1-r\rho)^{\lambda-1}} \quad (\lambda > 1)$$

и леммой 2 из [7], для I^1 нетрудно получить оценку

$$I^1 \leq \frac{C(p)|\Lambda_{s,l}|^p}{(1-\rho_{s+1})^{p(m+2-k)-\alpha-2}}.$$

Те же рассуждения приводят к оценке

$$I^3 \leq \frac{C(p)|\Lambda_{s,l}|^p}{(1-\rho_{s+1})^{p(m+2-k)-\alpha-2}}, \quad 1 \leq i \leq j. \; .$$

Для I^2 при $1 \leq i \leq j$ очевидно имеем

$$I^2 \leq C(\alpha_{s,l+1} - \alpha_{s,l})|\Lambda_{s,l}|^p \int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r dr}{(1-\rho_{s+1} r)^{(m+2-k)p}}.$$

Далее, учитывая, что $\alpha_{s,l+1} - \alpha_{s,l} = 2\pi\,(\rho_{s+1} - \rho_s)$, в силу леммы 2 получим

$$I^2 \leq \frac{C(p)|\Lambda_{s,l}|^p}{(1-\rho_{s+1})^{p(m+2-k)-\alpha-2}}, \quad 1 \leq i \leq j.$$

Таким образом, при $i = 1, 2, ..., j$

$$\mathcal{J}^j_{s,l} \leq \frac{C_1(p)|\Lambda_{s_1,l_1}|^p \cdots |\Lambda_{s_j,l_j}|^p}{\prod_{i=1}^j (1-\rho_{s_i+1})^{p(m_i+2-k_i)-\alpha_i-2}}. \tag{5}$$

Пользуясь теми же обозначениями, оценим $\mathcal{J}_{s,l}$ при $i = j+1, ..., \nu$. Ясно, что

$$\mathcal{J}_{s,l} = \int_{U^n}\left(\int_{\Lambda_{s,l}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\overline{\zeta}z|^{m+2-k}}\right)^p (1-r)^\alpha dm_2(z) \leq |\Lambda_{s,l}|^p \int_U \sup_{\zeta\in\overline{\Lambda}_{s,l}} \frac{(1-r)^\alpha dm_2(z)}{|1-\overline{\zeta}z|^{(m+2-k)p}}.$$

Имея в виду, что $i = j+1, ..., \nu$, получим

$$\mathcal{J}_{s,l} \leq \int_0^1 |\Lambda_{s,l}|^p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r(1-r)^\alpha dr d\theta}{|1-\overline{\zeta}_{s,l}z|^{(m+2-k)p}} \leq C_2(p)|\Lambda_{s,l}|^p.$$

Отсюда

$$\mathcal{J}^\nu_{s,l} \leq C_2(p)|\Lambda_{s_{j+1},l_{j+1}}|^p \cdots |\Lambda_{s_j,l_j}|^p. \tag{6}$$

Наконец, оценим $\mathcal{J}_{s,l}$ при $\nu+1 \leq i \leq n$. Для этого, как и выше, начнем с оценки $I_{s,l}$ при $i = 1, 2, ..., j$. Воспользовавшись леммой 2 работы [7], получим

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta \leq C_3(p)|\Lambda_{s,l}|^p \int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r dr}{(1-\rho_{s+1}r)^{(m+2-k)p}} \leq$$
$$\leq C_3(p)|\Lambda_{s,l}|^p \int_0^1 \frac{r dr}{1-\rho_{s+1}r}.$$

Следовательно

$$\mathcal{J}^n_{s,l} \leq |\Lambda_{s_{\nu+1},l_{\nu+1}}|^p \cdots |\Lambda_{s_m,l_n}|^p \log\frac{1}{1-\rho_{s_{\nu+1}}} \cdots \log\frac{1}{1-\rho_n}. \tag{7}$$

Объединяя оценки (5) – (7) заключаем, что

$$\mathcal{J}_{s,l} \leq \frac{C(p)|\Lambda_{s_1,l_1}|^p \cdots |\Lambda_{s_m,l_n}|^p}{\prod_{i=1} j(1-\rho_{s_j+1})^{p(m_j+2-k_j)-\alpha_j-2}} \prod_{i=\nu+1}^n \log\frac{1}{1-\rho_{s_i+1}}. \tag{8}$$

Перейдем теперь к оценке величины $\partial^{|k|}h_3(z)/\partial z^k$. Так как $h_2 \in \Lambda^p_\alpha$, то для достаточно больших m_i, $1 \leq i \leq n$

$$|D^{m+1}h_2(z)| \leq \frac{\mathrm{const}}{(1-|z|)^{m+2-(\alpha+2)/p}}.$$

Воспользовавшись леммами 1 и 2 и учитывая, что $1 \leq i \leq j$, $\nu+1 \leq i \leq n$, интегрированием последнего неравенства по $z_1, ..., z_j, z_{\nu+1}, ..., z_n$ (по радиусу) получим

$$\left|\frac{\partial^{|k|}h_3(z)}{\partial z^k}\right| \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)}{\prod_{i=1}^{j}(1-|z_i|)^{k_i}\prod_{i=j+1}^{\nu}(1-|z_i|)^{m_i+2-(\alpha_i+2)/p}\prod_{i=\nu+1}^{n}(1-|z_i|)^{k_i+1-(\alpha_i+2)/p}}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует оценка

$$\mathcal{J} \leq \tilde{C}(p)\sum_{s_1\dots s_n}\sum_{l_1\dots l_n}\max_{\zeta\in\overline{\Lambda}_{s,l}}\Big\{|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^{\alpha+2}\times$$

$$\times(1-|\zeta_{\nu+1}|)^{(m_{\nu+1}-k_{\nu+1}+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_{\nu+1}|}\cdots(1-|\zeta_n|)^{(m_n-k_n+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_n|}\Big\}.$$

Оценим величину $(1-|\zeta_n|)^{(m_n-k_n+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_n|}$ при $i=\nu+1,...,n$. По условию $(m_i-k_i+2)p=\alpha_i+2$ при $i=\nu+1,,...,n$. Отсюда следует, что $(m_i-k_i+2)p=$ $=\alpha_i+2-p>1-p\geq 0$, т. е. при $\nu+1\leq i\leq n$ всегда $(m_i-k_i+1)p>0$. Поэтому

$$\sup_{\zeta_i}\left\{(1-|\zeta_i|)^{(m_i-k_i+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_i|}\right\}<\text{const}.$$

Тем самым, пользуясь леммой 4 из [7] получим

$$\int_{U^n}|T^k_{\overline{h}_2}(f)(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z)\leq\tilde{C}(p)\int_{U^n}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha dm_{2n}(\zeta)=$$

$$=\tilde{C}(p)\|f\|^p_{H^p(\alpha)}<+\infty.$$

Поскольку $T_{\overline{h}_2}(f)$ – конечная сумма от $T^k_{\overline{h}_2}(f)$, очевидно $T_{\overline{h}_2}(f)\in H^p(\alpha)$.

Теперь покажем, что $h_1\in H^\infty(U^n)$. Для этого заметим, что

$$T_{h_1}(f)(z)=f(z)h_1(z)\quad \text{и}\quad \|T_{h_1}(f)\|_{H^p(\alpha)}\leq\|T_h(f)\|_{H^p(\alpha)}+\|T_{\overline{h}_2}(f)\|_{H^p(\alpha)}.$$

Далее, положим

$$f_r(z)=\frac{C(r)}{(1-z)^k},\quad r=(r_1,...,r_n),\ r_i\in(0,1)\,(1\leq i\leq n),\ k=(k_1,...,k_n)\in Z^n_+$$

и выберем k_j таким образом, чтобы $\|f_r\|_{H^p(\alpha)}\sim$ const. Тогда нетрудно установить, что

$$C(r)=(1-r)^{k-(\alpha+2)/p}\quad \text{и}\quad \int_{U^n}|f_r(z)|^p|h_1(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}\leq C(p).$$

Взяв

$$\Lambda_{l_j} = \left\{ z_j : \quad |\arg z_j| < \frac{1-r_j}{2}, \frac{3r_j - 1}{2} < |z_j| < \frac{1+r_j}{2} \right\}, \quad \Lambda_l = \Lambda_{l_1} \times \cdots \Lambda_{l_n},$$

получим

$$\int_{\Lambda_l} |f_r(z)|^p |h_1(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \leq \int_{U^n} |f_r(z)|^p |h_1(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z).$$

На Λ_l имеет место оценка $|f_r(z)| \geq C(r)(1-r)^{-k}$. Поэтому

$$\frac{C_0}{(1-r)^2} \int_{\Lambda_l} |h_1(z)|^p dm_{2n}(z) \leq \text{const}.$$

Далее, функция $g(z) = |h_1(z)|^p$ является n-субгармонической. Следовательно

$$g(r) \leq \frac{C}{\pi^n (1-r)2} \int_{K(r)} |h_1(z)|^p dm_{2n} \leq \text{const},$$

где $K(r)$ – полидиск с центром в $r = (r_1, ..., r_n)$. Отсюда вытекает, что $|h_1(r)| \leq$ $\leq$ const. Взяв вместо $f_r(z)$ функцию $f_r(e^{i\theta} z)$, получим $|h_1(e^{i\theta})| \leq$ const, т. е. $h_1 \in H^\infty(U^n)$.

Обратно, пусть $h = h_1 + \overline{h}_2$, где $h_1 \in H^\infty(U^n)$, $h_2 \in \Lambda^p_\alpha$. Тогда $T_h(f)(z) =$ $= T_{h_1}(f)(z) + T_{h_2}(f)(z)$, $z \in U^n$. Ограниченность $T_{\overline{h}_2}(f)$ доказана. С другой стороны, $T_{\overline{h}_1}(f)(z) = h_1(z) f(z)$. Тем самым

$$\|T_{h_1}(f)\|^p_{H^p(\alpha)} = \int_{U^n} |f(z) h_1(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \leq$$
$$\leq C(p) \int_{U^n} |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) = C(p) \|f\|^p_{H^p(\alpha)} < +\infty.$$

Следовательно

$$\|T_h(f)\|_{H^p(\alpha)} \leq \|T_{h_1}(f)\|_{H^p(\alpha)} + \|T_{\overline{h}_2}(f)\|_{H^p(\alpha)} \leq \bar{C}(p) \|f\|^p_{H^p(\alpha)},$$

и теорема доказана.

ABSTRACT. The paper establishes a complete characteristic of those $h \in L^1(T^n)$ for which the Toeplitz operator

$$T_h(f)(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\zeta_1, ..., \zeta_n) h(\zeta_1, ..., \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)} dm_{2n}(\zeta_1, ..., \zeta_n),$$

is a bounded operator in some spaces of functions f analytic in the polydisk, for which

$$\int_{U^n} |f(z_1, ..., z_n)|^p (1 - |z_1|)^{\alpha_1} (1 - |z_2|)^{\alpha_2} \cdots (1 - |z_n|)^{\alpha_n} dm_{2n}(z_1, ..., z_n) < +\infty.$$

Here U^n is the unit polydisk of C^n, dm_{2n} is the $2n$-dimensional Lebesgue measure in U^n and T^n-is the distinguished boundary of the polydisk U^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении функций, мероморфных в круге", ДАН Армянской ССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Ин-та математики и механики АН Армянской ССР, Вып. 2, стр. 3 – 30, 1948.
3. Ф. А. Шамоян, "Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций", Изв. АН Армянской ССР, Математика, т. 8, № 6, стр. 474 – 490, 1973.
4. Ф. А. Шамоян, "Теплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций", ДАН Армянской ССР, т. 76, № 3, стр. 109 – 113, 1983.
5. B. Joericke, "Multidimensional analog of Privalov's theorem", Math. Nachrichten, v. 107, pp. 222 – 233, 1982.
6. J. P. Kahane, "Best approximation in $L^1(T)$", Bull. Amer. Math. Soc., v. 80, № 5, pp. 788 – 804, 1974.
7. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и вопросы представимости в некоторых анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. мат. журнал, т. 31, № 2, 1990.

6 февраля 1995

Брянский государственный университет,
Ереванский государственный университет

Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. О. Карапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 2, 1995

Весовые $\overline{\partial}$-интегральные представления гладких функций, начиная с семидесятых годов, играют важную роль в многомерном комплексном анализе и имеют многочисленные приложения. В частности, такие представления эффективно применяются для получения явных решений $\overline{\partial}$-уравнения. В исследовании автора, частично опубликованном в [1], получены новые весовые $\overline{\partial}$-интегральные представления для функций, гладких в единичном шаре $\mathbf{B}_n$ и в пространстве $\mathbf{C}^n$. В связи с этим исследованием оказалось необходимым установить ряд тождеств для сумм биномиальных коэффициентов и функций Эйлера. Поскольку эти результаты представляют самостоятельный интерес, мы решили представить эти тождества с их полными доказательствами в данном кратком сообщении.

Предварительно введем некоторые обозначения. Через C_n^k обозначим биномиальные коэффициенты $n!/k!(n-k)!$, а через Γ, B – общеизвестные функции Эйлера. Если функция $f(x)$, $x \geq 0$, измерима и принадлежит $L^1[0,l]$ для любого $l > 0$, то при $p = 1, 2, ...$ полагаем

$$D^{-p}f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x f(t)(x-t)^{p-1}dt = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 ... \int_0^{t_{p-1}} f(\tau)\, d\tau,$$

$$D^{-0}f(x) \equiv f(x), \quad x > 0.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{D^{-p}f(x)\right\} \equiv f(x), \quad x > 0$$

для любой непрерывной функции $f(x)$, $x \geq 0$. При $p = 0, 1, 2, \dots$ и $\gamma > -1$ справедливо следующее полезное соотношение :

$$D^{-p}\left\{\frac{x^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\right\} = \frac{x^{\gamma+p}}{\Gamma(\gamma+p+1)}, \quad x > 0.$$

Предложение 1. *Если* $n \geq 1$ *и* $\alpha > -1$, *то*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+\alpha+1}C_{n-1}^k = B(n, \alpha+1). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначив левую сторону равенства (1) через A, рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+\alpha+1}C_{n-1}^k x^{k+\alpha+1}, \quad x \geq 0.$$

Очевидно $\varphi(1) = A$, $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{k+\alpha} = x^\alpha(1-x)^{n-1}, \quad x > 0.$$

Тем самым

$$A = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 t^\alpha(1-t)^{n-1}dt = B(n, \alpha+1).$$

Замечание 1. По-видимому, формула (1) известна. Тем не менее, мы сочли уместным доказать ее. Отметим, что при $\alpha = 0$ тождество (1) переходит в

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} = 1. \tag{2}$$

Предложение 2. *Если* $n \geq 1$ *и* $0 \leq i + \nu \leq n - 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1-i-\nu} C_n^{k+i+\nu+1} C_{k+i}^i (-1)^k = C_{n-1-i}^\nu. \tag{3}$$

Доказательство. Обозначив левую сторону (3) через A, при $x \geq 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{n!}{i!(n-1-i-\nu)!} \sum_{k=0}^{n-1-i-\nu} C_{n-1-i-\nu}^{k} \frac{(-1)^k x^{k+i+\nu+1}}{(k+i+1)(k+i+2)\cdots(k+i+\nu+1)}.$$

Легко проверить, что $\varphi(1) = A$ и справедливы равенства

$$\varphi^{(j)}(0) = 0 \quad (0 \leq j \leq \nu), \qquad \varphi^{(\nu+1)}(x) = \frac{n!}{i!(n-1-i-\nu)!} x^i (1-x)^{n-1-i-\nu}. \quad (4)$$

Тем самым, интегрируя по частям и используя (4), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^x \varphi^{(\nu+1)}(t)(x-t)^\nu dt, \quad x > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A = \varphi(1) = &\frac{1}{\nu!} \int_0^1 \varphi^{(\nu+1)}(t)(1-t)^\nu dt = \\ &= \frac{n!}{\nu! i!(n-1-i-\nu)!} \int_0^1 t^i (1-t)^{n-1-i-\nu} (1-t)^\nu dt = \\ &= \frac{n!}{\nu! i!(n-1-i-\nu)!} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i)}{\Gamma(n+1)} = C_{n-1-i}^{\nu}. \end{aligned}$$

Замечание 2. В случае $i+\nu = n-1$ равенство (3) тривиально. Взяв в (3) $i+\nu = 0$ (т. е. $i = \nu = 0$), снова приходим к (2).

Предложение 3. *Если $n \geq 1$, $m \geq 0$ и $0 \leq \nu \leq \min\{m, n\}$, то*

$$\sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j C_{n+m-\nu}^{m-j} = C_{n+m}^{m}. \quad (5)$$

Доказательство получается сравнением коэффициентов при x^m в обеих частях очевидного тождества $(1+x)^\nu (1+x)^{n+m-\nu} \equiv (1+x)^{n+m}$.

Предложение 4. *Если $n \geq 1$, $0 \leq \nu \leq m \leq n-1$ и $\alpha > -1$, то*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k C_n^{n-m+k+\nu} B(\alpha+1, n-m+k) \frac{\Gamma(n+1+\alpha+k)}{\Gamma(k+1)} = \\ &\qquad = \Gamma(n+1+\alpha) C_m^\nu B(n-m, m-\nu+\alpha+1). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. После деления на $\Gamma(\alpha+1)$ обе части (6) превращаются в полиномы от α порядка $\le m$. Следовательно, достаточно установить (6) только для целых $\alpha > \nu$. Далее, обозначим левую сторону (6) через A и при $x \ge 0$ введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) =$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} \sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k C_{m-\nu}^k B(\alpha+1, n-m+k) \frac{\Gamma(n+1+\alpha+k)}{\Gamma(n-m+k+\nu+1)} x^{n-m+k+\nu}.$$

Легко видеть, что $A = \varphi(1)$. Кроме того

$$D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} \sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k C_{m-\nu}^k B(\alpha+1, n-m+k) x^{n+\alpha+k}, \quad x > 0.$$

Напомним, что

$$B(\alpha+1, n-m+k) = \int_0^1 (1-t)^\alpha t^{n-1-m+k} dt.$$

Следовательно, поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} x^{n+\alpha} \int_0^1 (1-t)^\alpha t^{n-1-m} (1-xt)^{m-\nu} dt, \quad x > 0.$$

Отсюда заменой переменной $xt \longmapsto t$ приходим к равенству

$$D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} x^m D^{-(\alpha+1)} g(x), \quad x > 0,$$

где $g(t) = (1-t)^{m-\nu} t^{n-1-m}, \quad t \ge 0$. Отсюда следует, что при $x \ge 0$

$$\varphi(x) = \frac{d^{\alpha+m-\nu}}{dx^{\alpha+m-\nu}} \left\{ D^{-(\alpha+m-\nu)} \varphi(x) \right\} =$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} \sum_{j=0}^{\alpha+m-\nu} C_{\alpha+m-\nu}^j \frac{d^j}{dx^j} \left\{ D^{-(\alpha+1)} g(x) \right\} \frac{d^{\alpha+m-\nu-j}}{dx^{\alpha+m-\nu-j}} x^m. \quad (7)$$

Отметим далее, что

$$\frac{d^{\alpha+m-\nu-j}}{dx^{\alpha+m-\nu-j}} x^m \equiv \begin{cases} 0, & \text{при} \quad 0 \le j < \alpha - \nu, \\ \dfrac{\Gamma(m+1) x^{j-(\alpha-\nu)}}{\Gamma(j-(\alpha-\nu)+1)}, & \text{при} \quad \alpha - \nu \le j \le \alpha + m - \nu, \end{cases} \quad (8)$$

а также

$$\frac{d^j}{dx^j}\left\{D^{-(\alpha+1)}g(x)\right\}\Big|_{x=1}=0, \quad \text{при} \quad \alpha<j\le\alpha+m-\nu. \tag{9}$$

Учитывая (8) и (9), из (7) получим

$$\varphi(1)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)}\sum_{j=\alpha-\nu}^{\alpha}C^j_{\alpha+m-\nu}\left\{D^{-(\alpha+1-j)}g(x)\right\}\Big|_{x=1}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(j-\alpha+\nu+1)}.$$

Однако, легко видеть, что

$$\left\{D^{-(\alpha+1-j)}g(x)\right\}\Big|_{x=1}=\frac{B(m-\nu+\alpha-j+1,\,n-m)}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi(1)=&\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)}\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)\Gamma(m+1)\times\\&\times\sum_{j=\alpha-\nu}^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(n+1+\alpha-\nu-j)\Gamma(j-\alpha+\nu+1)}=\\=&\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^\nu_m\times\\&\times\sum_{j=\alpha-\nu}^{\alpha}\frac{C^{\alpha-j}_\nu}{\Gamma(j+1)\Gamma(n+1+\alpha-\nu-j)}.\end{aligned}$$

Заменой индекса суммирования $\alpha-j\longmapsto j$ отсюда получим

$$\begin{aligned}\varphi(1)=&\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^\nu_m\times\\&\times\sum_{j=0}^{\nu}\frac{C^j_\nu}{\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(n+1+j-\nu)}=\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^\nu_m}{\Gamma(n+1+\alpha-\nu)}\sum_{j=0}^{\nu}C^j_\nu C^{\alpha-j}_{n+\alpha-\nu}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись (5) можно вычислить последнюю сумму и получить

$$\begin{aligned}A=\varphi(1)=&\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^\nu_m}{\Gamma(n+1+\alpha-\nu)}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}=\\=&\Gamma(n+1+\alpha)C^\nu_m B(\alpha+m-\nu+1,\,n-m).\end{aligned}$$

Замечание 3. Тождество (6) может быть записано также в виде

$$\sum_{k=0}^{m-\nu}(-1)^k C_n^{n-m+k+\nu}\frac{B(\alpha+1,\,n-m+k)}{B(\alpha+n,\,k+1)}=(n+\alpha)C^\nu_m B(n-m,\,m-\nu+\alpha+1). \tag{6'}$$

Замечание 4. Если $m = \nu$, то тождество (6) тривиально. Взяв же в (6) $\nu = 0$, $m = n - 1$, приходим к следующей формуле :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1}\frac{B(\alpha+1, k+1)}{B(\alpha+n, k+1)} = 1.$$

В частном случае $\alpha = 0$ последняя формула принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} C_{n+k}^{k+1} = 1.$$

Предложение 5. *Если* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $\alpha > -1$, *то*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+2+p)}\sum_{k=0}^{p}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\Gamma(p+1)(\alpha+1)}.$$

Доказательство. Обозначив левую часть требуемого равенства через A, будем иметь

$$A = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(p-k+1)}{\Gamma(\alpha+2+p)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \int_0^1 t^{\alpha+k}(1-t)^{p-k}dt.$$

Далее, заменой порядка суммирования и интегрирования получим

$$A = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^p \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left(\frac{t}{1-t}\right)^k dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^1 t^{\alpha}dt = \frac{1}{\Gamma(p+1)(\alpha+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Karapetyan, "Integral representations of smooth functions in C^n" in : Theory of Functions and Applications, Collection of papers dedicated to the memory of M. M. Djrbashian, pp. 75 – 78, Louys, Yerevan, 1995.

6 февраля 1995

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Глубокоуважаемая редакция.

Считаю своим долгом уведомить Вас о некоторых оплошностях и опечатках, нашедших место в моей статье "О представлениях некоторых классов функций, субгармонических в единичном круге и в полуплоскости", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 3 – 15, 1994.

После исправления условие (1.4) должно иметь вид

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) + \iint\limits_{|\zeta|<1/2} \log\frac{1}{|\zeta|} d\nu(\zeta) < \infty, \tag{1.4}$$

т. е. в левой стороне необходимо добавить слагаемое

$$\iint\limits_{|\zeta|<1/2} \log\frac{1}{|\zeta|} d\nu(\zeta).$$

Присутствие этого слагаемого существенно не влияет на доказательства. Далее, в условии 3), следующем за формулой (3.6), а также в лемме 3.1 $\lim\limits_{R\to+\infty} Ru(iR)$ должно быть заменено на $\limsup\limits_{R\to+\infty} Ru(iR)$. После (3.6) должно быть добавлено условие 3′) $\limsup\limits_{R\to+\infty} Ru(iR)=0$.

Все результаты статьи после указанных изменений остаются справедливы.

К. Л. Аветисян

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 30 НОМЕР 2 1995

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Страницы

CONTENTS

VOLUME 30 NUMBER 2 1995

JOURNAL OF CONTEMPORARY MATHEMATICAL ANALYSIS (ARMENIAN ACADEMY OF SCIENCES)